

3. MODELO TEÓRICO PROPUESTO

Se ha puesto en evidencia en el capítulo anterior que el cálculo de la capacidad de carga de cilindros oleohidráulicos debe abordarse desde 2 puntos de vista:

1. **Estudio de la inestabilidad de un cilindro oleohidráulico equivalente a una barra escalonada.** El valor de la carga crítica o de pandeo se obtiene de la resolución de la ecuación trascendental correspondiente.
2. **Estudio de la resistencia de un elemento estructural constituido por dos sólidos (cilindro y vástago) interconectados mecánicamente, con deformación inicial y carga a compresión.** El valor de la carga límite se alcanza cuando la tensión en algún punto del cilindro-vástago supera la tensión de fluencia del material.

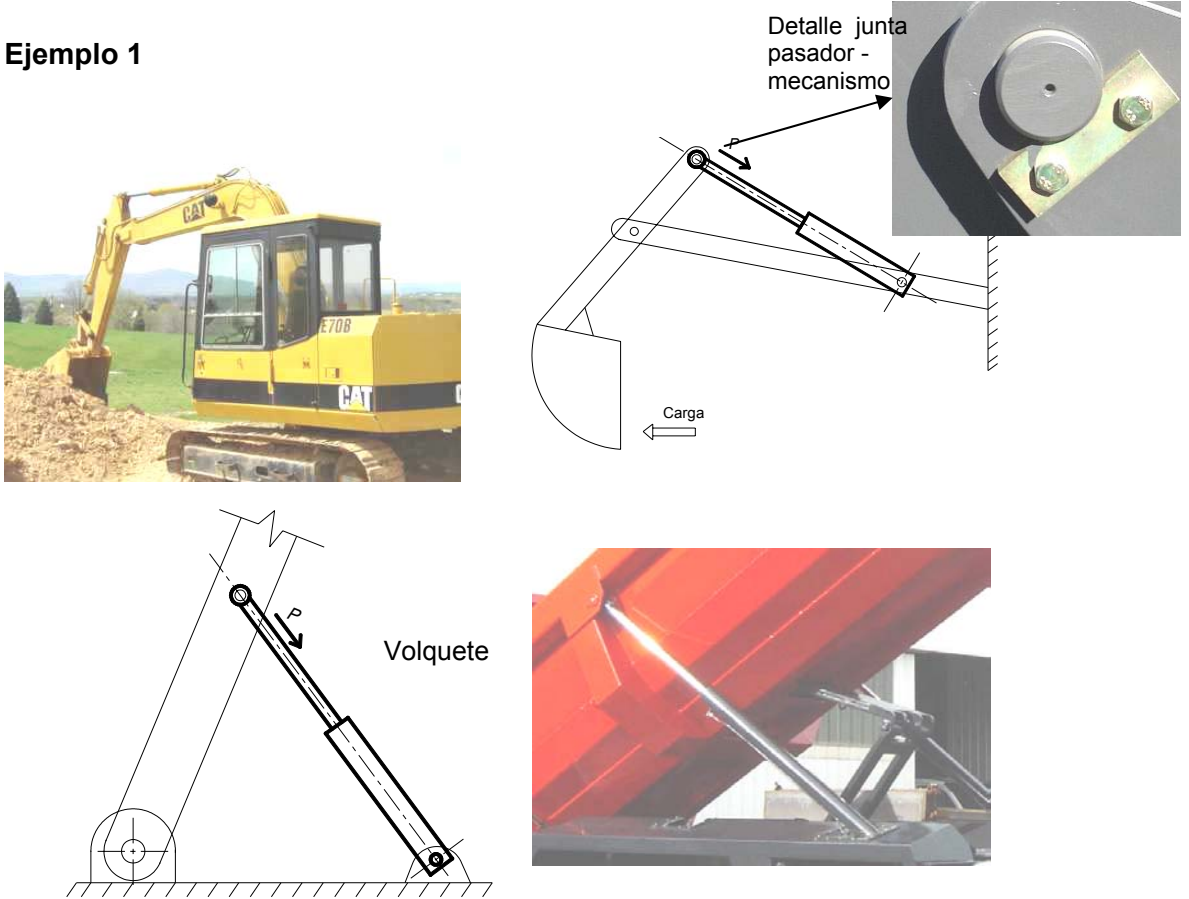
En la mayoría de los modelos propuestos hasta el presente, no se consideran las posibles influencias que puede tener el mecanismo que acciona el cilindro oleohidráulico en cuestión. Si nos limitamos al sector de la maquinaria móvil: agrícola, obras públicas, etc. podemos observar que el empleo de cilindros oleohidráulicos convencionales conlleva intrínsecamente un montaje bi-articulado. Desde el punto de vista teórico la condición de bi-articulado implica exclusivamente la presencia de cargas axiales, y apoyos ideales (sin fricción). La experiencia demuestra que esta interpretación es ideal y no se corresponde a la realidad.

De acuerdo con estos considerandos, se hace imprescindible desarrollar un modelo teórico que tenga en cuenta las fuerzas y/o momentos que se generan en las articulaciones como consecuencia de la interacción entre el cilindro oleohidráulico y el mecanismo accionado por éste (cabeza de vástago o cilindro – pasador - horquilla).

Al analizar una serie de aplicaciones convencionales, nos damos cuenta que el criterio diferenciador está en la presencia o no de un movimiento relativo entre los elementos que configuran la articulación (rotación relativa del pasador con

relación a la cabeza de vástago); bien sea, como consecuencia del movimiento del mecanismo o como consecuencia de la deformación del cilindro oleohidráulico. La Fig. 3.1 presenta algunas de estas aplicaciones.

Ejemplo 1



Ejemplo 2

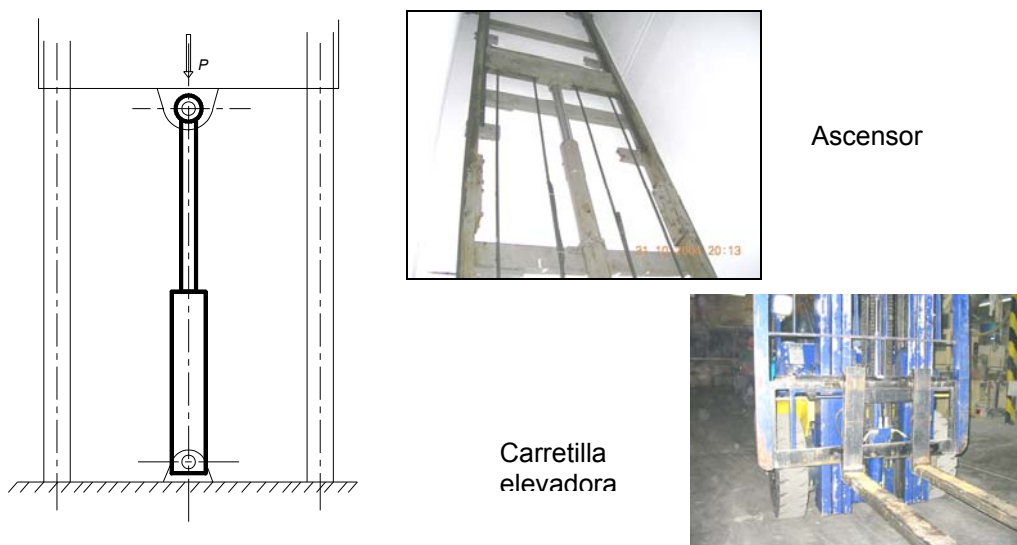


Fig. 3.1 Aplicaciones comunes con cilindros oleohidráulicos

En el ejemplo 1 (Fig. 3.1) se observa que debido a la cinemática del mecanismo se manifiesta la presencia de un movimiento relativo de rotación entre el pasador y la cabeza de vástago; el giro del pasador genera un par sobre la cabeza de vástago de valor igual al par de rozamiento. Para este caso proponemos que para calcular la capacidad de carga del cilindro oleohidráulico, debemos considerarlo como un elemento estructural bi-apoyado con unos momentos exteriores aplicados en sus extremos. Sin embargo debemos analizar en qué sentido debemos aplicar estos momentos. Para ello vamos a estudiar los casos esquematizados en la Fig. 3.2.

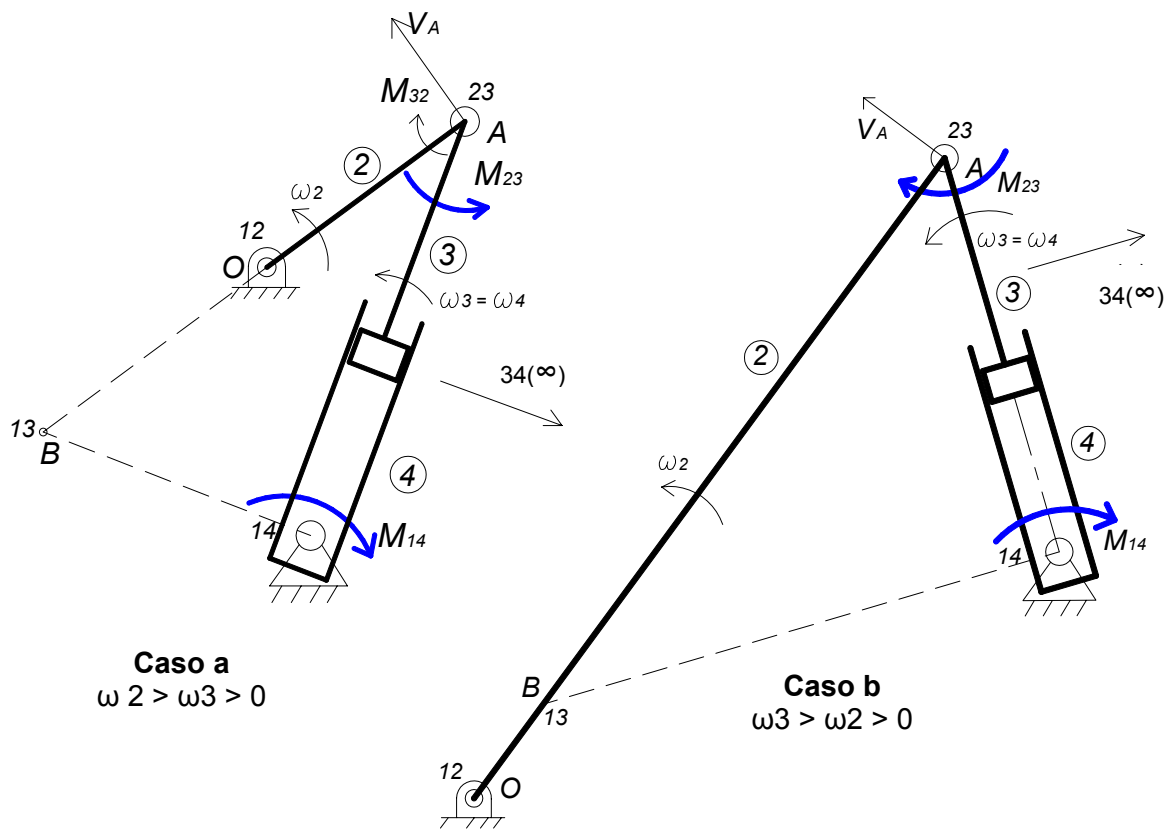


Fig. 3.2 Comportamiento de un cilindro oleohidráulico dentro de un mecanismo

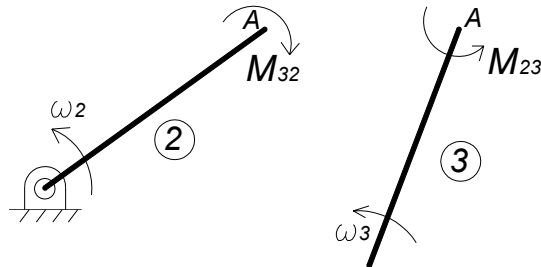
Tomando de referencia el esquema del caso a, se debe cumplir que $\overline{V_{A2}} = \overline{V_{A3}}$, ya que es un punto común a ambos sólidos. El centro instantáneo de rotación absoluto (I_B) del vástago (3) se encuentra en el punto B aplicando el teorema de Kennedy. Por tanto:

$$\overline{\omega_2} \times \overline{OA} = \overline{\omega_3} \times \overline{BA}, \text{ es decir: } \omega_3 = \omega_2 \frac{OA}{BA}, \quad \frac{OA}{BA} < 1$$

Por consiguiente: $\omega_2 > \omega_3 > 0$.

La potencia neta del par de rozamiento en la articulación A es una potencia disipada y por tanto de valor negativo, es decir:

$$\overline{M_{32}} \cdot \overline{\omega_2} + \overline{M_{23}} \cdot \overline{\omega_3} < 0 \quad (3.1)$$



Por otro lado, sabemos que:

$$\overline{M_{23}} = -\overline{M_{32}} \quad \text{y} \quad \omega_2 > \omega_3 > 0 \quad (3.2)$$

La única posibilidad de cumplir la ecuación (3.1) con las premisas de las ecuaciones (3.2) es que $M_{23} > 0$.

En definitiva, los pares debidos a los rozamientos en las dos articulaciones del cilindro oleohidráulico serían los representados en la Fig. 3.2 (caso a). El par M_{14} en el tubo-cilindro y el par M_{23} en el vástago son de signos opuestos entre si.

En el caso b de la Fig. 3.2, el mecanismo es muy parecido salvo que el centro instantáneo de rotación I_{13} del sólido (3) ahora se encuentra entre I_{12} y I_{23} .

En este caso:

$$\overline{\omega_2} \cdot \overline{OA} = \overline{\omega_3} \cdot \overline{BA}, \text{ por tanto } \omega_3 = \omega_2 \frac{OA}{BA}, \quad \frac{OA}{BA} > 1$$

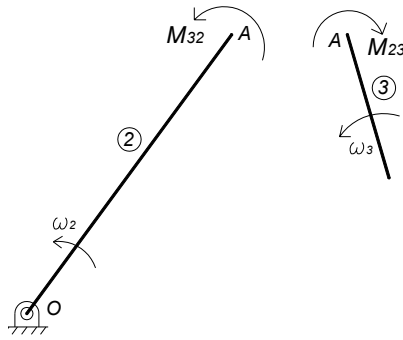
Es decir $\omega_3 > \omega_2 > 0$.

Al igual que el caso anterior la potencia neta del par de rozamiento en la articulación A debe ser una potencia negativa, ya que es una potencia disipada, es decir:

$$\overline{M_{32}} \cdot \overline{\omega_2} + \overline{M_{23}} \cdot \overline{\omega_3} < 0 \quad (3.3)$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\overline{M_{32}} = -\overline{M_{23}} \quad \text{y} \quad \omega_3 > \omega_2 > 0 \quad (3.4)$$



Y la única posibilidad de cumplir la ecuación (3.3) con las premisas de las ecuaciones (3.4) es que: $M_{23} < 0$. De esta manera, los pares debido a rozamiento en las articulaciones son los mostrados en la Fig. 3.2 (caso b). En este caso, ambos pares de rozamiento M_{14} y M_{23} son del mismo signo. El momento exterior M_{23} representa la acción de la barra (2) sobre el cilindro oleohidráulico (3) y el momento exterior M_{14} representa el par de rozamiento en la articulación de la bancada.

En el ejemplo 2 (Fig. 3.1), es obvio que no hay movimiento relativo de rotación debido al movimiento del mecanismo, pero si puede haberlo como consecuencia de la deformación del cilindro oleohidráulico. A priori el cilindro oleohidráulico debería considerarse como un elemento estructural bi-apoyado ideal; sin embargo, las fuerzas de contacto metal-metal que existen entre las superficies de los elementos que constituyen las articulaciones, modifican el comportamiento del elemento estructural a una situación, en el peor de los casos, equivalente a la condición de bi-empotrado. Para este caso proponemos que para calcular la capacidad de carga del cilindro oleohidráulico debemos considerar el cilindro como un elemento estructural bi-empotrado.

Cuando este cilindro oleohidráulico está sometido a fuerzas de flexión y compresión crecientes, llega un instante en el que uno de los pares de empotramiento supera al par resistivo consecuencia de estas fuerzas de contacto metal-metal, y entonces se produce una transición a la condición de bi-apoyado que será incapaz de soportar las deformaciones generadas, lo que nos lleva súbitamente a la situación de colapso del cilindro.

De acuerdo con estas interpretaciones, se hace necesario plantear una modelización lo suficientemente genérica, que permita analizar fácilmente, entre otras, las situaciones esquematizadas en la Fig. 3.3.

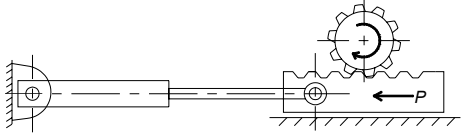
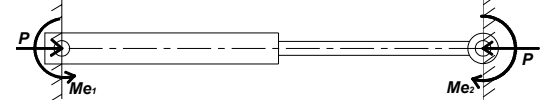
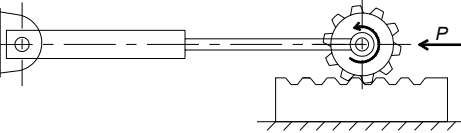
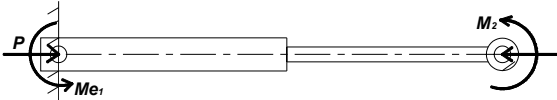
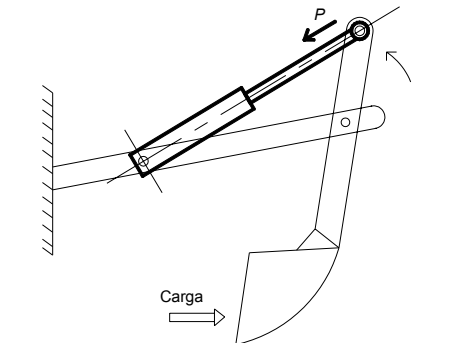
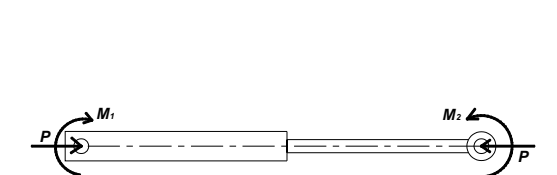
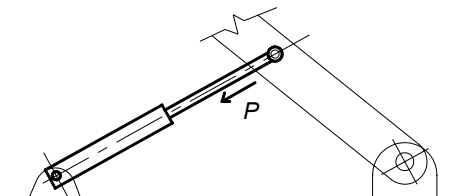
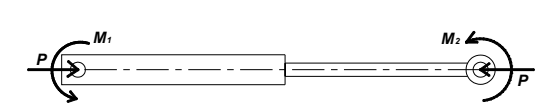
Mecanismo (ejemplos)	Comportamiento real
	 <p style="text-align: center;">bi-empotrado</p>
	 <p style="text-align: center;">Empotrado - apoyado con momento</p>
 <p style="text-align: center;">Carga</p>	 <p style="text-align: center;">Bi-apoyado, con momentos de signos contrarios en los apoyos</p>
	 <p style="text-align: center;">Bi-apoyado con momentos del mismo signo en los apoyos</p>

Fig. 3.3 Condiciones de contorno de los cilindros oleohidráulicos según el tipo de aplicación.

Para ello se tomará en cuenta la situación mas crítica del cilindro oleohidráulico, proponiendo inicialmente las hipótesis para los siguientes elementos implicados

- **Con relación al Tubo cilindro lleno de fluido a presión.**

De acuerdo con la Fig. 3.4, el estado de tensiones que sufre el tubo-cilindro y que pueden afectar la capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico son:

1. Tensiones de flexión σ_F debidas a las imperfecciones o deformaciones laterales. Estas tensiones se pueden calcular considerando que el tubo-cilindro lleno de fluido a presión es equivalente a una barra de igual momento de inercia. Esta hipótesis respeta el planteamiento de Hoblit [14].

2. Tensiones tangenciales σ_t y radiales σ_r , debidas a la presencia del fluido a presión. Estas tensiones se pueden estimar de acuerdo con la fórmula de Lamé.
3. En ningún caso soporta tensiones de compresión debidas a la carga axial.

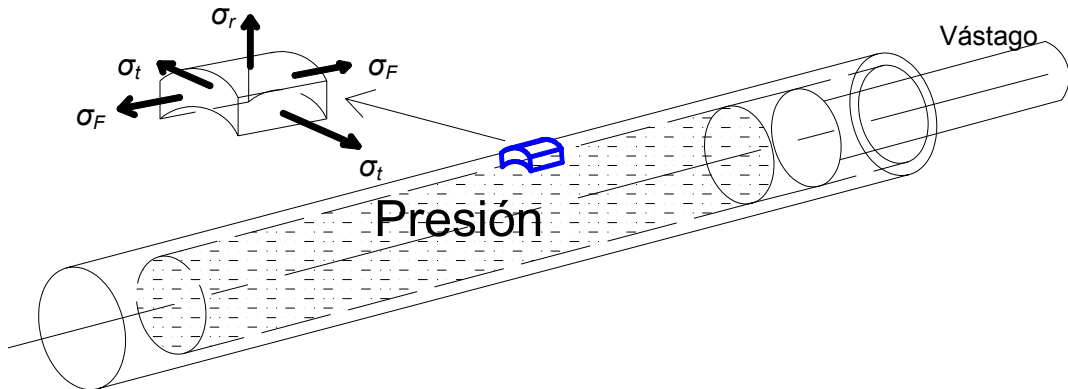


Fig. 3.4 Tensiones presentes en el tubo-cilindro

- **Con relación a la imperfección inicial**

Las tolerancias de fabricación de los elementos que configuran un cilindro oleohidráulico, las imperfecciones de montaje, conjuntamente con el peso propio, pueden dar lugar a un ángulo de imperfección θ_1 entre el eje centroidal del vástago y el eje centroidal del cilindro, antes de aplicación de la carga. La Fig. 3.5 muestra el ángulo de imperfección generado debido al momento presente en la conexión M_C . Este momento M_C dependerá de la ecuación de momentos resultante para todo el sistema. Las cargas F son las cargas de reacción del tubo-cilindro sobre los puntos de contacto del émbolo y vástago.

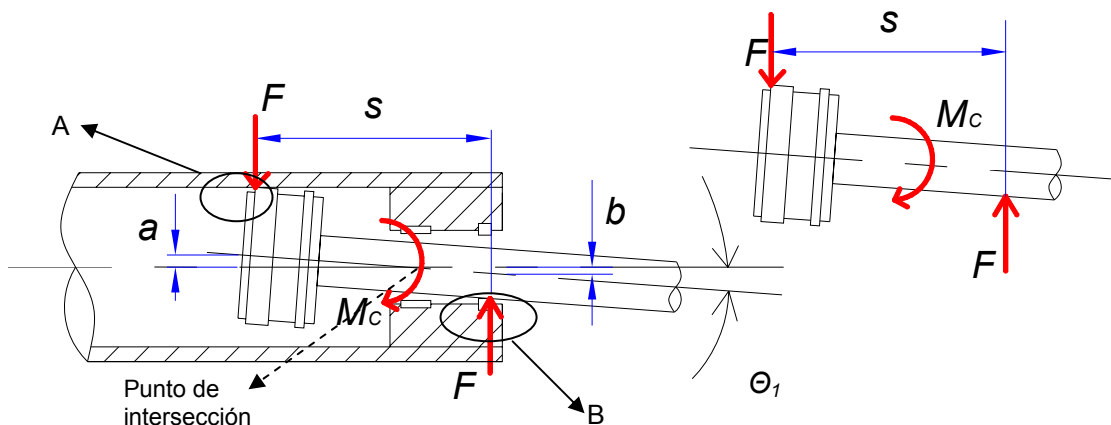


Fig. 3.5 Imperfección en la intersección vástago-cilindro

De la figura anterior:

$$\theta_1 = \frac{a+b}{s} \quad (3.5)$$

Para el equilibrio en la conexión:

$$F \cdot s = M_C \quad \text{ó} \quad F = \frac{M_C}{s} \quad (3.6)$$

Como la carga aplicada aumenta, la fuerza resistiva también, resultando un juego incrementado en la intersección: $a \rightarrow \Delta a$ y $b \rightarrow \Delta b$.

El ángulo total de imperfección será entonces

$$\theta = \theta_1 + \Delta\theta \quad (3.7)$$

Donde el incremento en el ángulo de imperfección es:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta a + \Delta b}{s} \quad (3.8)$$

Si suponemos que los anillos guía se comportan elásticamente, con áreas de contacto A_a y A_b , módulos de elasticidad E_a y E_b y espesores comprimidos t_a y t_b , de las guías de apoyo A y B, se tiene:

$$\Delta a = \frac{F \cdot t_a}{A_a \cdot E_a} = \frac{M_C \cdot t_a}{s \cdot A_a \cdot E_a}, \quad \Delta b = \frac{F \cdot t_b}{A_b \cdot E_b} = \frac{M_C \cdot t_b}{s \cdot A_b \cdot E_b} \quad (3.9)$$

De esta manera a partir de (3.8) y (3.9):

$$\Delta\theta = \frac{\Delta a + \Delta b}{s} = \left[\frac{t_a}{A_a \cdot E_a} + \frac{t_b}{A_b \cdot E_b} \right] \frac{M_C}{s^2} \quad (3.10)$$

Así, el ángulo θ debido a la imperfección inicial y a la elasticidad de juntas toma la forma:

$$\theta = \theta_1 + K_C \cdot M_C \quad (3.11)$$

Siendo K_C la constante elástica de rigidez de la intersección, quedando definida como:

$$K_C = \frac{1}{s^2} \left[\frac{t_a}{A_a \cdot E_a} + \frac{t_b}{A_b \cdot E_b} \right] \quad (3.12)$$

La imperfección inicial Y_{0C} se puede relacionar con el ángulo θ_1 mediante análisis geométrico (Fig. 3.8), resultando:

$$\theta_1 = \frac{Y_{0C}}{L_1} + \frac{Y_{0C}}{L_2} \rightarrow Y_{0C} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L} \theta_1 \quad (3.13)$$

- **Con relación al peso propio**

Tomamos como punto de partida que el peso propio del cilindro oleohidráulico pone en evidencia la imperfección inicial y en consecuencia siempre

consideraremos que sus efectos son adicionales (esta consideración coincide con el planteamiento de Bennet [20]).

Con el objetivo de tener la máxima flexibilidad en el modelo, consideraremos el peso del tubo-cilindro + aceite y el peso del vástago, actuando como cargas distribuidas a lo largo de cada uno de ellos.

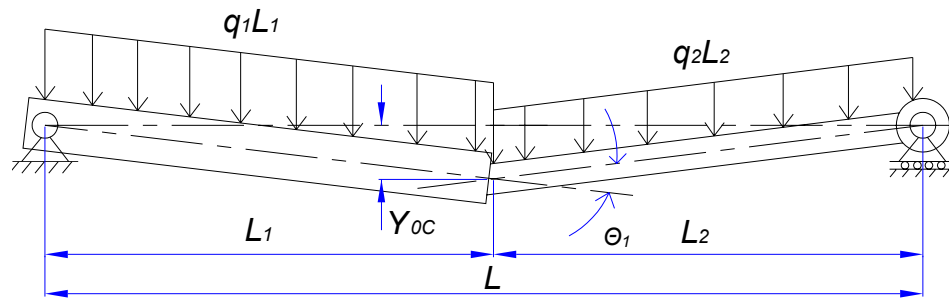


Fig. 3.6 Esquema del peso distribuido de tubo-cilindro y vástago. Imperfección inicial generada

- **Con relación a una excentricidad en la articulación.**

La Fig. 3.7 muestra la presencia de excentricidad en la carga aplicada. Dicha excentricidad se presenta por defectos de fabricación.

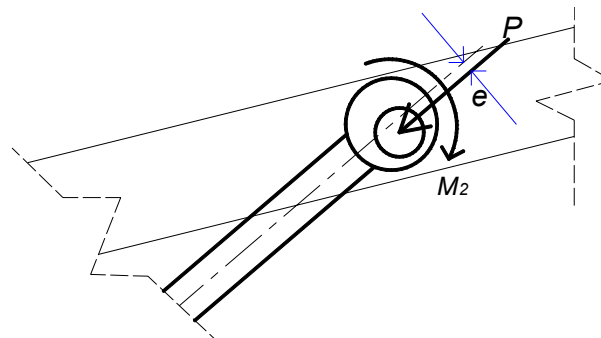


Fig. 3.7 Carga aplicada con excentricidad (e) debida a defectos de fabricación.

El par exterior debido a esta excentricidad vale $M_2 = P \cdot e$.

- **Con relación a otras cargas adicionales.**

Otras cargas laterales que pudieran actuar sobre el cilindro hidráulico (por ejemplo debidas a latiguillos, cargas laterales fortuitas) no son contempladas en

nuestro modelo. En cualquier caso debe aconsejarse al usuario evitar estas circunstancias.

La Fig. 3.8 presenta el esquema propuesto como base para el análisis del modelo que describe el comportamiento de un cilindro oleohidráulico bi-articulado, sometido a diversas cargas externas como: Carga axial P , Pesos propios de tubo+fluido (q_1) y vástago (q_2) y momentos en los puntos de apoyo M_1 y M_2 .

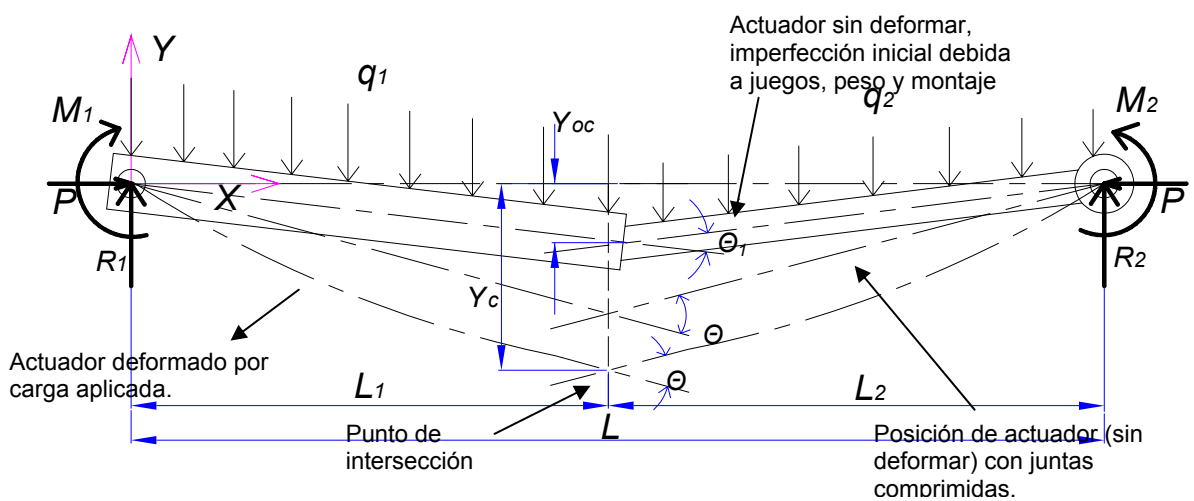


Fig. 3.8 Esquema de un cilindro oleohidráulico, sin deformar (posición inicial) y deformado debido a cargas externas.

Inicialmente suponemos que sin aplicación de carga, tanto vástago como cilindro no están deformados, pero entre sí forman un ángulo de imperfección inicial θ_1 debido a juegos en juntas e inexactitudes de montaje y provocado por el peso propio del actuador. Desde el punto de intersección hay una distancia Y_{oc} hasta el eje coaxial X .

Una vez se aplica la carga P , los anillos guía se comprimen por su elasticidad incrementando el ángulo de imperfección hasta un valor θ , que depende de la carga y de la rigidez elástica en la conexión vástago-cilindro. En un momento determinado los anillos guía no pueden comprimirse más y empiezan a deformarse vástago y cilindro. A partir de este momento, el ángulo θ permanece constante.

De forma genérica con M_1 y M_2 identificamos a los momentos en los extremos debido a la presencia de rozamiento en los puntos de apoyo del actuador y/o a la excentricidad del punto de aplicación de la carga aplicada; y con M_{e1} y M_{e2} identificamos a los momentos de empotramiento.

Con base en la Fig. 3.8 determinamos las reacciones R_1 y R_2 en los puntos de apoyo de tubo-cilindro y vástago. Sumando fuerzas en Y , y momentos en el punto de apoyo del tubo, tenemos:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: \quad R_1 + R_2 &= q_1 L_1 + q_2 L_2 \\ \sum M_{en1} = 0: \quad M_2 - M_1 + R_2 \cdot L - \frac{q_1 L_1^2}{2} - q_2 L_2 \left[L_1 + \frac{L_2}{2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resolviendo (3.14), se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1 &= q_1 L_1 + q_2 L_2 + \frac{M_2 - M_1}{L} - \frac{1}{L} \left[\frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} + q_2 L_1 L_2 \right] \\ R_2 &= \frac{M_1 - M_2}{L} + \frac{1}{L} \left[\frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} + q_2 L_1 L_2 \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

A continuación se plantean y analizan las formulaciones que describen el comportamiento (deflexiones, momentos y tensiones) de los actuadores oleohidráulicos bajo sollicitaciones de carga presentes en toda aplicación.

3.1 Ecuación genérica de la elástica

La presión hidráulica del fluido sobre las paredes internas del cilindro genera tensiones que pueden ser de consideración. Estas tensiones se analizan mas adelante en el apartado 3.4. Por ahora se estudiarán los efectos que producen la carga axial y momentos sobre la deformación del tubo, independientemente de la presión hidráulica interior.

Tal como se ha mencionado anteriormente, se asumirá que, para efectos de deflexión (cálculo de la elástica), el tubo-cilindro se comporte como una viga rígida con momento de inercia equivalente a I_1 [14]. Es decir, la deformación en el cilindro se analiza tomando el actuador como una viga escalonada con imperfección inicial θ_1 y momentos de inercia I_1 e I_2 de cilindro y vástago

respectivamente. De esta manera, realizando un corte en un punto cualquiera del cilindro-tubo (Fig. 3.8), a una distancia X_1 , obtenemos:

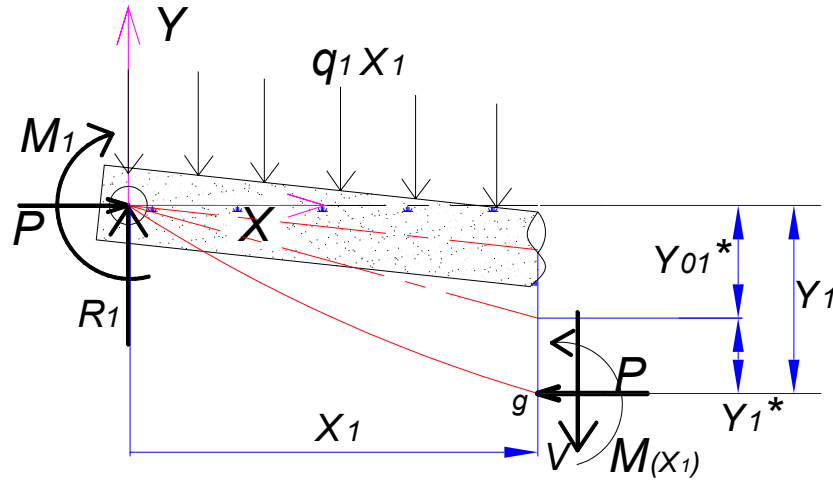


Fig. 3.9 Corte en tubo-cilindro, cargas presentes.

Tomando momentos en el punto de corte g de la Fig. 3.9, se obtiene la ecuación de momentos:

$$M(X_1) = -P \cdot (Y_{01}^* + Y_1^*) + M_1 + R_1 \cdot X_1 - \frac{q_1}{2} X_1^2 \quad (3.16)$$

Donde, en este caso (tramo de tubo): $X_1 = x$, válido para $0 \leq x \leq L_1$.

El momento en la conexión vástago-cilindro M_C empleada en (3.11) podrá ser ya calculado como:

$$M_C = M_1(L_1) = -PY_C + M_1 + R_1 \cdot L_1 - \frac{q_1}{2} L_1^2 \quad (3.17)$$

La ecuación de equilibrio (ecuación de la elástica) para la deformada del cilindro

Y_1^* se calcula haciendo: $M(x) = E_1 I_1 \frac{d^2 Y_1^*}{dx^2}$, resultando a partir de (3.16):

$$E_1 I_1 \frac{d^2 Y_1^*}{dx^2} = -P \cdot (Y_{01}^* + Y_1^*) + M_1 + R_1 x - \frac{q_1}{2} x^2 \quad (3.18)$$

Haciendo $k_1^2 = P/EI$ generamos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 Y_1^*}{dx^2} + k_1^2 \cdot Y_1^* = \frac{1}{E_1 I_1} \left\{ M_1 + R_1 x - \frac{q_1 x^2}{2} \right\} - k_1^2 \cdot Y_{01}^* \quad (3.19)$$

Cuya solución tiene la forma:

$$Y_1^* = C_0 \cos(k_1 \cdot x) + C_1 \sin(k_1 \cdot x) + Y_{1P} \quad (3.20)$$

Donde C_0 y C_1 son constantes que dependen de las condiciones de contorno, y Y_{1P} es la solución particular que tendrá la forma: $Y_{1P} = Ax^2 + Bx + C$.

Evaluando Y_P en (3.19), se obtienen A , B y C , resultando:

$$Y_{1P} = -\frac{q_1}{2P}x^2 + \frac{R_1}{P}x + \frac{M_1}{P} + \frac{q_1}{k_1^2 P} - Y_{01}^* \quad (3.21)$$

Reemplazando (3.21) en (3.20) y teniendo en cuenta que la deflexión total en un punto del tubo es $Y_1 = Y_{01}^* + Y_1^*$ (Fig. 3.9) se obtiene:

$$Y_1(x) = C_0 \cos(k_1 \cdot x) + C_1 \sin(k_1 \cdot x) - \frac{q_1}{2P}x^2 + \frac{R_1}{P}x + \frac{M_1}{P} + \frac{q_1}{k_1^2 P} \quad (3.22)$$

Ahora, sustituyendo el valor de R_1 de (3.15) y organizando, se llega finalmente a la ecuación de deflexión total de tubo-cilindro:

$$Y_1(x) = C_0 \cos(k_1 x) + C_1 \sin(k_1 x) - \frac{q_1}{2P}x^2 + \frac{M_1}{P} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{M_2}{P} \frac{x}{L} + \frac{1}{P} \left[q_1 L_1 + q_2 L_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} + q_2 L_1 L_2 \right) \right] x + \frac{q_1}{k_1^2 P}, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (3.23)$$

De forma similar al análisis anterior, si se realiza un corte en el vástago (Fig. 3.10), se tiene:

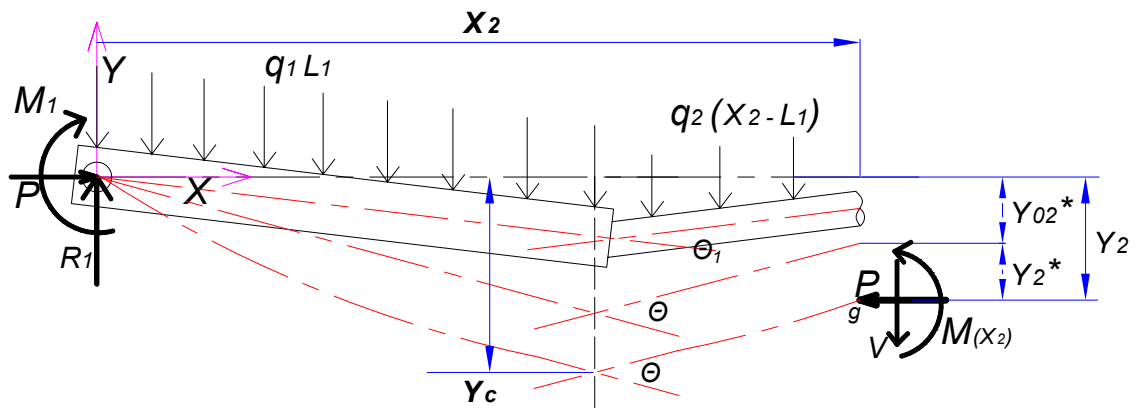


Fig. 3.10 Corte en vástago, cargas presentes.

Planteando la suma de momentos en el punto (g) de la figura, se obtiene:

$$M(X_2) = -P \cdot (Y_{02}^* + Y_2^*) + M_1 + R_1 \cdot X_2 - \left(X_2 - \frac{L_1}{2} \right) q_1 L_1 - q_2 \frac{(X_2 - L_1)^2}{2} \quad (3.24)$$

Con $X_2 = x$, en el intervalo $L_1 \leq x \leq L$

La ecuación de equilibrio para la deformada del vástago Y_2^* es entonces:

$$E_2 I_2 \frac{d^2 Y_2^*}{dx^2} = -P \cdot (Y_{02}^* + Y_2^*) + M_1 + R_1 \cdot x - \left(x - \frac{L_1}{2}\right) q_1 L_1 - q_2 \frac{(x - L_1)^2}{2} \quad (3.25)$$

Haciendo $k_2^2 = P/E_2 I_2$, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 Y_2^*}{dx^2} + k_2^2 \cdot Y_2^* = \frac{1}{E_2 I_2} \left[M_1 + R_1 \cdot x - \left(x - \frac{L_1}{2}\right) q_1 L_1 - q_2 \frac{(x - L_1)^2}{2} \right] - k_2^2 \cdot Y_{02}^* \quad (3.26)$$

Con solución para Y_2^* de la forma:

$$Y_2^* = C_2 \cos(k_2 \cdot x) + C_3 \sin(k_2 \cdot x) + Y_{2P} \quad (3.27)$$

Con C_2 y C_3 como constantes que dependen de las condiciones de contorno. De nuevo Y_{2P} es la solución particular que tendrá la forma $Y_{2P} = Ax^2 + Bx + C$.

Evaluando Y_{2P} en (3.26) se obtienen A , B y C , y sustituyendo el valor de R_1 resulta:

$$Y_{2P} = -\frac{q_2}{2P} x^2 + \frac{1}{P} \left[q_2 L - \frac{1}{L} \left(M_1 - M_2 + \frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} + q_2 L_1 L_2 \right) \right] x + \frac{M_1}{P} + \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) + \frac{q_2}{k_2^2 P} - Y_{02}^* \quad (3.28)$$

De nuevo, reemplazando (3.28) en (3.27) y teniendo en cuenta que $Y_2 = Y_{02}^* + Y_2^*$ (Fig. 3.10) y organizando se obtiene finalmente:

$$Y_2(x) = C_2 \cos(k_2 \cdot x) + C_3 \sin(k_2 \cdot x) - \frac{q_2}{2P} x^2 + \frac{M_1}{P} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{M_2}{P} \frac{x}{L} + \frac{1}{P} \left[q_2 L - \frac{1}{L} \left(\frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_2 L_2^2}{2} + q_2 L_1 L_2 \right) \right] x + \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) + \frac{q_2}{k_2^2 P}, \quad L_1 \leq x \leq L \quad (3.29)$$

3.2 Ecuaciones de contorno

Ahora, se plantean las condiciones de contorno del sistema, para los apoyos y la intersección vástago-cilindro, de acuerdo al tipo de sujeción del cilindro oleohidráulico (ver Fig. 3.8), así:

Tipo de apoyos	Condiciones de contorno
biarticulado	tubo-cilindro: $Y_1(0) = 0$, vástago: $Y_2(L) = 0$
Empotrado cilindro-empotrado en vástago	tubo-cilindro: $Y_1(0) = 0$, $Y_1'(0) = -\frac{Y_{0c}}{L_1}$ vástago: $Y_2(L) = 0$, $Y_2'(L) = \frac{Y_{0c}}{L_2}$
Empotrado cilindro-apoyado en vástago	tubo-cilindro: $Y_1(0) = 0$, $Y_1'(0) = -\frac{Y_{0c}}{L_1}$, vástago: $Y_2(L) = 0$
Apoyado cilindro-empotrado en vástago	tubo-cilindro: $Y_1(0) = 0$ vástago: $Y_2(L) = 0$, $Y_2'(L) = \frac{Y_{0c}}{L_2}$
En todos	intersección: $Y_1(L_1) = Y_c = Y_2(L_1)$, $Y_2'(L_1) - Y_1'(L_1) = \theta$

Tabla 3.1 Condiciones de contorno de un cilindro oleohidráulico según el tipo de sujeción.

3.3 Forma matricial del modelo teórico propuesto.

3.3.1 Cilindro oleohidráulico bi-apoyado (comportamiento real)

Considerando la ecuación de deflexión del tubo-cilindro (3.23) y del vástago (3.29), y teniendo en cuenta las condiciones de contorno del caso bi-articulado de la Tabla 3.1, se puede obtener lo siguiente:

$$Y_1(0) = 0 = C_0 + \frac{M_1}{P} + \frac{q_1}{k_1^2 P} \Rightarrow C_0 = -\frac{1}{P} \left(M_1 + \frac{q_1}{k_1^2} \right)$$

$$Y_1(L_1) = Y_c = C_0 \cos(k_1 L_1) + C_1 \sin(k_1 L_1) + \frac{L_2}{PL} M_1 + \frac{L_1}{PL} M_2 + \frac{q_2 L_1 L_2}{P} - \frac{QL_1}{PL} + \frac{q_1 L_1^2}{2P} + \frac{q_1}{k_1^2 P}$$

$$\text{Donde } Q = \frac{q_1 L_1^2}{2} + \frac{q_1 L_2^2}{2} + q_2 L_1 L_2$$

$$Y_2(L) = 0 = C_2 \cos(k_2 L) + C_3 \sin(k_2 L) + \frac{M_2}{P} - \frac{Q}{P} + \frac{q_2 L^2}{2P} + \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) + \frac{q_2}{k_2^2 P}$$

$$Y_2(L_1) = Y_c = C_2 \cos(k_2 L) + C_3 \sin(k_2 L) + \frac{L_2}{PL} M_1 + \frac{L_1}{PL} M_2 + \frac{q_2 L_1 L}{P} - \frac{QL_1}{PL} + \frac{L_1^2}{P} \left(\frac{q_1}{2} - q_2 \right) + \frac{q_2}{k_2^2 P}$$

$$Y_2'(L_1) - Y_1'(L_1) = \theta = -C_2 k_2 \sin(k_2 L_1) + C_3 k_2 \cos(k_2 L_1) + C_0 k_1 \sin(k_1 L_1) - C_1 k_1 \cos(k_1 L_1) \quad (3.30)$$

Ahora, organizando las ecuaciones (3.30) en forma matricial e involucrando la ecuación para el momento M_c (3.17), se obtiene la matriz mostrada en la Fig. 3.11. Adjunta a la matriz se encuentra un esquema de las condiciones de carga del cilindro oleohidráulico bi-apoyado analizado para este caso.

$$\begin{pmatrix} \text{sen}(k_1 L_1) & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cos(k_2 L) & \text{sen}(k_2 L) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k_2 L_1) & \text{sen}(k_2 L_1) & -1 & 0 \\ -k_1 \cos(k_1 L_1) & -k_2 \text{sen}(k_2 L_1) & k_2 \cos(k_2 L_1) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & K_C P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ Y_c \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(k_1 L_1)}{P} \left[M_1 + \frac{q_1}{k_1^2} \right] - \frac{L_2}{PL} M_1 - \frac{L_1}{PL} M_2 + \\ + \frac{QL_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L_2}{P} - \frac{q_1 L_1^2}{2P} - \frac{q_1}{k_1^2 P} \\ - \frac{M_2}{P} + \frac{Q}{P} - \frac{q_2 L^2}{2P} - \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\ - \frac{L_2}{PL} M_1 - \frac{L_1}{PL} M_2 + \frac{QL_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L}{P} - \frac{L_1^2}{P} \left(\frac{q_1}{2} - q_2 \right) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\ \frac{1}{P} \left(M_1 + \frac{q_1}{k_1^2} \right) k_1 \text{sen}(k_1 L_1) \\ \theta_1 + K_C \left[\frac{L_2}{L} M_1 + \frac{L_1}{L} M_2 + \frac{q_1 L_1^2}{2} + q_2 L_1 L_2 - \frac{QL_1}{L} \right] \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

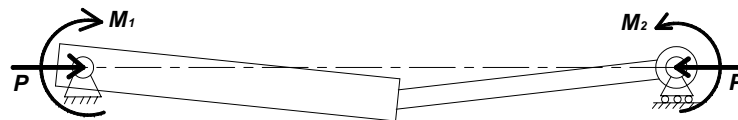


Fig. 3.11 Sistema matricial de ecuaciones, cilindro bi-apoyado, momentos externos M_1 y M_2

Resolviendo el sistema anterior se pueden determinar los valores C_1 , C_2 , C_3 , Y_C , θ , y así poder calcular las deflexiones del tubo $Y_1(x)$ y del vástago $Y_2(x)$.

Tal como se ha analizado en las teorías propuestas anteriormente por los diferentes autores [15] [16], anulando el determinante de coeficientes de (3.31), se determina la **carga crítica de pandeo** ó carga de inestabilidad del sistema. Matemáticamente esta carga generará deflexiones infinitas.

Los momentos aplicados M_1 y M_2 en los puntos de apoyo de cilindro y vástago, como se ha mencionado anteriormente, pueden ser generados por una excentricidad “e” presente en la aplicación de la carga, o por rozamiento debido a rotación relativa entre elementos de contacto en los puntos de apoyo.

Debido a excentricidad: $M_1 = P e_1$. y $M_2 = P e_2$ donde e_1 y e_2 corresponden a los valores de excentricidad presentes en el punto de aplicación de la carga en puntos de apoyo de cilindro y vástago.

Debido a fricción: Los momentos son definidos según el coeficiente de fricción en cada punto de apoyo. Si el vástago de la Fig. 3.12 rota con respecto al pasador en el punto de apoyo en presencia de la carga axial P , esto genera un momento de fricción M_2 en contra del movimiento. De esta manera, podemos aceptar con aproximación que con presencia de fricción en cilindro y vástago los momentos activos generados serían:

$$M_1 = P \cdot \frac{d_{P1}}{2} \mu_1, \quad M_2 = P \cdot \frac{d_{P2}}{2} \mu_2 \quad (3.32)$$

Donde μ_1, μ_2 son los coeficientes de rozamiento entre pasador y vástago; y d_{P1}, d_{P2} los diámetros de los pasadores en los puntos de apoyo.

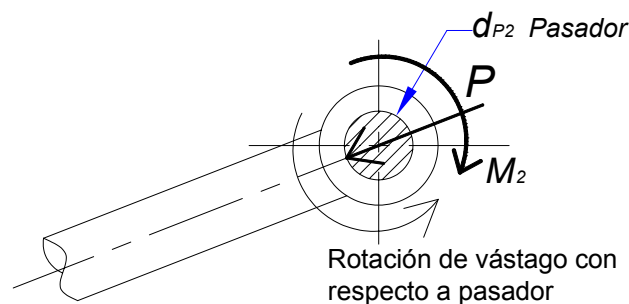


Fig. 3.12 Aplicación de momento debido a rozamiento.

En términos generales diremos que los momentos aplicados en los extremos del cilindro tienen la forma:

$$M_1 = P \cdot e_1 + P \cdot \frac{d_{P1}}{2} \cdot \mu_1, \quad M_2 = P \cdot e_2 + P \cdot \frac{d_{P2}}{2} \cdot \mu_2 \quad (3.33)$$

3.3.2 Cilindros oleohidráulicos bi-articulados (comportamiento real: empotramientos en ambos extremos).

En este caso, aplicamos las condiciones de contorno correspondiente de la Tabla 3.1 para empotrado-empotrado, obteniendo además de las ecuaciones (3.30), las siguientes:

$$Y_1'(0) = -\frac{Y_{0C}}{L_1} = C_1 K_1 - \frac{1}{PL} M_{e1} + \frac{1}{PL} M_{e2} + \frac{1}{P} \left(q_1 L_1 + q_2 L_2 - \frac{Q}{L} \right) \quad (3.34)$$

$$Y_2'(L) = \frac{Y_{0C}}{L_2} = -C_2 k_2 \operatorname{sen}(k_2 L) + C_3 k_2 \cos(k_2 L) - \frac{1}{PL} M_{e1} + \frac{1}{PL} M_{e2} - \frac{Q}{PL} \quad (3.35)$$

Nótese que las condiciones de empotramiento establecen rigidez de los puntos extremos de cilindro-tubo y vástago, en la posición de imperfección inicial del cilindro oleohidráulico (posición en que se define θ_1).

En este caso los momentos en los extremos del cilindro oleohidráulico no son momentos activos (cargas externas), sino momentos de reacción del sistema (momentos pasivos), que dependen de la carga aplicada y de las condiciones de contorno establecida. Estos momentos de reacción corresponden a M_{e1} para tubo-cilindro y M_{e2} para vástago. Organizando las ecuaciones (3.30), (3.34) y (3.35) en forma matricial se obtiene el sistema de la Fig. 3.13.

Nótese que la matriz señalada corresponde a la matriz de coeficientes del sistema (3.31) (bi-apoyado); además los momentos M_1 y M_2 pasan de ser datos del problema a convertirse en incógnitas, siendo resultado adicional de la solución de la matriz (3.36). De esta manera, sistemáticamente se pueden encontrar los sistemas matriciales de las demás condiciones de contorno, cambiando el momento exterior correspondiente M_1 y/o M_2 del vector de datos de (3.31) (bi-apoyado), a un momento de empotramiento Me_1 y/o Me_2 en el vector de incógnitas del sistema correspondiente.

$$\begin{pmatrix}
 \text{sen}(k_1 L_1) & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{L_2}{PL} - \frac{\cos(k_1 L_1)}{P} & \frac{L_1}{PL} \\
 0 & \cos(k_2 L) & \text{sen}(k_2 L) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{P} \\
 0 & \cos(k_2 L_1) & \text{sen}(k_2 L_1) & -1 & 0 & \frac{L_2}{PL} & \frac{L_1}{PL} \\
 -k_1 \cos(k_1 L_1) & -k_2 \text{sen}(k_2 L_1) & k_2 \cos(k_2 L_1) & 0 & -1 & -\frac{k_1 \text{sen}(k_1 L_1)}{P} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_c P & 0 & -K_c \frac{L_2}{L} & -K_c \frac{L_1}{L} \\
 k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{PL} & \frac{1}{PL} \\
 0 & -k_2 \text{sen}(k_2 L) & k_2 \cos(k_2 L) & 0 & 0 & -\frac{1}{PL} & \frac{1}{PL}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 Y_c \\
 \theta \\
 M_{e1} \\
 M_{e2}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{q_1 \cos(k_1 L_1)}{PK_1^2} + \frac{QL_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L_2}{P} - \frac{q_1 L_1^2}{2P} - \frac{q_1}{k_1^2 P} \\
 \frac{Q}{P} - \frac{q_2 L^2}{2P} - \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\
 \frac{QL_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L}{P} - \frac{L_1^2}{P} \left(\frac{q_1}{2} - q_2 \right) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\
 \frac{q_1}{PK_1} \text{sen}(k_1 L_1) \\
 \theta + K_c \left(\frac{q_1 L_1^2}{2} + q_2 L_1 L_2 - \frac{QL_1}{L} \right) \\
 -\frac{Y_{0c}}{L_1} - \frac{1}{P} \left[q_1 L_1 + q_2 L_2 - \frac{Q}{L} \right] \\
 \frac{Y_{0c}}{L_2} + \frac{Q}{PL}
 \end{pmatrix}
 \tag{3.36}$$

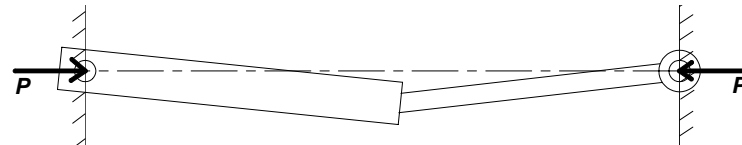


Fig. 3.13 Sistema matricial de ecuaciones, cilindro bi-apoyado (comportamiento real: bi-empotrado)

3.3.3 Cilindro empotrado – vástago apoyado

Aplicando las condiciones de contorno correspondiente de la Tabla 3.1 a las ecuaciones de deflexión de cilindro y vástago, se obtienen, de igual manera que el caso anterior, las ecuaciones (3.30), además de la ecuación (3.34) (condición de empotramiento en extremo del cilindro). Organizando las ecuaciones se obtiene la matriz de la Fig. 3.14. En este caso hay un momento aplicado M_2 en el extremo del vástago y surge un momento de empotramiento en el extremo del cilindro M_{e1} .

3.3.4 Cilindro apoyado – vástago empotrado

Nuevamente, aplicando las condiciones de contorno de la Tabla 3.1 en las ecuaciones de deflexión de cilindro oleohidráulico se obtienen las ecuaciones (3.30), además de la ecuación 3.31 (condición de empotramiento en el vástago). Organizando las ecuaciones se obtiene la matriz de la Fig. 3.15. En este caso se aplica un momento externo en el extremo de cilindro y surge un momento (reacción) de empotramiento en el extremo del vástago.

$$\begin{pmatrix}
 \text{sen}(k_1 L_1) & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{L_2}{PL} - \frac{\cos(k_1 L_1)}{P} \\
 0 & \cos(k_2 L) & \text{sen}(k_2 L) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \cos(k_2 L_1) & \text{sen}(k_2 L_1) & -1 & 0 & \frac{L_2}{PL} \\
 -k_1 \cos(k_1 L_1) & -k_2 \text{sen}(k_2 L_1) & k_2 \cos(k_2 L_1) & 0 & -1 & -\frac{k_1 \text{sen}(k_1 L_1)}{P} \\
 0 & 0 & 0 & K_c P & 1 & -K_c \frac{L_2}{L} \\
 k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{PL}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 Y_c \\
 \theta \\
 M_{e1}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{L_1}{PL} M_2 + \frac{q_1 \cos(k_1 L_1)}{P k_1^2} + \frac{Q L_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L_2}{P} - \frac{q_1 L_1^2}{2P} - \frac{q_1}{k_1^2 P} \\
 -\frac{1}{P} M_2 + \frac{Q}{P} - \frac{q_2 L^2}{2P} - \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\
 -\frac{L_1}{PL} M_2 + \frac{Q L_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L}{P} - \frac{L_1^2}{P} \left(\frac{q_1}{2} - q_2 \right) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\
 \frac{q_1}{P k_1} \text{sen}(k_1 L_1) \\
 \theta + K_c \left[\frac{L_1}{L} M_2 + \frac{q_1 L_1^2}{2} + q_2 L_1 L_2 - \frac{Q L_1}{L} \right] \\
 -\frac{Y_{0C}}{L_1} - \frac{1}{P} \left[q_1 L_1 + q_2 L_2 - \frac{Q}{L} \right] - \frac{M_2}{PL}
 \end{pmatrix}
 \quad (3.37)$$

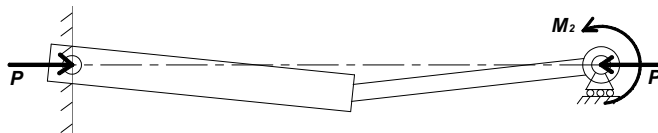


Fig. 3.14 Sistema matricial de ecuaciones para un cilindro oleohidráulico bi-apoyado (comportamiento real: empotrado en cilindro, apoyado en vástago)

$$\begin{pmatrix}
 \text{sen}(k_1 L_1) & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{L_1}{PL} \\
 0 & \cos(k_2 L) & \text{sen}(k_2 L) & 0 & 0 & \frac{1}{P} \\
 0 & \cos(k_2 L_1) & \text{sen}(k_2 L_1) & -1 & 0 & \frac{L_1}{PL} \\
 -k_1 \cos(k_1 L_1) & -k_2 \text{sen}(k_2 L_1) & k_2 \cos(k_2 L_1) & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_c P & 1 & -K_c \frac{L_1}{L} \\
 0 & -k_2 \text{sen}(k_2 L) & k_2 \cos(k_2 L) & 0 & 0 & \frac{1}{PL}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 Y_c \\
 \theta \\
 M_{e2}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{\cos(k_1 L_1)}{P} \left[M_1 + \frac{q_1}{k_1^2} \right] - \frac{L_2}{PL} M_1 + \frac{QL_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L_2}{P} - \frac{q_1 L_1^2}{2P} - \frac{q_1}{k_1^2 P} \\
 \frac{Q}{P} - \frac{q_2 L^2}{2P} - \frac{L_1^2}{2P} (q_1 - q_2) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\
 -\frac{L_2}{PL} M_1 + \frac{QL_1}{PL} - \frac{q_2 L_1 L}{P} - \frac{L_1^2}{P} \left(\frac{q_1}{2} - q_2 \right) - \frac{q_2}{k_2^2 P} \\
 \frac{k_1}{P} \left(M_1 + \frac{q_1}{k_1^2} \right) \text{sen}(k_1 L_1) \\
 \theta + K_c \left[\frac{L_2}{L} M_1 + \frac{q_1 L_1^2}{2} + q_2 L_1 L_2 - \frac{QL_1}{L} \right] \\
 \frac{1}{PL} M_1 + \frac{Y_{0c}}{L_2} + \frac{Q}{PL}
 \end{pmatrix}
 \quad (3.38)$$

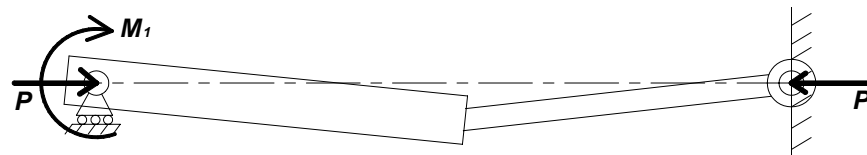


Fig. 3.15 Sistema matricial de ecuaciones para cilindro bi-apoyado, comportamiento real: apoyado en cilindro y empotrado en vástago

3.4 Análisis de tensiones

Antes de que el sistema llegue a la carga crítica de pandeo (inestabilidad del sistema - deflexiones infinitas), cabe esperar que se manifiesten efectos combinados de compresión y flexión equivalentes a la tensión de fluencia, llevando al cilindro oleohidráulico al colapso total. La carga axial P que genera esta tensión máxima admisible la denominamos **carga límite admisible del actuador** (diferente a la carga crítica de pandeo).

El elemento mas débil en un cilindro oleohidráulico es el vástago, ya que para una carga aplicada, su deflexión es considerablemente mayor que la del tubo.

El vástago está sometido a una combinación de cargas de compresión y flexión. Tal como ha sido mencionada por varios autores, en cualquier punto del vástago la tensión total se puede calcular mediante la ecuación:

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \sigma_{\text{compresión}} + \sigma_{\text{flexión}} \\ \sigma_T &= \frac{P}{A} + \frac{M_2 \cdot c}{I_2}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Donde M_2 es el momento en cualquier punto del vástago, y es calculada como:

$$M_2(x) = E_2 I_2 \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2}\quad (3.40)$$

c es la distancia a la fibra mas alejada desde su eje centroidal de la sección transversal del vástago e I_2 su momento de inercia. En este caso $c = d_2/2$.

El punto de tensión máxima para una carga P dada, será entonces:

$$\sigma_{\max} = \frac{4P}{\pi d_2^2} + \frac{32 \cdot M_{2\max}}{\pi d_2^3}\quad (3.41)$$

En la Fig. 3.16 se ha esquematizado una distribución de tensiones en la sección transversal del vástago. La deflexión del vástago, provocada por la carga P aplicada y diversos factores presentes en el cilindro, como imperfecciones de montaje, juntas, momentos de fricción, etc., generan momentos a lo largo del vástago, haciendo que las fibras mas alejadas en una sección transversal cualquiera, soporten tensiones de tracción y compresión de magnitud similar

(Fig. 3.16, *Flexión*). El efecto de la compresión debido a la carga aplicada será homogéneo en toda la sección transversal del vástago (Fig. 3.16, *Compresión*).

Dependiendo de la magnitud de los momentos generados para una carga aplicada, la tensión total neta sobre una sección transversal del vástago tendrá componentes de solo compresión o de tracción y compresión. En el esquema presentado en la Fig. 3.16 se ha supuesto que los valores de tensión debido a la compresión son mayores que los de flexión, provocando que toda la sección del vástago esté sometida a compresión.

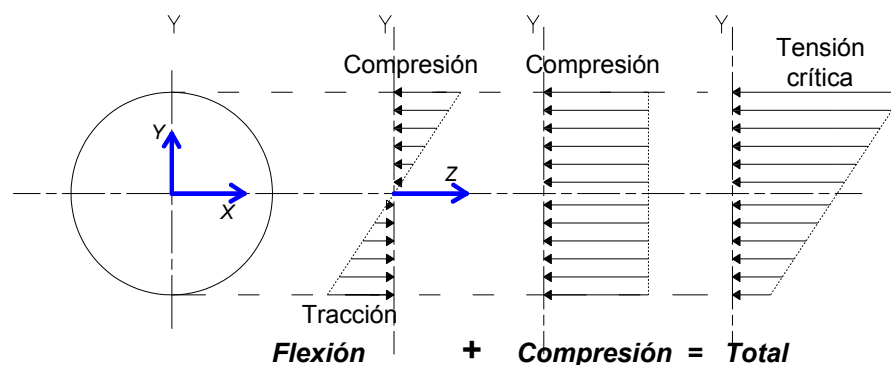


Fig. 3.16 Distribución de tensiones normales en una sección transversal del vástago

Este análisis nos permite suponer que la tensión crítica estará provocada en la fibra superior (Fig. 3.16). Independiente de los valores por flexión generados, la tensión crítica será la suma absoluta de ambos efectos; siendo la fibra más alejada en el lado cóncavo del vástago doblado, aquella que soporta dicha tensión.

En el tubo cilindro las tensiones serán debidas a las cargas de flexión y presión interna. La tensión a flexión máxima puede ser calculada según (3.42), donde M_{1max} es el momento máximo sobre el tubo-cilindro.

$$\sigma_{F1max} = \frac{M_{1max} D_{1e}}{I_1} \quad (3.42)$$

Las tensiones máximas debidas a la presión interna pueden ser calculadas mediante las ecuaciones de Lamé (anexo B):

$$\sigma_r = \frac{D_{1i}^2 P}{D_{1e}^2 - D_{1i}^2} \left(1 - \frac{D_{1e}^2}{D_{1i}^2} \right) \quad \sigma_t = \frac{D_{1i}^2 P}{D_{1e}^2 - D_{1i}^2} \left(1 + \frac{D_{1e}^2}{D_{1i}^2} \right) \quad (3.43)$$

Donde σ_r es la tensión radial y σ_t es la tensión tangencial generada en el tubo-cilindro (Fig. 3.4). Para el estado de tensiones generado es conveniente determinar la tensión equivalente de von Mises. Esto es:

$$\sigma_{\text{vonMises}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_r - \sigma_F)^2 + (\sigma_t - \sigma_F)^2 \right]} \quad (3.44)$$

3.5 Aplicación del modelo propuesto

Para poder aplicar el modelo propuesto, es necesario disponer de un cilindro de referencia. A efectos prácticos se plantea como cilindro de referencia uno de los cilindros empleados en las pruebas experimentales de esta tesis, cuyos datos se resumen en la Tabla 3.2. Este cilindro lo denominaremos “cilindro prueba”.

Parámetro	Referencia	dimensión	unidades
Distancia entre articulaciones (carrera máxima)	L	1,210	m
Longitud del cilindro	L_1	0,590	m
Longitud del vástago	L_2	0,620	m
Diámetro exterior del cilindro	D_{1e}	0,060	m
Diámetro interior del cilindro	D_{1i}	0,050	m
Diámetro del vástago	d_2	0,030	m
Módulo de elasticidad o de Young para cilindro y vástago.	E_1, E_2	2E11	N/m ²
Tensión de fluencia	σ_Y	380 E6	N/m ²
Diámetro del orificio en las articulaciones	$d_{P1} = d_{P2}$	0,0256	m
Parámetros de la conexión vástago-tubo (Fig. 3.17)			
Juego radial en puntos de contacto:			
Tapón-vástago	a	0,041	mm
Tubo-anillo guía	b	0,112	mm
Distancia entre puntos de contacto	d	87	mm
Espesor de anillo guía	t_b	2,44	mm
Área de contacto (anillo guía)	A_b	$\Pi \times 50 \times 9/2$	mm
Módulo de Young de anillo guía	E_b	250E6	N/m ²

Tabla 3.2 Parámetros del cilindro ‘prueba’ como base de estudio

La Fig. 3.17 muestra una vista en detalle de la conexión vástago-tubo del cilindro 'prueba'.

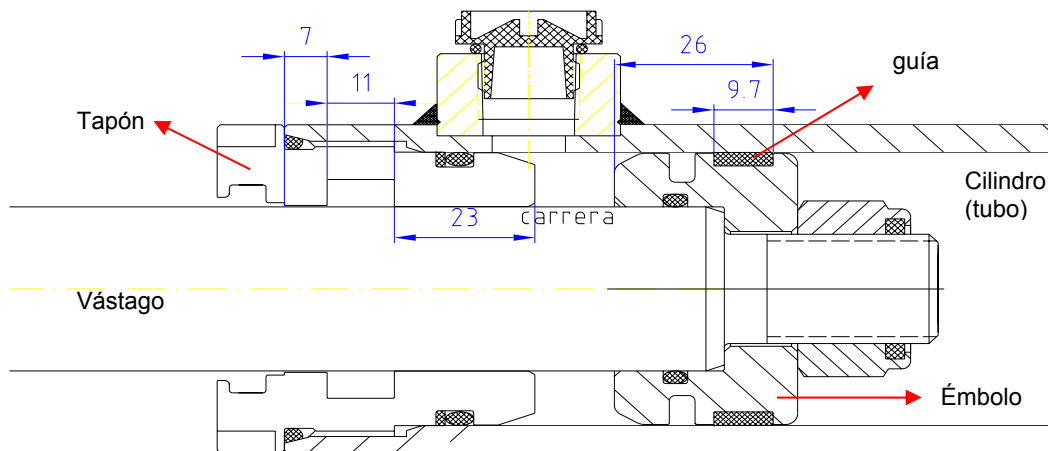


Fig. 3.17 Plano de conexión vástago-tubo del cilindro 'prueba'

Los juegos de fabricación, de acuerdo a las tolerancias definidas en la conexión del cilindro están registrados en la Tabla 3.3.

Parámetro	Tolerancia	Diámetros (mm)	
		max.	min.
Exterior vástago	30f7	29,980	29,959
Exterior émbolo	$49,6_{-0,3}^{-0,1}$	49,3	49,5
Exterior guía	$45f8 + 2 \times$ espesor guía (2,44)	49,816	49,855
Interior tubo	50H8	50,039	50,000
Interior tapón	30F8	30,053	30,000

Tabla 3.3 Diámetros límites de acuerdo a la tolerancia de cada medida

El diámetro exterior guía corresponde al alojamiento (45f8) sumado al espacio ocupado por el anillo guía. Se ha tomado 2,44 mm como espesor del anillo guía sin desgaste.

Analizando geoméricamente la conexión se pueden definir posibles puntos de contacto y determinar el ángulo entre vástago y cilindro para cada uno de ellos. El mínimo ángulo corresponderá al primer contacto posible; este será el ángulo de desalineamiento inicial entre vástago y cilindro. El esquema de la Fig. 3.18 muestra el ángulo generado θ_1 como consecuencia del juego radial existente

entre tapón y vástago (a) y émbolo y tubo (b). Tal como se ha visto anteriormente el ángulo estará definido como: $\theta_1 = \frac{a+b}{s}$.

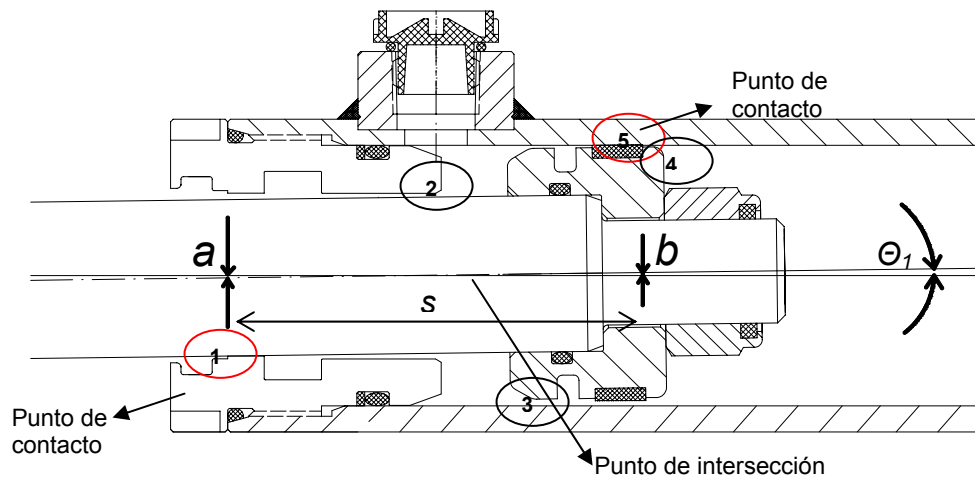


Fig. 3.18 Ángulo de desalineamiento entre vástago y cilindro debido a juegos y tolerancias de montaje

Se han tenido en cuenta los juegos máximos en cada punto de apoyo, con base en las dimensiones límites registradas en la Tabla 3.3. La Tabla 3.4 presenta los ángulos de desalineamiento generados de acuerdo a los juegos presentes en cada punto de contacto.

Posibles contactos (Fig. 3.13)	Juego max. ($a+b$) (mm.)	Longitud s (mm.)	Ángulo θ (grados)		
Tapón – vástago (1-2)	0,094	41	0,131		
émbolo – tubo (3-4)	0,739	25	1,693		
guía-tubo <-> émbolo-tubo (3-5)	0,481	21	1,312		
Tapón-vástago <-> émbolo-tubo (1-4)	0,4165	71+carrera	0,336	0,295	0,262
Tapón-vástago <-> guía tubo (1-5)	0,1585	67+carrera	0,136	0,118	0,104
Distancia émbolo – tapón guía (mm.)			0	10	20

Tabla 3.4 Posibles contactos y ángulos generados entre vástago y cilindro

El ángulo menor define los puntos de contacto que inicialmente se presentan. Es de resaltar que dependiendo de la distancia entre pistón y tapón guía, los puntos de contacto varían. Cuando el actuador está totalmente extendido, el contacto se efectúa entre vástago y tapón, mientras que con carrera = 20mm entran en

contacto primeramente los puntos: tapón-vástago y guía-tubo, manteniéndose tal situación para carreras mayores, donde el ángulo disminuirá progresivamente. Para efectos de evaluación del modelo se tomará un ángulo de imperfección inicial $\theta_1 = 0,1^\circ$, suponiendo que inicialmente la distancia émbolo-tapón es 20mm aproximadamente.

Con base en la expresión (3.12) y teniendo en cuenta la geometría y características en los puntos de contacto tapón-vástago <-> guía-tubo a una distancia entre tapón y émbolo (carrera) de 20mm, se puede calcular la constante elástica K_C en la intersección. En particular, la conexión del cilindro 'prueba' carece de guía en el tapón, se supondrá por eso, que no hay deformación alguna en este punto de contacto, por lo tanto solo habrá deformación en el anillo guía del émbolo. De esta manera:

$$K_C = \frac{1}{87^2 \text{mm}^2} \left[\frac{2,44 \text{ mm}}{\pi \cdot 50 \cdot \frac{9}{2} \text{ mm}^2 \cdot 250 \text{ N/mm}^2} \right] = 1,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{N} \cdot \text{m}} \quad (3.45)$$

Donde el módulo de elasticidad del anillo guía es de 250 N/mm² (catálogo de sellos y anillos guía B&S).

3.5.1 Comportamiento de un cilindro oleohidráulico bi-apoyado (hipótesis: apoyos ideales)

Para este caso se empleará el sistema matricial de ecuaciones (3.31), con momentos $M_1 = M_2 = 0$, debido a que no consideramos ni excentricidad de carga, ni rozamiento en las articulaciones. La Fig. 3.19 muestra el comportamiento de la tensión total máxima en el vástago [expresión (3.41)] del cilindro 'prueba' en función de la carga aplicada, involucrando y no, el peso propio del actuador. Para tal efecto se ha tomado como pesos unitarios calculados de cilindro+fluido y vástago: $q_1 = 100 \text{ N/m}$ y $q_2 = 60 \text{ N/m}$.

La carga crítica de pandeo (de inestabilidad) está representada por la asíntota señalada en la Fig. 3.19. Esta carga se obtiene calculando el determinante de la matriz de coeficientes del sistema matricial (3.31) (cilindro bi-apoyado), y su valor es 84,27 kN, matemáticamente este valor genera deflexiones infinitas. En la figura se observa el efecto que tiene el peso propio de cilindro y vástago sobre la capacidad de carga del actuador. Las cargas límites admisibles, que generan

una tensión de 380MPa (fluencia del material), fueron de 78,7 kN considerando el peso propio y 80,4 kN sin considerarlo.

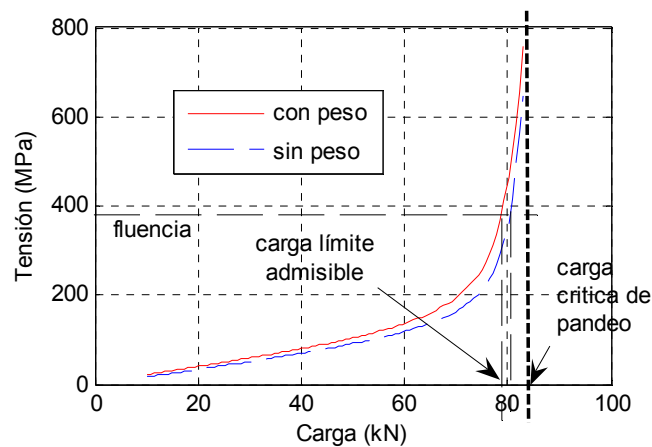


Fig. 3.19 Carga límite admisible vs carga axial aplicada, influencia del peso.

Esto indica la poca influencia que tiene el peso propio sobre la capacidad de carga del cilindro. No obstante, en adelante se involucrará el peso propio del cilindro oleohidráulico para todas las valoraciones.

En la Fig. 3.20 se han graficado las tensiones de flexión y de von Mises en el tubo-cilindro y la tensión total en el vástago de un cilindro oleohidráulico bi-apoyado. La tensión von Mises es determinada con la expresión (3.44) teniendo en cuenta las tensiones debidas a la presión de fluido en el tubo [Lamé (3.43)] y la tensión de flexión debida a la carga aplicada P y los momentos presentes (3.42).

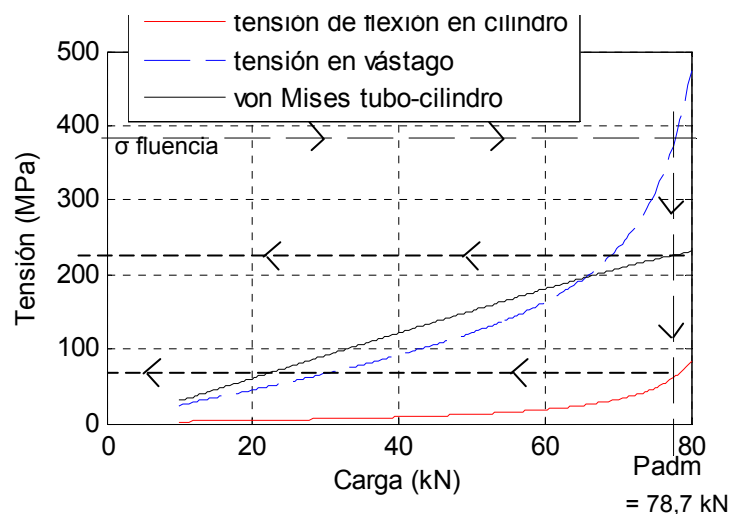


Fig. 3.20 Comparación de tensiones generadas en vástago y cilindro

La carga límite admisible (78,7 kN), que genera la tensión de fluencia en el vástago, apenas produce una tensión equivalente (von Mises) en el tubo de 220 MPa, confirmando la hipótesis del vástago como elemento mas débil.

Con el modelo podemos determinar además, cuál es el comportamiento de la deflexión y tensión a lo largo del cilindro oleohidráulico, para una carga aplicada.

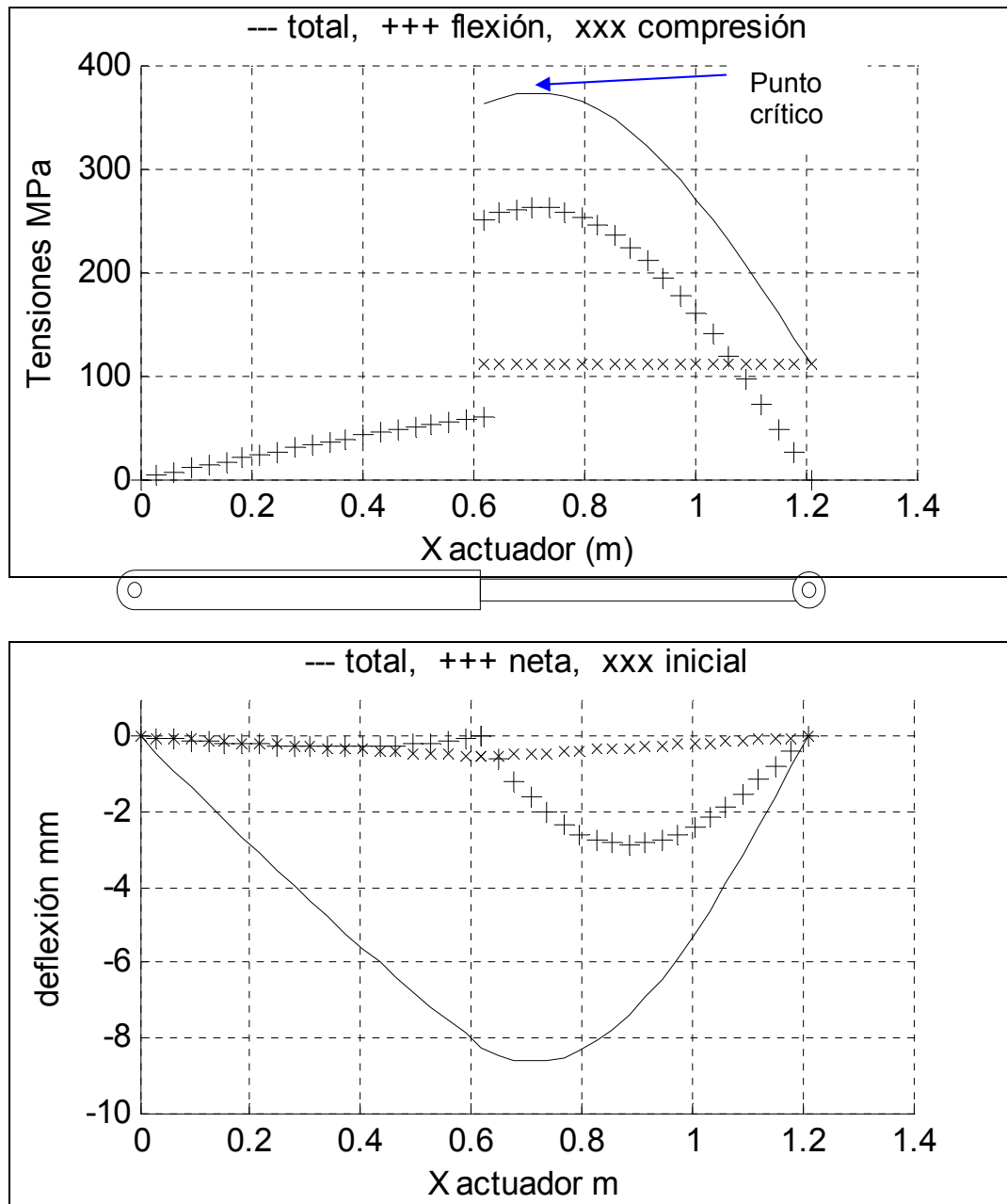


Fig. 3.21 Curvas de tensión y deflexión del cilindro 'prueba' bi-apoyado para carga límite máxima admisible (78,7 kN).

La Fig. 3.21 muestra cómo se deforma el cilindro oleohidráulico y cómo se distribuye la tensión sobre él, para la carga límite admisible (78,7 kN). Se presentan tensiones debidas a flexión, compresión y tensión total sobre el vástago, y la correspondiente a la flexión sobre el cilindro. Es razonable pensar que el punto crítico (máxima tensión) se encuentra sobre el vástago, en el punto señalado, que corresponde además al punto de deflexión máxima. Se muestran también la imperfección inicial, las deflexiones total y neta en tubo y vástago, encontrando deformaciones superiores en este último.

3.5.2 Cilindro oleohidráulico bi-apoyado (hipótesis de comportamiento real: apoyos bi-empotrados).

Para este caso, usaremos el sistema de ecuaciones (3.36). La Fig. 3.22 presenta el comportamiento de los momentos de empotramiento generados en el cilindro 'prueba', en función de la carga aplicada.

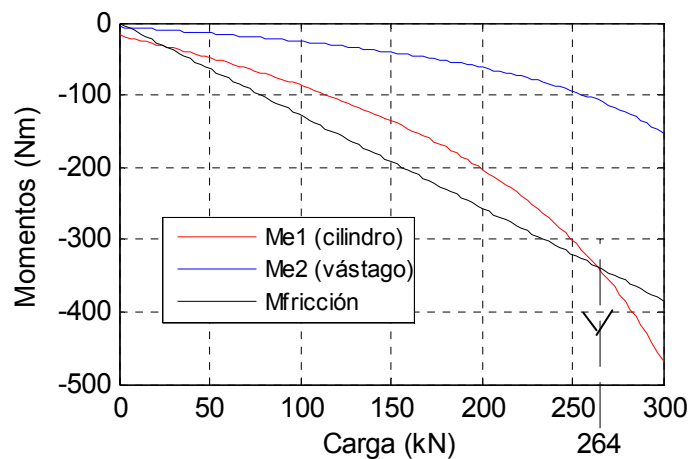


Fig. 3.22 Momentos restrictivos M_{e1} y M_{e2} en función de la carga aplicada

En esta figura están representados, tanto los momentos de empotramiento como el momento de fricción en los apoyos [expresión (3.32)], tomando como coeficientes de rozamiento $\mu_1 = \mu_2 = 0,15$. El punto de corte mostrado a 264 kN, corresponde al instante en que el momento M_{e1} alcanza el valor del momento por fricción, y en consecuencia, se interpreta que la condición de comportamiento empotrado no puede ser mantenida. El extremo del tubo-cilindro empieza a girar. A partir de este instante el comportamiento del cilindro oleohidráulico pasa de bi-empotrado a bi-apoyado, lo cual, para la carga axial aplicada (264 kN) representa el colapso total del cilindro oleohidráulico. Por esta razón entendemos

que el valor de la carga igual a 264 kN representa la capacidad de carga límite de nuestro sistema.

Un tema interesante en este momento es analizar cómo varía el valor de la capacidad de carga límite en función de la imperfección inicial θ_1 . La Fig. 3.23 describe este comportamiento. Este gráfico fue construido variando el ángulo de imperfección inicial θ_1 y resolviendo el sistema de ecuaciones (3.36). Para cada ángulo se determina un gráfico de momentos de empotramiento M_{e1} y M_{e2} y de fricción, encontrando la carga en la cual los momentos de fricción y empotramiento coinciden (momento en el cual se libera el cilindro oleohidráulico), tal como se obtuvo en la Fig. 3.22.

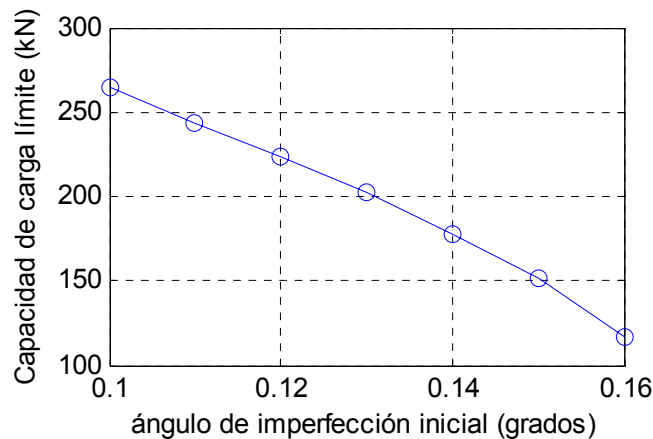


Fig. 3.23 Variación de la carga límite admisible vs ángulo de imperfección inicial θ_1

La figura anterior muestra una reducción considerable de la carga límite admisible del cilindro 'prueba' con el incremento del ángulo de imperfección inicial, mostrando la gran influencia de este parámetro sobre la capacidad de carga de los cilindros oleohidráulicos bi-apoyados.

3.5.3 Cilindro oleohidráulico bi-apoyado (hipótesis de comportamiento: apoyo empotrado en cilindro y apoyo articulado en vástago)

Se aplica en este caso el sistema de ecuaciones (3.37). La Fig. 3.24 presenta el comportamiento del momento M_{e1} generado en el cilindro, y un momento activo M_2 provocado por la fricción entre piezas en contacto en el apoyo del vástago ($\mu_2 = 0,15$).

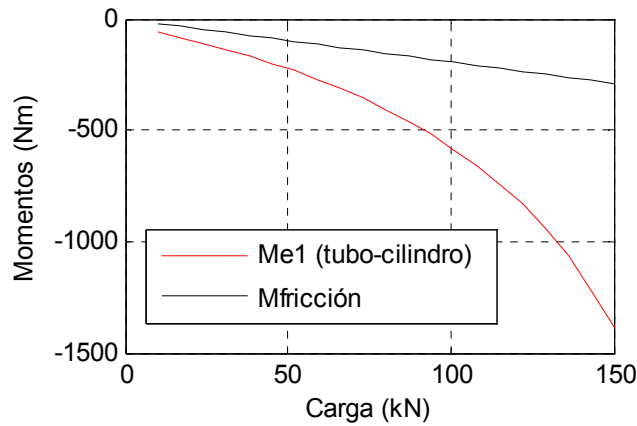


Fig. 3.24 Momento de empotramiento M_{e1} y de fricción en apoyo cilindro

Como se puede ver en la Fig. 3.24 el par de empotramiento calculado es siempre mayor que el par de rozamiento, en consecuencia, la capacidad resistiva en el apoyo no es capaz de mantener el empotramiento y el comportamiento real es equivalente a una configuración bi-apoyado, con pares exteriores M_1 y M_2 . Este comportamiento será estudiado en el apartado 3.5.5.

3.5.4 Cilindro bi-apoyado (hipótesis de comportamiento: apoyado-empotrado).

De forma análoga al caso anterior, el sistema matricial de ecuaciones (3.38), nos permite obtener los valores de los momentos en los extremos del cilindro oleohidráulico. Estos momentos se han graficado en la Fig. 3.25.

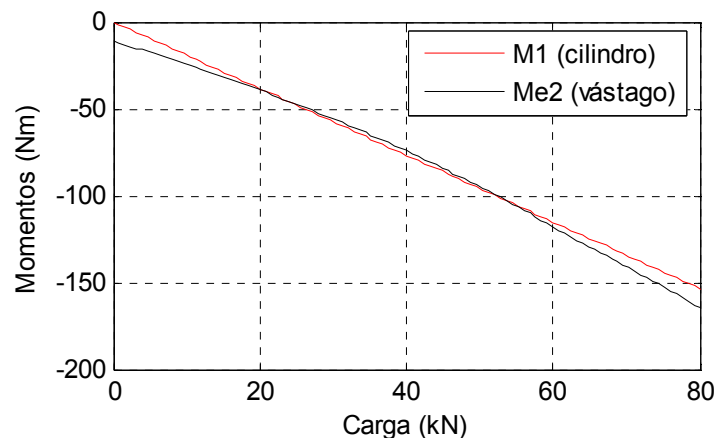


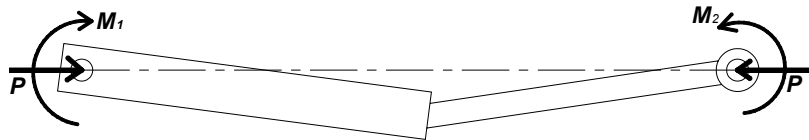
Fig. 3.25 Momento de empotramiento en apoyo del vástago, y de fricción en apoyo del cilindro

La gráfica nos permite observar que hay un intervalo de cargas de 20 a 50 kN en donde se manifestaría un empotramiento en el extremo del vástago. A pesar de ello, entendemos que una postura conservadora nos llevaría a considerar estos casos como apoyado-apoyado con momentos activos (comportamiento que analizaremos en el siguiente apartado).

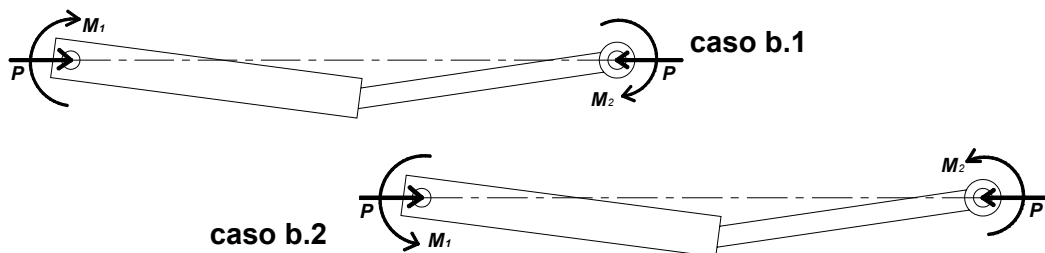
3.5.5 Cilindro bi-apoyado con momentos aplicados en ambos extremos (debidos a la fricción)

Un análisis detallado del mecanismo nos lleva a estudiar dos posibles comportamientos:

Caso a- Momentos positivos como se indica en el esquema.



Caso b- Momentos positivo – negativo, de las formas:



Cabe tener presente que estos momentos son función de la carga, y conocidos a priori. De forma análoga al apartado 3.5.1 el sistema matricial de ecuaciones (3.31), complementado por la ecuación del momento exterior en función de la carga (3.32), nos permite obtener los resultados que se muestran en la Fig. 3.26. El momento exterior (en este caso por rozamiento) aplicado en las articulaciones del cilindro 'prueba' como función de la carga, tendrá la forma:

$$M_1 = M_2 = \frac{0,0256}{2} \cdot 0,15 \cdot P = (1,92\text{mm}) \cdot P \quad (3.46)$$

Esto, si se considera un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,15$ en ambas articulaciones.

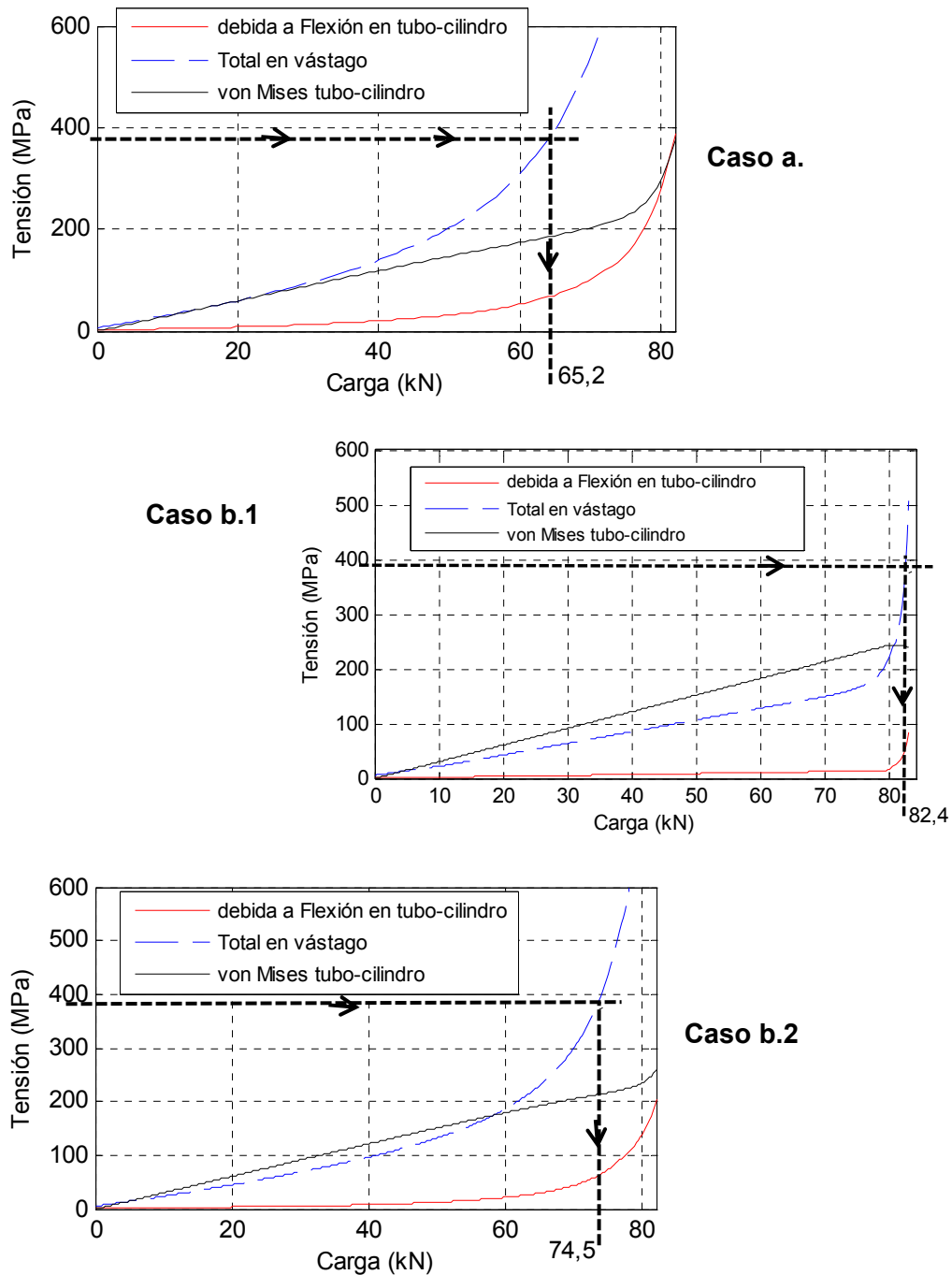


Fig. 3.26 Tensiones en tubo y vástago para cilindro 'prueba' bi-articulado, con momentos exteriores

Las cargas máximas admisibles para un cilindro oleohidráulico bi-apoyado, bajo diferentes condiciones de carga reales, organizadas en orden ascendente, se resumen en la Tabla 3.5. Según los valores determinados de cargas límites admisibles, podemos inferir en qué orden las condiciones de carga (momentos en los apoyos) son más, o menos ventajosas en relación a la capacidad de carga

de un cilindro oleohidráulico bi-apoyado. Los momentos exteriores de rozamiento son calculados según (3.46), tomando un coeficiente de rozamiento de 0,15.


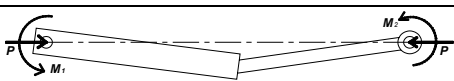
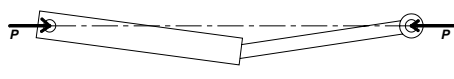
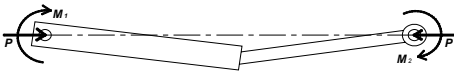
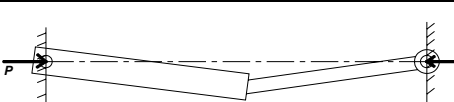
Condiciones reales de carga del cilindro oleohidráulico bi-apoyado		Cargas (kN)	
		límite adm.)	Crítica de pandeo
Momentos exteriores en ambos apoyos		65,2	84,3
		74,5	84,3
Apoyos ideales (sin fricción)		78,7	84,3
Momentos exteriores en ambos apoyos		82,4	84,3
Momentos de empotramiento por contacto en ambos apoyos		264	427
Euler ,criterio fabricantes		52,4	

Tabla 3.5 Comparación de capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico bi-apoyado (cilindro 'prueba'), bajo diferentes condiciones reales de carga

Como resumen final de este capítulo en el diagrama de la Fig. 3.27 se muestra un plan de ruta a seguir para evaluar la capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico en una aplicación real.

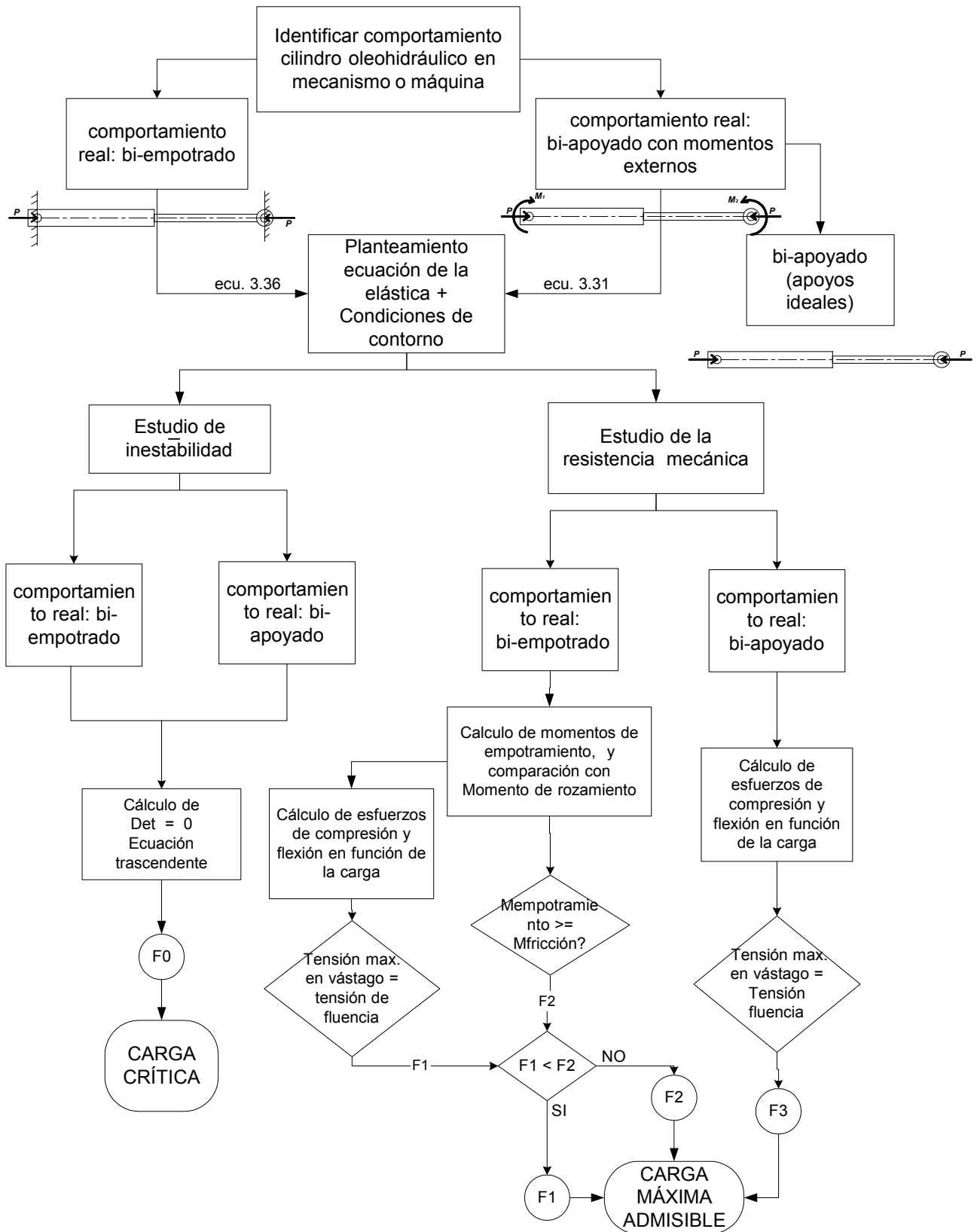


Fig. 3.27 Plan de ruta para determinación de capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico