

## Apéndice 5.1:

# ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA MODELO DE DAÑO: EJEMPLOS DE APLICACIÓN

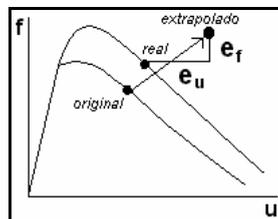
Después de definir en el capítulo 5 una metodología general que permite calcular la sensibilidad para un modelo de daño, y su posterior generalización a cualquier problema no lineal, se va a ilustrar el comportamiento del algoritmo 5.4 del análisis de sensibilidad sobre un conjunto de ejemplos. Los primeros constan de mallas sencillas formadas por elementos aislados y su intención es verificar el comportamiento del análisis de sensibilidad bajo diferentes estados tensionales. Posteriormente, se describe la aplicación de dicho análisis en problemas bidimensionales y tridimensionales definidos con mallas de distinta densidad. Todos los ejemplos planteados se han resuelto con un control de desplazamientos, bien de tipo esférico o bien puntual en un nodo, con la intención de probar ambas posibilidades cuando fuera menester.

### GENERALIDADES

La medida del error en las respuestas del análisis de sensibilidad es siempre un tema delicado, tal y como se comentó en el capítulo 2, y se comprobó en los ejemplos del apéndice 4.1. En este caso, el uso del control de desplazamientos y la posibilidad de extrapolar el comportamiento, tanto en desplazamientos como en cargas, obliga a reformular el concepto de error.

En concreto, se define la magnitud del error como la contribución de dos errores, el de los desplazamientos y el de las fuerzas, tal y como muestra la ilustración E5.1.

**Ilustración E5.1: Error en fuerzas y desplazamientos**



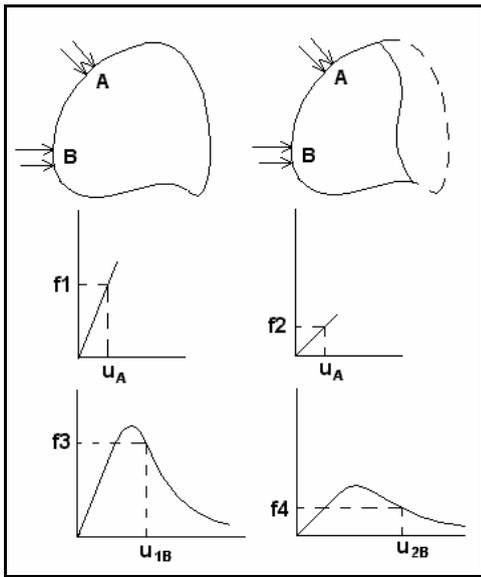
Para medir el error en la extrapolación se ha definido una norma *claramente desfavorable* que *suma* los errores relativos cometidos en la extrapolación de fuerzas y en la de desplazamientos.

La medida del error relativo se realiza como diferencia absoluta entre la solución modificada real y la extrapolación de la original según la fórmula siguiente que es una generalización de la propuesta en el apéndice 4.1:

$$\text{error} = \frac{|u^{\text{real}} - u^{\text{extrapolado}}|}{|u^{\text{real}}|} + \frac{|f^{\text{real}} - f^{\text{extrapolado}}|}{|f^{\text{real}}|} \quad \text{E5.1.1}$$

Para tener en cuenta la magnitud del error relativo y el grado de mejora en la predicción del comportamiento se comparan dos casos, la extrapolación directa sin el uso de la sensibilidad y la extrapolación con la sensibilidad.

Se observa que la condición sobre el control de desplazamientos impone el valor del movimiento en algún nodo o conjunto de nodos. Esto representa que el error anteriormente definido se podría reducir fácilmente si se efectúa la medida de dicho error sobre el nodo controlado o en algún nodo



**Ilustración E5.2: Nunca hay que medir el error en el nodo que se controla con arc length**

que medir el error en el nodo que se controla. Por este motivo, en los ejemplos pequeños, se realiza siempre un control esférico de desplazamientos. En cambio, en las mallas más densas este defecto queda subsanado siempre que el nodo controlado no sea vecino del mesurado.

Para estudiar la bondad del análisis de sensibilidad en un cálculo no lineal con un modelo de daño se van a definir dos tipos de gráficos:

### Curvas estructurales de comportamiento

Su intención es la misma que en los ejemplos del apéndice 4.1, se pretende comparar el comportamiento *cualitativo* de las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en los casos siguientes:

- El diseño original.
- El diseño modificado.
- La extrapolación de primer orden de la estructura original a partir de los resultados del análisis de sensibilidad.

### Curvas de error relativo

Su intención es comparar de forma *cuantitativa* el error en el cálculo de la sensibilidad. Ya se ha comentado que en este caso la fórmula para medir el error es distinta de la utilizada en el apéndice 4.1. Los tipos de curvas serán los siguientes:

- Diseño original extrapolado con la sensibilidad.
- Diseño original como predicción de comportamiento.

En primer lugar se aborda el cálculo de ejemplos con mallas sencillas, trabajando en diferentes estados tensionales y con distintos elementos cuadrangulares.

### **Ejemplo 5.1:**

---

**Objetivo:** En este primer caso se pretende observar el comportamiento del algoritmo sobre un elemento de 4 nodos trabajando a tracción pura y tomando como variable de diseño el ancho de la pieza. Recuérdese que este mismo problema era uno de los que daba peores resultados en elastoplasticidad.

### DESCRIPCIÓN

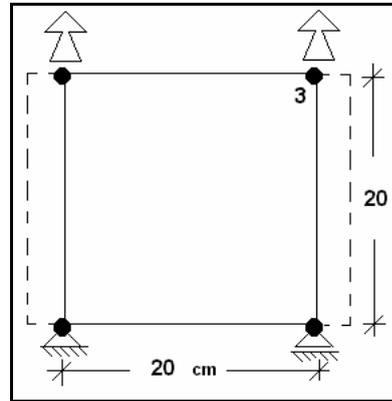
#### Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	2.1 10 <sup>6</sup>	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	2.0 10 <sup>4</sup>	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>

Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>
---------------------	-------	-------------------

**Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1 cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción tal que  $\Delta l=0.005$  cm.
- 300 pasos de carga, integrando el elemento con 4 puntos.
- Criterio de convergencia: se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado el análisis normal de la estructura modificada según un incremento de 1 cm. de la variable de diseño.

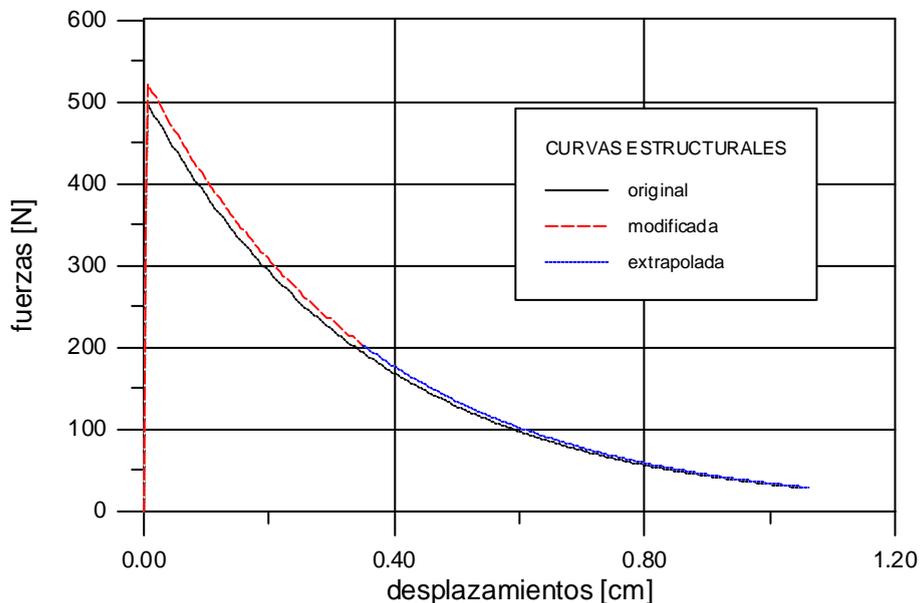


**Ilustración E5.3: Definición geométrica del problema 5.1**

**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS**

Lo primero que se observa es que la curva extrapolada reproduce notablemente bien el comportamiento de la estructura modificada. De hecho la superposición es casi perfecta, motivo por el cual se han dibujado mitad y mitad.

**Gráfica E5.1: Curva fuerza-desplazamiento en el nodo 3**

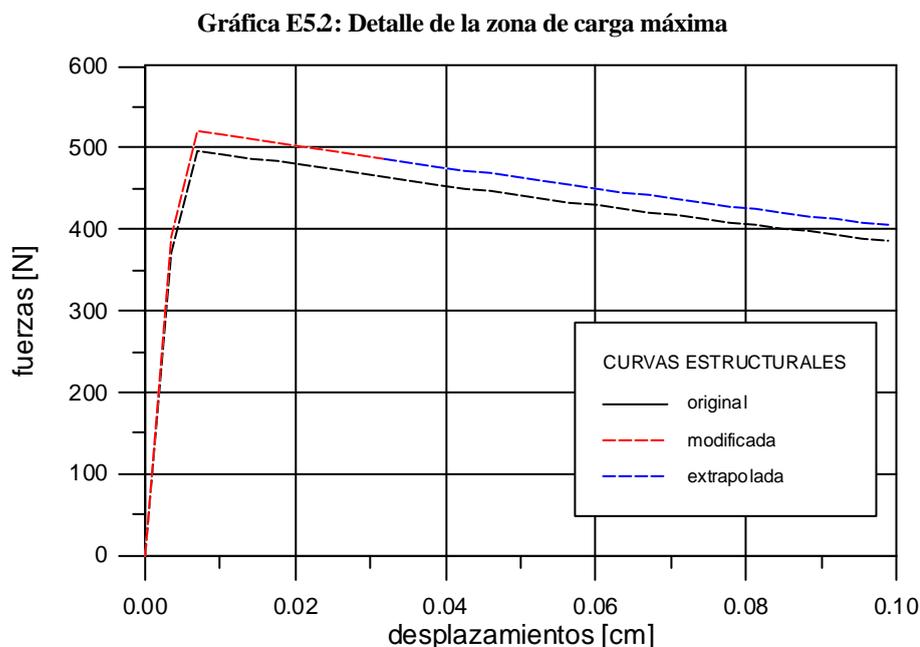


La estructura modificada y la original tienen un comportamiento estructural diferente, dado que entre ambas hay una diferencia en el tamaño de la sección resistente. En el caso del cálculo a carga constante dicha propiedad no podía ser captada, tal y como se demostró en los ejemplos de elastoplasticidad con endurecimiento. En cambio, gracias a la estrategia de la longitud de arco se ha podido extrapolar en las direcciones de fuerzas y desplazamientos y, por consiguiente, predecir satisfactoriamente el comportamiento estructural.

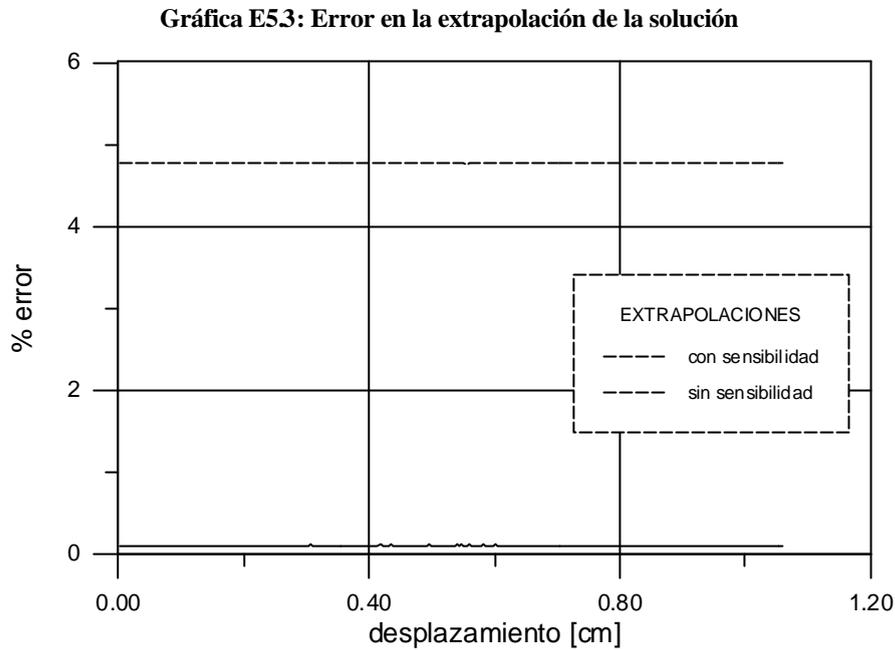
El cálculo de la carga última se obtiene como la suma de las cargas últimas de los dos nodos solicitados, y se observa que da un número razonablemente bueno. En concreto, la carga última elástica se obtiene con un 0.7% de error respecto de la que predice la teoría clásica de Resistencia de Materiales.

	Res. Mat.	Modificada	Extrapolada
<b>Carga última [N]</b>	1050	1043.3	1042.3
<b>Error</b>		0.64%	0.73%

Dicho error es debido a que el control esférico de desplazamientos impone un paso de carga que no conduce directamente a la cúspide, motivo por el cual aparece una cierta inclinación en la zona cercana al máximo tal y como muestra la gráfica E5.2.



Por su parte, el diagrama del error muestra que la extrapolación a partir de la sensibilidad se acerca mucho a la respuesta del problema modificado. Según el siguiente resultado:



En este primer ejemplo se ha superado con notable éxito la dificultad que presentaba el análisis elastoplástico a carga constante y se ha podido extrapolar correctamente en las dos direcciones. Esta es la razón de obtener un resultado tan bueno comparado con el homólogo que se tenía en elastoplasticidad.

### **Ejemplo 5.2:**

---

**Objetivo:** En este caso se prueba el mismo elemento del ejemplo anterior, pero sometido a un estado de flexión pura. Igualmente se vuelve a tomar como variable de diseño el ancho de la pieza y se incrementa en la misma magnitud, de manera que entre la estructura original y la modificada hay una diferencia del 5% respecto a la variable de diseño. Es de esperar que el cálculo de la flexión no sea correcto, debido a que dicho elemento no reproduce de forma adecuada el mecanismo físico de la flexión, pero la intención del problema es comprobar la modelización matemática de la sensibilidad.

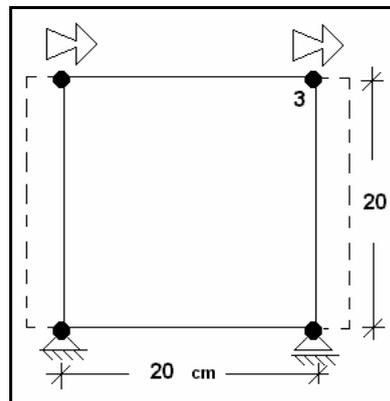
### **DESCRIPCIÓN**

**Propiedades del material:**

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^6$	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2.0 \cdot 10^4$	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

**Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1 cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción de  $\Delta l=0.005$  cm.
- 300 pasos de carga, se integra con 4 puntos.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 5% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado el análisis de la estructura modificada según un incremento de 1 cm. en la variable de diseño.

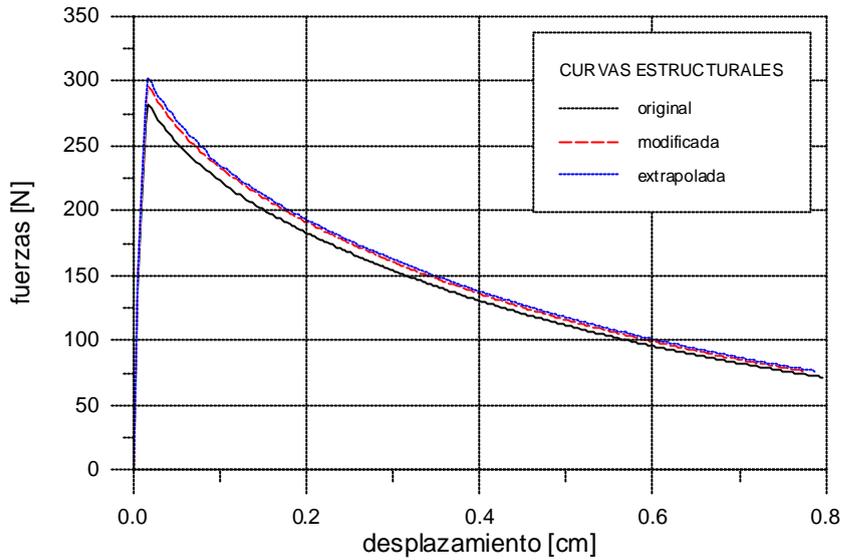


**Ilustración E5.4: Definición geométrica del ejemplo 5.2**

**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS**

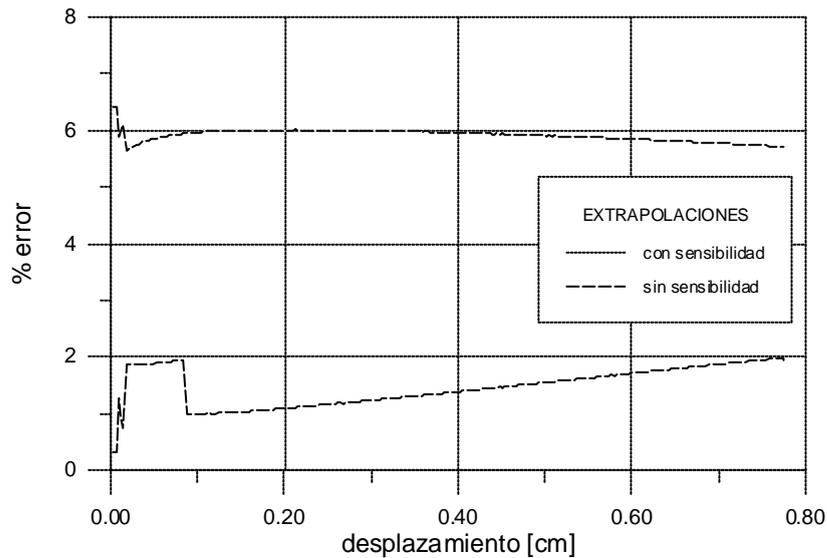
Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento horizontal en el nodo 3 de la malla. Las gráficas se obtienen de un análisis en la estructura original, la original con la extrapolación de primer orden a partir de la sensibilidad, y finalmente, la que corresponde al análisis de la estructura real modificada.

**Gráfica E54: Curvas de comportamiento a flexión en el nodo 3**



La extrapolación de la solución es notablemente buena, a pesar de que el elemento cuadrilátero de 4 nodos no reproduce nada bien el problema físico de flexión. Por ello, se corrobora que el análisis discreto de la sensibilidad puede parecer correcto pero en cambio no ir parejo con el cálculo real analítico. Se destaca que el valor de la carga última elástica está muy por encima del valor esperado según Resistencia de Materiales. Ello es debido a la rigidización que tiene el elemento frente a la sollicitación por flexión.

**Gráfica E55: Error en el ejemplo 5.2**



Según la definición de la norma desfavorable del error comentada unas líneas más arriba, se observa que el error se mantiene estable y con un valor razonablemente bajo. En el tramo inicial,

donde se inicia el daño aumenta la magnitud del error en la extrapolación. Esto se asocia a que los puntos de integración están cambiando de régimen de comportamiento y, en flexión, el modelo parece ser más sensible a estos efectos. Finalmente observar que para daños elevados el modelo también da una respuesta peor.

### **Ejemplo 5.3:**

---

**Objetivo:** A continuación se presenta el mismo estudio de tracción pura que se ha hecho en el ejemplo 5.1 pero esta vez sobre un elemento de 8 nodos. Para asegurar la deformación pura por esfuerzo axial se distribuye la carga, de manera que se asegura una deformación plana perfecta en todas las secciones transversales de la pieza.

#### **DESCRIPCIÓN**

##### **Propiedades del material:**

Módulo de Elasticidad E	2.1 10 <sup>6</sup>	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	2.0 10 <sup>4</sup>	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

##### **Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1cm.
- Longitud de arco esférica con restricción  $\Delta l=0.005$  cm
- 150 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss para facilitar la convergencia.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza.
- Se realizan los mismos dos análisis de los ejemplos anteriores, incrementando el ancho en 1cm.

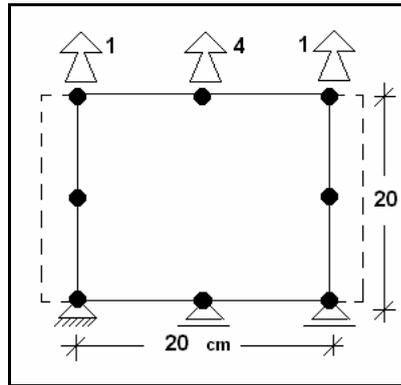
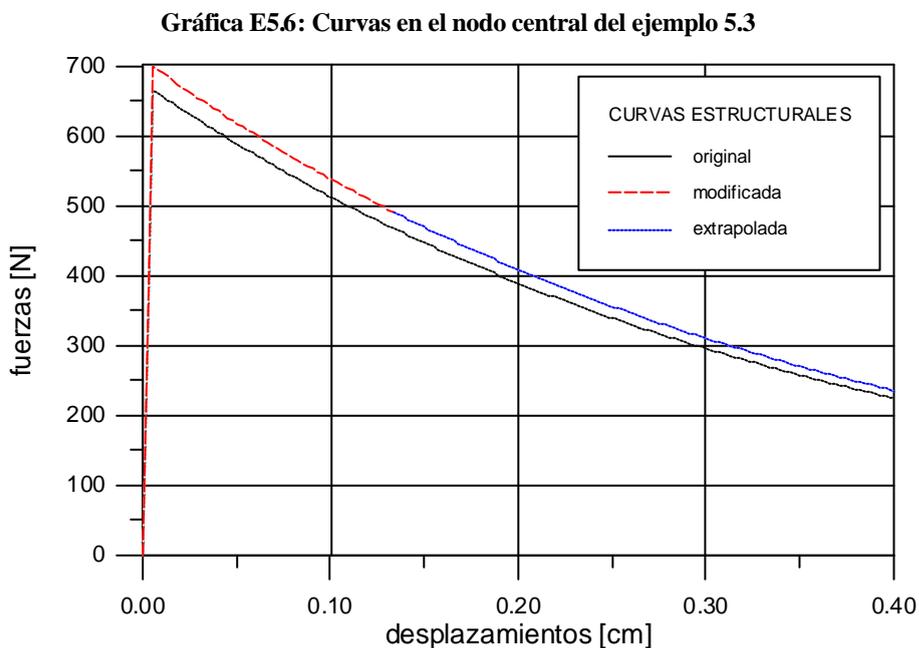


Ilustración E5.5: Definición geométrica del ejemplo

5.3

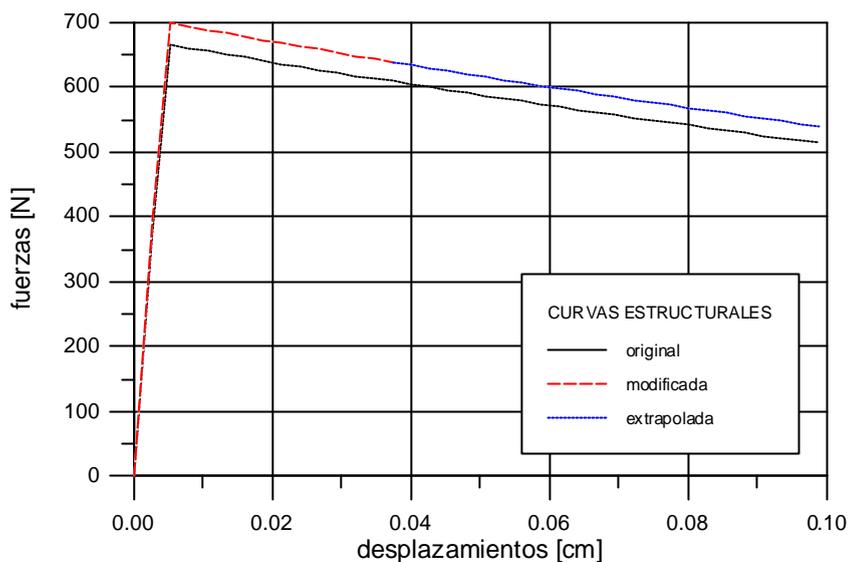
### VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Se ha definido la curva de respuesta fuerza-desplazamiento vertical en el nodo central superior solicitado y el resultado es el siguiente:



En este caso se observa que las dos gráficas, extrapolada y modificada, se superponen igual de bien que en el primer caso. Por lo tanto, el problema de tracción pura también se reproduce de forma perfecta en el elemento. A nivel más detallado se seguiría manteniendo la superposición de las curvas, motivo por el cual se representa mitad y mitad de cada tipo.

**Gráfica E5.7: Detalle de la zona de carga máxima**

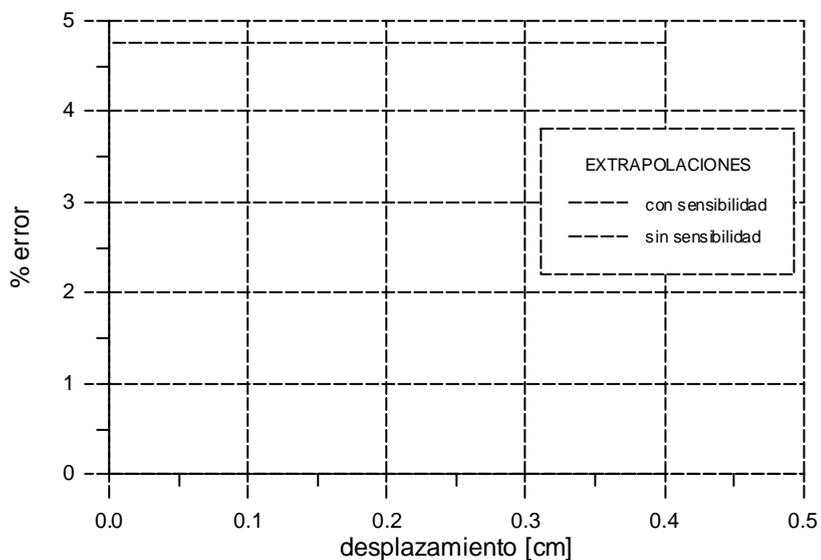


También en este caso la carga máxima se calcula como contribución de las cargas aplicadas en todos los nudos, esto conduce a la confección de la tabla siguiente:

	<b>Res. Mat.</b>	<b>Modificada</b>	<b>Extrapolada</b>
<b>Carga última [N]</b>	1050	1048	1048
<b>Error</b>		0.16%	0.16%

El error obtenido en este ejemplo todavía es más pequeño que en el del primer problema propuesto. De hecho, la carga última también se ha hallado con mayor precisión a través del elemento de 8 nodos que el de 4.

**Gráfica E5.8: Error en el nodo central del ejemplo 5.3**



A la luz de los resultados, se puede afirmar que el comportamiento del modelo constitutivo afecta directamente a la calidad de la sensibilidad. Es decir, el modelo de daño con el que se está trabajando reproduce a la perfección el estado de tracción pura, mientras que la existencia de un estado mixto de tensiones introduce una cierta distorsión en su comportamiento. Obsérvese que es exactamente lo mismo que sucede con los resultados obtenidos en sensibilidad, los estados de tracción tienen errores casi nulos, mientras que los de flexión tienen un cierto porcentaje 1-2%.

### **Ejemplo 5.4:**

---

**Objetivo:** La misma pieza que en el caso anterior, pero ahora sometida a un estado de flexión pura y tomando como variable de diseño el ancho de la pieza.

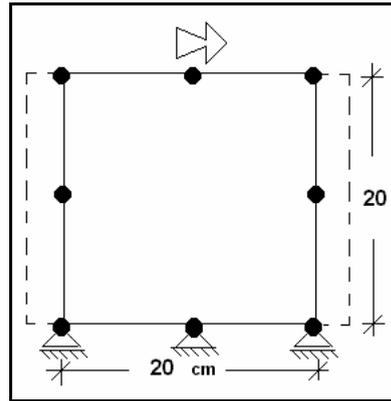
#### **DESCRIPCIÓN**

##### **Propiedades del material:**

Módulo de Elasticidad E	2.1 10 <sup>6</sup>	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	2.0 10 <sup>4</sup>	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

##### **Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción  $\Delta l=0.005$  cm
- 150 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado el análisis de la estructura modificada según un incremento de 1 cm. en la variable de diseño.

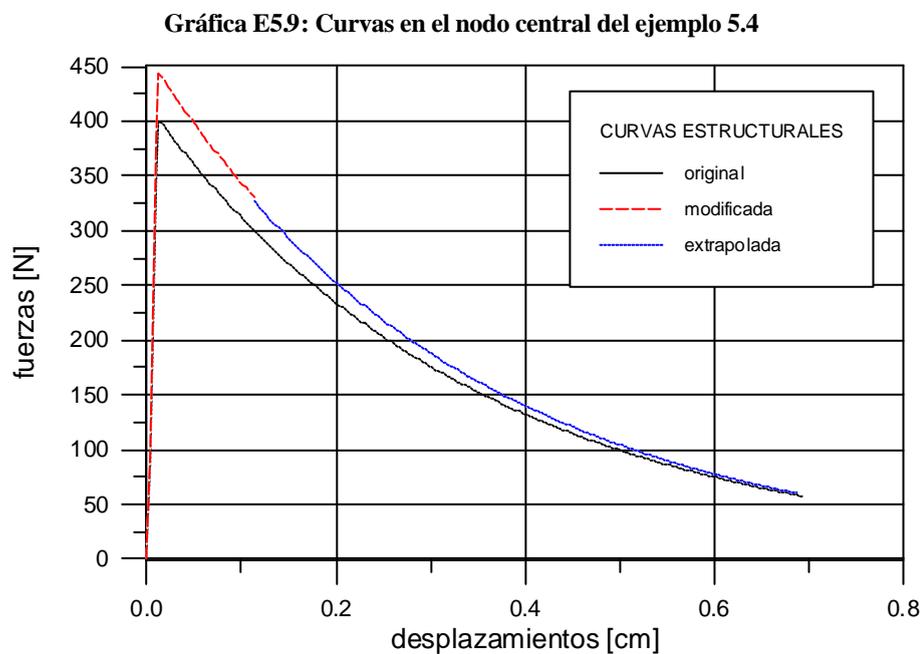


**Ilustración E5.6: Definición geométrica del ejemplo 5.4**

La subintegración se realiza para flexibilizar más la estructura y facilitar la convergencia del modelo de daño.

#### VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Se definen las mismas gráficas que en el ejemplo anterior, la respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo 7 muestra el siguiente resultado:

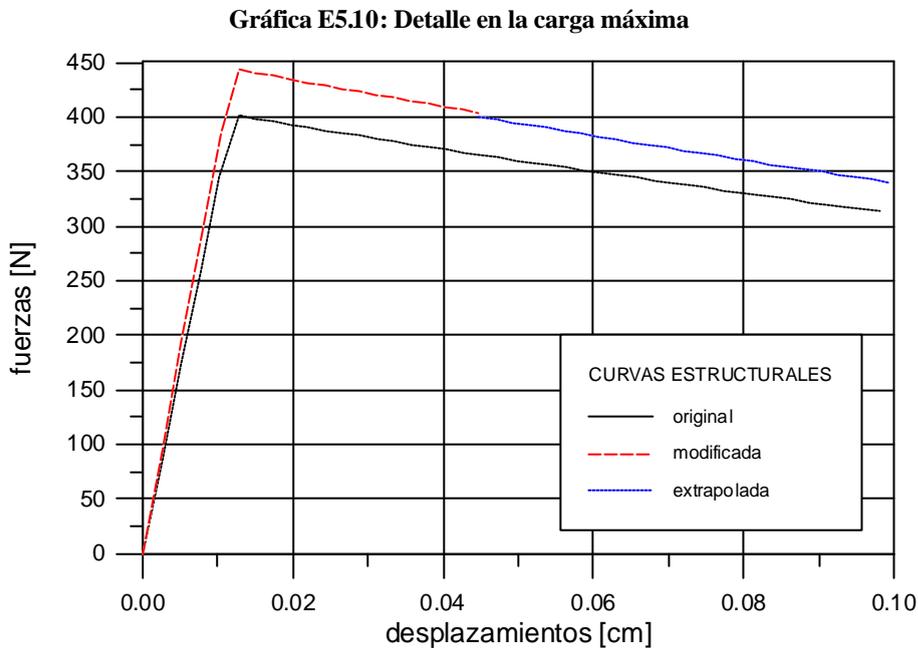


Dado que el elemento de 8 nodos reproduce mejor el mecanismo de flexión que el elemento de 4 nodos, el resultado de la carga límite es mejor. Sin embargo, como el punto donde se evalúan las

tensiones, punto de Gauss de la cuadratura de integración, no corresponde con la fibra real más solicitada de la estructura, el valor está por encima del correcto según Resistencia de Materiales. Ahora bien, si se halla, a través de Resistencia de Materiales, la carga última en las coordenadas del punto de integración, el valor se acerca notablemente.

	Res. Mat. real	Res Mat en P.G.	Modificada	Extrapolada
<b>Carga última [N]</b>	184	415	440	439
<b>Error</b>			6%	5.7%

La gráfica inferior muestra con detalle la zona de extrapolación de la carga última elástica:

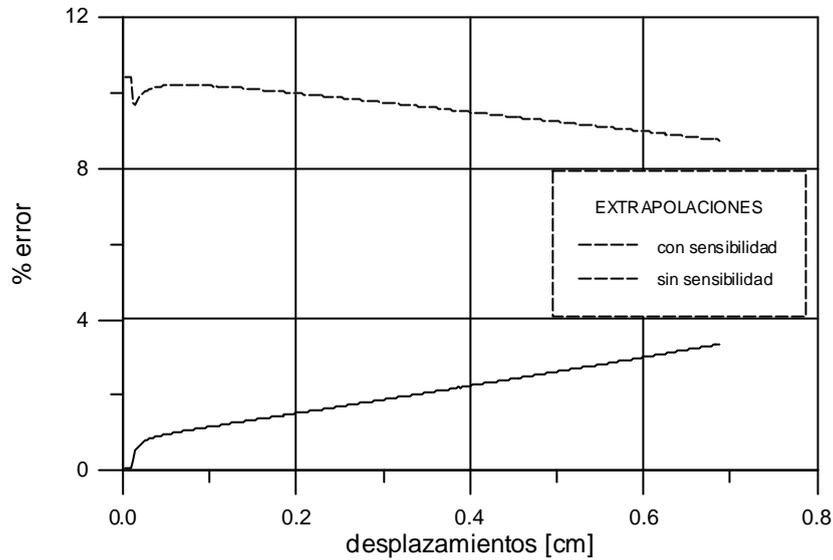


Finalmente se ha definido el error que se cometería aproximando la solución modificada por la original y por la extrapolada, véase la gráfica E5.11. En ella se aprecia que los resultados son parecidos a los del ejemplo 2, pero en este caso el error en la sensibilidad aumenta más a medida que el daño crece.

La respuesta obtenida corrobora el comentario realizado en el ejemplo anterior, según el cual, el modelo de daño en flexión no es capaz de dar unos resultados tan buenos en la aproximación de primer orden usando la sensibilidad. Nótese que a pesar de que el problema físico real está mejor representado, por contra, el análisis de sensibilidad produce resultados mucho peores, sin duda otra paradoja de la sensibilidad. Recuérdese que, en los ejemplos de plasticidad, ya sorprendió que el elemento que mejor tenía que simular el problema físico, el de 8 nodos, era el que más imprecisión

mostraba en los resultados de sensibilidad, y en cambio el de 4 nodos ofrecía un comportamiento más estable.

**Gráfica E5.11: Error en el ejemplo 5.4**



En cualquier caso, ambos tipos de elementos proporcionan un análisis de sensibilidad que permite extrapolaciones aceptables, dado que tanto el signo de crecimiento como el orden de magnitud no son incorrectos.

### **Ejemplo 5.5:**

**Objetivo:** En este ejemplo se realiza un cálculo a corte puro para validar el comportamiento en el caso de este tipo de sollicitación.

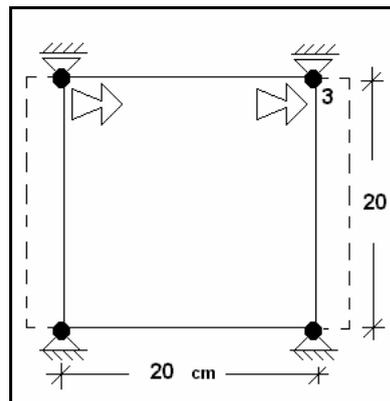
#### **DESCRIPCIÓN**

#### **Propiedades del material:**

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^6$	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2.0 \cdot 10^4$	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

**Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1 cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción  $\Delta l=0.005$  cm
- 150 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza incrementado en 1 cm.
- Se realizan los dos análisis de los ejemplos anteriores.



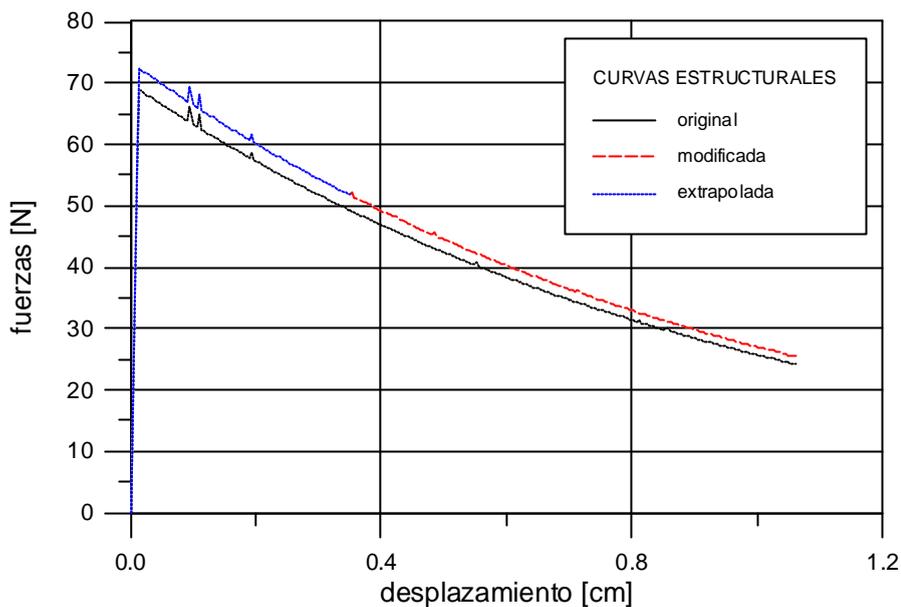
**Ilustración E5.7: Definición geométrica del corte puro**

**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS****Curvas estructurales de comportamiento**

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo extremo 3, obteniéndose la gráfica E5.12.

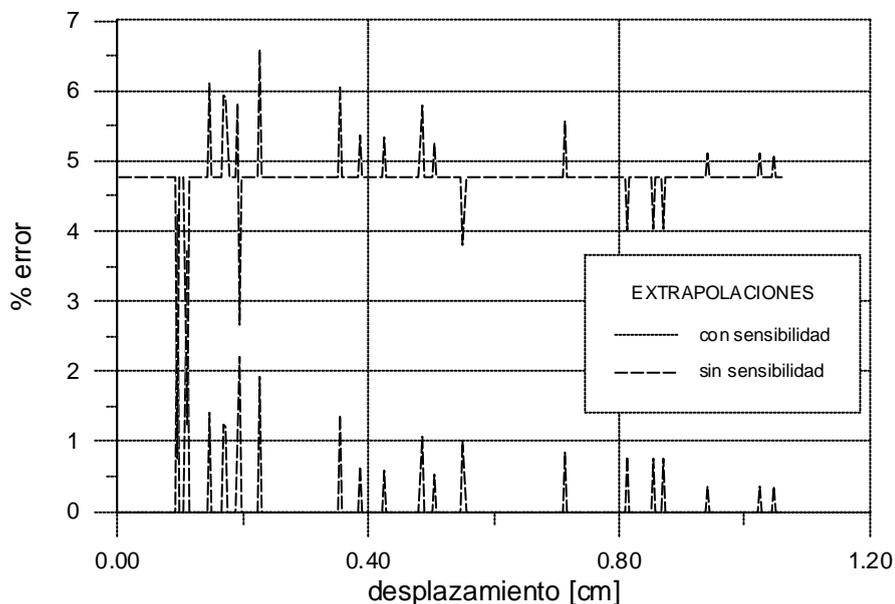
A lo largo de la curva de comportamiento se observan algunas inestabilidades del algoritmo del modelo de daño, esto significa que el modelo no responde con tanta precisión como sería deseable a las sollicitaciones de tipo tangencial. En general, las perturbaciones son pequeñas y localizadas pero se reflejan en las extrapolaciones defectuosas. Este hecho se relaciona con los resultados que se obtenían en los estados mixtos de flexión, un tanto peores que los de tracción pura, ya que en este caso la norma de tensiones depende de las normales y las tangenciales. Afortunadamente, las irregularidades no se acumulan porque se utiliza una estrategia secante para calcular la sensibilidad de la respuesta, de manera que si en un punto de la curva la solución es un tanto mala, en la siguiente posición de equilibrio se puede obtener una respuesta correcta. Esto representa una gran ventaja con respecto a las estrategias tangentes que se han definido hasta ahora en la literatura.

Gráfica E5.12: Curvas de corte puro



La gráfica del error muestra como afectan las irregularidades del modelo constitutivo sobre la extrapolación del comportamiento estructural.

Gráfica E5.13: Error en el corte puro



Algunas conclusiones previas de los ejemplos sencillos son:

- El algoritmo, en general, se comporta de forma robusta y adecuada.
- Gracias a la sensibilidad en el parámetro arco es posible extrapolar el comportamiento global de la estructura.

- Los estado de tracción pura se reproducen perfectamente, en cambio el cortante y los estados mixtos presentan mayores irregularidades.

A continuación, se procede a mostrar la aplicación práctica del algoritmo del análisis de sensibilidad para un modelo de daño en unos ejemplos con mallas más densas. La totalidad de los problemas se calculan a flexión con mallas estructuradas formadas por cuadriláteros de 8 nodos.

### Ejemplo 5.6:

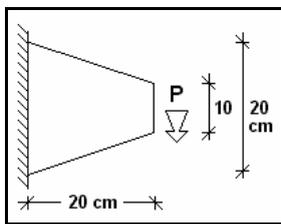


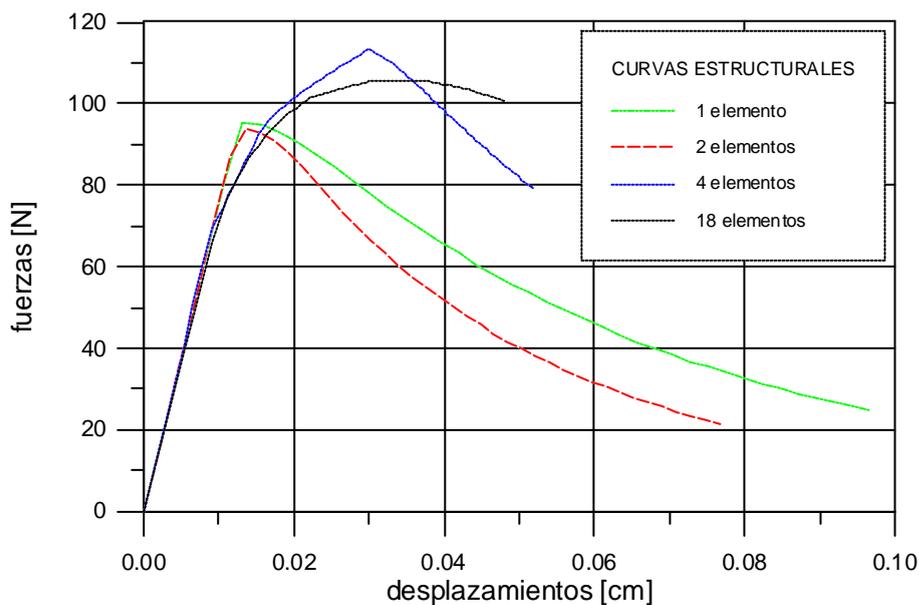
Ilustración E5.8:

Ménsula de sección variable

**Objetivo:** Se pretende extrapolar el comportamiento de una pequeña pieza calculada como ménsula empotrada y analizada con mallas de diferente densidad alrededor de la carga máxima. La pieza es de sección variable y su comportamiento básico es a flexión pura. Como en los ejemplos anteriores la variable de diseño es la sección transversal de la ménsula.

El comportamiento no lineal de la estructura se representa mediante las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo extremo del voladizo que coincide con la directriz de la pieza. El cálculo se ha realizado con elementos cuadriláteros de 8 nodos que ofrecen mejor respuesta física a la sollicitación de flexión, mecanismo básico de trabajo de la estructura.

Gráfica E5.14: Curvas de comportamiento de diferentes mallas



## DESCRIPCIÓN GENERAL

### Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^6$	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2.0 \cdot 10^4$	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

### MALLA 1: DISCRETIZACIÓN 1 ELEMENTO

#### Tipo de análisis:

- Tensión plana con espesor de 1cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción  $\Delta l=0.005$  cm
- 40 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro, el análisis de la estructura con un incremento de 1 cm en la variable de diseño. Dicha modificación representa un 6.6% de variación en superficie.

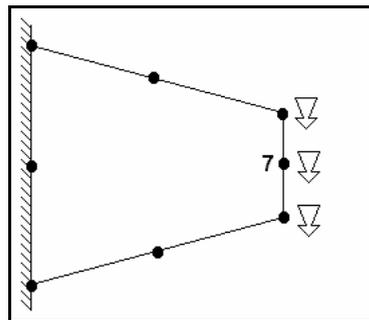


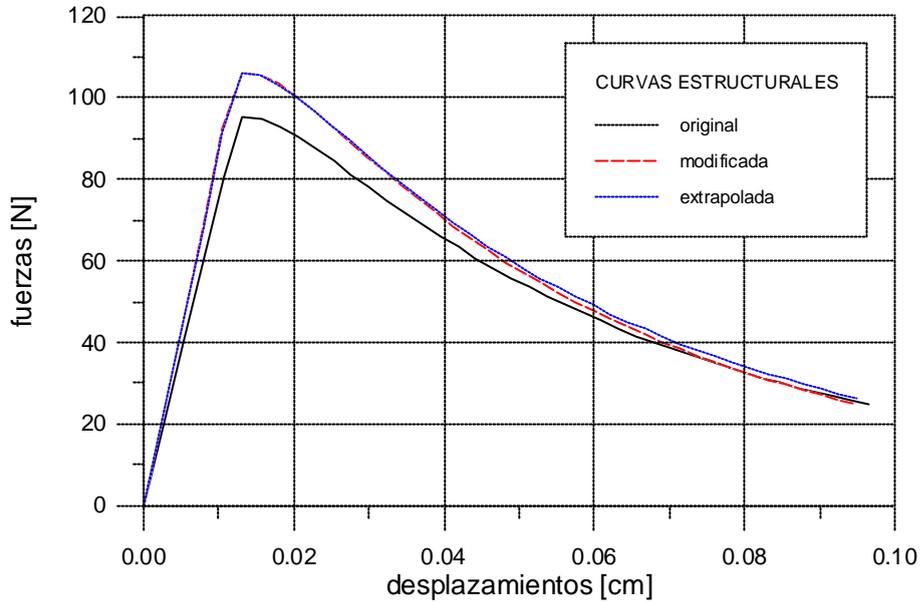
Ilustración E5.9: Geometría de la primera malla

## VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se ha comparado la curva de respuesta fuerza-desplazamiento horizontal en el nodo 7 que se obtiene en la estructura original, la original

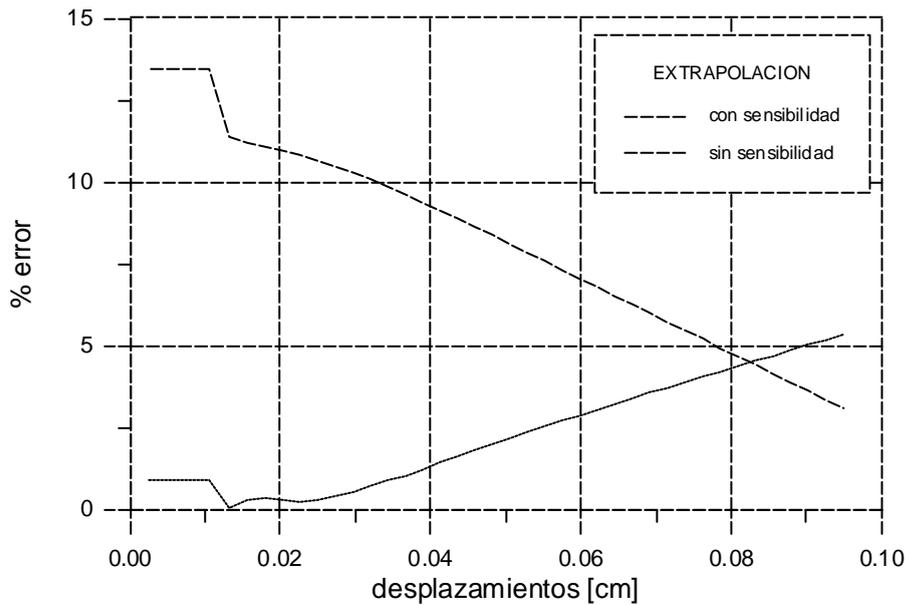
con sensibilidad y su correspondiente extrapolación de primer orden, y finalmente, la que corresponde al análisis de la estructura modificada.

**Gráfica E5.15: Respuestas en el nodo 7 de la primera malla**



Igualmente se ha definido el error que se cometería aproximando la solución modificada por la original y por la extrapolada, y se ha obtenido la siguiente gráfica:

**Gráfica E5.16: Error con la malla primera**



A pesar de que la malla es muy deforme, y esto afecta al comportamiento constitutivo, los errores se mantienen en acotados en un intervalo aceptable, incluso para valores de daño muy elevados.

## MALLA 2: DISCRETIZACIÓN 2 ELEMENTOS

### Tipo de análisis:

- Tensión plana con espesor de 1 cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción  $\Delta l=0.005$  cm.
- 40 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la misma de antes.
- Se realizan los mismos dos análisis de los casos anteriores.
- Se ha definido otro tipo de material para facilitar la localización de la fractura en la zona que se sabe más solicitada. En los elementos menos solicitados se ha aumentado la tensión máxima de tracción para evitar que en ningún caso localicen antes que en el elemento deseado. En este caso, no es estrictamente necesario ya que la definición de la geometría determina la fractura en la zona de empotramiento, pero mediante este artificio se facilita dicho proceso.

Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------

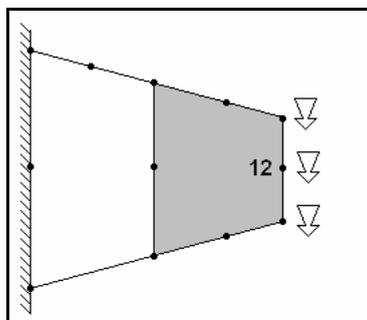
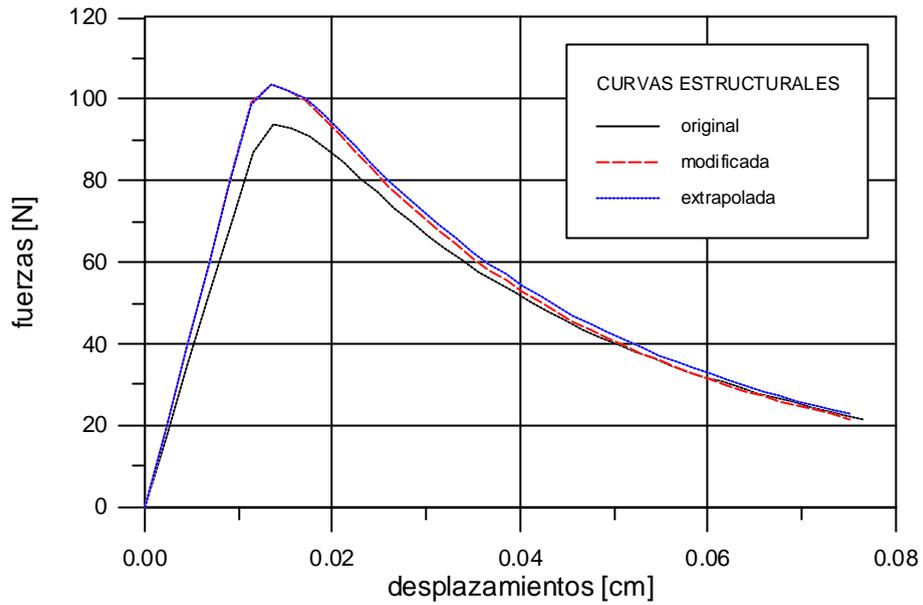


Ilustración E5.10: Geometría de la segunda malla

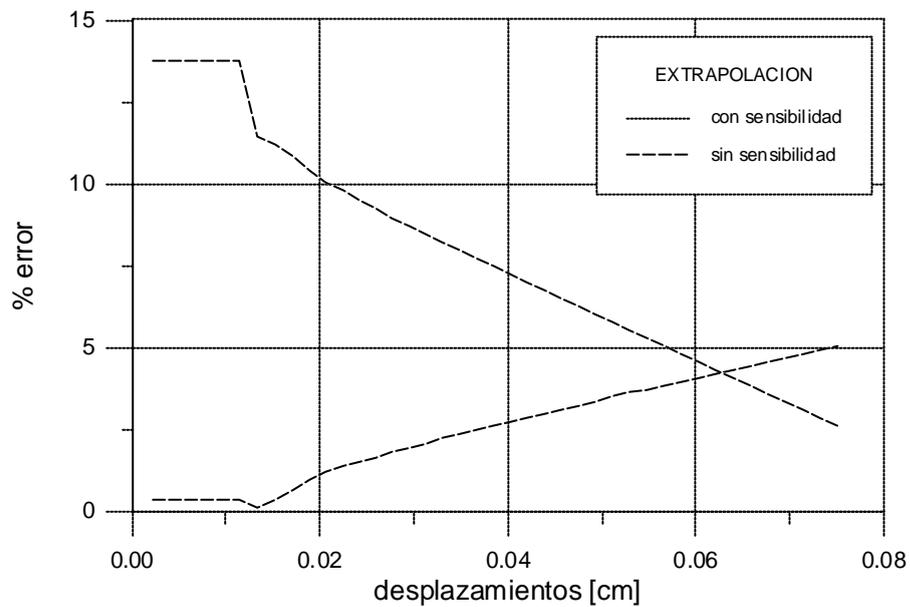
## VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

El comportamiento de la curva fuerza-desplazamiento en el extremo del voladizo es parecido a la gráfica anterior y muestra una superposición bastante fidedigna de la extrapolación con respecto a la estructura modificada. En la zona de poco daño, cerca de la carga última, el error es pequeño.

**Gráfica E5.17: Curvas de comportamiento para la segunda malla**



**Gráfica E5.18: Error que se produce en la segunda malla**



**MALLA 3: DISCRETIZACIÓN 4 ELEMENTOS**



**Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1cm.
- Longitud de arco con desplazamiento controlado en nodo 9 para limitar el tamaño de fisura en la zona traccionada del empotramiento, restricción  $\Delta l = 3.5 \cdot 10^{-4}$  cm.

- 100 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza incrementado en 1 cm.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado, el análisis de la estructura modificada según una variación de la variable de diseño (un 6.6% medido sobre superficie).
- Se ha definido otro tipo de material para localizar la fractura, en el elemento menos solicitado la tensión máxima de tracción es de resistencia superior:

Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------

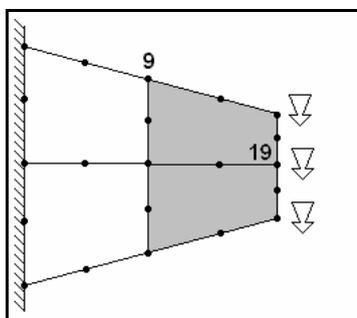


Ilustración E5.11: Definición geométrica de la malla

3

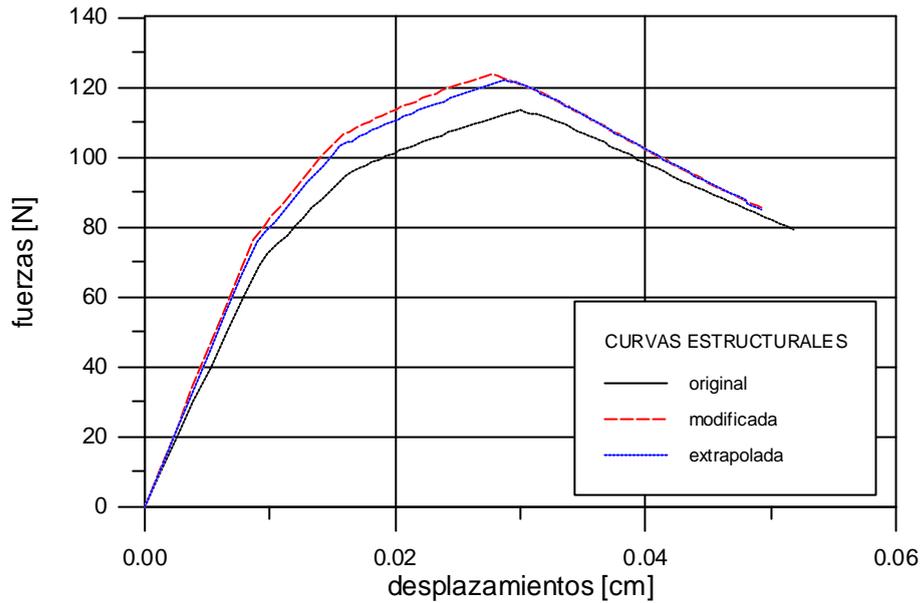
## VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este caso el comportamiento en la zona cercana a la carga máxima es peor que en los ejemplos anteriores. Fundamentalmente, se debe a la restricción que se ha impuesto en la longitud de arco y a la magnitud en la variación de la variable de diseño. Nótese que mientras la estructura original ya tiene un daño apreciable, la modificada aún está en régimen elástico. Esto significa que el algoritmo pretende extrapolar valores desde una estructura que ha entrado en daño a una estructura que todavía está en régimen lineal. En los casos anteriores esto no sucedía tan claramente porque las dos estructuras siempre estaban en regímenes parecidos, o bien la original tenía poco daño y la modificada era elástica, o bien las dos se comportaban igual.

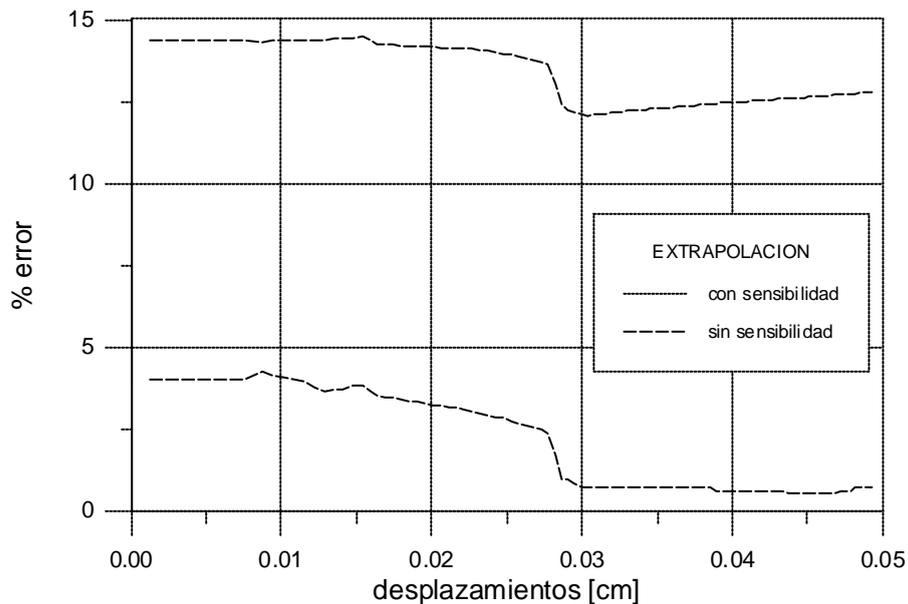
Por lo tanto, se deduce que si la modificación de la estructura es grande, en algún momento, puede suceder que cada estructura se comporte según un régimen distinto. Entonces no se estará en condiciones de predecir el comportamiento de las variables de estado con suficiente fiabilidad. Como mucho, las tensiones extrapoladas serán capaces de predecir que la estructura modificada tendría un nivel de daño menor o, en caso contrario, que la estructura modificada ya estaría

entrando en la zona de daño. El uso de dicha información representa hallar la sensibilidad de una extrapolación, lo cual no es recomendable porque exigiría un reanálisis de una estructura cuya ecuación de equilibrio es supuesta en aproximación de primer orden.

**Gráfica E5.19: Curvas de comportamiento del nudo 19 de la malla tercera**



**Gráfica E5.20: Error en la malla tercera**

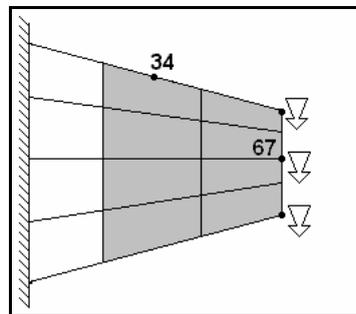


En este ejemplo el nivel del error es extremadamente elevado para los niveles normales de comportamiento. Por lo tanto, la explicación anterior justifica los errores en la zona de carga máxima, pero no en la zona elástica donde casi siempre el resultado es casi nulo.

**MALLA 4: DISCRETIZACIÓN 18 ELEMENTOS****Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de 1 cm.
- Longitud de arco con desplazamiento controlado en nodo 34 por los mismos motivos de la discretización anterior, restricción  $\Delta l = 3.5 \cdot 10^{-4}$  cm.
- 100 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza incrementado en 1 cm.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis normal de la estructura modificada según una variación de la variable de diseño (un 6.6% medido sobre superficie).
- Se ha definido otro tipo de material para localizar la fractura, en el elemento menos solicitado la tensión máxima de tracción es de resistencia superior:

Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------

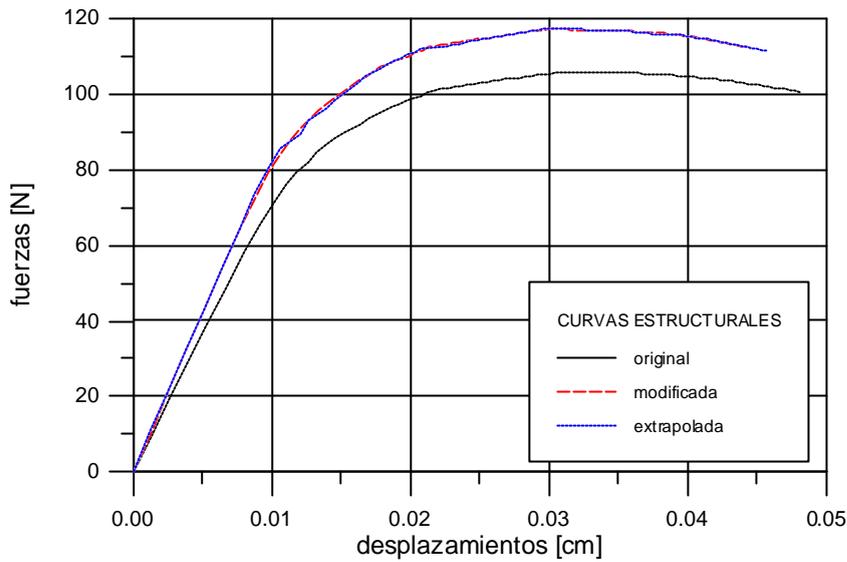


**Ilustración E5.12: Definición geométrica de la tercera malla**

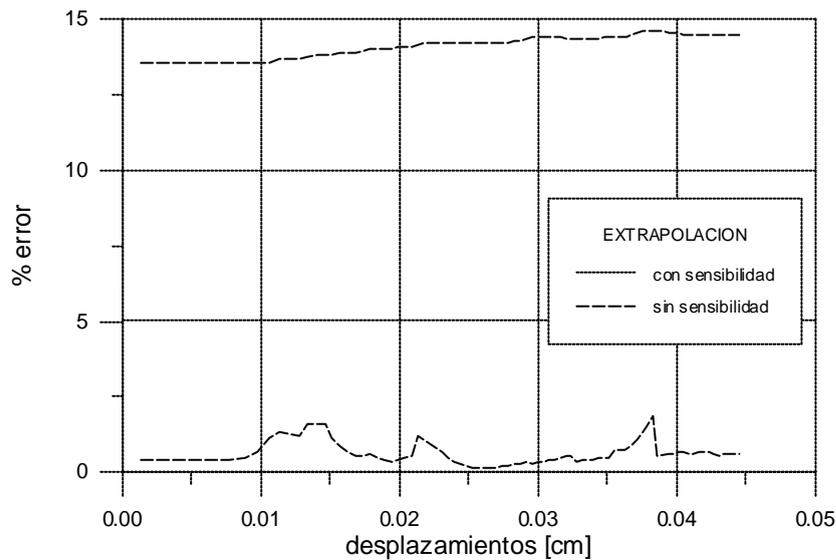
**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS**

En este caso la malla más fina da una respuesta adecuada a nivel cualitativo y cuantitativo. Por un lado se observa que la superposición entre la curva modificada y la extrapolada se acercan mucho, y por otro, el error se mantiene en valores estables y bajos.

**Gráfica E5.21: Respuesta estructural en el nodo 67 de la malla cuarta**



**Gráfica E5.22: Error en la malla cuarta**



Algunas conclusiones previas de este ejemplo son:

- Cuando las modificaciones en la variable de diseño son muy grandes, puede suceder que la estructura original entre en daño mientras que la modificada siga estando en régimen elástico, o bien el caso contrario. En ambas situaciones, la máxima información que se puede extraer es una predicción de la existencia cambio de régimen a través de las tensiones extrapoladas. Pero no será posible obtener la respuesta correcta mediante la sensibilidad.
- Las mallas deformes tienden a dar resultados que en ocasiones son poco robustos, la razón está basada en la deficiente disipación energética que hace el modelo de daño cuando los elementos no son regulares.

**Ejemplo 5.7:**

**Objetivo:** En este caso se estudia el comportamiento del algoritmo sobre una viga isostática de hormigón, trabajando a flexión y tomando como variable de diseño el canto. Supóngase que en el proyecto se define un canto determinado y posteriormente en obra, por defectos en la ejecución, dicho canto se reduce en un 2.5 %, es decir 5 cm. Interesa calcular como va a evolucionar el comportamiento de la viga y estimar la disminución de la carga máxima debida al defecto constructivo.

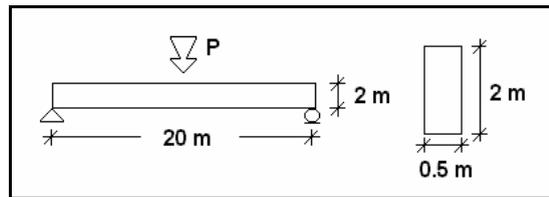


Ilustración E5.13: Viga de proyecto

Para realizar el análisis se ha simplificado el problema aprovechando la simetría de la pieza, y se ha procedido a calcular según el esquema adjunto, cargando en la reacción y empotrando en el centro luz:

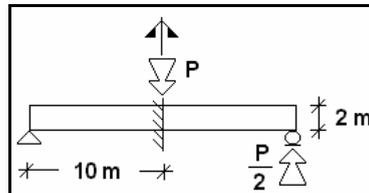


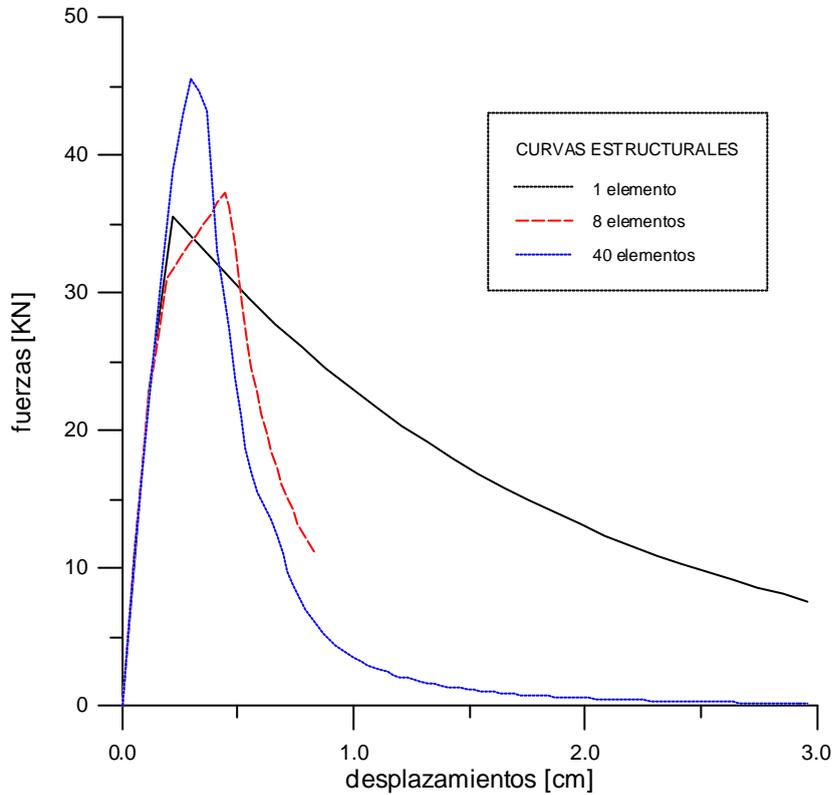
Ilustración E5.14: Esquema de cálculo

**DESCRIPCIÓN GENERAL****Propiedades del material:**

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^7$	KN/m <sup>2</sup>
Coficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2.0 \cdot 10^4$	KN/m <sup>2</sup>
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

Como en el ejemplo anterior se han utilizado distintas densidades de malla. En la figura inferior se muestran las distintas respuestas estructurales que se han obtenido con las diferentes mallas, la gráfica corresponde a una curva fuerza-desplazamiento en el nodo de la reacción.

**Gráfica E5.23: Curvas fuerza-desplazamiento en la reacción para distintas mallas**



#### MALLA 1: DISCRETIZACIÓN 1 ELEMENTO

##### Tipo de análisis:

- Tensión plana con espesor de la viga de 50 cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción  $\Delta l=0.2$  cm
- 50 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Variable de diseño: el canto de la pieza disminuido en 5 cm.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis normal de la estructura modificada según una variación del 2.5% de la variable de diseño.

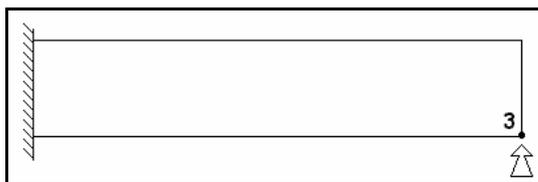
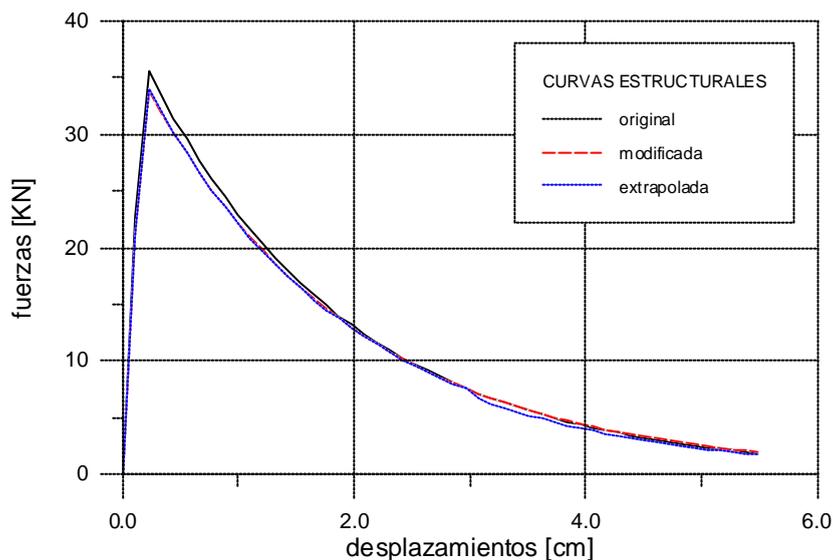


Ilustración E5.15: Definición geométrica de la malla 1

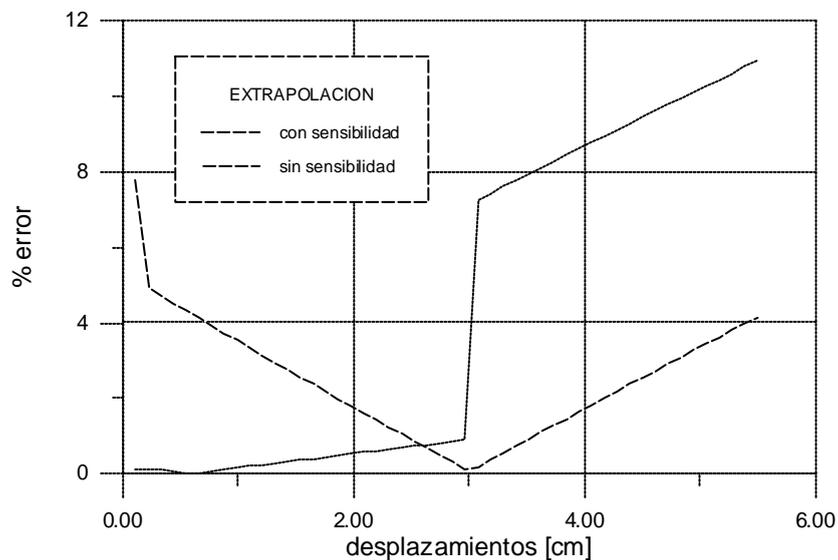
## VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este caso, la malla inicial también corresponde a un elemento deforme trabajando a flexión. Por lo tanto, los resultados no son excesivamente buenos, sobre todo en la parte final cuando el daño es muy elevado en la estructura. A pesar de que cualitativamente la superposición de la curva es correcta, el análisis del error muestra oscilaciones en la sensibilidad.

Gráfica E5.24: Resultados para la primera malla



Gráfica E5.25: Error en la primera discretización

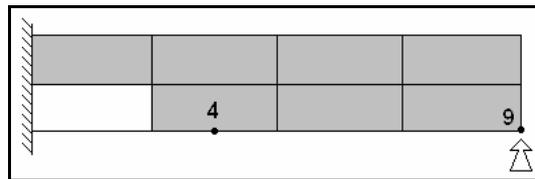


**MALLA 2: DISCRETIZACIÓN 8 ELEMENTOS**

**Tipo de análisis:**

- Tensión plana con espesor de la viga de 50 cm.
- Longitud de arco con desplazamiento controlado en el nudo 4, siendo el valor de la restricción de  $\Delta l=0.005$  cm.
- 30 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Variable de diseño: el canto de la pieza disminuido en 5 cm.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis normal de la estructura modificada según una variación del 2.5% de la variable de diseño.
- Se ha definido otro tipo de material para localizar la fractura, en el elemento menos solicitado la tensión máxima de tracción es de resistencia superior:

Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------

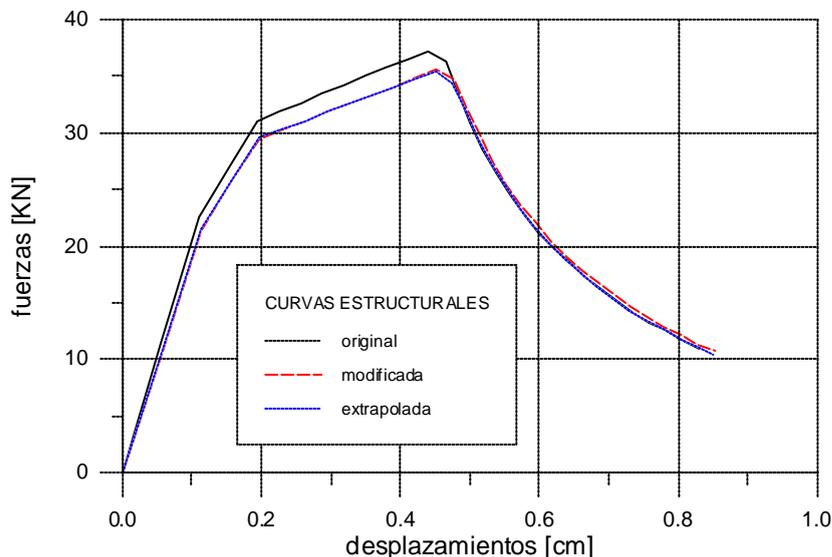


**Ilustración E5.16: Definición geométrica de la malla segunda**

**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS**

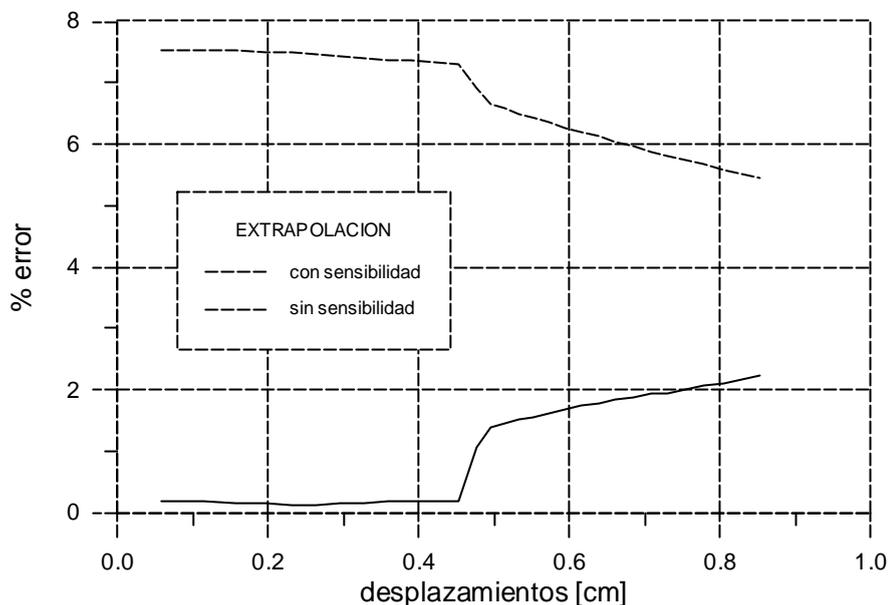
En este ejemplo la superposición de la curva extrapolada es correcta hasta la zona final, aquella en la cual el daño ya es muy elevado en la estructura.

**Gráfica E5.26: Resultados de la malla segunda**



Por su parte la distribución del error confirma la observación de la gráfica anterior.

**Gráfica E5.27: Error en la extrapolación con la segunda malla**

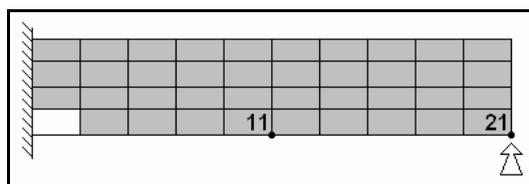


### MALLA 3: DISCRETIZACIÓN 40 ELEMENTOS

#### Tipo de análisis:

- Tensión plana con espesor de la viga de 50 cm.
- Longitud de arco con desplazamiento controlado en el nudo 11 siendo la restricción  $\Delta l=0.006$  cm.
- 100 pasos de carga subintegrando el elemento con 4 puntos de gauss.
- Variable de diseño: el canto de la pieza disminuido en 5 cm.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado, el análisis de la estructura modificada según una variación del 2.5% de la variable de diseño.
- Se ha definido otro tipo de material para localizar la fractura, en el elemento menos solicitado la tensión máxima de tracción es de resistencia superior:

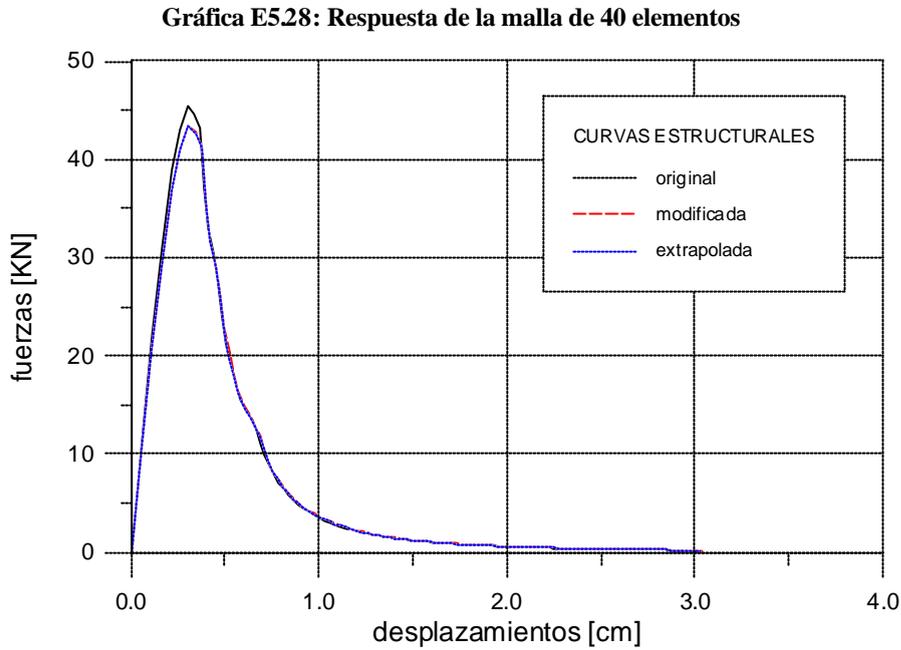
Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------



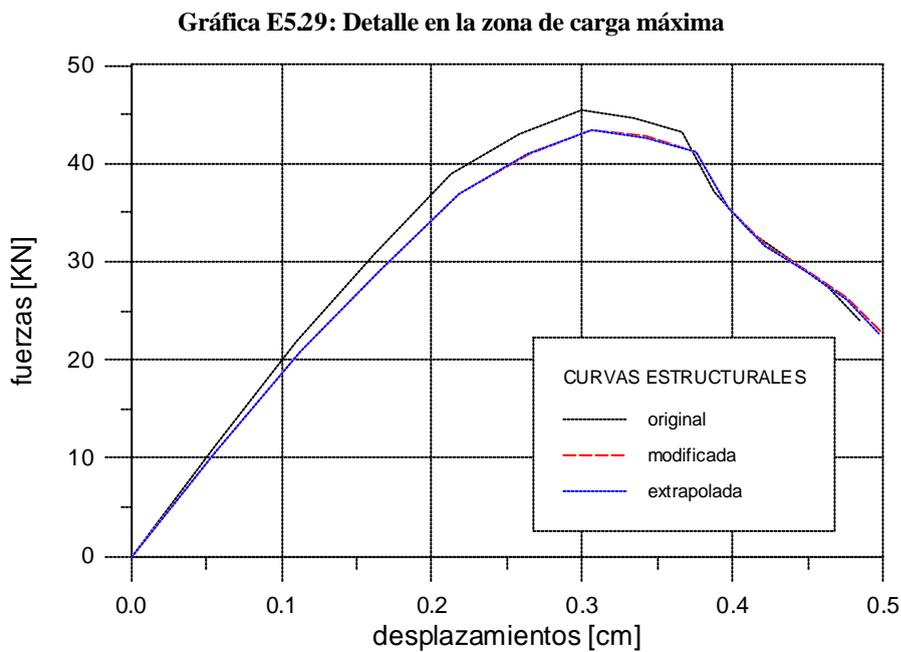
**Ilustración E5.17 : Definición geométrica de la malla tercera**

## VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este caso las gráficas que se obtienen son:

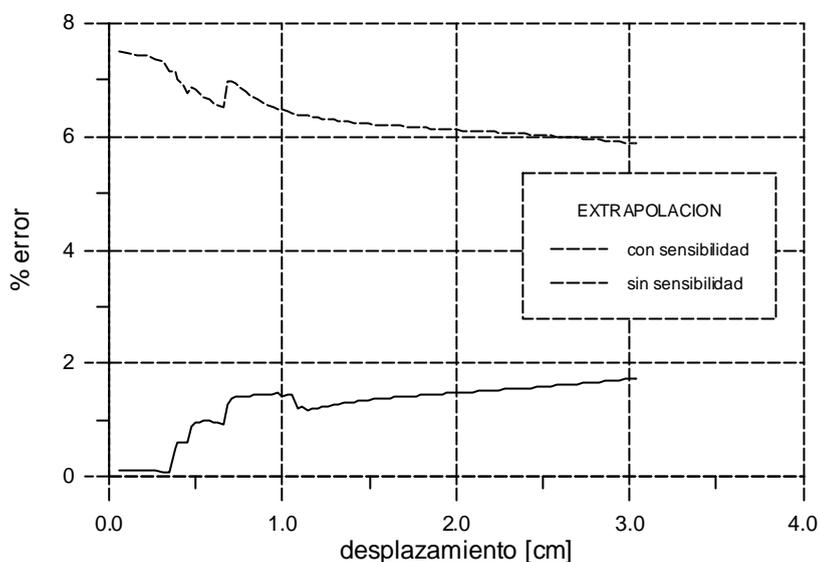


La zona de carga máxima se solapa perfectamente:



Finalmente la distribución del error se comporta de forma muy estable y acotada.

Gráfica E5.30: Error en la malla tercera



Algunas conclusiones parciales del ejemplo son:

- En este ejemplo el algoritmo se comporta notablemente bien para mallas densas. La razón es que la malla contiene pocos elementos deformes y por lo tanto, la ecuación constitutiva se comporta bien.

### **Ejemplo 5.8:**

**Objetivo:** Se pretende verificar el comportamiento del algoritmo sobre una ménsula corta de hormigón trabajando a flexión y tomando como variable de diseño la longitud. Supóngase que en el proyecto se define una longitud determinada y posteriormente en obra, por defectos en la ejecución dicho longitud se alarga en un reduce en un 2.5 %, es decir 5 cm. Interesa calcular como va a evolucionar el comportamiento de la viga y estimar la disminución de la carga máxima debido al defecto constructivo. El ejemplo es similar al que aparecía al final del apéndice 4.1

#### **DESCRIPCIÓN GENERAL**

##### **Propiedades del material:**

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^7$	KN/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2.0 \cdot 10^4$	KN/m <sup>2</sup>

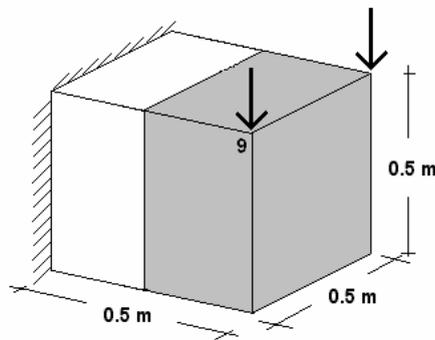
Máxima tensión a tracción	500.0	KN/m <sup>2</sup>
Energía de fractura	200.0	J/ m <sup>2</sup>

**MALLA 1: DISCRETIZACIÓN 2 ELEMENTOS**

**Tipo de análisis:**

- Tridimensional, realizado con hexaedros de 8 nodos.
- Longitud de arco controlando la fisuración de la zona traccionada, desplazamiento vertical del nodo 9 con restricción de  $\Delta l = 1.6 \cdot 10^{-3}$  cm.
- 100 pasos de carga integrando el elemento con 8 puntos de gauss.
- Variable de diseño: longitud de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis de la estructura modificada según una variación del 2.5% de la variable de diseño.
- Se ha definido otro tipo de material para localizar la fractura, en el elemento menos solicitado la tensión máxima de tracción es de resistencia superior:

Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------



**Ilustración E5.18: Definición geométrica de la malla primera**

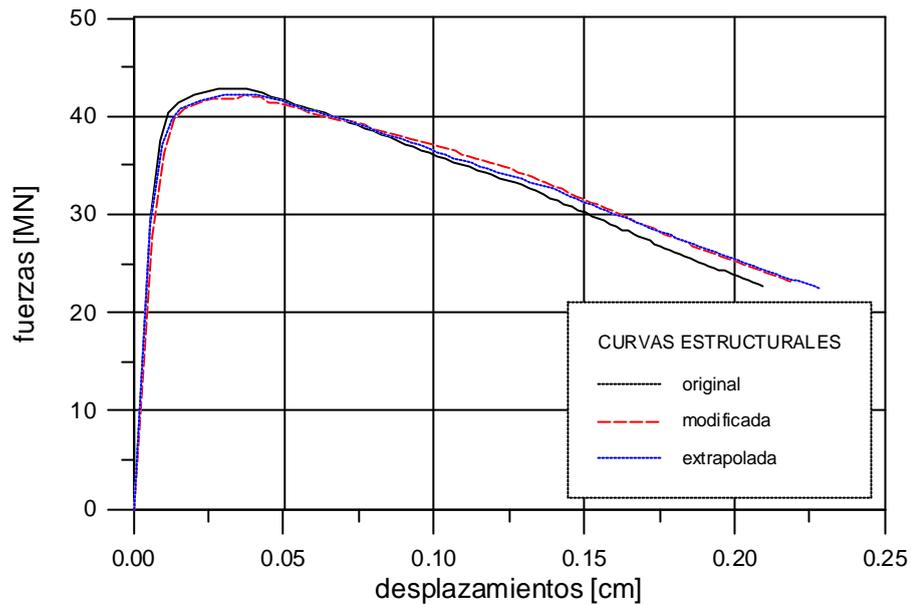
**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS**

La malla utilizada para realizar el cálculo es bastante deficiente, sobre todo si se tiene en cuenta que los elementos hexaédricos de 8 nodos, al igual que sus homólogos de 4 nodos, simulan mal el comportamiento a flexión. Pero al igual que en los ejemplos bidimensionales, la intención principal es contrastar el comportamiento de la sensibilidad del modelo de daño.

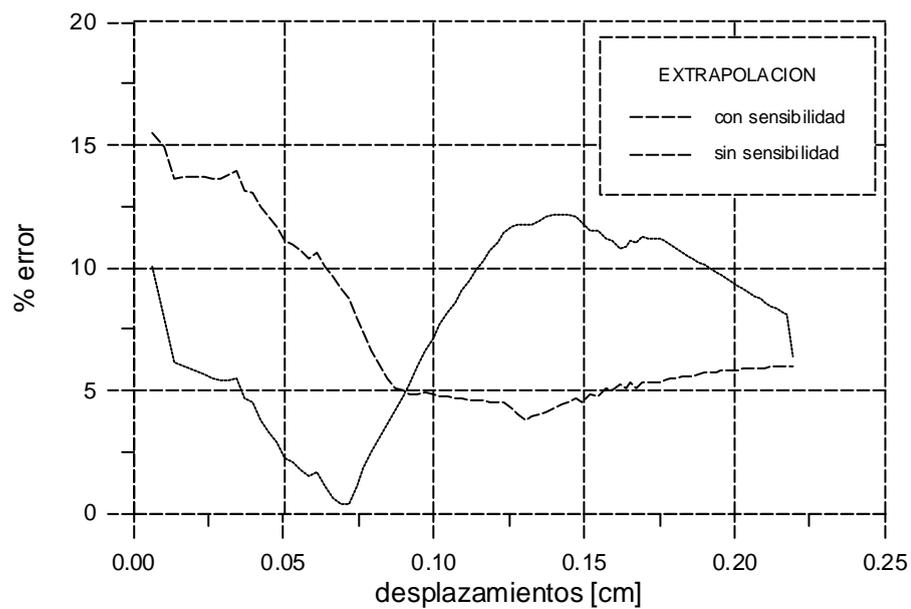
La curva de comportamiento cualitativo muestra algunas discrepancias, pero mayoritariamente la curva extrapolada sigue el trazo de la modificada. Este hecho se observa en la gráfica E5.31

En este caso en particular se está definiendo el error en el mismo nodo donde se controla el desplazamiento, por lo tanto, los errores tendrían que ser pequeños conforme al razonamiento que se ha hecho al inicio de este apéndice. Sin embargo, se observa que no es así.

**Gráfica E531: Comportamiento del nodo controlado de la malla primera**



**Gráfica E532: Error en la malla primera**



**Tipo de análisis:**

- Tridimensional, realizado con hexaedros de 8 nodos.
- Longitud de arco controlando la fisuración de la zona traccionada, desplazamiento horizontal del nodo 23 con restricción de  $\Delta l = 2.0 \cdot 10^{-4}$  cm.
- 300 pasos de carga integrando el elemento con 8 puntos.
- Variable de diseño: longitud de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado, el análisis normal de la estructura modificada según una variación del 2.5% de la variable de diseño, un alargamiento de 5 cm.
- Se ha definido otro tipo de material para localizar la fractura, en el elemento menos solicitado la tensión máxima de tracción es de resistencia superior:

Máxima tensión a tracción	1000.0	KN/m <sup>2</sup>
---------------------------	--------	-------------------

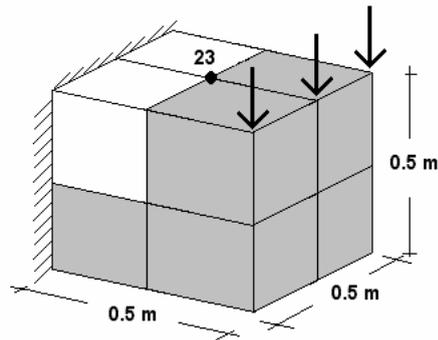
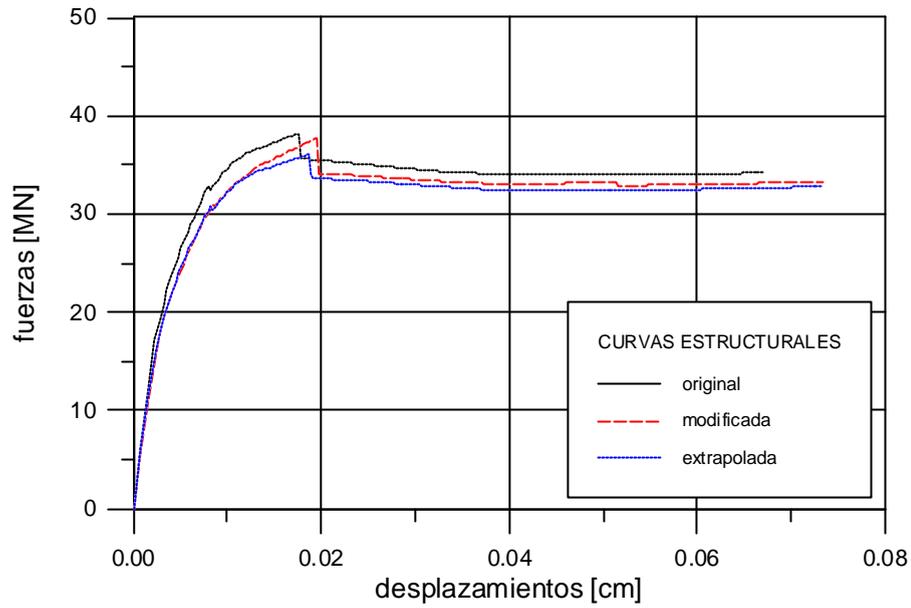
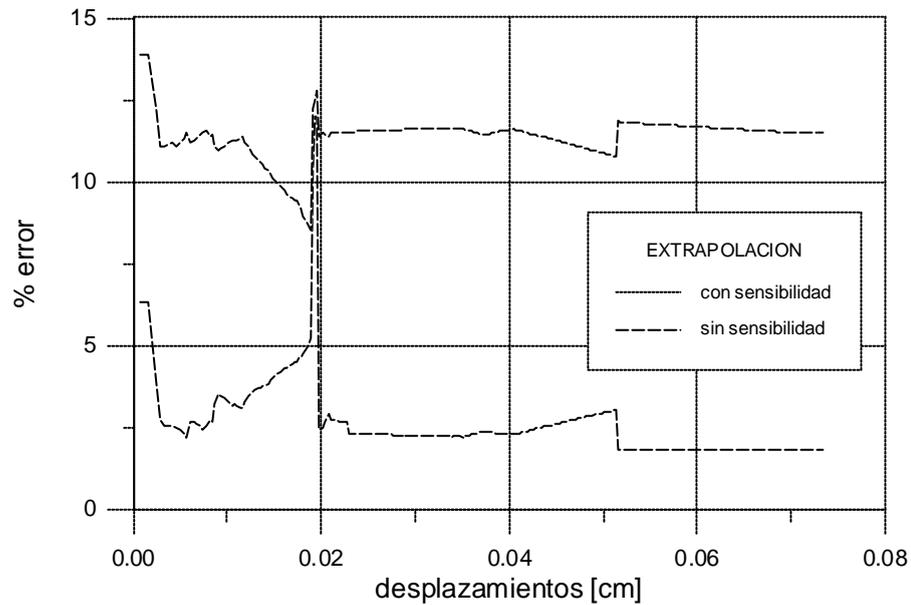


Ilustración E5.19: definición geométrica de la malla 2

**VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS**

En este caso, los resultados también son bastante mediocres, a pesar del refinamiento de la malla. Se concluye que la principal causa del mal comportamiento es la defectuosa simulación del daño por parte del modelo. En general, se han tenido muchos problemas para conseguir la convergencia de los sencillos ejemplos tridimensionales, y la oscilación de las curvas respuesta demuestran que el funcionamiento del algoritmo no es robusto en el problema tridimensional.

**Gráfica E533: Curvas de la segunda malla tridimensional****Gráfica E534: Error en la segunda malla tridimensional**

Del ejemplo anteriores se pueden extraer una conclusión previa:

- El problema tridimensional da resultados deficientes a causa del incorrecto funcionamiento de la ecuación constitutiva.