

# Capítulo 3

## Consideraciones teóricas

### 3.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido giratorio accionado mediante un actuador lineal

En este apartado se deducirán las ecuaciones del movimiento de un sólido rígido giratorio accionado mediante un actuador lineal.

El estudio del comportamiento de una viga rígida giratoria nos aporta una información parcial del comportamiento de una viga flexible giratoria, pues la respuesta de esta última se puede describir como una combinación de la respuesta debida a sus modos de vibración mas su respuesta como sólido rígido.

#### 3.1.1 Análisis geométrico.

Observando el triangulo  $O_2O_4O$  en la figura 3.1 se obtienen las expresiones de los ángulos siguientes:

$$\alpha = \arctg \frac{OO_2}{OO_4} \quad \text{y} \quad \beta = \arctg \frac{OO_4}{OO_2} .$$

Estudiando el triangulo  $O_2O_4B$ , se obtiene, aplicando el teorema del coseno, la siguiente expresión:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overline{O_2O_4}^2 - \overline{O_4B}^2 - (\overline{O_2A} - \overline{AB})^2}{2 \overline{O_4B} (\overline{O_2A} - \overline{AB})} \quad (3.1)$$

en la que  $O_2A$  es la posición del pistón en el instante considerado. Debido a la configuración geométrica el ángulo  $(\alpha - \beta)$  siempre está en los dos primeros cuadrantes.

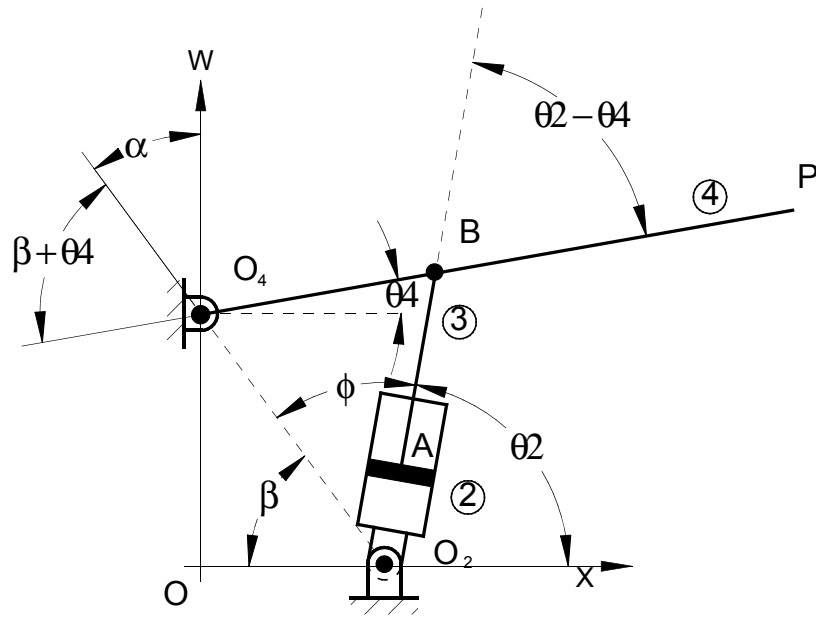


Figura 3.1 Viga rígida giratoria, accionada mediante un actuador lineal

De manera similar se obtiene:

$$\cos(\theta_4) = \frac{\overline{O_2O_4}^2 + \overline{O_4B}^2 - (\overline{O_2A} + \overline{AB})^2}{2 \overline{O_4B} \overline{O_2O_4}} \quad (3.2)$$

y en consecuencia:

$$\theta_4 = \arccos\left(\frac{\overline{O_2O_4}^2 + \overline{O_4B}^2 - (\overline{O_2A} + \overline{AB})^2}{2 \overline{O_4B} \overline{O_2O_4}}\right) \quad (3.3).$$

De manera similar se puede obtener:

$$\theta_2 = 180^\circ - \arccos\left(\frac{\overline{O_2O_4}^2 + \overline{O_4B}^2 - (\overline{O_2A} + \overline{AB})^2}{2 \overline{O_4B} \overline{O_2O_4}}\right) \quad (3.4).$$

### 3.1.2 Análisis cinemático.

La velocidad del punto B ha de ser la misma en el sólido 4 y en el 3; así pues:

$$\omega_2 \overline{O_2A} v_{A3/2} = \omega_4 \overline{O_4B} \quad (3.5)$$

en la que  $v_{A3/2}$  es la velocidad relativa del punto A del sólido 3 (el pistón) respecto a un sistema de referencia solidario a 2 (el cilindro).

Desarrollando esta expresión y separando las componentes se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite obtener las velocidades angulares de los sólidos 2 y 4 :

$$v_4 = \frac{1}{O_4 B} \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_4) v_{A3/2} \quad (3.6)$$

$$v_2 = \frac{1}{O_2 B} \cos(\alpha_2 - \alpha_4) \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_4) v_{A3/2} \quad (3.7)$$

### 3.1.3 Análisis dinámico: ecuación de Lagrange.

La expresión de la ecuación del movimiento, utilizando Lagrange, es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{A3/2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{A3/2}} = F_{cil} \quad (3.8)$$

en la que  $x_{A3/2}$  es la posición del punto A del sólido 3 (el pistón) respecto a un sistema de referencia solidario a 2 (el cilindro).  $F_{cil}$  es la fuerza que recibe el pistón debida a la presión del aceite. El desarrollo de esta expresión es muy largo, debido a que en el Lagrangiano L hay que incluir las expresiones de la energía cinética y potencial de todos los cuerpos que intervienen. Por ello se ha incluido el desarrollo en el Anexo 3.1. La expresión final resultante se encuentra en la Fig. 3.2.

La expresión obtenida puede ser utilizada de dos maneras diferentes. Por un lado es la ecuación diferencial del movimiento y podría ser utilizada para calcular el movimiento del conjunto bajo la acción de una fuerza conocida aplicada por el actuador. Por otro lado puede ser utilizada para calcular la fuerza que ha de aplicar el actuador para conseguir un movimiento

La ecuación diferencial resultante es muy compleja y resulta difícil valorar sus términos, la mayoría de los cuales dependen de parámetros geométricos variables (posición del cilindro y ángulos). Además los términos obtenidos son de difícil interpretación física.

Llegados a este punto sería interesante poder contrastar esta expresión utilizando un método alternativo. Se ha optado por emplear el método de las potencias virtuales, pues está basado en un enfoque muy diferente y ofrece resultados fáciles de interpretar físicamente.

$$\begin{aligned}
& F_{cil} = (m_2 \overline{O_2 G_2}^2 I_{G2}) \left[ \frac{1}{x_{A3/2}} \frac{1}{\overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right]^2 a_{A3/2} \dots \\
& 2 \left[ \frac{(m_2 \overline{O_2 G_2}^2 I_{G2})}{x_{A3/2} \overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right] v_{A3/2} \left[ \frac{(\theta_2 - \theta_4) \cos 2(\theta_2 - \theta_4)}{(x_{A3/2} \overline{AB})} \right] \dots \\
& 2 \left[ \frac{(m_2 \overline{O_2 G_2}^2 I_{G2})}{x_{A3/2} \overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right] v_{A3/2} \left[ \frac{\frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) v_{A3/2}}{(x_{A3/2} \overline{AB})^2} \right] \dots \\
& (m_2 \overline{O_2 G_2}^2 I_{G2}) \left( \frac{1}{x_{A3/2} \overline{AB}} \frac{1}{x_{A3/2} \overline{AB}} (\theta_2 - \theta_4) \cos 2(\theta_2 - \theta_4) \right) \dots \\
& m_2 g \overline{O_2 G_2} \cos(\theta_2) \frac{1}{O_2 B} \cos(\theta_2 - \theta_4) \sin(\theta_2 - \theta_4) \dots \\
& [m_3 (x_{A3/2} \overline{AG_3})^2 I_{G3}] \left[ \frac{1}{x_{A3/2}} \frac{1}{\overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right]^2 a_{A3/2} \dots \\
& 2 \left[ \frac{[m_3 (x_{A3/2} \overline{AG_3})^2 I_{G3}]}{x_{A3/2} \overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right] v_{A3/2} \left[ \frac{(\theta_2 - \theta_4) \cos 2(\theta_2 - \theta_4)}{(x_{A3/2} \overline{AB})} \right] \dots \\
& 2 \left[ \frac{[m_3 (x_{A3/2} \overline{AG_3})^2 I_{G3}]}{x_{A3/2} \overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right] v_{A3/2} \left[ \frac{\frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) v_{A3/2}}{(x_{A3/2} \overline{AB})^2} \right] \dots \\
& 2 m_3 (x_{A3/2} \overline{AG_3}) \left[ \frac{1}{x_{A3/2}} \frac{1}{\overline{AB}} \frac{1}{2} \sin 2(\theta_2 - \theta_4) \right]^2 v_{A3/2}^2 m_3 a_{A3/2} \dots \\
& [m_3 (x_{A3/2} \overline{AG_3})^2 I_{G3}] \left( \frac{1}{x_{A3/2} \overline{AB}} \frac{1}{x_{A3/2} \overline{AB}} (\theta_2 - \theta_4) \cos 2(\theta_2 - \theta_4) \right) \dots \\
& m_3 g \sin \theta_2 m_3 g (x_{A3/2} \overline{AG_3}) \cos(\theta_2) \frac{1}{O_2 B} \cos(\theta_2 - \theta_4) \sin(\theta_2 - \theta_4) \dots \\
& (m_4 \overline{O_4 G_4}^2 I_{G4}) \left[ \frac{1}{O_4 B} \sin(\theta_2 - \theta_4) \right]^2 a_{A3/2} \dots \\
& 2 (m_4 \overline{O_4 G_4}^2 I_{G4}) \left[ \frac{1}{O_4 B} \sin(\theta_2 - \theta_4) \right] v_{A3/2} \left[ \frac{(\theta_2 - \theta_4) \cos(\theta_2 - \theta_4)}{O_4 B} \right] \dots \\
& (m_4 \overline{O_4 G_4}^2 I_{G4}) \frac{1}{O_4 B} (\theta_2 - \theta_4) \cos(\theta_2 - \theta_4) \dots \\
& m_4 g \overline{O_4 G_4} \cos(\theta_4) \frac{1}{O_2 B} \sin(\theta_2 - \theta_4)
\end{aligned}$$

Figura 3.2 Ecuación diferencial del movimiento (sólidos rígidos)

### 3.1.4 Análisis dinámico: potencias virtuales.

La suma de las potencias de todas las fuerzas que actúan en el mecanismo ha de ser cero:

$$F_{cil} v_{A3/2} = F_{Gi}^x v_{Gi}^x + (F_{Gi}^y + m_i g) v_{Gi}^y + M_{Gi} \dot{\theta}_i = 0 \quad (3.9)$$

en la que la expresión de las fuerzas de inercia ( según el principio de d'Alembert) es:

$$F_{Gi}^x = -m_i \ddot{x}_{Gi} \quad F_{Gi}^y = -m_i \ddot{y}_{Gi} \quad M_{Gi} = -I_{Gi} \ddot{\theta}_i \quad (3.10).$$

De esta expresión se ha despejado  $F_{cil}$  en la fig. 3.3.

$$F_{cil} = \frac{1}{v_{A3:2}} [F_{G2}^x v_{G2}^x + (F_{G2}^y + m_2 g) v_{G2}^y + M_{G2} \dot{\theta}_2] \dots$$

$$\frac{1}{v_{A3:2}} [F_{G3}^x v_{G3}^x + (F_{G3}^y + m_3 g) v_{G3}^y + M_{G3} \dot{\theta}_3] \dots$$

$$\frac{1}{v_{A3:2}} [F_{G4}^x v_{G4}^x + (F_{G4}^y + m_4 g) v_{G4}^y + M_{G4} \dot{\theta}_4]$$

Figura 3.3 Fuerza que aplica el actuador (sólidos rígidos)

Para contrastar ambos métodos se ha preparado en el Anexo 3.2 una hoja de cálculo MathCad en la que se estudia la evolución de  $F_{cil}$  en un ciclo recorrido con una velocidad arbitraria. Puede verse que el error relativo está acotado en 0.0004555, por lo que, desde un punto de vista práctico, ambos métodos dan el mismo resultado.

## 3.2 Ecuaciones del movimiento de una viga flexible giratoria

### Planteamiento general

En este apartado se estudiarán las ecuaciones del movimiento de una viga flexible giratoria, con una masa en su extremo, teniendo en cuenta los efectos de la fuerza centrífuga y la de Coriolis.

Para hacer mas sencillo el estudio se considera un actuador giratorio en el eje de giro. Además es mas general, pues las ecuaciones obtenidas pueden particularizarse muy fácilmente para un actuador lineal (cilindro hidráulico o neumático). Nótese que la presencia del actuador lineal en un punto intermedio de la viga divide a esta en dos regiones, en las que las ecuaciones que describen las deformaciones de la elástica son diferentes.

Los sistemas de coordenadas utilizados se pueden ver en la figura 3.4:  $a_i$  son los ejes de coordenadas de un sistema de referencia galileano y  $b_i$  son los ejes de coordenadas de un sistema de referencia ( en rotación) solidario a la viga considerada como sólido rígido.

### 3.2.1 Hipótesis utilizadas.

Para obtener las ecuaciones se supondrán las siguientes hipótesis:

- 1) se considerará movimiento plano (en  $a_1$ - $a_3$ ),
- 2) pequeñas deformaciones,
- 3) el esfuerzo cortante contribuye perceptiblemente a la deformación de la viga,
- 4) el momento de inercia de las rebanadas no es despreciable.

Las dos últimas hipótesis son características de la viga de Timoshenko.

Implícitamente se supone que habrá que considerar el efecto de las fuerzas de inercia. Como existe un giro del sistema de referencia definido por los ejes  $b_i$ , es de esperar que aparezcan fuerzas centrífugas. Como además existe un desplazamiento relativo en el plano, también hay que esperar fuerzas de Coriolis

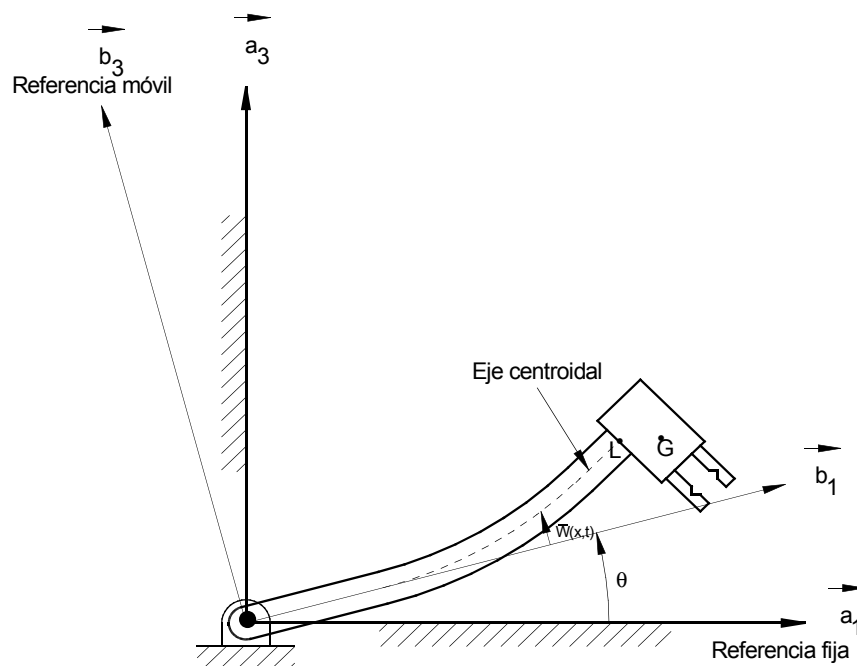


Figura 3.4 Sistemas de referencia utilizados.

### 3.2.2 Cinemática de un punto de la viga.

Para poder estudiar la dinámica de la viga es necesario conocer primero sus movimientos. Así pues se estudiará el movimiento de un elemento infinitesimal de la viga de masa  $dm$ . El desplazamiento de cualquier punto de la viga respecto al sistema de coordenadas rotatorio será, en general:

$$d = u(x,y,z,t) b_1 + v(x,y,z,t) b_2 + w(x,y,z,t) b_3 \quad (3.11)$$

donde  $u(x,y,z,t)$  indica el desplazamiento axial y  $w(x,y,z,t)$  el desplazamiento transversal. En nuestro caso se puede expresar así:

$$d = (\bar{u}(x,t) + z \psi(x,t)) b_1 + (\bar{w}(x,t)) b_3 \quad (3.12)$$

donde  $\bar{u}(x,t)$  es el desplazamiento axial del eje neutro y  $\bar{w}(x,t)$  es el desplazamiento transversal del eje neutro dentro del plano considerado;  $w(x,t) = \bar{w}(x,t)$  por ser viga de Timoshenko;  $\psi(x,t)$  es el “giro” de la rebanada, debido al momento flector, correspondiente al punto estudiado. El “giro” total  $\frac{d}{dx} w$  tiene dos partes, la primera debida al momento flector y la segunda al cortante. Por lo tanto:

$$\psi(x,t) = \frac{d}{dx} w(x,t) \quad (3.13).$$

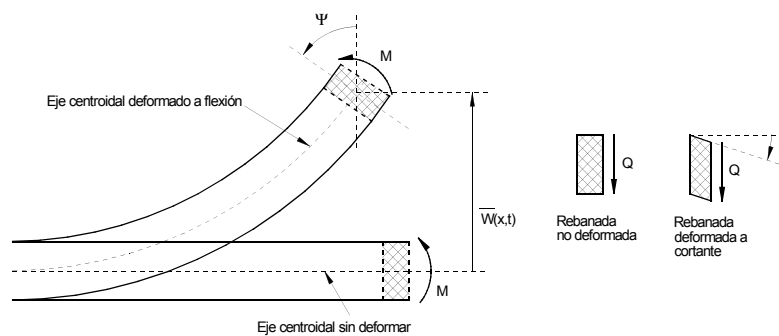


Figura 3.5 Deformación a flexión y a cortante

El vector posición del elemento infinitesimal de la viga después del desplazamiento es:

$$r = (x \ u) b_1 \ (z \ w) b_3 \quad (3.14)$$

y su velocidad es:

$$\dot{r} = \dot{v} \quad \dot{r} = u(x,t) b_1 \ w(x,t) b_3 \ (\dot{b}_2) \dot{r} \quad (3.15)$$

desarrollando los términos podemos obtener esta expresión de la velocidad:

$$\dot{r} = (z(\dot{\quad}) \ \dot{\bar{w}}) b_1 \ (\dot{\bar{w}} \ x \ z \ \dot{\quad}) b_3 = \begin{Bmatrix} (z(\dot{\quad}) \ \dot{\bar{w}}) \\ 0 \\ \dot{\bar{w}} \ x \ z \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

en la que se ha considerado que  $\bar{u}(x,t)$  es constante.

### 3.2.3 Cinemática de la carga en el extremo de la viga flexible.

La velocidad del centro de masas de la rebanada situada en x es:

$$V_x = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{w}} \\ 0 \\ x \ \dot{\bar{w}} \end{Bmatrix} \quad (3.17).$$

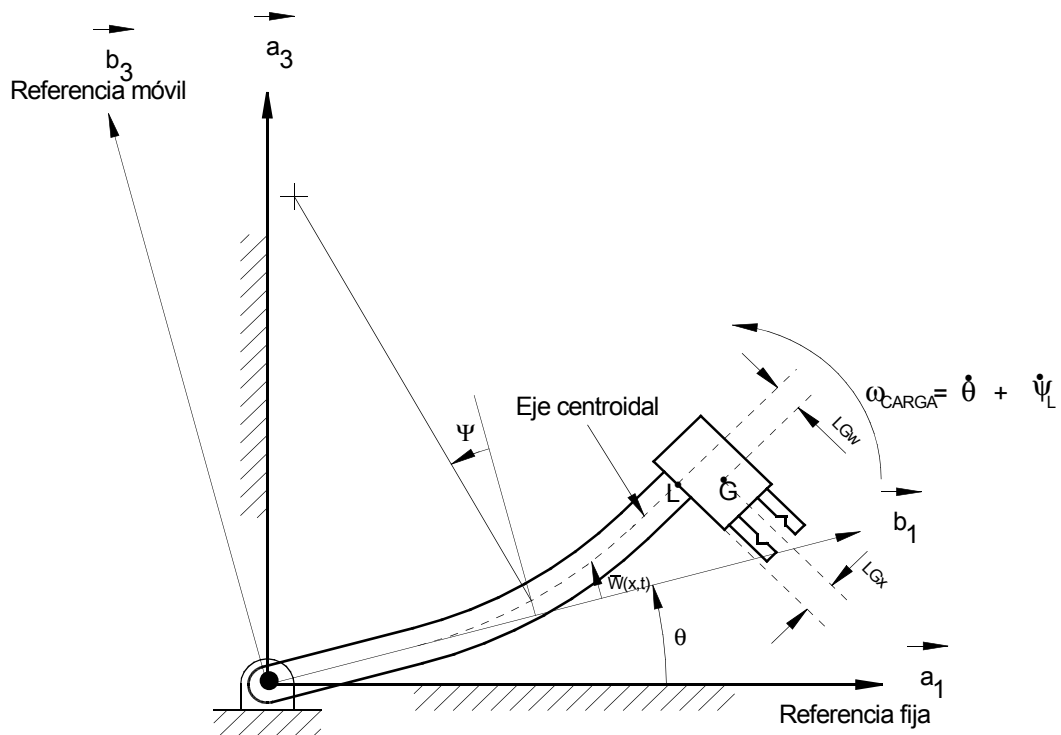


Figura 3.6 Geometría de la carga del extremo.



La velocidad absoluta del c.d.m. de la masa situada en el extremo de la viga, expresada como suma de la velocidad de arrastre y de la relativa, es:

$$V_G = \begin{Bmatrix} \bar{w}_L \\ 0 \\ L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ( \quad ) LG_w \\ 0 \\ ( \quad ) LG_x \bar{w}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_L ( \quad ) LG_w \\ 0 \\ L \bar{w}_L ( \quad ) LG_x \end{Bmatrix} \quad (3.18).$$

en las que  $LG_x$  y  $LG_w$  son las componentes del vector  $LG$ .

Nótese que la velocidad angular de la masa situada en el extremo de la viga, es la suma de la velocidad angular del sistema de referencia correspondiente al “sólido rígido” mas la velocidad angular debida al giro elástico de la rebanada:

$$CARGA = L \quad (3.19).$$

### 3.2.4 Dinámica de la viga flexible

El planteamiento de las ecuaciones del movimiento que se expone a continuación está basado en la dinámica de Lagrange. Hay que resaltar un detalle importante: la primera ecuación obtenida es esencialmente global y las otras dos ecuaciones son esencialmente locales. Ello es debido a que en la deducción de la primera se ha utilizado el Lagrangiano de toda la viga y en las otras dos el Lagrangiano de una rebanada cualquiera de la viga.

La energía cinética de la viga es la suma de tres partes: la aportación de la articulación, la aportación de la masa del extremo y la aportación de la propia viga flexible. Esto se puede expresar así:

$$E_c = \frac{1}{2} (J_H (\quad)_0)^2 + m_L V_L^2 + 2 V_L (C_{ml}) + J_{ml} \int_V r r dV \quad (3.20).$$

Para obtener la expresión (3.20) se ha considerado:

- 1) el eje x coincide con el eje centroidal y con el eje neutro,
- 2) que la viga no sufre tracciones ni compresiones en el eje neutro.

La justificación de los términos debidos a la energía cinética de la masa del extremo se encuentran en el Anexo 3.

La expresión de la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L (EI (\bar{w}')^2 + kGA (\bar{w}' - \dot{\bar{w}})^2) dx \quad dW_{fc} \quad (3.21)$$

donde  $dW_{fc}$  es el trabajo realizado por las fuerzas centrífuga y de Coriolis que vale aproximadamente:

$$dW_{fc} = F_{fc} (ds - dx) = F_{fc} \frac{1}{2} (\bar{w}')^2 dx \quad (3.22)$$

donde  $ds$  es la longitud infinitesimal del arco a lo largo del eje neutro,  $dx$  es su longitud en la viga sin deformar y  $\bar{w}$  es la coordenada  $w$  del eje neutro. Esta aproximación (Oguamanam & Heppler, 1995) coincide básicamente con (Timoshenko 1947).

### 3.2.5 Efecto de las fuerzas centrífuga y de Coriolis.

Tener en cuenta estas fuerzas de inercia complica bastante el planteamiento de las ecuaciones. En general, para una rebanada cualquiera de la viga, es posible afirmar que estas dos fuerzas de inercia tienen dos componentes, en  $x$  y en  $w$ . Su consideración es bastante diferente:

- las fuerzas en  $w$  producen un momento flector similar al que producen las otras fuerzas de inercia y su efecto aparece naturalmente al derivar el Lagrangiano sin necesidad de considerar el trabajo específico realizado por las fuerzas centrífuga y de Coriolis;
- las fuerzas en  $x$  también producen un momento flector, pero su efecto no aparece naturalmente al derivar el Lagrangiano convencional. Es por eso que se ha restado de la energía potencial el trabajo realizado por la componente  $x$  de estas fuerzas.

La componente  $x$  total, de la fuerza centrífuga y de Coriolis, es debida al movimiento de la masa del extremo y de la masa de la viga que hay entre el punto considerado y el extremo libre. Su expresión es:

$$F_{fc} = (m_L (L - LG_x) + \frac{1}{2} A (L^2 - x^2)) \dot{\bar{w}}^2 - 2 m_L (LG_x - L \bar{w}_L) \dot{\bar{w}} \bar{w}' - 2 A \int_x^L \bar{w} dx \quad (3.23)$$

donde  $LG_x$  y  $LG_w$  son las coordenadas  $x, w$  del cdg (medidas en el extremo de la viga) de la masa colocada en el extremo de la viga.

### 3.2.6 Ecuaciones de Lagrange

Las coordenadas que permiten definir la posición de la elástica en cada instante son:

- 1) el giro  $\theta$  del sistema de referencia giratorio. El eje  $x$  de este sistema señala la posición actual del eje centroidal de la viga considerada sólido rígido,
- 2) el desplazamiento  $w$  en dirección normal a  $x$ ;  $w$  marca la posición actual del eje centroidal de la viga elástica,
- 3) el giro elástico  $\psi$  debido al momento flector. Según se ha visto anteriormente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x,t) = M \quad (3.13).$$

Una vez definidas las coordenadas generalizadas es posible encontrar las ecuaciones de Lagrange correspondientes. La ecuación de Lagrange para el giro  $\theta$  es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = M \quad (3.24)$$

la ecuación para el desplazamiento  $w$  es :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial L}{\partial w} = \frac{Q_w}{x} \quad (3.25)$$

y finalmente para el giro elástico  $\psi$  es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{M}{x} \quad (3.26)$$

La primera ecuación es una ecuación global, las otras dos son las ecuaciones locales correspondientes a una rebanada de espesor  $dx$ . La utilización de ecuaciones locales evita la aparición de numerosos términos integrales ( Vg. integral extendida al sólido de la energía cinética).

El significado físico de estas ecuaciones, teniendo en cuenta el principio de d'Alembert, es el siguiente:

- 1)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = M$  : la suma de momentos en  $O_4$  es nula;
- 2)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial L}{\partial w} = \frac{Q_w}{x}$  : la suma de fuerzas  $w$  en la rebanada es nula;

$$3) \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{x} \right) - \frac{L}{x^2} = \frac{M}{x} : \text{ la suma de momentos en la rebanada es nula.}$$

### 3.2.7 Deducción de las ecuaciones de Lagrange

El desarrollo de las ecuaciones se ha realizado utilizando el programa Maple 7 (ver anexo 3.4). El proceso seguido ha sido el siguiente:

- 1) Puesta a cero de todas las variables, funciones, etc.
- 2) Se carga la librería con las operaciones de álgebra lineal.
- 3) Se determina la posición actual, medida en el extremo libre de la viga, del c.d.m. de la masa del extremo.
- 4) Se calcula la velocidad absoluta de un punto situado en el eje centroidal de la viga.
- 5) Se determina la velocidad absoluta del c.d.m. de la masa en el extremo.
- 6) Se obtiene la expresión de las fuerzas centrífuga y de Coriolis debidas a la masa en el extremo libre.
- 7) Se define la expresión de la energía cinética total.
- 8) Se obtienen las expresiones de las fuerzas centrífugas y de Coriolis que actúan en cada punto.
- 9) Se define la expresión de la energía potencial total.
- 10) Se obtiene la expresión del Lagrangiano total.
- 11) Se deriva el Lagrangiano respecto de la velocidad angular  $\dot{\theta}$ .
- 12) Se deriva el Lagrangiano respecto del ángulo  $\theta$ . Da 0, como era de esperar.
- 13) Se construye la ecuación de Lagrange para el ángulo  $\theta$ .
- 14) Se determina la expresión de la energía cinética y potencial de una rebanada.
- 15) Se obtiene la expresión del Lagrangiano de una rebanada.
- 16) Se deriva el Lagrangiano de la rebanada respecto de la velocidad  $\dot{w}$ .
- 17) Se deriva el Lagrangiano de la rebanada respecto de  $w$ .
- 18) Se define la fuerza externa que actúa en la rebanada (el esfuerzo cortante).
- 19) Se construye la ecuación de Lagrange para  $w$ .
- 20) Se deriva el Lagrangiano de la rebanada respecto de la velocidad angular  $\dot{\theta}$ .
- 21) Se deriva el Lagrangiano de la rebanada respecto del ángulo  $\theta$ .
- 22) Se define el momento externo que actúa en la rebanada.

23) Se construye la ecuación de Lagrange para .

24) Se separa el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Las ecuaciones diferenciales obtenidas son las siguientes.

Para el ángulo  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
 e6 := & J_g \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + \frac{1}{2} J_\rho \int_0^L 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) dx \\
 & - m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} W \ln(x, t) \right) dx LGx0 \cos(\psi(L, t)) \\
 & - \frac{1}{2} \rho A L^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 dx \\
 & - \frac{1}{2} \rho A L^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} W \ln(x, t) \right) dx \\
 & + 2 m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) LGx0 \sin(\psi(L, t)) W \ln(L, t) \\
 & - m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 dx LGx0 \cos(\psi(L, t)) \\
 & - 2 m_l L \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) LGw0 \sin(\psi(L, t)) \\
 & + 2 m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) LGw0 \cos(\psi(L, t)) W \ln(L, t) + J_h \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x=0, t) \right) \\
 & + J_h \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + J_g \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) \\
 & + m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) LGw0 \cos(\psi(L, t)) W \ln(L, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - m_- l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) LGw0 \sin(\psi(L, t)) L \\
& + m_- l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) LGx0 \sin(\psi(L, t)) Wln(L, t) \\
& + m_- l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) LGx0 \cos(\psi(L, t)) L \\
& + m_- l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} Wln(x, t) \right) dx LGw0 \sin(\psi(L, t)) \\
& + 2 m_- l L \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) LGx0 \cos(\psi(L, t)) \\
& + m_- l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right)^2 dx LGw0 \sin(\psi(L, t)) - \frac{1}{2} \int_0^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right) m_- l \left( \frac{\partial}{\partial t} Wln(L, t) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} Wln(x, t) \right) \\
& + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right)^2 m_- l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} Wln(L, t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right)^2 m_- l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right)^2 LGx0 \sin(\psi(L, t)) \\
& - 4 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right) m_- l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) LGw0 \sin(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} Wln(x, t) \right) \\
& - 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right)^2 m_- l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) LGw0 \sin(\psi(L, t)) \\
& - 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right)^2 m_- l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right)^2 LGw0 \cos(\psi(L, t)) \\
& + 4 \left( \frac{\partial}{\partial x} Wln(x, t) \right) A \rho \int_x^L \frac{\partial}{\partial t} Wln(x, t) dx \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} Wln(x, t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{Wln}(x, t) \right)^2 A \rho \int_x^L \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Wln}(x, t) dx dx + m_{-l} L^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \\
& + A \rho \int_0^L \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Wln}(x, t) \right) x dx + m_{-l} L G^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + m_{-l} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Wln}(L, t) \right) L \\
& + 2 m_{-l} \text{Wln}(L, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \text{Wln}(L, t) \right) + m_{-l} \text{Wln}(L, t)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \\
& + A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L 2 \text{Wln}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} \text{Wln}(x, t) \right) dx \\
& + \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{Wln}(x, t) \right) x^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \text{Wln}(x, t) \right) dx \\
& + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \int_0^L \text{Wln}(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{Wln}(x, t) \right)^2 x^2 dx \\
& + m_{-l} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Wln}(L, t) \right) L G x_0 \cos(\psi(L, t)) - m_{-l} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Wln}(L, t) \right) L G w_0 \sin(\psi(L, t)) \\
& - m_{-l} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{Wln}(x, t) \right)^2 dx L \\
& - m_{-l} \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{Wln}(x, t) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \text{Wln}(x, t) \right) dx L + \frac{1}{3} A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) L^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - M_{\theta} - 2 m_l L \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G x_0 \sin(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) \\
& + m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right)^2 L G x_0 \cos(\psi(L, t)) W \ln(L, t) \\
& - m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right)^2 L G w_0 \sin(\psi(L, t)) W \ln(L, t) \\
& - m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right)^2 L G x_0 \sin(\psi(L, t)) L - m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right)^2 L G w_0 \cos(\psi(L, t)) L \\
& + m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 dx L G x_0 \sin(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) \\
& - 2 m_l L \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G w_0 \cos(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) \\
& + 2 m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G x_0 \sin(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} W \ln(L, t) \right) \\
& + 2 m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G x_0 \cos(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) W \ln(L, t) \\
& + 2 m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G w_0 \cos(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} W \ln(L, t) \right) \\
& - 2 m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G w_0 \sin(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) W \ln(L, t) \\
& + m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 dx L G w_0 \cos(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(L, t) \right) \\
& + m_l L G^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(L, t) \right) = 0
\end{aligned}$$



Para la coordenada Wln:

$$\begin{aligned}
e17 := & dx A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W \ln(x, t) \right) + dx A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x \\
& - 2 dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) (L - x) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} W \ln(x, t) \right) \\
& - dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) (L - x) \\
& - 2 dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} W \ln(x, t) \right) \\
& - dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) - dx A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W \ln(x, t) \\
& + k G A \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} W \ln(x, t) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) \right) \right) dx = 0
\end{aligned}$$

Para el ángulo  $\psi$  :

$$\begin{aligned}
e29 := & dx J \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) \right) + dx J \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \\
& - 2 dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G x \theta \cos(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} W \ln(x, t) \right) \\
& - dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) L G x \theta \cos(\psi(L, t)) \\
& + 2 dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) L G w \theta \sin(\psi(L, t)) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} W \ln(x, t) \right) \\
& + dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 m_l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) L G w \theta \sin(\psi(L, t)) + dx k G A \psi(x, t) \\
& - dx k G A \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right) - \frac{1}{2} dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 L G x \theta \sin(\psi(L, t)) \\
& - \frac{1}{2} dx \left( \frac{\partial}{\partial x} W \ln(x, t) \right)^2 m_l \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 L G w \theta \cos(\psi(L, t)) - E J \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \right) dx = 0
\end{aligned}$$

Es especialmente delicado derivar el Lagrangiano respecto a la velocidad o a la posición. Las rutinas de MAPLE solo tienen prevista la derivación respecto de una variable y no respecto de una función. Para rodear este problema se puede aplicar la siguiente estrategia:

- 1) se sustituye la función velocidad o posición por una variable (Vg.  $v(x,t)=v$ );
- 2) se deriva el Lagrangiano respecto de  $v$ ;
- 3) se deshace la sustitución inicial.

Otro problema asociado con el uso de MAPLE (versión 7), es que la rutina que separa los sistemas de ecuaciones diferenciales no es capaz, en general, de separar sistemas de ecuaciones integro-diferenciales. Esto limita el potencial actual del modelo desarrollado.

En ingeniería el enfoque tradicional, para atacar este tipo de problemas, es plantear un modelo sencillo y contrastarlo experimentalmente. Si las predicciones del modelo concuerdan razonablemente con la realidad experimental, hay que concluir, que los aspectos no utilizados en el modelo sencillo tienen poco peso específico.

Siguiendo el camino apuntado en el párrafo anterior, en el próximo apartado se desarrolla un modelo mas sencillo, en el que se aplican las hipótesis de la viga de Euler-Bernoulli, en el que no se considera la presencia de una masa en el extremo, y en el que no se considera el efecto de la fuerza centrífuga y de Coriolis.

### **3.3 Ecuaciones del movimiento de una viga de Euler Bernoulli giratoria, sin masa en el extremo**

En el apartado anterior se ha visto que las ecuaciones obtenidas son muy complejas. En este apartado se hará un planteamiento alternativo utilizando las siguientes hipótesis, con el objetivo de obtener un sistema de ecuaciones mas sencillo.

#### **3.3.1 Hipótesis utilizadas**

Para obtener las ecuaciones se supondrán las siguientes hipótesis:

- 1) se considerará movimiento plano (en  $a_1$ - $a_3$ ),
- 2) pequeñas deformaciones,

- 3) el efecto de las fuerzas centrífuga y de Coriolis es despreciable,
- 4) el esfuerzo cortante no contribuye a la deformación de la viga,
- 5) el momento de inercia de las rebanadas es despreciable.

Las dos últimas significan que la viga cumple las hipótesis de Euler-Bernoulli. Además se considera que no hay una masa en el extremo, y que las articulaciones tienen un momento de inercia despreciable.

### 3.3.2 Deducción de las ecuaciones de Lagrange

El planteamiento de las ecuaciones de Lagrange es exactamente el mismo que en el apartado anterior. La diferencia principal consiste en que muchos términos no aparecen en el desarrollo actual. Además no hace falta plantear la ecuación en  $\theta$  pues:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad (3.27).$$

El desarrollo de las ecuaciones se ha realizado utilizando el programa Maple 7 (ver anexo 3.5). Nótese que ahora se consideran dos regiones en la viga: la 1ª va desde la articulación al actuador lineal y la 2ª del actuador lineal al extremo libre.

El proceso seguido ha sido el siguiente:

- 1) Puesta a cero de todas las variables, funciones, etc.
- 2) Se carga la librería con las operaciones de álgebra lineal.
- 3) Se calcula la velocidad absoluta de un punto situado en el eje centroidal de la viga.
- 4) Se define la expresión de la energía cinética de una rebanada.
- 5) Se define la expresión de la energía cinética total.
- 6) Se define la expresión de la energía potencial de una rebanada.
- 7) Se define la expresión de la energía potencial total.
- 8) Se obtiene la expresión del Lagrangiano total.
- 9) Se deriva el Lagrangiano respecto de la velocidad angular  $\dot{\theta}$ .
- 10) Se deriva el Lagrangiano respecto del ángulo  $\theta$ . Da 0, como era de esperar.
- 11) Se construye la ecuación de Lagrange para el ángulo  $\theta$ .
- 12) Se obtiene la expresión del Lagrangiano de una rebanada.
- 13) Se deriva el Lagrangiano de la rebanada respecto de la velocidad  $\dot{w}$ .

- 14) Se deriva el Lagrangiano de la rebanada respecto de  $\bar{w}$ .
- 15) Se define la fuerza externa que actúa en la rebanada (el esfuerzo cortante).
- 16) Se construye la ecuación de Lagrange para  $\bar{w}$ .
- 17) Se sustituyen los términos en .
- 18) Se separa el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Las ecuaciones diferenciales obtenidas, son las siguientes:

Para la coordenada  $W_{ln}$ :

$$pde1 := A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_{ln2}(x, t) \right) + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x - A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W_{ln2}(x, t) - E J \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} W_{ln2}(x, t) \right) = 0$$

$$pde3 := A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_{ln1}(x, t) \right) + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x - A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W_{ln1}(x, t) - E J \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} W_{ln1}(x, t) \right) = 0$$

Para el ángulo  $\theta$  :

$$pde6 := \int_0^{l_c} A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) W_{ln1}(x, t)^2 + 2 A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) W_{ln1}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} W_{ln1}(x, t) \right) + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_{ln1}(x, t) \right) x + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x^2 dx + \int_{l_c}^L A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) W_{ln2}(x, t)^2 + 2 A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right) W_{ln2}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} W_{ln2}(x, t) \right) + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_{ln2}(x, t) \right) x + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x^2 dx - M_{theta} = 0$$

El proceso seguido es similar al anterior. Se ha reducido notablemente la complejidad de las ecuaciones al eliminar la masa del extremo. Una vez terminada la deducción de las ecuaciones diferenciales, se ha intentado resolverlas utilizando las rutinas de MAPLE.

Como antes, ha sido incapaz de separar el sistema de ecuaciones integro-diferenciales. Aparentemente el algoritmo utilizado no ha sido preparado para una ecuación diferencial en la que la función desconocida esté derivada parcialmente dentro de una integral definida. El mensaje de error obtenido es el siguiente:

*Error, (in pdsolve/sys) not implemented for composite functions of the unknowns of the system as in*  

$$\text{int}(A*\rho*\text{diff}(\text{diff}(\theta(t),t),t)*W\ln1(x,t)^2 + 2*A*\rho*\text{diff}(\theta(t),t)*W\ln1(x,t)*\text{diff}(W\ln1(x,t),t) \\ + A*\rho*\text{diff}(\text{diff}(W\ln1(x,t),t),t)*x + A*\rho*\text{diff}(\text{diff}(\theta(t),t),t)*x^2,x = 0 .. lc)$$

### 3.3.3 Obtención de los modos propios

Aunque el algoritmo de MAPLE no está preparado para tratar estas ecuaciones diferenciales, existen otros caminos para obtener soluciones. Obsérvese la ecuación:

$$pde3 := A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W\ln1(x, t) \right) + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x - A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W\ln1(x, t) \\ - E J \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} W\ln1(x, t) \right) = 0 \quad (3.28)$$

Esta ecuación se parece mucho a la ecuación que define las oscilaciones transversales de una viga estacionaria.

Es posible deducir de la ecuación (3.28) los modos propios haciendo dos hipótesis:

- 1) los modos de vibración son normales;
- 2) que el término  $A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W\ln1(x, t)$  es despreciable si lo comparamos con los otros términos de la expresión.

La primera hipótesis es equivalente a afirmar que la solución de la ecuación es el producto de una función senoidal del tiempo por una función puramente geométrica, es decir

que  $W_{ln1}(x,t) = \sin(\omega t) W_1(x)$ . Esta hipótesis es muy asumible, ya que en el estudio experimental se han encontrado 2 modos propios de tipo normal.

Una consecuencia del planteamiento anterior es que  $W_1(x)$  ha de ser, en gran parte, combinación lineal de funciones exponenciales del tipo:

$$c_1 \cosh(K_w x) + c_2 \sinh(K_w x) + c_3 \cos(K_w x) + c_4 \sin(K_w x) \quad (3.29)$$

en la que, como se verá mas adelante,

$$K_w := \left( \frac{A \rho \omega^2}{E J} \right)^{(1/4)} \quad (3.30).$$

La segunda hipótesis no es tan evidente y su aceptación exige comparar el término supuestamente despreciable con todos los otros términos de la ecuación (3.28).

**Punto 1:**

$$A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W_{ln1}(x,t) < A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x \quad (3.31).$$

Si las oscilaciones del ángulo que forma la viga con la horizontal,  $\theta(t)$ , tuviesen 1 radián de amplitud, entonces el término  $\left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2$  sería del mismo orden de magnitud

que el término  $\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$ . Si la amplitud es mas pequeña, entonces el término  $\frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$

tiene mas peso. Aquí es necesario distinguir entre el área de trabajo de una máquina accionada mediante un cilindro oleohidráulico ( que podría acotarse en 110°) y el área de trabajo en la que actúa el servocontrol de posición ( que no suele superar el 15% del área total). Esta última sería la zona en la que se producen las oscilaciones de la viga y se puede acotar su valor:

$$Amplitud\ de\ \theta(t) < \frac{1}{2} \frac{2}{360} 110 \cdot 0.15 = 0.144$$

Además, en el apartado 3.2, se ha planteado la hipótesis de pequeñas deformaciones, por lo que  $x \gg W_{ln1}(x,t)$ . Por lo tanto se cumple (3.31) pues los términos de la derecha son iguales o mayores que los de la izquierda.

**Punto 2:**

$$A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W_{ln1}(x, t) < E J \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} W_{ln1}(x, t) \right) \quad (3.32).$$

En primer lugar, ocurrirá que

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} W_{ln1}(x, t) \cong K_w^4 W_{ln1}(x, t) \quad (3.33).$$

En segundo lugar, las oscilaciones del ángulo  $\theta(t)$  tendrán una pulsación  $\omega$  que es exactamente la misma que aparece en  $W_{ln1}(x, t) = \sin(\omega t) W_I(x)$ . Nótese que esta pulsación viene impuesta por el actuador lineal, que controla el movimiento del sólido rígido y provoca las vibraciones de la viga. En consecuencia:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 \cong \omega^2 (t)^2 \quad (3.34).$$

Sustituyendo las aproximaciones (3.33) y (3.34) en la expresión (3.32), se obtiene:

$$A \omega^2 (t)^2 \sin(\omega t) W_I(x) < E J K_w^4 \sin(\omega t) W_I(x) \quad (3.35).$$

La desigualdad (3.35) depende del valor de  $\omega^2$  pues el resto de los términos son iguales. Según se ha visto en el punto 1, es de esperar que  $\omega^2$  sea inferior a 0.02. Así pues la desigualdad (3.32) es cierta.

**Punto 3:**

$$A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 W_{ln1}(x, t) < A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_{ln1}(x, t) \right) \quad (3.36).$$

Sustituyendo en (3.36) las expresiones (3.33) y (3.34), se obtiene:

$$A \omega^2 (t)^2 \sin(\omega t) W_I(x) < A \omega^2 \sin(\omega t) W_I(x) \quad (3.37).$$

Es exactamente la misma situación que antes. La desigualdad (3.37) depende del valor de  $\omega^2$  pues el resto de los términos son iguales. Según se ha visto en el punto 1, es de esperar que  $\omega^2$  sea inferior a 0.02. Así pues la desigualdad (3.36) es cierta.

### 3.3.4 Estudio de los modos propios con MAPLE.

En el anexo 6 se ha incluido la resolución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
 pde3 := & A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} Wln1(x, t) \right) + A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) x - A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 Wln1(x, t) \\
 & - E J \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} Wln1(x, t) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

así como varias aplicaciones numéricas. También se ha incluido un apartado en el que se estudia el efecto de la constante proporcional del servosistema en las frecuencias propias.

El proceso seguido ha sido el siguiente:

- 1) Puesta a cero de todas las variables, funciones, etc.
- 2) Cargar librerías para resolver ecuaciones diferenciales.
- 3) Copiar la ecuación diferencial procedente de la hoja anterior (pde3).
- 4) Eliminar el término  $A \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 Wln1(x, t)$ .
- 5) Sustituir  $Wln1(x,t)$  por  $\sin(\omega t) Wl(x)$ .
- 6) Reagrupar todos los términos que dependen del tiempo a la derecha. Si los modos son

normales, entonces el término  $Kt$  ha de ser constante. 
$$Kt := \frac{A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right)}{\sin(\omega t + \phi)} . \tag{3.38}$$

- 7) Se reescribe la ecuación diferencial de una manera mas inteligible por el programa.
- 8) Se soluciona la ecuación diferencial.
- 9) Se define  $Kw$ : 
$$Kw := \left( \frac{A \rho \omega^2}{E J} \right)^{(1/4)} . \tag{3.30}$$
- 10) Se reescribe la solución utilizando funciones trigonométricas.
- 11) Se definen las 8 condiciones de contorno:
  - a) La articulación O4 no tiene desplazamiento vertical.
  - b) Como no hay un momento aplicado en la articulación O4, la curvatura de la línea elástica es nula para  $x=0$ .
  - c) Como no hay un momento aplicado en el extremo libre, la curvatura de la línea elástica es nula para  $x=L$ .
  - d) El cortante es nulo en el extremo libre.
  - e) En el apoyo intermedio, la posición de la elástica es la misma en los dos lados.



- f) En el apoyo intermedio, la pendiente de la elástica es la misma en los dos lados.
  - g) En el apoyo intermedio, el momento flector es el mismo a la izquierda y a la derecha.
  - h) En el apoyo intermedio, la suma de los esfuerzos cortantes y la fuerza del actuador ha de ser cero. Se define la fuerza del actuador.
- 12) Como 2 de los coeficientes son nulos, el resultado de estas condiciones de contorno es un sistema de 6 ecuaciones homogéneas. Este sistema tiene soluciones no triviales si el determinante de la matriz asociada es nulo.
  - 13) Aplicación numérica al sistema utilizado en el banco de ensayos.
  - 14) Se definen los parámetros numéricos.
  - 15) Se sustituyen en el determinante de la matriz para obtener una función de Kw.
  - 16) Se representa gráficamente esta función.
  - 17) Se obtienen soluciones numéricas de esta función dentro de los rangos que aparecen en la gráfica.
  - 18) Se repite el cálculo exigiendo máxima precisión. No cambia nada.
  - 19) Se obtienen las frecuencias propias a partir de las Kw.
  - 20) Se sustituyen los valores de Kw en el determinante. Se observa que en el tercer modo el error es notable en valor absoluto.
  - 21) Se representan las formas de la elástica para los dos primeros modos. Para ello se sustituyen los Kw propios en el sistema de 6 ecuaciones. Se asigna un valor arbitrario a c4 y se determinan los otros coeficientes.
  - 22) Se define una función para representar la elástica en toda la longitud de la viga.
  - 23) Se representan los dos primeros modos.
  - 24) Se estudia la influencia de la Kprop en los dos primeros modos.

Comentarios.

En el desarrollo se exige que Kt sea constante. Recordemos:

$$Kt := \frac{A \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right)}{\sin(\omega t + \phi)} \quad (3.38)$$

nótese que el movimiento del punto de aplicación del actuador ha de ser:

$$Wlnl(lc,t) = \sin(\omega t) WI(lc) \quad (3.39)$$

y el valor del ángulo:

$$\operatorname{tg}(\theta(t)) = \frac{Wl_n l(lc, t)}{lc} \quad (3.40)$$

Si  $Wl(lc)$  es pequeño el ángulo también ha de ser pequeño

$$\theta(t) \approx \frac{Wl_n l(lc, t)}{lc} \quad (3.41)$$

y en consecuencia

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = \frac{\omega^2 \sin(\omega t) Wl(lc)}{lc} \quad (3.42)$$

Sustituyendo en  $Kt$  queda muy claro que ha de ser constante.

$$Kt = \frac{A}{\sin(\omega t)} \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = \frac{\omega^2 Wl(lc)}{lc} \quad (3.43)$$

La solución de la ecuación diferencial es :

$$W1(x) := c1 \cosh(Kw x) + c2 \sinh(Kw x) + c3 \cos(Kw x) + c4 \sin(Kw x) + \frac{Kt x}{A \rho \omega^2} \quad (3.44)$$

$$W2(x) := c5 \cosh(Kw x) + c6 \sinh(Kw x) + c7 \cos(Kw x) + c8 \sin(Kw x) + \frac{Kt x}{A \rho \omega^2} \quad (3.45)$$

Su interpretación física es la siguiente: la línea elástica en el instante de máxima deformación es una combinación lineal de funciones exponenciales más un término proporcional a  $x$ . El coeficiente de proporcionalidad marca la pendiente que tiene el sólido rígido asociado con la viga flexible.

Efecto del servocontrol del servoactuador. Se considera que únicamente nos afecta la  $K$  proporcional del servo (después de todo el efecto neto en un ciclo de la  $K$  integral es nulo). Al apartarse el actuador de la posición consignada, el servocontrol ordena a la servoválvula que envíe más aceite al actuador, tanto más cuanto mayor es el error. El efecto neto, en una primera aproximación, es que aparecerá una fuerza restauradora similar a la de un muelle.

Sobre la resolución numérica del determinante. Cuando MAPLE resuelve las ecuaciones numéricamente solo presenta un resultado. Por eso es necesario definir un rango para encontrar cada una de las soluciones que nos interesan. Nótese que al sustituir la

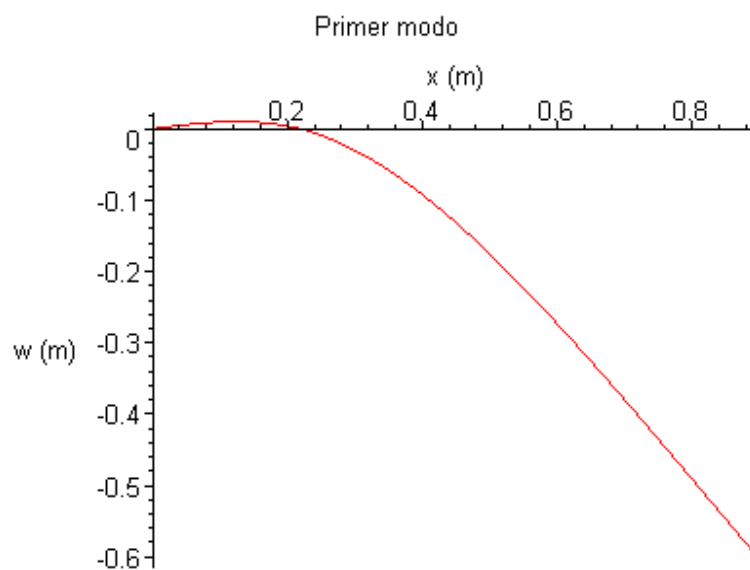
solución obtenida en el determinante, este no vale exactamente cero. Esto es debido a que la precisión de los números en un ordenador está limitada.

Los resultados obtenidos al calcular las frecuencias propias, correspondientes al sistema utilizado en los ensayos experimentales, son:

$$f_1 = 7.39 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 48.38 \text{ Hz}$$

Las formas modales obtenidas son estas (Gráficas 3.1 y 3.2):



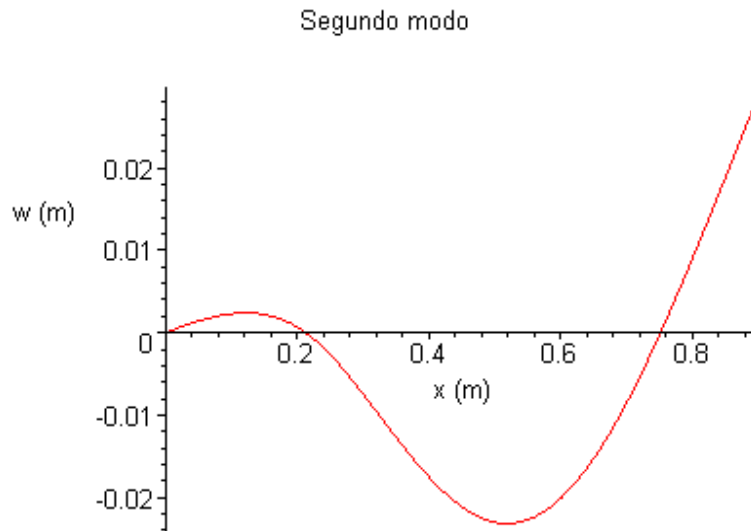
Gráfica 3.1 Forma modal del primer modo

Nótese que la dimensión vertical es arbitraria. Para poder encontrar los coeficientes del sistema de 6 ecuaciones de contorno, hay que suponer uno de ellos, pues el sistema es homogéneo.

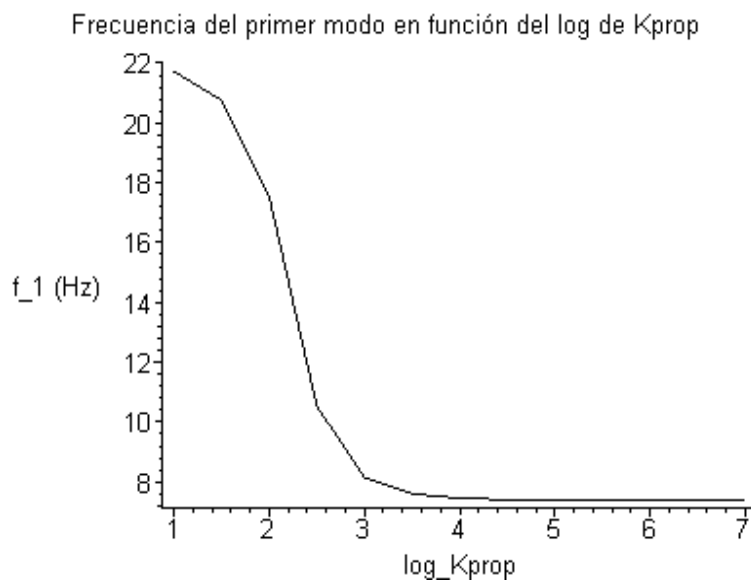
### 3.3.5 Aplicaciones numéricas con MAPLE.

#### 3.3.5.1 Efecto del coeficiente $K_{prop}$ del servosistema.

Para estudiar como afecta este coeficiente a las dos primeras frecuencias propias se ha repetido metódicamente su cálculo. En las siguientes gráficas aparecen los resultados obtenidos.



*Gráfica 3.2 Forma modal del segundo modo*

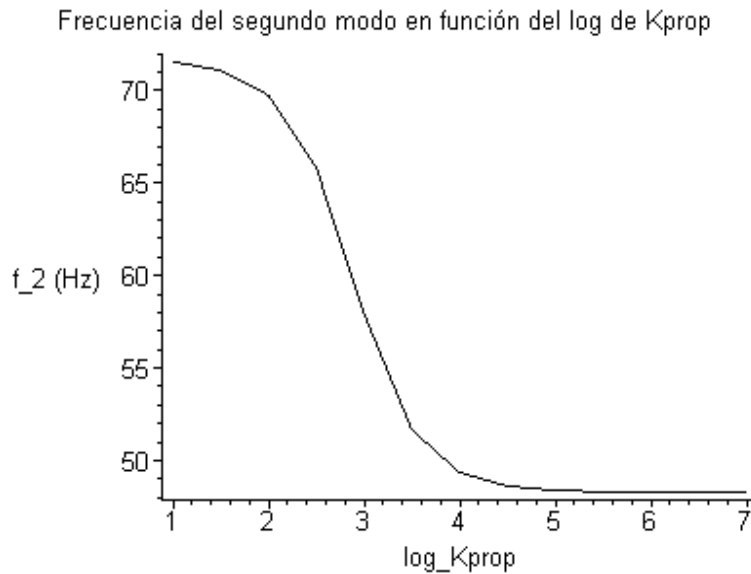


*Gráfica 3.3 Efecto de la Kprop sobre la primera frecuencia propia*

El efecto de bajar la Kprop es que la viga cada vez se parece mas a una viga articulada en un extremo (no es absolutamente cierto pues alguna restricción permanece ). La frecuencia del primer modo de una viga articulada en un extremo es, según G.S.Pisarenko:

$$f_{\text{primer modo}} = \frac{3.927}{2} \frac{\sqrt{EJ}}{L^2 A}$$

El resultado es  $f_{\text{primer modo}} = 22.15$  Hz. La coincidencia es bastante buena.



*Gráfica 3.4 Efecto de la  $K_{prop}$  sobre la segunda frecuencia propia*

Obsérvese que a partir de  $K_{prop} > 10000$  N/m el efecto sobre las frecuencias propias es muy pequeño.

### 3.3.5.2 Efecto de la posición del actuador lineal.

Una vez encontrada la ecuación que permite calcular las frecuencias propias es muy fácil hacer simulaciones numéricas con el actuador en cualquier posición. Para ello solo hay que cambiar el valor de “ $l_c$ ” y repetir el algoritmo de cálculo.

Las posiciones se han escogido de manera que sean múltiplos de  $L/8$ , excepto la última, en la que se debería haber escogido  $L$ , pero eso no es posible dado que el desarrollo utilizado obliga a que la viga tenga dos tramos.

En la tabla 3.1 se ha resumido el efecto de la posición del actuador en las dos primeras frecuencias propias.

Posición Actuador	1ª frecuencia (Hz)	2ª frecuencia (Hz)
L/8	6.03	38.28
L/4	7.38	48.38
L/2	13.03	66.98

Posición Actuador	1ª frecuencia	2ª frecuencia
3L/4	22.11	53.7
78L/80	14.91	59.65

*Tabla 3.1 Efecto de la posición del actuador sobre las frecuencias propias*