CAPÍTOL 3

Estabilitat estructural

Introducció

Aquest capítol està dedicat a l'estudi i caracterització de les ternes de matrius estructuralment estables, respecte de la relació d'equivalència definida en el capítol 1, secció §1, i que, segons s'ha vist en el capítol 2, secció §1, és la induïda per l'acció d'un grup de Lie $\mathcal{G}$ que actua sobre la varietat diferenciable $\mathcal{M}_{nmv}$. Així, la classe d'equivalència d'una terna coincideix amb la seva òrbita per aquesta acció.

Es donen diferents criteris en funció dels quals hom pot determinar si una terna fixada és, o no, estructuralment estable. Es a dir, si existeix un entorn d'aquesta terna format només per ternes equivalents o, el que és el mateix, que pertanyin a la seva mateixa òrbita.

En primer lloc, a la secció primera es recorda el concepte d'estabilitat estructural que pot trobar-se a [**Wi 80**], adaptant-lo al nostre cas particular, i es veuen algunes caracteritzacions immediates de les ternes estructuralment estables.

A la secció segona, es determina si una terna fixada és, o no, estructuralment estable a partir de la seva forma reduïda canònica. El punt clau en aquest estudi és el fet de que l'estabilitat estructural respecte d'una relació d'equivalència que ve determinada per l'acció d'un grup de Lie que actua sobre una varietat diferenciable és equivalent a la no-existència de deformacions miniversals. Es, doncs, un estudi anàlog al realitzat a la caracterització de les parelles i quaternes de matrius estructuralment estables a [**Gar 94**] i [**Fe-Gar 96**], respectivament. Cal remarcar, però, que no hi ha cap relació entre l'estabilitat estructural entre parelles, ternes i quaternes de matrius. Es a dir, de l'estabilitat estructural de ternes no es poden deduir condicions per a l'estabilitat estructural de parelles, així com de l'estabilitat estructural de les quaternes no es poden deduir condicions per a l'estabilitat estructural de les ternes. Així, si una terna (A, B, C) és estructuralment estable, llavors la parella (A, B) no ho és. I, si (A, B) és estructuralment estable, la terna $(A, B, 0)$ no ho és. I donada una terna (A, B, C) estructuralment estable, la quaterna $(A, B, C, 0)$ no ho és, i si la quaterna (A, B, C, D) és estructuralment estable, la terna (A, B, C) no ho és. Per tant, l'estabilitat estructural de ternes de matrius s'ha d'estudiar de forma independent.

A la secció §3 es caracteritzen les ternes estructuralment estables mitjançant altres criteris, per aplicar els quals no és necessari conèixer la forma reduïda canònica de la terna. Així, en particular, tenim que a cada terna de matrius li podem associar una matriu $\mathbf{M}(A, B, C)$, el rang de la qual ens indica si la terna donada és estructuralment estable o no. A més, si considerem l'espai tangent a l'estabilitzador d'una terna en el punt $I \in \mathcal{G}, \mathfrak{Est}(A, B, C)$, que es pot veure com l'espai de solucions d'una equació matricial que generalitza l'equació de Sylvester clàssica $XA - AX = 0$ (que caracteritza l'espai tangent a l'estabilitzador d'una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en el punt $I \in Gl_n(\mathbb{C})$) i si considerem l'aplicació $\mathfrak{Est}$ que a cada terna li fa correspondre aquest espai, aleshores veiem que els punts de diferenciabilitat d'aquesta aplicació coincideixen amb les ternes estructuralment estables.

Finalment, a l'annex A es presenten diagrames de perturbacions locals per a algunes ternes de matrius que no són estructuralment estables. Es a dir, en aquests casos tot entorn de la terna talla òrbites diferents a l'òrbita de la terna donada. Estudiem quines són aquestes òrbites en els casos donats. Veurem que en alguns casos, es poden trobar entorns de la terna donada que tallen només un nombre finit d'òrbites, mentre que en altres casos tot entorn de la terna talla infinites òrbites. S'observa, però, que en tots els casos el nombre d'òrbites amb invariants discrets diferents és finit.

§1. Concepte d'estabilitat estructural

En aquesta primera secció recordarem el concepte d'estabilitat estructural de [**Wi 80**] i definirem així el concepte de terna de matrius estructuralment estable. Veurem, en el nostre cas particular, condicions equivalents, que utilitzarem més endavant al caracteritzar les ternes estructuralment estables.

Definició 1.1. ([**Wi 80**]) Si X és un espai topològic i tenim una relació d'equivalència ~ definida sobre X, aleshores es diu que un punt $x \in X$ és estructuralment estable si i només si existeix un entorn U de x tal que tots els punts de U són equivalents a x.

Observació 1.2. En el cas particular en que X és una varietat diferenciable i la relació d'equivalència ve donada per l'acció d'un grup de Lie que actua sobre X, aleshores, per l'homogeneïtat al llarg de les òrbites, es té que un punt x G X és estructuralment estable si i només si ho són tots els punts de la seva òrbita, és a dir, si la seva òrbita és oberta. Equivalentment, si i només si $\dim\mathcal{O}(A, B, C)$ = dini X o, el que és el mateix, si i només si $\dim T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}=0$.

Sigui $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ una terna de matrius. Adaptant la definició anterior al nostre cas particular, en que $X = \mathcal{M}_{nmp}$ i ~ és la relació d'equivalència definida en el capítol 1, secció §1, tenim la definició següent.

Definició 1.3. Es diu que la terna (A,B,C) és estructuralment estable si i només si existeix un entorn U de la terna (A,B,C) tal que per a tota terna $(A', B',C) \in U$, es té que (A,B,C) i (A', B',C) són equivalents.

Tenim aleshores la següent proposició.

Proposició 1.4. *Les condicions següents són equivalents:*

(a) (A,B,C) *és estructuralment estable.*

(b) $\dim\mathcal{O}(A, B, C) = m^2 + mn + np.$

(c) $\dim T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp} = 0.$

(d) *El sistema*

$$\left.\begin{aligned} AX - XA + BY - ZC &= 0 \\ XB &= 0 \\ YB &= 0 \\ CX &= 0 \\ CZ &= 0 \end{aligned}\right\}$$

té només la solució trivial.

DEMOSTRACIÓ. Els tres primers apartats són la traducció al nostre cas particular de l'observació 1.2. L'últim apartat és immediat a partir del lema 3.3 del capítol 2. ◇

Posem (A_c,B_c,C_c) a la forma reduïda canònica de la terna (A,B,C). Com que la terna (A,B,C) *és* estructuralment estable si i només si ho és la terna (A_c,B_c,C_c), tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 1.5. *Una terna de matrius* (A,B,C) *és estructuralment estable si i només si els subsistemes en que descompon el sistema* (*S*) (*vist a la secció* §5 *del capítol* 2) *tenen només la solució trivial, i, a més, es verifica una de les quatre condicions següents:*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad m = r + t \quad i \quad p = s + t, \\
&\text{(ii)} \quad m = r + t \quad i \quad n = \sum_{1\le i\le s} l_i + \sum_{1\le i\le t} m_i, \\
&\text{(iii)} \quad n = \sum_{1\le i\le r} k_i + \sum_{1\le i\le t} m_i \quad i \quad p = s + t, \\
&\text{(iv)} \quad n = \sum_{1\le i\le r} k_i + \sum_{1\le i\le t} m_i \quad i \quad n = \sum_{1\le i\le s} l_i + \sum_{1\le i\le t} m_i.
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Es conseqüència immediata de la proposició anterior, ja que que el sistema

(S) descompon en subsistemes linealment independents. A més, si es compleix una de les quatre condicions anteriors, es garanteix la no-existència de cap de les matrius Y_2^2, Y_4^2, Z_2^1 i Z_2^4 arbitràries en la solució del sistema (S). ◇

§2. Primera caracterització de les ternes estructuralment estables

Veurem en aquest apartat condicions necessàries i suficients per a que una terna de matrius sigui estructuralment estable, a partir de la seva forma reduïda canònica. Els lemes següents ens donen condicions necessàries (però no suficients) per a que una terna sigui estructuralment estable.

Lema 2.1. *Si una terna de matrius* $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *és estructuralment estable, aleshores no pot tenir, alhora, part controlable, però no observable, i part observable, però no controlable.*

DEMOSTRACIÓ. Si la terna $\{A,B,C)$ tingués part controlable però no observable i part observable, però no controlable alhora, aleshores, el subsistema (2) del sistema (S) tindria solucions no trivials, i, pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) no és estructuralment estable, ◇

Lema 2.2. *Si una terna de matrius* $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *és estructuralment estable, aleshores la part controlable i observable alhora de la matriu* A_c *està constituïda únicament per blocs nilpotents de mida 1, és a dir,* $\rho_1^{co}(A,B,C) = t$.

DEMOSTRACIÓ. Si la matriu $A_3 \neq 0$, aleshores els subsistemes (2) i (10) del sistema (S) tenen solucions no trivials, i, pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) no és estructuralment estable, $\diamond$

Lema 2.3. *Si una terna de matrius* $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *és estructuralment estable, aleshores no pot tenir divisors elementals finits, és a dir,* $\rho_1^J(\lambda)(A, B, C) \geq n + t$, *essent t el nombre de divisors elementals infinits de la terna* (A,B,C), *per a tot* $\lambda \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓ. Si la terna (A, B, C) té divisors elementals finits, aleshores els subsistemes (4) i (16) del sistema (S) tenen solucions no trivials, i, pel corol·lari 1.5, la terna (A, B, C) no seria estructuralment estable, $\diamond$

Lema 2.4. *Si una terna de matrius* $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *és estructuralment estable, aleshores B i C tenen rang màxim. Es a dir,*

$$\operatorname{rang} B = \min\{n,m\}, \qquad \operatorname{rang} C = \min\{n,p\}.$$

DEMOSTRACIÓ. Es conseqüència immediata de la semicontinuïtat inferior del rang d'una matriu.

Directament, aquest resultat es pot provar també de la forma següent. Observem en primer lloc que

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} B_c, \qquad \operatorname{rang} C = \operatorname{rang} C_c,$$

ja que $B_c = PBV$ i $C_c = WCP^{-1}$ per a unes certes matrius $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ i $W \in Gl_p(\mathbb{C})$.

Pels lemes 2.1, 2.2 i 2.3, només poden donar-se tres casos:

$$A_c = A_3, \qquad A_c = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{o bé} \quad A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix},$$

amb $A_3 = 0$ en els tres casos.

Cas 1. Si $A_c = A_3 = 0$, aleshores

$$B_c = I_n \quad \text{si } n = m, \quad \text{o bé} \quad B_c = (\, 0_{n\times(m-n)} \mid I_n \,), \quad \text{si } n < m,$$

i

$$C_c = I_n \quad \text{si } n = p, \quad \text{o bé} \quad C_c = \begin{pmatrix} 0_{(p-n)\times n} \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix} \text{ si } n < p.$$

Aleshores és obvi que rang B_c = rang$C_c = n = \min\{n,m\} = \min\{n,p\}$.

Cas 2. Si $A_c = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_3 \end{pmatrix}$ amb $A_3 = 0$, aleshores

$$B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \quad \text{si } m = r + t, \quad \text{o bé} \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{pmatrix} \quad \text{si } m > r + t,$$

i

$$Cc = (0_{p\times n-t} \quad | \quad I_t) \quad \text{si } p = t, \quad \text{o bé} \quad C_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \quad \text{si } p > t.$$

Per a que el sistema (5) només tingui la solució trivial, les matrius Z_1^2 i Z_2^4 en la partició del sistema (5) no poden aparèixer. Per tant, la segona possibilitat per a la matriu C_c no pot donar-se. Si $C_c = (0 \mid I_t)$, aleshores és clar que rang$C = t = p = \min\{n,p\}$.

D'altra banda, per a que no tinguem paràmetres provinents del subsistema (17) del sistema (*S*), ha de passar que, o bé per a tot *i*, $k_i = 1$ i llavors $B_1 = I_r$ i rang$B = r + t = n = \min\{m,n\}$ o bé m — *r* — $t = 0$ i llavors la segona possibilitat per a la matriu B_c no pot donar-se. En aquest cas també és clar que rang$B = \min\{m,n\}$.

Cas 3. Si $A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix}$, amb $A_3 = 0$, aleshores

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ I_t \end{pmatrix} \quad \text{si } m = t \quad \text{o bé} \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \text{si } m > t.$$

i

$$C_c = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \text{si } p = \text{s} + \text{í} \quad \text{o bé} \quad \text{C}_\text{c} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \text{si } p > s + t.$$

Per a que (*S*) només tingui la solució trivial, les matrius Y_2^2 i Y_2^4 en la partició del sistema (*S*) no poden aparèixer. Per tant, la segona possibilitat per a la matriu B_c no pot donar-se. Si $B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_t \end{pmatrix}$, aleshores és clar que rang$B_c = t = n = \min\{n, m\}$.

D'altra banda, per a que no tinguem paràmetres provinents del subsistema (19) del sistema (S), ha de passar que, o bé per a tot i, l_i- = 1 i llavors $C_1 = I_s$ i rang$C_c = n$ = min $\{p, n\}$ o bé $p - s - t = 0$ i llavors la segona possibilitat per a la matriu C_c no pot donar-se. Aleshores és clar que rang$C$ = rang$C_c = p$ = min$\{p, n\}$. ◇

Lema 2.5. *Si una terna de matrius* $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *és estructuralment estable aleshores:*

(a) *Si* $A_c = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_3 \end{pmatrix}$, *els seus índexs minimals per columnes o bé són iguals o bé difereixen en una unitat.*

(b) *Si* $A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix}$, *els seus índexs minimals per files o bé són iguals o bé difereixen en una unitat.*

DEMOSTRACIÓ, (a) En cas contrari, el subsistema (1) del sistema (S) té solució no trivial, (b) En cas contrari, el subsistema (6) del sistema (S) té solució no trivial, o

Observació 2.6. 1) Si posem, com sempre, r al nombre d'índexs minimals per columnes no nuls de la terna *(A, B,C), s* al nombre d'índexs minimals per files no nuls i t al nombre de divisors elementals infinits, aleshores

$$\text{rang}B = \text{rang}B_c = r + t,$$

$$\text{rang}C = \text{rang } C_c = s + t.$$

Suposem que la terna (A, B, C) és estructuralment estable. Tenim en aquest cas:

2) Si rang$B$ = rang$C$, aleshores $r = s$ i, pel lema 2.1, $r = s = 0$. Llavors, pel lema 2.3, $A_c = A_3$i, pel lema 2.2, $A_c = 0$. Per tant, $B_c = I_n$ en el cas en que $n = m$ i $B_c = (0 \mid I_n)$ en el cas en que $n < m$. I $C_c = I_n$ en el cas en que $p = n$, $C_c = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ I_n \end{pmatrix}$ en el cas en que $p > n$. Es evident que els casos $n > m$ i $n > p$ no es poden donar, és a dir, que en aquesta situació no hi ha ternes estructuralment estables.

3) Si rang$B$ > rang$C$, aleshores $r > s$ i, pel lema 2.1, $s = 0$. Tenint en compte els

lemes 2.2, 2.3 i 2.5, $A_c = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_3 \end{pmatrix}$ amb $A_3 = 0$. A més,

$$B_c = \begin{cases} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = I_n & \text{si} \quad m = n, \\ \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{pmatrix} & \text{si} \quad m > n, \\ \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} & \text{si} \quad m < n. \end{cases}$$

En aquest darrer cas, els índexs minimals per columnes de la terna no poden diferir en més d'una unitat, segons s'ha vist en la demostració del lema 2.4.

I C_c — $(0_{p\times(n-p)} \mid I_p)$.

4) Si rang$B$ < rang$C$, aleshores $r < s$ i, pel lema 2.1, $r = 0$. Tenint en compte els lemes 2.2, 2.3 i 2.5, $A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix}$ amb $A_3 = 0$, i $B_c = \begin{pmatrix} 0_{(n-p)\times m} \\ \cdot \\ I_m \end{pmatrix}$. A més,

$$C_c = \begin{cases} \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = I_n & \text{si} \quad p = n, \\ \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} & \text{si} \quad p > n, \\ \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} & \text{si} \quad p < n. \end{cases}$$

En aquest darrer cas, els índexs minimals per files no poden diferir en més d'una unitat, pel lema 2.4.

Amb l'ajut d'aquests lemes i de l'observació anterior passem ara a caracteritzar les ternes de matrius estructuralment estables.

Teorema 2.7. *Segons les diferents relacions entre n, m i p, l'estabilitat estructural d'una terna ve caracteritzada per les següents relacions.*

1) $n \leq \min\{m,p\}$. Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment estable si i només si la forma reduïda (A_c,B_c,C_c) d'aquesta terna és:

$$A_c = 0, \quad B_c = (0_{n\times(m-n)} \quad | \quad I_n) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}), \quad C_c = \begin{pmatrix} 0_{(p-n)\times n} \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C}).$$

2) $m > p$, $n \geq p$. Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment estable si i només si la forma reduïda (A_c,B_c,C_c) d'aquesta terna és:

$$Ac = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & \\ & I_p \end{pmatrix}, \qquad C_c = (0_{p\times(n-p)} \quad | \quad I_p)$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat.

3) $p > m$, $n \geq m$. Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment estable si i només si la forma reduïda (A_c,B_c,C_c) d'aquesta terna és:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ \cdot \\ I_m \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} C_1 & \\ & I_m \end{pmatrix}$$

i els índexs minimals per files de la terna no difereixen en més d'una unitat.

4) $m = p < n$. No hi ha cap terna estructuralment estable.

DEMOSTRACIÓ. Provarem aquest teorema distingint els diferents casos segons la relació que hi hagi entre m, n i p.

1) Estudiarem els diferents casos que es poden donar.

Cas 1: $n = m = p$. Suposem (A,B,C) estructuralment estable. Aleshores pel lema 2.4, rang$B$ = rang$C$ = n i, per 2) de l'observació 2.6, $A_c = 0$, $B_c = I_n$ i $C_c = I_n$.

Recíprocament. Si $A_c = 0$, $B_c = I_n$ i $C_c = I_n$, el sistema (S) només té la solució trivial. Per la proposició 1.4, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

Cas 2: $n = m < p$. Suposem (A,B,C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, rang$B$ = rang$C$ = n. Per 2) de l'observació 2.6, $A_c = 0$, $B_c = I_n$ i $C_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$

Recíprocament. Si $A_c = 0$, $B_c = I_n$ i $C_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$, aleshores $C_cZ = 0$ implica $Z = 0$ i l'única solució del sistema (5) és la trivial. Per la proposició 1.4, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

Cas 3: $n = p < m$. Suposem (A,B,C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, rang B = rang$C$ = n. Per 2) de l'observació 2.6, $A_c = 0$, $B_c = (0 \mid I_n)$ i $C_c = I_n$.

Recíprocament. Si $A_c = 0$, $B_c = (0 \mid I_n)$ i $C_c = I_n$, l'única solució del sistema (S) és la trivial, ja que $Y(0 \mid I_n)$ implica $Y = 0$. Per la proposició 1.4, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

Cas 4: $n < m = p$, o bé $n < m < p$, o bé $n < p < m$. Si (A, B, C) és estructuralment estable, aleshores, pel lema 2.4, rang$B$ = rang$C$ = n. Per 2) de l'observació 2.6, $A_c = 0$, $B_c = (0 \mid I_n)$ i $C_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$

Recíprocament. Suposem que (A, B, C) és una terna tal que $A_c = 0$, $B_c = (o \mid I_n)$ i $C_c \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$ Aleshores

$$C_cZ = 0 \Rightarrow Z = 0,$$

$$YB_c = 0 \Rightarrow Y = 0,$$

$$XB_c = 0 \Rightarrow X = 0,$$

i l'única solució del sistema (S) és la trivial. Per la proposició 1.4, (A, B, C) és estructuralment estable.

2) Cas 1: $n = m > p$. Suposem (A,B,C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, rang$B$ $= n$ i rang$C = p$. Per 3) de l'observació 2.6,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } \quad A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \text{ i } \quad C_c = (0 \quad | \quad I_t).$$

Evidentment, $t = p$ en aquest cas.

Recíprocament. Suposem que (A, B, C) *és* tal que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } \quad A_3{=}0, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \text{ i } \quad C_c = (0 \quad | \quad I_p),$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. En aquest cas, el sistema (S) descompon en els subsistemes

$$\left.\begin{aligned} A_1X_1^1 - X_1^1A_1 + B_1Y_1^1 &= 0\\ X_1^1B_1 &= 0\\ Y_1^1B_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} A_1X_3^1 + B_1Y_3^1 - Z_3^1 &= 0\\ X_3^1 &= 0\\ Y_3^1 &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned} -X_1^3A_1 + Y_1^3 &= 0\\ X_1^3B_1 &= 0\\ Y_1^3B_1 &= 0\\ X_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (9) \qquad \left.\begin{aligned} Y_3^3 - Z_3^3 &= 0\\ X_3^3 &= 0\\ Y_3^3 &= 0\\ Z_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (11)$$

si

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_3^1 \\ X_1^3 & X_3^3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_3^1 \\ Y_1^3 & Y_3^3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_3^1 & Z_3^3 \end{pmatrix}.$$

D'aquí deduïm directament que

$$X_1^3 = 0, \quad X_3^1 = 0, \quad X_3^3 = 0,$$
$$Y_1^3 = 0, \quad Y_3^1 = 0, \quad Y_3^3 = 0,$$
$$Z_3^1 = 0, \quad Z_3^3 = 0.$$

A més, per ser els índexs minimals per columnes de la terna tal com s'ha indicat abans, l'única solució del subsistema (1) és la trivial, segons es veu en l'observació 3.7 del capítol 2. Observem que $n = \sum_{1\le i\le r} k_i + \sum_{1\le i\le t} m_i$ i $p = t = s + t$.

Pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

Cas 2: $m > n > p$. Suposem (A, B, C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, rang$B = n$ i rang$C = p$. Per 3) de l'observació 2.6,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{pmatrix} \text{i} \quad C_c = (0 \mid I_t).$$

Evidentment, també $t = p$ en aquest cas.

Recíprocament. Suposem que (A, B, C) és tal que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \text{ i } \quad C_c = (0 \quad | \quad I_p),$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. En aquest cas, el sistema (S) descompon en els subsistemes

$$\left.\begin{aligned} A_1X_1^1 - X_1^1A_1 + Y_1^1 &= 0 \\ X_1^1 &= 0 \\ Y_1^1 &= 0 \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} A_1X_3^1 + Y_3^1 - Z_3^1 &= 0 \\ X_3^1 &= 0 \\ Y_3^1 &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned} -X_1^3A_1 + Y_1^3 &= 0 \\ X_1^3 &= 0 \\ Y_1^3 &= 0 \\ X_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (9) \qquad \left.\begin{aligned} Y_3^3 - Z_3^3 &= 0 \\ X_3^3 &= 0 \\ Y_3^3 &= 0 \\ Z_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (11)$$

$$Y_1^2 = 0 \ (17) \qquad\qquad Y_3^2 = 0 \ (18)$$

si
$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_3^1 \\ X_1^3 & X_3^3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_3^1 \\ Y_1^2 & Y_3^2 \\ Y_1^3 & Y_3^3 \end{pmatrix}, \quad Z = (Z_3^1 \quad Z_3^3).$$

D'aquí deduïm directament que

$$X_3^1 = 0, \quad X_1^3 = 0, \quad X_3^3 = 0,$$
$$Y_3^1 = 0, \quad Y_1^2 = 0, \quad Y_3^2 = 0, \quad Y_1^3 = 0, \quad Y_3^3 = 0,$$
$$Z_3^1 = 0, \quad Z_3^3 = 0.$$

A més, per ser els índexs minimals per columnes de la terna tal com s'ha indicat abans, l'única solució del subsistema (1) és la trivial, segons es veu en l'observació 3.7 del capítol 2. Observem que $n = \sum_{1 \leq i \leq r} k_i + \sum_{1 \leq i \leq t} m_i$ i $m = r + t$.

Pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) *és* estructuralment estable.

Cas 3: $n > m > p$. Suposem (A, B,C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, $\operatorname{rang}B = m$ i $\operatorname{rang}C = p$. Per 3) de l'observació 2.6,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \text{ i } C_c = (0 \mid I_t),$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. Evidentment, $t = p$ en aquest cas.

Recíprocament. Suposem que (A, B, C) *és* tal que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \text{ i } C_c = (0 \mid I_p),$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. En aquest cas, el sistema (S) descompon en els subsistemes

$$\left.\begin{aligned} A_1X_1^1 - X_1^1A_1 + B_1Y_1^1 &= 0 \\ X_1^1B_1 &= 0 \\ Y_1^1B_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} A_1X_3^1 + B_1Y_3^1 - Z_3^1 &= 0 \\ X_3^1 &= 0 \\ Y_3^1 &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned} -X_1^3A_1 + Y_1^3 &= 0 \\ X_1^3B_1 &= 0 \\ Y_1^3B_1 &= 0 \\ X_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (9) \qquad \left.\begin{aligned} Y_3^3 - Z_3^3 &= 0 \\ X_3^3 &= 0 \\ Y_3^3 &= 0 \\ Z_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (11)$$

si
$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_3^1 \\ X_1^3 & X_3^3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_3^1 \\ Y_1^3 & Y_3^3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_3^1 & Z_3^3 \end{pmatrix}.$$

D'aquí deduïm directament que

$$X_1^3 = 0, \quad X_3^1 = 0, \quad X_3^3 = 0,$$
$$Y_1^3 = 0, \quad Y_3^1 = 0, \quad Y_3^3 = 0,$$
$$Z_3^1 = 0, \quad Z_3^3 = 0.$$

A més, per ser els índexs minimals per columnes de la terna tal com s'ha indicat abans, l'única solució del subsistema (1) és la trivial, segons es veu en l'observació 3.7 del capítol 2. Observem que $n = \sum_{1\leq i\leq r} k_i + \sum_{1\leq i\leq t} m_i$ i $m = r + t$.

Pel corol·lari 1.5, la terna (A, B, C) és estructuralment estable.

3) Cas 1: $n = p > m$. Suposem (A, B, C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, $\operatorname{rang} B = m$ i $\operatorname{rang} C = p$. Per 4) de l'observació 2.6,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{amb } A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ I_t \end{pmatrix} \text{ i } \quad C_c = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = I_n,$$

i els índexs minimals per files de la terna no difereixen en més d'una unitat. Evidentment, $t = m$ *en* aquest cas.

Recíprocament. Suposem que (A,B,C) és tal que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } \quad A_3 = 0, \; B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ I_m \end{pmatrix} \text{ i } \quad C_c = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix},$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. En aquest cas, el sistema (S) descompon en els subsistemes

$$\left.\begin{aligned} A_2X_2^2 - X_2^2A_2 - Z_1^2 &= 0 \\ X_2^2 &= 0 \\ Z_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (6) \qquad \left.\begin{aligned} A_2X_3^2 - Z_3^2 &= 0 \\ X_3^2 &= 0 \\ Z_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (7)$$

$$\left.\begin{aligned} -X_3^2A_2 + Y_2^3 - Z_1^3 &= 0 \\ X_2^3 &= 0 \\ Z_1^3 &= 0 \\ X_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (10) \qquad \left.\begin{aligned} Y_3^3 - Z_3^3 &= 0 \\ X_3^3 &= 0 \\ Y_3^3 &= 0 \\ Z_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (11)$$

si

$$X=\begin{pmatrix} X_2^2 & X_3^2 \\ X_2^3 & X_3^3 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} Y_2^3 & Y_3^3 \end{pmatrix}, \quad Z=\begin{pmatrix} Z_1^2 & Z_3^2 \\ Z_1^3 & Z_3^3 \end{pmatrix}.$$

D'aquí deduïm directament que

$$X_2^2 = 0, \quad X_3^2 = 0, \quad X_2^3 = 0, \quad X_3^3 = 0,$$
$$Y_2^3 = 0, \quad Y_3^3 = 0,$$
$$Z_1^2 = 0, \quad Z_3^2 = 0, \quad Z_1^3 = 0, \quad Z_3^3 = 0.$$

A més, per ser els índexs minimals per files de la terna tal com s'ha indicat abans, l'única solució del subsistema (6) és la trivial, segons es veu en l'observació 3.8 del capítol 2. Observem que $n = \sum_{1\leq i\leq s} l_i + \sum_{1\leq i\leq t} m_i$ i $m = r + t = t$.

Pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

Cas 2: $n > p > m$. Suposem (A,B,C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, rang$B$ = m i rang$C = p$. Per 4) de l'observació 2.6,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ amb } A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ I_t \end{pmatrix} \text{ i } C_c = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix},$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. Evidentment, $t = m$ en aquest cas.

Recíprocament. Suposem que (A,B,C) és tal que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_m \end{pmatrix} \text{ i } C_c = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix},$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat. En aquest cas, el sistema (S) descompon en els subsistemes

$$\left.\begin{aligned} A_2X_2^2 - X_2^2A_2 - Z_1^2C_1 &= 0\\ C_1Z_1^2 &= 0\\ C_1X_2^2 &= 0 \end{aligned}\right\}(6) \qquad \left.\begin{aligned} A_2X_3^2 - Z_3^2 &= 0\\ X_3^2 &= 0\\ C_1Z_3^2 &= 0\\ C_1X_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned} -X_2^3A_2 + Y_2^3 - Z_1^3C_1 &= 0\\ X_2^3 &= 0\\ Z_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\}(10) \qquad \left.\begin{aligned} Y_3^3 - Z_3^3 &= 0\\ X_3^3 &= 0\\ Y_3^3 &= 0\\ Z_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\}(11)$$

si $X = \begin{pmatrix} X_2^2 & X_3^2 \\ X_2^3 & X_3^3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_2^3 & Y_3^3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1^2 & Z_3^2 \\ Z_1^3 & Z_3^3 \end{pmatrix}.$

D'aquí deduïm directament que

$$X_2^3 = 0, \quad X_3^2 = 0, \quad X_3^3 = 0,$$
$$Y_3^2 = 0, \quad Y_3^3 = 0,$$
$$Z_1^2 = 0, \quad Z_3^2 = 0, \quad Z_1^3 = 0, \quad Z_3^3 = 0.$$

A més, per ser els índexs minimals per columnes de la terna tal com s'ha indicat abans, l'única solució del subsistema (6) és la trivial, segons es veu en l'observació 3.8 del capítol 2. S'observa que $n = \sum_{1\leq i\leq s} l_i + \sum_{1\leq i\leq t} m_i$ i $m = t = s + t$.

Pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

Cas 3: $p > n > m$. Suposem (A, B, C) estructuralment estable. Aleshores, pel lema 2.4, rang$B$ = m i rang$C = p$. Per 4) de l'observació 2.6,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{amb} \quad A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_t \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C_c = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix},$$

i els índexs minimals per files de la terna no difereixen en més d'una unitat. Evidentment, $t = p$ en aquest cas.

Recíprocament. Suposem que (A,B,C) és tal que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{amb} \quad A_3 = 0, \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ I_m \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C_c = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

i els índexs minimals per files de la terna no difereixen en més d'una unitat. En aquest cas, el sistema (S) descompon en els subsistemes si

$$\left.\begin{aligned} A_2X_2^2 - X_2^2A_2 - Z_1^2C_1 &= 0 \\ C_1Z_1^2 &= 0 \\ C_1X_2^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (6) \qquad \left.\begin{aligned} A_2X_3^2 - Z_3^2 &= 0 \\ X_3^2 &= 0 \\ C_1Z_3^2 &= 0 \\ C_1X_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (7)$$

$$\left.\begin{aligned} -X_2^3A_2 + Y_2^3 - Z_1^3C_1 &= 0 \\ X_2^3 &= 0 \\ Z_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (10) \qquad \left.\begin{aligned} Y_3^3 - Z_3^3 &= 0 \\ X_3^3 &= 0 \\ Y_3^3 &= 0 \\ Z_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (11)$$

si $X = \begin{pmatrix} X_2^2 & X_3^2 \\ X_2^3 & X_3^3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_2^3 & Y_3^3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1^2 & Z_3^2 \\ Z_1^3 & Z_3^3 \end{pmatrix}.$

D'aquí deduïm directament que

$$\begin{aligned} &X_3^2 = 0, \quad X_2^3 = 0, \quad X_3^3 = 0, \\ &Y_3^3 = 0, \\ &Z_3^2 = 0, \quad Z_1^3 = 0, \quad Z_3^3 = 0. \end{aligned}$$

A més, per ser els índexs minimals per columnes de la terna tal com s'ha indicat abans, l'única solució del subsistema (6) és la trivial, segons es veu en l'observació 3.8 del capítol 2.

Pel corol·lari 1.5, la terna (A,B,C) és estructuralment estable.

4) Si $m = p$ i (A,B,C) és estructuralment estable, aleshores, pel lema 2.4, rang$B$ = rang$C$. Per (2) de l'observació 2.6, en aquesta situació no hi ha cap terna estructuralment estable, ◇

D'aquest teorema es dedueix de forma immediata el corol·lari següent.

Corol·lari 2.8. *En el cas $m = p < n$ no hi ha ternes estructuralment estables. En tots els altres casos, hi ha una única òrbita formada per ternes estructuralment estables.*

DEMOSTRACIÓ. En cadascun dels quatre casos, les condicions sobre la fornia reduïda canònica de les ternes estructuralment estables ens determina de forma única aquesta forma reduïda canònica, ◇

§3. Altres criteris d'estabilitat estructural

Sigui $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ una terna de matrius qualsevol.

Sigui $I = (I_n, 0, 0, I_m, I_p)$ l'element unitat de $\mathcal{G}$

Posem $\mathcal{L} = T_I\mathcal{G} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Observem que $\mathcal{L}$ és isomorf a $\mathbb{C}^l$, amb $l = n^2 + m^2 + p^2 + mn + np$.

Considerem Gr($\mathcal{L}$), el conjunt de tots els subespais vectorials de $\mathcal{L}$ amb la mètrica *gap* definida a la secció §5 del capítol 0.

L'espai tangent $T_I\mathcal{E}st(A,B,C)$ és un subespai vectorial de C i, per tant, un element de Gr($\mathcal{L}$).

Notació 3.1. Posarem $\mathfrak{Est}(A,B,C) = T_I\mathcal{E}st(A,B,C)$.

Observació 3.2. Com que

$$\mathcal{E}st(A,B,C)=\left\{(P,J,K,V,W)\in\mathcal{G}\,\middle|\,\begin{pmatrix}P&K\\0&W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\J&V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(P,J,K,V,W)\in\mathcal{G}\,\middle|\,\begin{pmatrix}P&K\\0&W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&0\\-V^{-1}JP&V^{-1}\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(P,J_1,K,V_1,W)\in\mathcal{G}\,\middle|\,\begin{pmatrix}P&K\\0&W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&0\\J_1&V_1\end{pmatrix}\right\},$$

tenim

$$\mathfrak{Est}(A,B,C)=\left\{(X,Y,Z,T,U)\in\mathcal{L}\,\middle|\,\begin{pmatrix}X&T\\0&U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&0\\Y&Z\end{pmatrix}=0\right\}=$$

$$=\left\{(X,Y,Z,T,U)\in\mathcal{L}\,\middle|\,\left.\begin{array}{r}XA-AX+ZC-BY=0\\XB-BT=0\\UC-CX=0\end{array}\right\}\right\}.$$

Per la proposició 1.4 (d), la terna (A,B,C) és estructuralment estable si i només si $\dim\mathcal{O}(A,B,C)$ — $m^2+mn+np$. Com que $\mathcal{E}st(A,B,C)$ és difeomorf a $\mathcal{G}/\mathcal{O}(A,B,C)$, la terna (A,B,C) és estructuralment estable si i només si $\dim\mathcal{E}st(A,B,C)=m^2+p^2$.

Així, la terna (A,B,C) és estructuralment estable si i només si $\dim\mathfrak{Est}(A,B,C)=m^2+p^2$. Equivalentment, si i només si $\mathfrak{Est}(A,B,C)\in\mathrm{Gr}_{m^2+p^2}(\mathcal{L})$.

Notació 3.3. Posem

$$\mathbf{M}(A,B,C)=\begin{pmatrix}A^t\otimes I_n-I_n\otimes A&-I_n\otimes B&C^t\otimes I_n&0&0\\B^t\otimes I_n&0&0&-I_m\otimes B&0\\-I_n\otimes C&0&0&0&C^t\otimes I_p\end{pmatrix},$$

$\mathbf{M}(A,B,C)\in\mathcal{M}_{(n^2+mn+np)\times(n^2+m^2+p^2+mn+np)}(\mathbb{C})$.

Proposició 3.4. *Es compleix que*

$$(X,Y,Z,T,U) \in \mathfrak{Est}(A,B,C) \iff \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \\ vec(T) \\ vec(U) \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \mathbf{M}(A,B,C).$$

DEMOSTRACIÓ. Utilitzant el producte de Kronecker i l'operador vectorialitzador definits a la secció 4 del capítol 0, l'equació

$$\begin{pmatrix} X & T \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} = 0.$$

és equivalent a l'equació vectorial

$$\begin{pmatrix} A^t \otimes I_n - I_n \otimes A & -I_n \otimes B & C^t \otimes I_n & 0 & 0 \\ B^t \otimes I_n & 0 & 0 & -I_m \otimes B & 0 \\ -I_n \otimes C & 0 & 0 & 0 & C^t \otimes I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \\ vec(T) \\ vec(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim així el resultat que volíem provar, ◇

Corol·lari 3.5. *Tenim que*

$$\text{rang } \mathbf{M}(A, B, C) = n^2 + m^2 + p^2 + mn + np - \dim \mathfrak{Est}(A, B, C).$$

DEMOSTRACIÓ. Es conseqüència immediata de la proposició anterior, ja que

$$\text{rang } M(A, B,C) = n^2 + m^2 + p^2 + mn + np - \dim \operatorname{Ker}\mathbf{M}(A, B, C) =$$

$$= n^2 + rn^2 + p^2 + mn + np - \dim \mathfrak{Est}(A, B, C), \text{ com}$$

volíem provar, ◇

Podem donar una nova caracterització de les ternes estructuralment estables, que només depèn del rang de la matriu **N**(*A*, *B*, *C*) i dels ordres de les matrius que constitueixen la terna.

Proposició 3.6. *Una terna de matrius* (A, B, C) *és estructuralment estable si i només si la matriu* $\mathbf{M}(A, B, C)$ *té rang* (*màxim*) *igual a* $n^2 + mn + np$.

DEMOSTRACIÓ. Per l'observació 3.2, la terna (A,B,C) és estructuralment estable si i només si

$$\dim \mathfrak{Est}(A,B,C) = m^2 + p^2.$$

Equivalentment, pel corol·lari 3.5, si i només si

$$\begin{aligned}\operatorname{rang} \mathbf{M}(A, B, C) &= n^2 + m^2 + p^2 + mn + np - \dim \mathfrak{Est}(A, B, C) = \\ &= n^2 + mn + np,\end{aligned}$$

com volíem provar, $\diamond$

Podem definir una aplicació $\mathfrak{Est}$, que a cada terna de matrius li associa l'espai tangent al seu estabilitzador.

Definició 3.7. Anomenarem $\mathfrak{Est}$ a l'aplicació

$$\begin{aligned}\mathfrak{Est} : \mathcal{M}_{nmp} &\longrightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{L}) \\ (A, B, C) &\longrightarrow \mathfrak{Est}(A, B, C).\end{aligned}$$

Observació 3.8. Si identifiquem $\mathcal{L}$ amb $\mathcal{M}_{(n^2+m^2+p^2+mn+np)\times 1}(\mathbb{C})$, aleshores, per la proposició 3.4, podem definir també l'aplicació $\mathfrak{Est}$ de la manera següent

$$\begin{aligned}\mathfrak{Est} : \mathcal{M}_{nmp} &\longrightarrow \mathcal{M}_{(n^2+m^2+p^2+mn+np)\times 1}(\mathbb{C}) \\ (A, B, C) &\longrightarrow \operatorname{Ker} \mathbf{M}(A, B, C).\end{aligned}$$

Sigui X una varietat diferenciable. Considerem una família diferenciable de ternes de matrius parametritzada en X, és a dir, una aplicació

$$\begin{aligned}\varphi : X &\longrightarrow \mathcal{M}_{nmp} \\ t &\longrightarrow (A(t), B(t), C(t)).\end{aligned}$$

Tenim aleshores el teorema següent.

Teorema 3.9. *Sigui X una varietat diferenciable i $\varphi : X \to \mathcal{M}_{nmp}$ una família dife-renciable de ternes de matrius. La família d'estabilitzadors $\mathfrak{Est} \circ \varphi : X \to$* **Gr**($\mathcal{L}$) *és diferenciable en $t_0 \in X$ si i només si existeix un entorn $\mathcal{U}$ de to tal que el rang de les matrius* $\mathbf{M}(A(t),B(t),C(t))$ *és constant per a tot $t \in \mathcal{U}$*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $\operatorname{rang}\mathbf{M}(A(t),B(t),C(t))$ és constant per a tot $t \in \mathcal{U}$. Aleshores $\dim\operatorname{Ker}\mathbf{M}(A(t),B(t),C(t))$ és constant per a tot $t \in U$.

L'aplicació $f : \mathcal{M}_{nmp} \longrightarrow \mathcal{M}_{(n^2+mn+np)\times(n^2+mn+np-m^2+p^2)}(\mathbb{C})$

$$(A,B,C) \longrightarrow \mathbf{M}(A,B,C)$$

és òbviament diferenciable. Aleshores l'aplicació $\overline{\varphi} = f \circ \varphi$ *és* diferenciable i $\overline{\varphi} : X \to \mathcal{M}_{(n^2+mn+np)\times(n^2+mn+np-m^2+p^2)}(\mathbb{C})$ defineix una família diferenciable de matrius.

Tenint en compte (IV.1.6) de [**Fe-Gar-Pu 94**], concloem que Ker $\mathbf{M}(A(t), B(t), C(t))$ defineix una família diferenciable de subespais.

Recíprocament. Suposem que per a tot entorn U de t_0 el rang de $\mathbf{M}(A(t),B(t),C(t))$ no és constant. Aleshores existeix $t_1 \in U$ tal que

$$\operatorname{rang}\mathbf{M}(A(t_1),B(t_1),C(t_1)) \neq \operatorname{rang}\mathbf{M}(A(t_0),B(t_0),C(t_0)).$$

Per tant,

$$\dim(\mathfrak{Est}\circ\varphi)(t_1) = \dim\ \operatorname{Ker}\varphi(t_1) \neq \dim\ \operatorname{Ker}\varphi(t_0) = \dim(\mathfrak{Est}\circ\varphi)(t_0),$$

i, segons s'ha vist a la secció §5 del capítol 0,

$$\Theta((\mathfrak{Est}\circ\varphi)(t_1),(\mathfrak{Est}\circ\varphi)(t_0)) = 1.$$

Així, l'aplicació$\mathfrak{Est} \circ \varphi$ no és contínua i, per tant, no és diferenciable. $\diamond$

En particular, aquest teorema es pot aplicar al cas en que $X = \mathcal{O}(A, B, C)$ i φ és la inclusió natural. Llavors tenim el corol·lari següent.

Corol·lari 3.10. *(A,B,C) és estructuralment estable si i només si l'aplicació $\mathfrak{Est}$ és diferenciable a (A,B,C).*

DEMOSTRACIÓ. Es immediat a partir del teorema, ja que, per la proposició 3.6, la terna (A, *B, C)* és estructuralment estable si i només si rang$\mathbf{M}$(A, *B, C*) $= n^2 + mn + np$. Equi-valentment, si i només si existeix un entorn U d'aquesta terna tal que per a tota terna $(A', B', C') \in U$, rang$\mathbf{M}$(A, *B, C)* $= n^2 + mn + np$. El resultat es dedueix ara aplicant el teorema, ◇

Aquest resultat es pot expressar, òbviament, en termes dels elements de $\mathbf{Gr}(\mathcal{L})$. Tenim llavors

Corol·lari 3.11. *Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment estable si i només si existeix un entorn $\mathcal{U}$ de (A,B,C) en $\mathcal{M}_{nmp}$ tal que*

$$\mathfrak{Est}(\mathcal{U}) \subset \mathbf{Gr}_{m^2+p^2}(\mathcal{L}).$$

Observació 3.12. El resultat del teorema 3.9 és vàlid, en general, en el sentit següent: si X és una varietat diferenciable sobre la que actua un grup de Lie $\mathcal{G}$, i considerem la relació d'equivalència induïda per aquesta acció, aleshores, per a tot $x \in X$, les condicions següents són equivalents:

(a) x és estructuralment estable.

(b) $\mathcal{O}(x)$ és obert.

(c) $\dim\mathcal{O}(x) = \dim X$.

(d) $\dim\mathcal{E}st(x) = \dim\mathcal{G} - \dim X$.

Podem considerar de forma anàloga a 3.7 l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathfrak{Est} : X &\longrightarrow \mathbf{Gr}(T_I\mathcal{G}) \\ x &\longrightarrow T_I(\mathcal{E}st(x)) \end{aligned}$$

amb $I \in \mathcal{G}$ l'element identitat de $\mathcal{G}$

Aleshores tindríem que x és estructuralment estable si i només si l'aplicació $\mathfrak{Est}$ és diferenciable en x.

Observem que l'únic canvi que s'hauria d'introduir en la demostració feta en el teorema 3.9 i en el corol·lari 3.10 és que $\mathfrak{Est}(x)$ és el nucli d'una certa matriu $\mathbf{M}(x)$, de la que en aquest cas, a diferència del cas de les ternes, al ser l'espai qualsevol, i l'acció també qualsevol, no se'n té una expressió general. De fet, el que interessa conèixer d'aquesta matriu és el seu rang, del que en general només poden afirmar que és inferior o igual a $\dim T_I\mathcal{G}$, ja que aquest és el nombre de columnes de la matriu.

§4. Caràcter genèric de l'estabilitat estructural

Sigui X una varietat diferenciable. Seguint la definició de J. C. Willems a [**Will 78**] es té la definició següent.

Definició 4.1. Es diu que una subvarietat Y de X és genèrica quan és oberta i densa, i la seva frontera és reunió de subvarietats de dimensió més petita.

Veurem que en els diferents casos, segons la relació entre n, m i p, les òrbites formades per ternes de matrius estructuralment estables són genèriques.

Observació 4.2. Es evident que si una òrbita és un conjunt genèric, aleshores aquesta òrbita està formada per ternes estructuralment estables.

També tenim, el teorema següent.

Teorema 4.3. *Sigui $\mathcal{O}$ una òrbita formada per ternes estructuralment estables. Aleshores aquesta òrbita és un conjunt genèric.*

DEMOSTRACIÓ. Observem que no podem estar en el cas $m = p < n$. Sigui, doncs, $\mathcal{O}$ una òrbita formada per ternes estructuralment estables. Sigui (A, B, C) una terna qualsevol de $\mathcal{M}_{nmp}$, i sigui (A_c, B_c, C_c) la seva forma reduïda canònica. Ja sabem que $\mathcal{O}$ és obert. Vegem ara que és un conjunt dens.

Suposem que $n < \min\{m,n\}$. Considerem, per a tot $e > 0$, la terna $(A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$, amb $A(\varepsilon) = A_c$, $B(\varepsilon) = B_c + Y(\varepsilon)$, on $Y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}} I_n & | \; 0 \end{pmatrix}$, $C(\varepsilon) = C_c + Z(\varepsilon)$, on $Z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}} I_n \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tenim aleshores que

$$\operatorname{rang} C(\varepsilon)B(\varepsilon) = n,$$

i, per tant,

$$\rho_0^{\mathrm{co}}(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) = n,$$
$$\rho_j^{\mathrm{c}}(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) = 0, \ \forall j \leq n,$$
$$\rho_j^{\mathrm{o}}(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) = 0 \ \forall j \leq n,$$

i la terna $(A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$ no té cap valor propi. Per tant, la terna $(A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$ és estructuralment estable per a tot e > 0. Aleshores

$$\|(A, B, C) - (A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon))\| = \|(0, Y(\varepsilon), Z(\varepsilon))\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = \varepsilon,$$

i, per tant, la terna $(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) \in B((A,B,C),\varepsilon) \ \forall \varepsilon$.

Suposem ara que $n > m = p$. Considerem, per a tot $e > 0$, la terna $(A(\varepsilon)$,-$B(\varepsilon), C(\varepsilon))$, amb $A(\varepsilon) = A_c$, $B(\varepsilon) = B_c + Y(\varepsilon)$, on $Y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2m}} I_m \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ i $C(\varepsilon) = C_c + Z(\varepsilon)$, on $Z(e) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2m}} I_m & \cdot \; 0 \end{pmatrix}$.

Tenim ara que

$$\operatorname{rang} C(\varepsilon)B(\varepsilon) = m,$$

i, per tant,

$$\rho_0^{\mathrm{co}}(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) = m,$$
$$\rho_j^{\mathrm{c}}(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) = 0 \ \forall j \leq n,$$
$$\rho_j^{\mathrm{o}}(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) = 0 \ \forall j \leq n.$$

Aleshores $(A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$ *és* una terna equivalent, amb la relació d'equivalència donada en la secció §1 del capítol 1 a la terna (A_1, B_1, C_1), essent $A_1 = \begin{pmatrix} 0_m & \\ & J \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} I_m \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ Ci = $(I_m \mid 0)$. Sigui $g = (P,J,K,V,W) \in \mathcal{G}$ tal que $\alpha((P, J, K, V, W), (A_1, B_1, C_1)) = (A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$.

Sabem que les matrius diagonals que tenen valors propis diferents en la diagonal són denses en l'espai de matrius quadrades ([**Ar 71**], entre altres). Per tant, existeix una matriu D diagonal, amb elements $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-m}$ a la diagonal (tots ells diferents), i tal que $D \in B(J, \frac{\varepsilon}{2k})$, amb $k = \|g_1\| \cdot \|g_2\|$, essent $g_1 = \begin{pmatrix} P & J \\ 0 & W \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ K & V \end{pmatrix}$

Considerem la terna (A_2, B_2, C_2) tal que $A_2 = \begin{pmatrix} 0_m & \\ & D \end{pmatrix}$ $B_2 = -B_1$, $C_2 = C_1$. Finalment diem $(A_3,B_3,C_3) = \alpha((P,J,K,V,W),(A_2,B_2,C_2))$.

Tenim ara

$$\begin{aligned}
&\|(A_c, B_c, C_c) - (A_3, B_3, C_3)\| = \\
&= \|(A_c, B_c, C_c) - (A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) + \\
&\qquad (A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) - (A_3, B_3, C_3)\| \leq \\
&\leq \|(A_c, B_c, C_c) - (A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)\| + \\
&\qquad \|(A_c, B(\varepsilon), C(\varepsilon)) - (A_3, B_3, C_3)\| \leq \\
&\leq \|(A_c, B_c, C_c) - (A_c, B(\varepsilon), C(\varepsilon))\| + \\
&\qquad \|\alpha(g, (A_1, B_1, C_1)) - \alpha(g, (A_3, B_3, C_3))\| = \\
&= \|(0, Y(\varepsilon), Z(\varepsilon))\| + \|g_1 \begin{pmatrix} A_1 - A_3 & B_1 - B_3 \\ C_1 - C_3 & 0 \end{pmatrix} g_2\| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2m}} \sqrt{2m} + \|g_1\| \|g_2\| \|J - D\| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Així,

$$(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{B}((A, B, C), \varepsilon).$$

Suposem ara que $n \geq m > p$. Considerem $A(\varepsilon) = A_c$, $B(\varepsilon) = B_c + Y(\varepsilon)$, $C(\varepsilon) = C_c + Z(\varepsilon)$, essent $Y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{m+p}} I_p & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{m} I_{m-p} \end{pmatrix}$, i $Z(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{1\sqrt{m+p}} I_p \mid 0 \right)$. Llavors $(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon))$ és equivalent a la terna $(A_1, B_1, C_1) = \left(\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & \\ & I_p \end{pmatrix}, (I_p \mid 0) \right)$.

Sigui $g \in \mathcal{G}$ l'element tal que $\alpha((g,(A_1,B_1,C_1)) — (A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$. Com que el conjunt de parelles de matrius estructuralment estables és dens en l'espai de parelles de matrius ([**Gar 94**]), existeix una parella (A_2,B_2) estructuralment estable tal que $(A_2, B_2) \in \mathcal{B}((A_1, B_1), \frac{\varepsilon}{2k})$ essent $k = \|g_1\| \cdot \|g_2\|$ amb $g_1 = \begin{pmatrix} P & J \\ 0 & W \end{pmatrix}$,$g_2 = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ K & V \end{pmatrix}$

Considerem la terna $(A_3,B_3,C_3) = \alpha(g_1(A_2,B_2,C_2))$ on (A_2,B_2,C_2) és la terna amb $A_2 = \begin{pmatrix} \overline{A_1} & \\ & A_3 \end{pmatrix}$,$B_2 = \begin{pmatrix} \overline{B_1} & \\ & I_p \end{pmatrix}$, $C_2 = (I_P\, 0)$.

De forma anàloga al cas anterior, es comprova que

$$\|(A,B,C)-(A_3,B_3,C_3)\| \leq \varepsilon,$$

i, per tant,

$$(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon)) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{B}((A, B, C); \varepsilon).$$

Si $n < m$, $m > p$, $n \geq p$, aleshores considerem la terna $(A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$ amb $A(\varepsilon) = A_c$, $B(\varepsilon) = B_c + Y(\varepsilon)$, on $Y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+p}} I_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+p}} I_{n-p} & 0 \end{pmatrix}$ i $C(\varepsilon) = C_c + Z(\varepsilon)$, on $Z(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n+p}} \; 0 \right)$.

Tenim que $(A(\varepsilon),B(\varepsilon),C(\varepsilon))$ és equivalent a la terna (A_1,B_1,C_1) amb $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ i $C_1 = (I_P\, 0)$, i de forma similar als casos anteriors es veu que pertany a $\mathcal{O} \cap \mathcal{B}((A, B, C); \varepsilon)$.

Per últim, si $p > m$, $n \geq m$, podem considerar la terna (A^t,B^t,C^t), ja que llavors podem aplicar el resultat en els casos tercer i quart anteriors.

Finalment, per a veure que la frontera està formada per òrbites de dimensió inferior. Pel corol·lari 2.8, existeix una única òrbita foramda per ternes estructuralment estables, que, per la proposició 1.4, té dimensió $m^2 + mn + np$, i totes les altres tenen dimensió estrictament menor. Per tant, la seva frontera està formada per òrbites de dimensió inferior. ◇