

## Capítulo 2:

# ESTADO DEL ARTE DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN ESTRUCTURAS

A lo largo de este capítulo se exponen brevemente las distintas metodologías que existen para calcular el análisis de sensibilidad en una estructura desde un punto de vista general. Las expresiones y conceptos que aquí aparecen están directamente relacionadas con el análisis elástico lineal de la estructura. Solamente al final del mismo se ofrece una breve panorámica de su aplicación en otros problemas tipo. Debe destacarse, que su aplicación específica al problema no lineal del material, se desarrollará en el próximo capítulo.

### 2.1 GENERALIDADES

En el mundo competitivo donde nos encontramos inmersos, es frecuente exigir al profesional de la ingeniería que sea capaz de encontrar *la mejor* solución a un problema planteado. Esto le exige tener que escoger un diseño particular frente al amplio abanico de soluciones posibles. El concepto de *mejor*, suele ir asociado a la capacidad de definir una forma estructural, unos materiales, unas secciones, etc. con un comportamiento óptimo. En estas circunstancias, el diseñador entenderá por óptima aquella solución que hace extrema una cierta función objetivo, por ejemplo: es deseable que el peso total de la estructura sea mínimo o que el coste de la construcción también cumpla esa característica.

En concreto, sin entrar en excesivos detalles, y siguiendo la formulación estándar de Klein que aparece en Navarrina (1987) [N1], se puede definir el problema de optimización en forma matemática de la manera siguiente:

- Minimizar, o maximizar, una función  $F$ ; por ejemplo, el peso de toda la estructura que depende de las variables de diseño  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , donde  $q_i$  podría ser la sección transversal de uno de los elementos estructurales:

$$F(u, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad 2.1.1$$

- Satisfacer una ecuación de estado, que puede ser, a modo de ejemplo, el equilibrio de fuerzas.

$$\psi(u, f) = 0 \quad 2.1.2$$

- Cumplir unas restricciones<sup>1</sup>, como serían los desplazamientos limitados o las tensiones máximas.

$$g_j(u, q_1, q_2, \dots, q_n) \leq 0 \quad \text{donde } j = 1 \div m \quad 2.1.3$$

Es conocido que dicho problema de optimización presenta diferentes estrategias de resolución. De hecho, existe una literatura extensa sobre el tema y el lector interesado encontrará abundante y clara información de los métodos clásicos para resolver la optimización con y sin restricciones en Vanderplaats [V1], sólo con restricciones en Gill *et al.* (1974) [G1] o relacionado en particular con la optimización estructural en Hernández [H1]. Sin embargo, hoy en día también existen planteamientos alternativos relacionados con técnicas evolutivas, tales como los algoritmos genéticos descritos en Goldberg (1985) [G2]. En general, no puede decirse que el problema de optimización esté resuelto de forma global, ya que la cantidad de problemas y situaciones distintas que pueden plantearse justifican sobradamente la existencia de los diversos métodos de resolución.

Es comúnmente aceptado que las técnicas de optimización más poderosas y versátiles se basan en algoritmos de búsqueda<sup>2</sup>. En pocas palabras, los métodos de búsqueda se fundamentan en ir a la caza del valor óptimo siguiendo una cierta dirección que suele estar relacionada, de una u otra manera, con los gradientes de la función objetivo y sus restricciones. Destáquese que, intuitivamente, el cálculo de los gradientes es, en definitiva, el cálculo de una relación incremental, y por lo tanto, si se modifica una variable de diseño y se conoce como afecta el cambio a la función objetivo, se estará en condiciones de decidir cómo debe cambiar dicha variable.

El cálculo de los gradientes o derivadas da lugar al llamado análisis de sensibilidad. Es un hecho indiscutible que el análisis de sensibilidad se desarrolló, en sus inicios, como una herramienta de soporte para resolver problemas de optimización. El interés de la comunidad científica por este tema ha crecido<sup>3</sup> rápidamente, debido en gran manera a que la evaluación de la sensibilidad consume entre el 50%-90% del tiempo total de cálculo de los algoritmos de optimización [H2] [T1].

## **2.2 EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD**

En el apartado anterior se ha planteado el problema de la optimización y se ha visto que aparecía una función objetivo y también unas restricciones. Asimismo, se ha comentado sobre la necesidad de calcular la sensibilidad de dichas entidades con respecto a las variables de diseño. Dicha

---

<sup>1</sup> Destáquese que pueden definirse distintos tipos de restricciones: En desigualdad o en igualdad, pero que siempre es posible pasar de un tipo a otro mediante la adecuada transformación de variables. Para más detalles ver Hernández [H1].

<sup>2</sup> Aquí el hombre muestra la imperfección de su lenguaje, porque el hecho de intentar calcular el óptimo más allá de la particularidad del método ¿no es siempre, en sí mismo, una búsqueda?

derivación implica aplicar la regla de la cadena sobre la expresión matemática correspondiente. A modo de ejemplo, para una de las restricciones de la ecuación 2.1.3 y siendo  $q$  cierta variable de diseño se tendría:

$$\frac{d g_j}{d q} = \frac{\partial g_j}{\partial q} + \frac{\partial g_j}{\partial u} \frac{d u}{d q} \quad 2.2.1$$

En la ecuación 2.2.1 aparecen términos de derivación explícita de la función que son de cálculo inmediato, concretamente:  $\partial g_j / \partial q, \partial g_j / \partial u$ . Sin embargo también aparecen términos de derivación de variables de la respuesta estructural:  $du/dq$ , los cuales conllevan una derivación implícita respecto a las variables de diseño y su cálculo ya no es trivial.

En este contexto se puede definir matemáticamente el cálculo de las sensibilidades como el cálculo de las derivadas implícitas y explícitas de una función o variable de estado respecto a las variables de diseño cumpliendo una ecuación de equilibrio. Dicho cálculo se formularía de la manera siguiente:

Definidas las variables de diseño:  $q_1, q_2, \dots, q_n$  y sabiendo que el problema cumple la conocida ecuación de equilibrio estructural bajo régimen elástico lineal, expresada en función de esas variables de diseño como:

$$K(q_i) u = f(q_i) \quad \text{donde } i = 1 \div n \quad 2.2.2$$

se desea calcular las derivadas de la respuesta estructural:

$$\frac{d u_k}{d q_i} \dots \frac{d \sigma_k}{d q_i} \quad \text{donde } i = 1 \div n, k = 1 \div \text{ndof} \quad 2.2.3$$

con la intención de evaluar una restricción, una función objetivo o simplemente la variación de la propia respuesta estructural.

En Haug *et al.* (1986) [H3] aparece una definición general del análisis de sensibilidad: '*Structural design sensitivity analysis concerns the relationship between design variables available to the engineer and structural response or state variables that are determined by the laws of mechanics.*' Por lo tanto, en términos coloquiales el análisis de sensibilidad pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Qué le sucede a la estructura si cambia la magnitud de cierta variable? Nótese que la respuesta a la pregunta, además de dar información al algoritmo de optimización acerca del camino de búsqueda, tiene mucho sentido en sí misma.

---

<sup>3</sup> '*Sensitivity analysis is an important part of optimization. Although, sensitivity analysis is mostly mentioned in the context of structural optimization, it has developed into a research topic of its own.*' Hinton *et al.* (1994) [H3]

En general, al ingeniero le interesa calcular las sensibilidades de la respuesta estructural en desplazamientos y tensiones con respecto a las variables de diseño. En función de la naturaleza de las variables de diseño se pueden definir dos tipos de análisis de sensibilidad:

1. **Sensibilidad de parámetros:** Se definen como parámetros aquellas variables de diseño que aparecen explícitas en la formulación del problema de equilibrio. Por ejemplo, sería el caso del módulo elástico del material o del área de una barra sometida a axil. El hecho de aparecer explícitas, simplifica notablemente el cálculo de las derivadas como sucede en el cálculo elástico de celosías en Postek *et al.*(1992) [P1].
2. **Sensibilidad de formas:** En este otro caso, las variables de diseño están relacionadas con las dimensiones básicas del problema o con la posición relativa de los elementos estructurales. Por ejemplo, al tomar como variables de diseño las coordenadas de las conexiones nodales entre barras. Generalmente dichas variables nunca aparecen explícitas en la formulación y por lo tanto, su diferenciación presenta mayor dificultad. Tanto un correcto análisis de sensibilidad como el mismo problema de optimización, están ligados con la adecuada parametrización de la estructura. En consecuencia, si las variables de diseño no definen correctamente la forma de la estructura los resultados obtenidos no tendrán aplicabilidad. Sobre esta cuestión Navarrina (1987) [N1] realiza una muy acertada disquisición y se insistirá sobre el tema en el punto 2.4.

Nótese que en el caso de una placa sometida a un estado de tensión plana, el espesor de dicha placa aparece explícito en la formulación de equilibrio, esto se puede ver con detalle en Sarma *et al.* (1993) [S1]. Por consiguiente, la sensibilidad de la respuesta estructural de las placas respecto al espesor se consideraría como un análisis de parámetros y no de formas, aunque la variación afecte directamente a las dimensiones de la estructura. En esta ocasión, el lenguaje matemático no va de la mano del lenguaje físico.

## 2.3 PLANTEAMIENTOS DE RESOLUCIÓN

La resolución del problema matemático del análisis de sensibilidad planteado previamente admite distintas estrategias. La clasificación de los métodos que pueden utilizarse para resolverlo puede ser motivo de pequeñas controversias. Mientras algunos autores aceptan la clasificación clásica de Adelman *et al.* (1986) [A1]:

- Diferencias Finitas. FDM *Finite Differences Method*.
- Diferenciación Directa. DDM *Direct Differentiation Method*.
- Variable Adjunta. AVM. *Adjoint Variable Method*.

Otros, como Hinton *et al.* (1994)[H2] consideran dos grupos, siguiendo la propuesta de Kimmich<sup>4</sup>:

---

<sup>4</sup> S. Kimmich. *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit Finiten Elementen*. PhD thesis, Bericht Nr 11, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Germany, 1990. Citada en el artículo de referencia.

1. Métodos variacionales:
  - Método de Diferenciación Directa. DDM
  - Método de la Variable Adjunta. AVM
2. Métodos discretos:
  - Método de Diferencias Finitas. FDM
  - Método Semianalítico. SA
  - Método Analítico.

La segunda clasificación parece más acertada por ser más completa, pero introduce ciertos conceptos que pueden llevar a equívocos y por ello sería más clara, a nuestro juicio, la siguiente:

1. Método de Diferencias Finitas. FDM
2. Método de Diferenciación Directa. DDM
  - Método Semianalítico.
  - Método Analítico.
3. Método de la Variable Adjunta. AVM
  - Método Semianalítico.
  - Método Analítico.

A continuación se comenta cada planteamiento de acuerdo con el esquema propuesto en esta tesis.

### 2.3.1 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (FDM)

El método de las diferencias finitas propone la forma más sencilla, clara e intuitiva de calcular la sensibilidad de cualquier magnitud aproximando el concepto de derivada por el de incremento.

Supóngase que se tiene un diseño original con un valor de la variable de diseño  $q = q_1$ . Por ejemplo, el área de la sección estructural toma un cierto valor. Entonces la ecuación de equilibrio puede expresarse como:

$$K(q_1)u = f(q_1) \quad 2.3.1$$

y obtener la siguiente respuesta del desplazamiento:

$$u = u(q_1) \quad 2.3.2$$

Supóngase una perturbación en la variable de diseño. Por ejemplo, aumenta el área de la sección estructural de manera que ahora  $q = q_2 = q_1 + \Delta q$

Entonces la nueva ecuación de equilibrio 2.3.1 es:

$$K(q_2)u = f(q_2) \quad 2.3.3$$

y lógicamente también la respuesta asociada a ese nuevo equilibrio cambia a:

$$u = u(q_2) \quad 2.3.4$$

En estas circunstancias se está en condiciones de aproximar la derivada por el incremento siguiente:

$$\frac{du}{dq} \approx \frac{\Delta u}{\Delta q} = \frac{u(q_2) - u(q_1)}{\Delta q} \quad 2.3.5$$

De forma análoga se puede proceder con la respuesta tensional. En última instancia, introduciendo dichas expresiones en la ecuación 2.2.1 ya se estaría en condiciones de evaluar la sensibilidad de las restricciones, la función objetivo o cualquier otra magnitud requerida.

Sin embargo, este método exige resolver dos problemas estructurales completos, y lo peor es que la precisión del cálculo depende enormemente del incremento de la perturbación y del tipo de problema planteado<sup>5</sup>. Todo ello conduce a una serie de ensayos prueba-error hasta alcanzar un valor aproximado suficientemente bueno. Merece un comentario al margen, el que a pesar de la mala fama que tienen las técnicas de diferencias finitas, casi todos los autores las utilizan para verificar la bondad de sus cálculos de sensibilidad y que Yoon *et al.* [Y1] todavía publicaron un artículo sobre su uso en sensibilidad de autovalores...; En 1988 !

### 2.3.2 MÉTODO DE DIFERENCIACIÓN DIRECTA (DDM)

Dado que en la ecuación 2.2.1 aparecen términos de derivación implícita del tipo  $du/dq_i$ , y que al problema estructural se le exige cumplir la ecuación clásica de equilibrio donde aparecen explícitas las variables  $u$ , parece que el hecho de plantear la derivación de dicha ecuación de equilibrio para obtener las derivadas implícitas, surja de forma natural<sup>6</sup>.

Los métodos variacionales pretenden dar un fundamento matemático al planteamiento numérico de la sensibilidad, por ello varios autores han contribuido a consolidar los conceptos del análisis de sensibilidad. En concreto, Arora *et al.* (1992) [A2] presentan el principio variacional donde se enuncia el problema matemático de la sensibilidad en una terminología más general que la de que carácter discreto que se ha utilizado en el apartado 2.2 anterior.

Posteriormente Arora *et al.* (1992) [A3] y (1993) [A4] se preocupan de encontrar la sensibilidad a partir de una aproximación con derivada material y con volumen de control sobre el problema integral de equilibrio. Los artículos formulan el problema en términos continuos sin especificar las expresiones discretas y no se incluyen ejemplos de ningún tipo. Otro planteamiento teórico

<sup>5</sup> El aspecto del error que se comete en el cálculo de la sensibilidad se comenta en el apartado 2.5 de este mismo capítulo.

<sup>6</sup> *Prior to 1965, all gradients were computed using the finite difference scheme. According to Vanderplaats 'this is simply because no one had observed that simple chain rule differentiation of equilibrium equations yields the required information' [H3]*

variacional bastante completo aparece en Dems (1991) [D1], allí también se formulan las ecuaciones de equilibrio en forma integral exclusivamente, deduciéndose expresiones para derivadas de orden uno y dos. Igualmente el planteamiento adolece de un excesivo academicismo y esto le conduce a incluir ejemplos únicamente analíticos.

De forma sencilla, puede asegurarse que la diferenciación de la ecuación de equilibrio facilita la obtención de las derivadas implícitas que se pretenden. Por lo tanto, si se plantea la conocida ecuación energética del Principio de los Trabajos Virtuales, se obtiene de forma directa una ecuación de equilibrio del problema. Posteriormente, se plantea la derivación de dicha expresión con respecto a una variable de diseño,  $q$ , a través de la aplicación de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dq} \left[ \int_V \delta \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\sigma}} dV \right] = \frac{d}{dq} \left[ \int_V \delta \underline{\underline{u}} \underline{\underline{b}} dV + \int_S \delta \underline{\underline{u}} \underline{\underline{t}} dS \right] \quad 2.3.6$$

O bien, directamente sobre la forma discreta a la que conducen los elementos finitos<sup>7</sup>:

$$\frac{d}{dq} [K(q)u] = \frac{df(q)}{dq} \quad 2.3.7$$

obteniéndose:

$$K \frac{du}{dq} + \frac{dK}{dq} u = \frac{df}{dq} \quad 2.3.8$$

Por consiguiente, la sensibilidad se puede obtener como solución de un sistema de ecuaciones parecido al de equilibrio pero donde el término de fuerzas se ve reemplazado por una *pseudocarga*:

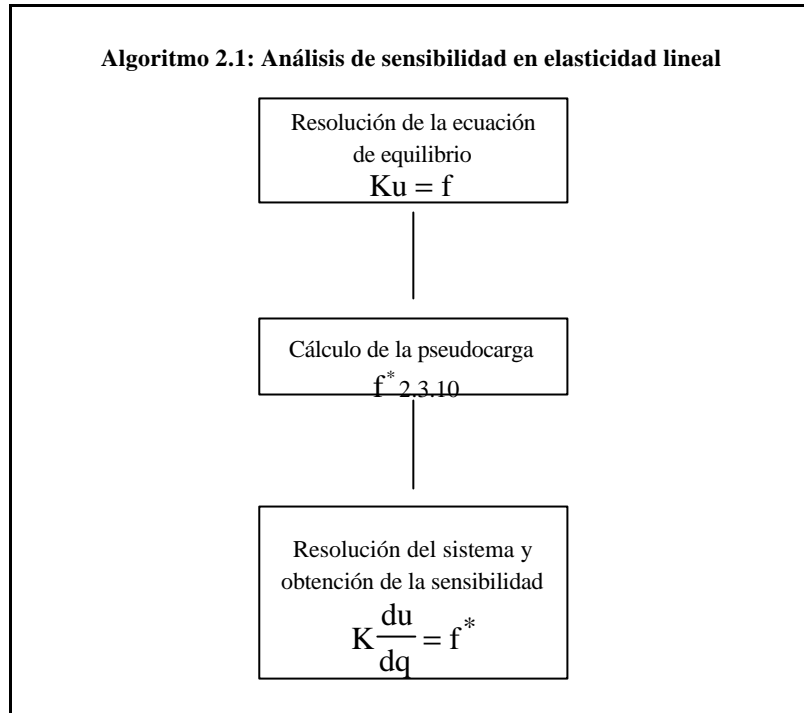
$$K \frac{du}{dq} = f^* \quad 2.3.9$$

Siendo dicha *pseudocarga* una función de los desplazamientos del estado de equilibrio:

$$f^* = \frac{df}{dq} - \frac{dK}{dq} u \quad 2.3.10$$

Por lo tanto la metodología seguiría los pasos del algoritmo 2.1 que se muestra en el cuadro siguiente:

<sup>7</sup> La derivación directa de la ecuación discreta es posible en problemas de naturaleza estructural. Sin embargo, en otro tipo de problemas como los de dinámica de fluidos es necesario, a veces, derivar sobre la expresión integral de equilibrio original y discretizar *a posteriori*.



Al inicio del apartado 2.3 se han distinguido dos estrategias de resolución, los Métodos Semianalítico y Analítico. Ambos pretenden resolver el problema numérico discreto y la diferencia de planteamiento entre ellos estriba en la manera de obtener la *pseudocarga*.

- **Método Semianalítico**

En este método, tanto la derivada de la matriz de rigidez como la del vector de fuerzas se calculan aplicando diferencia finitas a las expresiones matriciales y vectoriales. De esta manera los términos de la *pseudocarga* se obtendrían por:

$$\frac{dK}{dq} \approx \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{K(q_2) - K(q_1)}{\Delta q} \quad 2.3.11$$

$$\frac{df}{dq} \approx \frac{\Delta f}{\Delta q} = \frac{f(q_2) - f(q_1)}{\Delta q} \quad 2.3.12$$

La ventaja de este planteamiento con respecto al cálculo de la sensibilidad a través del uso de diferencias finitas tal y como se explicaba en el punto 2.3.1, es que en la formulación sólo intervienen los elementos que han sido perturbados, y en consecuencia, se obtiene un ahorro de cálculo que puede ser importante. Esta última consideración es especialmente cierta en el cálculo de sensibilidad de parámetros; en cambio, en la sensibilidad de formas, como en general la modificación de la variable suele afectar a toda la malla, es necesario el recálculo de casi todos los



elementos. Además, en este caso, el cálculo de la *pseudocarga* presenta serios errores al incluir términos de sólido rígido, según Olhoff *et al.* (1992)<sup>8</sup>.

Sobre el método Semianalítico hay algunas variaciones para acelerar el cálculo de las derivadas de la matriz de rigidez, según se trate de un problema con muchos o pocos casos de carga. Los detalles se pueden encontrar en El-Sayed *et al.* (1991) [E1].

- **Método Analítico.**

En este caso, el cálculo de la derivada se hace a través de las expresiones analíticas de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas discretizados por elementos finitos. El cálculo de la derivada de la matriz de rigidez puede ser más o menos complejo; ya se ha indicado que en el análisis de parámetros la variable de diseño aparece explícita, y en consecuencia, su expresión es inmediata. Sin embargo, en el análisis de formas, el volumen de la integral depende también de la variable de diseño y, por consiguiente, esa derivada se convierte en implícita complicando el cálculo. Éste problema fue abordado y resuelto con mucha claridad y precisión en Wang *et al.* (1985) [W1], Navarrina (1987) [N1] y una extensión particular a tres dimensiones por Rezaiee-Pajand *et al.* (1993) [R1] y Balbu *et al.* (1994) [B1].

A continuación se formulan las expresiones de la pseudocarga a partir de dichos textos:

$$\mathbf{f}^* = \frac{d\mathbf{f}}{dq} - \frac{d\mathbf{K}}{dq} \mathbf{u} \quad 2.3.13$$

En particular, es importante la derivada de la matriz de rigidez. El punto de partida es la forma discretizada por elementos finitos que puede expresarse según:

$$\mathbf{K} = \sum_{\text{elem } V(q)} \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad 2.3.14$$

Donde las matrices constitutiva  $\mathbf{D}$  y de deformación  $\mathbf{B}$  tienen el significado usual en el contexto de los elementos finitos [O1]. Si se pretende derivar dicha expresión 2.3.14, se obtiene la 2.3.15 donde se observa que cada elemento tiene su propio recinto de integración y por lo tanto, los propios límites de integración dependen de la variable de diseño.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dq} = \sum_{\text{elem } V(q)} \frac{d}{dq} \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad 2.3.15$$

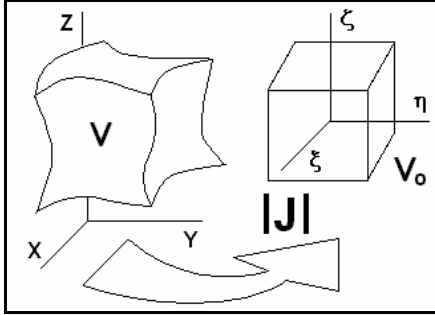
En vista de ello, en ningún caso dicha derivada parece ser trivial excepto en los elementos triangulares de tres nodos donde las matrices  $\mathbf{B}$  son explícitas.

---

<sup>8</sup> N. Olhoff, J. Rasmussen and E. Lund. *Method of exact numerical differentiation for error estimation in finite element based semi-analytical shape sensitivity analysis*. Special Report N.10. Institute of Mechanical Engineering. Alborg University, Alborg, DK, 1992. Citado en [H3].

Sin embargo, en general, el cálculo numérico se realiza a través de elementos isoparamétricos, en cuyo caso la matriz de rigidez se expresa como:

$$K = \sum_{\text{elem } V_0} \int B^t D B |J| dV_0 \quad 2.3.16$$



**Ilustración 2.1: Transformación de coordenadas**

donde  $|J|$  es el Jacobiano de la transformación de coordenadas que permite pasar del sistema cartesiano al sistema natural o isoparamétrico. En este caso, el recinto de integración pertenece al sistema natural de coordenadas, que es un dominio fijo, y la variación de volumen viene exclusivamente definida por la transformación jacobiana. Por ello, ya no quedan afectados los límites de integración que acotan el recinto. Por consiguiente la dificultad de la derivación

queda eliminada.

Reformulando la expresión de la matriz de rigidez, se define:

$$\frac{dK}{dq} = \frac{d}{dq} \sum_{\text{elem } V_0} \int B^t D B |J| dV_0 = \sum_{\text{elem } V_0} \frac{d}{dq} \int B^t D B |J| dV_0 \quad 2.3.17$$

Dado que el dominio de integración ya no depende de las variables de diseño se está en condiciones de desarrollar la expresión 2.3.17 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \int_{V_0} B^t D B |J| dV_0 &= \int_{V_0} \frac{dB^t}{dq} D B |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t \frac{dD}{dq} B |J| dV_0 + \\ &\int_{V_0} B^t D \frac{d|J|}{dq} dV_0 + \int_{V_0} B^t D B \frac{d|J|}{dq} dV_0 \end{aligned} \quad 2.3.18$$

En general, el término que afecta a la derivada de la matriz constitutiva suele ser nulo en problemas lineales porque los coeficientes elásticos no cambian aunque se modifique la forma de la estructura. En cambio, la derivada de la matriz gradiente de deformación y la jacobiana sí que cambiarán, dado que dependen de las coordenadas de los nodos y éstos de las dimensiones.

A continuación, se desarrollan las expresiones para un elemento de n nodos:

$$B = [B_1 \cdots B_i \cdots B_n] \quad , \quad \frac{dB}{dq} = \left[ \frac{dB_1}{dq} \cdots \frac{dB_i}{dq} \cdots \frac{dB_n}{dq} \right] \quad 2.3.19$$

Donde la submatriz  $B_i$  tiene la forma siguiente:

$$B_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} \quad 2.3.20$$

Se expresa su derivada según la matriz inferior:

$$\frac{dB_i}{dq} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial x \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial y \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial z \right) \\ \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial y \right) & \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial x \right) & 0 \\ \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial z \right) & 0 & \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial x \right) \\ 0 & \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial z \right) & \frac{d}{dq} \left( \partial N_i / \partial y \right) \end{bmatrix} \quad 2.3.30$$

Por lo tanto, interesa conocer los términos siguientes:

$$\frac{d}{dq} \left\{ \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{bmatrix} \right\} \quad 2.3.31$$

Haciendo uso de la transformación isoparamétrica, es decir, de la relación entre coordenadas naturales y cartesianas, se expresa:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{bmatrix} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{bmatrix} \right\} \quad 2.3.32$$

Derivando la expresión 2.3.32, y sabiendo que el cambio de forma no afecta directamente al sistema de coordenadas naturales, se obtiene:

$$\frac{d}{dq} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} = \frac{d}{dq} \left( [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{Bmatrix} \right) = -[J]^{-1} \frac{d[J]}{dq} [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad 2.3.33$$

De donde finalmente:

$$\frac{d}{dq} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} = -[J]^{-1} \frac{d[J]}{dq} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} \quad 2.3.34$$

En particular, pero sin perder por ello generalidad para los restantes coeficientes con los que se trabajaría de igual manera, se calculará la derivada de la fila y columna primera de la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas según:

$$\frac{d}{dq} J(1,1) = \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{d}{dq} \left( \sum_i^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right) = \sum_i^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{dx_i}{dq} \quad 2.3.35$$

Nótese, que en última instancia, dicha componente derivada depende *directamente* de la derivada de cada coordenada de la malla respecto de la variable de diseño. En el apartado 2.4 se comentan las diferentes técnicas que existen para calcular dichas derivadas.

Finalmente, sólo falta la derivada del determinante del jacobiano:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} |J| &= \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \\ & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \left( \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \right) + \\ & \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) \left( -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \\ & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \left( -\frac{d}{dq} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right) + \\ & \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \\ & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left( \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right) \end{aligned} \quad 2.3.36$$

Donde todas las derivadas son ya conocidas y calculadas según 2.3.35.

Las derivadas de las fuerzas de volumen y de las cargas repartidas también producirán un término en la pseudocarga que será el siguiente:

$$f_b^* = \frac{d}{dq} \int_v N b dV = \int_{v_0} N b \frac{d|J|}{dq} dV_0 \quad 2.3.37$$

$$f_t^* = \frac{d}{dq} \int_s N t dS = \int_{s_0} N t \frac{d|J|}{dq} dS_0 \quad 2.3.38$$

Con ello se está en disposición de calcular todos los coeficientes y términos que intervienen en la formulación elástica lineal del problema e implementar el algoritmo 2.1 que aparecía anteriormente.

### 2.3.3 MÉTODO DE LA VARIABLE ADJUNTA (AVM)

El método de la variable adjunta es una alternativa de cálculo al planteamiento de la diferenciación directa. Los conceptos teóricos se encuentran en artículos ya citados anteriormente: Arora *et al.* (1992) [A2], Arora *et al.* (1992) [A3] y (1993) [A4]. En ellos, los autores presentan la formulación teórica variacional del problema autoadjunto y muestran las expresiones integrales a las que se llega desde diversos planteamientos. Análogos comentarios a los del apartado 2.3.2 pueden hacerse en este caso.

En el planteamiento en forma discreta puede observarse que si se substituye convenientemente la expresión 2.3.9 en la ecuación 2.2.1 se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d g_j}{dq} = \frac{\partial g_j}{\partial q} + \frac{\partial g_j}{\partial u} K^{-1} f^* \quad 2.3.39$$

Dado que en un problema bien condicionado la matriz de rigidez necesariamente tiene inversa, se puede definir una ecuación adjunta del tipo:

$$K \lambda = \frac{\partial g_j}{\partial u} \quad 2.3.40$$

donde  $\lambda$  es la llamada *variable adjunta* y tiene las dimensiones del vector de incógnitas nodales.

Así la expresión 2.3.39 se convierte en:

$$\frac{d g_j}{dq} = \frac{\partial g_j}{\partial q} + \lambda^t f^* \quad 2.3.41$$

siendo la *pseudocarga*:

$$f^* = \frac{df}{dq} - \frac{dK}{dq} u \quad 2.3.42$$

Nótese, que con este planteamiento se consigue resolver un único sistema autoadjunto de ecuaciones en lugar de los n-sistemas del método directo, uno para cada variable de diseño. Sin

embargo, el costoso cálculo de la *pseudocarga* sigue siendo necesario para cada variable de diseño. Y también, en este caso como en el del Método de Diferenciación Directa, pueden contemplarse dos estrategias para calcular la *pseudocarga*: la Analítica y la Semianalítica que ya han sido comentadas anteriormente.

### **2.3.4 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DDM Y AVM**

A parte de las Diferencias Finitas, que ya han sido comentadas brevemente en el punto 2.3.1 y sobre las cuales se volverá a hacer hincapié en el apartado siguiente, se han descrito dos métodos generales para afrontar el problema del análisis de sensibilidad: el DDM y el AVM. Inmediatamente surge la pregunta: ¿Cuál es mejor?, ¿En qué circunstancias se obtendrá mejor rendimiento de cada uno de ellos?.

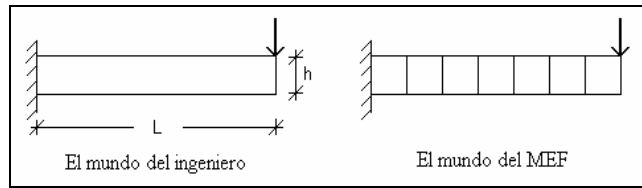
Obsérvese, que el DDM necesita resolver tantos sistemas de ecuaciones 2.3.9 como variables de diseño tenga el problema; mientras que el AVM debe resolver tantos sistemas 2.3.40 como restricciones u objetivos tenga el problema. Esta característica, propia de cada uno, da la respuesta. En general, si nuestro problema tiene más restricciones que variables de diseño es preferible el DDM; en caso contrario, se debe escoger el AVM. Este criterio fundamenta el llamado método híbrido de Tseng *et al.* (1989) [T1] que consiste, simplemente, en saber escoger uno u otro método según convenga al problema.

Sin embargo, parece interesante destacar que el método AVM no obtiene directamente la sensibilidad de las variables de la ecuación de estado en ningún caso, y que si se desean conocer dichas magnitudes es absolutamente necesario resolver el sistema del método DDM para obtenerlas. Por lo tanto, cuando únicamente se desee obtener la sensibilidad de los desplazamientos o de las tensiones, con respecto a las variables de diseño, será obligado el DDM. En cambio, cuando se desee obtener la sensibilidad de las restricciones del problema de optimización, cualquiera de los dos será posible. De donde se deduce la mayor versatilidad del método DDM.

## **2.4 LA PARAMETRIZACIÓN Y EL DISEÑO DE FORMAS**

En el desarrollo teórico anterior todas las expresiones de sensibilidad se han acabado expresando en función de la variación nodal respecto de las variables de diseño, o sea  $dx_i/dq$ . Sin embargo, estos valores pueden ser difíciles de calcular o desconocidos una gran parte de las veces.

Por ejemplo: Supóngase una viga como la de la ilustración 2.2 .



**Ilustración 2.2: Parametrización y diseño**

Para los programas de elementos finitos la viga se reduce a un conjunto de  $n$  elementos que discretizan la estructura y donde cada elemento tiene sus coordenadas; pero los elementos finitos no saben nada de lo que son las variables de diseño: largo, ancho o canto. En cambio el ingeniero se mueve cómodamente con los conceptos que manejan las variables de diseño y no suele entrar en temas de mallado. Por lo tanto, aparece el conflicto de unir esa información y de ser capaces de relacionar las variables de diseño con las coordenadas nodales de la malla.

En vista de ello, para el análisis de la sensibilidad, el problema se reduce a ser capaces de establecer una parametrización correcta del análisis que permita relacionar, de forma simple, el espacio de diseño con el espacio de coordenadas. Esta cuestión puede ser más compleja si, además, intervienen funciones objetivo o restricciones en problemas de optimización.

Sobre la cuestión de la adecuada parametrización de los problemas Navarrina (1987) [N1] considera que toda relación de diseño-parametrización se puede encajar en uno de los dos grupos siguientes:

- Global: Cuando la variable de diseño afecte a gran parte de la estructura. Sería el caso del canto de la viga anterior, cuya modificación obligaría a recalcular toda la malla.
- Local: Cuando la modificación de la variable de diseño afecte a una parte pequeña de la estructura. Por ejemplo, un cambio en la coordenada  $y$  de uno de los nodos de la malla, única y exclusivamente.

Posteriormente en Bugeda (1990) [B2] se optimizan diferentes estructuras y se analiza la sensibilidad según la siguiente estrategia:

- Se consideran variables de diseño las coordenadas de los nodos del contorno, de manera que una variación en esas coordenadas definirá una modificación en la forma del problema. En consecuencia, se parte de una definición local del problema.
- Se define el contorno mediante Bsplines que dependen directamente de las coordenadas nodales de los bordes de la malla y que permiten la derivación directa de las expresiones analíticas. Por lo tanto, las derivadas nodales en el contorno son conocidas.
- Se transmiten las derivadas del contorno al resto de nodos de la malla mediante una estrategia de generación de malla. En los métodos de mallado, como el avance frontal, cada nuevo nodo se

apoya en las coordenadas de los previos mediante una expresión analítica conocida. En estas circunstancias, se puede derivar dicha expresión y diseminar el valor de la derivada, desde el contorno hacia el interior.

Yang *et al.* (1992) [Y2] también formulan un cálculo de las derivadas a partir de la expresión geométrica del contorno.

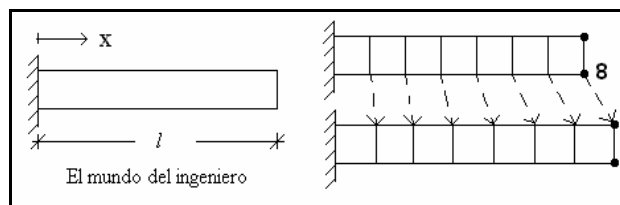
El problema no es trivial y en general adolece de una falta de generalidad, por lo que es motivo de investigación. Esto provoca que el diseñador se vea limitado, por la singularidad de su problema, a la hora de introducir el valor de las derivadas nodales.

En términos generales, la forma de una estructura viene definida única y exclusivamente por el contorno<sup>9</sup>. Aceptando este hecho, toda variación de forma representa la variación del contorno de la figura, y dado que éste está definido por puntos y coordenadas nodales, la variación en la variable de diseño conlleva la variación de las coordenadas del contorno. En ocasiones, dichas expresiones pueden ser explícitamente conocidas, como sería el caso de la parametrización del contorno con curvas de tipo B-splines, pero en general no tiene porque ser así.

No obstante, es intuitivo que la variación de forma puede tener una relación directa con un problema de desplazamientos impuestos, de manera que la estructura se *deformaría* desde una posición original de equilibrio a una nueva configuración. Dicha deformación viene representada por los movimientos de los nodos del contorno, que siempre serán conocidos, pues el diseñador sabe cómo quiere que la estructura varíe. Entonces, se está en condiciones de aproximar el movimiento en el nodo por un incremento, y en consecuencia, de aproximar la derivada como una perturbación del contorno.

$$\frac{dx_i}{dq} \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta q} \quad 2.4.1$$

La figura 2.3 ilustra el razonamiento con el ejemplo de la viga.



**Ilustración 2.3: ¿Cómo afecta un cambio en la longitud?**

En este primer caso, la modificación de la longitud representa estirar los nodos extremos, de manera que se puede aproximar la derivada en los nodos del contorno móvil con una expresión incremental:

<sup>9</sup> Evidentemente esta hipótesis es claramente discutible dado que la percepción espacial está condicionada por factores como la iluminación, el color, la posición relativa de los volúmenes, etc. pero en este trabajo el planteamiento de la forma afecta solamente al comportamiento estructural y no a la experiencia estética.



$$\frac{dx_g}{dl} \approx \frac{\Delta x_g}{\Delta l} = 1 \quad 2.4.2$$

Nótese que los nodos del empotramiento no van a moverse, y que en su caso, el valor del incremento será nulo.

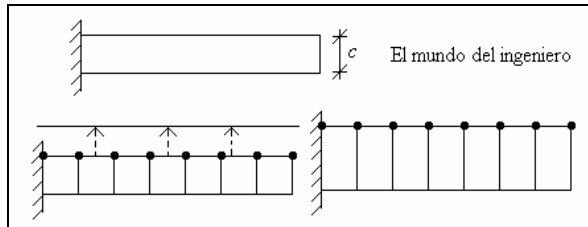


Ilustración 2.4: ¿Cómo va afectar un cambio en el canto?

En el segundo caso de la ilustración 2.4, la modificación del canto conlleva mover los nodos del contorno superior mientras que los del inferior quedan fijos.

$$\frac{dy_i}{dc} \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta c} = 1 \quad 2.4.3$$

De los ejemplos sencillos superiores pueden extraerse las siguientes consideraciones:

1. El cambio de forma producido por la variación en una variable de diseño afecta a unos cuantos nodos del contorno.
2. Los nodos asociados directamente a la variable de diseño tiene derivada unitaria.
3. Algunos nodos van a moverse y otros van a quedar fijos, de manera que el problema puede interpretarse como un problema de desplazamiento impuesto sobre la estructura.

Por lo tanto, se está en condiciones de definir la derivada de las coordenadas nodales en el contorno como una perturbación direccional de la malla. Entonces el problema se reduce a transmitir dicha perturbación unitaria direccional sobre el resto de nodos de la malla.

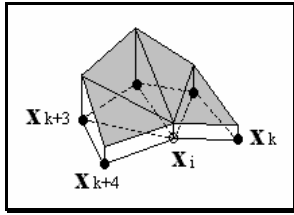
A partir de las consideraciones previas, el problema se plantea en los siguientes términos. En ciertos puntos del contorno se conocen las derivadas explícitas de algunas coordenadas, bien a través de una expresión analítica derivable, o bien mediante una perturbación direccional unitaria, o bien porque hay una condición de contorno que no se mueve:

$$\frac{dx_i}{dq}, \frac{dy_i}{dq}, \frac{dz_i}{dq} \quad 2.4.4$$

Ante esa información, se desea encontrar los valores de las derivadas en el resto de nodos de la malla.

Una de las ideas posibles sería considerar el valor de las derivadas como un desplazamiento impuesto sobre un medio elástico homogéneo y perturbar la malla como si se tratase de un problema estructural. Sin embargo, tiene el inconveniente de tener que resolver un sistema de

ecuaciones, y de definir un módulo elástico de deformación que no tiene ninguna relación con el comportamiento real de la estructura, de hecho es una analogía geométrica.



**Ilustración 2.5:** Cada nodo es cdg de los de alrededor. También su derivada

Otra idea, sería repartir la perturbación con un método iterativo como los utilizados en las técnicas iterativas de *suavizado* para mejoras de malla.

Una de las técnicas de suavizado de mallas se basa en considerar que cada nodo es centro de gravedad de los de alrededor. De esta manera, si se asemejase los nodos a masas puntuales unitarias enlazadas por muelles, el sistema estaría en equilibrio. Para llegar a dicha posición de equilibrio se realizan diversas iteraciones sobre

grupos de elementos de malla exigiendo la siguiente relación para cada nodo:

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad 2.4.5$$

Derivando dicha expresión respecto a las variables de diseño se obtendría:

$$\frac{dx_i}{dq} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{dx_k}{dq} \quad 2.4.6$$

Entonces, mediante un número finito de iteraciones, se puede repartir el valor de la derivada conocida en algunos puntos del contorno sobre los nodos interiores de alrededor.

En conclusión, siempre es posible definir las derivadas de las coordenadas nodales respecto del espacio de variables de diseño a través de la perturbación direccional de ciertos nodos del contorno, y su posterior extensión al resto de coordenadas de la malla mediante la técnica de suavizado.

## 2.5 EL ERROR EN EL CÁLCULO DE LA SENSIBILIDAD

Es sabido que la resolución de problemas mediante elementos finitos conduce a errores de cálculo propios de la naturaleza discreta y aproximada del método, aparte de los computacionales debidos al redondeo o truncamiento de las cifras numéricas. Se han propuesto distintos estimadores del error, véase Bugada (1990) [B2], de manera que se puede saber con qué grado de certeza se está resolviendo el problema. Dado que en el cálculo de sensibilidades también se utilizan mallas y conceptos de elementos finitos, es de esperar que se van a producir errores de naturaleza similar a los que se presentan durante el análisis estructural.

En la literatura hay pocas referencias sobre la estimación del error que se comete en el cálculo de sensibilidades, en particular Tseng *et al.* (1989) [T2] proponen tres estrategias:

- **Estimación global de error:**

Sea  $F(u, q)$  una función objetivo o unas restricciones, en definitiva, un funcional del problema de optimización que depende de las variables de estado  $u$  y de las variables de diseño  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Se podría calcular con elementos finitos dos diseños, uno original y otro modificado mediante la variación de la variable de diseño. La resolución de los dos análisis proporcionaría dos valores del funcional y mediante un esquema de diferencias finitas sería posible evaluar su variación:

$$\Delta F_{finitas} = F_{modificado} - F_{original} \quad 2.5.1$$

Durante el cálculo con elementos finitos, también sería posible obtener un vector de derivadas con alguno de los métodos, DDM o AVM, expuestos anteriormente:

$$\underline{dF}^t = \left[ \frac{dF}{dq_1}, \frac{dF}{dq_2}, \dots, \frac{dF}{dq_n} \right] \quad 2.5.2$$

A la vista de todo ello, se estaría en condiciones de calcular el efecto de una aproximación de primer orden de la variación del funcional con respecto a la perturbación del diseño:

$$\Delta F_{analitico} = \underline{dF}^t \Delta q \quad 2.5.3$$

Y posteriormente, comparar el resultado con las diferencias finitas:

$$Error = \frac{\Delta F_{finitas}}{\Delta F_{analitico}} \quad 2.5.4$$

- **Error relativo:**

En este caso la medida del error se hace para cada término del vector de derivadas en lugar de evaluarlo de forma global:

$$dF_i = \frac{dF}{dq_i} \quad 2.5.5$$

Y la comparación se sigue efectuando con un esquema de diferencias finitas:

$$Error = \frac{|dF_i^{finitas} - dF_i^{analitico}|}{|dF_i^{finitas}|} \quad 2.5.6$$

- **Error normalizado:**

Finalmente se define otro estimador de tipo global sobre el vector de derivadas:

$$Error = \frac{\| \underline{dF}_{finitas}^t \| \| \underline{dF}_{analitico} \|}{\| \underline{dF}_{finitas}^t \| \| \underline{dF}_{analitico} \|} \quad 2.5.7$$

Cuando las componentes de los vectores derivados están bien calculadas, lo están, a buen seguro, los estimadores globales. Por ello, los autores, con muy buen criterio, recomiendan el estimador componente a componente como el más fiable.

Haftka *et al.* (1991) [H4] plantean dos cuestiones referentes a la precisión en el cálculo de las sensibilidades: en primer lugar, destaca que la comparación con diferencias finitas puede llegar a no tener sentido. Nótese, que en el cambio de forma hay un cambio de malla, y aunque la respuesta estructural sí que se podría considerar correcta, el cálculo de las sensibilidades no tendría porque serlo, a menos que se garantizase que la derivada no va a cambiar en un refinamiento de malla. En el fondo, lo que se plantea es el problema de la meta-sensibilidad, es decir la influencia (sensibilidad) que tiene la malla en el cálculo de la sensibilidad. En segundo lugar, destacan la importancia que puede tener el orden de magnitud de la derivada<sup>10</sup>, ya que a grandes números errores más pequeños, y viceversa. En el artículo citado, los autores comparan distintos métodos y distintas mallas y obtienen, entre otras, unas conclusiones interesantes:

1. En caso de refinamiento de malla, los desplazamientos convergen más deprisa que las derivadas. Por lo tanto el problema de la meta-sensibilidad está presente.
2. Los métodos semianalíticos son más sensibles a las perturbaciones de malla que el método de diferencias finitas. En consecuencia, a pesar de que mejoran la velocidad empeoran los resultados.

También Dems *et al.* (1993) [D2] estudian y comparan los distintos métodos de cálculo de sensibilidades con distintas mallas; las conclusiones que pueden extraerse de sus ejemplos reafirman lo que se había observado en [H4].

Posteriormente Buscaglia *et al.* (1994) [B3] estudian el problema de la estimación del error *a posteriori* en el cálculo de sensibilidades de parámetros, para poder remallar adaptablemente y mejorar el cálculo de las derivadas. El artículo es de índole teórico, sin ejemplos, y presenta una aproximación con lenguaje matemático un tanto críptico; sin embargo, abre una vía interesante de investigación. Se podría considerar el estudio de remallar adaptablemente a partir de la estimación del error en la sensibilidad, al estilo de lo que se hace con el análisis estructural con elementos finitos, y definir mallas diferentes para cada tipo de análisis: una para equilibrio y otra para sensibilidad. Sería una posible vía para atacar el problema de la meta-sensibilidad.

### 2.5.1 UNA PEQUEÑA PARADOJA

---

<sup>10</sup> 'It is known that for a given problem, the smaller displacements and stresses are often less accurately calculated than the larger displacements and stresses. Similarly, we often find that small derivatives may be less accurate than larger ones.' [H4]

Para ilustrar la problemática del error en el análisis de sensibilidad se ha desarrollado la siguiente paradoja. Supóngase el problema estructural sencillo de la ilustración 2.6. El problema se puede resolver mediante un estudio con elementos finitos unidimensionales, en ese caso se plantearían las ecuaciones de equilibrio y se obtendría la resolución del problema.

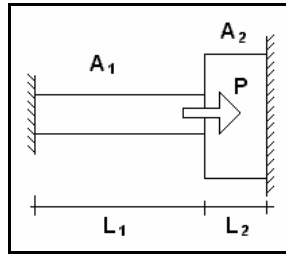


Ilustración 2.6: problema estructural

En concreto se debería resolver:

$$\left[ \frac{EA_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} \right] u = P \quad 2.5.8$$

con lo que se obtiene una relación analítica explícita entre fuerzas y desplazamientos:

$$u = \frac{PL_1L_2}{E(A_1L_2 + A_2L_1)} \quad 2.5.9$$

En estas circunstancias, es posible calcular la derivada analítica del desplazamiento con respecto a alguna de las variables del problema. Nótese que con el planteamiento definido hasta ahora el cálculo sería de sensibilidad de parámetros y no de formas.

Por ejemplo respecto al área del primer elemento:

$$\frac{du}{dA_1} = -\frac{PL_1L_2^2}{E(A_1L_2 + A_2L_1)^2} \quad 2.5.10$$

Por ejemplo respecto al área del segundo elemento:

$$\frac{du}{dA_2} = -\frac{PL_1^2L_2}{E(A_1L_2 + A_2L_1)^2} \quad 2.5.11$$

Por ejemplo respecto a la longitud del primer elemento:

$$\frac{du}{dL_1} = \frac{P}{E} \left[ \frac{L_2 - L_1}{A_1L_2 + A_2L_1} - \frac{L_1L_2(A_2 - A_1)}{(A_1L_2 + A_2L_1)^2} \right] \quad 2.5.12$$

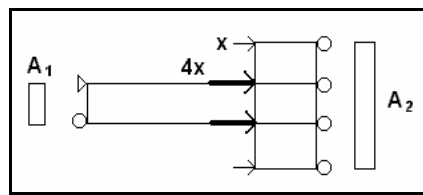
Dando unos ciertos valores numéricos adimensionales ficticios:

E	P	A <sub>1</sub>	L <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	L <sub>2</sub>
1	5	2	2	4	1

se obtienen los siguientes resultados:

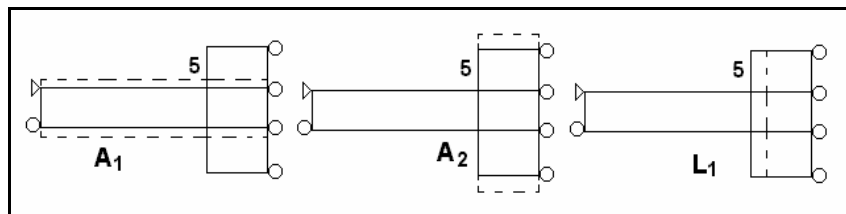
u	du/dA <sub>1</sub>	du/dA <sub>2</sub>	du/dL <sub>1</sub>
1	-0.1	-0.2	-0.7

Si se propone una discretización en elementos finitos bidimensionales, como la de la ilustración 2.7, y se distribuye la fuerza puntual convenientemente, de manera que se cumpla la relación  $10x = P$  para simular un estado uniaxial de tensiones, se obtiene un resultado en desplazamientos exactamente igual al anterior. ¿Pero qué le sucede a la sensibilidad?. Nótese que ahora, el cálculo se convierte en análisis de formas, y no de parámetros como en el caso unidimensional anterior.



**Ilustración 2.7: Discretización bidimensional**

Si se aplica el DDM, tal y como se comentó en el apartado anterior, se debe realizar sobre la malla una perturbación unitaria en el sentido del cambio de forma. Para el problema que se está estudiando se definirán tres perturbaciones según el dibujo 2.8 :



**Ilustración 2.8: Diferentes perturbaciones**

Los resultados de la sensibilidad en el nodo 5 son los siguientes:

u	du/dA <sub>1</sub>	du/dA <sub>2</sub>	du/dL <sub>1</sub>
1	-0.293	-0.104	-0.604

Resultados, evidentemente, *malos* y con un error relativo distribuido de forma muy dispar:

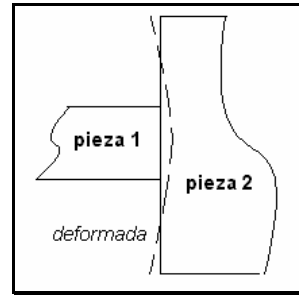
error u	error du/dA <sub>1</sub>	error du/dA <sub>2</sub>	error du/dL <sub>1</sub>
0%	<b>193%</b>	<b>48%</b>	13.7%

En un ejemplo tan pequeño y simple, inmediatamente, uno se decanta por las utilísimas diferencias finitas. Con este planteamiento también es necesario perturbar el diseño, tal y como se hizo anteriormente según la ilustración 2.8, pero ahora imponiendo que la variación en la geometría sea muy pequeña. En concreto, se define una variación del área tal que  $\Delta A_i = 0.002$  y un incremento en la longitud de valor  $\Delta L_1 = 0.001$  que claramente casi no alteran la geometría. Por el concepto intuitivo de las diferencias finitas es lógico pensar que se van a obtener unos resultados mucho mejores de la sensibilidad. Pero paradójicamente se consiguen *¡exactamente* los mismos que los del cuadro anterior!.

Por lo tanto, según las diferencias finitas la sensibilidad conseguida con el DDM es perfecta, pero si comparamos dichos resultados con el cálculo analítico *real* se observa que el error cometido es, en ocasiones muy grande. A la vista de todo ello, se deduce que la modelización matemática numérica está funcionando, pero que no reproduce de forma fidedigna el modelo físico asociado.

La explicación de dicha paradoja radica en la naturaleza discreta del problema. En el caso unidimensional, la carga puntual está aplicada en la directriz de los elementos y además, existe una hipótesis de trabajo implícita según la cual, toda sección transversal va a seguir recta después de la deformación. Para equiparar el comportamiento entre las hipótesis de una y dos dimensiones, se utiliza el *truco* de distribuir la carga puntual convenientemente a lo largo de la sección mayor, para mantener la hipótesis de deformación plana perfecta en la unión entre las dos piezas. En caso de no hacerlo así, la pieza pequeña tiende a penetrar a la grande, y la deformación deja de ser plana y toma la forma que se representa en el dibujo 2.9.

En el caso de las diferencias finitas, al perturbar el diseño, los nodos arrastran consigo la carga nodal y por lo tanto, en el diseño modificado, deja de cumplirse que la deformación en la unión es perfectamente plana. La consecuencia directa es que el problema discreto deja de modelar convenientemente el problema físico. Nótese que las perturbaciones que más modifican la posición de la carga  $A_1, A_2$  son las que provocan mayores errores en el cálculo de la sensibilidad, en cambio la modificación de  $L_1$



**Ilustración 2.9: La deformación en dos dimensiones**

no altera el planteamiento físico del problema y por ello su error es menor.

En el caso del método DDM sucede algo parecido, en realidad el cálculo discreto de la derivada nodal se obtiene como perturbación direccional de la malla, y en consecuencia, afecta a la posición relativa de las cargas como en el caso de las diferencias finitas.

De hecho, si se realiza un refinamiento de malla, como el de la ilustración 2.10, y se resuelve sólo media pieza, mejoran ostensiblemente los resultados.

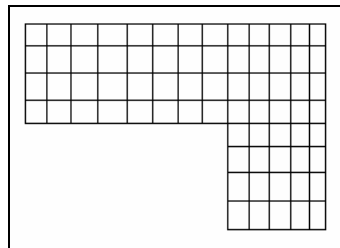


Ilustración 2.10: Malla refinada

En concreto, después de aplicar el método de diferenciación directa y manteniendo la adecuada distribución de cargas que provoca una deformación plana en la sección de unión entre piezas, se obtiene la siguiente tabla:

error $u$	error $du/dA_1$	error $du/dA_2$	error $du/dL_1$
0%	<b>86%</b>	<b>21%</b>	6%

En general, tal y como constatan los autores de los artículos mencionados en el apartado anterior, la aproximación en la sensibilidad siempre es fuente de mayores errores que el cálculo de la ecuación de equilibrio.



A través de este ejemplo sencillo, se ha constatado que la incorrecta perturbación de la malla es uno de los eslabones débiles del análisis de sensibilidad y provoca grandes errores en el cálculo de las derivadas, aunque matemáticamente la solución sea buena. La regla de oro para obtener buenos valores de la sensibilidad sería: perturbar mallas finas intentando no modificar el problema físico que representa la discretización.

## 2.5.2 UN MÉTODO ALTERNATIVO

Después de constatar la inseguridad en la veracidad de los resultados que transmiten las diferencias finitas, en este trabajo se ha decidido utilizar una estrategia alternativa para confirmar la bondad del cálculo de la sensibilidad. La filosofía del método es equivalente al cálculo con diferencias finitas, pero tiene la ventaja de presentar una mejor visualización de los resultados. Otros autores lo han utilizado con fines distintos, en concreto, como extrapolación de respuestas estructurales, véase Kanaka *et al.* (1989) [K2].

Supuesta conocida la respuesta estructural en un diseño original, es decir, cuando la variable de diseño toma un cierto valor, es posible calcular dicha respuesta dentro de un cierto entorno de la variable de diseño según un desarrollo en serie de Taylor por:

$$u_2^{\text{real}} = u_1 + \frac{du_1}{dq} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{d^2u_1}{dq^2} (\Delta q)^2 + \dots \quad 2.5.13$$

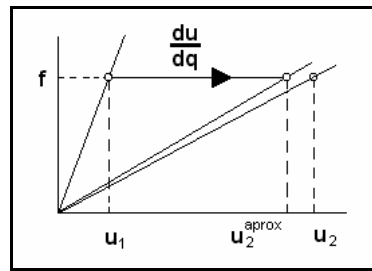
Si se trunca en el primer término, se obtendrá una aproximación lineal sobre la respuesta de la estructura modificada:

$$u_2^{\text{aprox}} = u_1 + \frac{du_1}{dq} \Delta q \quad 2.5.14$$

Entonces, será posible comparar el comportamiento de la aproximación lineal, calculada a partir de la original y su sensibilidad, con un análisis real de la estructura modificada. Dicha modificación tomará valores mayores, hasta el 5-10% de la variable de diseño, que los que se definen en una simple perturbación de diferencias finitas. Ahí radica la distinción con la técnica de diferencias finitas: no se trata de perturbar una malla sino de crear un problema totalmente nuevo y resolverlo. Lógicamente, el coste computacional de dicha verificación es caro, y sólo se propone como comprobación en la bondad de los cálculos de este trabajo.

La figura 2.11 representa físicamente la idea de dicha comparación.:

$$u_2^{\text{real}} \approx u_2^{\text{aprox}} \quad 2.5.15$$



**Ilustración 2.11: Extrapolación de resultados**

Se deduce que, en el caso de que se pueda reproducir la curva de comportamiento de la estructura modificada mediante la aproximación de primer orden, esto será suficiente para confirmar el correcto cálculo de la sensibilidad. Parece evidente que cuanto mayor sea la diferencia entre la curva de comportamiento extrapolada y la curva del problema real modificado, mayor será el error en el cálculo de los gradientes. Puede objetarse que en este desafortunado caso la extrapolación lineal de la respuesta no es lo suficientemente buena como para reproducir el comportamiento modificado y, en consecuencia, sería necesario calcular derivadas de orden superior. En definitiva, si la extrapolación es buena el cálculo de la sensibilidad es también bueno. En caso contrario se necesitaría un estudio más detallado para emitir un juicio sobre la bondad de los resultados.

## 2.6 APLICACIÓN DE LA SENSIBILIDAD A OTROS PROBLEMAS

El campo de la sensibilidad ha interesado mucho a los investigadores en los últimos tiempos, y se ha aplicado a problemas de distinto tipo. A continuación se citarán unas pocas referencias con una doble intención; por un lado, para que el lector interesado en algún campo en concreto pueda iniciar un acercamiento al problema y, por otro, para tener una visión panorámica de la utilidad de la sensibilidad. En ningún caso pretende ser una búsqueda exhaustiva, entre otras razones porque posiblemente tampoco es fácil seleccionar lo que se podría considerar como el artículo *definitivo* sobre el tema.

- **Problemas dinámicos:** Sobre la aplicación del cálculo de sensibilidades en los problemas dinámicos el lector encontrará dos tipos de estudios: los que calculan la sensibilidad de la respuesta y los que plantean la sensibilidad de los autovalores de las frecuencias propias del sistema. Greene *et al.* (1991) [XG1] presentan un esquema de diferencias finitas y un DDM semianalítico. Brandon (1991) [XB1] utilizan derivadas de segundo orden en el problema de autovalores del sistema dinámico. Simoes *et al.* (1994) [XS1] usa el DDM semianalítico aplicado a presas con solicitaciones sísmicas. Liu *et al.* (1995) [XL1] aplica el DDM analítico de

autovalores y autovectores. Kleiber *et al.* (1996) [XK1] estudia el caso de no linealidad dinámica.

- **Aerodinámicos:** Destáquese Hou *et al.* (1994) [XH1] con sensibilidad de formas en aerodinámica aplicando DDM y AVM.
- **Problemas térmicos:** El grupo de trabajo de Cardoso *et al.* (1991) [XC1] presenta un estudio teórico sobre el concepto de derivada material y su relación con la sensibilidad, muy al estilo de las referencias [A2], [A3] y [A4]. Yang (1993) [XY1] presenta otro estudio en la misma línea de los autores anteriores.
- **Problemas de contacto:** Im *et al.* (1993) [XI1] estudian la sensibilidad de parámetros. Facello *et al.* (1994) [XF1] se acercan al problema de optimización de formas con DDM.
- **No linealidad geométrica:** En este caso los autores suelen estar interesados en la sensibilidad de formas y parámetros cuando actúa la carga límite de la estructura. Wu *et al.* (1988) [XW1] estudian el DDM y la carga de colapso. Kleiber *et al.* (1996) [XK1] abordan el mismo problema.

## **BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA DEL CAPÍTULO**

- [A1] Adelman, H. M. y Haftka, R. T. "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems". *AIAA Journal*. 24, 823-831, 1986.
- [A2] Arora, J. S. y Cardoso, J. B.. "Variational Principle for Shape Design Sensitivity Analysis". *AIAA Journal*. 30, 538-547, 1992.
- [A3] Arora, J. S., Lee, T. H. y Cardoso, J. B. "Structural Shape Sensitivity Analysis: Relationship Between Material Derivative and Control Volume Approaches". *AIAA Journal*. 30, 1638-1648, 1992.
- [A4] Arora, J. S. "An exposition of the material derivative approach for structural shape sensitivity analysis". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 105, 41-62, 1993.
- [B1] Balbu, D., Shiakolas, P. S., Muthukrishnan, S. N., Wang, B. P. y Lawrence, K. L. "Shape design sensitivity analysis in finite element analysis using tetrahedral elements". *Advances in structural optimization*. Civil-Comp press. pp 53-55. Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis, 1994.
- [B2] Bugada, G. "Utilización de técnicas de estimación de error y generación de mallas en procesos de optimización estructural". Tesis doctoral. Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports. UPC. Barcelona. 1990.
- [B3] Buscaglia, G. C., Feijoo, R. A. y Padra, C. "A posteriori error estimation in sensitivity analysis". Informe técnico CNEA-CAB 4018. Comisión nacional de energía atómica. San Carlos de Bariloche. Argentina.
- [D1] Dems, K. "First- and second-order shape sensitivity analysis of structures". *Structural Optimization*. 3, 79-88, 1991.
- [D2] Dems, K. y Mróz, Z. "On shape sensitivity approaches in the numerical analysis of structures". *Structural Optimization*. 6, 86-93, 1993.
- [E1] El-Sayed, M. E. M. y Zumwalt, K. W. "Comparison of two different approaches for making design sensitivity analysis an integrated part of finite element analysis". *Structural Optimization*. 3, 149-156, 1991.
- [H1] Hernández, S. *Métodos de diseño óptimo de estructuras*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Colección Señor núm 8. 1990.
- [H2] Hinton, E. y Siens, J. "Aspects of Adaptive Finite Element Analysis and Structural Optimization". *Advances in structural optimization*. Civil-Comp press. pp. 1-25. Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis. 1994.
- [H3] Haug, E. J., Choi, K. K. y Komkov, V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Inc. 1986.
- [H4] Haftka, R. T. y Barthelemy, B. "On the accuracy of shape sensitivity". *Structural Optimization*. 3, 1-6, 1991.
- [G1] Gill, P. E. y Murray, W. *Numerical Methods for Constrained Optimization*. Academic Press, 1974.

- [G2] Goldberg, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1985.
- [K1] Kleiber, M. "Shape and non-shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic non-linearity". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 108, 73-79, 1993.
- [K2] Raju, K. K., Rao, G. V. y Venugopal, N. "Use of design sensitivity coefficients for prediction of structural behaviour after design modification". *Computers and Structures*. 33, 1329-1331, 1989.
- [N1] Navarrina, F. "*Una metodología general para optimización estructural en diseño asistido por ordenador*". Tesis doctoral. Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports. Barcelona, 1987.
- [O1] Oñate, E. *Cálculo de estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. CIMNE Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) Barcelona, 1992.
- [P1] Postek, E. y Hien, T. D. "On the application of the sensitivity analysis to the design of spatial bar structures". *Archives of Civil Engineering*. 38, 1-2, pp. 17-33, Polish Academy of Sciences, 1992.
- [R1] Rezaiee-Pajand, M. y Salary, M. R.. "Three-dimensional Sensitivity Analysis using a Factoring Technique". *Computers and Structures*. 49, 157-165, 1993.
- [S1] Sarma, M. A., Raju, K. K. y Rao, V. "Prediction of structural behaviour of plates after design modifications using sensitivity coefficients". *Computers and Structures*. 46, 183-186, 1993.
- [T1] Tseng, C. H. y Kao, K. Y. "Performance of an Hybrid Sensitivity Analysis in Structural Design Problems". *Computers and Structures*. 33, 1125-1131, 1989.
- [T2] Tseng, C. H. y Arora, J. S. "Numerical Verification of Design Sensitivity Analysis". *AIAA Journal*. 27, 117-119, 1989.
- [V1] Vanderplaats, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design*. Ed. MacGraw-Hill.
- [W1] Wang, S. Y., Sun, Y. y Gallagher, R. H.. "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures". *Computers and Structures* 20, 855-867, 1985.
- [Y1] Yoon, B. G. y Belegundu, A. D. "Iterative Methods for Design Sensitivity Analysis". *AIAA Journal*. 26, 1413-1415, 1988.
- [Y2] Yang, R. J., Lee, A. y McGeen, D. T. "Application of basis function concept to practical shape optimization problems". *Structural Optimization* 5, 55-63, 1992.
- [XB1] Brandon, J. A. "Second-Order Design Sensitivities to Assess the Applicability of Sensitivity Analysis". *AIAA Journal*. 29, 135-139, 1991.
- [XC1] Cardoso, J. B. y Arora, J. S. "Shape Design Sensitivity Analysis of Field Problems". *International Journal for Engineering Science*. 29, 1627-1637, 1991.
- [XF1] Fancello, E. A. y Feijóo, R. A. "Shape optimization in frictionless contact problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 37, 2311-2335, 1994.

- [XG1] Greene, W. H. y Haftka, R. T. "Computational aspects of sensitivity calculations in linear transient structural analysis". *Structural Optimization*. 3, 176-201, 1991.
- [XH1] Hou, G. J. W., Taylor, A. C. y Korivi, V. M. "Discrete Shape Sensitivity Equations for Aerodynamic Problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 37, 2251-2266, 1994.
- [XI1] Im, S. B. y Kwak, B. M. "Sensitivity analysis for automatic loading in frictional contact formulated by complementarity". *Computers and Structures*. 46, 355-364, 1993.
- [XK1] Kleiber, M. y Hien, T. D. "Parameter sensitivity in nonlinear dynamics, structural stability and plasticity". *Proceedings del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. Editores M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor. SEMNI, 1996.
- [XL1] Liu, C. Q., Liu, X. B. y Chang, C. C. "On Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems". *Computers and Structures*. 56, 141-145, 1995.
- [XS1] Simoes, L. M. C. y Lapa, J. A. M. "Optimal Shape of Dams Subject to Earthquakes". *Advances in structural optimization*. Civil-Comp press. pp. 119-130. Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis. 1994.
- [XY1] Yang, R. J. "Shape design sensitivity analysis of thermoelasticity problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 102, 41-60, 1993.