Així, l'única solució del subsistema (9_{ij}) és la trivial.

Subsistema 10

Partim les matrius X_2^3, Y_2^3 i Z_1^3 en blocs, segons els blocs de les matrius A_2, A_3, B_2, C_1 i C_2,

$$A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}.$$

El subsistema (10) descompon llavors en $t \times s$ subsistemes independents de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^3 X - X N_j^2 + B_i^2 Y - Z C_j^1 &= 0 \\ C_i^2 Z &= 0 \\ C_i^2 X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10_{ij})$$

$N_i^3 \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$, $N_j^2 \in \mathcal{M}_{l_i}(\mathbb{C})$, $B_i^2 \in \mathcal{M}_{m_i \times 1}(\mathbb{C})$, $C_j^1 \in \mathcal{M}_{1 \times l_j}(\mathbb{C})$ i $C_i^2 \in \mathcal{M}_{1 \times m_i}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema, obtenim que X, Y, Z són solucions d'aquest subsistema si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{l_j} \otimes N_i^3 - N_j^{2\,t} \otimes I_{m_i} & I_{l_j} \otimes B_i^2 & -C_j^{1\,t} \otimes I_{m_i} \\ 0 & 0 & I_1 \otimes C_i^2 \\ I_{l_j} \otimes C_i^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(10_{ij})$ € $\mathcal{M}_{(l_j m_i + l_j + 1) \times (l_j m_i + l_j + m_i)}(\mathbb{C})$ ala matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(10_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{l_j} \otimes N_i^3 - N_j^{2\,t} \otimes I_{m_i} & I_{l_j} \otimes B_i^2 & -C_j^{1\,t} \otimes I_{m_i} \\ 0 & 0 & I_1 \otimes C_i^2 \\ I_{l_j} \otimes C_i^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^3 & & & & B_i^2 & & & & I_{m_i} \\ -I_{m_i} & N_i^3 & & & & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & -I_{m_i} & N_i^3 & & & & B_i^2 & \\ & & & & & & & & C_i^2 \\ C_i^2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & C_i^2 & & & & & \end{pmatrix}.$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(10_{ij})$ de solucions del subsistema (10_{ij}) és

$$\dim \mathbf{S}(10_{ij}) = l_j m_i + l_j + m_i - \operatorname{rang} \mathbf{M}(10_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(10_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\mathbf{M}(10_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{m_i} & & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & I_{m_i} & & \vdots & & \vdots \\ & & & I_{l_j} & \vdots & & \vdots \\ & & & & I_1 & 0\dots & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(10_{ij}) = l_j m_i + l_j + 1$$

i, per tant,

$$\dim \mathbf{S}(10_{ij}) = m_i - 1.$$

Les matrius X, Y i Z tals que $\begin{pmatrix} Z & | & X \\ - & \cdot & - \\ 0 & | & Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(m_i+1)\times(l_j+1)}(\mathbb{C})$ és una matriu Toeplitz trapezoidal amb la primera fila 0 i el primer element diagonal no nul en el lloc (2,1), és a dir,

$$\begin{pmatrix} Z & | & X \\ - & \cdot & - \\ 0 & | & Y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & x_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m_i-l_j} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m_i-1} & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & x_{m_i-1} & \cdots & \cdots & x_{m_i-l_j} \end{array}\right) \quad \text{si } m_i > l_j, \quad \text{i}$$

$$\begin{pmatrix} Z & | & X \\ - & \cdot & - \\ 0 & | & Y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & & & & & & & \vdots \\ & x_1 & 0 & & & & & & \\ \vdots & & x_1 & \ddots & & & & & \vdots \\ x_{m_i-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ x_{m_i-1} & x_{m_i-2} & \cdots & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & x_{m_i-1} & x_{m_i-2} & \cdots & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \quad \text{si } m_i \leq l_j$$

són totes solucions del subsistema, com pot ser directament comprovat. De fet, només cal temi en compte que

$$N_i^3 X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m_i-2} & \cdots & x_{m_i-l_j-1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \text{si } m_i > l_j, \ \text{i}$$

$$N_i^3 X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ x_{m_i-3} & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$XN_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & x_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & x_2 & x_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{m_i-2} & \cdots & \cdots & x_{m_i-l_j-2} \end{pmatrix} \text{ si } m_i > l_j \text{ i}$$

$$XN_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & \vdots \\ 0 & x_1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & x_2 & x_1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & x_{m_i-2} & \cdots & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_i^2 Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ x_{m_i-1} & \cdots & x_{m_i-l_j} \end{pmatrix} \text{ si } m_i > l_j \text{ i}$$

$$B_i^2 Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_{m_i-1} & \cdots & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i \leq l_j,$$

$$C_i^2 Z = (\,0\,), \; C_i^2 X = (\,0 \quad \cdots \quad 0\,), \; ZC_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Com tots els paràmetres estan en direccions diferents, i el seu nombre és igual a la dimensió de l'espai de solucions, concloem que aquestes són totes les solucions del subsistema.

El nombre de paràmetres que hi ha en la solució del sistema (10) és, doncs,

$$\sum_{1 \leq i \leq t} (m_i - 1).$$

Subsistema 11

Partim les matrius X_3^3, Y_3^3 i Z_3^3 en blocs, segons els blocs de les matrius A_3, B_2 i C_2,

$$A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}.$$

El subsistema (11) descompon en $t \times t$ subsistemes independents, de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^3 X - X N_j^3 + B_i^2 Y - Z C_j^2 &= 0 \\ C_i^2 X &= 0 \\ Y B_j^2 &= 0 \\ C_i^2 Z &= 0 \\ X B_j^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11_{ij})$$

amb $N_i^3 \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$, $N_j^3 \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$, $B_i^2 \in \mathcal{M}_{m_i \times 1}(\mathbb{C})$ i $C_j^2 \in \mathcal{M}_{1 \times m_i}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema, obtenim que X, Y", Z són solucions d'aquest subsistema si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{m_j} \otimes N_i^3 - {N_j^3}^t \otimes I_{m_i} & I_{m_j} \otimes B_i^2 & -{C_j^2}^t \otimes I_{m_i} \\ I_{m_j} \otimes C_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & {B_j^2}^t \otimes I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \otimes C_i^2 \\ {B_j^2}^t \otimes I_{m_i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(11_{ij}) \in \mathcal{M}_{(m_i m_j + m_j + 2)\times(m_i m_j + m_j + m_i)}(\mathbb{C})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(11_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{m_j} \otimes N_i^3 - {N_j^3}^t \otimes I_{m_i} & I_{m_j} \otimes B_i^2 & -{C_j^2}^t \otimes I_{m_i} \\ I_{m_j} \otimes C_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & {B_j^2}^t \otimes I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \otimes C_i^2 \\ {B_j^2}^t \otimes I_{m_i} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^3 & & & & B_i^2 & & & & I_{m_i} \\ -I_{m_i} & \ddots & & & & \ddots & & & \\ & \ddots & N_i^3 & & & & \ddots & & \\ & & -I_{m_i} & N_i^3 & & & & B_i^2 & \\ C_i^2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & C_i^2 & & & & & \\ & & & & I_1 & & & & \\ & & & & & & & & C_i^2 \\ I_{m_i} & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

La dimensió de l'espai **S**(11_{ij}) de solucions del subsistema (11_{ij}) és

$$\dim\mathbf{S}(11_{ij}) = m_im_j + m_i + m_j - \operatorname{rang}\mathbf{M}(11_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu **M**(11_{ij}) es transforma en la matriu

$$\mathbf{M}(11_{ij}) \sim \begin{pmatrix} I_{m_i} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & I_{m_i} & & & & & & \\ & & & I_1 & & & & & \\ & & & & N_i^3 & B_i^2 & & & \\ & & & & C_i^2 & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & N_i^3 & B_i^2 \\ & & & & & & & C_i^2 & \end{pmatrix}$$

tenim que

$$\begin{aligned}\mathrm{rang}\mathbf{M}(11_{ij}) &= m_i m_j + \max\{m_i, m_j\} + 1 = \\ &= m_i m_j + m_i + m_j - \min\{m_i, m_j\} + 1\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\dim\mathbf{S}(11_{ij}) = \min\{m_i, m_j\} — 1.$$

Les matrius X, Y i Z tals que $\left(\begin{array}{ccc} Z & | & X \\ - & \cdot & - \\ 0 & | & Y \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{(m_i+1)\times(m_j+1)}$ és una matriu Toeplitz banda trapezoidal amb las primera fila i la darrera columna 0 i el primer element no nul a la diagonal en el lloc $(m_i - m_j + 2, 1)$ si $m_i > m_j$ i en el lloc $(2,1)$ si $m_i \leq m_j$, és a dir,

$$\left(\begin{array}{ccc} Z & | & X \\ - & \cdot & - \\ 0 & | & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ x_1 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ x_{m_j-2} & & & & \vdots \\ x_{m_j-1} & x_{m_j-2} & \ddots & & \vdots \\ \hline 0 & x_{m_j-1} & \cdots & x_1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{si } m_i > m_j, \quad \text{i}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} Z & | & X \\ - & \cdot & - \\ 0 & | & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & x_1 & 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & x_1 & & & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & & & \vdots \\ x_{m_i-1} & x_{m_i-2} & \cdots & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & x_{m_i-1} & & \cdots & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \quad \text{si } m_i \leq m_j,$$

són solucions del subsistema. Per a comprovar això només cal tenir en compte que

$$N_i^3X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ x_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{m_j-2} & \cdots & \cdots & x_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i > m_j, \text{ i}$$

$$N_i^3X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ x_{m_i-2} & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i \leq m_j,$$

$$B_i^2Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_{m_j-1} & \cdots & x_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i > m_j, \text{ i}$$

$$B_i^2Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_{m_i-1} & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i \leq m_j,$$

$$ZC_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ x_1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m_j-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i > m_j \text{ i } ZC_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m_i \leq m_j,$$

$$C_i^2X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \; YB_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \; C_i^2Z = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \; XB_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es evident que tots els paràmetres apareixen en direccions independents. Com que el seu nombre coincideix amb la dimensió del subespai **S**(11_{ij}), tenim que aquestes són totes les solucions del subsistema.

El nombre de paràmetres en la solució del sistema (11) és

$$\sum_{1\leq i,j\leq t} \min\{m_i, m_j\} - 1.$$

Subsistema 12

Partim les matrius X_4^3, Y_4^3 en blocs, segons els blocs de les matrius A_3, A_4, B_2 i C_2,

$$A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \ 1 \leq i \leq u,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}.$$

Obtenim així $t \times \sum_{1\leq i\leq u} \alpha_i$ sistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^3X - XJ_j^\nu + B_i^2Y = 0 \\ C_i^2X = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12_{ij})$$

Si linealitzem el sistema, obtenim que X, Y són solucions d'aquest subsistema si i només si $\binom{vec(X)}{vec(Y)}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{n_{j_\nu}} \otimes N_i^3 - J_j^{\nu\, t} \otimes I_{m_i} & I_{n_{j_\nu}} \otimes B_i^2 \\ I_{n_{j_\nu}} \otimes C_i^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(12_{ij}) \in \mathcal{M}_{n_{j_\nu} m_i + n_{j_\nu}}(\mathbb{C})$ a la matriu de l'anterior sistema,

$$\mathbf{M}(12_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{n_{j_\nu}} \otimes N_i^3 - J_j^{\nu\, t} \otimes I_{m_i} & I_{n_{j_\nu}} \otimes B_i^2 \\ I_{n_{j_\nu}} \otimes C_i^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^3 - \lambda I_{m_i} & & & & B_i^2 & & & \\ -I_{m_i} & N_i^3 - \lambda I_{m_i} & \ddots & & & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -I_{m_i} & N_i^3 - \lambda I_{m_i} & & & & B_i^2 \\ C_i^2 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & C_i^2 & & & & \end{pmatrix}$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(12_{ij})$ de solucions del subsistema (12_{ij}) és

$$\dim\mathbf{S}(12_{ij}) = n_{j_\nu} m_i + n_{j_\nu} - \operatorname{rang}\mathbf{M}(12_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(12_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\mathbf{M}(12_{ij}) \sim \begin{pmatrix} I_{m_i+1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{m_i+1} \end{pmatrix}$$

tenim que

$$\operatorname{rang}\mathbf{M}(12_{ij}) = n_{j_\nu}(+1)m_i$$

i, per tant,

$$\dim\mathbf{S}(12_{ij}) = 0.$$

L'única solució del subsistema (12) és, doncs, la trivial.

Subsistema 13

Partim la matriu X_1^4 en blocs, segons els blocs de les matrius A_1, A_4 i B_1,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \ 1 \leq i \leq u, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim així $r \times \sum_{1 \leq i \leq u} \alpha_i$ sistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} J_i^\nu X - X N_j^1 = 0 \\ X B_j^1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13_{ij})$$

Si linealitzem el sistema, obtenim que X és solució d'aquest subsistema si i només si ($vec(X)$) és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes J_i^\nu - {N_j^1}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} \\ {B_j^1}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} \end{pmatrix} (\, vec(X) \,) = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(13_{ij})$ a la matriu de l'anterior sistema,

$$\mathbf{M}(13_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes J_i^\nu - {N_j^1}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} \\ {B_j^1}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_i^\nu & & & \\ -I_{n_{i_\nu}} & J_i^\nu & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I_{n_{i_\nu}} & J_i^\nu \\ I_{n_{i_\nu}} & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(k_j n_{i_\nu} + n_{i_\nu}) \times k_j n_{i_\nu}}(\mathbb{C}).$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(13_{ijj})$ de solucions del subsistema (13_{ij}) *és*

$$\dim \mathbf{S}(13_{ij}) = k_j n_{i_\nu} - \operatorname{rang} \mathbf{M}(13_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(13_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\mathbf{M}(13_{ij}) \sim \begin{pmatrix} I_{n_{i_\nu}} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{n_{i_\nu}} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(13_{ij}) = k_j n_{i_\nu}$$

i, per tant,

$$\dim \mathbf{S}(13_{ij}) = 0.$$

L'única solució del subsistema (13) és, doncs, la trivial.

Subsistema 14

Partim les matrius X_2^4 i Z_1^4 en blocs, segons els blocs de les matrius A_2, A_4 i C_1,

$$A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \; 1 \leq i \leq u, \quad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}.$$

El subsistema (14) descompon en els següents $\sum\limits_{1 \leq i \leq u} \alpha_i \times s$ subsistemes independents

$$J_i^\nu X - X N_j^2 - Z C_j^1 = 0 \qquad (14_{ij})$$

on $J_i^\nu \in \mathcal{M}_{n_{i_\nu} \times 1}(\mathbb{C})$, $N_j^2 \in \mathcal{M}_{l_j \times 1}(\mathbb{C})$ i $C_j^1 \in \mathcal{M}_{1 \times l_j}(\mathbb{C})$.

Anàlogament que en els casos anteriors, linealitzant el sistema (14_{ij}) tenim que X, Z són solucions del sistema (14_{ij}) si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Z) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\left(I_{l_j} \otimes J_i^\nu - {N_2^j}^t \otimes I_{n_\nu} \quad -{C_j^1}^t \otimes I_{n_\nu} \right) \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Z) \end{pmatrix} = (\,0\,)\,.$$

Per a simplificar notacions, posem M(14_{ij}) $\in \mathcal{M}_{l_j n_{i_\nu} \times n_{i_\nu}(l_j+1)}(\mathbb{C})$ a la matriu de l'anterior sistema,

$$\mathbf{M}(14_{ij}) = \left(I_{j_j} \otimes J_i^\nu - {N_j^2}^t \otimes I_{n_\nu} \quad -{C_j^1}^t \otimes I_{n_\nu} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} J_i^\nu & & & & I_{n_\nu} \\ I_{n_\nu} & J_i^\nu & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & I_{n_\nu} & J_i^\nu & \end{pmatrix} =$$

$$\sim \begin{pmatrix} I_{n_\nu} & J_i^\nu & & & \\ & I_{n_\nu} & J_i^\nu & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_{n_\nu} & J_i^\nu \end{pmatrix}.$$

Com la matriu **M**(14_{ij}) té rang màxim, la dimensió de l'espai **S**(14_{ij}) de solucions del sistema *(14íJ)* és

$$\dim \mathbf{S}(14ij) = n_{i_\nu}\left(l_j+1\right) - n_{i_\nu} l_i = n_{i_\nu}\,.$$

Les matrius (Z | X) de la forma

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_i^{l_j} x_1 & \lambda_i^{l_j-1} x_1 & \dots & \lambda_i x_1 & x_1 \\ \binom{l_j}{1}\lambda_i^{l_j-1} x_1 + \lambda_i^{l_j} x_2 & \binom{l_j-1}{1}\lambda_i^{l_j-2} x_1 + \lambda_i^{l_j-1} x_2 & \dots & x_1+\lambda_i x_2 & x_2 \\ \binom{l_j}{2}\lambda_i^{l_j-2} x_1 + \binom{l_j}{1}\lambda_i^{l_j-1} x_2 + \lambda_i^{l_j} x_3 & \binom{l_j-1}{2}\lambda_i^{l_j-3} x_1 + \binom{l_j-1}{1}\lambda_i^{l_j-2} x_2 + \lambda_i^{l_j-1} x_3 & \dots & x_2+\lambda_i x_3 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

són totes les solucions del subsistema. Per a comprovar-ho, n'hi ha prou amb tenir en compte que

$$J_i^\nu X = \begin{pmatrix} \lambda_i^{l_j} x_1 & \lambda_i^{l_j-1} x_1 & \dots & \lambda_i x_1 \\ \binom{l_j}{1}\lambda_i^{l_j-1} x_1 + \lambda_i^{l_j} x_2 & \binom{l_j-1}{1}\lambda_i^{l_j-2} x_1 + \lambda_i^{l_j-1} x_2 & \dots & x_1 + \lambda_i x_2 \\ \binom{l_j}{2}\lambda_i^{l_j-2} x_1 + \binom{l_j}{1}\lambda_i^{l_j-1} x_2 + \lambda_i^{l_j} x_3 & \binom{l_j-1}{2}\lambda_i^{l_j-3} x_1 + \binom{l_j-1}{1}\lambda_i^{l_j-2} x_2 + \lambda_i^{l_j-1} x_3 & \dots & x_2 + \lambda_i x_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$XN_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i^{l_j-1} x_1 & \dots & \lambda_i x_1 \\ 0 & \binom{l_j-1}{1}\lambda_i^{l_j-2} x_1 + \lambda_i^{l_j-1} x_2 & \dots & x_1 + \lambda_i x_2 \\ 0 & \binom{l_j-1}{2}\lambda_i^{l_j-3} x_1 + \binom{l_j-1}{1}\lambda_i^{l_j-2} x_2 + \lambda_i^{l_j-1} x_3 & \dots & x_2 + \lambda_i x_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\text{i} \quad ZC_j^1 = \begin{pmatrix} \lambda_i^{l_j} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{l_j}{1}\lambda_i^{l_j-1} x_1 + \lambda_i^{l_j} x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{l_j}{2}\lambda^{l_j-2} x_1 + \binom{l_j}{1}\lambda_i^{l_j-1} x_2 + \lambda_i^{l_j} x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Òbviament, tots els paràmetres apareixen en direccions independents.

Per tant, el nombre de paràmetres en les matrius *X, Z* com abans és igual a la dimensió del subespai de solucions i aquestes matrius generen $\mathbf{S}_{14}(ij)$.

El nombre de paràmetres en la solució del sistema (14) és:

$$\sum_{1 \le i \le u} \sum_{1 \le \nu \le \alpha_i} n_{i_\nu}.$$

Subsistema 15

Partim les matrius X_3^4, Z_3^4 en blocs, segons els blocs de les matrius A_3, A_4, B_2 i C_2,

$$A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \ 1 \le i \le u,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}.$$

Obtenim així $t \times \sum\limits_{1 \leq i \leq u} \alpha_i$ sistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} J_i^\nu X - X N_j^3 - Z C_j^2 = 0 \\ X B_j^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (15_{ij})$$

Si linealitzem el sistema, obtenim que *X* és solució d'aquest subsistema si i només si

$\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix}$ es solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{m_j} \otimes J_i^\nu - {N_j^3}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} & -{C_j^2}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} \\ {B_j^2}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Z) \end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(15_{ij})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(15_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{m_j} \otimes J_i^\nu - {N_j^3}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} & -{C_j^2}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} \\ {B_j^2}^t \otimes I_{n_{i_\nu}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_i^\nu & & & I_{n_{i_\nu}} \\ -I_{n_{i_\nu}} & \ddots & & \\ & -I_{n_{i_\nu}} & J_i^\nu & \\ I_{n_{i_\nu}} & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n_{i_\nu} m_j + n_{i_\nu})}(\mathbb{C}).$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(15_{jj})$ de solucions del subsistema (15_{ij}) és

$$\dim \mathbf{S}(15_{ij}) = n_{i_\nu} m_j + n_{i_\nu} - \operatorname{rang} \mathbf{M}(15_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(15_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\begin{pmatrix} I_{n_{i_\nu}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{n_{i_\nu}} & \\ & & & I_{n_{i_\nu}} \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang}\mathbf{M}(15_{ij}) = n_{i_v}$$

i, per tant,

$$\dim\mathbf{S}(15_{ij}) = 0.$$

L'única solució del subsistema és, doncs, la trivial.

Subsistema 16

Si partim la matriu X_4^4 en blocs, segons els blocs de la matriu A_4,

$$A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \; 1 \le i \le u,$$

el subsitema (16) descompon en $\sum\limits_{1 \le i \le u} \alpha_i \times \sum\limits_{1 \le i \le u} \alpha_i$ subsistemes, tots ells de la forma

$$J_j^\nu X - X J_j^\nu = 0 \quad (16_{ij}).$$

La solució d'un sistema d'aquest tipus és coneguda. De fet, és el sistema que apareix a [**AR 71**] al trobar la deformació miniversal ortogonal d'una matriu a $\mathcal{M}_{nmp}$. Però la resolució del sistema ja es pot trobar en llibres clàssics com, per exemple, a [**Ga 60**] (o també a [**McDU 46**]), ja que el mateix sistema també apareix a l'estudiar les matrius que commuten amb una matriu donada. Posarem aquí, però, la seva solució ja que la notació feta servir fins ara no és la que sempre es pot trobar. En tot cas, no fa falta que calculem la dimensió del subespai de solucions ja que és coneguda.

La solució d'un sistema d'aquest tipus és de la forma:

$$X = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^1 & x_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3^1 & x_2^1 & x_1^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{n_i}^1 & x_{n_i-1}^1 & x_{n_i-2}^1 & \dots & x_1^1 \end{pmatrix} & \text{si } n_i = n_j, \\ \begin{pmatrix} x_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^1 & x_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_3^1 & x_2^1 & x_1^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n_i}^1 & x_{n_i-1}^1 & x_{n_i-2}^1 & \dots & x_1^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n_i < n_j, \\ \begin{pmatrix} x_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^1 & x_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3^1 & x_2^1 & x_1^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{n_j}^1 & x_{n_j-1}^1 & x_{n_j-2}^1 & \dots & x_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \text{si } ni > n_j. \end{cases}$$

El nombre de paràmetres en la solució del sistema (16) és

$$\sum_{1 \le i \le u} (n_{i_1} + 3n_{i_2} + 5n_{i_3} + \ldots + (2\alpha_i - 1)n_{i_{\alpha_i}}).$$

Subsistema 17

Partim la matriu Y_1^2 en blocs, segons els blocs de la matriu B_i,

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}$$

i obtenim aleshores *r* subsistemes de la forma

$$YB_j^1 = 0 \quad (17_{ij}).$$

Les matrius solució d'un subsistema d'aquest tipus són les de la fornia

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k_j} \end{pmatrix},$$

com pot comprovar-se fàcilment.

El nombre de paràmetres que hi ha en la solució del sistema (17) és.

$$\sum_{1\leq j\leq r} (k_j - 1).$$

Sistema 18

Partim la matriu Y_3^2 en blocs, segons els blocs de la matriu B_2

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \; B_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i \times 1}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq t,$$

i obtenim aleshores t subsistemes de la forma:

$$YB_j^2 = 0\} \qquad (18_{ij})$$

Les matrius solució d'aquest subsistema són totes les de la forma

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m_j - 1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

com es pot comprovar de forma immediata.

En la solució del subsistema (18_{ij}) el nombre de paràmetres és:

$$\sum_{1\leq j\leq t}(m_j-1).$$

Sistema 19

Partim la matriu Z_2^2 en blocs, segons els blocs de la matriu C_1,

$$C_1=\begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix},$$

i obtenim aleshores *s* subsistemes de la forma

$$C_j^1 Z = 0 \quad (19_{ij}).$$

Les matrius solució d'aquest subsistema són totes les de la forma

$$Z=\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{l_j} \end{pmatrix}$$

En la solució del subsistema el nombre de paràmetres és

$$\sum_{1\leq j\leq s}(l_j-1).$$

Sistema 20

Partim la matriu Z_2^3 en blocs, segons els blocs de la matriu C_2,

$$C_2=\begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix},$$

i obtenim aleshores t subsistemes de la forma

$$C_i^2 Z = 0 \qquad (20_{ij})$$

Les matrius solució d'aquest subsistema són les de la forma

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{l_j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_j \times 1}(\mathbb{C}),$$

com es pot comprovar de forma trivial.

En la solució del subsistema el nombre de paràmetres és:

$$\sum_{1 \leq j \leq t} (m_j - 1).$$

Al mateix temps que hem trobat la solució dels diferents subsistemes en que descompon el sistema (S), hem anat calculant la dimensió del subespai vectorial format per les solucions de cadascun d'ells. Com que el conjunt de solucions del sistema (S) és igual al conjunt de vectors de $T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}$, es té que la dimensió de $T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$ és igual a la dimensió del subespai de solucions del sistema (S).

Tenint en compte que, com s'ha remarcat anteriorment, els diferents subsistemes en que descompon el sistema (5) són linealment independents, la dimensió del subespai vectorial format per les solucions del sistema (S) *és* igual a la suma de les dimensions dels subespais de solucions de cadascun dels diferents subsistemes. Cal tenir en compte, també, que les matrius $Y_2^{2\,;}$, Y_4^2 , Z_2^1 i Z_2^4 són arbitràries.

Així, doncs, com a conseqüència del càlcul explícit d'aquesta deformació miniversal s'obté la dimensió del subespai $T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$.

Podem ara descriure en una taula el nombre de paràmetres que hi ha en la solució dels diferents subsistemes.

Subsistema	Nombre de paràmetres
(1)	$\sum_{1\le i,j\le r} \max\{0, k_j - k_i - 1\}$
(2)	$\sum_{1\le i\le t} (m_i - 1)$
(3)	$\sum_{1\le i\le r} \sum_{1\le j\le s} (k_i + l_j)$
(4)	$r \sum_{1\le i\le u} \sum_{1\le \nu\le \alpha_i} n_{i_\nu}$
(6)	$\sum_{1\le i,j\le s} \max\{0, l_j - l_i - 1\}$
(10)	$\sum_{1\le i\le t} (m_i - 1)$
(11)	$\sum_{1\le i,j\le t} \min\{m_i, m_j\} - 1$
(14)	$s \sum_{1\le i\le u} \sum_{1\le \nu\le \alpha_i} n_{i_\nu}$
(16)	$\sum_{1\le i\le u} (n_{i_1} + 3n_{i_2} + 5n_{i_3} + \ldots + (2\alpha_i - 1)n_{i_{\alpha_i}})$
(17)	$(m - r - t) \sum_{1\le i\le r} (k_i - 1)$
(18)	$(m - r - t) \sum_{1\le i\le t} (m_i - 1)$
(19)	$(p - s - t) \sum_{1\le i\le s} (l_i - 1)$
(20)	$(p - s - t) \sum_{1\le i\le t} (m_i - 1)$

Taula 1 .

Obtenim així el teorema següent.

Teorema 3.9. *La dimensió de* $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$ *és:*

$$\begin{aligned} d = \dim\, T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp} = & \sum_{1\leq i,j\leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\} + 2\sum_{1\leq i\leq t}(m_i - 1) + \\ & + \sum_{1\leq i\leq r}\sum_{1\leq j\leq s}(k_i + l_j) + (r+s)\sum_{1\leq i\leq u}\sum_{1\leq \nu\leq \alpha_i} n_{i_\nu} + \\ & + \sum_{1\leq i,j\leq s}\max\{0, l_j - l_i - 1\} + \sum_{1\leq i,j\leq t}(\min\{m_i, m_j\} - 1) + \\ & + \sum_{1\leq i\leq u}(n_{i_1} + 3n_{i_2} + 5n_{i_3} + \ldots + (2\alpha_i - 1)n_{i_{\alpha_i}}) + \\ & + (m - r - t)\left(n - \sum_{1\leq i\leq r}k_i - \sum_{1\leq i\leq t}m_i\right) + \\ & + (m - r - t)\left(\sum_{1\leq i\leq r}(k_i - 1) + \sum_{1\leq i\leq t}(m_i - 1)\right) + \\ & + (p - s - t)\left(n - \sum_{1\leq i\leq s}l_i - \sum_{1\leq i\leq t}m_i\right) + \\ & + (p - s - t)\left(\sum_{1\leq i\leq s}(l_i - 1) + \sum_{1\leq i\leq t}(m_i - 1)\right). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Al trobar la solució dels diferents sistemes obtenim una descripció explícita del subespai $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$, i una base d'ell. En particular, tenim la seva dimensió, simplement comptant el nombre de paràmetres que hi ha en la solució dels diferents sistemes.

Hem d'afegir ara el nombre de paràmetres de les matrius Y_2^2, Y_4^2, Z_2^1 i Z_2^4, que són arbitràries,

$$(m - r - t)\left(n - \sum_{1\leq i\leq r}k_i - \sum_{1\leq i\leq t}m_i\right) + (p - s - t)\left(n - \sum_{1\leq i\leq s}l_i - \sum_{1\leq i\leq t}m_i\right),$$

i així tenim el resultat, ◇

Observació 3.10. En particular, veiem que $d = \dim T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$ (i, per tant, també dim $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A, B, C)$) depèn només dels invariants discrets de la terna (A, B, C).

Recordem que l'estabilitzador de la terna (A, B, C) per l'acció α és

$$\mathcal{E}st(A, B, C) = \{(P, J, K, V, W) \in \mathcal{G} \mid \alpha((A, B, C), (P, J, K, V, W)) = (A, B, C)\}\ .$$

Com que $\mathcal{E}st(A, B, C)$ és una varietat difeomorfa a $\mathcal{G}/\mathcal{O}(A, B, C)$, a partir del teorema 3.9 deduïm de forma immediata la proposició següent.

Proposició 3.11. *La dimensió de la varietat $\mathcal{E}st(A, B, C)$ és*

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{E}st(A,B,C) = m^2 + p^2 &+ \sum_{1\le i,j\le r} \max\{0, k_j - k_i - 1\} + 2\sum_{1\le i\le t}(m_i - 1) + \\
&+ \sum_{1\le i\le r}\sum_{1\le j\le s}(k_i + l_j) + (r+s)\sum_{1\le i\le u}\sum_{1\le\nu\le\alpha_i} n_{i_\nu} + \\
&+ \sum_{1\le i,j\le s} \max\{0, l_j - l_i - 1\} + \sum_{1\le i,j\le t}(\min\{m_i, m_j\} - 1) + \\
&+ \sum_{1\le i\le u}(n_{i_1} + 3n_{i_2} + 5n_{i_3} + \ldots + (2\alpha_i - 1)n_{i_{\alpha_i}}) + \\
&+ (m - r - t)\Big(n - \sum_{1\le i\le r} k_i - \sum_{1\le i\le t} m_i\Big) + \\
&+ (p - s - t)\Big(n - \sum_{1\le i\le s} l_i - \sum_{1\le i\le t} m_i\Big) + \\
&+ (m - r - t)\left(\sum_{1\le i\le r}(k_i - 1) + \sum_{1\le i\le t}(m_i - 1)\right) + \\
&+ (p - s - t)\left(\sum_{1\le i\le s}(l_i - 1) + \sum_{1\le i\le t}(m_i - 1)\right).
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{E}st(A,B,C) &= \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{O}(A,B,C) = \\
&= \dim \mathcal{G} + n^2 + mn + np - \dim T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp} = \\
&= m^2 + p^2 - \dim T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}.
\end{aligned}$$

§4. Càlcul explícit d'altres deformacions miniversals

Donarem aquí una forma d'obtenir, a partir de la deformació miniversal ortogonal donada en la secció anterior, altres deformacions miniversals d'una terna de matrius. En el cas particular en que la terna estigui en forma reduïda canònica, en donarem una explícitament.

Observació 4.1. Sigui $(u_i,\dots,u_d)$ una base de $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,\ B,\ C)^{\perp}$. Siguin $v_i,\dots,v_d \in \mathcal{M}_{nmp}$ tals que $< u_i, v_j >= \delta_{ij}$. Aleshores $G = [v_i,\dots,v_d]$ és un complementari de $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,\ B,\ C)$ *a* $\mathcal{M}_{nmp}$.

Per tant, l'aplicació

$$\varphi : U \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp}(\mathbb{C})$$

$$\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_d) \longrightarrow (A,B,C) + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_d$$

amb U un entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^d$ és una deformació miniversal de $(A,\ B,\ C)$.

Evidentment, per a cada subespai vectorial G tenim una deformació diferent.

Si la base de $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,\ B,\ C)^{\perp}$ s'obté donant valors independents als paràmetres de la deformació, podem considerar sempre els vectors $v_i,\dots,v_d$ entre els de la base natural de $\mathcal{M}_{nmp}$.

Definició 4.2. A una deformació obtinguda d'aquest forma li direm *deformació miniversal minimal.*

Aquestes deformacions miniversals es caracteritzen pel fet de que la base de l'espai complementari de $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,\ B,\ C)$ així escollida està formada per ternes que pertanyen a la base natural de l'espai de ternes de matrius i, per tant, les ternes de matrius de $\varphi(U)$ no tenen paràmetres repetits (és a dir, el nombre d'entrades nul·les és màxim).

En particular, si la terna està en forma reduïda canònica, tenim el teorema següent, que dóna explícitament una deformació miniversal minimal a partir de la deformació miniversal ortogonal obtinguda en la secció §3.

Teorema 4.3. *Donada una terna (A,B,C)* $\in \mathcal{M}_{nmp}$, *en forma reduïda canònica, si* $d = \dim T_{(A,B,C)} \mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$, *sigui* φ *l'aplicació*

$$\varphi : U \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \longrightarrow (A, B, C) + (X(\lambda), Y(\lambda), Z(\lambda))$$

amb U un entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^d$, *i*

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} X_1^1(\lambda) & X_1^2(\lambda) & X_1^3(\lambda) & X_1^4(\lambda) \\ X_2^1(\lambda) & X_2^2(\lambda) & X_2^3(\lambda) & X_2^4(\lambda) \\ X_3^1(\lambda) & X_3^2(\lambda) & X_3^3(\lambda) & X_3^4(\lambda) \\ X_4^1(\lambda) & X_4^2(\lambda) & X_4^3(\lambda) & X_4^4(\lambda) \end{pmatrix}, Y(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_1^1(\lambda) & Y_1^2(\lambda) & Y_1^3(\lambda) \\ Y_2^1(\lambda) & Y_2^2(\lambda) & Y_2^3(\lambda) \\ Y_3^1(\lambda) & Y_3^2(\lambda) & Y_3^3(\lambda) \\ Y_3^1(\lambda) & Y_4^2(\lambda) & Y_4^3(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$Z(\lambda) = \begin{pmatrix} Z_1^1(\lambda) & Z_1^2(\lambda) & Z_1^3(\lambda) & Z_1^4(\lambda) \\ Z_2^1(\lambda) & Z_2^2(\lambda) & Z_2^3(\lambda) & Z_2^4(\lambda) \\ Z_3^1(\lambda) & Z_3^2(\lambda) & Z_3^3(\lambda) & Z_3^4(\lambda) \end{pmatrix},$$

tals que

(i) $X_1^1(\lambda) = 0$, $X_1^2(\lambda) = 0$, $X_1^3(\lambda) = 0$, $X_1^4(\lambda) = 0$, $X_2^2(\lambda) = 0$, $X_2^3(\lambda) = 0$, $X_3^1(\lambda) = 0$, $X_3^2(\lambda) = 0$, $X_3^3(\lambda) = 0$, $X_3^4(\lambda) = 0$, $X_4^2(\lambda) = 0$, $X_4^3(\lambda) = 0$, $Y_1^3(\lambda) = 0$, $Y_2^1(\lambda) = 0$, $Y_2^3(\lambda) = 0$, $Y_3^3(\lambda) = 0$, $Y_4^1(\lambda) = 0$, $Y_4^3(\lambda) = 0$, $Z_1^1(\lambda) = 0$, $Z_1^4(\lambda) = 0$, $Z_3^1(\lambda) = 0$, $Z_3^4(\lambda) = 0$, $Z_4^3(\lambda) = 0$.

(ii) $Y_2^2(\lambda)$, $Y_3^1(\lambda)$, $Y_4^2(\lambda)$, $Z_1^3(\lambda)$ *són arbitràries.*

(iii) *Si* $X_2^1(\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}^{21} & \dots & X_{1r}^{21} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{s1}^{21} & \dots & X_{sr}^{21} \end{pmatrix}$, *llavors* $X_{ij}^{21} = \begin{pmatrix} \star & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \star & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *si* $k_j \leq l_i$, *i* $X_{ij}^{21} = \begin{pmatrix} \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *si* $k_j > l_i$.

(iv) *Tots els elements de* $X_2^4(\lambda)$ *són zero, excepte els de les files* $\{l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + l_2 + \dots + l_s\}$, *que són arbitraris.*

(v) *Tots els elements de* $X_4^1(\lambda)$ *són zero, excepte els de les columnes* $\{k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + k_2 + \dots + k_r\}$ *que són arbitraris.*

(vi) $X_4^4(\lambda)$ *és tal que tots els seus elements són nuls, excepte els de les files* $\{1, 1+n_{i_1}, 1+n_{i_2}, \dots, 1+n_{i_{\alpha_i-2}}\}$ *que estan a les columnes a partir de* $n_{i_1}, \dots, n_{i_{\alpha_i-1}}$, *respectivament, i els de les columnes* $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_{\alpha_i}}\}$, *a partir de les files* $\{1, n_{i_1}, \dots, n_{i_{\alpha_i-1}}\}$, *respectivament.*

(vii) *Si* $Y_1^1(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}^{11} & \dots & Y_{1r}^{11} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{r1}^{11} & \dots & Y_{rr}^{11} \end{pmatrix}$, *llavors* $Y_{ij}^{11} = 0$ *si* $k_i \leq k_j + 1$, *i* $Y_{ij}^{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ \star \\ \vdots \\ \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *si* $k_i > k_j + 1$, *amb* $k_i - k_j - 1$ *elements no nuls.*

(viii) *Tots els elements de* $Y_1^2(\lambda)$ *són zero, excepte els de les files* $\{1, 1+k_1, \dots, 1+k_1+\dots+k_r\}$ *que són arbitraris.*

((ix) *Tots els elements de* $Y_3^2(\lambda)$ *són arbitraris, excepte els de les files* $\{m_1, m_1 + m_2, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_t\}$ *que són zero.*

(x) *Si* $Z_1^2(\lambda) = \begin{pmatrix} Z_{11}^{12} & \dots & Z_{1r}^{12} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{s1}^{12} & \dots & Z_{sr}^{12} \end{pmatrix}$, *llavors* $Z_{ij}^{12} = 0$ *si* $l_i + 1 \geq l_j$, *i* $Z_{ij}^{12} = (\,0 \star \dots \star 0 \dots 0\,)$ *si* $l_i + 1 < l_j$, *amb* $l_j - l_i - 1$ *elements no nuls.*

(xi) *Tots els elements de* $Z_2^2(\lambda)$ *són arbitraris, excepte els de les columnes* $\{1, 1 + l_1, \dots, 1 + l_1 + \dots + l_{s-1}\}$ *que són nuls.*

(xii) *Tots els elements de* $Z_2^3(\lambda)$ *són arbitraris, excepte els de les columnes* $\{1, 1 + m_1, \dots, 1 + m_1 + \dots + m_t\}$ *que són nuls.*

(xiii) *Si* $Z_3^3(\lambda) = \begin{pmatrix} Z_{11}^{33} & \cdots & Z_{1t}^{33} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{t1}^{33} & \cdots & Z_{tt}^{33} \end{pmatrix}$, *aleshores* $Z_{ij}^{33} = (0 \cdots 0 \star \cdots \star)$, *té els últims* $m_j - 1$ *elements no nuls.*

(El símbol $\star$ *indica un element arbitrari).*

Aleshores φ *és una deformació miniversal minimal de la terna* (A, B, C).

DEMOSTRACIÓ. Resulta de forma immediata tenint en compte la forma de les solucions dels diferents subsistemes en que descompon el sistema (5) i aplicant l'observació 4.1. ◇

Remarca

Sigui (*A, B, C*) una terna de matrius, i sigui

$$V = \{(A,B,C) + (X(\lambda_1...,\lambda_d),Y(\lambda_1,...,\lambda_d),Z(\lambda_1,...,\lambda_d)) \mid (\lambda_1,...,\lambda_i)\in U\} ,$$

amb U un entorn de l'origen a $\mathbb{C}^d$, la varietat lineal que dóna la deformació miniversal ortogonal de la terna *(A, B, C)*.

Si $\{Ei\}_{1\leq i\leq n^2+mn+np}$ és la base natural de $\mathcal{M}_{nmp}$, posem ξ a l'escalar

$$\#\{j \mid < E_j,(X(0,...,0,\lambda_i,0,...,0),Y(0,...,0,\lambda_i,0,...,0),Z(0,...,0,\lambda_i,0,...,0)) \neq 0\}$$

per a $1 \leq i \leq d$.

Aleshores l'observació 3.1 permet construir $\xi_1 \cdot ... \cdot \xi_d$ deformacions miniversals minimals diferents.