Producte, convexificació i completació d'espais mètrics generalitzats i probabilístics

Claudi Alsina Català

"PRODUCTE, CONVEXIFICACIÓ I COMPLETACIÓ
D'ESPAIS MÈTRICS GENERALITZATS I PROBABILÍSTICS"

per

CLAUDI ALSINA I CATALÀ

Memòria presentada per optar al grau de "Doctor en Matemàtiques" per la Facultad de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

"Si com lo taur se'n va fuit pel desert
quan és sobrat per son semblant qui el força,
ne torna mai fins ha cobrada força
per destruir aquell que l'ha desert,
tot enaixí em convé llunyar de vós,
car vostre gest mon esforç ha confús;
no tornaré fins del tot haja fus
la gran paor qui em tot ser delitós"

Ausias March

I N D E X

A G R A Ï M E N T S

Agraeixo al Professor Enric Trillas, la direcció d'aquesta Memòria a la qual ha dedicat moltes hores, acertades suggerències i encoratjadores facilitats.

Agraeixo als Professors Berthold Schweizer (Univ. of Massachusetts) i Abe Sklar (Illinois Inst. Technology) l'informació facilitada i les orientacions rebudes.

La Universitat Politècnica de Barcelona i en especial l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura de Barcelona m'han procurat un suport imprescindible i un agraïble bon acolliment.

Als amics: Federico, Luis, Ned, Dick, Bob, Bruce, Xandra, Chun-Ye, Peter, Fred, Anil, Surendra, Deborah, Sillie, Athina, Mara, Dalal, Bonnie, María i Lina, vull agrair la companyia i amistat compartida, en una llarga estada per terres americanes.

Claudi Alsina.

17 Desembre 1976

INTRODUCCIO

"Cal declarar tot ço que hi ha d'universal i necessari en les ciències especulatives o racionals".

Ramon Llull.

La primera noció de distància abstracta fou introduïda per l'oficial d'artilleria belga J. de Tilly en 1892 ("Essai de géometrie analytique générale", [11]). M. Fréchet. en 1906, establí el concepte d'espai mètric (per resoldre el problema de topologització d'un "espai abstracte"), noció que ha esdevingut fonamental en la recerca de noves estructures sobre les quals basar el desenvolupament de l'Anàlisi funcional. Així, aprofitant les idees de continuïtat i convergència mètriques, Hausdorff defineix, en 1914, els espais topològics i la no invariabilitat per homeomorfismes del criteri seqüencial de fonamentabilitat indueix a A. Weil en 1937, a definir els espais uniformes. Els espais quasiuniformes de Nachbin, els espais de proximitat d'Efremovič i les estructures topògenes de Császár, completen aquest ventall estructuraliste de vèrtex mètric, que avui ha rebut especial cura en la celebrada i ingent tasca del grup matemàtic francès "Bourbaki".

Paral.lelament a aquesta evolució conceptual, deixebles de Fréchet com Appert, KyFan, Kurepa i Colmez seguiren estudis en l'estricta línia mètrica i ordenada (aquesta tasca ha estat recopilada per Mamuzič, [28]). En la mateixa vessant, Blumenthal estudia els mètrics booleans, Glivenko els reticles valorats i des de Riesz, Ribemboim, Everett,...etc., han estudiat els grups reticulats o de Riesz, i amb especial atenció, el concepte de "mètrica natural" que enllaça tècniques analitiques i algebràiques.

Ara bé, en les primeres dècades del segle, el neixement de la Mecànica Quàntica i la Teoria de la Probabilitat, posaren en evidència que tota la bellesa i potència d'aquesta metodologia matemàtica no recullia, ni modelitzava, el problema real d'incertesa que tota mesura presenta. Va ésser l'eminent matemàtic de l'Escola de Viena, Karl Menger, qui introduí el concepte d'espai mètric estadístic ([30]), al considerar els factors aleatoris implicables en tot intent determinista de mesurar una distància, o més general, qualsevol paràmetre. Les idees de Menger han rebut en els darrers 35 anys, especial desenvolupament gràcies a la labor de A. Wald, B. Schweizer, A. Sklar, A.N. Šerstnev,... etc., sota la més encertada denominació d'espais mètrics probabilístics.

En 1.967, E. Trillas introdueix la noció d'espai mètric generalitzat al considerar mètriques abstractes valorades en semigrups ordenats, logrant enllaçar amb aquest punt de vista algebraic-reticular, les estructures mètriques de Fréchet, les probabilístiques de Menger, les booleanes de Blumenthal, i les algebraiques de Riesz. Les Tesis de E. Trillas ([49]), N. Batle ([6]), A. Vila ([55]) i J. Grané ([22]) han estat basades en aquest estudi unificador d'E. Trillas i diversos articles de recerca ([2, 3, 4, 5, 51, 52, 53]) han aportat nous resultats. En aquest camí, la present Memòria és dedicada basicament a l'estudi de tres problemes concrets: el del producte numerable, el de la convexificació seqüencial i el de completació, d'espais mètrics generalitzats, tot fent aplicació als espais mètrics probabilístics, on aquestes tècniques generalitzades, han demostrat ser d'indubtable interès metodològic. En l'inici de cada capítol, els precedents i objectius del mateix són exposats sistematicament.

CAPITOL 0

Conceptes preliminars.

En aquest breu capítol introduim les definicions bàsiques que s'utilitzaran al llarg dels capítols següents.

DEFINICIO 0.1. Un semigrup ordenat (s.o.) és una quaterna $\mathcal{S}=(S,+,\leqslant,e)$ on:

a) S és un conjunt no buit;

b) $(S,+,e)$ és un semigrup commutatiu amb neutre e;

c) $(S,\leqslant,e)$ és un conjunt ordenat amb mínim e;

d) + és isòtona respecte $\leqslant$.

DEFINICIÓ 0.2. Un espai mètric generalitzat és una terna $(\Omega,\mathcal{S},m)$ tal que

a) Ω és un conjunt no buit;

b) $\mathcal{S}=(S,+,\leqslant,e)$ és un semigrup ordenat;

c) $m:\Omega\times\Omega\to S$ verifica les tres següents propietats per tots $a,b,c\in\Omega$:

c_1) Separació: $m(a,b)=e \Leftrightarrow a=b$,

c_2) Simetria: $m(a,b)=m(b,a)$,

c_3) Desigualtat triangular: $m(a,b)\leqslant m(a,c)+m(c,b)$.

DEFINICIÓ 0.3: Un morfisme mètric entre dos espais mètrics generalitzats $(\Omega,\mathcal{S},m)$ i $(\Omega',\mathcal{S}',m')$, és una parella d'aplicacions (f,g) tal que

a) $f:\Omega\to\Omega'$;

b) $g: S\to S'$ és morfisme algebraic i d'ordre tal que $g(e)=e'$;

c) $m'\circ f\times f=g\circ m$.

Si f i g son bijectives, (f,g) es dit isometria; si són injectives (f,g) és una immersió mètrica.

Anomenarem EMG la categoria d'espais mètrics generalitzats. En general seguirem els convenis de notació donats en [49,6].

DEFINICIÓ 0.4. Una t-norma T en l'interval [0,1] és una operació tal que, per tots $a,b,c,d \in [0,1]$,

a) $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$.

b) $T(a,b) = T(b,a)$.

c) $T(a,o)=o$; $T(a,1)=a$.

d) $a \leqslant b$ i $c \leqslant d \Rightarrow T(a,c) \leqslant T(b,d)$.

Notem que si $\lessdot$ és l'ordre dual de l'usual en [0,1], $([0,1],T,\lessdot,1)$ és un semigrup ordenat amb element màxim 0 absorbent. Les t-normes més comunes són

$$\mathrm{Min}(a,b)=\mathrm{Mínim}\{a,b\},\ \mathrm{Prod}(a,b)=a.b,\ T_m(a,b)=\mathrm{Màx}\{a+b-1,0\},\ T_W(a,b)=\begin{cases}=a & \text{si } b=1\\ =b & \text{si } a=1\\ =0 & \text{si } a,b\neq 1\end{cases}$$

verificant-se, per ordenació puntual $\mathrm{Min} \geqslant \mathrm{Prod} \geqslant T_m \geqslant T_W$.

DEFINICIÓ 0.5. Una funció triangular τ en

$\Delta^+ = \{F \mid F: \mathbb{R} \to [0,1],\ F(o)=o, F$ no-decreixent, F contínua per l'esquerra$\}$, el conjunt de funcions de distribució, és una operació tal que $(\Delta^+, \tau, \leqslant, \varepsilon_o)$ és un semigrup ordenat amb neutre ε_o donat per

$$\varepsilon_o(x)=\begin{cases} o & \text{si } x \leqslant o,\\ 1 & \text{si } x > o;\end{cases}$$

funció de salt unitat en x=o que és mínim de $(\Delta^+, \lessdot)$ en definir "$F \lessdot G \Leftrightarrow F(x) \geqslant G(x)$, per tot $x \in \mathbb{R}$". L'escriptura $(\Delta^+, \leqslant)$ indicarà l'ordre puntual normal.

Exemples de funcions triangulars són:

$$\tau = \pi_T : \pi_T(F,G)(x) = T(F(x), G(x)),$$

$$\tau = \tau_T : \tau_T(F,G)(x) = \sup_{u+v=x} T(F(u),G(u)),$$

$$\tau = * : (F*G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-v)\,dG(v) \quad \text{(convolució)},$$

on T és una t-norma contínua per l'esquerra. Per ordenació puntual s'obté:

$$\pi_{Min} \geqslant \pi_{Prod} \geqslant \pi_{T_m} \geqslant \pi_{T_w},$$

$$\pi_{Min} \geqslant * \geqslant \tau_{Prod} \geqslant \tau_{T_m} \geqslant \tau_{T_w},$$

$$\pi_T \geqslant \tau_T.$$

<u>DEFINICIÓ 0.6.</u> Un <u>espai mètric probabilístic</u> és un espai mètric generalitzat $(\Omega, (\Delta^+, \tau, \leqslant, \varepsilon_o), \mathcal{F})$.

Remarquem que en aquest cas a tota parella de punts $(p,q) \in \Omega \times \Omega$, s'assigna una distància abstracte $\mathcal{F}(p,q) \equiv F_{pq}$ que és una funció de distribució interpretada mitjançant:

"$F_{pq}(x)$ és la probabilitat que els punts p,q distin menys de x".

Si $\tau = \tau_T$ l'espai es diu de Menger i la desigualtat triangular funcional és equivalent a:

$$T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) \leqslant F_{pr}(x+y), \text{ per tot } x,y \in \mathbb{R}.$$

Si $\tau = *$ es diu espai de Wald. Per referències bàsiques del tema usarem [38,39] .

La topologia clàssica d'un espai mètric probabilístic, amb τ contínua, que escriurem $(\Omega, \mathcal{F}, \tau)$, és la dita <u>$\varepsilon, \lambda$-topologia</u> que ve donada per la base d'entorns:

$$N_p(\varepsilon,\lambda)=\{q\in\Omega \mid F_{pq}(\varepsilon)>1-\lambda\},$$

on $p\in\Omega, \varepsilon>o, \lambda>o$. Semànticament, els punts q de l'entorn $N_p(\varepsilon,\lambda)$ són aquells que "amb probabilitat $(1-\lambda)$ equidistant de p menys de ε". L'interès d'aquesta topologia és ser la mínima que fà uniformement contínua la distància probabilística $\mathcal{F}$ quan es considera en Δ^+ la topologia de la convergència dèbil de funcions de distribució, equivalent a la topologia mètrica donada per la mètrica de Lévy modificada per Sibley ([47]). Clarament els espais mètrics probabilístics són generalització dels reals en existir l'immersió mètrica (Id_Ω, ε) de $(\Omega, \mathbb{R}^+, d)$ en $(\Omega, \tilde{\varepsilon}, \tau_T)$, donada per $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to \Delta^+$, $r \to \varepsilon_r$ on

$\varepsilon_r(x)=\varepsilon_o(x-r)$ i $\tilde{\varepsilon}_{pq}=\varepsilon_{d(p,q)}$.

C A P I T O L   1

Topologia seqüencial i immersions

"...one of the basic principles of analysis is to choose an abstract space and a notion of convergence that is appropiate to the problem at hand a space in wich one can prove nice theorems".

M. Reed- B. Simon.

La topologia seqüencial T_{o-m} fou introduïda per Batle ([6]). En aquest capítol s'estudien diverses propietats de la mateixa que no havien estat clarificades anteriorment, així com la seva igualtat amb la ε,λ topologia en el cas probabilístic. Aquesta topologia dóna lloc en el segon apartat a estudiar algunes possibles immersions dels corresponents espais en un producte del semigrup de valoració, immersions que en el cas real es redueixen a la coneguda representació de tot espai mètric real separable en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Així en tots els capítols següents es considerarà els espais mètrics generalitzats dotats de la topologia T_{o-m}.

----

§ 1.1.

Toplogia T_{o-m}

Sigui $(\Omega, \mathcal{S}, m)$ un espai mètric generalitzat. Es defineix la o-m convergència:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{o-m} x \quad (x = o\text{-}m \lim_{n\to\infty} x_n) \Leftrightarrow m(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{o} e \Leftrightarrow (\exists\, \delta_n \overset{o}{\downarrow} e \text{ en } S)[\, m(x_n,x) \leqslant \delta_n,\ n\in\mathbb{N}].$$

Sia $C(\Omega) = \{ (x_n) \in \Omega^{\mathbb{N}} : \exists\, x\in\Omega,\ x = o\text{-}m \lim_{n\to\infty} x_n \}$, el conjunt de les successions convergents de Ω segons m, i considerís la correspondència

$$\begin{aligned} \varphi : C(\Omega) &\longrightarrow \Omega \\ (x_n) &\longrightarrow x = o\text{-}m \lim_{n\to\infty} x_n \end{aligned} .$$

Si S és seqüencialment contínu en e $(\delta_n \overset{o}{\downarrow} e,\ \gamma_n \overset{o}{\downarrow} e \Rightarrow (\delta_n+\gamma_n) \overset{o}{\downarrow} e)$ el límit d'una successió convergent és únic ja que si fos $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{o-m} x$ a l'ensems que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{o-m} y$, resultaria $m(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{o} e$, i $m(x_n,y) \xrightarrow[n\to\infty]{o} e$, i per la desigualtat triangular $m(x,y) \leqslant m(x,x_n) + m(x_n,y)$, $m(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{o} e$ i per tant $x=y$; així doncs, en aquesta hipòtesi, φ és una aplicació. En la resta d'aquest apartat es postula la continuïtat seqüencial de S, el que inclou, en particular, la seva no discretitut.

L'aplicació φ defineix una convergència seqüencial en Ω al verificar-se:

a) Si (x_n) es quasi-constant $(x_n = x,\ n \geqslant n_o)$ és $(x_n) \in C(\Omega)$ i $\varphi((x_n)) = x$.

b) Si $(x_n) \in C(\Omega)$, qualsevol parcial $(x_{n_k}) \in C(\Omega)$ i $\varphi((x_n)) = \varphi((x_{n_k}))$ (aquí s'utilitza el fet de que si $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ qualsevol parcial $\delta_{n_k} \overset{o}{\downarrow} e$).

Sigui
$$*: P(\Omega) \longrightarrow P(\Omega)$$
$$A \longrightarrow A^* = \{x \in \Omega : \exists\, (a_n) \subset A,\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{o-m} x\}$$

aleshores $(\Omega,*)$ és un espai clausura en el sentit de Čech. La topologia T_{o-m} és la família dels punts fixes de $*$, es a dir, es consideren com tancats els $A \subset \Omega$ tals que $A=A^*$. L'aplicació $*$ no és en general un operador clausura en el sentit de Kuratowski pero té associada la clausura $\bar{A} = \bigcap_{B=B^*\supset A} B$.

Definició 1.1.1. S verifica la condició diagonal d'Everett [17, 18, 24] si donada una família $(x^n_k)_{(k,n)\in N\times N}$ en S tal que

$$x^n_k \xrightarrow[k\to\infty]{o} x_n \quad \text{i} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{o} x,$$

existeix una successió monòtona d'indexs $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$, per la qual $x^n_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{o} x$.

Proposició 1.1.1. Si S verifica la condició diagonal d'Everett, $*$ és una clausura de Kuratowski i $A^*=\bar{A}$.

Demostració. Si $x \in A^{**}$, existeix $(x_n) \subset A^*$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{o-m} x$, és a dir, $m(x_n,x) \leq \gamma_n, \gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$. Per cada n, $x_n \in A^*$ i existirà $(z^n_k)_{k\in N} \subset A$ tal que $m(z^n_k,x_n) < \delta^n_k,\ \forall k$, i $\delta^n_k \underset{k\to\infty}{\overset{o}{\downarrow}} e$. Per la condició diagonal d'Everett la família $(\delta^n_k)_{(k,n)} \subset S$ admet $\delta^n_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{o} e$ $(\delta^n_{k_n} \leq \alpha_n$ i $\alpha_n \overset{o}{\downarrow} e)$ i per tant

$m(z^n_{k_n},x) \leq m(z^n_{k_n},x_n) + m(x_n,x) \leq \delta^n_{k_n} + \gamma_n \leq \alpha_n + \gamma_n$, $\alpha_n + \gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$, la qual cosa assegura $z^n_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{o-m} x$, $x \in A^*$ i $A^{**} = A^*$.

Mitjançant la convergència en ordre de S és possible definir l'operador clausura de Čech

$$\square : P(S) \longrightarrow P(S)$$

$$B \longrightarrow B^{\square}=\{x\in S : \exists (s_n) \subset B,\ s_n \xrightarrow[n\to\infty]{o} x\},$$

el qual genera la topologia τ_o en S que té com a tancats els punts fixes de $\square$ ($B \in \tau_o \Leftrightarrow B=B^{\square}$).

Proposició 1.1.2. Si S verifica la condició diagonal d'Everett, $\square$ és una clausura de Kuratowski.

Demostració. Si $x \in B^{\square^{\square}}$, existeix $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{o} x$, amb $x_n \in B^{\square}$. Per cada n, existeix $x_k^n \xrightarrow[k\to\infty]{o} x_n$ amb $(x_k^n)_k \subset B$. Per la condició d'Everett resulta $x_{k_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{o} x$, $x \in B^{\square}$ i per tant $B^{\square^{\square}}=B^{\square}$.

Òbviament si $(\Omega, \mathfrak{I}, m)$ és un espai mètric generalitzat, $(\Omega\times\Omega, \mathfrak{I}, m+m)$ també ho és si $(m+m)((x_1,y_1),(x_2,y_2))=m(x_1,x_2)+m(y_1,y_2)$; en aquest conjunt considerarem la T_{o-m+m} topologia.

Definició 1.1.2. a) S verifica la condició de refinament si $a_n+\delta_n \xrightarrow{o} a$, $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$, implica $a_n \xrightarrow{o} a$.

b) S és normal si $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ implica $a+\delta_n \overset{o}{\downarrow} a, \forall a \in S$.

Per exemple tota part positiva de grup de Riesz $(G^+, \leq, |\ |, o)$ verifica les dues propietats precedents ja que si $a_n+\delta_n \xrightarrow{o} a$ i $\delta_n \overset{o}{\downarrow} o$, serà $|a_n-a| \leq |a_n+\delta_n-a| \leq \delta_n \overset{o}{\downarrow} o$, $a_n \xrightarrow{o} a$ i sempre $a_n \xrightarrow{o} a$, $b_n \xrightarrow{o} b$ implica $a_n+b_n \xrightarrow{o} a+b$.

Proposició 1.1.3. En $(\Omega, \mathfrak{I}, m)$, m és contínua entre $(\Omega\times\Omega, T_{o-m+m})$ i (S, τ_o) si S és normal i admet condició de refinament.

Demostració. Sigui $B=B^{\square}$, $B\subset S$. Probarem $(m^{-1}(B))^{*} \subset m^{-1}(B)$.

Si $(x,y) \in (m^{-1}(B))^*$, existeix $(x_n,y_n) \xrightarrow{o-m+m} (x,y)$ amb $m(x_n,y_n) \in B$, per tot $n \in \mathbb{N}$. Aleshores existeix $\delta_n \overset{\circ}{\downarrow} e$, tal que:

$$m(x,y) \leqslant m(x_n,y_n) + m(x_n,x) + m(y_n,y) \leqslant m(x_n,y_n) + \delta_n,$$

$$m(x_n,y_n) \leqslant m(x,y) + m(x_n,x) + m(y_n,y) \leqslant m(x,y) + \delta_n,$$

$$m(x,y) \leqslant m(x_n,y_n) + \delta_n \leqslant m(x,y) + \delta_n + \delta_n,$$

essent S normal i $(\delta_n + \delta_n) \overset{\circ}{\downarrow} e$, serà

$$m(x_n,y_n) + \delta_n \xrightarrow{o} m(x,y),$$

i per la condició de refinament

$$m(x_n,y_n) \xrightarrow{o} m(x,y),$$

d'on $m(x,y) \in B^{\square} = B$ i $(x,y) \in m^{-1}(B)$.

<u>Definició 1.1.3.</u> $(\Omega, \mathfrak{I}, m)$ i $(\Omega', \mathfrak{I}', m')$ són <u>equivalents</u> si $T_{o-m} = T_{o-m'}$.

Siguin $(\Omega, \mathfrak{I}, m)$, $(\Omega, \mathfrak{I}', m')$ dues estructures mètriques generalitzades sobre el mateix Ω.

<u>Proposició 1.1.4.</u> Si $\varphi : S \longrightarrow S'$ és creixent, seqüencialment contínua i $m' \leqslant \varphi \circ m$, és $T_{o-m} \subset T_{o-m'}$.

En efecte, $A^{*(m)} \subset A^{*(m')}$ ja que si $x \in A^{*(m)}$ és $x_n \xrightarrow{o-m} x$ $(x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ i $m(x_n,x) \leqslant \delta_n \overset{\circ}{\downarrow} e$, d'on $m'(x_n,x) \leqslant \varphi(m(x_n,x)) \leqslant \varphi(\delta_n)$ i com que $\varphi(\delta_n) \overset{\circ}{\downarrow} e'$, serà $x_n \xrightarrow{o-m'} x$ i $x \in A^{*(m')}$.

<u>Corol.lari 1.1.1.</u> En les hipòtesis de la proposició precedent, si $m' = \varphi \circ m$ i la condició $\varphi(a_n) \leqslant \delta'_n$, $\delta'_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ (per $(a_n) \subset S$) implica $a_n \xrightarrow{o} a$, aleshores $T_{o-m} = T_{o-m'}$.

En efecte, per veure que $A^{*(m')} \subset A^{*(m)}$, si $x \in A^{*(m')}$ existeix $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \xrightarrow{o-m'} x$ i $m'(x_n,x) = \varphi(m(x_n,x)) \leq \delta'_n$, $\delta'_n \overset{o}{\downarrow} e'$.
Per hipòtesi $m(x_n,x) \xrightarrow{o} e$ i $x \in A^{*(m)}$.

Exemples.

Exemple 1. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $\varphi_+(a,b)=a+b$, $\varphi_r(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi_v(a,b)=a\vee b$ són creixents, subaditives, seqüencialment contínues i nul.les sols en (o,o), al considerar-les de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$. Si d: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$, obtenim en usar la família "φ" les distàncies habituals del plà

$$d_e = \varphi_r \circ d,\ d_{Màx} = \varphi_v \circ d,\ d_+ = \varphi_+ \circ d;$$

com que obviament φ_+, φ_r, φ_v están en les hipòtesis del Corol.lari 1.1.1, és $T_r = T_+ = T_v = T_e = T_{o-d_e}$.

Exemple 2. Sigui $(\Omega, \mathbb{R}^+, d)$ i $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x}$ i $d' = \varphi \circ d = \dfrac{d}{1+d}$.

φ verifica les hipòtesis del Corol.lari (cal notar que si $\varphi(a_n) < \delta_n \overset{o}{\downarrow} o$, $o \leq \dfrac{a_n}{1+a_n} \to o$, $\dfrac{a_n}{1+a_n} - 1 \to -1$, $\dfrac{-1}{1+a_n} \to -1$, $a_n \to o$).

Per tant $T_d = T_{d/1+d}$.

Exemple 3. Siguin $d_1, d_2 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ distàncies reals i $\varphi_k(x) = k.x$ ($\varphi_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$); si existeixen $\lambda, k > o$ tals que $\varphi_\lambda \circ d_1 \leq d_2 \leq \varphi_k \circ d_1$, és $T_{d_1} = T_{d_2}$ ja que $d_2 \leq \varphi_k \circ d_1$ diu $T_{d_1} \subset T_{d_2}$ i $d_1 \leq \varphi_\lambda^{-1} \circ d_2$, $T_{d_2} \subset T_{d_1}$ (per la Proposició 1.1.4.). En el cas dels espais normats aquesta condició és també suficient.

Exemple 4. La distància de KyFan. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espai de probabilitat i $\mathcal{X}$ el conjunt de variables aleatòries en aquest espai. Per cada $\varepsilon > o$, la mètrica generalitzada

$$m_\varepsilon : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$(X,Y) \longrightarrow \{\omega \mid |X(\omega)| > \varepsilon\} \Delta \{\omega \mid |Y(\omega)| > \varepsilon\}$$

porta a considerar el mètric (no separat) $(\mathcal{H}, (\mathcal{A}, \Delta, =, \emptyset), m_\varepsilon)$ on T_{o-m_ε} és la discreta. Siguin

$$M_\varepsilon : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+ \qquad , \qquad d_{KF} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad ;$$
$$(X,Y) \to (Pom_\varepsilon)(X,Y) \qquad \qquad (X,Y) \longrightarrow \inf\{\varepsilon > o \mid M_\varepsilon(X,Y) \leq \varepsilon\}$$

resulta que d_{KF} és la distància de Ky Fan entre variables aleatòries,que metritza la <u>convergència en probabilitat:</u>

$$X_n \xrightarrow{P} X \Longleftrightarrow ((\forall \varepsilon > o)(X_n \xrightarrow{M_\varepsilon} X)) \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{d_{KF}} X,$$

és a dir la convergència en probabilitat és la $T_{d_{KF}} = T_{o-d_{KF}}$.

Aquest criteri no té validesa en la convergència quasi-segura de varia-- bles aleatòries.

La topologia T_{o-m} indueix la relació de pseudo-proximitat:

$$\forall A,B \in P(\Omega) \;:\; A*B \Longleftrightarrow A^* \cap B^* \neq \emptyset, \text{ ó,}$$

$$A*B \Longleftrightarrow ((\exists x \in \Omega)(\exists (a_n) \subset A)(\exists (b_n) \subset B))[a_n \xrightarrow{o-m} x \text{ i } b_n \xrightarrow{o-m} x].$$

Obviament la topologia associada a l'espai de proximitat $(\Omega,*)$ és la T_{o-m}. La proximitat $*$ és de Lodato si, per exemple, S verifica la condició d'Everett, cas en el qual T_{o-m} és descrita per l'operador clausura de Kuratowski $*$, com s'ha estudiat en proposicions precedents.

Tractant-se de demostrar que $T_{o-m} = T_{\varepsilon,\lambda}$, en el cas d'espais mètrics probabilístics, necessitem el seguent <u>lema</u> tècnic:

<u>Lema 1.1.1.</u> $F_n \overset{o}{\to} \varepsilon_o$ sí i només sí $F_n \overset{w}{\to} \varepsilon_o$.

Demostració. Si $F_n \overset{o}{\to} \varepsilon_o$, existeix una successió (G_n) de Δ^+ tal que $G_n \overset{\uparrow}{_o} \varepsilon_o$ i $G_n \leq F_n$, per tot n. És sabut [6] que aleshores $G_n \overset{\uparrow}{_p} \varepsilon_o$ (puntual ment), així per tot $x>o$ és $G_n(x)\uparrow\varepsilon_o(x)=1$ i $G_n(x)\leqslant F_n(x)$, és a dir, $F_n(x)\to\varepsilon_o(x)$ d'ón $F_n \xrightarrow{W} \varepsilon_o$. Recíprocament, si $F_n \xrightarrow{W} \varepsilon_o$, per la continuïtat de ε_o en $(o,+\infty)$ i la nul.litat de F_n i ε_o en $(-\infty,o]$, resulta $F_n \xrightarrow{P} \varepsilon_o$. En particular

$$\liminf_{n\to\infty} F_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{m=n}^{\infty} F_m = \varepsilon_o,$$

per tant, $\bigwedge_{m=n}^{\infty} F_m \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\uparrow}} \varepsilon_o$ i $\bigwedge_{m=n}^{\infty} F_m \leqslant F_n$, per tot n, es a dir, $F_n \xrightarrow{\rho} \varepsilon_o$ i el Lema és demostrat.

Teorema 1.1.1. Si $(\Omega\Delta^+_\tau, \mathcal{F})$ és un espai mètric probabilístic amb τ contínua, aleshores la ε, λ topologia coincideix amb la $T_{o-\mathcal{F}}$ topologia.

Demostració. La continuïtat de τ implica la metrització de la topologia ε, λ i així per el primer axioma de numerabilitat la dita topologia pot ésser descrita en termes seqüencials. Aleshores, usant el Lema 1.1.1.,

$$p_n \xrightarrow{\varepsilon,\lambda} p \Longleftrightarrow F_{p_n p} \xrightarrow{W} \varepsilon_o \Longleftrightarrow F_{p_n p} \xrightarrow{\rho} \varepsilon_o \Longleftrightarrow p_n \xrightarrow{T_{o-\mathcal{F}}} p, \quad \text{per tant } T_{\varepsilon-\lambda} = T_{o-\mathcal{F}}.$$

Aquest resultat mostra que la topologia clàssica ε,λ és exactament la topologia seqüencial dels espais mètrics probabilístics en ésser considerats com a espais mètrics generalitzats.

§ 1.2.

Immersions isomètriques.

Tractant d'establir propietats d'immersió en el producte del semigrup de valoració, introduïm la següent

Definició 1.2.1. $(\Omega,\mathfrak{J},m)$ és o-m separable si Ω és separable respecte la T_{o-m} topologia ($\exists A\subset\Omega \,|\, \# A=\aleph_0$ i $A^*=\Omega$).

Lema 1.2.1. Sigui $\mathcal{X}_n=(x_1^n,x_2^n,\ldots,x_n^n,\ldots)\in S^{\mathbb{N}}$, per tot $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{X}=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in S^{\mathbb{N}}$ i $\pi_i(\mathcal{X}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{o}\pi_i(\mathcal{X})$, per tot $i\in\mathbb{N}$, essent π_i la i-èssima projecció de $S^{\mathbb{N}}$ en S. Aleshores $\mathcal{X}_n\xrightarrow{o}\mathcal{X}$ en $(S^{\mathbb{N}},\leqslant)$.

En efecte, si $\pi_i(\mathcal{X}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{o}\pi_i(\mathcal{X})$ per cada $i\in\mathbb{N}$, existiran, fixat un i qualsevol, $(b_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$ i $(c_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$, tals que

$$c_n^i\leqslant\pi_i(\mathcal{X}_n)\leqslant b_n^i,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

$$b_n^i\ \underset{n\to\infty}{\overset{o}{\downarrow}}\ \pi_i(\mathcal{X}),\quad c_n^i\ \underset{n\to\infty}{\overset{o}{\uparrow}}\ \pi_i(\mathcal{X});$$

prenent $b_n=(b_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$, $c_n=(c_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$, resulta $c_n\leqslant\mathcal{X}_n\leqslant b_n$ al ésser $\pi_i(c_n)=c_n^i\leqslant\pi_i(\mathcal{X}_n)\leqslant b_n^i=\pi_i(b_n)$, per tot i. Ademès $b_n\ \underset{n\to\infty}{\overset{o}{\downarrow}}\ \mathcal{X}$ i $c_n\ \underset{n\to\infty}{\overset{o}{\uparrow}}\ \mathcal{X}$, d'on $\mathcal{X}_n\xrightarrow{o}\mathcal{X}$.

Teorema 1.2.1. Si $(\Omega,\mathfrak{J},m)$ és o-m separable i m és contínua, existeix $\varphi:\Omega\to S^{\mathbb{N}}$ injectiva i contínua (entre (Ω,T_{o-m}) i $(S^{\mathbb{N}},\mathcal{T}_o)$).

Demostració. Sia $A\subset\Omega$ el subconjunt numerable $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$ que és T_{o-m} dens en Ω ($A^*=\Omega$). És defineix

$$\varphi : \Omega \to S^{N}$$
$$x \to (m(x,a_n))_{n\in N}.$$

a) φ és injectiva.

Si $\varphi(x)=\varphi(y)$, $m(x,a_n)=m(y,a_n)$, per tot $n\in N$. Si $x\in A$ seria $x=a_k$ per cert $k\in N$ i per a aquest index $e=m(a_k,a_k)=m(y,a_k)$ d'on $y=a_k=x$. Si $x\in \Omega-A\subset A^*$, existeix $(b_n)\subset A^*$ tal que $b_n \xrightarrow{O-m} x$ i podem escriure $(b_n)=(a_{k_n})$. De $m(b_n,x)\xrightarrow{O} e$, tindrem $m(b_n,y)\xrightarrow{O} e$ i $b_n \xrightarrow{O-m} y$ i per l'unicitat del límit $x=y$.

b) φ és contínua.

Sigui $B=B^{\square}\subset S^{N}$. Aleshores $\varphi^{-1}(B)^*\subset\varphi^{-1}(B)$ ja que si $x\in\varphi^{-1}(B)^*$, existeix $(x_n)\subset\varphi^{-1}(B)$ amb $x_n \xrightarrow{O-m} x$ ($\varphi(x_n)\in B$, $\forall n\in N$). Per la continuïtat de m, és $m(x_n,a_i)\underset{n\to\infty}{\xrightarrow{O}} m(x,a_i)$, per tot $i\in N$ i el Lema 1.2.1. porta a $\varphi(x_n)=(m(x_n,a_i))_{i\in N}\underset{n\to\infty}{\xrightarrow{O}}(m(x,a_n))_{n\in N}=\varphi(x)$, d'on $\varphi(x)\in B^{\square}=B$ i $x\in\varphi^{-1}(B)$.

Corol.lari 1.2.1. Tot espai mètric real separable admet una immerssió en R^{N}.

Corol.lari 1.2.2. Tot espai mètric probabilístic ε,λ - separable admet una injecció contínua en Δ^{+N}.

Ara bé, el darrer Corol.lari 1.2.2. pressuposa la topologia de l'ordre en Δ^{+N}, cosa que com ja hem observat en §1.1 no té interés probabilístic. Per a obtenir un resultat coherent amb la convergència dèbil de Δ^+, considerem en Δ^+ la mètrica de Paul Lévy modificada per Sibley [47]:

$$\forall F,G\in\Delta^+,\ \mathcal{L}(F,G)=\inf\{h \mid F(x-\tfrac{h}{2})-\tfrac{h}{2}\leqslant G(x+\tfrac{h}{2})+\tfrac{h}{2} \text{ i } G(x-\tfrac{h}{2})-\tfrac{h}{2}\leqslant F(x+\tfrac{h}{2})+\tfrac{h}{2},$$

$$\text{quan } -(\tfrac{1}{h}+\tfrac{h}{2})<x<\tfrac{1}{h}+\tfrac{h}{2}\}.$$

És sabut que $(\Delta^{+},\mathcal{L})$ és complet, $\mathcal{L}(F,G) \leqslant 1$ i $\mathcal{L}(F,G) \leqslant L(F,G)$ (on L és la mètrica de Paul Lévy) i $F_n \xrightarrow{W} F$ sí i només sí $\mathcal{L}(F_n,F) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Sigui $E_F^{\mathcal{L}}(r)=\{G\in\Delta^{+} \mid \mathcal{L}(F,G)< r\}$. La mètrica de Fréchet en $\Delta^{+\mathcal{N}} = \{(f_n) \mid f_n \in \Delta^{+},\ n\in\mathcal{N}\}$, induïda per $\mathcal{L}$, és:

$$\hat{\mathcal{L}}((f_n),(g_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(f_n,g_n)}{2^n} .$$

Escriurem $E_{(f_n)}^{\hat{\mathcal{L}}}(r)=\{(g_n) \mid \hat{\mathcal{L}}((f_n),(g_n)) < r\}$.

Aplicant un resultat general d'espais mètrics a aquest cas tindrem la:

Proposició 1.2.1. Sigui $N_{k,\varepsilon}((f_n)) = \prod_{i=1}^{\infty} G_i$, amb $G_i=E_{f_i}^{\mathcal{L}}(\varepsilon)$, $i=1,\dots,k$, i $G_i=\Delta^{+}$, $\forall i> k$. La col.lecció $\mathcal{N}=\{N_{k,\varepsilon}((f_n)) \mid \varepsilon>0, k\in\mathcal{N}, (f_n)\in\Delta^{+\mathcal{N}}\}$ és una base per la topologia $T_{\hat{\mathcal{L}}}$ i $T_{\hat{\mathcal{L}}}$ és la topologia producte.

Corol.lari 1.2.3. $T_{\hat{\mathcal{L}}}$ és la topologia de la convergència per coordenades

$$\left((f_k^n)_{k\in\mathcal{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{T_{\hat{\mathcal{L}}}} (f_k)_{k\in\mathcal{N}} \Leftrightarrow f_k^n \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{L}} f_k, \forall k \in \mathcal{N} \right)..$$

Corol.lari 1.2.4. $(\Delta^{+\mathcal{N}},\hat{\mathcal{L}})$ és complet..

Sigui $(\Omega,\mathcal{F},\tau_T)$ un espai mètric probabilístic de Menger tal que T és contínua. És sabut que la ε,λ topologia és metritzable per ésser uniformitzable baix aquesta hipòtesi sobre T.

Teorema 1.2.2. Si $(\Omega,\mathcal{F},\tau_T)$ és ε,λ -separable, existeix una injecció contínua en $(\Delta^{+\mathcal{N}},\hat{\mathcal{L}})$.

Demostració. Sia $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ numerable i ε,λ -dens en Ω. Definim

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\to \Delta^{+\mathcal{N}} . \\ a &\to (F_{aa_n}) \end{aligned}$$

a) <u>ϕ és injectiva.</u> Si $\phi(a)=\phi(b)$, és $F_{aa_n}=F_{ba_n}$, per tot $n\in N$. Si $b\in A$, és $b=a_k$, per cert k, i $F_{aa_k}=F_{a_k a_k}=\varepsilon_o$, d'on $a=a_k=b$. Suposem $b\in\Omega-A\subset\bar{A}^{\varepsilon\lambda}$; prenent $\frac{\varepsilon}{2}>o$ i una successió $\lambda_n \downarrow o$ tindrem $N_b(\frac{\varepsilon}{2},\lambda_n)\cap A\neq\phi$, per tot $n\in N$. Siguin $(a_{i_n})_{n\in N}\subset A$ tals que $a_{i_n}\in N_b(\frac{\varepsilon}{2},\lambda_n)$. Aleshores:

$T(1-\lambda_n,\ 1-\lambda_n)\leq T(F_{ba_{i_n}}(\frac{\varepsilon}{2}), F_{aa_{i_n}}(\frac{\varepsilon}{2}))\leq F_{ab}(\varepsilon)$, i prenent límits

$$\lim_{n\to\infty} T(1-\lambda_n,\ 1-\lambda_n)= T(1,1)= 1\leq F_{ab}(\varepsilon),$$

és a dir, $F_{ab}(\varepsilon) = 1$ i això serà per tot $\varepsilon > o$, d'on $a=b$.

b) <u>ϕ és contínua.</u> Si $x_n \xrightarrow{\varepsilon-\lambda} x$ i $a_k \xrightarrow{\varepsilon-\lambda} a_k$ (per tot $k\in N$) resulta:

$$\mathcal{L}(F_{x_n a_k}, F_{xa_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} o,\quad F_{x_n a_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F_{xa_k},\ \text{per qualsevol que}$$

sigui $k\in N$. Pel Corol.lari 1.2.3., $(F_{x_n a_k})_{k\in N} \xrightarrow{T\hat{\mathcal{L}}} (F_{xa_k})_{k\in N}$ i d'ací $\phi(x_n) \xrightarrow{\hat{\mathcal{L}}} \phi(x)$.

<u>Corol.lari 1.2.5.</u> Amb les hipòtesis del Teorema 1.2.2, $(\Omega,\mathcal{F},\tau_T)$ és un espai mètric amb distància donada per

$$d(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(F_{aa_n}, F_{ba_n})}{2^n} ..$$

<u>Corol.lari 1.2.6.</u> A tot espai de Wald $(\Omega,\mathcal{F},*)$ ó de Šertnev $(\Omega,\mathcal{F},\pi_T)$ amb T contínua, separables ε,λ, li és aplicable el Teorema 1.2.2.

En efecte, $*\geq\tau_{prod}$ i $\pi_T\geq\tau_T$.

<u>Corol.lari 1.2.7.</u> Tot espai de Menger $(\Omega,\mathcal{F},\tau_T)$ numerable amb T contínua admet una injecció contínua en Δ^{+N}.

En efecte, tot $(\Omega, \mathcal{F}, \tau_T)$ numerable amb T contínua és un subconjunt dens d'un espai $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \tau_T)$ de Menger complet (construcció de Sherwood, [44, 45]). $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \tau_T)$ és aleshores. ε, λ - separable i s'aplica el Teorema 1.2.2.

CAPITOL 2

Productes mètrics i probabilístics.

"If computation is still 'an art', as some have suggested, rather than a science, then our work is not finished"

R. E. Moore.

El producte finit d'espais mètrics generalitzats fou estudiat per Trillas ([51]) i el dels espais mètrics probabilístics per Egbert ([15]), Xavier ([58]), Tardiff ([48]) i Istrăţescu i Văduva ([23]). En el present capítol s'aborda en §2.1 el problema general del producte d'espais mè-trics generalitzats, el qual és obtingut com a límit projectiu d'un sistema projectiu mètric en la categoria E.M.G. A l'aplicar aquesta tècnica als cassos concrets, es presenta el problema de projectar de forma ade-quada el "semigrup producte" en el semigrup de partida, la qual cosa en els cassos clàssics de Fréchet, de funcions... etc. és immediat, però en el cas probabilístic, diverses dificultats tècniques es presenten. Així en § 2.2 s'estudia el mètode de "sumes lineals de successions d'elements de Δ^+", tot retrobant l'esperada topologia producte i analitzant diverses patologies. El §2.3 es dedica exhaustivament a l'anàlisi d'una inequació funcional que surgeix de forma natural en §2.2, concretament el problema de comportament de les t-normes amb certes sèries numèriques.

En el §2.4 s'estudia el mètode de "límits dèbils de productes finits" per donar una alternativa als resultats de § 2.2, alternativa que presenta una àmplia ramificació.

Aquest problema de projecció d'un producte de semigrups en un semigrup fixat de bell antuvi ha tingut especial relleu en el dit "dimensional scattering", desenrotllat per Shepart, Luce i Beals [7], en el cas de distàncies euclídees. Potser la metodologia del present capítol podrà aportar una nova modelització a l'esmentat problema, en considerar aquest, sotmès a aleatorietats de mesura.

§ 2.1.

Sistemes projectius mètrics. Product

Partim de la següent definició categòrica:

Definició 2.1.1. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i $(I,\leqslant)$ un conjunt preordenat.

A) Un sistema projectiu és una família d'objectes i morfismes

$(\{c_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant})$ tal que:

a) $f_{ij} \in \mathrm{Hom}\,(c_j, c_i)$, per tot $i\leqslant j$,

b) $f_{ii} = \mathrm{Id}_{c_i}$, per tot $i\in I$,

c) $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$, per tot $i,j,k \in I$, tals que $i\leqslant j\leqslant k$.

B) Un objecte c de $\mathcal{C}$ és el límit projectiu del sistema projectiu donat

$(c = \varprojlim (\{c_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant}))$ si verifica la propietat universal:

Donat un objecte c' de $\mathcal{C}$ i una família de morfismes $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ tals que

$\varphi_i \in \mathrm{Hom}(c', c_i)$, per tot $i\in I$, i $\varphi_i = f_{ij} \circ \varphi_j$, sempre que $i\leqslant j$, aleshores si $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ és tal que $\Psi_i \in \mathrm{Hom}\,(c, c_i)$, per tot $i\in I$, existeix un únic

$h\in\mathrm{Hom}(c', c)$ tal que $\Psi_i \circ h = \varphi_i$, qualsevol que sigui $i\in I$.

Definició 2.1.2. Un sistema projectiu mètric és un sistema projectiu en la categoria EMG d'espais mètrics generalitzats. Per conveni acceptarem que el buit és un mètric generalitzat sobre qualsevol semigrup.

Consideri's un sistema projectiu mètric $(\{(\Omega_i, \mathfrak{I}_i, m_i)\}_{i\in I}, \{(f_{ij}, g_{ij})\}_{(i,j)\in\leqslant})$, indexat en un pre-ordenat $(I,\leqslant)$ i les projeccions p_i, π_i, per $i\in I$, donades per

$$p_i : \prod_{i\in I} \Omega_i \to \Omega_i \quad , \quad \pi_i : \prod_{i\in I} S_i \to S_i .$$

És fàcil verificar que $(\{\Omega_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant})$ $(\{S_i\}_{i\in I}, \{g_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant})$ són sistemes projectius conjuntistes que tenen per respectius límits projectius:

$$\Omega_\infty = \varprojlim(\{\Omega_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant}) = \{x\in\prod_{i\in I}\Omega_i \mid (f_{ij}\circ p_j)(x) = p_i(x), \text{ per tot } i\leqslant j\} ,$$

$$S_\infty = \varprojlim(\{S_i\}_{i\in I}, \{g_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant}) = \{x\in\prod_{i\in I} S_i \mid (g_{ij}\circ\pi_j)(x) = \pi_i(x), \text{ per tot } i\leqslant j\} .$$

L'eventualitat $\Omega_\infty=\emptyset$ s'escau dintre del possible, però aquest no és el cas amb S_∞ . Més precisament, essent $g_{ij}(e_j)=e_i$ sempre que $i\leqslant j$, és $(g_{ij}\circ\pi_j)((e_i)_{i\in I})=e_i=\pi_i((e_i)_{i\in I})$ i $(e_i)_{i\in I}\in S_\infty$. A més, definint, per tots $\varkappa,\mathcal{y}$ en S_∞ , l'operació:

$$\varkappa+\mathcal{y} = (\pi_i(\varkappa)+\pi_i(\mathcal{y}))_{i\in I} ,$$

i la relació d'ordre:

$$\varkappa\leqslant\mathcal{y} \iff \pi_i(\varkappa)\leqslant\pi_i(\mathcal{y}), \text{ per tot } i\in I,$$

resulta que $\mathcal{S}_\infty=(S_\infty,+,\leqslant,(e_i)_{i\in I})$ és semigrup ordenat. De forma natural es pot definir la mètrica generalitzada:

$$m_\infty : \Omega_\infty \times \Omega_\infty \to S_\infty$$
$$(x,y) \to (m_i(p_i(x),p_i(y)))_{i\in I} .$$

Consideri's el cas particular: $(I,=)$, un conjunt no buit ordenat per la relació igualtat, i $\{(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i)\}_{i\in I}$ una família qualsevol d'espais mètrics generalitzats. Aplicant la construcció anterior resulta:

$$\prod_{i\in I}\Omega_i=\Omega_\infty=\varprojlim\left(\{\Omega_i\}_{i\in I},\{\mathrm{Id}_{\Omega_i}\}_{i\in I}\right),$$

$$\prod_{i\in I}S_i=S_\infty=\varprojlim\left(\{S_i\}_{i\in I},\{\mathrm{Id}_{S_i}\}_{i\in I}\right),$$

$$m_\pi \doteq m_\infty,\ \text{ón } m_\pi((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})=(m_i(x_i,y_i))_{i\in I}.$$

A l'esmentat espai mètric generalitzat $(\prod_{i\in I}\Omega_i,\prod_{i\in I}\mathcal{S}_i,m_\pi)$ se'l considerarà l'espai <u>producte</u> de la família donada, en virtut de la validesa de la següent

<u>Proposició 2.1.1.</u> $(\prod_{i\in I}\Omega_i,\prod_{i\in I}\mathcal{S}_i,m_\pi)=\varprojlim(\{(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i)\}_{i\in I},\{(\mathrm{Id}_{\Omega_i},\mathrm{Id}_{S_i})\}_{i\in I})$.

Demostració. Tractant de probar la propietat universal del límit projectiu, considerí's un espai $(\Omega,\mathcal{S},m)$ tal que existeixi una família $(h_i,\Psi_i):(\Omega,\mathcal{S},m)\to(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i)$, per tot $i\in I$. Defineixi's

$$\begin{array}{llll} f:\Omega \to \prod_{i\in I}\Omega_i & , & g:S\to \prod_{i\in I}S_i \\ \quad x \to (h_i(x))_{i\in I} & & \quad x\to(\Psi_i(x))_{i\in I} \end{array}$$

Aleshores (f,g) és l'únic morfisme mètric que dóna la commutativitat dels següents diagrames:

$$\begin{tikzcd}
& (\Omega,\mathcal{S},m) \arrow[ddl, "(h_i,\Psi_i)"'] \arrow[d, "(f,g)"] \arrow[ddr, "(h_j,\Psi_j)"] & \\
& (\prod_{i\in I}\Omega_i,\prod_{i\in I}\mathcal{S}_i,m_\pi) \arrow[dl, "(p_i,\pi_i)"] \arrow[dr, "(p_j,\pi_j)"'] & \\
(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i) & & (\Omega_j,\mathcal{S}_j,m_j)
\end{tikzcd}$$

Així, no poguent-se assegurar l'existència general del límit projectiu d'un sistema projectiu mètric, dintre de la mateixa categoria, la normativa de la proposició precedent porta a la solució del problema del producte generalitzat. Pel seu intrínsec interès analitzarem el dit producte en el cas de tenir, tots els espais components, valoracions mètriques en un mateix semigrup.

Proposició 2.1.2. Sigui $(I,\leqslant)$ un conjunt preordenat i $\{(\Omega_i,\mathcal{S},m_i)\}_{i\in I}$ una família d'espais mètrics generalitzats, valorats en el mateix semigrup ordenat $\mathcal{S}=(S,+,\leqslant,e)$. Consideri's una aplicació $\varphi:\prod_{i\in I} S\to S$, creixent, subadditiva i tal que $\varphi((e)_{i\in I})=e$. Aleshores $(\prod_{i\in I}\Omega_i, S, \varphi\circ m_\pi)$ és un espai mètric generalitzat.

Demostració. $(Id_{\prod_{i\in I}\Omega_i},\varphi)$ és un morfisme mètric.

Els exemples següents posaran en evidència que els productes mètrics clàssics són el resultat de formar el corresponent producte generalitzat (valorat en $\prod_{i\in I}\mathbb{R}^+$) i projectar en $\mathbb{R}^+$, mitjançant una aplicació del tipus φ, de la Proposició 2.1.2.

Exemples 2.1.1.

a) $(\mathbb{R}^+)^n$. Siguin $\{(\Omega_i,\mathbb{R}^+,d_i)(i=1,2,\ldots,n\}$ espais mètrics reals de Fréchet. Formi's el producte generalitzat $(\prod_{i=1}^n\Omega_i, (\mathbb{R}^+)^n, m_\pi)$ i consideri's les aplicaciones φ_r, φ_v i φ_+ de $(\mathbb{R}^+)^n$ en $\mathbb{R}^+$, definides per:

$$\varphi_r(a_1,\ldots,a_n) = +\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\ ,$$

$$\varphi_v(a_1,\ldots,a_n) = \text{Màx}\{a_1,\ldots,a_n\}\ ,$$

$$\varphi_+(a_1,\ldots,a_n) = a_1+\ldots+a_n.$$

Aquesta terna està en les hipòtesis de la Proposició 2.1.2 i porta a les conegudes distàncies:

$$d_{\text{Euclidea}}(\vec{x},\vec{y})=(\varphi_{r} \circ m_{\pi})(\vec{x},\vec{y})=+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^2}\ ,$$

$$d_{\text{Màx}}(\vec{x},\vec{y})=(\varphi_{V} \circ m_{\pi})(\vec{x},\vec{y})=\underset{i=1,\dots,n}{\text{Màx}}\ \{d_i(x_i,y_i)\}\ ,$$

$$d_{\text{Suma}}(\vec{x},\vec{y})=(\varphi_{+} \circ m_{\pi})(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i).$$

b) $\underline{(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}}$. Siguin $\{(\Omega_i,\mathbb{R}^+,d_i) \mid i\in\mathbb{N}\}$ espais mètrics reals i $(\prod_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i,(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}},m_{\pi})$ el producte generalitzat. Si $k>1$, consideri's

$$\varphi_k : (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(a_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^i}\cdot\frac{a_i}{1+a_i}$$

La Proposició 2.1.2 porta a la mètrica de Fréchet:

$$d((a_n),(b_n))=(\varphi_k \circ m_{\pi})((a_n),(b_n))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{k^i}\cdot\frac{d_i(a_i,b_i)}{1+d_i(a_i,b_i)}\ .$$

c) $\underline{\mathcal{L}_1([0,1])}$. Si $\mathcal{L}_1[0,1]=\{ f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(x)|\,dx<+\infty\}$, aleshores $m(f,g)=|f-g|$ porta a considerar l'espai mètric generalitzat $(\mathcal{L}_1[0,1]\ ,\mathcal{L}_1([0,1]),m)$. Definint

$$\varphi_{\int} : \mathcal{L}_1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longrightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

resulta $(\mathcal{L}_1[0,1]\ ,\mathbb{R}^+, m'=\varphi_{\int} \circ m_{\pi})$ és l'usual espai mètric:

$$m'(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Restringint al subespai $\mathcal{C}([0,1])\subset\mathcal{L}_1([0,1])$, de contínues en $[0,1]$, l'aplicació $\varphi_{\sup}:\mathcal{C}([0,1])\longrightarrow\mathbb{R}^+$, $\varphi_{\sup}(f)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, ens porta a la mètrica de la convergència uniforme,

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|\ .$$

§ 2.2.

Σ - productes d'espais mètrics probabilístics.

Si $\{(\Omega_i, \mathcal{F}^i, \tau_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ és una familia numerable d'espais mètrics probabilístics, aplicant els resultats del § 2.1. anterior, s'obté el producte mètric generalitzat:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i \times \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i \to \prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+ \quad ;$$

$$((p_i), (q_i)) \to (F^i_{p_i q_i})$$

El problema interessant que es presenta és com associar a la seqüencia $(F^i_{p_i q_i})$ una única funció de distribució $F_{(p_i)(q_i)}$, de forma que s'obtingui un espai mètric probabilístic producte.

Un primer mètode, anomenat "Σ-productes", serà analitzat en § 2.2. i en § 2.3, i un altre, de "τ-productes", en § 2.4.

Lema 2.2.1. Si $(F_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+$, és $\operatorname{w-lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{2^i} \in \Delta^+$.

Demostració. La successió $\{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{2^i} \mid n \in \mathbb{N}\}$ és puntualment no decreixent en Δ^+ i en conseqüència existeix el límit dèbil, límit que pot suposar-se continuu per l'esquerra (a menys d'una normalització).

Escriurem $\operatorname{w-lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} F_i$.

Lema 2.2.2. L'aplicació $\varphi: \prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+ \to \Delta^+$, definida per

$$\varphi((F_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} F_i \; ,$$

verifica:

a) $\varphi((F_i))=\varepsilon_o \Leftrightarrow F_i=\varepsilon_o$, per tot $i\in \mathbb{N}$.

b) φ és creixent entre $(\prod_{i=1}^{\infty}\Delta^+,\leqslant)$ i $(\Delta^+,\leqslant)$, on l'ordre de Δ^+ és el dual del puntual.

c) φ és subaditiva entre $(\prod_{i=1}^{\infty}\Delta^+,\hat{\tau}_{T_w})$ i (Δ^+, τ_{T_w}).

Demostració. L'apartat (a) es segueix del fet que, per qualsevol $x>o$, $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot F_i(x)=1$ si i nomes sí $F_i(x)=1$, per tot $i\in \mathbb{N}$. L'apartat (b) és immediat. La part (c) es segueix del següent argument:

$$T_w\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}F_i(u),\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}G_i(V)\right)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}T_w(F_i(u),G_i(V))$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\sup_{u+V=x}T_w(F_i(u),G_i(V))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\tau_{T_w}(F_i,G_i)(x),$$

qualssevol que siguin $u,V\geqslant o$, $u+V=x>o$, per tant

$$\tau_{T_w}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}F_i,\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}G_i\right)(x)=\sup_{u+V=x}T_w\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}F_i(u),\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}G_i(V)\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\tau_{T_w}(F_i,G_i)(x),$$

és a dir,

$$\tau_{T_w}(\varphi((F_i)),\varphi((G_i)))\geqslant\varphi((\tau_{T_w}(F_i,G_i)))=\varphi(\hat{\tau}_{T_w}((F_i),(G_i))).$$

Definició 2.2.1. El Σ -producte d'una família numerable $\{(\Omega_i,\mathcal{F}^i,\tau_i)\mid i\in \mathbb{N}\}$ d'espais mètrics probabilístics, és l'espai $(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i,\mathcal{F}^{\Sigma})$, on $\mathcal{F}^{\Sigma}:\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i \times \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i \to \Delta^+$, és l'aplicació definida per $\mathcal{F}^{\Sigma}((p_i),(q_i))=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathcal{F}^i(p_i,q_i)$, per totes les successions (p_i) i (q_i) en $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, és a dir,

$\mathcal{F}^{\Sigma}= \varphi((\mathcal{F}^i))$.

En aquesta secció usarem les abreviacions $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$,

$F = \mathcal{F}^{\Sigma}$, $F^i_{p_i q_i} = \mathcal{F}^i(p_i,q_i)$ i $F_{\bar p \bar q} = \mathcal{F}^{\Sigma}((p_i),(q_i))$.

<u>Teorema 2.2.1.</u> El Σ-producte (Ω,F) és un espai mètric probabilístic de Menger respecte T_w.

<u>Demostració</u>. El resultat és conseqüència del Lema 2.2.2. i la Proposició 2.1.2.

Una desigualtat triangular més forta que la precedent ve donada pel

<u>Teorema 2.2.2.</u> El Σ-producte (Ω,F) és un espai mètric probabilístic respecte la funció triangular τ_{T_m} si cada factor $(\Omega_i,\mathcal{F}^i,\tau_i)$ verifica $\tau_i \geq \tau_{T_m}$.

<u>Demostració.</u> Siguin $x,y > 0$ i $\bar p, \bar q, \bar r \in \Omega$; aleshores:

$$T_m(F_{\bar p \bar q}(x),\ F_{\bar q \bar r}(y)) = \text{Màx}\,(F_{\bar p \bar q}(x) + F_{\bar q \bar r}(y) - 1,\ 0)$$

$$=\text{Màx}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\,(F^i_{p_i q_i}(x) + F^i_{q_i r_i}(y)-1),0\Big) \underset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \text{Màx}(F^i_{p_i q_i}(x)+F^i_{q_i r_i}(y)-1,0)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\, T_m(F^i_{p_i q_i}(x),\ F^i_{q_i r_i}(y)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\ \tau_{T_m}(F^i_{p_i q_i},\ F^i_{q_i r_i})(x+y)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\, \tau_i(F^i_{p_i q_i},\ F^i_{q_i r_i})(x+y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\, F^i_{p_i r_i}(x+y) = F_{\bar p \bar r}(x+y),$$

així per tot $t \geq 0$ és

$$\tau_{T_m}(F_{\bar{p}\bar{q}},F_{\bar{q}\bar{r}})(t)=\sup_{x+y=t} T_m(F_{\bar{p}\bar{q}}(x),F_{\bar{q}\bar{r}}(y))\leqslant F_{\bar{p}\bar{r}}(t).$$

Probar que aquest resultat és el millor possible, d'entre la família $\{\tau_T\}$, serà l'objecte del § 2.3, a l'estudiar curosament l'inequació funcional obtinguda a partir de (*).

Tots els espais mètrics probabilístics usuals (equilàters, simples, E-espais, ergòdics, de Wald... etc.) tenen funcions triangulars $\tau\geqslant\tau_{T_m}$ (sols cal recordar $\tau_{T_m}\leqslant\tau_{prod}\leqslant * \leqslant\pi_{Min}$) i en conseqüència podrem aplicar el teorema anterior a tots aquests exemples, però, si bé el resultat del producte numerable serà un τ_{T_m}-espai, no podrem garantir que sia de la mateixa classe de partida. Concretament els següents exemples posen en evidència aquest fet.

<u>Exemple 2.2.1.</u> El Σ-producte d'espais de Wald no és necessàriament de Wald.

Consideri's $(\mathbb{R}^+,|\;|)$ com espai de Wald $(\mathbb{R}^+,\varepsilon_{|\;|},*)$. Trii's en el Σ-producte $(\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}^+,\varepsilon^{\Sigma}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{|\;|}}{2^i},\ \tau_{T_m})$ els elements $\bar{p}=(o)$, $\bar{q}=(1,o,o,\ldots)$, $\bar{r}=(1)$. Per qualsevol $x\in(o,1)$ és:

$$(\varepsilon^{\Sigma}_{\bar{p}\bar{q}}*\varepsilon^{\Sigma}_{\bar{q}\bar{r}})(x)=[(\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_o))*(\tfrac{1}{2}(\varepsilon_o+\varepsilon_1))](x)=\frac{1}{4}\,\varepsilon_2(x)+\frac{1}{2}\varepsilon_1\,(x)+\frac{1}{4}\,\varepsilon_o(x)=$$

$$=\frac{1}{4}>o=\varepsilon_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{|1-o|}(x)}{2^i}=\varepsilon^{\Sigma}_{\bar{p}\bar{r}},$$

es dir, $\varepsilon^{\Sigma}_{\bar{p}\bar{q}}*\varepsilon^{\Sigma}_{\bar{p}\bar{r}}\not\leqslant\varepsilon^{\Sigma}_{\bar{p}\bar{r}}$.

<u>Exemple 2.2.2.</u> El Σ-producte d'espais simples no és necessariament simple.

Sigui cada espai component l'espai simple $(\mathbb{R}^+,d,G)$ generat per la mètrica $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ i una funció de distribució $G\in\Delta^+$ tal que

$G(1) < 1/2$. En el Σ-producte $(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}^+, F, \tau_{T_m})$ tenim

$F_{\bar{P}\bar{q}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} G_{P_i q_i}(x)$, on per cada $i \geqslant 1$,

$G_{P_i q_i}(x) = G(x \mid d(P_i, q_i))$ si $P_i \neq q_i$ i $G_{P_i q_i}(x) = \varepsilon_o(x)$ si $P_i = q_i$.

Trii's $\bar{P} = (o)$, $\bar{q} = (0,2,3,4,5,\ldots,n,\ldots)$ i $\bar{r} = (1,2,3,\ldots,n,\ldots)$. És fàcil computar que $F_{\bar{P}\bar{q}}(\frac{1}{4}) \geqslant \frac{1}{2}$, $F_{\bar{p}\bar{r}}(\frac{1}{4}) \geqslant \frac{1}{2}$ però $F_{\bar{P}\bar{r}}(1/2) < 1/2$. Així el Σ-producte no és un espai de Menger amb T=Min, i en conseqüència no pot ésser simple.

Una de les propietats relevants dels Σ-productes és el comportament topològic, tal i com s'estableix en el següent teorema on es segueix la notació del Teorema 2.2.1.

<u>Teorema 2.2.3.</u> La topologia $-\varepsilon, \lambda$ en $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ induïda per $\mathcal{F}^{\Sigma}$ és la topologia producte considerant en cada Ω_i la topologia-ε, λ induïda per $\mathcal{F}^i$.

Demostració. Per ésser T_m contínua, és ben sabut que els sistemes d'entorns $\mathcal{B}_1 = \{N^{\mathcal{F}^{\Sigma}}_{(P_i)}(\varepsilon, \lambda) : \varepsilon, \lambda \in \mathbb{R}^+, (P_i) \in \Omega\}$ i

$$\mathcal{B}_2 = \{N^{F^1}_{P_1}(\varepsilon_1, \lambda_1) \times N^{F^2}_{P_2}(\varepsilon_2, \lambda_2) \times \ldots \times N^{F^n}_{P_n}((\varepsilon_n, \lambda_n) \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \ldots ;$$

$n \in \mathbb{N}$, $(P_1, \ldots, P_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \varepsilon_1, \lambda_1, \varepsilon_2, \lambda_2, \ldots, \varepsilon_n, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \}$ són bases per a les seves respectives topologies en Ω, essent la topologia producte l'associada a $\mathcal{B}_2$. Així el teorema quedarà provat en verificar la equivalència de $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$. En efecte, donat $N^{\mathcal{F}^{\Sigma}}_{(P_i)}(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{B}_1$ (que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, amb $o < \lambda < 1$), existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$o < \lambda' = \frac{\lambda - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}} < 1,$$

considerant aleshores $\mathcal{U} = N_{P_1}^{F^1}(\varepsilon, \lambda') \times \ldots \times N_{P_k}^{F^k}(\varepsilon, \lambda') \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \ldots \in \mathcal{B}_2$,

tindrem $\mathcal{U} \subset N_{(P_i)}^{\mathcal{F}^\Sigma}(\varepsilon, \lambda)$ ja que si $(q_i) \in \mathcal{U}$, es $F_{P_i q_i}^i(\varepsilon) > 1-\lambda'$ per

$i \in \{1,2,\ldots,k\}$, i en conseqüència

$$F_{(P_i)(q_i)}^{\Sigma}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_{P_i q_i}^i(\varepsilon)}{2^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{F_{P_i q_i}^i(\varepsilon)}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{F_{P_i q_i}^i(\varepsilon)}{2^i} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{F_{P_i q_i}^i(\varepsilon)}{2^i} >$$

$$> \sum_{i=1}^{k} \frac{1-\lambda'}{2^i} = (1-\lambda')\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}\right) = 1 - \lambda .$$

Recíprocament, sigui $\mathcal{U}' = N_{P_1}^{F^1}(\varepsilon_1, \lambda_1) \times \ldots \times N_{P_n}^{F^n}(\varepsilon_n, \lambda_n) \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \ldots$

en $\mathcal{B}_2$, que podem suposar amb $o < \lambda_i < 1$ per $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Sigui $\varepsilon = \mathrm{Mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n\}$,

$$\lambda = 1 - \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1-\lambda_i}{2^i} + \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right\}, \quad (o < \lambda < 1),$$

aleshores $N_{(P_i)}^{\mathcal{F}^\Sigma}(\varepsilon, \lambda) \subset \mathcal{U}'$, ja que si $(q_i) \in N_{(P_i)}^{\mathcal{F}^\Sigma}(\varepsilon, \lambda)$, per tot

$i \in \{1,2,\ldots,n\}$ és

$$F_{(P_i)(q_i)}^{\Sigma}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_{P_i q_i}^i(\varepsilon)}{2^i} > 1-\lambda = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1-\lambda_i}{2^i} + \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right\} \geqslant$$

$$> \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1-\lambda_i}{2^i} + \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \geqslant \frac{F_{P_1 q_1}^1(\varepsilon)}{2^1} + \ldots + \frac{F_{P_{i-1} q_{i-1}}^{i-1}(\varepsilon)}{2^{i-1}} + \frac{1-\lambda_i}{2^i} +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{F_{P_k q_k}^k(\varepsilon)}{2^k}, \text{ d'on } \frac{F_{P_i q_i}^i(\varepsilon)}{2^i} > \frac{1-\lambda_i}{2^i} \text{ i per tant } F_{P_i q_i}^i(\varepsilon_i) \geqslant F_{P_i q_i}^i(\varepsilon) > 1-\lambda_i$$

per $i=1,2,\ldots,n$ i el teorema és provat.

Així la topologia - ε,λ induïda per $\mathcal{F}^{\Sigma}$ és la més fina que fa les projeccions $\Omega \xrightarrow{\pi_i} \Omega_i$ contínues.

Corol.lari 2.2.1. L'aplicació $\varphi: \Omega \to \prod_{i=1}^{\infty} \Omega$, $\varphi(P) = (P)_{n \in \mathbb{N}}$, és isomètrica i contínua $-\varepsilon,\lambda$ si $(\Omega,\mathcal{F},\tau)$ és un espai mètric probabilístic amb $\tau \geq \tau_{T_m}$.

En efecte, $(\mathcal{F}^{\Sigma} \circ \varphi \times \varphi)(P,q) = \mathcal{F}^{\Sigma}((P),(q)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_{Pq}}{2^i} = F_{Pq}$.

Corol.lari 2.2.2. La topologia producte en $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ és metritzable per qualsevol de les distàncies:

$$d_z((P_i),(q_i)) = -\log \sup_{x \geq 0} e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F^i_{P_i q_i}(x) - zx - 1}{2^i}}$$

(ón $z \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$) i cada d_z és equivalent a la mètrica

$$d_{(z_i)}((P_i),(q_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(-\log \sup_{x \geq 0} e^{F^i_{P_i q_i}(x) - z_i x - 1}\right) \wedge 1}{2^i}$$

(ón $(z_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^+ - \{0\})$).

Demostració. Per [38] sabem que tot espai mètric probabilístic $(S,\mathcal{F},\tau_T)$ amb T Arquimediana i $\mathcal{F}$ no trivial ($\mathcal{F} \neq \varepsilon_\infty$) té la topologia $-\varepsilon,\lambda$ metritzable per $d_z(P,q) = -\log C_T F_{Pq}(z)$, on z és un positiu qualsevol i C_T és la transformació T-conjugada en (Δ^+,τ_T), donada per $C_T F(z) = \sup_{x \geq 0} e^{-xz} hF(x)$ si h és el generador multiplicatiu de T ($h:[0,1] \to [0,1]$, contínua, creixent, $h(1) = 1$, $T(a,b) = h^{[-1]}(h(a)+h(b))$, $h^{[-1]}(x) = 0$ en $[0,h(0)]$, $h^{[-1]}(x) = h^{-1}(x)$ en $[h(0),1]$). Per els teoremes 2.2.1. i 2.2.3. sabem que en $(S,\mathcal{F}^{\Sigma},\tau_{T_m})$, la topologia producte és la ε,λ de $\mathcal{F}^{\Sigma}$; així essent T_m Arquimediana ($T_m(x,x)< x$ si $x\in(o,1)$) i tenint com a generador multiplicatiu $h(x)=e^{x-1}$ ($h^{[-1]}(x)=o$ en $[o,\frac{1}{e}]$, $h^{[-1]}(x) =$ $= \ln x + 1$ en $[1/e,1]$) obtenim el resultat anunciat.

Corol.lari 2.2.3. La topologia producte del Σ-producte d'espais mètrics, considerats com espais de Wald, està metritzada per l'usual mètrica de Fréchet.

Demostració. N'hi ha prou amb aplicar el teorema anterior, el corol.lari precedent i, notar que si (Ω,d) és espai mètric ó $(\Omega,\varepsilon_d,*)$ és el de Wald corresponent, resulta, per ésser $\tau_{T_m} \leqslant \tau_{T_{prod}} \leqslant *$,

$$d_z(P,q)= -\log C_T F_{Pq}(z)= -\log \sup_{x\geqslant o} e^{\varepsilon_{d(P,q)}(x)-zx-1} =$$

$$= -\log (e^{-zd(P,q)}) = d(P,q).$$

Remarquem que el fet de considerar la topologia ε, λ en els espais mètrics probabilístics amb funció triangular τ_T és la millor elecció com a "topologia probabilística" en el sentit de que les topologies generalitzades $-(\phi,\varepsilon,\lambda)$, introduïdes per R.Tardiff [54] per a aquests espais (agafant com a entorns $N_P^{\phi}(\varepsilon,\lambda)=\{q\in\Omega \mid F_{Pq}(x+\varepsilon)+\varepsilon\geqslant\phi(x), x\in[o,\frac{1}{\varepsilon})\}$ exigeixen la condició $\tau(\phi,\phi) = \phi$ cosa que com demostrem en la següent proposició només és verifica en el nostre cas per $\phi=\varepsilon_o$, i la $(\varepsilon_o,\varepsilon,\lambda)$-topologia és exactament la ε,λ - topologia ja considerada.

Proposició 2.2.1. a) $\tau_T(\phi,\phi) = \phi \Leftrightarrow \phi=\varepsilon_o$.

b) Si $T\leqslant$ Prod, $\pi_T(\phi,\phi)=\phi \Leftrightarrow \phi=\varepsilon_r$ per algún $r\in\mathbb{R}^+$.

c) $\phi * \phi = \phi \Leftrightarrow \phi=\varepsilon_o$.

Demostració. Que les condicions a,b,c són suficients és trivial.

a) Per ésser T $\leqslant$Min, és $\tau_T \leqslant \tau_{Min}$. Si $\phi \in \Delta^+$, i anotem $\phi^\wedge$ l' única quasi-inversa de ϕ ($\phi^\wedge$:$[o,1] \to [o,+\infty]$, $\phi^\wedge(o) = o$, $\phi^\wedge(x)=\inf\{y|\phi(x)\geqslant y\}$), es :

$$\phi = \tau(\phi,\phi) \leqslant \tau_{Min}(\phi,\phi) = (\phi^\wedge + \phi^\wedge)^\wedge = (2\phi^\wedge)^\wedge ,$$

$$\phi^\wedge \geqslant 2\phi^\wedge ,$$

$$\phi^\wedge = \varepsilon_\infty \Rightarrow \phi = \varepsilon_o .$$

b) Si T $\leqslant$Prod, $\pi_T(\phi,\phi)=\phi \leqslant \pi_{Prod}(\phi,\phi)$, $\phi(x) \leqslant \phi(x)^2 \leqslant \phi(x)$, $\phi(x)^2 = \phi(x)$,

$$\phi(x) \in \{o,1\} , \phi = \varepsilon_r .$$

c) Cap funció de distribució infinitament divisible pot ésser convolució-idempotent, excepte ε_o (n'hi ha prou passar a funcions característiques: $\varphi(x) = \varphi^2(x)$).

§ 2. 3.

Anàlisi d'una inequació funcional associada als Σ-productes.

En la demostració del Teorema 2.2.2. precedent, és essencial la propietat:

$$T_m\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{F^i_{p_iq_i}(x)}{2^i},\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{F^i_{q_ir_i}(y)}{2^i}\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{T_m(F^i_{p_iq_i}(x),F^i_{q_ir_i}(y))}{2^i}\ .$$

Així, per tal d'establir que la τ_{T_m} -desigualtat triangular allà verificada és la millor possible d'entre totes les τ_T, és suficient demostrar que T_m és la més forta t-norma que satisfà l'inequació funcional anterior. El següent teorema demostra que aquest és el cas.

Teorema 2.3.1. Sigui T una t-norma tal que:

$$(*)\quad T\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i},\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{2^i}\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{T(a_i,b_i)}{2^i},$$

per qualssevol successions $(a_i),(b_i)$ en $[o,1]$. Aleshores T verifica $T_w \leqslant T \leqslant T_m$.

Demostració. T_w verifica (*) ja que sols és no nul.la en $A=\{(x,1),(1,x)/x\in(o,1)\}$ i en aquests punts, si $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}=1$, és $a_i=1$, per tot $i\in\mathbb{N}$, i en conseqüència:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{T_w(1,b_i)}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{2^i}=T_w\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{2^i},\ 1\Big)=T_w\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{2^i},\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\Big).$$

T_m verifica (*) ja que:

$$T_m\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}\right) = \text{Màx}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} - 1, o\right) =$$

$$\text{Màx}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i+b_i-1}{2^i}, o\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Màx}(a_i+b_i-1, o)}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T_m(a_i, b_i)}{2^i}.$$

Sigui T una t-norma que verifica (*). Per ser $T_w \leqslant T$ i $T=T_m$ en A, és suficient demostrar que $T \leqslant T_m$ en (o,1) x (o,1). Amb aquesta finalitat, consideri's la partició (Fig. 1):

$$(o,1) \times (o,2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n,$$

$$R_1 = \{ (x,y) \mid o < x,y < 1,\ x + y \leqslant 1 \},$$

$$R_n = \{(x,y) \mid o < x,y < 1,\ 1 + B_{n-2} < x + y \leqslant 1 + B_{n-1} \},$$

per tot $n \geqslant 2$, essent $B_o = o$ i per tot $n \geqslant 1$, $B_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

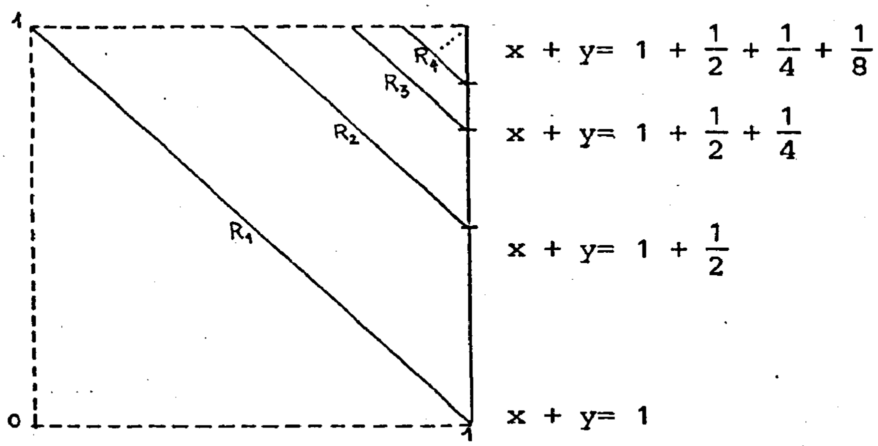

Fig. 1.

Sigui $(x,y) \in R_1$ tal que $x + y = 1$ i $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i/2^i)$ qualsevol desenvolupament binari de x, és a dir, $x = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i/2^i)$, amb $a_i \in \{o,1\}$, per cada i.

Aleshores notant que $T(1,o) = T(o,1) = o$ i usant (*) tenim:

$$T(x,y) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-a_i}{2^i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T(a_i,1-a_i)}{2^i} = 0.$$

Per tant, la no-decreixença de T porta a que $T(x,y)=T_m(x,y)=0$ en tot (x,y) de R_1.

Fixi's $n \geqslant 2$ i consideri's qualsevol punt (x,y) de R_n. Sera $x + y = 1 + B_{n-2} + a$, on $o < a \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ i per tant almenys un dels x,y ha de ser major que B_{n-1}. Suposem $x=B_{n-1}+ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, on $x_i \in \{o,1\}$, per cada i. Per ésser $1-B_{n-1}= 1/2^{n-1}$, tindrem

$$y = 1 + B_{n-2}+ a-x = B_{n-2}+ a + \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$$

$$= B_{n-2}+ \frac{2^{n-1}a}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1-x_i}{2^i}.$$

Escrivint

$$x = B_{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

usant (*) i el fet que $T(1,1)=1$, s'obté:

$$T(x,y) = T\left(B_{n-2}+ \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, B_{n-2} + \frac{2^{n-1}a}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1-x_i}{2^i}\right)$$

$$\leqslant B_{n-2}+ \frac{1}{2^{n-1}} T(1,2^{n-1}a) + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} T(x_i,1-x_i)$$

$$= B_{n-2} + a = x + y - 1 = T_m(x,y).$$

Si $x < B_{n-1}$, intercambiant els papers de x i y, s'arriba a la mateixa conclusió i així la demostració queda completada.

Cal remarcar que en la demostració precedent no s'ha usat ni l'associativitat, ni la commutativitat de T, és a dir, s'ha demostrat el resultat:

Corol.lari 2.3.1. Si $T:[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ és no-decreixent en cada component, $T(0,x)=T(x,0) = 0$; $T(x,1)=T(1,x)=x$, per tot x de $[0,1]$, i T verifica (*), aleshores $T_w \leq T \leq T_m$.

Corol.lari 2.3.2. L'única cópula C que verifica la inequació (*) és $C=T_m$.

Demostració. Tota cópula C verifica $T_m \leq C \leq Min$ i s'aplica el Teorema 2.3.1.

Corol.lari 2.3.3. L'inequació funcional (*) no pot donar lloc a una equació funcional global.

Demostració. Si existís una operació T tal que (*) fos una igualtat global funcional, seria $0=2T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = T(1,1) = 1$.

El recíproc del Corol.lari 2.3.1. és fals, tal como demostra el

Teorema 2.3.2. Existeixen una infinitat no numerable d'operacions compreses entre T_w i T_m, que satisfan les hipòtesis del Corol.lari 2.3.1. i no verifiquen (*).

Demostració. Per qualsevol $\lambda \in [0,1]$, consideri's la funció $T_\lambda : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, definida per (Fig. 2)

$$T_\lambda(x,y) = \begin{cases} T_m(x,y) & \text{si } x+y \leq 1+\lambda \text{ ó } x=1 \text{ ó } y=1, \\ \lambda & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Trivialment les T_λ són commutatives, d'unitat 1, element absorbent o, no decreixents puntualment, però no són associatives si $o < \lambda < 1$.

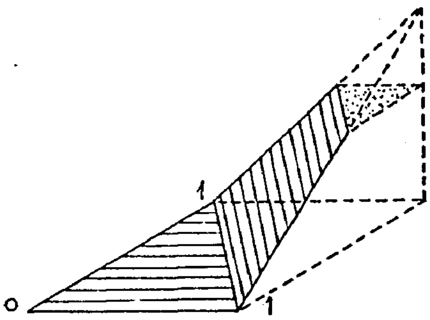

Fig. 2

Si $o \leq \mu < \lambda \leq 1$, és $T_w = T_o \leqslant T_\mu < T_\lambda \leqslant T_1 = T_m$. Sigui qualsevol $\lambda \in [o,1)$. Existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda < 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

d'on

$$\frac{1+\lambda}{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} < 1$$

i existirà $a \in (o,1)$ tal que $\dfrac{1+\lambda}{2 - 1/2^{n-1}} < a < 1$. Així

$$T_\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2^i}\right) = T_\lambda\left(a\left(1-\frac{1}{2^n}\right), a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right) = \lambda = T_\lambda(a,a) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} T_\lambda(a,a)$$

per tant quan $o < \lambda < 1$, T_λ no satisfà (*).

Donat que les operacions T_λ no són associatives, el teorema precedent no és un complet contre-exemple del Teorema 2.3.1. Queda per conéixer una t-norma menor que T_m que no satisfagui (*). Existeixen ademès raons de pes per establir la següent conjectura:

<u>CONJECTURA.</u> "Tota t-norma T contínua tal que $T_w \leqslant T \leqslant T_m$, verifica (*)".

§ 2.4.

τ-productes d'espais mètrics probabilístics.

Paral.lelament a l'apartat § 2.2. introduïm un nou mètode per a l'estructuració del producte numerable d'espais mètrics probabilístics.

Lema 2.4.1. Si $(F_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+$ i τ és una funció triangular en Δ^+, aleshores $\text{w-}\lim_{n\to\infty} (F_1,\ldots,F_n) \in \Delta^+$.

Demostració. La successió $\{\tau(F_1,\ldots,F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ és puntualment no creixent en Δ^+ i el límit dèbil existeix, podent-se considerar contínua per l'esquerra, a menys d'una normalització.

Escriurem $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \tau(F_1,\ldots,F_n) \equiv \mathop{\mathcal{T}}_{i=1}^{\infty} F_i$.

Lema 2.4.2. L'aplicació $\Psi_\tau : \prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+ \to \Delta^+$, definida per

$$\Psi_\tau((F_i)) = \mathop{\mathcal{T}}_{i=1}^{\infty} F_i,$$

verifica

a) $\Psi_\tau((F_i)) = \varepsilon_o \Leftrightarrow F_i = \varepsilon_o$, per tot $i \in \mathbb{N}$.

b) Ψ_τ és creixent entre $(\prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+, \lesssim)$ i $(\Delta^+, \leqslant)$, on l'ordre de Δ^+ és el dual del puntual.

c) Si τ és contínua, Ψ_τ és un morfisme de semigrups entre $(\prod_{i=1}^{\infty} \Delta^+, \hat{\tau})$ i (Δ^+, τ).

Demostració. Per ser $\tau(\varepsilon_o, \varepsilon_o) = \varepsilon_o$, $\mathop{\mathcal{T}}_{i=1}^{\infty} \varepsilon_o = \varepsilon_o$. Recíprocament si $\mathop{\mathcal{T}}_{i=1}^{\infty} F_i = \varepsilon_o \geqslant F_i$, serà $F_i = \varepsilon_o$, per tot $i \in \mathbb{N}$. Fàcilment, si $(F_i) \lesssim (G_i)$, sera $F_i \leqslant G_i$, per tot $i \in \mathbb{N}$, d'on, per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, $\tau(F_1,\ldots,F_n) \leqslant \tau(G_1,\ldots,G_n)$ i $\mathop{\mathcal{T}}_{i=1}^{\infty} F_i < \mathop{\mathcal{T}}_{i=1}^{\infty} G_i$. La darrera propietat (c), postulada sota l'hipòtesi de continuïtat de τ , és:

$$\tau(\Psi_\tau((F_i)), \Psi_\tau((G_i))) = \tau(\text{w-}\lim_{n\to\infty}\tau(F_1,\ldots,F_n), \text{w-}\lim_{n\to\infty}\tau(G_1,\ldots,G_n))$$

$$= \text{w-}\lim_{n\to\infty}\tau(\tau(F_1,\ldots,F_n),\tau(G_1,\ldots,G_n)) = \text{w-}\lim_{n\to\infty}\tau(\tau(F_1,G_1),\ldots,\tau(F_n,G_n))$$

$$= \mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{\infty}\tau(F_i,G_i) = \Psi_\tau((\tau(F_i,G_i))) = \Psi_\tau(\hat{\tau}((F_i),(G_i))).$$

<u>Definició 2.4.1.</u> El τ-producte d'una família numerable $\{(\Omega_i,\mathcal{F}^i,\tau_i)\,|\,i\in\mathbb{N}\}$ d'espais mètrics probabilístics, és l'espai $(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i,\mathcal{F}^\tau)$, on $\mathcal{F}^\tau : \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i \times \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i \to \Delta^+$, és l'aplicació definida per

$$\mathcal{F}^\tau((p_i),(q_i)) = \mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}^i(p_i,q_i),$$ per totes les successions (p_i) i (q_i) en $\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, és a dir, $\mathcal{F}^\tau = \Psi_\tau((\mathcal{F}^i))$.

Igual que en § 2.2, abreujarem $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, $F = \mathcal{F}^\tau$,

$F^i_{p_iq_i} = \mathcal{F}^i(p_i,q_i)$ i $F_{\bar{p}\bar{q}} = \mathcal{F}^\tau((p_i),(q_i))$.

<u>Teorema 2.4.1.</u> Si $\tau_i \geq \tau$, per tot $i\in\mathbb{N}$, aleshores el τ-producte (Ω,F) és un espai mètric probabilístic respecte la funció triangular τ , sempre que τ sigui contínua.

<u>Demostració.</u> En virtut de la Proposició 2.1.2. i el Lema 2.4.2. queda per evidenciar la τ-desigualtat triangular. Siguin $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in \Omega$, aleshores

$$\tau(F_{\bar{p}\bar{q}}, F_{\bar{q}\bar{r}}) = \Psi_\tau((\tau(F_{p_iq_i}, F_{q_ir_i}))) \leq \Psi_\tau((\tau_i(F_{p_iq_i}, F_{q_ir_i})))$$

$$\leq \Psi_\tau((F_{p_ir_i})) = F_{\bar{p}\bar{r}} .$$

En particular, si tots els espais components verifiquen una desigualtat triangular sobre una mateixa funció triangular contínua, el τ-producte és un espai de la mateixa classe. Les següents proposicions il.lustren aquest fet.

Proposició 2.4.1. El *-producte d'una familia d'espais de Wald, generats per una col.lecció d'espais amb mètrica afitada per 1, és un espai de Wald generat per la distància de Fréchet.

En efecte, si $(\Omega_i, \frac{d_i}{2^i})$ és el mètric considerat de Wald $(\Omega_i, \mathcal{E}_{\frac{d_i}{2^i}})$, resulta

$$F^{*}_{(P_i)(q_i)} = \mathop{\ast}_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}\frac{d_i(P_i,q_i)}{2^i} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mathop{\ast}_{i=1}^{n} \mathcal{E}\frac{d_i(P_i,q_i)}{2^i} =$$

$$= \text{w-}\lim \mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(P_i,q_i)}{2^i} = \mathcal{E}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(P_i,q_i)}{2^i} .$$

Proposició 2.4.2. Si $\{(\Omega_i,\mathcal{F}_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ és una familia d'espais equilàters generats respectivament per una successió $(G_n) \subset \Delta^+$ tal que $G_n \overset{w}{\downarrow} G$, $G \in \Delta^+$, el π_{Min}-producte és un espai equilàter generat per G sí i nomes sí $G_n = G$, per tot $n \in \mathbb{N}$.

En efecte, $F^{\pi Min}_{(P_i)(q_i)} = \prod_{i=1\ Min}^{\infty} F^i_{P_i q_i} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1\ Min}^{n} F^i_{P_i q_i} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1\ Min}^{\infty} G_i =$

$= \text{w-}\lim_{n\to\infty} G_n = G$ si $(P_i) \neq (q_i)$ i $G_n = G$, $n \in \mathbb{N}$. Recíprocament, agafant (P_i) i (q_i) que tinguin sols una coordenada i-èssima diferent $(P_i \neq q_i)$ tindrem $G = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \{\varepsilon_o, \varepsilon_o, \dots, \varepsilon_o \wedge G_i, G_i \wedge \varepsilon_o \wedge \varepsilon_o = G_i, \dots, G_i, \dots\} = G_i$, per qualssevol $i \in \mathbb{N}$.

<u>Proposició 2.4.3.</u> Si $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ és una familia <u>d'espais simples</u> generada per $\{(\Omega_i, d_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, on d_i és una ultramètrica afitada per 1 ($\forall_i \in \mathbb{N}$), i una mateixa $G \in \Delta^+$ contínua, el π_{Min}-producte és un espai simple sobre G generat per $\bigvee_{i=1}^{\infty} d_i$.

En efecte, per cada $i \in \mathbb{N}$, sia per hipòtesi $F^i : \Omega_i \times \Omega_i \rightarrow \Delta^+$,

$F^i_{P_i q_i}(x) = \varepsilon_o(x)$ si $P_i = q_i$, $F^i_{P_i q_i}(x) = G\left(\frac{x}{d_i(P_i, q_i)}\right)$ si $P_i \neq q_i$. Aleshores $(\Omega_i, \mathcal{F}^i)$ és un π_{Min}- espai:

a) $P_i \neq q_i \neq r_i \neq P_i$, $\pi_{min}(F_{P_i q_i}, F_{q_i r_i})(x) = G\left(\frac{x}{d_i(P_i, q_i)}\right) \wedge G\left(\frac{x}{d_i(q_i, r_i)}\right) =$

$$= G\left(\frac{x}{d_i(P_1, q_i) \vee d_i(q_i, r_i)}\right) \leqslant G\left(\frac{x}{d_i(P_i, r_i)}\right) = F^i_{P_i r_i}(x).$$

b) $P_i \neq q_i = r_i$, $\pi_{Min}(\varepsilon_o, F_{P_i q_i}) = F_{P_i r_i}$.

c) $P_i = q_i \neq r_i$, $\pi_{Min}(\varepsilon_o, F_{q_i r_i}) = F_{q_i r_i} = F_{P_i r_i}$.

d) $P_i = q_i = r_i$, $\pi_{Min}(\varepsilon_o, \varepsilon_o) = \varepsilon_o$.

Sabent que $\bigvee_{i=1}^{\infty} d_i(P_i, q_i)$ és una ultramètrica en $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ i que podem formar el π_{Min}-producte, obtenim :

$$F^{\pi_{Min}}_{(P_i)(q_i)}(x) = \prod_{i=1}^{\infty}{}_{Min}\, G\left(\frac{x}{d_i(P_i, q_i)}\right) = \lim_{n\to\infty} G\left(\frac{x}{d_1(P_1, q_1)}\right) \wedge \ldots \wedge G\left(\frac{x}{d_n(P_n, q_n)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} G\left(\frac{x}{\bigvee_{i=1}^{n} d_i(P_i, q_i)}\right) = G\left(\frac{x}{\bigvee_{i=1}^{\infty} d_i(P_i, q_i)}\right).$$

Proposició 2.4.4. El producte finit d'espais de Wald (en el sentit de Istrăţescu i Văduva) és un cas particular de $*$-producte.

En efecte, si $\{ (\Omega_i, \mathcal{F}^i, *) \mid i=1,2,\ldots,n \}$ són espais de Wald, fixem un $a \in \Omega$, i considerem el $*$-producte en $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \{ a \}$; tindrem:

$$F^{*}_{(p_i,\ldots,p_n,a,a,\ldots)(q_1,\ldots,q_n,a,a,\ldots)} =$$

$$= \text{W-}\lim_{k\to\infty} \{ F^1_{p_1q_1}, F^1_{p_1q_1} * F^2_{p_2q_2}, \ldots, F^1_{p_1q_1} * \ldots * F^n_{p_nq_n} \} = F'_{p_1q_1} * \ldots * F^n_{p_nq_n}, \text{ resul-}$$

tat considerat per Istrăţescu i Văduva.

Proposició 2.4.5. El producte finit d'espais de Menger sobre una mateixa t-norma (en el sentit de Egbert, Tardiff i Xavier) és un cas particular de τ_T-producte.

En efecte, si $\{ (\Omega_i, \mathcal{F}^i, \tau_T) \mid i=1,2,\ldots,n \}$ són espais de Menger, fixem $a \in \Omega$, i fem el τ_T-producte en $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \{a\}$, obtenim

$$F^{\tau_T}_{(p_1,\ldots,p_n,a,a,\ldots)(q_1,\ldots,q_n,a,a\ldots)} = \text{W-}\lim_{k\to\infty} \{ F'_{p_1q_1}, \tau_T(F'_{p_1q_1}, F^2_{p_2q_2}), \ldots,$$

$$\tau_T(F'_{p_1q_1}, \ldots, F^n_{p_nq_n}) \} = \tau_T(F'_{p_1q_1}, \ldots, F^n_{p_nq_n}), \text{ resultat de Egbert, Tardiff}$$

i Xavier.

Malgrat que les precedents proposicions poden induir a pensar que els τ-productes tenen justificades avantatges sobre els Σ-productes, dos greus problemes surgeixen d'inmediat: assegurar la no trivialitat (no anul.lació) dels τ-productes i el comportament de la topologia producte per a aquesta definició. El primer problema ha estat resolt parcialment per Moynihan ([37]) qui, estudiant en abstracte els productes τ_T-infinits, dóna el teorema de representació per a T contínua:

$$(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\tau_T}} F_i)(x) = \sup\{ \overset{\infty}{\underset{i=1}{T}} F(a_i) \mid \sum_{i=1}^{\infty} a_i = x \},$$

del qual en deriva alguns criteris de no-trivialitat. Observem que els fets $\tau_T \leqslant \pi_T$ i $\tau_{prod} \leqslant *$, indiquen que les condicions de Moynihan són valides per π_T i *-productes. La segona questió queda clara des-- prés d'establir el següent:

Teorema 2.4.2. La topologia producte en $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, és més fina que la ε,λ-topologia de F, si es considera en cada espai la respectiva ε,λ-topologia.

Demostració. Sigui $\mathcal{U}$ un entorn qualsevol de la topologia producte, $\mathcal{U}=N_{P_1}^{F'}(\varepsilon_1,\lambda_1)\times\ldots\times N_{P_n}^{F^n}(\varepsilon_n,\lambda_n)\times\Omega_{n+1}\times\Omega_{n+2}\times\ldots$, agafant $\varepsilon=\mathrm{Min}\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, $\lambda = \mathrm{Min}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, tenim

$$N_{(P_i)}^{F^\tau}(\varepsilon,\lambda) \subset \prod_{i=1}^{\infty} N_{P_i}^{F^i}(\varepsilon,\lambda) \subset \mathcal{U} ,$$

ja que si $(q_i) \in N_{(P_i)}^{F^\tau}(\varepsilon,\lambda)$ és $1-\lambda < F^\tau_{(P_i)(q_i)}(\varepsilon) = (\overset{\infty}{\underset{i=1}{\tau}} F^i_{P_i q_i})(\varepsilon) \leqslant F^i_{P_i q_i}(\varepsilon)$, per tot $i \in \mathbb{N}$.

La mateixa demostració precedent diu que la topologia producte no pot ésser igual a la ε,λ ja que de ser-ho, donat un $N_{(P_i)}^{F^\tau}(\varepsilon,\lambda)$ existiria un subconjunt de la forma $\mathcal{U}'$ i per tant

$$\prod_{i=1}^{\infty} N_{P_i}^{F^i}(\varepsilon,\lambda) \supset N_{(P_i)}^{F^\tau}(\varepsilon,\lambda) \supset \mathcal{U}' = N_{P_1}^{F'}(\varepsilon_1,\lambda_1)\times\ldots\times N_{P_k}^{F^k}(\varepsilon_k,\lambda_k)\times\Omega_{k+1}\times\ldots,$$ es a dir, $\Omega_n = N_{P_n}^{F^n}(\varepsilon,\lambda)$, $\forall n \geqslant k+1$; condició realment restrictiva que sols en casos com els de producte finit pot tenir-se en compte.

Com a cloenda dels dos darrers apartats arribem doncs a la conclusió de que els Σ -productes ofereixen unes qualitats topològiques que els fan més utilitzables que els τ -productes, si bé des d'un punt de mira algebraic aquests darrers gaudeixen d'unes propietats més elegants. Si apel.lem a la semàntica de la $\mathcal{T}^{\Sigma}_{\varepsilon,\lambda}$ - topologia podrem veure que si una successió (q_i) està en $N^{\mathcal{T}^{\Sigma}}_{(q_i)}(\varepsilon,\lambda)$, vol dir que "és segur que almenys una coordenada q_i, amb probabilitat grossa $(1-\lambda)$, dista de la corresponent P_i menys de ε "; per altre banda exigir $(q_i) \in N^{\mathcal{T}^{\tau}}_{(P_i)}(\varepsilon,\lambda)$ és afirmar que "és segur que, amb la mateixa gran probabilitat $(1-\lambda)$, totes les coordenadas q_i disten de les respectives P_i, menys de ε". Això dóna una idea intuïtiva de llurs exigències i llurs possibilitats.

C A P I T O L 3

Convexificació seqüencial mètrica

"Quelque grand que soit un espace
on peut en concevoir un plus
grand et encore un qui le
soit davantage et ainsi à l'infini..."

Pascal.

La relació ternària d' "estar entre" ("between") introduïda per Pash, fou reformulada per Menger ([31]) i ha portat a la consideració d'un nou criteri de convexitat, al qual ací anomenarem de convexitat seqüencial. Segons aquest criteri, entre dos punts diferents qualssevol ha d'existir un tercer punt, diferent dels dos donats, tal que la terna així formada verifiqui la relació d' "estar entre" associada a priori al considerat espai. Aquesta noció ha rebut especial atenció per part de: Bodiou ([13]), en espais mètrics, Blumenthal ([11, 12]), en espais booleans i molt especialment Menger ([30]), Wald ([56]). Rhodes ([37]) i Schweizer-Moynihan ([34]) en el cas d'espais mètrics probabilístics. Trillas ([49,51,52,53]) ha fet diverses aportacions sobre les relacions "estar entre" en el cas d'espais mètrics generalitzats.

En el present capítol es comença (§3.1) introduint la noció de sistemes inductius mètrics, tot demostrant que aquests posseeixen un límit inductiu, dins de la categoria d'espais mètrics generalitzats. Com aplicació d'aquest apartat es dóna en § 3.2. un teorema de convexificació seqüencial, és dir, una construcció efectiva de l'extensió d'un espai mètric generalitzat a un altre seqüencialment convex, respecte de la relció d' "estar entre" facilitada per la propia mètrica generalitzada. El fet que la dita convexificació seqüencial resulta ésser isomètrica a un subespai del producte generalitzat de l'espai de partida, fa que en § 3.3. i § 3.4., on s'estudien els convexificats d'espais mètrics reals i probabilístics, siguin bàsics els resultats integrants del Capítol 2.

§ 3. 1.

Sistemes inductius mètrics

Per dualitat amb les dues primeres definicions de § 2.1. obtenim:

Definició 3.1.1. Donada una categoria $\mathcal{C}$ i un conjunt dirigit $(I,\leqslant)$,

A) Una familia d'objectes i morfismes

$(\{c_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant})$, és dita sistema inductiu si

a) $f_{ij}\in \mathrm{Hom}\,(c_i,c_j)$, per tot $(i,j)\in\leqslant$.

b) $f_{ii} = Id_{c_i}$, per tot $i\in I$.

c) $f_{jk}\circ f_{ij} = f_{ik}$, per tot $i,j,k\in I$ tals que $i\leqslant j\leqslant k$.

B) Un objecte C de $\mathcal{C}$ és dit límit inductiu del sistema inductiu $(\{c_i\}_{i\in I},\{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant})$ (i s'escriu

$C = \varinjlim(\{c_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leqslant})$) si verifica la

següent propietat universal: "Donat un objecte C' de $\mathcal{C}$ i una família de morfismes $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ tals que $\varphi_i\in \mathrm{Hom}\,(c_i,C')$, per tot $i\in I$, i $\varphi_i=\varphi_j\circ f_{ij}$, per tot $(i,j)\in\leqslant$, si $\{\Psi_i\}$ és una família de morfismes, $\Psi_i\in \mathrm{Hom}\,(c_i,C)$, $\forall i\in I$, aleshores existeix un únic $h\in \mathrm{Hom}\,(C,C')$ tal que $h\circ\Psi_i=\varphi_i$, per tot $i\in I$."

Establerta aquesta definició clàssica resulta immediata la següent:

Definició 3.1.2. Un sistema inductiu mètric és un sistema inductiu en la categoria E.M.G. d'espais mètrics generalitzats.

Teorema 3.1.1. En la categoria E.M.G. d'espais mètrics generalitzats existeix el límit inductiu de qualsevol sistema inductiu mètric, es a dir, E.M.G. és "tancada" respecte dels límits inductius.

Demostració. Sigui $(\{(\Omega_i,\varphi_i,m_i)\}_{i\in I}, \{(f_{ij},\gamma_{ij})\}_{(i,j)\in\leq})$ un sistema inductiu mètric. Per demostrar la existència del límit inductiu $(\bar\Omega,\bar\varphi,\bar m)$ s'estableixen els següents apartats:

i) Construcció de $\bar\Omega$ i $\bar S$;
ii) Estructura algebraica i reticular de $\bar S$;
iii) Construcció de $\bar m$;
iv) Comprobació de que $(\bar\Omega,\bar\varphi,\bar m)$ és el límit inductiu.

i) Construcció de $\bar\Omega$ i $\bar S$.

Per ser $(\{(\Omega_i,\varphi_i,m_i)\}_{i\in I}, \{(f_{ij},\gamma_{ij})\}_{(i,j)\in\leq})$ un sistema inductiu mètric, resulta que $(\{\Omega_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leq})$ i $(\{S_i\}_{i\in I}, \{\gamma_{ij}\}_{(i,j)\in\leq})$ són sistemes inductius conjuntistes. Definint en $\sum_{i\in I}\Omega_i = \bigcup_{i\in I}\Omega_i \times\{i\}$ la relació d'equivalència,

$$\forall(x_i,i),\ (x_j,j)\in\sum_{i\in I}\Omega_i : (x_i,i)\sim(x_j,j) \Leftrightarrow (\exists k\in I)[k\geq i, k\geq j,\ f_{ik}(x_i)=f_{jk}(x_j)];$$

s'obté com a conjunt de classes $\bar\Omega = \dfrac{\sum_{i\in I}\Omega_i}{\sim} = \lim\limits_{\rightarrow}(\{\Omega_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leq})$, límit inductiu conjuntista. Analogament, definint en $\sum_{i\in I} S_i = \bigcup_{i\in I} S_i \times\{i\}$ la relació d'equivalència:

$$\forall (S_i,i),(S_j,j)\in \sum_{i\in I} S_i : (S_i,i)\sim(S_j,j) \Leftrightarrow (\exists k\in I)[\,k\geq i, k\geq j,\ g_{ik}(S_i)=g_{jk}(S_j)\,],$$

s'obtè $\bar{S}= \dfrac{\sum_{i\in I} S_i}{\sim} = \lim_{\to} (\{S_i\}_{i\in I}, \{g_{ij}\}_{(i,j)\in \leqslant})$.

(ii) <u>Estructura algebraica i reticular de $\bar{S}$.</u>

(iia) <u>$\bar{S}$ és un semigrup.</u>

Sigui $\overline{(S_i,i)} + \overline{(S_j,j)} = \overline{(g_{ik}(S_i) + g_{jk}(S_j),k)}$ on $k\geq i,j$.

L'operació + està ben definida, ja que si $(S_i,i)\sim(S_{i'},i')$ i $(S_j,j)\sim(S_{j'},j')$ existeixen

$$m\geq i,i' \text{ tal que } g_{im}(S_i) = g_{i'm}(S_{i'}),$$

$$n\geq j,j' \text{ tal que } g_{jn}(S_j) = g_{j'm}(S_{j'});$$

Siguin $k'\geq i',j'$; $r\geq m,n$; $\lambda\geq k,k'$ i $\mu\geq r,\lambda$. Aleshores

$$g_{k\mu}(g_{ik}(S_i)+g_{jk}(S_j))=(g_{k\mu}\circ g_{ik})(S_i)+(g_{k\mu}\circ g_{jk})(S_j) =$$

$$=g_{i\mu}(S_i) +g_{j\mu}(S_j)=(g_{m\mu}\circ g_{im})(S_i)+(g_{n\mu}\circ g_{j\mu})(S_j) =$$

$$=(g_{m\mu}\circ g_{i'm})(S_{i'}) + (g_{n\mu}\circ g_{j'n})(S_{j'}) = g_{i'\mu}(S_{i'}) + g_{j'\mu}(S_{j'})=$$

$$=(g_{k'\mu}\circ g_{i'k'})(S_{i'}) + (g_{k'\mu}\circ g_{j'k'})(S_{j'})=g_{k'\mu}(g_{i'k}(S_{i'})+g_{j'k'}(S_{j'})),$$

el que assegura $(g_{ik}(S_i)+g_{jk}(S_j),k)\sim(g_{i'k'}(S_{i'})+g_{j'k'}(S_{j'}),k')$ i en conseqüència la correcció de +.

Trivialment l'operació és associativa, commutativa i té per neutre $\overline{(e_i,i)}$ al ser, per tot $(i,j)\in\leqslant$, $g_{ij}(e_i) = e_j$.

iib) $\bar{S}$ és ordenat parcial amb mínim $\overline{(e_i,i)}$ i amb isotonia respecte +.

Es defineix

$$\overline{(S_i,i)} \leq \overline{(S_j,j)} \Longleftrightarrow (\exists\, k\in I)[k\geq i, k\geq j, g_{ik}(S_i)\leq g_{jk}(S_j)] \;;$$

es tracta d'una relació, ja que si:

$$\left\{\begin{array}{l}(S_i,i)\sim(S_e,e) \Rightarrow \exists\, n\geq i,\ e \text{ tal que } g_{in}(S_i)=g_{en}(S_e) \\ (S_j,j)\sim(S_s,s) \Rightarrow \exists\, t\geq j, s \text{ tal que } g_{jt}(S_j)=g_{st}(S_s)\end{array}\right\} ;$$

Siguin $\lambda\geq n,k; r\geq k,t; \mu\geq\lambda, r$. Aleshores

$$g_{e\mu}(S_e)=(g_{n\mu}\circ g_{en})(S_e)=g_{n\mu}(g_{en}(S_e))=g_{n\mu}(g_{in}(S_i)) =$$

$$=g_{in}(S_i)=g_{k\mu}(g_{ik}(S_i)) < g_{k\mu}(g_{jk}(S_j)) = g_{j\mu}(S_j) =$$

$$=(g_{t\mu}\circ g_{jt})(S_j) = (g_{t\mu}\circ g_{st})(S_s) = g_{s\mu}(S_s) \text{ d'ón } \overline{(S_e,e)}\leq\overline{(S_s,S)}.$$

És fàcil verificar les propietats reflexiva i transitiva de $\leq$, utilitzant que $(\{S_i\}_{i\in I}, \{g_{ij}\}_{(i,j)\in\leq})$ és un sistema inductiu i les g_{ij} són creixents. L'antisimetria es deriva del següent argument:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{(S_i,i)}\leq\overline{(S_j,j)} \\ \quad i \\ \overline{(S_j,j)}\leq\overline{(S_i,i)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\exists k\in I)[k\geq i, k\geq j,\ g_{ik}(S_i)\leq g_{jk}(S_j) \\ i \\ (\exists k'\in I)[k'\geq i, k'\geq j,\ g_{jk'}(S_j)\leq g_{ik'}(S_i)\end{array}\right\} ;$$

Siguin $k''\geq k$ i $k''\geq k'$, aleshores

$$g_{ik''}(S_i)=(g_{kk''}\circ g_{ik})(S_i) \leq g_{kk''}(g_{jk}(S_j))=g_{jk''}(S_j)=(g_{k'k''}\circ g_{jk'})(S_j) =$$

$$=g_{k'k''}(g_{jk'}(S_j)) \leq g_{k'k''}(g_{ik'}(S_i))=g_{ik''}(S_i) ;\ \text{d'ón } g_{ik''}(S_i)=g_{jk''}(S_j)$$

i essent $k''\geq i,j$, és $\overline{(S_i,i)} = \overline{(S_j,j)}$. $\overline{(e_i,i)}$ és el mínim de $\bar{S}$. Per establir la isotonia de + respecte de $\leq$, sigui

$\overline{(S_i,i)} \leqslant \overline{(S_j,j)} \Leftrightarrow [(\exists k\in I) \quad k\geqslant i, k\geqslant j,\ g_{ik}(S_i) \leqslant g_{jk}(S_j)]$, i $\overline{(S_n,n)} \in \bar{S}$.

Si $e \geqslant i,n$ resulta:

$$\overline{(S_i,i)} + \overline{(S_n,n)} = \overline{(g_{ie}(S_i) + g_{ne}(S_n),\ e)} = A,$$

i si $e' \geqslant j,\ n$ es té :

$$\overline{(S_j,j)} + \overline{(S_n,n)} = \overline{(g_{je'}(S_j) + g_{ne'}(S_n), e')} = B;$$

triant $m \geqslant e, e'$ i $\lambda \geqslant m,k$:

$$g_{e\lambda}\ (g_{ie}(S_i) + g_{ne}(S_n)) = (g_{e\lambda} \circ g_{ie})(S_i) + (g_{e\lambda} \circ g_{ne})(S_n) =$$

$$= g_{i\lambda}(S_i) + g_{n\lambda}(S_n) < g_{j\lambda}(S_j) + g_{n\lambda}(S_n) = g_{e'\lambda}(g_{je'}(S_j) + g_{ne'}(S_n)),$$

es dir, $A \leqslant B$.

En definitiva tenim el semigrup ordenat $\mathcal{S} = (\bar{S}, +, \leqslant, \overline{(e_i,i)})$.

(iii) <u>Construcció de $\bar{m}$.</u>

Sigui $\bar{m} : \Omega \times \Omega \to \bar{S}$,

$$\bar{m}\ (\ \overline{(x_i,i)}, \overline{(x_j,j)}\ ) = \overline{(m_k(f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j)),\ k)} \text{ si } k\geqslant i,j.$$

La correspondència $\bar{m}$ gaudeix de les següents propietats:

(iiia) <u>$\bar{m}$ és aplicació.</u>

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} \overline{(x_i,i)} = \overline{(x_e,e)} \\ \text{i} \\ \overline{(x_j,j)} = \overline{(x_n,n)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\exists\, r\geqslant i,e) \text{ tal que } f_{ir}(x_i) = f_{er}(x_e) \\ \qquad\qquad \text{i} \\ (\exists s\geqslant j,n) \text{ tal que } f_{js}(x_j) = f_{ns}(x_n) \end{array} \right\}$$

Considerant $k\geqslant i,j$; $t\geqslant e,n$; $\varepsilon \geqslant k,t$; $\lambda \geqslant r,s$; $\mu \geqslant \lambda \varepsilon$; resulta:

$$g_{k\mu}(m_k(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j))) = (m_\mu \circ f_{k\mu} \times f_{k\mu})(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j)) =$$

$$= m_\mu(f_{i\mu}(x_i),\ f_{j\mu}(x_j)) = m_\mu(f_{r\mu}(f_{ir}(x_i)),\ f_{s\mu}(f_{js}(x_j))) =$$

$$= m_\mu(f_{r\mu}(f_{er}(x_e)),\ f_{s\mu}(f_{ns}(x_n))) = m_\mu(f_{e\mu}(x_e),\ f_{n\mu}(x_n)) =$$

$$= m_\mu(f_{t\mu}(f_{et}(x_e)),\ f_{t\mu}(f_{nt}(x_n))) = (m_\mu \circ f_{t\mu} \times f_{t})(f_{et}(x_e),f_{nt}(x_n)) =$$

$$= (g_{t\mu} \circ m_t)(f_{et}(x_e),\ f_{nt}(x_n)) = g_{t\mu}(m_t(f_{et}(x_e),f_{nt}(x_n))),$$

i per tant

$$\overline{(m_k\ (f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j)),k)} = \overline{(m_t(f_{et}(x_e),\ f_{nt}(x_n)),\ t)},$$

$$\bar{m}(\ \overline{(x_i,i)},\ \overline{(x_j,j)}\ ) = \bar{m}\ (\ \overline{(x_e,e)},\ \overline{(x_n,n)}).$$

(iiib) <u>$\bar{m}$ és separadora.</u>

$$\bar{m}\ (\ \overline{(x_i,i)},\ \overline{(x_j,j)}) = \overline{(m_k(f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j)),k)} = \overline{(e_t,t)} \Leftrightarrow$$

$$(\exists s \geq t,k) \text{ tal que } g_{ts}(e_t)=e_s= g_{ks}\ (m_k(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j))) =$$

$$= (m_s \circ f_{ks} \times f_{ks})(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j)) \Leftrightarrow (f_{ks} \circ f_{ik})(x_i)=(f_{ks} \circ f_{jk})(x_j)$$

$$\Leftrightarrow\ f_{is}(x_i)=f_{js}(x_j) \Leftrightarrow \overline{(x_i,i)} = \overline{(x_j,j)}.$$

(iiic) <u>$\bar{m}$ és simètrica</u> per ser-ho les mètriques m_i.

(iiid) <u>$\bar{m}$ verifica la desigualtat triangular.</u> Siguin $\overline{(x_i,i)},\overline{(x_j,j)},\overline{(x_t,t)} \in \bar{\Omega}$,

$$a_1=\bar{m}\ (\ \overline{(x_i,i)},\overline{(x_j,j)}\ )=\overline{(m_k(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j)),k)} \text{ amb } k \geq i,j,$$

$$a_2=\bar{m}\ (\ \overline{(x_i,i)},\overline{(x_t,t)}) =\overline{(m_\lambda(f_{i_\lambda}(x_i),f_{t_\lambda}(x_t)),\lambda)} \text{ amb} \lambda \geq\ i,t,$$

$$a_3=\bar{m}\ (\ \overline{(x_t,t)},\overline{(x_j,j)}) =\overline{(m_\mu(f_{t_\mu}(x_t),f_{j_\mu}(x_j),\mu)} \text{ amb} \mu \geq\ j,t,$$

$$a_2+a_3=\overline{(g_{\lambda\varepsilon}\ (m_\lambda(f_{i\lambda}(x_i),f_{t\lambda}(x_t)))+\ g_{\mu\varepsilon}\ (m_\mu(f_{t\mu}(x_t),f_{j\mu}(x_j))),\ \varepsilon\ )}$$

amb $\varepsilon \geqslant \lambda\ ,\mu$. Sia $\zeta \geqslant k,\varepsilon$;

$$g_{\varepsilon\zeta}\ (g_{\lambda\varepsilon}\ (m_\lambda(f_{i\lambda}(x_i),\ f_{t\lambda}(x_t)))\ +\ g_{\mu\varepsilon}\ (m_\mu(f_{t\mu}(x_t),f_{j\mu}(x_j)))\ )\ =$$

$$= (g_{\lambda\zeta} \circ m_\lambda)(f_{i\lambda}\ (x_i),f_{t\lambda}(x_t))\ +\ (g_{\mu\zeta}\circ m_\mu)\ \ (f_{t\mu}(x_t),\ f_{j\mu}(x_j))\ =$$

$$= (m_\zeta \circ\ f_{\lambda\zeta}\times\ f_{\lambda\zeta})(f_{i\lambda}(x_i),f_{t\lambda}(x_t))\ +\ (m_\zeta\circ\ f_{\mu\zeta}\times f_{\mu\zeta})(f_{t\mu}(x_t),f_{j\mu}(x_j))\ =$$

$$= m_\zeta(f_{i\zeta}(x_i),\ f_{t\zeta}(x_t))\ +\ m_\zeta(f_{t\zeta}(x_t),\ f_{j\zeta}(x_j))\ \geqslant$$

$$\geqslant m_\zeta(f_{i\zeta}(x_i),\ f_{j\zeta}(x_j))\ =\ m_\zeta((f_{k\zeta}\circ\ f_{ik})(x_i),(f_{k\zeta}\circ\ f_{jk})(x_j)\ )\ =$$

$$= (m_\zeta\circ\ f_{k\zeta}\times\ f_{k\zeta})(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j))=g_{k\zeta}(m_k(f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j))\ ),$$

és dir, $a_2\ +\ a_3 \geqslant\ a_1$.

Construït ja $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{S}},\overline{m})$ ens resta comprobar que

(iv) <u>$(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{S}},\overline{m})$ és límit inductiu.</u>

Sigui $\{(\mu_i,\lambda_i)\}_{i\in I}$ la família de morfismes entre $\{(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i)\}_{i\in I}$ i $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{S}},\overline{m})$, definida per $\mu_i:\Omega_i \to \overline{\Omega}$, $\mu_i(x_i)=\overline{(x_i,i)}$, $\lambda_i:S_i \to \overline{S}$, $\lambda_i(S_i)=\overline{(S_i,i)}$.

Consideri's un espai mètric generalitzat qualsevol $(\Omega,\mathcal{S},m)$ i una família $\{(\varphi_i,\Psi_i)\}_{i\in I}$ de morfismes entre $\{(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i)\}_{i\in I}$ i $(\Omega,\mathcal{S},m)$ de forma que, per tot $(i,j)\in\,\leqslant$, el següent diagrama commuti

$$\begin{tikzcd}
(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i) \arrow[r, "(\varphi_i{,}\Psi_i)"] \arrow[d, "(f_{ij}{,}g_{ij})"'] & (\Omega,\mathcal{S},m) \\
(\Omega_j,\mathcal{S}_j,m_j) \arrow[ur, "(\varphi_j{,}\Psi_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

En virtut de que per $i,j \leq k$ és $\Psi_k \circ g_{ik}=\Psi_i$ i $\varphi_k \circ f_{ik}=\varphi_i$, les aplicacions $H: \begin{array}{ccc}\bar{\Omega} & \longrightarrow & \Omega \\ \overline{(x_i,i)} & \mapsto & \varphi_i(x_i)\end{array}$, $h: \begin{array}{ccc}\bar{S} & \longrightarrow & S \\ \overline{(s_i,i)} & \mapsto & \Psi_i(s_i)\end{array}$, estan ben definides, són les úniques que verifiquen $H \circ \lambda_i=\varphi_i$, $h \circ \mu_i=\Psi_i$, $\forall i\in I$ i així la parella (H,h) és un morfisme de mètrics generalitzats, ja que

$$(h \circ \bar{m})(\overline{(x_i,i)},\overline{(x_j,j)}) = h(\overline{(m_k(f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j)),k)}) =$$

$$=\Psi_k(m_k(f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j))) = (m \circ \varphi_k \times \varphi_k)(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j)) =$$

$$= m(\varphi_i(x_i),\varphi_j(x_j)) = (m \circ H \times H)(\overline{(x_i,i)},\ \overline{(x_j,j)}).$$

El diagrama corresponent a aquesta propietat universal de $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{S}},\bar{m})$ és:

$$\begin{tikzcd}
(\Omega_j,\mathcal{S}_j,m_j) \arrow[dr, "(\lambda_j,\mu_j)"] \arrow[ddr, "(\varphi_j,\Psi_j)"'] & (\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i) \arrow[l, "(f_{ij},g_{ij})"'] \arrow[d, "(\lambda_i,\mu_i)"] \arrow[dd, bend left, "(\varphi_i,\Psi_i)"] \\
 & (\bar{\Omega},\bar{\mathcal{S}},\bar{m}) \arrow[d, dashed, "(H,h)"] \\
 & (\Omega,\mathcal{S},m)
\end{tikzcd}$$

El teorema està demostrat.

Tenint en compte la demostració anterior, podem escriure les següents igualtats simbòliques.

$I_1)$ $\bar{\Omega} = \varinjlim(\{\Omega_i\}_{i\in I},\{f_{ij}\}_{(i,j)\in \leq})$, en la categoria de conjunts.

$I_2)$ $\bar{\mathcal{S}} = \varinjlim(\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I},\{g_{ij}\}_{(i,j)\in \leq})$, en la categoria de semigrups ordenats.

I_3)

$$(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{J}},\bar{m})$$

$$\|$$

$$\left(\varinjlim\left(\{\Omega_i\}_{i\in I},\{f_{ij}\}_{(i,j)\in\leq}\right),\ \varinjlim\left(\{\mathcal{J}_i\}_{i\in I},\{g_{ij}\}_{(i,j)\in\leq}\right),\ \bar{m}\right)$$

$$\|$$

$$\varinjlim\left(\{(\Omega_i,\mathcal{J}_i,m_i)\}_{i\in I},\ \{(f_{ij},g_{ij})\}_{(i,j)\in\leq}\right).$$

§ 3. 2.

Teorema de la convexificació seqüencial.

Sigui $(\Omega,\mathcal{S},m)$ un espai mètric generalitzat.

Definició 3.2.1.

a) $A \subset \Omega$ és seqüencialment convex si per qualsevol parella $a,b\in A$, $a\neq b$, existeix un $c\in A$, $a\neq c\neq b$, tal que $m(a,b) = m(a,c) + m(c,b)$. Es diu que c esta "entremig" de a i b.

b) $A \subset \Omega$ és mètricament convex si per qualsevol parella $a,b\in A$, $a\neq b$, es verifica

$$[a,b]_m \equiv \{ x\in\Omega \mid m(a,b) = m(a,x) + m(x,b)\} \subset A.$$

Anàlogament, si $(C,\geqslant)$ és un conjunt parcialment ordenat es pot establir la

Definició 3.2.2.

a) $B\subset C$ és seqüencialment convex en ordre si per qualsevol $x,y\in B$, $x\lneqq y$, existeix $z\in B$, tal que $x\lneqq z\lneqq y$.

b) $B\subset C$ és convex en ordre si per qualsevol $x,y\in B$, $x\lneqq y$, es verifica

$$[x,y]_\leqslant \equiv \{ z\in C \mid x\leqslant z\leqslant y\} \subset B.$$

Cal notar que mentre les convexitats mètriques i ordenades són valedores en els respectius conjunts globals Ω i C, i tenen sentit, per tant, només en subconjunts propis, les convexitats seqüencials mètriques i ordenades són predicables en subconjunts propis o nó i presuposen la cardinalitat almenys numerable. El buit, $\emptyset$, i qualsevol singletó es consideraran convexos en tots els sentits. Els següents exemples posen en evidència que les convexitats seqüencials (a) i les de segments (b) no tenen una relació directa, en general.

Exemples 3.2.1.

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ són convexos en mètrica i ordre, pero no ho son séqüencialment.

(2) $(o,1)\cup(2,3)\subset\mathbb{R}$, és seqüencialment convex sense ser convex.

(3) El mètric booleà $(L, (L,=,\Delta),m(a,b)=a\Delta b)$ és seqüencialment convex en mètrica però cap subconjunt és convex.

(4) Tot espai normat es seqüencialment convex.

(5) $(Q,\leqslant,|\ |)$, $(\mathbb{R},\leqslant,|\ |)$, $(\mathbb{C},<,|\ |+i|\ |)$, $(Q\cap[o,1],\leqslant,|\ |)$ són convexos i sequencialment convexos, en mètrica i en ordre.

El resultat central d'aquest capítol és el següent teorema en el qual es construeix, tot aprofitant els resultats de § 3.1 una ex-- tensió seqüencialment convexa a partir de qualsevol espai mètric generalitzat.

Teorema 3.2.1. (Teorema de la convexificació seqüencial).

Si $(\Omega,\mathfrak{S},m)$ és un espai mètric generalitzat, existeix un monomorfisme mètric (Φ,φ) en un espai mètric generalitzat seqüencialment convex $(\bar{\Omega},\bar{\mathfrak{S}},\bar{m})$.

Demostració. Sigui $(\Omega,\mathfrak{S},m)$ un espai mètric generalitzat; consideri's l'ordenat $(\mathbb{N},\leqslant)$ i per cada $i\in\mathbb{N}$:

$$\Omega_i=\Omega^{2^i}=\Omega\times\overset{2^i}{\cdots}\times\Omega ,$$

$$S_i=S^{2^i}=S\times\overset{2^i}{\cdots}\times S ,$$

$$m_i : \Omega_i \times \Omega_i \to S_i ,$$

$$m_i((x_1,\ldots,x_{2^i}),(y_1,\ldots,y_{2^i}))=(m(x_1,y_1),\ldots,m(x_{2^i},y_{2^i})).$$

En virtut de §2.1. , $\{(\Omega_i,\mathcal{F}_i,m_i)\}_{i\in N}$ és una família d'espais mètrics generalitzats. Per tota parella ordenada d'indexs $i\leq j$ en N , defineixi's:

$$f_{ij}:\Omega_i \to \Omega_j \quad , \quad g_{ij}: S_i \to S_j \quad ,$$

mitjançant

$$f_{ij}(x_1,\ldots,x_{2^i})=(x_1,\ldots,x_{2^i},\overset{2^{j-i}}{\ldots},x_1,\ldots,x_{2^i}),$$

$$g_{ij}(s_1,\ldots,s_{2^i})=(s_1,\ldots,s_{2^i},\overset{2^{j-i}}{\ldots},s_1,\ldots,s_{2^i}),$$

on l'anterior notació expressa que l'imatge d'un element $(a_1,\ldots,a_{2^i})$ de Ω_i (ó S_i), és l'element de Ω_j(o S_j) obtingut al "concatenar" l'element donat $(a_1,\ldots,a_{2^i})$, exactament 2^{j-i} vegades, amb si mateix. És fàcil ve--rificar que

a) $f_{ii}=I_{d_{\Omega_i}}$, $g_{ii}=I_{d_{S_i}}$, per tot $i \in N$;

b) Per tots $i\leq j\leq k$ és $f_{jk} \circ f_{ij}=f_{ik}$, $g_{jk} \circ g_{ij}=g_{ik}$;

c) Cada g_{ij} ($i\leq j$ en N) és un morfisme algebraic creixent que transforma el neutre i mínim $(e,\overset{2^i}{\ldots},e)$ de S_i en el neutre i mínim $(e,\overset{2^j}{\ldots},e)$ de S_j.

Per tant, fent memòria de la Definició 3.1.2, resulta que $(\{(\Omega_i,\mathcal{F}_i,m_i)\}_{i\in N}, \{(f_{ij},g_{ij})\}_{(i,j)\in\leq})$ és un sistema inductiu mètric i en conseqüència podem aplicar el Teorema 3.1.1. per obtenir l'espai mètric generalitzat límit inductiu de l'esmentat sistema:

$$(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{S}},\bar{m})= \underset{\rightarrow}{\lim} \left(\{(\Omega_i,\mathcal{S}_i,m_i)\}_{i\in\mathbb{N}},\{(f_{ij},g_{ij})\}_{(i,j)\in\leqslant}\right),$$

$$\bar{\Omega}=\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega^{2^i}\times\{i\}\right)\Big/\sim(f_{ij}), \quad \bar{S}=\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S^{2^i}\times\{i\}\right)\Big/\sim(g_{ij}),$$

$$\bar{m}:\bar{\Omega}\times\bar{\Omega} \rightarrow \bar{S},$$

definida per

$$\bar{m}\left(\overline{(x_1,\ldots,x_2i,i)},\overline{(y_1,\ldots,y_2i,j)}\right) = \overline{(m_k(f_{ik}(x_i),f_{jk}(x_j)),k)}$$

amb $k\geqslant i,j$, arbitrari.

Aleshores, la parella (Φ,φ) de $(\Omega,\mathcal{S},m)$ en $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{S}},\bar{m})$, donada per:

$$\Phi:\Omega\rightarrow\bar{\Omega}, \qquad \varphi:S\rightarrow\bar{S},$$
$$x\rightarrow\overline{(x,o)} \qquad s\rightarrow\overline{(s,o)}$$

és un monomorfisme mètric de l'espai de partida, en el construït; és a dir $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{S}},\bar{m})$ és una extensió de $(\Omega,\mathcal{S},m)$. En resta establir la convexitat seqüencial mètrica de $\bar{\Omega}$ i la ordenada de $\bar{S}$.

(I) <u>$\bar{\Omega}$ és seqüencialment convex respecte $\bar{m}$.</u>

Siguin $A=\overline{(a_1,\ldots,a_2i,i)}$ i $B=\overline{(b_1,\ldots,b_2j,j)}$ dos elements diferents ($A\neq B$) qualsevol de $\bar{\Omega}$, que sense pèrdua de generalitat podem suposar amb $i\leqslant j$. Consideri's

$$C=\overline{((f_{ij}(a_1,\ldots,a_2i),f_{jj}(b_1,\ldots,b_2j)),j+1)}$$

$$=\overline{(a_1,\ldots,a_2i,\overset{2^{j-i}}{\overbrace{\ldots}},a_1,\ldots,a_2i,b_1,\ldots,b_2j,j+1)},$$

és a dir, C és generat per la "tira" de longitud 2^{j+1} en Ω_j, obtinguda al repetir primer l'element $(a_1,\dots,a_{2^i})$, 2^{j-i} vegades i concatenant a continuació l'element $(b_1,\dots,b_{2^j})$. Si C fos igual a A es conclouria B = A, cosa impossible; anàlogament si C fos igual a B. Així A $\neq$ C $\neq$ B. Finalment

$$\bar{m}(A,C)+\bar{m}(C,B)=\bar{m}(\overline{(f_{ij+1}(a_1,\dots,a_{2^i}),j+1)},\overline{(f_{ij}(a_1,\dots,a_{2^i}),b_1,\dots b_{2^j},j+1)})$$

$$+\bar{m}(\overline{(f_{ij}(a_1,\dots,a_{2^i}),b_1,\dots,b_{2^j},j+1)},\overline{(f_{jj+1}(b_1,\dots,b_{2^j}),j+1)})$$

$$= \overline{(e,\overset{2^j}{\dots},e,m(a_1,b_1),\dots,m(a_{2^i},b_{2^j}),\ j+1\ )}$$

$$+ \overline{(m(a_1,b_1),\dots,\ m(a_{2^i},b_{2^j}),\ e,\overset{2^j}{\dots},\ e)\ j+1)}$$

$$= \overline{(g_{jj+1}(m(a_1,b_1),\dots,m(a_{2^i},b_{2^j})),\ j+1)}$$

$$= \overline{((g_{jj+1}\circ m_j)((a_1,\dots,a_{2^i},\overset{2^{j-1}}{\dots},\ a_1,\dots,a_{2^i}),(b_1,\dots,b_{2^j})),\ j+1)}$$

$$= \overline{((m_{j+1}\circ f_{jj+1}\times f_{jj+1})((\ (a_1,\overset{2^j}{\dots},\ a_{2^i}),\ (b_1,\dots,b_{2^j})),\ j+1)}$$

$$= \bar{m}\ (A,B),$$

per tant C està al mig de A i B i la convexitat seqüencial de $\bar{\Omega}$ queda probada.

(II) <u>$\bar{S}$ és seqüencialment convex respecte l'ordre $\leqslant$.</u>

En efecte, donats E= $\overline{(S_1,\dots,S_{2^i},i)}$, G= $\overline{(t_1,\dots,t_{2^j},j)}$ en $\bar{S}$ tals que E $\lneqq$G, és construeix

$$F = (\ \overline{(g_{i,\text{Màx}(i,j)}(S_1,\dots,S_{2^i}),\ g_{j\ \text{Màx}(i,j)}(t_1,\dots,t_{2^j})),\text{Max}(1,j)+1)},$$

i és pot comprobat, seguint el tipus d'idees abans utilitzades, que $E \lneq F \lneq G$.

Remarquem que el teorema anterior és d'existència i construcció, però no pas d'unicitat. Amb escriptura un tant més complicada, poden construir-se convexificacions que, en lloc d'utilitzar les potències de 2, es basin en les potències de qualsevol primer P. Afegim que la idea intuïtiva inicial per realitzar tal construcció va ser la següent: donats dos elements x,y, $x \neq y$ en Ω (o S), identificar-los amb els elements diagonals (x,x) i (y,y) de Ω^{2^1} (o S^{2^1}) i considerar aleshores l'element mixte (x,y), el qual, respecte les mètriques puntuals verifica

$$"\overline{m(x,y)}=\overline{m((x,x),(y,y))}=\overline{(m(x,y),m(x,y))}=\overline{(e,m(x,y))}+\overline{(m(x,y),e)}$$

$$=\overline{m(\ (x,x),(x,y))}+\overline{m((x,y),(y,y))}\ =\overline{m(x,(x,y))}+\overline{m((x,y),y)}\ "$$

(o $(x,x) \lneq (x,y) \lneq (y,y)$ si $x \lneq y$, en l'ordre puntual). Així identificant ara els punts (x,y) de Ω^{2^1} (o S^{2^1}) amb els (x,y,x,y) de Ω^{2^2} (o S^{2^2}) i repetint la tècnica de fabricar elements mixtes, s'obté un procés recurrent numerable, que amb els oportuns refinaments tècnics, s'acaba de formalitzar en l'anterior teorema.

Es possible simplificar la representació dels elements del convexificat en considerar el següent teorema.

<u>Teorema 3.2.2.</u> (Teorema de l'immersió del convexificat).

El convexificat seqüencial $(\overline{\Omega},\overline{S},\overline{m})$ construït en el Teorema 3.2.1., és isomètric a un subespai mètric del producte generalitzat $(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega\ ,\prod_{i=1}^{\infty} S,m_{\pi})$.

<u>Demostració.</u> Per §2.1. sabem que $(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega,\prod_{i=1}^{\infty} S,m_{\pi})$ és un espai mètric generalitzat. Si $x_1,\ldots,x_n \in \Omega$, escriurem $(x_1,\ldots,x_n;*)$ l'element de

$\prod_{i=1}^{\infty} \Omega$ que s'obté al repetir, de forma ordenada, la enepla $(x_1,\ldots,x_n)$ infinites vegades. Sigui

$$\Omega^* = \{(x_1,\ldots,x_{2^k};\ *) \in \prod_{i=1}^{\infty} \Omega / k \in N,\ x_1,\ldots,x_{2^k} \in \Omega\},$$

$$S^* = \{(s_1,\ldots,s_{2^k};\ *) \in \prod_{i=1}^{\infty} S / k \in N,\ s_1,\ldots,s_{2^k} \in S\},$$

$$m^* = m_\pi |_{\Omega^* \times \Omega^*}.$$

Es fàcil verificar que $(\Omega^*, \mathcal{S}^*, m^*)$ és un subespai mètric de

$(\prod_{i=1}^{\infty} \Omega, \prod_{i=1}^{\infty} S, m_\pi)$. La parella (α, β) de $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{S}}, \bar{m})$ en $(\Omega^*, \mathcal{S}^*, m^*)$ donada per,

$$\alpha : \bar{\Omega} \rightarrow \Omega^*, \quad \alpha(\overline{(x_1,\ldots,x_{2^k},k)}) = (x_1,\ldots,x_{2^k};*),$$

$$\beta : \bar{S} \rightarrow S^*, \quad \beta(\overline{(s_1,\ldots,s_{2^k},k)}) = (s_1,\ldots,s_{2^k};*),$$

facilita un total isomorfisme mètric entre $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{S}}, \bar{m})$ i $(\Omega^*, \mathcal{S}^*, m^*)$, és a dir, α i β són bijectives, β és un isomorfisme ordenat i algebraic de semigrups i $m^* \circ \alpha \times \alpha = \beta \circ \bar{m}$.

Aquest teorema proveeix una facilitat computacional que serà aprofi_ tada en el darrer apartat d'aquest capítol.

Per acabar, notem que si considerem en un espai mètric generalitzat $(\Omega, \mathcal{S}, m)$ un $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, aleshores definint l'<u>envoltura convexa</u> $[A]$ de A com el mínim subconjunt mètricament convex de Ω que conté a A, és fà_ cil demostrar per simple analogia al resultat clàssic de $\mathbb{R}^n$ el següent teorema.

<u>Teorema 3.2.3.</u> $[A] = \bigcup_{n \in N} A_n$, on $A_o = A$,

$$A_1 = \{x \in \Omega \mid \exists a,b \in A_o, a \neq b,\ x \in [a,b]_m\},$$

$$A_n = \{x \in \Omega \mid \exists a,b \in A_{n-1}, a \neq b,\ x \in [a,b]_m\},$$

per tot $n \in N$.

§ 3. 3.

Aplicació de la convexificació seqüencial als espais mètrics reals.

En aquest apartat fem us de les tècniques introduïdes en § 3.2., per construir un convexificat seqüencial per a qualsevol espai mètric real.

Teorema 3.3.1. Tot espai mètric real $(\Omega, \mathbb{R}^+, d)$ admet un monomorfisme mètric en un espai mètric real $(\Omega, \mathbb{R}^+, \tilde{d})$ seqüencialment convex.

Demostració. Pel Teorema 3.2.1, sigui $(\overline{\Omega}, \overline{\mathbb{R}^+}, \bar{d})$, l'espai mètric generalitzat seqüencialment convex i extensió de $(\Omega, \mathbb{R}^+, d)$, mitjançant el monomorfisme mètric (Φ, φ), definit per

$$\Phi : \Omega \to \overline{\Omega} \quad ,$$
$$x \to \overline{(x,o)} \quad ,$$
$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$$
$$r \to \overline{(r,o)} \quad .$$

Consideri's les aplicacions següents:

$$\varphi' : \mathbb{R}^+ \to \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}^+ \quad ,$$

$$\overline{(x_1, \ldots, x_2k, k)} \xrightarrow{\varphi'} (x_1, \ldots, x_2k, x_1, \ldots, x_2k, \ldots) \equiv (x_1 \ldots x_2k; *)$$

$$\varphi'' : \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad ,$$

$$(a_n) \xrightarrow{\varphi''} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{a_n}{1+a_n}$$

φ' és un morfisme de semigrups additius, creixent i injectiva; φ'' és subadditiva, creixent i nul.la només en (o). Tenint en compte aquestes propietats i la Proposició 2.1.2., fàcilment resulta que definint $\tilde{d} : \bar{\Omega}\times\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^+$, $\tilde{d} = \varphi'' \circ \varphi' \circ \bar{d}$ és una distància real i $(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+, \tilde{d})$ un espai mètric.

La parella (Φ, i), on $i:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $i(x)=\frac{x}{1+x}$, és el monomorfisme mètric que injecta $(\Omega, \mathbb{R}^+, d)$ en $(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+, \tilde{d})$, ja que

$$(\tilde{d} \circ \Phi\times\Phi)(x,y) = \tilde{d}(\overline{(x,o)}, \overline{(y,o)}) = (\varphi''\circ\varphi')(\overline{(d(x,y),o)})$$

$$= \varphi''((d(x,y);*)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = (i \circ d)(x,y).$$

Ens resta comprobar que $(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+, \tilde{d})$ és seqüencialment convex. Per això siguin $\bar{x} = \overline{(x_1,\dots,x_{2^i},i)}$, $\bar{y} = \overline{(y_1,\dots,y_{2^j},j)}$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, dos elements qualssevol de Ω i suposi's, sense pèrdua de generalitat, que $i \leq j$. Pel Teorema 3.2.1. existeix un $\bar{z}\in\bar{\Omega}$, $\bar{x} \neq \bar{z} \neq \bar{y}$ que està "entremig" de $\bar{x}$ i $\bar{y}$ segons $\bar{d}$; explícitament:

$$\bar{z} = \overline{(x_1,\dots,x_{2^i},\overbrace{\dots}^{2^{j-1}},x_1,\dots,x_{2^i},y_1,y_2,\dots,y_{2^j};\ j+1)}.$$

Escriurem $a_1=d(y_1,x_1)$, $a_2=d(y_2,x_2),\dots,a_{2^i} = d(y_{2^i}, x_{2^i})$,

$a_{2^i+1} = d(y_{2^i+1}, x_1),\dots,a_{2^j} = d(y_{2^j}, x_{2^i})$, les 2^j respectives distàncies, coordenada a coordenada, entre $\bar{y}$ i $\bar{x}$. Comprobarem que, en efecte, el mateix $\bar{z}$ està "entremig" de $\bar{x}$ i $\bar{y}$ segons $\tilde{d}$:

$$\tilde{d}(\bar{x},\bar{z})+\tilde{d}(\bar{z},\bar{y})=(\varphi''\circ\varphi')\overline{(o,\overbrace{\ldots}^{2^{j-i}},o,d(x_1,y_1),\ldots,d(x_{2^i},y_{2^j}),j+1)}$$

$$+(\varphi''\circ\varphi')\overline{(d(x_1,y_1),\ldots,d(x_{2^i},y_{2^j}),o,\overbrace{\ldots}^{2^j},o,j+1)}$$

$$=\varphi''(o,\overbrace{\ldots}^{2^j},o,a_1,\ldots,a_{2^j};*)+\varphi''(a_1,\ldots,a_{2^j},o,\overbrace{\ldots}^{2^j},o;*)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=2^j(2n-1)+1}^{2^{j+1}n}\frac{1}{2^t}\,\frac{a_{t-2^j(2n-1)}}{1+a_{t-2^j(2n-1)}}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=2^{j+1}(n-1)+1}^{2^j(2n-1)}\frac{1}{2^t}\,\frac{a_{t-2^{j+1}(2n-1)}}{1+a_{t-2^{j+1}(n-1)}}$$

$$=\varphi''(a_1,\ldots,a_{2^j};\ *)=(\varphi''\circ\varphi')\overline{(a_1,\ldots,a_{2^j},j)}$$

$$=(\varphi''\circ\varphi')\overline{(d(x_1,y_1),\ldots,d(x_{2^i},y_{2^j}),j)}=(\varphi''\circ\varphi'\circ\bar{d})(\bar{x},\bar{y})=\tilde{d}(\bar{x},\bar{y}).$$

§ 3. 4.

Σ i τ -convexificacions d'espais mètrics probabilístics.

En § 2.2. i § 2.4. han estat estudiats els Σ i τ productes, respectivament, d'espais mètrics probabilístics. Com sigui que a l'aplicar el Teorema de convexificació a un espai $(\Omega,\mathfrak{F},\tau)$ s'obté un espai generalitzat convex isomorf (pel Teorema 3.2.2.) a un subespai del producte generalitzat, segons considerem la tècnica dels Σ -productes o dels τ -productes, obtindrem dues convexificacions que, per raons òbvies, designarem respectivament per Σ i τ .

Teorema 3.4.1. Si $(\Omega,\mathfrak{F})$ és un espai semi-mètric probabilístic, existeix una extensió $(\Omega^*,\mathfrak{F}^*)$ que és π_{T_m} -convexa i és subespai del Σ -producte $(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega\ ,\mathfrak{F}^{\Sigma})$.

Demostració. Siguin

$$\Omega^*=\{(P_1,\dots,P_{2^k};*)\mid k\in\mathbb{N}\ ,\ P_1,\dots,P_{2^k}\in\Omega\}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega\ ,$$

$$\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}^{\Sigma}\big|_{\Omega^*\times\Omega^*}.$$

Així $(\Omega^*,\mathfrak{F}^*)$ és un espai semi-mètric probabilístic, subespai de $(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega\ ,\mathfrak{F}^{\Sigma})$. Sigui $f\colon\Omega\to\Omega^*$, $f(P)=(P;*)$, l'injecció natural de $(\Omega,\mathfrak{F})$ en $(\Omega^*,\mathfrak{F}^*)$ (noti's que $(\mathfrak{F}^*\circ f\times f)(P,q)=\mathfrak{F}^*((P;*),(q;*))=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mathfrak{F}(P,q)=\mathfrak{F}(P,q)$). Cal establir la π_{T_m} -convexitat de $(\Omega^*,\mathfrak{F}^*)$. Siguin dos elements de $\overline{\Omega}$:

$$\alpha = (x_1,\ldots,x_{2^i};*),$$

$$\gamma = (y_1,\ldots,y_{2^j};*),$$

$$\alpha \neq \gamma,\ i \leqslant j;$$

seguint la tècnica del teorema de convexificació, consideri's

$$\beta = (\underbrace{x_1,\ldots,x_{2^i},\ldots,x_1,\ldots,x_{2^i}}_{2^{j-i}},y_1,y_2,\ldots,y_{2^j};*),$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma .$$

Aleshores, per tot $u > o$ tindrem:

$$T_m(F^*_{\alpha\beta}(u),\ F^*_{\beta\gamma}(u)) = \mathrm{Max}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\big(F_{\pi_i(\alpha)\pi_i(\beta)}(u) + F_{\pi_i(\beta)\pi_i(\gamma)}(u) - 1\big), o\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} F_{\pi_i(\beta)\pi_i(\gamma)}(u) + \sum_{i=2^j+1}^{2\cdot 2^j} \frac{1}{2^i} F_{\pi_i(\alpha)\pi_i(\beta)}(u) + \sum_{i=2^{j+1}+1}^{3\cdot 2^j} \frac{1}{2^i} F_{\pi_i(\beta)\pi_i(\gamma)}(u) +$$

$$+ \sum_{i=3.2^j+1}^{4.2^j} \frac{1}{2^i} F_{\pi_i(\alpha)\pi_i(\beta)}(u) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} F_{\pi_i(\alpha)\pi_i(\gamma)}(u)$$

$$= F^*_{\alpha\gamma}(u),$$

és a dir,

$$\pi_{T_m}(F^*_{\alpha\beta},\ F^*_{\beta\gamma}) = F^*_{\alpha\gamma}$$

Remarquem que en aquest cas obtenim una π_{T_m}-convexificació sense ser necessàriament l'espai $(\Omega^*,\mathfrak{F}^*)$ un mètric probabilístic respecte de π_{T_m}, és a dir, l'anterior construcció és independent de les desigualtats triangulars definibles en $(\Omega,\mathfrak{F})$.

Un resultat anàleg s'obté per τ-productes.

<u>Teorema 3.4.2.</u> Sigui $(\Omega,\mathcal{F},\tau)$ un espai mètric probabilístic amb τ contínua. Existeix una parella d'aplicacions (f,g) de $(\Omega,\mathcal{F},\tau)$ en un espai mètric probabilístic τ-convex $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\tau)$, tal que $f:\Omega \to \Omega^*$ és injectiva i $g:\Delta^+ \to \Delta^+$ és un τ-morfisme tal que (f,g) és morfisme mètric.

<u>Demostració.</u> Consideri's Ω^* el mateix conjunt definit en el teorema anterior, $\mathcal{F}^*=\mathcal{F}^\tau|_{\Omega^*\times\Omega^*}$, $f:\Omega\to\Omega^*$, $f(P)=(P,*)$ i $g:\Delta^+ \to \Delta^+$, donada per $g(F)=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}} F=\underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\ \tau(F,\overset{n}{\ldots},F)$. f és injectiva i g satisfà:

a) $g(F)=\varepsilon_0 \Leftrightarrow F=\varepsilon_0$,

b) g és τ-morfisme: per tot $F,G\in\Delta^+$,

$$g(\tau(F,G))=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}}\tau(F,G)=\underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\ \tau(\tau(F,G),\overset{n}{\ldots},\tau(F,G))$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\ \tau(\tau(F,\overset{n}{\ldots},F),\tau(G,\overset{n}{\ldots},G))=\tau\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\mathcal{T}}}F,\overset{\infty}{\underset{n=1}{\mathcal{T}}}G\right)$$

$$=\tau(g(F),g(G)).$$

c) (f,g) és morfisme mètric: per tot $P,q\in\Omega$

$$(\mathcal{F}^*\circ f\times f)(P,q)=\mathcal{F}^*((P;*),(q;*))=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}}F_{Pq}=g(F_{Pq})=(g\circ\mathcal{F})(P,q).$$

Aleshores resta verificar que $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\tau)$, l'espai extensió, subespai del τ-producte $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega,\mathcal{F}^\tau,\tau\right)$, és precisament τ-convex. Elegits com en el Teorema anterior $\alpha,\gamma,\alpha\neq\gamma$, consideri's el mateix element β, allà definit. Cal verificar que β està τ-entremig de α i γ. En efecte:

$$\tau\,(F^{*}_{\alpha\beta},\ F^{*}_{\beta\gamma}) = \tau\,\Big(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}}\ F_{\pi_i(\alpha)\,\pi_i(\beta)},\ \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}}\ F_{\pi_i(\beta)\,\pi_i(\gamma)}\Big)$$

$$= \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}}\ \tau(F_{\pi_i(\alpha)\pi_i(\beta)},\ F_{\pi_i(\beta)\pi_i(\gamma)})$$

$$= \text{w-lim}\ \{\tau(\varepsilon_o,\ F_{x_1y_1}),\tau\ (\varepsilon_o,F_{x_1y_1},\ \varepsilon_o,\ F_{x_2y_2}),\ldots\ldots,$$

$$\tau\ (\varepsilon_o,F_{x_1y_1},\ F_{x_2y_2},\ldots,F_{x_2iy_2i}),\ \tau(\varepsilon_o,F_{x_1y_1},\ldots,F_{x_2iy_2i},F_{x_1y_1},\varepsilon_o),$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\ \tau\,(F_{\pi_1(\alpha)\pi_1(\gamma)},\ldots,F_{\pi_n(\alpha)\pi_n(\gamma)}) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathcal{T}}}\ F_{\pi_i(\alpha)\pi_i(\gamma)} = F^{*}_{\alpha\gamma}$$

CAPITOL 4

COMPLETACIO D'ESPAIS METRICS GENERALITZATS.

"Mathematical proofe, like diamonds, are hard as well as clear, and will be touched with nothing but strict reasoning".

John Locke.

Per poder rigoritzar els fonaments de la teoria de sèries, Cauchy acceptà com a propietat evident el fet de que "una successió (X_n) de nombres reals és convergent, sí i només sí, $|X_{n+P} - X_n|$ és tan petit com es vulgui, per a n suficienment gran".

Enunciada aquesta propietat de forma explícita per Bolzano, Fré--chet introduí la noció d'espai mètric complet i Hausdorff establí el teorema general de completació en el seu clàssic "Grundzüge der Mengenlehre".

La completació d'un espai uniforme mitjançant l'us de "filtres de Cauchy" usa la completació mètrica i aquesta, al igual que en el cas d'àlgebres de Boole normades (Blumenthal, [12]), és possible en quant és coneguda la completitud de $\mathbb{R}$, fet que es deriva de la prò-pia construcció real.

Sherwood en [44, 45] ha construït el completat d'un espai mètric probabilístic utilitzant la mètrica de Paul Lévy modificada per Sibley (47) que, a la vegada de metritzar la convergència debil de les funcions de distribució Δ^+, n'assegura la completació. El procés se--qüencial de completitud donat per Everett [17,18] en grups de Riesz valorats en la seva part positiva per la mètrica natural, la generalit zació amb l'us de xarxes feta per Papangelou (40) i la contribució de

Batle (6) (prescindint d'estructura sobre l'espai de partida) són altres construccions que usen, en un sentit o altri, un criteri de completitud del semigrup de valoració de les mètriques considera-des.

En el cas general d'un espai mètric (Ω,ξ,m) cal considerar les següents definicions:

a) Una successió $(x_n) \subset \Omega$ és o-m-fonamental, sí i només sí, existeix $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ en S tal que, per cada n és

$$m(x_{n+P}, x_n) \leqslant \delta_n, \quad \forall P \in N .$$

b) Ω és o-m-complet si tota successió o-m-fonamental és o-m-convergent a un punt de Ω .

En (6) Batle ha estudiat la relació d'aquestes definicions amb els "Criteris de Cauchy" habituals.

Fixat un morfisme φ d'ordre, seqüencialment continu en el neutre, $\varphi : S \to \bar{S}$ i un $(\bar{\Omega},\bar{\xi},\bar{m})$ direm que:

a') Una successió $(x_n) \subset \bar{\Omega}$ és S-fonamental si existeix una $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ en S tal que, per cada n, és

$$\bar{m}(x_{n+P}, x_n) \leqslant \varphi(\delta_n), \quad \forall p \in N .$$

b') $\bar{\Omega}$ és S-complet si tota successió S-fonamental és convergent a un element de $\bar{\Omega}$.

En particular si $\varphi = I_S$ recuperem les definicions (a), (b) anteriorment explicitades.

En l'apartat 4.1. d'aquest capítol s'estableix el teorema de la S-completació d'un espai mètric generalitzat al construir una exten sió de l'espai donat, extensió que sota precises condicions del semigrup de valoració de partida, gaudeix de propietats de completitud. En § 4.2. s'observen i analitzen els casos ja comentats de Fréchet, Cauchy, Everett, Batle i Sherwood com a particulars del teorema donat en § 4.1.

§ 4. 1.

Teorema de la S-completació d'un espai mètric generalitzat.

Teorema 4.1.1. (Teorema de la S-completació).

Si $(\Omega,\mathfrak{S},m)$ és un espai mètric generalitzat tal que $\mathfrak{S}$ és un s.o. no discret, normal i seqüencialment continu en el neutre, aleshores existeix un espai mètric generalitzat $(\overline{\Omega},\overline{\mathfrak{S}},\overline{m})$ tal que:

a) Existeix un monomorfisme mètric $(i,\varphi):(\Omega,\mathfrak{S},m)\to(\overline{\Omega},\overline{\mathfrak{S}},\overline{m})$.

b) $i(\Omega)$ és o-$\overline{m}$ dens en $\overline{\Omega}$.

c) Si $\mathfrak{S}$ verifica a més la condició diagonal d'Everett, $\overline{\Omega}$ és S-complet.

Demostració. La demostració s'ha dividit en els següents apartats:

(i) Construcció de $\overline{S}$.

(ii) Propietats bàsiques de $\overline{S}$.

(iii) Construcció de $\overline{\Omega}$ i $\overline{m}$.

(iv) Definició del monomorfisme mètric (i,φ).

(v) Densitat d'$i(\Omega)$ en $\overline{\Omega}$.

(vi) S-completitud de $\overline{\Omega}$ (en la hipòtesi c).

(i) Construcció de $\overline{S}$.

Es considera en $S^{\mathbb{N}}$ la relació:

$(a_n)\sim(b_n) \Leftrightarrow$ Existeix $\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$ tal que $a_n\leq b_n+\gamma_n$ i $b_n\leq a_n+\gamma_n$, per tot n.

Es tracta d'una relació d'equivalència al gaudir de les propietats:

- Reflexiva : $(a_n) \sim (a_n)$ ja que per qualsevol $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ és $a_n \leq a_n + \gamma_n, \forall n \in N$, en virtut de l'isotonia.
- Simètrica : $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (b_n) \sim (a_n)$, per la pròpia definició de $\sim$.
- Transitiva: Si $(a_n) \sim (b_n)$ i $(b_n) \sim (c_n)$, existiran dues successions $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ i $\delta_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ tals que per tot n :

$$a_n \leq b_n + \gamma_n \quad , \quad b_n \leq a_n + \gamma_n ,$$

$$b_n \leq c_n + \delta_n \quad , \quad c_n \leq b_n + \delta_n ;$$

per la isotonia resulta,

$$a_n \leq b_n + \gamma_n \leq c_n + \gamma_n + \delta_n \quad , \quad c_n \leq b_n + \delta_n \leq a_n + \gamma_n + \delta_n ,$$

d'on essent $(\gamma_n + \delta_n) \overset{\circ}{\downarrow} e$, es conclou que $(a_n) \sim (c_n)$.

Sigui $\bar{S} = \dfrac{S^N}{\sim}$ el conjunt de classes de successions de S per aquesta relació. Escriurem $\overline{(a_n)} \in \bar{S}$ la classe de (a_n) i $(\bar{a}) = \overline{(a,a,\ldots,a,\ldots)}$. Noti's que si $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ en S és :

$$\overline{(\gamma_n)} = \overline{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots)} = \overline{(e)},$$

al valdre per tot n: $\gamma_n \leq e + \gamma_n$ i $e \leq \gamma_n + \gamma_n$; és a dir, totes les successions de S decreixents al neutre són d'una mateixa classe en $\bar{S}$, que és precisament la determinada per el neutre de S.

(ii) Propietats bàsiques de $\bar{S}$.

Propietat 1. Si $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$, és $\overline{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_n, \gamma_n, \ldots)} = \overline{(\gamma_n, \gamma_n, \ldots, \gamma_n, \ldots)}, \forall_n \in N$. En efecte, si $1 \leq i \leq n-1$ és $\gamma_i \leq \gamma_n + \gamma_i$, $\gamma_n \leq \gamma_i + \gamma_i$ i si $i \geq n$, $\gamma_n \leq \gamma_n + \gamma_n$.

<u>Propietat 2.</u> $\bar{S}$ és semigrup commutatiu amb neutre.

Es defineix $+ : \bar{S} \times \bar{S} \to \bar{S}$, $+(\overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}) = \overline{(a_n + b_n)}$. Es tracta d'una operació car si $\overline{(a_n)} = \overline{(a'_n)}$ i $\overline{(b_n)} = \overline{(b'_n)}$ existeixen $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ i $\delta_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ tals que $a_n \leqslant a'_n + \gamma_n$, $a'_n \leqslant a_n + \gamma_n$, $b_n \leqslant b'_n + \delta_n$, $b'_n \leqslant b_n + \delta_n$, per tot $n \in N$; essent $(\gamma_n + \delta_n) \overset{\circ}{\downarrow} e$ resulta

$$a_n + b_n \leqslant a'_n + b'_n + \gamma_n + \delta_n,$$

$$a'_n + b'_n \leqslant a_n + b_n + \gamma_n + \delta_n,$$

d'on $\overline{(a_n + b_n)} = \overline{(a'_n + b'_n)}$.

Trivialmente $(\bar{S}, +, (\bar{e}))$ és semigrup commutatiu amb neutre $(\bar{e})$. Noti's que en aquesta estructura algebraica s'identifiquen les successions que "difereixen" en una successió decreixent al neutre:

$$\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e \Rightarrow \overline{(a_n + \gamma_n)} = \overline{(a_n)}.$$

<u>Propietat 3.</u> $\bar{S}$ és un ordenat parcial amb mínim $(\bar{e})$.

En efecte, es defineix la relació:

$\overline{(a_n)} \lesssim \overline{(b_n)} \iff$ Existeix $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ tal que $\gamma_n \leqslant b_n$, $a_n \leqslant b_n + \gamma_n$, per tot $n \in N$.

La definició es correcte ja que si $\overline{(a_n)} = \overline{(a'_n)}$, $\overline{(b_n)} = \overline{(b'_n)}$ i $\overline{(a_n)} \lesssim \overline{(b_n)}$, existiràn $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$, $\delta_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ i $\lambda_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ tals que les següents desigualtats seran vàlides per qualsevol $n \in N$:

$$a_n \leqslant a'_n + \gamma_n \quad , \quad a'_n \leqslant a_n + \gamma_n,$$

$$b_n \leqslant b'_n + \delta_n \quad , \quad b'_n \leqslant b_n + \delta_n,$$

$$\lambda_n \leqslant b_n \quad , \quad a_n \leqslant b_n + \lambda_n;$$

Per simple combinació s'obté:

$$a'_n \leq a_n+\gamma_n \leq b_n+\lambda_n+\gamma_n \leq b'_n+\delta_n+\gamma_n+\lambda_n,$$

$$\lambda_n \leq b_n \leq b'_n+\delta_n \leq b'_n+\delta_n+\gamma_n,$$

d'on, essent $\gamma_n+\delta_n \overset{\circ}{\dotplus} e$, resulta $\overline{(a'_n)} \preccurlyeq \overline{(b'_n+\delta_n+\gamma_n)} = \overline{(b'_n)}$.

$\preccurlyeq$ és una relació d'ordre al complir les propietats:

- Reflexiva: $\overline{(a_n)} \preccurlyeq \overline{(a_n)}$ ja que prenent $\gamma_n = e \overset{\circ}{\dotplus} e$ és $a_n \leq a_n + e j e \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Antisimètrica: Si $\overline{(a_n)} \preccurlyeq \overline{(b_n)}$ i $\overline{(b_n)} \preccurlyeq \overline{(a_n)}$ existiran $\lambda_n \overset{\circ}{\dotplus} e$ i $\varepsilon_n \overset{\circ}{\dotplus} e$ tals que per tot n:

  $$\lambda_n \leq b_n, \quad a_n \leq b_n+\lambda_n, \quad \varepsilon_n \leq a_n, \quad b_n \leq a_n+\varepsilon_n,$$

  és dir $a_n \leq b_n+\lambda_n+\varepsilon_n$ i $b_n \leq a_n+\lambda_n+\varepsilon_n$,

  d'on $\overline{(a_n)} = \overline{(b_n)}$ per esser $(\lambda_n+\varepsilon_n) \overset{\circ}{\dotplus} e$.

- Transitiva: Si $\overline{(a_n)} \preccurlyeq \overline{(b_n)}$ i $\overline{(b_n)} \preccurlyeq \overline{(c_n)}$ existeixen $\lambda_n \overset{\circ}{\dotplus} e$, $\varepsilon_n \overset{\circ}{\dotplus} e$

  tals que

  $$\lambda_n \leq b_n \quad , \quad a_n \leq b_n+\lambda_n,$$

  $$\varepsilon_n \leq c_n \quad , \quad b_n \leq c_n+\varepsilon_n,$$

  i d'aquí

  $$a_n \leq b_n+\lambda_n \leq c_n+\lambda_n+\varepsilon_n,$$

  $$\varepsilon_n \leq c_n \leq c_n+\lambda_n,$$

  $$\overline{(a_n)} \preccurlyeq \overline{(c_n+\lambda_n)} = \overline{(c_n)}.$$

Obviament $(\bar{e}) \in \bar{S}$ és l'element mínim en $(\bar{S}, \preccurlyeq)$.

<u>Propietat 4.</u> $\bar{\mathcal{S}} = (\bar{S}, +, \preccurlyeq, (\bar{e}))$ és un semigrup ordenat no discret.

En efecte, si $\overline{(a_n)} \preccurlyeq \overline{(b_n)}$ existeix $\lambda_n \overset{o}{\downarrow} e$, tal que $\lambda_n \leqslant b_n$ i $a_n \leqslant b_n + \lambda_n$, per tot $n \in \mathbb{N}$. Per qualsevol $\overline{(c_n)}$ serà cert $\lambda_n \leqslant b_n \leqslant b_n + c_n$ i $a_n + c_n \leqslant b_n + c_n + \lambda_n$, i en definitiva

$$\overline{(a_n)} + \overline{(c_n)} = \overline{(a_n + c_n)} \preccurlyeq \overline{(b_n + c_n)} = \overline{(b_n)} + \overline{(c_n)}.$$

$\bar{S}$ és no discret per contenir, al menys, tantes successions decreixents a $(\bar{e})$ com successions decreixents a e té S. Per complir-ho consideri's $\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$ en S i $\gamma_n^* = \overline{(\gamma_n, \gamma_n, \ldots, \gamma_n, \ldots)}$ en $\bar{S}$, per tot $n \in \mathbb{N}$. (γ_n^*) és decreixent en $(\bar{S}, \preccurlyeq, (\bar{e}))$ ja que

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{n+1} \leqslant \gamma_n + \gamma_n \\ \gamma_n \leqslant \gamma_n \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_{n+1}^* = \overline{(\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{n+1}, \ldots)} \preccurlyeq \overline{(\gamma_n, \ldots, \gamma_n, \ldots)} = \gamma_n^*.$$ A més

$\gamma_n^* \overset{o}{\downarrow} (\bar{e})$ ja que si $\overline{(b_k)} \preccurlyeq \gamma_n^*$, $\forall_n \in \mathbb{N}$, fixat qualsevol $k = k_o$, per cada $n \in \mathbb{N}$ existeix $\lambda_\ell^n \underset{\ell \to \infty}{\overset{o}{\downarrow}} e$ tal que

$$\lambda_\ell^n < \gamma_n, \; b_{k_o} \leqslant \gamma_n + \lambda_\ell^n \leqslant \gamma_n + \gamma_n,$$

d'on $b_{k_o} = e$ i es segueix $\overline{(b_n)} = \overline{(e)}$.

<u>(iii) Construcció de $\bar{\Omega}$ i $\bar{m}$.</u>

Sigui $O(\Omega) = \{(x_n) \in \Omega^{\mathbb{N}} : (x_n)$ és o-m fonamental$\}$ i $\bar{\Omega} = \frac{O(\Omega)}{\sim}$, el conjunt de classes de successions o-m fonamentals obtingut a partir de $O(\Omega)$ per la relació d'equivalència:

$\forall (x_n), (y_n) \in O(\Omega)$, $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow m(x_n, y_n) \overset{\circ}{\rightarrow} e$.

Definint $\bar{m}: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \bar{S}$, $\bar{m}\ (\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) = \overline{(m(x_n, y_n))}$, es tracta de comprobar que $\bar{m}$ és una mètrica separadora.

a) <u>$\bar{m}$ està ben definida:</u> Si $\overline{(x_n)} = \overline{(z_n)}$, $\overline{(y_n)} = \overline{(t_n)}$ serà $m(x_n, z_n) \overset{\circ}{\rightarrow} e$, $m(y_n, t_n) \overset{\circ}{\rightarrow} e$, o equivalentment, existiran $\gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ i $\delta_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ tals que $m(x_n, z_n) \leq \gamma_n$ i $m(y_n, t_n) \leq \delta_n$, $\forall n \in N$.

Aleshores

$m(x_n, y_n) \leq m(x_n, z_n) + m(z_n, t_n) + m(t_n, y_n) \leq m(z_n, t_n) + \gamma_n + \delta_n$,

$m(z_n, t_n) \leq m(z_n, x_n) + m(x_n, y_n) + m(y_n, t_n) \leq m(x_n, y_n) + \gamma_n + \delta_n$,

i es segueix que $\overline{(m(x_n, y_n))} = \overline{(m(z_n, t_n))}$.

b) <u>$\bar{m}$ és separadora:</u>

$\bar{m}\ (\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) = (\bar{e}) \Leftrightarrow \overline{(m(x_n, y_n))} = (\bar{e}) \Leftrightarrow (\exists\ \gamma_n \overset{\circ}{\downarrow} e /\ m(x_n, y_n) \leq e + \gamma_n = \gamma_n$ i $e \leq m(x_n, y_n) + \gamma_n$, $\forall n \in N \Leftrightarrow m(x_n, y_n) \overset{\circ}{\rightarrow} e \Leftrightarrow \overline{(x_n)} = \overline{(y_n)}$.

c) <u>$\bar{m}$ és simètrica:</u> Per ser-ho m.

d) <u>$\bar{m}$ verifica la desigualtat triangular:</u>

$\bar{m}\ (\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) = \overline{(m(x_n, y_n))} \leq \overline{(m(x_n, z_n) + m(z_n, y_n))} = \overline{(m(x_n, z_n))} + \overline{(m(z_n, y_n))} =$

$= \bar{m}\ (\overline{(x_n)}, \overline{(z_n)}) + \bar{m}\ (\overline{(z_n)}, \overline{(y_n)})$.

En definitiva, queda construït l'espai mètric.

(iv) Definició del monomorfisme mètric (i, φ).

Siguin $i: \Omega \to \overline{\Omega}$, $\quad \varphi: S \to \bar{S}$.

$\qquad\qquad x \to (\bar{x}) \qquad\qquad a \to (\bar{a})$

Les propietats de la parella (i, φ) són:

a) i injectiva.

$i(x) = i(y) \Leftrightarrow (\bar{x}) = (\bar{y}) \Leftrightarrow m(x,y) \xrightarrow{o} e \Leftrightarrow x = y.$

b) φ injectiva.

$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow (\bar{x}) = (\bar{y}) \Leftrightarrow (\exists \lambda_n \downarrow e)$ tal que $x \leq y + \lambda_n$, $y \leq x + \lambda_n$, $\forall n \in N$, i

essent S normal es $x \leq y$, $y \leq x \Leftrightarrow x = y$.

c) φ morfisme algebraic i d'ordre.

$\varphi(x+y) = (\overline{x+y}) = (\bar{x}) + (\bar{y}) = \varphi(x) + \varphi(y).$

$$x \leq y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq y + e \\ \\ e \leq y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi(x) = (\bar{x}) \leq (\bar{y}) = \varphi(y).$$

d) φ seqüencialment contínua en e.

Si $\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$, $\varphi(\gamma_n) = (\overline{\gamma_n, \ldots, \gamma_n, \ldots}) = \gamma_n^* \downarrow (\bar{e})$ en virtut de la

Propietat 4 establerta en (ii).

e) (i, φ) morfisme mètric.

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{m} & S \\ {\scriptstyle i\times i} \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\bar{m}} & \bar{S} \end{array}$$

és commutatiu, ja que

$$(\varphi \circ m)(x,y) = \varphi(m(x,y)) = \overline{(m(x,y))} = \bar{m}(\overline{(x)}, \overline{(y)}) = \bar{m}(i(x), i(y)) = (\bar{m} \circ i x i)(x,y).$$

Resumint, l'espai $(\Omega, \mathfrak{S}, m)$ s'identifica mitjançant el monomorfisme me-tric (i, φ) amb un subespai metric de $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{m})$:

$$(\Omega, \mathfrak{S}, m) \overset{(i,\varphi)}{\cong} (i(\Omega), \varphi(S), \bar{m}|_{i(\Omega) x i(\Omega)}) \subset (\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{m}).$$

(v) Densitat d'$i(\Omega)$ en $\bar{\Omega}$.

Donat $\alpha = \overline{(x_n)} \in \bar{\Omega}$, per ésser (x_n) una successió o-m fonamental, existeix $\delta_n \downarrow e$ tal que, per cada n, és $m(x_n, x_{n+P}) \leqslant \delta_n$, $\forall P \in N$.

Considerant la successió $\alpha_n = i(x_n) \in i(\Omega)$, resulta

$$\bar{m}(\alpha_n, \alpha) = \overline{(m(x_1,x_n), m(x_2,x_n), \ldots, m(x_{n-1},x_n), e, m(x_{n+1},x_n), \ldots)}$$

$$\preccurlyeq \overline{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1},\delta_n,\delta_n,\delta_n,\ldots)} = \overline{(\delta_n,\delta_n,\ldots,\delta_n,\ldots)} = \varphi(\delta_n) \overset{\circ}{\downarrow} (\bar{e})$$

i per tant $\alpha_n \overset{o-\bar{m}}{\to} \alpha$, és a dir, $i(\Omega)^* = \bar{\Omega}$.

(vi) S-completitud de Ω (en la hipòtesi c).

Sia $\alpha_\ell = \overline{(x_n^\ell)}_n$ una successió S-o-m fonamental en $\bar{\Omega}$, és a dir, existeix $\tau_\ell \overset{\circ}{\downarrow} e$ en S tal que

$$\bar{m}(\alpha_\ell, \alpha_{\ell+P}) = \overline{(m(x_n^\ell, x_n^{\ell+P}))}_n \preccurlyeq \varphi(\tau_\ell) \overset{\circ}{\downarrow} (\bar{e}).$$

Per ser $\alpha_\ell \in \bar{\Omega}$, $\forall \ell \in N$, existirà una família $(\delta_k^\ell)_{(\ell,k) \in N x N}$ de successions ($\delta_k^\ell \overset{\circ}{\downarrow} e$, si $k \to \infty$) tal que per cada ℓ serà

$$m(x_k^\ell, x_{k+P}^\ell) \leqslant \delta_k^\ell, \quad \forall P \in N.$$

En virtut de (iv) és

$$i(x_n^\ell) \xrightarrow[n \to\infty]{o-\bar{m}} \alpha_\ell \quad , \quad i(x_n^{\ell+P}) \xrightarrow[n\to\infty]{o-\bar{m}} \alpha_{\ell+P},$$

i per tant

$$\bar{m}(\alpha_\ell, i(x_n^\ell)) \leqslant \varphi(\delta_n^\ell) \quad , \quad \bar{m}(\alpha_{\ell+P}, i(x_n^{\ell+P})) \leqslant \varphi(\delta_n^{\ell+P}).$$

Per la condició diagonal d'Everett postulada en aquest apartat, la família $(\delta_n^\ell)_{(\ell,n)\in N\times N}$ admetrà $\delta_{n_\ell}^\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{o} e$, és a dir, $\delta_{n_\ell}^\ell \leqslant \mu_\ell \overset{\circ}{\downarrow} e$.

Considerant $\alpha = \overline{(x_{n_\ell}^\ell)_\ell} = \overline{(x_{n_1}^1, x_{n_2}^2, \ldots, x_{n_\ell}^\ell, \ldots)}$,

cal verificar que

(vi$_1$) $\alpha \in \bar{\Omega}$,

(vi$_2$) $\alpha_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{o-\bar{m}} \alpha$.

<u>Demostració (vi$_1$)</u>

$$\varphi(m(x_{n_k}^k, x_{n_{k+P}}^{k+P})) = \bar{m}(i(x_{n_k}^k), i(x_{n_{k+P}}^{k+P}))$$

$$\leqslant \bar{m}(i(x_{n_k}^k), \alpha_k) + \bar{m}(\alpha_k, \alpha_{k+P}) + \bar{m}(\alpha_{k+P}, i(x_{n_{k+P}}^{k+P}))$$

$$\leqslant \varphi(\delta_{n_k}^k) + \varphi(\tau_k) + \varphi(\delta_{n_{k+P}}^{k+P}) = \varphi(\delta_{n_k}^k + \tau_k + \delta_{n_{k+P}}^{k+P}).$$

Per la creixença de φ (iv, propietat c) és

$$m(x_{n_k}^k, x_{n_{k+P}}^{k+P}) \leqslant \delta_{n_k}^k + \tau_k + \delta_{n_{k+P}}^{k+P} \leqslant \delta_{n_k}^k + \tau_k + \delta_{n_k}^k = \beta_k \overset{\circ}{\downarrow} e,$$

i $\alpha \in \bar{\Omega}$.

<u>Demostració (vi$_2$)</u>

Seguint la notació introduïda en (vi$_1$) i l'apartat (v) és

$\bar{m}(\alpha_\ell, \alpha) \leq \bar{m}(\alpha_\ell, i(x^\ell_{n_\ell})) + \bar{m}(i(x^\ell_{n_\ell}), \alpha)\alpha$

$\alpha \leq \varphi(\delta^\ell_{n_\ell}) + \varphi(\beta_\ell) = \varphi(\delta^\ell_{n_\ell} + \beta_\ell) \overset{\circ}{\downarrow} (\bar{e})$, d'on $\alpha_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{o-\bar{m}} \alpha$.

§ 4. 2.

Aplicació de la S-completació als espais mètrics generalitzats usuals.

Els següents exemples posen de manifest que en la construcció realitzada en §4.1., l'espai $\overline{\Omega}$ coincideix sempre amb els espais complets usuals i que $\overline{\mathcal{S}}$ és un semigrup "excessivament" ampli que conté, en cada cas, el semigrup mètricament complet habitual on es valora $\overline{m}$.

Cas 1. G^+-completació d'un espai mètric de Riesz $(\Omega,\mathcal{G}^+,m)$ valorat en la part positiva d'un grup de Riesz no discret complet.

G^+ és seqüencialment contínu en o i és normal, ja que si $x \leq y + \delta_n$ i $\delta_n \overset{o}{\downarrow} o$, prenent límits quan $n\to\infty$, és $x\leq y$.

Per construcció $\overline{G^+} = \dfrac{(G^+)^N}{\sim}$, on $\sim$ ve donada per

$$(a_n)\sim (b_n) \Leftrightarrow |a_n - b_n| \overset{o}{\to} o,$$

és a dir, s'identifiquen les successions que "s'acosten" entre elles i en particular les convergents a un mateix límit.

$O(G^+) = \{(a_n) \in G^+ |\ (a_n)$ és O-n fonamental $\} \subset (G^+)^N$, és un semigrup ordenat amb neutre i mínim (O).

Proposició 4.2.1. Si $\mathcal{G} = (G,+,\leq)$ és un grup de Riesz o-n complet, $(\overline{O(G^+)},+,\leq)$ és isomorf mètricament i com semigrup ordenat a $(G^+,+,\leq)$.

En efecte, com per cada $\overline{(a_n)} \in \overline{O(G^+)}$ existeix un únic límit a, l'aplicació:

$$\Psi : \overline{O(G^+)} \to G^+$$
$$\overline{(a_n)} \to a = \text{o-n}\lim_{n\to\infty} a_n$$

verifica les propietats requerides:

a) <u>Ψ és injectiva.</u>

$$\Psi(\overline{(a_n)}) = \Psi(\overline{(b_n)}) \Rightarrow \text{o-n}\lim_{n\to\infty} a_n = \text{o-n}\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\Rightarrow \text{o-n}\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = o \Rightarrow \overline{(a_n)} = \overline{(b_n)}.$$

b) <u>Ψ és exhaustiva.</u>

$$\Psi(\overline{(a)}) = a.$$

c) <u>Ψ és morfisme algebraic.</u>

$$\Psi(\overline{(a_n)} + \overline{(b_n)}) = \Psi(\overline{(a_n + b_n)}) = \text{o-n}\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) =$$

$$= \text{o-n}\lim_{n\to\infty} a_n + \text{o-n}\lim_{n\to\infty} b_n = \Psi(\overline{(a_n)}) + \Psi(\overline{(b_n)}).$$

d) <u>Ψ és creixent.</u>

$$\overline{(a_n)} \preccurlyeq \overline{(b_n)} \Leftrightarrow (\exists \gamma_n \overset{o}{\downarrow} o) \text{ tal que } a_n \leqslant b_n + \gamma_n$$

$$\Rightarrow \text{o-n}\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \text{o-n}\lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \Psi(\overline{(a_n)}) \leqslant \Psi(\overline{(b_n)}).\ \Psi(\overline{(o)}) = o.$$

e) <u>(Ψ, Ψ) és morfisme mètric.</u>

El diagrama següent és commutatiu.

$$\begin{array}{ccc} \overline{O(G^+)} \times \overline{O(G^+)} & \xrightarrow{\|\ \|} & \overline{O(G^+)} \\ \Psi \times \Psi \Big\downarrow & & \Big\downarrow \Psi \\ G^+ \times G^+ & \xrightarrow{|\ |} & G^+ \end{array}$$

$$(\Psi \circ \|\ \|)\,(\overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}) = \Psi\,(\overline{(|a_n - b_n|)}) = o\text{-}n \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| =$$

$$= \left| o\text{-}n \lim_{n\to\infty} a_n - o\text{-}n \lim_{n\to\infty} b_n \right| = |\Psi(\overline{(a_n)}) - \Psi(\overline{(b_n)})| =$$

$$= (|\ | \circ \Psi \times \Psi)\,(\overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}).$$

Noti's que, en general, l'isomorfisme mètric-algebraic anterior no és reticular.

Per altra banda, $\overline{\Omega} = \dfrac{O(\Omega)}{\sim} = \dfrac{\{(x_n) \in \Omega^N \mid (x_n) \text{ és o-m fonamental}\}}{\sim}$ admet la mètrica $\overline{m} : \Omega \times \Omega \to G^+ \simeq \overline{O(G^+)} \subset \overline{G^+}$, definida per $\overline{m}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) =$

$= (\overline{m(x_n, y_n)})$, $((m(x_n, y_n))$ és o-n fonamental d'acord amb la demostració donada en (6)).

Així el G^+-complet $(\overline{\Omega}, \overline{O(G^+)}, \overline{m})$ coincideix amb el completat construit per Batle (6) per aquest cas concret i amb el resultat d'Everett (17) quan $\Omega = G$ és grup de Riesz.

En particular si $G^+ = R^+$, resulta que la R^+-completació d'un espai mètric ordinari $(\Omega, \mathbb{R}^+, d)$ és el de Hausdorff clàssic.

Cas 2. $\mathbb{Q}^+$-completació de l'espai mètric $(\mathbb{Q},\mathbb{Q}^+,|\ |)$

Resulta trivial que $\overline{\mathbb{Q}} = \frac{O(\mathbb{Q})}{\sim} = \mathbb{R}$, $\overline{O(\mathbb{Q}^+)} \simeq \mathbb{R}^+$ i $\bar{m} = |\ |$ en virtut de la construcció de $\mathbb{R}$,per successions de Cauchy,a partir de $\mathbb{Q}$.

Així doncs el $\mathbb{Q}^+$-completat de $(\mathbb{Q},\mathbb{Q}^+,|\ |)$ és $(\mathbb{R},\mathbb{R}^+,|\ |)$.

Cas 3. Δ^+-completació d'un espai mètric probabilístic $(\Omega,\Delta_\tau^+,\mathcal{F})$ amb τ contínua.

La Δ^+-completació de $(\Omega,\Delta^+_\tau,\mathcal{F})$ és $(\overline{\Omega},\overline{\Delta_\tau^+},\overline{\mathcal{F}})$. Per construcció $\overline{\Omega} = \frac{O(\Omega)}{\sim} = \frac{\{(P_n)\in\Omega^N:\ (P_n) \text{ es o-}\mathcal{F}\text{ fonamental}\}}{\sim}$, on $\sim$ és definida per: $\forall (P_n),(q_n)\in O(\Omega)$, $(P_n)\sim(q_n) \Leftrightarrow F_{P_nq_n} \overset{o}{\to} \varepsilon_o$; resulta així que $\overline{\Omega} = \Omega^*$,

és a dir, $\overline{\Omega}$ coincideix amb el completat construït per Sherwood ([44,45]). En virtut d'ésser $(\Delta^+,\mathcal{L})$ complet respecte de la mètrica de Lévy modificada per Sibley, resulta que el completat de Sherwood és $(\Omega^*,\Delta_\tau^+,\mathcal{F}^*)$, on $\mathcal{F}^*:\Omega^*\times\Omega^*\to\Delta^+$ es $\mathcal{F}^*_{\overline{(P_n)}\,\overline{(q_n)}} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} F_{P_nq_n} = \mathcal{L}\text{-}\lim_{n\to\infty} F_{P_nq_n}$, i així $(\overline{\Omega},\overline{\Delta_\tau^+},\overline{\mathcal{F}})$ conté monomorficament ($(I_{d_{\overline{\Omega}}},\varphi)$) a l'espai completació $(\Omega^*,\Delta_\tau^+,\mathcal{F}^*)$.

BIBLIOGRAFIA

(1) Alsina, C. "Vocabulari Català de Matemàtica" (amb la col.laboració d'Eduard Bonet). Quaderns de Matemàtica Nº 1. Publ. Rosa Sensat. Barcelona, 1977.

(2) Alsina, C.- Trillas, E. "Introducción a los espacios métricos generalizados" (per aparèixer) Publ. Fundación Juan March. Serie Universitaria.

(3) Alsina, C.- Trillas, E. "Un teorema de metrización de la topologia $T_{\mathcal{F}}$ de un espacio métrico probabilístico de Menger". Actas RAME. Málaga (1976).

(4) Alsina, C.- Trillas, E. "Sobre las t-normas contínuas por la izquierda". Actas R.A.M.E. Málaga (1976).

(5) Alsina, C.- Trillas, E. "On natural metrics". Stochastika Nº 3. (per aparèixer).

(6) Batle, N. "Contribución a un estudio básico de los espacios métricos probabilísticos". Tesis. Universidad Barcelona (1973).

(7) Beals, R. i altri. "Foundations of multidimensional scattering". Psychological Review Vol.75 N2 (1968) 127-142.

(8) Benson, R.V. "Euclidean Geometry and Convexity" Mac Graw Hill Book. Cia. (1966).

(9) Billingsley, P. "Convergence of Probability Measures". John Wiley & Sons. (1968).

(10) Birkhoff, G. "Lattice Theory". Amer. Math. Soc. (1948).

(11) Blumenthal, L.M. "Theory and applications of distance geometry". The Clarendon Press, Oxford (1953).

(12) Blumenthal, L.M.- Menger, K. "Studies in Geometry". Freeman (1971).

(13) Bodiou, G. "Théorie dialéctique des Probabilités". Gauthiers-Villars.

(14) Egbert, R.J. "Cartesian products of statistical metric spaces". Notices Amer.Math. Soc. 10 (1963) 266-267.

(15) Egbert, R.J. "Products and quotients of probabilistic metric spaces". Pacific J. Math. Vol. 24 Nº 3 (1968) 437-455.

(16) Eisenberg, M. "Topology". Holt, Rinehart and Winston, Inc.(1974).

(17) Everett, C.J. "Sequence completion of lattice moduls". Duke Math. J. (1944).

(18) Everett, C.J. "On ordered groups". Trans. Americ. Math.Soc. 57 (1945).

(19) Fréchet, M. "Pages choisies d'analyse générale" Gauthier Villars, Paris (1953).

(20) Fréchet, M. "Les espaces abstraits". Gauthier Villars. Paris (1929).

(21) Garcia, M. - Margalef, J. & otros. "Topologia" Ed. Alhambra, Ma-- drid (1975).

(22) Grané, J. "Sobre las isometrias de los grupos y anillos reticulados". Tesis. Pub. Univ. Barcelona (1976).

(23) Istrăţescu, V.- Văduva, I. "Products of statistical metric spaces". Acad. R.P. Romine Stud. Cerc. Math. 12. (1961) 567-574.

(24) Kappos, R. "Generalized stochastic integral". Ed. Centro Nat. Rech. Scient. (1970).

(25) Kelley, G. "General Topology" Van Nostrand (1955).

(26) Kingman, J.F.C. "Metrics for Wald spaces" J. London Math. foc. 39 (1964) 129-130.

(27) Lang, S. "Algebra" Add. Wesley (1970).

(28) Mamuzič, A.P. "Introduction to general topology". P. Noordhoff, The Netherlands (1963).

(29) Martin, J. "Contribución al estudio de proximidades" Tesis. Rev. Stochastica Nº 2, Barcelona (1976) 35-39.

(30) Menger, K. "Statistical metrics". Proc. Nac. Acad.Sci. U.S.A. 28 (1942), 535-537.

(31) Menger, K. "Mathematical implications of Mach's ideas: Positivistic Geometry". Symposium Com. 50th an. E. Mach's death (1966).

(32) Menger, K. "Topology without points". Rice Inst. pamphlet Vol. XXVII J. (1940) Nº 1.

(33) Moynihan, R. "Infinite τ_T products of probability distribution functions". (per aparèixer).

(34) Moynihan, R.- Schweizer, B. "Betweenness relations in probabilistic metric spaces". (per aparèixer).

(35) Onicescu, O. "Nombres et systemes alĕatoires". Ed. Acad. R.P. Ronmaine, Bucarest (Ed. Tyrolles Prim) (1964).

(36) Pons, M. "Topologias en espacios mĕtricos de Riesz", Tesina. Univ. Barcelona, 1976.

(37) Rhodes, F. "Convexity in Wald's statistical metric spaces". J. London Math. Soc. 39 (1964) 117-128.

(38) Schweizer, B. "Multiplications on the spaces of probability distribution functions" Aeq. Math. Vol. 12 f 2/3 (1975) 151-183.

(39) Schweizer, B. "Probabilistic metric spaces". The first 25 years". The New York Statistician 19 (1967) 3-6.

(40) Schweizer, B - Sklar, A. "Statistical metric spaces" Pacific J. Math., 10 (1960) 313-334.

(41) Schweizer, B.- Sklar, A. - Thorp. E. "The metrization of statistical metric spaces" Pacific. J. Math. 10 (1960)673-675.

(42) Schweizer, B.- Frank, J. "On the duality of generalized infimal and supremal convolution" (per aparèixer).

(43) Šerstnev, A.N. "Obra completa traduida del rus a l'anglès". Univ. Massachusetts (1976).

(44) Sherwood, H, "On the completion of probabilistic metric spaces". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.Geb. 6, (1966) 62-64.

(45) Sherwood, H. "Complete probabilistic metric spaces". Z. Wahrscheinlechkeistheorie Verw. Geb. 20 (1971) 117-128.

(46) Sherwood, H. "Betweenness in probabilistic metric spaces" Rev. Romn. Math. Pures et appl. TXV Nº 7 (1970) 1061-1068.

(47) Sibley, D.A. "A metric for weak convergence of distribution functions". Rocky Mountain Jour. Math. V 1 Nº 3 (1971) 427-430.

(48) Tardiff, R. "Topologies in generalized metric spaces" (per apareixer).

(49) Trillas, E. "Sobre distancias estadísticas". Tesis. Pub. Univ. Barcelona (1972).

(50) Trillas, E. "Sobre los semigrupos de Riesz con neutro". Actas RAME (C.S.I.C.) (1965).

(51) Trillas, E. "Sobre el producto de métricos de Riesz". Actas RAME (C.S.I.C.) (1974).

(52) Trillas, E. "Morfismos entre espacios métricos de Riesz y métricos aleatorios". Actas RAME. Murcia (1969).

(53) Trillas, E. "Intent d'aproximació a un concepte d'estructura mètrica" en "Una lleu sorra" Ed. 62. Barcelona (1975).

(54) Tucker, H.G. "A graduate course in probability" Academic Press (1967

(55) Vila, A. "Contribución al estudio de los retículos S-valorados. Tesis. Pub. Univ. Barcelona (1974).

(56) Wald, A. "On a statistical generalization of metric spaces". Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 29 (1943) 196-197.

(57) Willard, S. "General Topology" Add. Wesley (1970).

(58) Xavier, A.F.S. "On the product of probabilistic metric spaces". Universidad Federal Do Ceare, Instituto De Mathematica (1965).

= = = = = =