

ANEXO A

NORMA ISO/TS 13725 (2001) (Hydraulic fluid power – Cylinders- Method for determining the buckling load) [8]

A.1 Análisis de resistencia de un cilindro oleohidráulico con distintas condiciones de contorno (Formulaciones planteadas)

A.1.1 Cilindro apoyado – apoyado

a) Carga crítica de pandeo

Esta carga crítica es aquella que lleva el cilindro oleohidráulico, analizado como columna con carga aplicada en su centroide, al punto de inestabilidad. Para este análisis se toman como referencia las coordenadas x_1 - y_1 (cil) y x_2 - y_2 (vast).

Ecuación de equilibrio para cilindro y vástago, para una carga aplicada F (ver Fig. 2.11):

$$E_1 I_1 \frac{d^2}{dx^2} y_1(x_1) = -kF y_1(x_1) \quad y \quad E_2 I_2 \frac{d^2}{dx^2} y_2(x_2) = -kF y_2(x_2) \quad (A.1)$$

La solución es de la forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_{11} \text{sen}(q_1 x_1) + C_{12} \cos(q_1 x_1) \\ y_2 &= C_{21} \text{sen}(q_2 x_1) + C_{22} \cos(q_2 x_2) \end{aligned} \quad (A.2)$$

donde $q_1 = \sqrt{kF/E_1 I_1}$ y $q_2 = \sqrt{kF/E_2 I_2}$

Con condiciones de contorno: $y_1(0) = y_2(0) = y_1''(0) = y_2''(0) = 0$, debido a desplazamiento y momento flector nulos en los apoyos, se obtiene: $C_{12} = C_{22} = 0$; y a partir de $y_1(L_1) = y_2(-L_2)$ en el punto de conexión, se tiene que:

$$C_{11} \text{sen}(q_2 L_1) + C_{21} \text{sen}(q_2 L_2) = 0 \quad (A.3)$$

Se tiene además que, el momento en el punto de conexión, para una carga centrada es:

$$M_{bc} = -kF \cdot y_2(-L_2) = kF \cdot C_{21} \text{sen}(q_2 L_2) \quad (A.4)$$

El comportamiento en la sección de vástago dentro del cilindro se representa como un sistema simple apoyado, con presencia de un momento M_{bc} (Fig. 3.11), que es función del ángulo θ (ángulo entre pendientes en el punto de conexión, ver Fig. A.1).

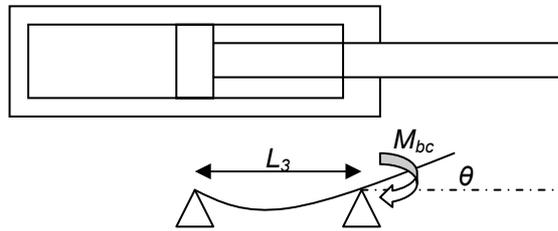


Fig. A.1 Relación del momento con el ángulo θ en el punto de conexión

De acuerdo a esta configuración $\theta = -\frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2}$ [10] (A.5)

Sustituyendo (A.4) en (A.5), resulta $\theta = \frac{kFC_{21}\text{sen}(q_2L_2)L_3}{3E_2I_2}$ (A.6)

θ es el ángulo entre las pendientes de las curvas de deflexión en el punto b, c de conexión vástago-cilindro (Fig. 2.11); esto es: $\frac{dy_1(L_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(-L_2)}{dx_2} = \theta$ (A.7)

Sustituyendo (A.6) en (A.7) y evaluando, se obtiene:

$$C_{21} \left(-q_2 \cos(q_2L_2) + \frac{kF\text{sen}(q_2L_2)L_3}{3E_2I_2} \right) + C_{11}q_1 \cos(q_1L_1) = 0 \quad (\text{A.8})$$

El sistema se vuelve crítico o inestable una vez el determinante de coeficientes del sistema de ecuaciones (A.3) y (A.8) tiende a cero. Esto es:

$$kFL_3s_1s_2 - 3E_2I_2q_1c_1s_2 - 3E_2I_2q_2c_2s_1 = 0 \quad (\text{A.9})$$

donde $s_1 = \text{sen}(q_1L_1)$ $s_2 = \text{sen}(q_2L_2)$ $c_1 = \cos(q_1L_1)$ $c_2 = \cos(q_2L_2)$ ¹

Así, la carga crítica de pandeo es la carga F que satisface la ecuación (A.9).

b) Carga máxima admisible

No necesariamente la carga crítica de pandeo, será una carga de diseño confiable, debido a que aún cargas menores sobrepasan las tensiones

¹ Tales expresiones se emplearán en el documento donde se requiera simplificar.

admisibles del material. Por esto, es necesario determinar la carga admisible, con base en la tensión máxima, definida como:

$$\sigma_{\max} = \frac{4kF}{\pi d_2^2} + \frac{32M_{\max}}{\pi d_2^3} \quad (\text{A.10})$$

Esta tensión involucra los efectos de cargas combinadas compresión y flexión, presentes en los actuadores hidráulicos sometidos bajo carga. Se ha tomado al vástago como elemento crítico del sistema.

La ecuación de equilibrio de momentos para el vástago, a partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. A.2 (tomando momentos en p), y teniendo en cuenta su peso, es:

$$E_2 I_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{8} x^2 + (R_{bc} - kF\psi_d) x - M_{bc} - kFy \quad (\text{A.11})$$

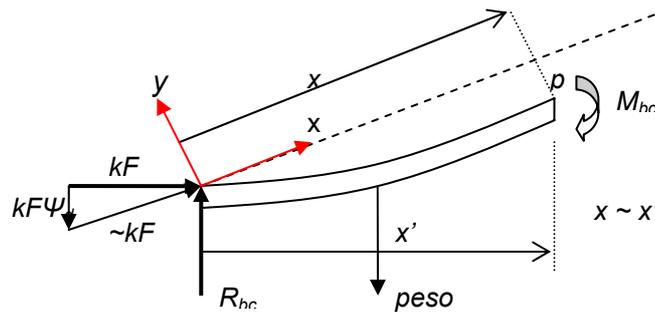


Fig. A.2 Diagrama de cuerpo libre del vástago (ver Fig. 2.11)

Cuya solución (haciendo $y = y_{\text{homogénea}} + y_{\text{particular}}$) tiene la forma:

$$y = C_1 \text{sen}(q_2 x) + C_2 \text{cos}(q_2 x) + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{donde } C_3 = -\frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{8} \quad C_4 = \frac{(R_{bc} - kF\psi_d)}{kF} \quad C_5 = \frac{1}{kF} \left(-M_{bc} + \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g E_2 I_2}{4kF} \right).$$

Las condiciones de contorno, de deflexión nula: $y(0) = y(L_2) = 0$ generan:

$$C_2 = -C_5$$

$$C_1 = \frac{1}{kF \text{sen}(q_2 L_2)} \left\{ -R_{bc} L_2 + kF C_5 [\text{cos}(q_2 L_2) - 1] + kF L_2 \psi_d + \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g L_2^2}{8} \right\} \quad (\text{A.13})$$

El momento máximo en el vástago M_{max} , necesario para determinar la tensión máxima (A.10) corresponde al mayor valor absoluto obtenido, evaluando en la expresión (A.11), los siguientes puntos en x :

En los extremos $x_{Mmax} = 0$; $x_{Mmax} = L_2$.

En los demás puntos:

$$0 < x < L_2 : \text{ se obtiene en } x_{Mmax} = \frac{\arctan\left(\frac{C_1}{C_2} + n\pi\right)}{q_2} \quad (\text{A.14})$$

Para calcular las expresiones anteriores, es necesario hallar algunos parámetros y fuerzas en el actuador. Para ésto se plantearán (9) ecuaciones que permitirán la determinación, en su orden, de: $R_a, R_d, R_{bc}, M_{bc}, \theta, \psi_a, \psi_b, \varphi_b, \varphi_c$. Estas son (ver Fig 2.11).

$$\text{Relaciones de ángulos: } L_1\psi_a - L_2\psi_d = 0 \quad (\text{I})$$

$$\theta - \psi_a - \psi_d + \varphi_b - \varphi_c = 0 \quad (\text{II})$$

Angulo entre pendientes de curvas de deflexión en punto de conexión (Fig. A.1)

$$\theta = -\frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2} \quad (\text{III})$$

En cilindro:

$$\text{Suma de fuerzas en } y_f: R_a + R_{bc} = -\text{peso}_{cil} = -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \quad (\text{IV})$$

Suma de momentos en el punto a , (extremo apoyo cilindro)

$$L_1 R_{bc} + M_{bc} + kFL_1\psi_a = -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kFe_a \quad (\text{V})$$

$$\text{Pendiente de curva de deflexión cilindro en el punto de conexión: } \frac{dy(0)}{dx} = \varphi_b$$

(Ver referencias x-y, Fig. 2.11, alineando x con el cilindro): (VI)

$$(q_1 L_1 - s_1) R_{bc} + q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 - s_1) \psi_a + kFs_1 \varphi_b = \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right]$$

(Empleando las simplificaciones usadas en (A.9), c_1, s_1, c_2, s_2).

En vástago

$$\text{Suma de fuerzas en } y_2: R_d + R_{bc} = \text{peso}_{vast} = \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \quad (\text{VII})$$

Suma de momentos en el punto d (extremo apoyado vástago):

$$-L_2 R_{bc} + M_{bc} + kFL_2 \psi_d = -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d \quad (\text{VIII})$$

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_c$ (IX)

$$(q_2 L_2 - s_2) R_{bc} - q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 - s_2) \psi_d + kFs_2 \varphi_c = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right] \quad (\text{A.15})$$

Organizando las ecuaciones (I → IX) en forma matricial se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & -L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_3}{3E_2 I_2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 1 & 0 & kFL_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 L_1 c_1 - s_1 & q_1 (1 - c_1) & 0 & kF(q_1 L_1 - s_1) & 0 & kFs_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 & 1 & 0 & 0 & kFL_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 L_2 - s_2 & -q_2 (1 - c_2) & 0 & 0 & -kF(q_2 L_2 - s_2) & 0 & kFs_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_a \\ R_d \\ R_{bc} \\ M_{bc} \\ \theta \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \\ -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kFe_a \\ \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} - \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right] \\ \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \\ -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d \\ \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right] \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Resolviendo el sistema (A.16) mediante un método numérico, se determinarán los parámetros necesarios para el cálculo de la tensión máxima (A.10). Así, para un actuador dado, se podrá calcular, mediante un método algorítmico, la carga máxima admisible, calculando aquella carga que genera una tensión máxima cercana a la tensión límite del material.

De igual manera como se ha hecho para el cilindro con apoyos simples, se desarrollan a continuación las formulaciones necesarias para el cálculo, tanto de la carga crítica de pandeo como de la máxima admisible, para las demás condiciones de contorno.

A.1.2 Cilindro empotrado – vástago apoyado

a) Carga crítica de pandeo

De nuevo, planteando la suma de momentos en puntos cualesquiera del cilindro y del vástago mediante diagramas de cuerpo libre, con referencias x_1-y_1 y x_2-y_2 (Fig. 2.11), y considerando carga centrada, se tiene:

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \frac{d^2}{dx_1^2} y_1(x_1) &= -kF y_1(x_1) + R_d (L_2 + L_1 - x_1) \\ E_2 I_2 \frac{d^2}{dx_2^2} y_2(x_2) &= -kF y_2(x_2) - R_d \cdot x_2 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

y su solución tiene la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \frac{R_d (L_2 + L_1 - x_1)}{kF} + C_{11} \text{sen}(q_1 x_1) + C_{12} \cos(q_1 x_1), & q_1 &= \sqrt{kF/E_1 I_1} \\ y_2(x_2) &= -\frac{R_d \cdot x_2}{kF} + C_{21} \text{sen}(q_2 x_2) + C_{22} \cos(q_2 x_2), & q_2 &= \sqrt{kF/E_2 I_2} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Con condiciones de contorno según montaje: $y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2''(0) = 0$, e igualando la deformación en el punto de conexión $y_1(L_1) = y_2(-L_2)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{22} &= 0, & \frac{R_d (L_1 + L_2)}{kF} + C_{12} &= 0 \\ -\frac{R_d}{kF} + q_1 C_{11} &= 0 \\ C_{11} \text{sen}(q_1 L_1) + C_{12} \cos(q_1 L_1) - C_{21} \text{sen}(q_2 L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Teniendo en cuenta, que de nuevo se cumple la expresión (A.5), y además

$$M_{bc} = -kF \cdot y_2(-L_2) + R_d L_2 \text{ y que en el punto de conexión } \frac{dy_1(L_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(-L_2)}{dx_2} = \theta,$$

se obtiene:

$$E_2 I_2 c_1 q_1 C_{11} - E_2 I_2 s_1 q_1 C_{12} + \left(-E_2 I_2 c_2 q_2 + \frac{1}{3} kF s_2 L_3 \right) C_{21} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Tomando de nuevo, a partir de las expresiones (A.19) y (A.20), el sistema de coeficientes que multiplica a R_d , C_{11} , C_{12} , C_{21} , y anulando su determinante, se obtiene:

$$kFL_3 s_2 (L_1 q_1 c_1 + L_2 q_1 c_1 - s_1) + 3E_2 I_2 [(L_1 + L_2) q_1 (q_1 s_1 s_2 - q_2 c_1 c_2) + q_1 c_1 s_2 + q_2 c_2 s_1] = 0 \quad (\text{A.21})$$

La carga que satisface la expresión (A.21), es la carga crítica de pandeo, es decir, aquella que llevaría el sistema a su estado crítico de inestabilidad.

b) Carga admisible (referirse a A.1.1).

De nuevo se requieren encontrar los parámetros necesarios para el cálculo de la tensión máxima (A.10). Para esto se plantean las siguientes expresiones (ver Fig. 2.11):

$$\text{Relaciones de ángulos: } L_1\psi_a - L_2\psi_d = 0 \quad (\text{I})$$

$$\theta - \psi_a - \psi_d + \varphi_b - \varphi_c = 0 \quad (\text{II})$$

$$\text{Empotramiento en a: } \psi_a - \varphi_a = 0 \quad (\text{III})$$

Ángulo entre pendientes de curvas de deflexión en punto de conexión

$$\frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2} + \theta = 0 \quad (\text{IV})$$

Análisis cilindro

$$\text{Suma de fuerzas en y: } R_a + R_{bc} = -\text{peso}_{cil} = -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \quad (\text{V})$$

Suma de momentos en el punto a (extremo apoyo cilindro)

$$L_1 R_{bc} + M_{bc} + kFL_1\psi_a = -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kFe_a \quad (\text{VI})$$

$$\text{Pendiente de curva de deflexión cilindro en el punto de conexión: } \frac{dy(0)}{dx} = \varphi_b$$

(Ubicar referencias x-y y (Fig. 2.11 alineando x con el cilindro):

$$(q_1 L_1 - s_1) R_{bc} + q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 - s_1)\psi_a + kFs_1\varphi_b = \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right]$$

$$\text{Pendiente en punto de apoyo del cilindro: } \frac{dy(L_1)}{dx} = \varphi_a \quad (\text{VIII})$$

$$(q_1 L_1 c_1 - s_1) R_{bc} - q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 c_1 - s_1)\psi_a + kFs_1\varphi_a = -\frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right]$$

Análisis vástago

$$\text{Suma de fuerzas en y: } R_d + R_{bc} = W_{vast} = \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \quad (\text{IX})$$

Suma de momentos en el punto d (extremo apoyado vástago):

$$-L_2 R_{bc} + M_{bc} + kFL_2\psi_d = -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d \quad (\text{X})$$

$$\text{Pendiente curva de deflexión en punto de conexión: } \frac{dy(0)}{dx} = \varphi_c \quad (\text{XI})$$

$$(q_2 L_2 - s_2) R_{bc} - q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 - s_2)\psi_d + kFs_2\varphi_c = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right] \quad (\text{A.22})$$

Organizando las ecuaciones (I → XI) (A.22), en forma matricial se obtiene el sistema (A.23).

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{L_3}{3E_2I_2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & L_1 & 1 & -1 & 0 & kFL_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_1L_1 - s_1 & q_1(1 - c_1) & 0 & 0 & kF(q_1L_1 - s_1) & 0 & 0 & kFs_1 & 0 \\
 0 & 0 & q_1L_1c_1 - s_1 & -q_1(1 - c_1) & 0 & 0 & kF(q_1L_1c_1 - s_1) & kFs_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -L_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & kFL_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_2L_2 - s_2 & -q_2(1 - c_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2L_2 - s_2) & 0 & kFs_2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 R_a \\
 R_d \\
 R_{bc} \\
 M_{bc} \\
 M_a \\
 \theta \\
 \psi_a \\
 \varphi_a \\
 \psi_d \\
 \varphi_b \\
 \varphi_c
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \\
 -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kF e_a \\
 \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right] \\
 -\frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right] \\
 \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \\
 -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kF e_d \\
 \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right]
 \end{pmatrix}
 \tag{A.23}$$

A.1.3 Cilindro apoyado – vástago empotrado

a) Carga crítica de pandeo

Ecuaciones de equilibrio de cilindro y vástago, con referencias x_1-y_1 y x_2-y_2 :

$$\begin{aligned}
 E_1 I_1 \frac{d^2}{dx_1^2} y_1(x_1) &= -kF y_1(x_1) + R_d (L_2 + L_1 - x_1) + M_d \\
 E_2 I_2 \frac{d^2}{dx_2^2} y_2(x_2) &= -kF y_2(x_2) - R_d \cdot x_2 + M_d
 \end{aligned}
 \tag{A.24}$$

Su solución tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 y_1(x_1) &= \frac{R_d (L_2 + L_1 - x_1)}{kF} + \frac{M_d}{kF} + C_{11} \text{sen}(q_1 x_1) + C_{12} \text{cos}(q_1 x_1) \\
 y_2(x_2) &= -\frac{R_d \cdot x_2}{kF} + \frac{M_d}{kF} + C_{21} \text{sen}(q_2 x_2) + C_{22} \text{cos}(q_2 x_2)
 \end{aligned}
 \tag{A.25}$$

Condiciones de contorno y demás:

$$\begin{aligned}
 y_1(0) &= y_1''(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0 \\
 y_1(L_1) &= y_2(-L_2), \quad M_{bc} = -kF \cdot y_2(-L_2) + R_d L_2 + M_d \\
 \frac{dy_1(L_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(-L_2)}{dx_2} &= \theta = -\frac{M_{bc} L_3}{3E_2 I_2}
 \end{aligned}
 \tag{A.26}$$

Después de evaluar las condiciones (A.26) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= 0, \quad \frac{R_d(L_1 + L_2) + M_d}{kF} = 0 \\
 \frac{M_d}{kF} + C_{22} &= 0, \quad -\frac{R_d}{kF} + C_{21}q_2 = 0 \\
 C_{11}s_1 + C_{21}s_2 - C_{22}c_2 &= 0 \\
 E_2I_2c_1q_1C_{11} + \left(-E_2I_2c_2q_2 + \frac{1}{3}kFL_3s_2\right)C_{21} - \left(E_2I_2s_2q_2 + \frac{1}{3}kFL_3c_2\right)C_{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

De nuevo a partir de (A.27), anulando el determinante del sistema de coeficientes que multiplica a R_d , M_d , C_{11} , C_{21} , C_{22} , se obtiene:

$$kFL_3s_1(-L_1q_2c_2 + L_2q_2c_2 - s_2) + 3E_2I_2[(L_1 + L_2)q_2(q_1c_1c_2 - q_2s_1s_2) - q_1c_1s_2 - q_2c_2s_1] = 0 \tag{A.28}$$

Luego, la carga crítica de pandeo es aquella que satisface (A.28).

b) Carga máxima admisible

$$\text{Relaciones de ángulos:} \quad L_1\psi_a - L_2\psi_d = 0 \tag{I}$$

$$\theta - \psi_a - \psi_d + \varphi_b - \varphi_c = 0 \tag{II}$$

$$\text{Angulo entre pendientes} \quad \frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2} + \theta = 0 \tag{III}$$

Análisis cilindro:

$$\text{Suma de fuerzas en y: } R_a + R_{bc} = -\text{Peso}_{cil} = -\rho_1L_1\frac{\pi}{4}(D_{1e}^2 - D_{1i}^2)g \tag{IV}$$

Suma de momentos en el punto a (extremo apoyo cilindro):

$$L_1R_{bc} + M_{bc} + kFL_1\psi_a = -\rho_1L_1^2\frac{\pi}{8}(D_{1e}^2 - D_{1i}^2)g - kFe_a \tag{V}$$

$$\text{Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: } \frac{dy(0)}{dx} = \varphi_b \tag{VI}$$

$$(q_1L_1 - s_1)R_{bc} + q_1(1 - c_1)M_{bc} + kF(q_1L_1 - s_1)\psi_a + kFs_1\varphi_b = \frac{\rho_1\pi(D_{1e}^2 - D_{1i}^2)gq_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right]$$

$$\text{empotramiento en d:} \quad \psi_d + \varphi_d = 0 \tag{VII}$$

Análisis vástago:

$$\text{Suma de fuerzas en y:} \quad R_d + R_{bc} = W_{vast} = \rho_2L_2\frac{\pi}{4}d_2^2g \tag{VIII}$$

Suma de momentos en el punto d (extremo apoyado vástago):

$$-L_2 R_{bc} + M_{bc} + M_d + kFL_2 \psi_d = -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d \quad (IX)$$

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_c \quad (X)$

$$(q_2 L_2 - s_2) R_{bc} - q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 - s_2) \psi_d + kFs_2 \varphi_c = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right]$$

Pendiente de curva de deflexión en punto de apoyo d : $\frac{dy(L_2)}{dx} = \varphi_d \quad (XI)$

$$(q_2 L_2 c_2 - s_2) R_{bc} + q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 c_2 - s_2) \psi_a + kFs_2 \varphi_d = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{4} \left[\frac{L_2}{2} (q_2 L_2 c_2 - 2s_2) + \frac{1 - c_2}{q_2} \right] \quad (A.29)$$

Organizando las ecuaciones (I \rightarrow XI) (A.29), en forma matricial se obtiene el sistema (A.30)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_3}{3E_2 I_2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & kFL_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 L_1 - s_1 & q_1(1 - c_1) & 0 & 0 & kF(q_1 L_1 - s_1) & 0 & 0 & kFs_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & kFL_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 L_2 - s_2 & -q_2(1 - c_2) & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2 L_2 - s_2) & 0 & 0 & kFs_2 \\ 0 & 0 & q_2 L_2 c_2 - s_2 & q_2(1 - c_2) & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2 L_2 c_2 - s_2) & kFs_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_a \\ R_d \\ R_{bc} \\ M_{bc} \\ M_d \\ \theta \\ \psi_a \\ \psi_d \\ \varphi_d \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{ie}^2 - D_{ii}^2) g \\ -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{ie}^2 - D_{ii}^2) g - kFe_a \\ \frac{\rho_1 \pi (D_{ie}^2 - D_{ii}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right] \\ 0 \\ \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \\ -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d \\ \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right] \\ \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{4} \left[\frac{L_2}{2} (q_2 L_2 c_2 - 2s_2) + \frac{1 - c_2}{q_2} \right] \end{pmatrix} \quad (A.30)$$

A.1.4 Cilindro empotrado – vástago empotrado

a) Carga crítica de pandeo

Ecuaciones de equilibrio de cilindro y vástago, con referencias x_1 - y_1 y x_2 - y_2

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \frac{d^2}{dx_1^2} y_1(x_1) &= -kFy_1(x_1) + R_d (L_2 + L_1 - x_1) + M_d \\ E_2 I_2 \frac{d^2}{dx_2^2} y_2(x_2) &= -kFy_2(x_2) - R_d \cdot x_2 + M_d \end{aligned} \quad (A.31)$$

Su solución tiene la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \frac{R_d(L_2 + L_1 - x_1)}{kF} + \frac{M_d}{kF} + C_{11}\text{sen}(q_1x_1) + C_{12}\cos(q_1x_1) \\ y_2(x_2) &= -\frac{R_d \cdot x_2}{kF} + \frac{M_d}{kF} + C_{21}\text{sen}(q_2x_2) + C_{22}\cos(q_2x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Condiciones de contorno y demás:

$$\begin{aligned} y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) &= 0 \\ y_1(L_1) = y_2(-L_2), \quad M_{bc} &= -kF \cdot y_2(-L_2) + R_d L_2 + M_d \\ \frac{dy_1(L_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(-L_2)}{dx_2} &= \theta = -\frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Evaluando (A.33) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{R_d(L_1 + L_2) + M_d}{kF} + C_{12} &= 0, \quad -\frac{R_d}{kF} + C_{11}q_1 = 0 \\ \frac{M_d}{kF} + C_{22} &= 0, \quad -\frac{R_d}{kF} + C_{21}q_2 = 0 \\ C_{11}s_1 + C_{12}c_1 + C_{21}s_2 - C_{22}c_2 &= 0 \\ E_2I_2c_1q_1C_{11} - E_2I_2s_1q_1C_{12} + \left(-E_2I_2c_2q_2 + \frac{1}{3}kFL_3s_2\right)C_{21} - \left(E_2I_2s_2q_2 + \frac{1}{3}kFL_3c_2\right)C_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

De nuevo a partir de (A.34), se obtiene el sistema de coeficientes que multiplica a R_d , M_d , C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} , y anulando su determinante, se obtiene:

$$\begin{aligned} kFL_3 \left[(L_1 + L_2)q_1q_2c_1c_2 - q_1c_1s_2 - q_2c_2s_1 \right] + \\ + 3E_2I_2 \left[(L_1 + L_2)q_1q_2(q_1c_2s_1 + q_2c_1s_2) - q_1^2s_1s_2 + 2q_1q_2(c_1c_2 - 1) - q_2^2s_1s_2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

La carga F que satisface (A.35) es entonces, la carga crítica de pandeo.

b) Carga máxima admisible

$$\text{Relaciones de ángulos:} \quad L_1\psi_a - L_2\psi_d = 0 \quad (\text{I})$$

$$\theta - \psi_a - \psi_d + \varphi_b - \varphi_c = 0 \quad (\text{II})$$

$$\text{Angulo entre pendientes} \quad \frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2} + \theta = 0 \quad (\text{III})$$

Análisis Cilindro

$$\text{Empotramiento en } a : \quad \psi_a - \varphi_a = 0 \quad (\text{IV})$$

$$\text{Suma de fuerzas en y: } R_a + R_{bc} = -\text{Peso}_{cil} = -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \quad (\text{V})$$

Suma de momentos en el punto *a* (extremo apoyo cilindro):

$$L_1 R_{bc} + M_{bc} - M_a + kFL_1 \psi_a = -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kFe_a \quad (VI)$$

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_b$ (VII)

$$(q_1 L_1 - s_1) R_{bc} + q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 - s_1) \psi_a + kFs_1 \varphi_b = \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right]$$

Pendiente de curva de deflexión en extremo cilindro : $\frac{dy(L_1)}{dx} = \varphi_a$ (VIII)

$$(q_1 L_1 c_1 - s_1) R_{bc} - q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 c_1 - s_1) \psi_a + kFs_1 \varphi_a = -\frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right]$$

Análisis vástago

Empotramiento en *d*: $\psi_d + \varphi_d = 0$ (IX)

Suma de fuerzas en *y*: $R_d + R_{bc} = \text{peso}_{\text{vástago}} = \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g$ (X)

Suma de momentos en el punto *d* (extremo vástago):

$$-L_2 R_{bc} + M_{bc} + M_d + kFL_2 \psi_d = -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d \quad (XI)$$

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_c$ (XII)

$$(q_2 L_2 - s_2) R_{bc} - q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 - s_2) \psi_d + kFs_2 \varphi_c = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right]$$

Pendiente en punto de apoyo vástago: $\frac{dy(L_2)}{dx} = \varphi_d$ (XIII)

$$(q_2 L_2 c_2 - s_2) R_{bc} + q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 c_2 - s_2) \psi_a + kFs_2 \varphi_d = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{4} \left[\frac{L_2}{2} (q_2 L_2 c_2 - 2s_2) + \frac{1 - c_2}{q_2} \right] \quad (A.36)$$

Organizando las ecuaciones (I → XIII) (A.36), en forma matricial, se obtiene el sistema (A.37).

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{L_3}{3E_2I_2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & L_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & kFL_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_1L_1 - s_1 & q_1(1 - c_1) & 0 & 0 & 0 & kF(q_1L_1 - s_1) & 0 & 0 & 0 & kFs_1 & 0 \\
 0 & 0 & q_1L_1c_1 - s_1 & -q_1(1 - c_1) & 0 & 0 & 0 & kF(q_1L_1c_1 - s_1) & kFs_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -L_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & kFL_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_2L_2 - s_2 & -q_2(1 - c_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2L_2 - s_2) & 0 & 0 & kFs_2 \\
 0 & 0 & q_2L_2c_2 - s_2 & q_2(1 - c_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2L_2c_2 - s_2) & kFs_2 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 R_a \\
 R_d \\
 R_{bc} \\
 M_{bc} \\
 M_a \\
 M_d \\
 \theta \\
 \psi_a \\
 \psi_d \\
 \varphi_a \\
 \varphi_d \\
 \varphi_b \\
 \varphi_c
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\rho_1L_1\pi/4(D_{ie}^2 - D_{ii}^2)g \\
 -\rho_1L_1^2\pi/8(D_{ie}^2 - D_{ii}^2)g - kFe_a \\
 \frac{\rho_1\pi(D_{ie}^2 - D_{ii}^2)gq_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right] \\
 -\frac{\rho_1\pi(D_{ie}^2 - D_{ii}^2)g}{4} \left[\frac{L_1}{2}(q_1L_1c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right] \\
 0 \\
 \rho_2L_2\pi/4d_2^2g \\
 -\rho_2L_2^2\pi/8d_2^2g - kFe_d \\
 \frac{\rho_2\pi d_2^2gq_1}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right] \\
 \frac{\rho_1\pi d_2^2g}{4} \left[\frac{L_2}{2}(q_2L_2c_2 - 2s_2) + \frac{1 - c_2}{q_2} \right]
 \end{pmatrix}
 \tag{A.37}$$

A.1.5 Cilindro empotrado – vástago libre

a) Carga crítica de pandeo

Ecuaciones de equilibrio de cilindro y vástago, con referencias x_1 - y_1 y x_2 - y_2 (Fig. 2.11)

$$E_1I_1 \frac{d^2}{dx_1^2} y_1(x_1) = -kFy_1(x_1), \quad E_2I_2 \frac{d^2}{dx_2^2} y_2(x_2) = -kFy_2(x_2) \tag{A.38}$$

Su solución tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 y_1(x_1) &= C_{11} \text{sen}(q_1x_1) + C_{12} \text{cos}(q_1x_1) \\
 y_2(x_2) &= C_{21} \text{sen}(q_2x_2) + C_{22} \text{cos}(q_2x_2)
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

Condiciones de contorno y demás:

$$\begin{aligned}
 y_1'(0) &= y_2''(0) = 0 \\
 y_1(L_1) &= y_2(-L_2), \quad M_{bc} = -kF \cdot y_2(-L_2) \\
 \frac{dy_1(L_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(-L_2)}{dx_2} &= \theta = -\frac{M_{bc}L_3}{3E_2I_2}
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

Evaluando (A.40) se obtiene:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22} = 0 \\
c_1 C_{12} + s_2 C_{21} &= 0 \\
-E_2 I_2 s_1 q_1 C_{12} + \left(-E_2 I_2 c_2 q_2 + \frac{1}{3} k F L_3 s_2 \right) C_{21} &= 0
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Anulando el determinante del sistema de coeficientes que multiplica a C_{12} , C_{21} , de (A.41), se obtiene:

$$k F L_3 c_1 s_2 + 3 E_2 I_2 (q_1 s_1 s_2 - q_2 c_1 c_2) = 0 \tag{A.42}$$

De nuevo, la carga F que satisface (A.42) es entonces, la carga crítica de pandeo.

b) Carga máxima admisible

Ecuaciones según

$$\text{Relaciones de ángulos: } L_1 \psi_a - L_2 \psi_d + \Delta = 0 \tag{I}$$

Donde Δ es la flecha del extremo libre del vástago debida a carga aplicada.

$$\theta - \psi_a - \psi_d + \varphi_b - \varphi_c = 0 \tag{II}$$

$$\text{Angulo entre pendientes } \frac{M_{bc} L_3}{3 E_2 I_2} + \theta = 0 \tag{III}$$

Análisis Cilindro

$$\text{Empotramiento en } a : \psi_a - \varphi_a = 0 \tag{IV}$$

$$\text{Suma de fuerzas en y: } R_a + R_{bc} = -\text{peso}_{cil} = -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \tag{V}$$

Suma de momentos en el punto a (extremo apoyo cilindro):

$$L_1 R_{bc} + M_{bc} - M_a + k F L_1 \psi_a = -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - k F e_a \tag{VI}$$

$$\text{Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: } \frac{dy(0)}{dx} = \varphi_b \tag{VII}$$

$$(q_1 L_1 - s_1) R_{bc} + q_1 (1 - c_1) M_{bc} + k F (q_1 L_1 - s_1) \psi_a + k F s_1 \varphi_b = \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right]$$

$$\text{Pendiente de curva de deflexión en extremo cilindro : } \frac{dy(L_1)}{dx} = \varphi_a \tag{VIII}$$

$$(q_1 L_1 c_1 - s_1) R_{bc} - q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF (q_1 L_1 c_1 - s_1) \psi_a + kF s_1 \varphi_a = -\frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right]$$

Análisis vástago

Suma de fuerzas en y: $R_d + R_{bc} = peso_{vástago} = \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g$ (IX)

Suma de momentos en el punto d (extremo vástago):

$$-L_2 R_{bc} + M_{bc} + kF L_2 \psi_d = -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kF e_d$$
 (X)

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_c$ (XI)

$$(q_2 L_2 - s_2) R_{bc} - q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF (q_2 L_2 - s_2) \psi_d + kF s_2 \varphi_c = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right]$$

Carencia de reacción en apoyo libre del vástago $R_d = 0$ (XII)

(A.43).

Organizando las ecuaciones (I → XII) (A.43) en forma matricial, se obtiene el sistema (A.44)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_2}{3E_2 I_2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 1 & -1 & 0 & kF L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 L_1 - s_1 & q_1 (1 - c_1) & 0 & 0 & kF (q_1 L_1 - s_1) & 0 & 0 & kF s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 L_1 c_1 - s_1 & -q_1 (1 - c_1) & 0 & 0 & kF (q_1 L_1 c_1 - s_1) & kF s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & kF L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 L_2 - s_2 & -q_2 (1 - c_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -kF (q_2 L_2 - s_2) & 0 & kF s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_a \\ R_d \\ R_{bc} \\ M_{bc} \\ M_a \\ \theta \\ \psi_a \\ \varphi_a \\ \psi_d \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \\ -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kF e_a \\ \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right] \\ -\frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right] \\ \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \\ -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kF e_d \\ \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

(A.44)

A.1.6 Cilindro empotrado – vástago “libre” (sin rotación del punto de apoyo).

a) Carga crítica de pandeo

Ecuaciones de equilibrio de cilindro y vástago, con referencias x_1 - y_1 y x_2 - y_2 (Fig. 2.11):

$$E_1 I_1 \frac{d^2}{dx_1^2} y_1(x_1) = -kF y_1(x_1) + M_d, \quad E_2 I_2 \frac{d^2}{dx_2^2} y_2(x_2) = -kF y_2(x_2) + M_d \quad (\text{A.45})$$

Su solución tiene la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \frac{M_d}{kF} + C_{11} \text{sen}(q_1 x_1) + C_{12} \cos(q_1 x_1) \\ y_2(x_2) &= \frac{M_d}{kF} + C_{21} \text{sen}(q_2 x_2) + C_{22} \cos(q_2 x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_1'(0) = y_2''(0) = 0 \\ y_1(L_1) &= y_2(-L_2), \quad M_{bc} = -kF \cdot y_2(-L_2) + M_d \quad (\text{A.47}) \\ \frac{dy_1(L_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(-L_2)}{dx_2} &= \theta = -\frac{M_{bc} L_3}{3E_2 I_2} \end{aligned}$$

Evaluando (A.33) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{12} = C_{11} = 0, \quad \frac{M_d}{kF} + C_{12} &= 0 \\ c_1 C_{12} - c_2 C_{22} &= 0 \quad (\text{A.48}) \\ -E_2 I_2 s_1 q_1 C_{12} - \left(E_2 I_2 s_2 q_2 + \frac{1}{3} kF L_3 c_2 \right) C_{22} &= 0 \end{aligned}$$

Anulando el determinante del sistema de coeficientes de M_d , C_{12} , C_{22} , se obtiene:

$$kF L_3 c_1 c_2 + 3E_2 I_2 (q_1 c_2 s_1 + q_2 c_1 s_2) = 0 \quad (\text{A.49})$$

La carga F que satisface (A.49) es entonces, la carga crítica de pandeo.

b) Carga máxima admisible

Ecuaciones según Fig. 2.11.

$$\text{Relaciones de ángulos:} \quad L_1 \psi_a - L_2 \psi_d + \Delta = 0 \quad (\text{I})$$

$$\theta - \psi_a - \psi_d + \varphi_b - \varphi_c = 0 \quad (\text{II})$$

$$\text{Angulo entre pendientes} \quad \frac{M_{bc} L_3}{3E_2 I_2} + \theta = 0 \quad (\text{III})$$

Análisis cilindro

Empotramiento en a : $\psi_a - \varphi_a = 0$ (IV)

Suma de fuerzas en y_1 : $R_a + R_{bc} = -\text{peso}_{cil} = -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g$ (V)

Suma de momentos en el punto a (extremo apoyo cilindro):

$$L_1 R_{bc} + M_{bc} - M_a + kFL_1 \psi_a = -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kFe_a$$
 (VI)

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_b$ (VII)

$$(q_1 L_1 - s_1) R_{bc} + q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 - s_1) \psi_a + kFs_1 \varphi_b = \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[-\frac{L_1^2}{2} + \frac{1 - c_1}{q_1^2} \right]$$

Pendiente de curva de deflexión en extremo cilindro : $\frac{dy(L_1)}{dx} = \varphi_a$ (VIII)

$$(q_1 L_1 c_1 - s_1) R_{bc} - q_1 (1 - c_1) M_{bc} + kF(q_1 L_1 c_1 - s_1) \psi_a + kFs_1 \varphi_a = -\frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1 - c_1}{q_1} \right]$$

Análisis vástago

Empotramiento en d : $\psi_d + \varphi_d = 0$ (IX)

Suma de fuerzas en y_2 : $R_d + R_{bc} = \text{peso}_{vast} = \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g$ (X)

Suma de momentos en el punto d (extremo vástago):

$$-L_2 R_{bc} + M_{bc} + M_d + kFL_2 \psi_d = -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kFe_d$$
 (XI)

Pendiente de curva de deflexión en el punto de conexión: $\frac{dy(0)}{dx} = \varphi_c$ (XII)

$$(q_2 L_2 - s_2) R_{bc} - q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 - s_2) \psi_d + kFs_2 \varphi_c = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_2}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{1 - c_2}{q_2^2} \right]$$

Pendiente en punto de apoyo vástago: $\frac{dy(L_2)}{dx} = \varphi_d$ (XIII)

$$(q_2 L_2 c_2 - s_2) R_{bc} + q_2 (1 - c_2) M_{bc} - kF(q_2 L_2 c_2 - s_2) \psi_a + kFs_2 \varphi_d = \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{4} \left[\frac{L_2}{2} (q_2 L_2 c_2 - 2s_2) + \frac{1 - c_2}{q_2} \right]$$

Reacción nula en extremo "libre" (en desplazamiento). $R_d = 0$ (XIV)

(A.50)

Organizando las ecuaciones (I \rightarrow XIV) (A.50) en forma matricial, se obtiene el sistema (A.51).

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{L_3}{3E_2 I_2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & L_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & kFL_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_1 L_1 - s_1 & q_1(1-c_1) & 0 & 0 & 0 & kF(q_1 L_1 - s_1) & 0 & 0 & kFs_1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_1 L_1 c_1 - s_1 & -q_1(1-c_1) & 0 & 0 & 0 & kF(q_1 L_1 c_1 - s_1) & kFs_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -L_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & kFL_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_2 L_2 - s_2 & -q_2(1-c_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2 L_2 - s_2) & 0 & 0 & kFs_2 & 0 \\
 0 & 0 & q_2 L_2 c_2 - s_2 & q_2(1-c_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -kF(q_2 L_2 c_2 - s_2) & kFs_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 R_a \\
 R_b \\
 R_{bc} \\
 M_{bc} \\
 M_a \\
 M_d \\
 \theta \\
 \psi_a \\
 \varphi_a \\
 \psi_d \\
 \varphi_d \\
 \varphi_b \\
 \varphi_c \\
 \Delta
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\rho_1 L_1 \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g \\
 -\rho_1 L_1^2 \frac{\pi}{8} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g - kF e_a \\
 \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g q_1}{4} \left[\frac{L_1^2}{2} + \frac{1-c_1}{q_1^2} \right] \\
 + \frac{\rho_1 \pi (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) g}{4} \left[\frac{L_1}{2} (q_1 L_1 c_1 - 2s_1) + \frac{1-c_1}{q_1} \right] \\
 0 \\
 \rho_2 L_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 g \\
 -\rho_2 L_2^2 \frac{\pi}{8} d_2^2 g - kF e_d \\
 \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g q_1}{4} \left[\frac{L_2^2}{2} + \frac{1-c_2}{q_2^2} \right] \\
 \frac{\rho_2 \pi d_2^2 g}{4} \left[\frac{L_2}{2} (q_2 L_2 c_2 - 2s_2) + \frac{1-c_2}{q_2} \right] \\
 0
 \end{pmatrix}
 \tag{A.51}$$

A.2 Algoritmos de cálculo de las cargas crítica de pandeo y máxima admisible.

Como se ha mencionado, se requiere de un algoritmo de cálculo que determine las cargas: crítica de pandeo del actuador y máxima admisible del vástago (considerado como elemento crítico), con base en la tensión máxima calculada (A.10).

Los algoritmos de cálculo son descritos mediante diagramas de flujo. La Fig. A.4 presenta los diagramas del programa principal y subprogramas necesarios para el cálculo de cargas máximas en actuadores simplemente apoyados. El programa principal es común a cualquier tipo de montaje y todos los diagramas son una base fundamental en el análisis de las demás condiciones de soporte y permitirán desarrollar los programas respectivos, en cualquier tipo de lenguaje de programación.

Se emplearán en la descripción del programa a continuación, la misma referencia de los parámetros usados en los algoritmos presentados en la Norma (desarrollados originalmente en Fortran). Esto, para permitir el fácil entendimiento de los planteamientos que allí se presentan.

La Fig. A.3 presenta un esquema del actuador indicando las referencias de los parámetros de entrada al programa.

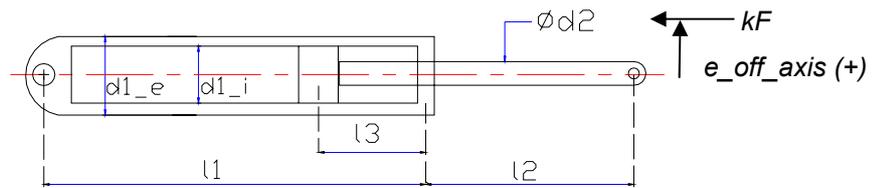


Fig. A.3 Esquema del actuador

Parámetros	Cilindro	Vástago
Diámetros	d1_e = exterior, d1_i = interior	d2
Longitudes (carrera máxima)	l1	l2 = saliente l3 = L _{vástago} - l2
Momentos de Inercia	$i1 = \frac{\pi}{64}(d1_e^4 - d1_i^4)$	$i2 = \frac{\pi}{64}(d2)^4$
Módulo de elasticidad	e1	e2
Densidad	ro_1	ro_2
Gravedad	g	
Factor de seguridad	K	
Excentricidad de la carga aplicada	e_off_axis	
Tensión límite	sigma_e	

Tabla A.1 Referencias de los parámetros empleados por la Norma

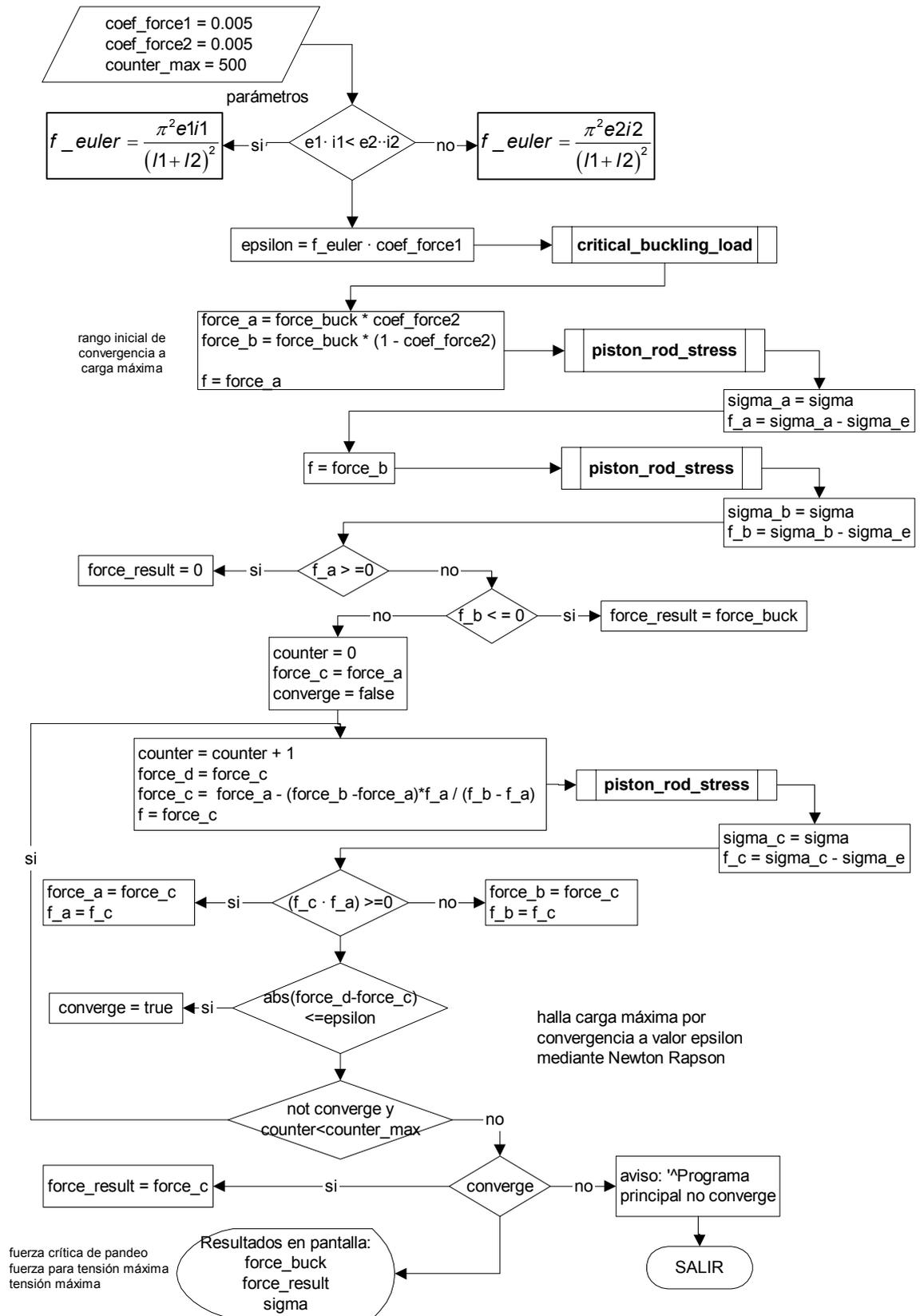


Fig. A.4 (a) Diagramas de flujo del programa principal para el cálculo de carga crítica y máxima admisible (formulaciones Norma 13725)

A.2.1 Programa Principal [Fig. A.4(a)]

El programa principal calcula inicialmente una carga de Euler (f_{euler}) para el actuador, con el módulo $E \cdot I$ mayor (de vástago o cilindro), con la cual, mediante el parámetro de entrada $coef_force1$, determina el parámetro de convergencia $epsilon$, necesario para el cálculo de la carga crítica de pandeo y máxima admisible. El programa principal invoca entonces el subprograma *critical_buckling_load*, mediante el cual calcula la carga crítica de pandeo $force_buck$ (diagrama Fig. A.4.b). Con esta carga y el parámetro $coef_force2$ determina intervalo inicial de convergencia de fuerzas [$force_a$, $force_b$].

Mediante el subprograma *piston_rod_stress* se determinan las tensiones generadas por estas fuerzas, $sigma_a$ y $sigma_b$ respectivamente. Si la tensión $sigma_a$ (tensión para pequeña carga) es superior a la tensión límite del material ($sigma_e$), la carga máxima admisible ($force_result$) será cero, lo que indica que ya se ha superado, con una carga baja, la tensión límite del material. Si no es así ($sigma_a < sigma_e$), y la tensión $sigma_b$ (tensión para carga menor y cercana a carga de pandeo) es inferior a la tensión límite, la carga máxima admisible será la carga de pandeo del actuador, lo que indica que la tensión generada por la carga de pandeo es aún menor que la tensión límite del material (primero fallará por pandeo, que por tensión límite).

Si la tensión $sigma_b$ es superior y $sigma_a$ es inferior a la tensión límite, se determinan valores de tensión para distintas cargas entre $force_a$ y $force_b$, hasta converger al parámetro de convergencia $epsilon$ (mediante un método numérico, Newton Rapson en este caso) (Fig. Fig. A.4.b).

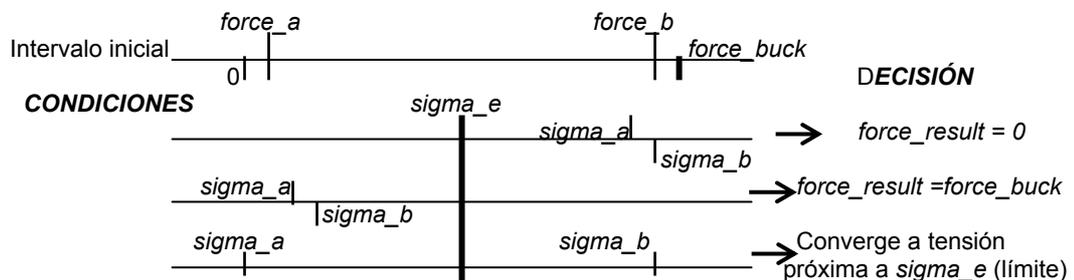


Fig. A.4 (b) Esquema de convergencia de la carga admisible $force_result$ (programa principal)

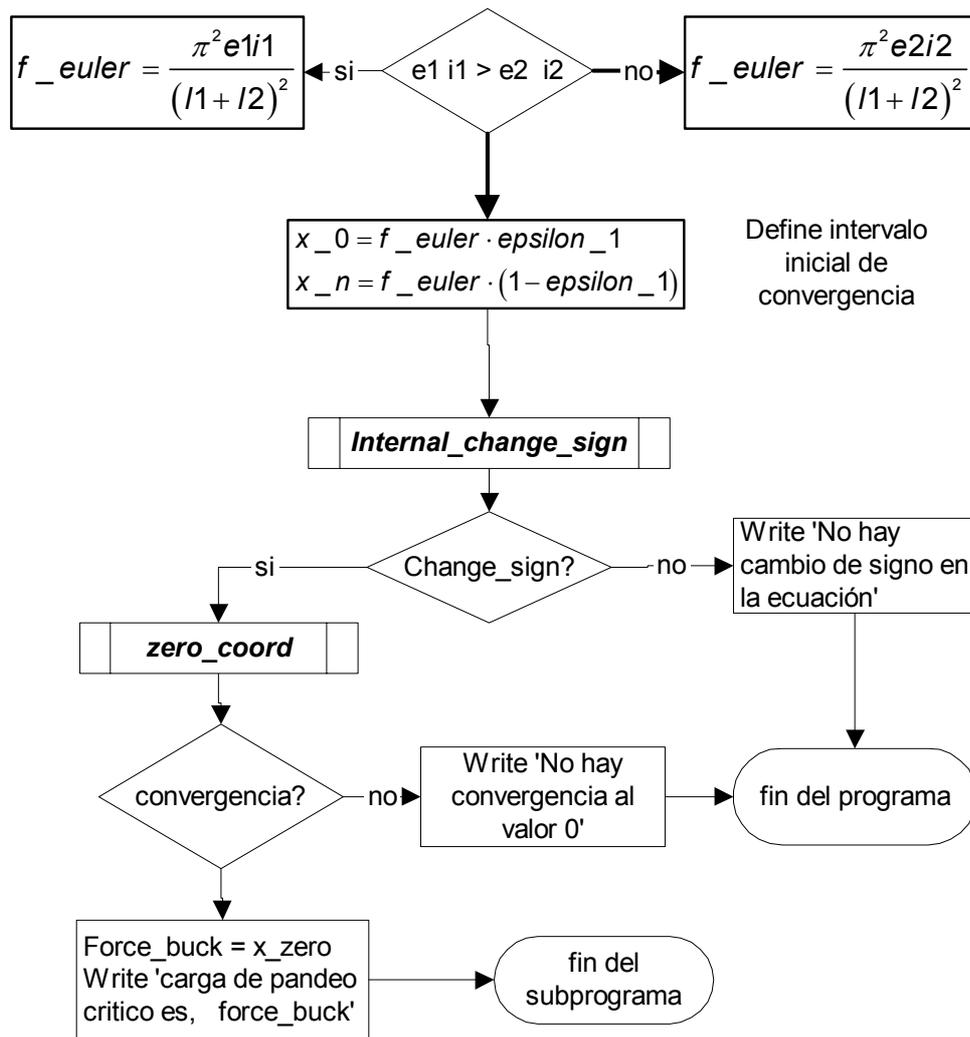


Fig. A.4 (c) Subprograma: *critical_buckling_load*

(Empleado por programa principal, calcula la carga crítica de pandeo: Fuerza F , que satisface, en este caso, la ecuación: $kFL_3s_1s_2 - 3E_2L_2q_1c_1s_2 - 3E_2I_2q_2c_2s_1 = 0$ [ver ec.(A.9)]

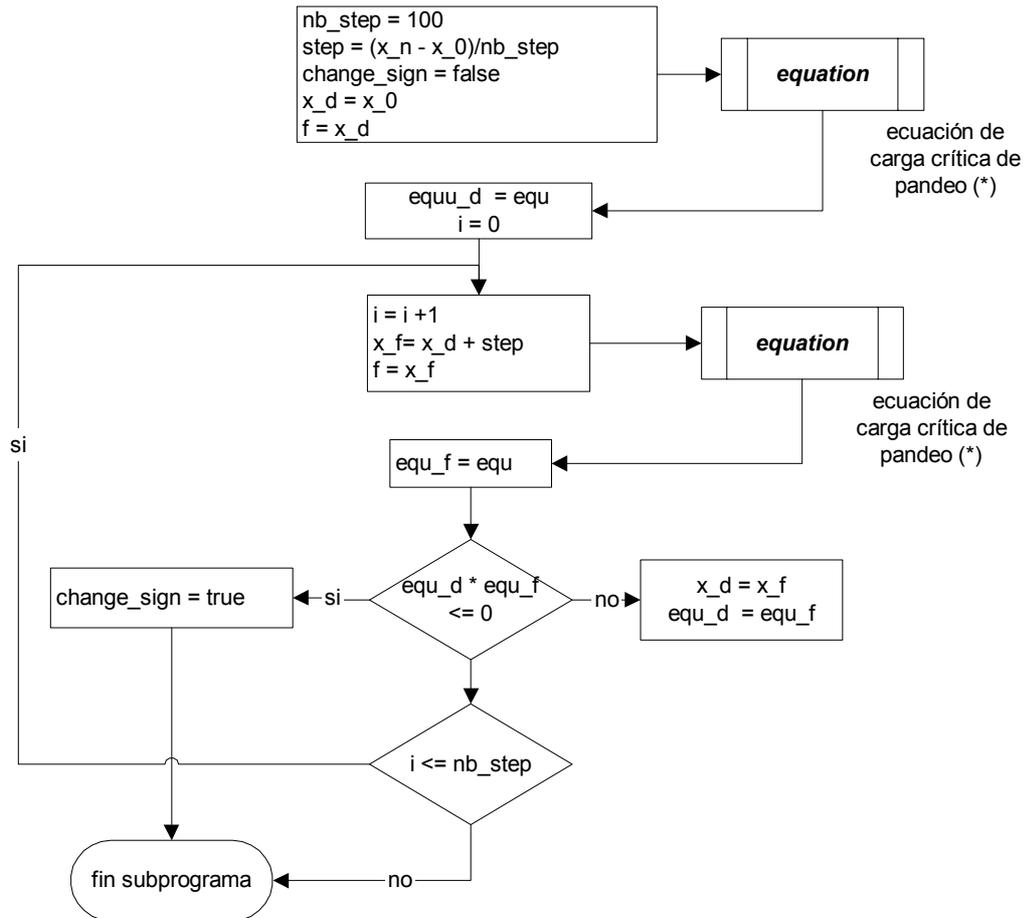


Fig. A.4 (d) Diagrama de flujo subprograma: *Interval_change_sign*

(Empleada por *critical_buckling_load*. Determina intervalo $[x_d, x_f]$ en el cual cambia de signo la ecuación de pandeo crítico).

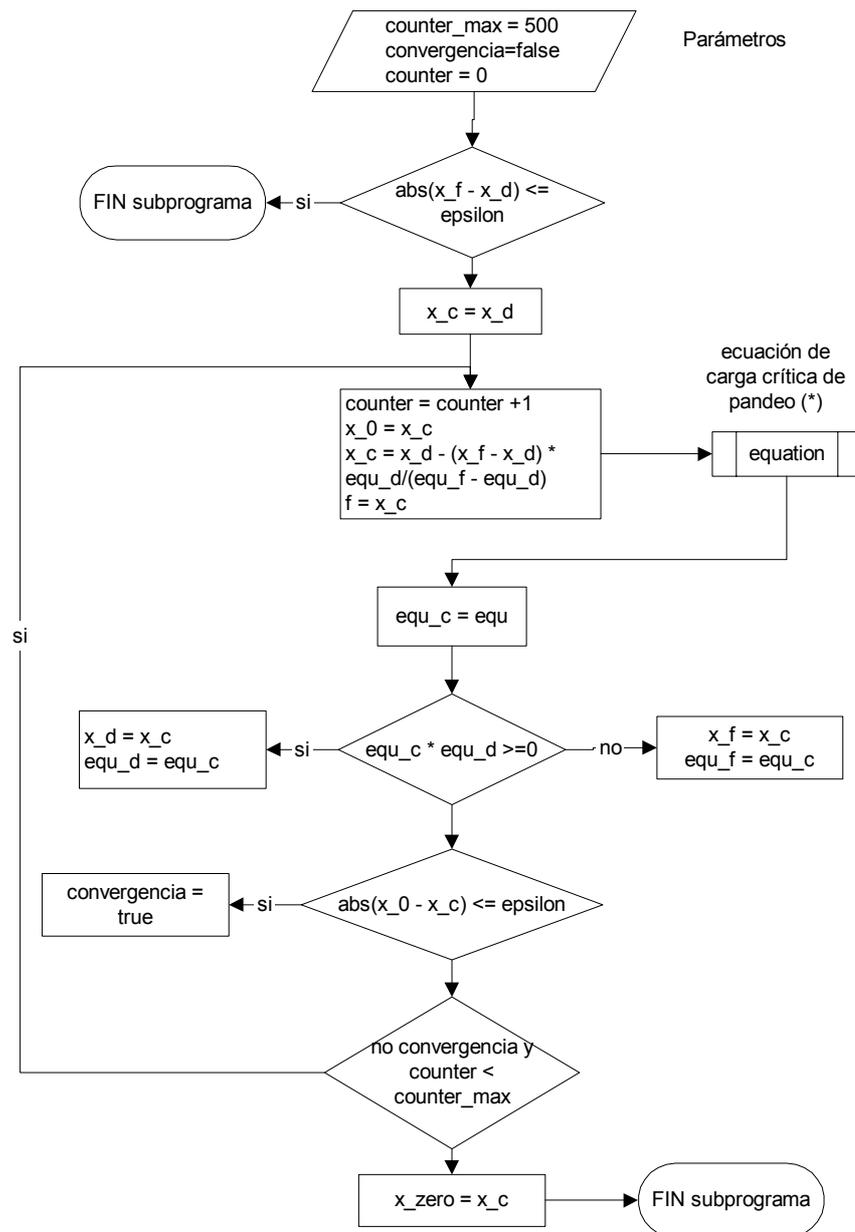


Fig. A.4 (e) Subprograma: zero coord

(Empleada por *critical_buckling_load*. Calcula valor que satisface ecuación de pandeo crítico).

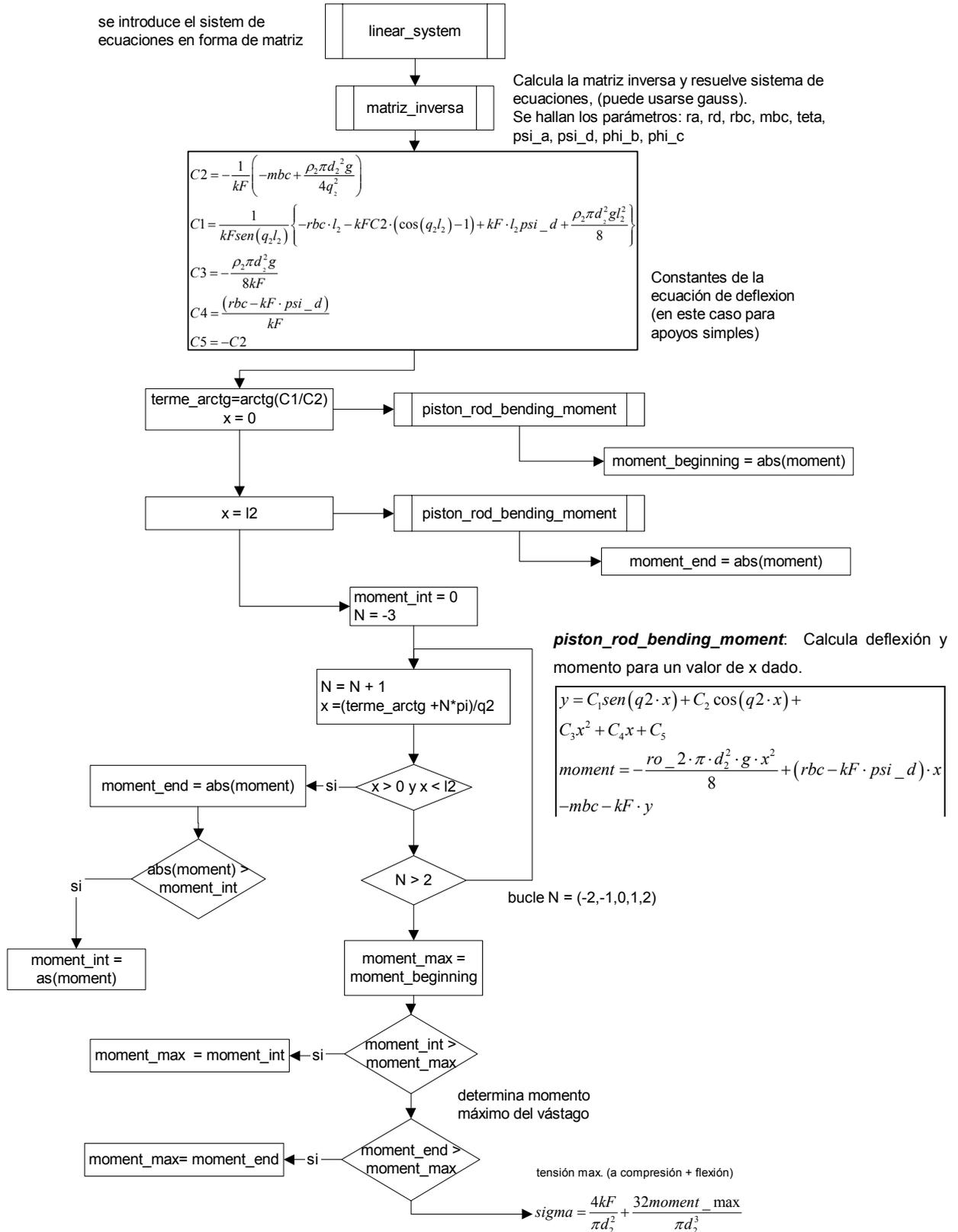


Fig. A.4 (f) Diagrama de flujo subprograma: piston_rod_stress
 (Empleada por *programa principal*. Calcula la tensión máxima para una carga *f* dada).

El subprograma *linear_system* contiene la matriz de coeficientes $M(i,j)$ y el vector de datos *vector_data*, correspondiente al sistema de ecuaciones generado en el análisis de las formulaciones para cada tipo de condiciones de soporte (item A.1).

A.2.2 Programación con base en los algoritmos de cálculo

Con los diagrama de flujo anteriores, se ha desarrollado un programa de aplicación de las formulaciones planteadas en la Norma, para el cálculo de las cargas críticas de pandeo y máximas admisibles de actuadores con todas las condiciones de soporte. Se han empleado dos plataformas de programación, de fácil manejo y accesibilidad: *Visual Basic* y *Excel*.

Para presentar las interfaces de usuario desarrolladas en cada caso se toma, a modo de ejemplo, el cilindro oleohidráulico cuyas características de geometría y material son registradas en la Tabla A.2. Se requiere entonces, analizar su capacidad de carga, determinando entre otros parámetros, las cargas críticas de pandeo y máximas admisibles, bajo carga aplicada a diferentes excentricidades, teniendo la posibilidad de análisis bajo diferentes condiciones de soporte.

Parámetros	Cilindro	Vástago
Diámetros (m)	d1_e = 0.06, d1_i = 0.05	d2 = 0.03
Longitudes (carrera máxima) (m)	l1 = 0.7	l2 = 0.6, l3 = 0.1
Módulo de elasticidad (Pa)	e1 = 2e11	e2 = 2e11
Densidad kg/m ³	ro_1 = 7800	ro_2 = 7800
Gravedad m/s ²	g = 9.8	
Factor de seguridad	k = 1.0	
Excentricidad de la carga aplicada	e_off_axis = 0;	
Tensión límite (MPa)	sigma_e = 340 (fluencia)	

Tabla A.2 Parámetros de un cilindro hidráulico, para el empleo de los programas basados en la Norma

a) Análisis mediante Visual Basic

Aunque no es una plataforma de programación apropiada para análisis matemático, dispone de muchas ventajas en relación a las ventanas de

visualización de resultados. Permite además la creación de un archivo de ejecución de poco peso (memoria), que puede ser empleado en cualquier PC sin plataforma de programación alguna. La Fig. A.5 muestra la interfase de usuario, desarrollada en Visual Basic, para la aplicación de la Norma.

The interface is titled "CILINDRO" and "VASTAGO". It features the following input fields and controls:

- factor de seguridad k:** 1
- Longitudes:** L1 = 0.7 m, L2 = 0.6 m
- Dímetros:** D1_e = 0.06 m, D1_i = 0.05 m, d2 = 0.03 m, Long. vástago = 0.7 m
- Material (módulo de Young):** E1 = 200000000 Pa, E2 = 200000000 Pa, Fluencia = 34000000 Pa
- Buttons:** CALCULAR, RESET, SALIR
- Output fields:** Fcritica de pandeo (kN), Fadmisible (kN), Tension Admisible (MPa), Tadm a compresion (MPa)
- Tipos de montaje:**
 - libre - apoyado
 - apoyado - empotrado (carga fija a vástago)
 - empotrado - libre
 - empotrado - apoyado
 - empotrado - empotrado (carga fija a vástago)
 - empotrado - fijo (sin rotación en extremo, posible mvto carga perpendicular a vástago)

Fig. A.5 Interfase de usuario desarrollado en Visual Basic

Con esta interfase el usuario puede introducir y modificar parámetros geométricos y de material de cilindros oleohidráulicos sometidos a cargas axiales, considerando posibles excentricidades y el factor de seguridad que se requiera. El botón *CALCULAR* presenta los valores calculados, *RESET* lleva los valores a los predeterminados en el programa, y *SALIR* cierra el programa y abandona la interfase de usuario. Tiene esquemas simples de diversos tipos de montaje posibles en una aplicación hidráulica, que el usuario puede seleccionar con un simple clic en el esquema correspondiente. Calcula y presenta en la

casillas etiquetadas con $F_{critica}$ de pandeo, $F_{admisible}$, $Tension$ Admisible y $Tadm$ a compresión, respectivamente la carga crítica de pandeo, la carga máxima admisible con base en la tensión de fluencia, la tensión máxima admisible cercana a la de fluencia, y la tensión a compresión simple (calculada como la *carga máxima admisible / Área-vástago*).

Para efectos de comparación entre los diversos tipos de montaje, se han calculado, para el mismo actuador (Tabla A.2), las cargas crítica y admisible aplicadas concéntricamente, para los diferentes tipos de montaje. Los resultados son registrados en la Tabla A.3.

Tipo de montaje	Carga crítica de pandeo (kN)	Carga máxima admisible (kN)
empotrado - libre	37.5	37.5
(bi-apoyado)	74.7	73.3
empotrado – “libre” (sin rotación en extremo-vástago)	140.7	137.3
empotrado - apoyado	195.9	190.8
apoyado - empotrado	193.3	193.3
empotrado - empotrado	369	239

Tabla A.3 Cargas críticas de pandeo y admisibles calculadas, bajo diferentes condiciones de soporte

Se han registrado en orden ascendente los valores de cargas admisibles; presentando de esta manera los tipos de montaje, del más crítico al menos crítico en relación a la posibilidad de falla, es decir, el actuador de análisis montado con cilindro empotrado y vástago libre, fallará mas fácilmente que los demás, y lo hará por pandeo, mas no por tensión límite (fluencia). Caso contrario sucede si es montado con empotramientos en cilindro y vástago, ya que fallará con una carga más grande y lo hará por tensión límite antes que pandeo. En todos los casos no se ha involucrado ningún valor de excentricidad a la carga aplicada.

b) Análisis mediante Excel

Se ha desarrollado también el programa en formato Excel, posibilitando el alcance de una mayor cantidad de usuarios, por la facilidad de un software tan común como el Excel. Se mejora el potencial de visualización de resultados, por la posibilidad de manejo de distintas *hojas*. En este caso además de los

resultados calculados, se presentan curvas de deflexión y tensión en el vástago, entre otros. La Fig. A.6 presenta la pantalla de interfase de usuario para la entrada y salida de datos.

Esta interfase, correspondiente a la hoja *Datos*, permite al usuario introducir los datos geométricos y de material del cilindro, así como los valores de excentricidad, tensión de diseño (fluencia en su defecto) y factor de seguridad, que se consideren pertinentes de acuerdo a la aplicación.

La pantalla ofrece un esquema del actuador, con los parámetros geométricos en su situación deformado y no deformado. La pantalla muestra los resultados calculados para la carga de Euler convencional (*Carga de Euler*), carga crítica de pandeo (*carga crítica*), la carga máxima admisible (*carga admisible*), la tensión máxima admisible (*Tensión admisible*), y la tensión simple a compresión calculada como *carga máxima Admisible/Área de vástago (Tensión compresión)*.

Los resultados muestran como la carga máxima admisible ha disminuido con respecto a la calculada en la aplicación VisualBasic para montaje apoyado-apoyado, pues en este caso se ha considerado excentricidad de 2 mm.

Entre los datos de salida también se presentan los parámetros geométricos del actuador deformado y las fuerzas y momentos reactivos debido a la carga máxima admisible calculada. Es de notar, como muestran los resultados, que para este tipo de montaje, los momentos en los extremos del actuador M_a y M_d son nulos, ya que en una suposición ideal, no se han considerado fricciones en los apoyos. El programa permite la selección del tipo de montaje que se está aplicando, además de permitir el enlace a través de hipervínculo de un esquema de dicho montaje para brindar una mejor idea de la aplicación, tal como muestra la Fig. A.7 para el caso de *apoyado-apoyado.xls*. Cada esquema se encuentra también en una hoja *Excel*.

Esta aplicación *Excel* permite además, la visualización de la curva de deflexión del vástago para la carga máxima admisible. Esto, puede interesar a nivel práctico, para determinar el punto de máxima deflexión (antes de fluencia) y el punto del vástago en el cual ocurre.

PARAMETROS DEL ACTUADOR				
Referencia				
CILINDRO	Longitud del cilindro	l_1	0,8	m
	Diámetro Exterior	$d1_e$	0,06	m
	Diámetro interior	$d1_i$	0,05	m
	Módulo de elasticidad	$e1$	2,00E+11	Pa
VASTAGO	Longitud que sale el vástago	l_2	0,6	m
	Longitud total del vástago	l_{vas}	0,7	m
	diámetro del vástago	$d2$	0,03	m
	Módulo de elasticidad	$e2$	2,00E+11	Pa
Datos de diseño	excentricidad de carga	$e_{off\ axis}$	2	mm
	Tensión de fluencia	σ_e	3,40E+08	Pa
	factor de seguridad	k	1	

Enlaces a esquemas de montaje

- [apoyado-apoyado.xls](#)
- [empotrado - apoyado.xls](#)
- [apoyado - empotrado.xls](#)
- [empotrado - empotrado.xls](#)
- [empotrado - libre.xls](#)
- [empotrado - libre \(empotrado\).xls](#)

Calcular

Finalizar

Selección del tipo de montaje

- apoyado - apoyado
- empotrado - apoyado
- apoyado - empotrado
- empotrado - empotrado
- empotrado - libre
- empotrado - libre(emp)

70,55 kN	339,63 MPa	
Carga Crítica de pandeo	Tensión máxima admisible	Carga de Euler
55,8 kN	78,93 MPa	40,04 kN
Carga máxima admisible	Tensión a comp simple	
PARAMETROS a Fmax admisible		
Ra	-44,684	N
Rbc	-8,148	N
Rd	40,567	N
Ma		N m
Md		N m
Mbc	-678,455	N m
teta	0,16294	grados
psi_a	0,70867	grados
psi_d	0,94516	grados
phi_a	0,00000	grados
phi_b	0,17846	grados
phi_c	-1,31263	grados
phi_d	0,00000	grados

Tipos de montaje

Fig. A.6 Interfase de usuario, aplicación en Excel

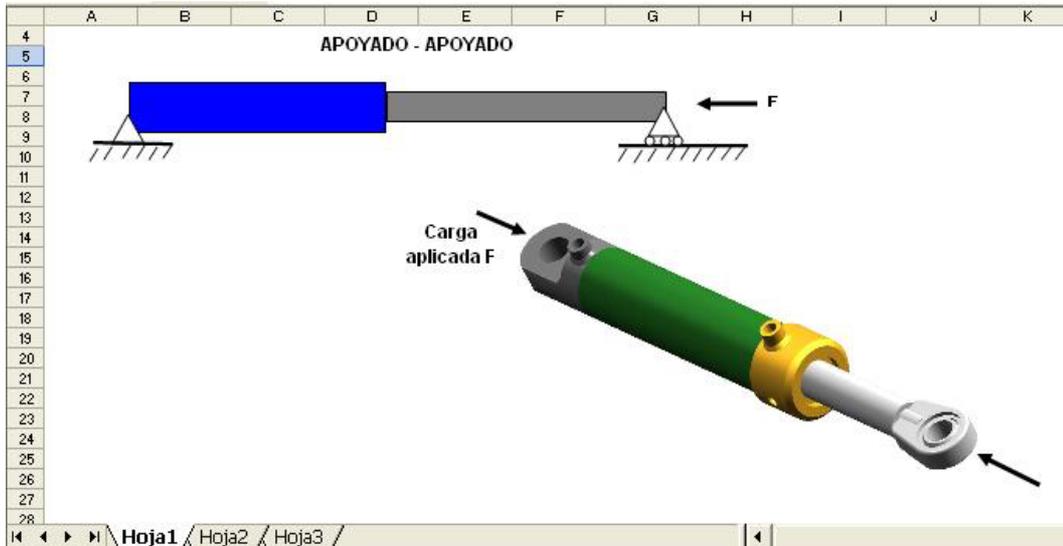


Fig. A.7 Esquema montaje mostrado al hacer clic en *apoyado-apoyado.xls*

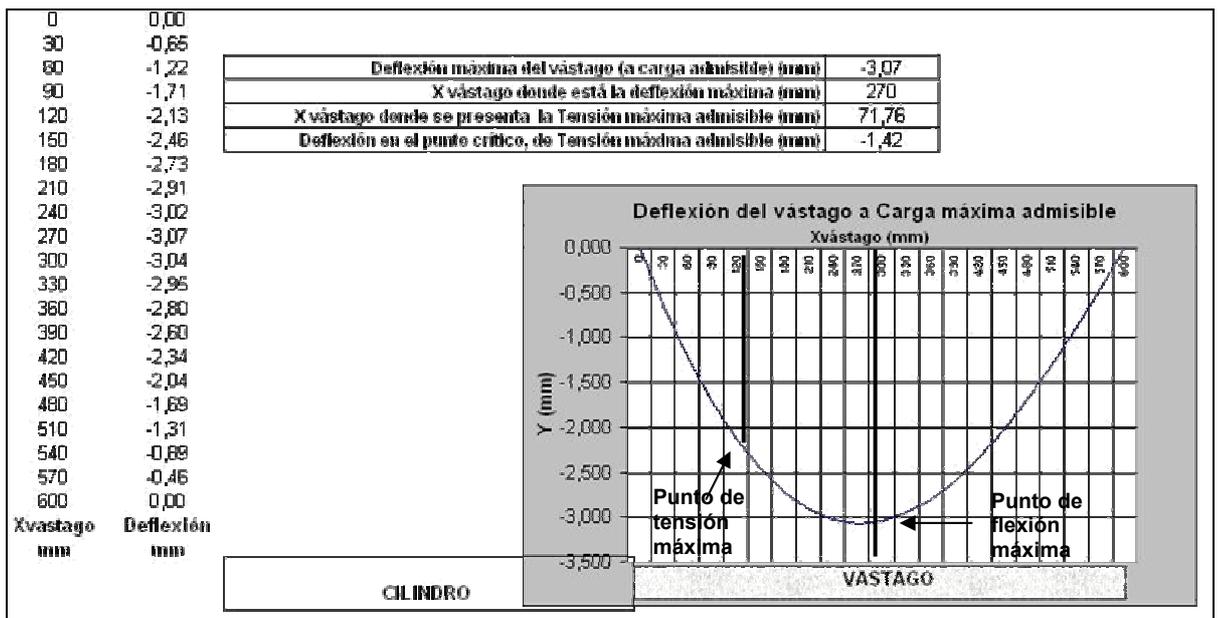


Fig. A.8 Resultados de deflexión del vástago bajo carga máxima admisible

La Fig. A.8 muestra los resultados de deflexión para el actuador-ejemplo, bajo carga máxima admisible aplicada a 2 mm de excentricidad. Se observa que el punto del vástago (270 mm a partir de la conexión vástago-cilindro) en el cual ocurre su deflexión máxima (-3,07mm), no coincide con el punto (71,8mm) donde se presenta la tensión máxima admisible (tensión próxima a la fluencia), donde la deflexión en este punto es de -1,42mm.