

Capítulo 3:

COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL MATERIAL: VISIÓN GENERAL DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En el estado del arte del capítulo precedente, se ha ofrecido una panorámica general de los planteamientos que conlleva el análisis de sensibilidad en estructuras. Se han enfatizado las estrategias de cálculo a nivel variacional y discreto, y también se han comentado aspectos generales, como el cálculo del error. Finalmente, se ha ofrecido una breve panorámica de otros problemas tipo que se interesan por dicho análisis. En este capítulo, se introducirá el tratamiento de los problemas de no linealidad del material en general, y en capítulos posteriores, se particularizará todavía más para los modelos elasto-plásticos y los modelos de daño.

3.1 LA NO LINEALIDAD DEL MATERIAL

A continuación se presenta brevemente el interés y la motivación del cálculo no lineal del material, así como los comportamientos constitutivos más comunes de los materiales de construcción en la ingeniería.

3.1.1 GENERALIDADES

El cálculo lineal elástico suele ser el método de análisis escogido para dimensionar el comportamiento de una estructura en la fase de diseño. Se puede considerar que, en general y para las estructuras más comunes, si un diseño cumple las exigencias de los estados límite de servicio con las hipótesis de la elasticidad, casi se puede asegurar que también va a cumplir el estado límite último. Esto es así porque, en las normativas, las restricciones en desplazamiento de los estados límite de servicio suelen ser más estrictas que las exigencias de seguridad de los estados límite último.

Sin embargo, en la ingeniería actual existen gran cantidad de situaciones donde los estados límites de servicio o las restricciones en desplazamiento pierden su sentido. Esto es especialmente cierto en diseños de estructuras o zonas de estructuras donde va existir una gran concentración de tensiones mientras sus desplazamientos van a ser despreciables. A modo de ejemplo ilustrativo se pueden considerar los siguientes casos:

- En las cabezas de vigas pretensadas existe una fuerte concentración de tensiones en un estado triaxial mientras que sus desplazamientos son prácticamente nulos en comparación con la

solicitación que reciben. Por ello, el diseño clásico elástico se ve desbordado y aparece la necesidad de un planteamiento alternativo basado en energía de fractura.

- Un problema parecido sucede en las vigas clásicas de hormigón. En zonas cercanas a los apoyos, el cortante introduce un esfuerzo tensional suplementario que hace obligatorio un armado especial en esa zona. Ese mismo efecto se encuentra en el punzonamiento de forjados. En ambos casos sería interesante evaluar el diseño bajo ese estado tensional extremo con un acercamiento más real al comportamiento del material.
- También es fácil imaginar que cualquier anclaje embebido en hormigón y que se diseñe para trabajar a tracción necesitará un análisis especial debido a la naturaleza de las tensiones que tendrá que soportar el hormigón en esa zona.
- Las clásicas tuberías de hormigón en masa que se utilizan en los desagües o en el transporte de algún tipo de fluidos se ven sometidas a un estado de flexión sobre lecho elástico que suele derivar en un cálculo del lado de la inseguridad si se usan las típicas simplificaciones elásticas.
- Algunas estructuras especiales como ganchos, ménsulas cortas o vigas de gran canto.

Otro de los campos de interés de un cálculo no lineal del material radica en la contribución resistente que hoy en día, y en un futuro próximo, van a tener los nuevos materiales que aparecen en la industria. Algunos de estos materiales, presentan un comportamiento estructural alejado del típico lineal elástico, y en consecuencia, la realización de un análisis con no linealidad en el material puede mejorar sensiblemente la seguridad o economía del diseño de los elementos estructurales.

Por otro lado, es evidente que en los planteamientos de reparación y rehabilitación de estructuras el cálculo no lineal es absolutamente necesario. En estos casos el diseño ya ha superado algún estado límite, ya se ha producido alguna rotura parcial, alguna fisuración o alguna deformación excesiva. Por lo tanto, aquello que interesa, es que la estructura no empeore y que pueda seguir trabajando. Es decir, que se mantenga el nuevo estado límite de servicio y se establezca el estado límite último.

3.1.2 COMPORTAMIENTOS CONSTITUTIVOS

El tipo de comportamiento que tiene un cierto material frente a una acción puede superar a veces la imaginación, ¡por ejemplo existen metales que se encogen frente al aumento de la energía calorífica!. En el caso del comportamiento estructural también pueden aparecer respuestas tensión-deformación alejadas de las curvas clásicas a las que se está acostumbrado. Pero, excepciones aparte, se puede afirmar que en términos amplios y generales los materiales presentan dos tipos básicos de comportamiento no lineal:

Comportamiento con endurecimiento. Cuando el material supera un cierto estado tensional límite empieza a perder rigidez, aunque puede seguir soportando incrementos de carga. En este caso, la curva de comportamiento muestra que a medida que aumenta la tensión las deformaciones suelen crecer más deprisa que el estado tensional. Entre materiales que se comportan de esta manera se pueden encontrar los de tipo metálico como el acero que se suelen asociar a modelos de plasticidad.

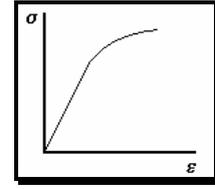


Ilustración 3.1:
Endurecimiento

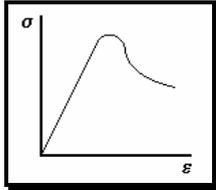


Ilustración 3.2:
Ablandamiento

Comportamiento con ablandamiento. Al superar cierto estado tensional límite el material pierde rigidez y no puede seguir soportando incrementos de carga. En este caso el material se va descargando aunque su deformación sigue aumentando. Este comportamiento es característico de los materiales como el hormigón que se puede asociar a modelos de fisuración.

3.2 LA SENSIBILIDAD EN LA NO LINEALIDAD DEL MATERIAL

En el capítulo anterior se han establecido el interés y la justificación del desarrollo del análisis de sensibilidad en estructuras particularizado para el caso elástico lineal. En el apartado anterior se ha justificado la motivación del análisis no lineal del material. A continuación se van a describir las aproximaciones a la resolución del problema que aparecen en la literatura.

3.2.1 ESTADO DEL ARTE

Uno de los primeros artículos que existen sobre el tema es el debido a Ryu *et al.* (1985) [R1]. En él se presentan unas líneas generales para atacar cualquier tipo de no linealidad desde la perspectiva discreta. La notación y conceptos están claramente en la línea de los elementos finitos. Básicamente los autores plantean la ecuación secante no lineal general de equilibrio:

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0 \quad 3.2.1$$

donde \mathbf{q} son las variables de diseño y \mathbf{u} los desplazamientos incógnita.

A continuación derivan la ecuación de equilibrio:

$$\frac{d}{d\mathbf{q}} [\mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{q})] = 0 \quad 3.2.2$$

Esto les lleva directamente a la expresión siguiente:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{q}} \right) \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{q}} \quad 3.2.3$$

Reagrupando convenientemente los términos se obtiene:

$$\left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dq} = \frac{df}{dq} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q} \mathbf{u} \quad 3.2.4$$

Se distinguen entonces varias posibilidades:

- Si el problema es lineal elástico la ecuación 3.2.4 se reduce a las expresiones que se habían deducido en el capítulo 2. Esto es:

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dq} = \frac{df}{dq} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q} \mathbf{u} \quad 3.2.5$$

- Si se utiliza un método que permite el cálculo secante, entonces \mathbf{K} es conocida y sería posible hallar $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{u}$.
- También en el caso secante se propone un esquema iterativo alternativo según el cual:

$$\mathbf{K} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dq} \right)^i = \frac{df}{dq} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dq} \right)^{i-1} \quad 3.2.6$$

- Si en la resolución de la ecuación de equilibrio del problema, se utiliza la matriz tangente en una estrategia incremental iterativa, entonces se puede resolver directamente el siguiente sistema en el estado final de equilibrio:

$$\mathbf{K}_T \left(\frac{d\mathbf{u}}{dq} \right) = \frac{df}{dq} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q} \mathbf{u} \quad 3.2.7$$

Aprovechando la definición de matriz tangente según la cual:

$$\left[\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \right] = \mathbf{K}_T \quad 3.2.8$$

Sin duda estos planteamientos adolecen de ser demasiado generalistas y en consecuencia no pueden ser aplicados directamente para cualquier formulación constitutiva no lineal. Ryu *et al.*, a lo largo del artículo antes mencionado, reconocen que es necesaria más investigación sobre el tema: *'For material nonlinearity (such as hypoelastic, elastic-plastic, creep, viscoplastic, etc) partial differentiation of Cauchy stress vector with respect to design is not easy to calculate. Further investigation is needed in this area'* o bien en las conclusiones se puede leer: *'It is concluded that the methods of design sensitivity analysis can be incorporated into general purpose nonlinear finite element analysis codes. however, more research is needed to treat various types of material nonlinearities.'* Con lo cual la pretensión de dicho artículo es más dar a conocer la problemática y sugerir unas líneas de investigación que intentar resolverla.

Otro par de artículos sobre el tema de la no linealidad en general son de Choi *et al.* (1987) [C1] (1988)[S1]. En ellos se presenta una formulación variacional, basada en las expresiones integrales

de equilibrio, y que incluye el análisis de sensibilidad de parámetros en estructuras con un presunto comportamiento no lineal geométrico y del material. Su planteamiento pretende ser general, pero en realidad sólo profundizan en el desarrollo de la no linealidad geométrica, cosa que queda demostrada cuando uno observa que todos los ejemplos presentan un módulo de elasticidad constante. Posteriormente publican un nuevo artículo en la misma línea que no aporta grandes novedades (1992) [S2].

El primer artículo con un intento de resolver el problema discreto con no linealidad del material es el de Gopalakrishna *et al.* (1988)[G1]. En el artículo se propone una metodología de resolución para problemas con una ley constitutiva que es función no lineal de las deformaciones, según el modelo de no linealidad elástica de Ramberg-Osgood¹.

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{\left(1 + \left|\frac{E\varepsilon}{\sigma_y}\right|^n\right)^{1/n}} \quad \text{con } n > 1 \quad 3.2.9$$

La solución de equilibrio estructural del problema no lineal se consigue a través de un procedimiento incremental-iterativo de Newton-Raphson:

$$\left[\mathbf{K}_T(u_j^{i-1}, q) \right]_j^{i-1} \Delta u_j^i = f_j(q) - \mathbf{R}_j^{i-1}(\sigma_j^{i-1}, q) \quad 3.2.10$$

Donde j es el contador incremental y i es el contador iterativo, y el término $\mathbf{R}_j^{i-1}(\sigma_j^{i-1}, q)$ corresponde al residuo de la iteración previa.

Los autores proponen la derivación de la ecuación de equilibrio que se tiene en cada iteración, en lugar de derivar la ecuación equilibrada del sistema:

$$\frac{d}{dq} \left\{ \left[\mathbf{K}_T(u_j^{i-1}, q) \right]_j^{i-1} \Delta u_j^i \right\} = \frac{d}{dq} \left\{ f_j(q) - \mathbf{R}_j^{i-1}(\sigma_j^{i-1}, q) \right\} \quad 3.2.11$$

obteniendo un sistema de ecuaciones que se debe resolver en cada iteración:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{K}_T(u_j^{i-1}, q) \right]_j^{i-1} \left\{ \frac{d\Delta u}{dq} \right\}_j^i = \\ \left\{ \frac{df}{dq} \right\}_j - \left\{ \frac{d\mathbf{R}(\sigma_j^{i-1}, q)}{dq} \right\}_j^{i-1} - \frac{d}{dq} \left[\mathbf{K}_T(u_j^{i-1}, q) \right]_j^{i-1} \left\{ \Delta u \right\}_j^i \end{aligned} \quad 3.2.12$$

La sensibilidad puede calcularse en forma incremental según:

$$\left. \frac{du}{dq} \right|_j^i = \left. \frac{du}{dq} \right|_j^{i-1} + \left. \frac{d\Delta u}{dq} \right|_j^i \quad 3.2.13$$

Con la hipótesis de comportamiento constitutivo no lineal de 3.2.9 las expresiones derivadas del sistema de ecuaciones 3.2.12 tienen un marcado carácter explícito, y por lo tanto puede derivarse sin dificultad. De hecho, en el texto aparecen las expresiones analíticas de la derivación. El método es evidentemente limitado y sólo funcionaría en modelos explícitos de no linealidad elástica. Sin embargo, presenta la novedad de calcular la derivada a través de la ecuación de equilibrio incremental.

Posteriormente Cardoso *et al.* (1988) [C2] presentan una teoría parecida a la de Choi *et al.* Pero en este caso, sí que aparecen ejemplos resueltos analíticamente y con una ley constitutiva no lineal del tipo:

$$\sigma = E\epsilon^{1/2} \quad 3.2.14$$

Se aprecia que la formulación también es explícita y derivable y, por consiguiente, también en este caso las expresiones serán derivables analíticamente. El mismo grupo de trabajo publica con Tsay *et al.* (1990)[T1][T2] un par de artículos donde de forma más completa plantean su concepción del problema. En el citado texto desarrollan las expresiones variacionales integrales y proceden a plantear la diferenciación directa (DDM) y el problema adjunto (AVM). En este caso la no linealidad del material se introduce con modelos de plasticidad y viscoplasticidad muy simples, de carácter explícito y que en consecuencia pueden ser derivados analíticamente. Posteriormente Yao *et al.* (1992) [Y1][Y2] presentan un modelo endocrónico sin superficie de fluencia en la misma línea de modelos no lineales explícitos. Otro artículo de carácter parecido a los anteriores es el de Arora *et al.* (1992) [A1], los cuales establecen unos principios variacionales teóricos para el DDM y el AVM basados en conceptos como el volumen de control y la derivada material.

Unos artículos sobre la no linealidad elástica planteada desde el problema adjunto se encuentran en Phelan *et al.* (1991) [P1] y Tortorelli (1992) [T3]. El desarrollo en ambos casos es muy teórico y plantean el problema desde un punto de vista variacional.

En los últimos años Kleiber *et al.* (1991) [K1] y (1993) [K2] formulan las expresiones integrales variacionales y su correspondiente discretización para elementos finitos en un intento de obtener una metodología general para la no linealidad material y geométrica. La ecuación secante que se plantea es igual a la 3.2.1 de Ryu *et al.* y conduce a los mismos resultados que se han comentado antes. Sin embargo, dado que en los materiales con propiedades dependientes de la historia suele

¹ El artículo cita la siguiente fuente: R.M. Richard and B.J. Abbott, *Versatile elastic-plastic stress-strain formula*. J. Eng. mech. ASCE, 111, 511-515. 1984.

ser más fácil obtener una matriz tangente que una secante, los autores deciden exigir el equilibrio para un incremento infinitesimal, según la ecuación siguiente:

$$\mathbf{K}_T[\mathbf{u}(\mathbf{q}), \mathbf{q}] \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) \quad 3.2.15$$

donde el punto superior representa la tasa de variación de la magnitud.

En consecuencia, se propone la derivación de la ecuación diferencial de equilibrio anterior 3.2.15, esto es:

$$\frac{d}{d\mathbf{q}}[\mathbf{K}_T \dot{\mathbf{u}}] = \frac{d}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{f}} \quad 3.2.16$$

con lo que se obtiene:

$$\mathbf{K}_T \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{d\mathbf{q}} = \frac{d\dot{\mathbf{f}}}{d\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{u}} \quad 3.2.17$$

Una vez satisfecho el equilibrio estructural de 3.2.15 y habiendo actualizado todas las variables, se podrían calcular todos los términos de la expresión 3.2.17, incluso el término $d\mathbf{u}/d\mathbf{q}$ que debería tomar el valor que tenía en el paso anterior de carga. Finalmente, sólo restaría actualizar el valor de la derivada a través de una linealización:

$$\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{d\mathbf{q}} \approx \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{d\mathbf{q}} + \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{d\mathbf{q}} \Delta \mathbf{t} \quad 3.2.18$$

Dichas expresiones se aplican al cálculo con no linealidad geométrica principalmente y sólo al final Kleiber *et al.* comentan la necesidad de utilizar la matriz consistente para poder conseguir la sensibilidad con no linealidad del material.

Posteriormente Kleiber *et al.*(1994) [K3] formulan el problema desde un enfoque más de acuerdo con la notación clásica discreta de los elementos finitos y con los mismos objetivos ambiciosos. Después de plantear las ecuaciones integrales de equilibrio deducen la expresión diferencial 3.2.15. A continuación plantean la ecuación incremental de equilibrio de acuerdo con la matriz tangente consistente y obtienen el siguiente sistema incremental de equilibrio.

$$\mathbf{K}_T[\mathbf{u}(\mathbf{q}), \Delta \mathbf{u}, \mathbf{q}] \Delta \mathbf{u}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}^t \quad 3.2.19$$

Donde t hace el papel de pseudotiempo, utilizado para señalar el proceso de incremento de la carga y \mathbf{R} juega el papel del residuo en el paso anterior de carga.

Este sistema de ecuaciones se resuelve mediante un proceso iterativo de manera que para llegar a establecer el equilibrio estructural se plantea:

$$\mathbf{K}_T[\mathbf{u}(\mathbf{q}), \Delta \mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{q}] \delta \Delta \mathbf{u}^i(\mathbf{q}) = \mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}^i \quad 3.2.20$$

El subíndice i hace referencia a las iteraciones tipo Newton-Raphson necesarias para llegar al equilibrio del sistema.

Los autores proponen la derivada de la ecuación incremental 3.2.19 y deducen la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}_T \frac{d}{dq}(\Delta \mathbf{u}) = \frac{d}{dq} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dq} \right)^{t+\Delta t} - \frac{d}{dq} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dq} \right)^t - \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial q} \Delta \mathbf{u} \quad 3.2.18$$

La idea sería llegar al equilibrio, y a partir de la matriz tangente calcular en un solo paso la derivada del incremento para posteriormente actualizar la sensibilidad. La expresión es parecida² a la que se obtenía en Ryu *et al.*, y sigue adoleciendo de ser muy general, pues la expresión ${}^t d\mathbf{R}/dq$ no parece tener una expresión trivial. Posteriormente, extienden las expresiones al sistema dinámico y con un planteamiento AVM. Los ejemplos de aplicación que se muestran son, exclusivamente, de no linealidad geométrica.

3.2.2 UN CAMINO POR RECORRER

Hasta el momento se ha presentado una visión general de como se ha atacado el problema de la no linealidad del material. Este carácter general ha impedido particularizar las expresiones a modelos concretos excepto en el caso de ecuaciones constitutivas derivables y explícitas

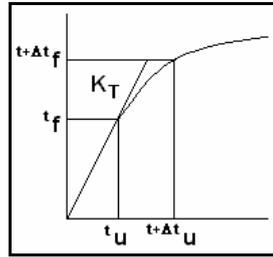
Esto provoca que algunos puntos queden oscuros, sobre todo cuando se pretendan aplicar las formulaciones de modelos constitutivos no lineales como la elastoplasticidad o el daño. En los capítulos siguientes se intentará dar una respuesta a las cuestiones planteadas.

Por ejemplo:

- No es tan evidente, que la formulación incremental para calcular la sensibilidad pueda dar una respuesta adecuada, cuando el modelo constitutivo de plasticidad utilice un esquema de integración implícito. De hecho la linealización propuesta en 3.2.18 sería cierta para pequeños pasos de carga que suelen asociarse a modelos explícitos de integración.

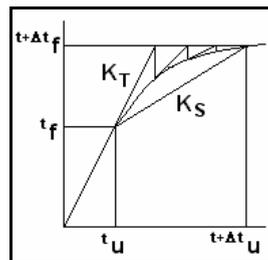
² Kleiber *et al.*[K3] comentan las diferencias con las expresiones del artículo de Ryu *et al.*[R1]: '*The drawback in it seems to be that the use of the tangent stiffness matrix \mathbf{K}_T does not directly account for a specific time integration scheme employed for solving the incremental equilibrium equation.*'

Ilustración 3.3 La aproximación incremental produce errores



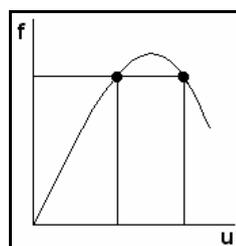
- También se plantea la duda de tener que escoger siempre la formulación incremental. O si por el contrario, al particularizar el cálculo en plasticidad o en modelos de daño se podría emplear alguna formulación alternativa, como por ejemplo la estrategia iterativa de [G1] o aprovechar el carácter secante del modelo correspondiente.

Ilustración 3.4: Planteamiento incremental-iterativo y secante



- Por otro lado, el cálculo de la sensibilidad se hace a través de la derivación de una ecuación de equilibrio a carga constante. Es evidente que mientras se traten modelos de endurecimiento el problema global de equilibrio puede converger con un método incremental-iterativo tipo Newton-Raphson y, por lo tanto, para cada nivel de fuerzas se estará en condiciones de calcular la sensibilidad. En cambio, con ablandamiento será necesario el uso de la estrategia de longitud de arco, y entonces, se debería uno preguntar si este hecho puede afectar de alguna manera al cálculo de sensibilidades de los modelos de daño.

Ilustración 3.5: El ablandamiento conduce a más de un punto de equilibrio



BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA DEL CAPÍTULO

- [A1] Arora, J. S. y Cardoso, J. B. "Variational Principle for Shape Design Sensitivity Analysis". *AIAA Journal*. 30, 538-547, 1992.
- [C1] Choi, K. K. y Santos, J. L. T. "Design sensitivity analysis of non-linear structural systems. Part 1 : Theory". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, 2039-2055, 1987.
- [C2] Cardoso, J. B. y Arora, J. S. "Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics". *AIAA Journal* .26, 595-603, 1988.
- [G1] Gopalakrishna, H. S. y Greimann, L. F. "Newton-Raphson procedure for the sensitivity analysis of nonlinear structural behaviour". *Computers and Structures* 30, 1263-1273, 1988.
- [K1] Kleiber, M., Hien, T. D. y Postek, E. "Incremental Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Design Sensitivity Problems". *Finite Elements in the 90's*. pp 241-247, E. Oñate, J. Periaux and A. Samuelsson Editors. Springer-Verlag/CIMNE. Barcelona 1991.
- [K2] Kleiber, M. "Shape and non-shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic non-linearity". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 108, 73-97, 1993.
- [K3] Kleiber, M., Hien, T. D. y Postek, E. "Incremental sensitivity analysis for nonlinear mechanic applications". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37, 3291-3308, 1994.
- [P1] Phelan, D. G., Vidal, C. y Haber, R. B. "An adjoint variable method for sensitivity analysis of non-linear elastic systems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 31, 1649-1667, 1991.
- [R1] Ryu, Y. S., Haririan, M., Wu, C.C. y Arora, J. S. "Structural design sensitivity analysis of nonlinear response". *Computers and Structures* 21, 245-255, 1985.
- [S1] Santos, J. L. T. y Choi, K. K. "Sizing design sensitivity analysis of non-linear structural systems. Part II: Numerical method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26, 2097-2114, 1988.
- [S2] Santos, J. L. T. y Choi, K. K. "Shape design sensitivity analysis of non-linear structural systems". *Structural Optimization* 4, 23-35, 1992.
- [T1] Tsay, J. J. y Arora, J. S. "Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 1: General theory". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 81, 183-208, 1990.
- [T2] Tsay, J. J., Cardoso, J. E. B. y Arora, J. S. "Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 2: Analytical examples". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 81, 209-228, 1990.
- [T3] Tortorelli, D. A. "Sensitivity analysis for non-linear constrained elastostatic systems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 33, 1643-1660, 1992.

[Y1] Yao, S. Y. y Arora, J. S. "Design sensitivity analysis of nonlinear structures using endochronic constitutive model. Part 1: General development". *Computational Mechanics* 10, 39-57, 1992.

[Y2] Yao, S.Y. y Arora, J. S. "Design sensitivity analysis of nonlinear structures using endochronic constitutive model. Part 2: Discretization and applications". *Computational Mechanics* 10, 59-72, 1992.