ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA (UPC)

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

SISTEMAS DIFUSOS DINÁMICOS PARA EL TRATAMIENTO DE INFORMACIÓN TEMPORAL IMPRECISA

Autor: Orestes Mas i Casals
Director: Joan Maria Miró Sans

Barcelona, 1997

3.
Lógica difusa

3.1 Introducción.

En el presente capítulo se ilustran los aspectos más relevantes de la lógica difusa, en especial el razonamiento aproximado, de los que se derivan la mayor parte de las actuales aplicaciones. La exposición responde a la misma estructura ya señalada para la teoría de conjuntos: se exponen primero los conceptos en el marco de la lógica clásica y se extienden para el caso difuso. Por otra parte, se hace especial hincapié en el hecho de que la lógica constituye un cuerpo teórico isomórfico con la teoría de conjuntos, por lo que cada teorema o propiedad establecida en un ámbito tiene un equivalente en el otro, lo que en muchos casos hace innecesarios razonamientos y demostraciones ya establecidos. Como síntesis de estos dos grandes bloques se discuten finalmente los distintos tipos de sistemas difusos más utilizados, y su funcionamiento.

Por *lógica* entendemos comúnmente aquella rama del saber que estudia de forma sistemática la validez de los enunciados o proposiciones, con el objetivo último de desentrañar los principios del razonamiento. En la historia de la lógica podemos distinguir tres fases. La primera viene marcada por la figura de Aristóteles, el creador del primer sistema lógico, cuyas contribuciones en ese campo han permaneciendo casi inalteradas hasta el siglo XIX. Aristóteles se ocupó básicamente de estudiar el *silogismo* como estructura fundamental del razonamiento, estudiándolo y axiomatizándolo de forma exhaustiva. Los sucesores directos de Aristóteles, básicamente sus discípulos, las escuelas Megárica y Estoica y toda la tradición escolástica medieval, discutieron durante siglos el sistema aristotélico, completándolo con el estudio de otras estructuras de razonamiento distintas al silogismo. Esta primera fase de la lógica se conoce como *lógica tradicional* o *lógica de proposiciones*.

La segunda fase se inicia a mediados del siglo pasado, cuando George Boole dota a la lógica de un simbolismo algebraico y, por tanto, de una sólida base matemática, iniciando así una disciplina -llamada indistintamente *lógica matemática* o *simbólica*- que perdura hasta nuestros días. Antes de Boole, empero, cabe citar otros autores que intentaron con más o menos fortuna la formalización de la lógica, como Leibniz, Euler, Bolzano o De Morgan [Prior 1976].

Por ultimo, en el primer tercio de este siglo creció el interés por investigar otras lógicas que, a diferencia de la lógica clásica, contemplan la posibilidad de manejar valores de verdad intermedios a los clásicos de *verdadero* o *falso*, necesidad que había apuntado ya Aristóteles para cierto tipo de proposiciones. Se inicia así una nueva fase -la tercera- en la lógica caracterizada por el interés en las llamadas *lógicas polivalentes*, siendo el polaco Jan Lukasiewicz quien inició su estudio en la década de 1930. La lógica difusa se enmarca dentro se esta última categoría, al permitir la asignación de infinitos valores de verdad entre 0 y 1 a un enunciado.

Es bien conocido que la lógica proposicional es isomórfica con la teoría de conjuntos, es más, ambos sistemas son isomórficos con el álgebra de Boole. Esto es así porque todos están construidos sobre estructuras matemáticas comunes, diferenciándose solamente en la notación. De la misma forma, la teoría de conjuntos difusos es isomórfica con la lógica difusa. Dichos isomorfismos garantizan que cada teorema en cualquiera de las mencionadas teorías tiene su equivalente en las otras -aplicando las sustituciones convenientes en operandos y operadores-, y nos permite formalizarlas todas desarrollando sólo una de ellas. Puesto que en las secciones precedentes se han tratado los aspectos de la teoría de conjuntos más relevantes para esta Tesis, no será necesario repetirlos aquí para la lógica. De hecho, puesto que un tema tan vasto como la lógica no puede ni debe tratarse en un espacio tan reducido como el que nos ocupa, centraremos nuestro interés sólo en dos conceptos puntuales de la lógica clásica o nítida, como son la *implicación* y *los esquemas de inferencia deductiva*, tratando la extensión de dichos conceptos a la lógica difusa.

En lógica, una proposición simple p es una sentencia lingüística que postula cierta propiedad A para los elementos de un cierto universo X (denotado $\boldsymbol{p}$**:** $\boldsymbol{x}$ **es A**). Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, A puede verse como el conjunto de todos aquellos elementos de X que verifican la propiedad, con lo que podemos asignar a la proposición p un valor de verdad binario, denotado por $T(p)$ para cada elemento $x \in X$ según el elemento x pertenezca o no al conjunto A. Distintas proposiciones simples pueden combinarse para formar otras más complejas usando las *conectivas o funciones lógicas*, que permiten encontrar el valor de verdad de la expresión global partiendo de los valores de verdad de cada proposición elemental. En el caso de combinar 2 proposiciones p_1 y p_2 existen $2^2 = 4$ posibles combinaciones de verdad y $2^{2^2} = 16$ conectivas lógicas distintas, las cuales se muestran en la Tabla 3-1, resaltando en negrita aquellas combinaciones de mayor uso.

De hecho puede demostrarse que a partir de un conjunto reducido de funciones (primitivas) pueden obtenerse las demás. El conjunto más común de funciones primitivas es el formado por la **negación**, **conjunción** y **disyunción**, pero también lo son, por ejemplo, la negación y la implicación.

Tabla 3-1: Funciones lógicas de 2 variables

T(p_2) T(p_1)	0 0 1 1 0 1 0 1	Nombre de función	Símbolo
	0 0 0 0	Función Cero	0
	0 0 0 1	**Conjunción (AND)**	$p_1 \wedge p_2$
	0 0 1 0	Inhibición	$p_1 \mid\!\Rightarrow p_2$
	0 0 1 1	Aseveración	p_2
	0 1 0 0	Inhibición	$p_1 \Leftarrow\!\mid p_2$
	0 1 0 1	Aseveración	p_1
	0 1 1 0	O-Exclusiva (XOR)	$p_1 \oplus p_2$
	0 1 1 1	**Disyunción (OR)**	$p_1 \vee p_2$
	1 0 0 0	NOR	$p_1 \barwedge p_2$
	1 0 0 1	Bicondicional (XNOR)	$p_1 \Leftrightarrow p_2$
	1 0 1 0	**Negación o Complemento**	$\bar{p}_1$ **o** $\neg p_1$
	1 0 1 1	**Implicación**	$p_1 \rightarrow p_2$
	1 1 0 0	Negación o Complemento	$\bar{p}_2$ o $\neg p_2$
	1 1 0 1	Implicación	$p_1 \leftarrow p_2$
	1 1 1 0	NAND	$p_1 \overline{\wedge} p_2$
	1 1 1 1	Función Uno	1

La lógica difusa extiende la lógica bivalente tradicional de la misma forma que la teoría de conjuntos difusos lo hace con la teoría de conjuntos nítidos: permitiendo la asignación a una proposición de cualquier valor de verdad comprendido en el intervalo [0, 1]. Para el caso de una proposición p de la forma "x es A" se asume entonces que el conjunto A es difuso y que el valor de verdad de la proposición es igual al grado de pertenencia de x al conjunto A, es decir, $T(p) = \mu_A(x)$.

La lógica difusa también define unos operadores lógicos destinados a manipular y combinar entre sí los citados valores de verdad. Estos operadores se construyen de tal forma que devuelvan los mismos resultados que los operadores clásicos cuando manipulen valores de verdad que sean exclusivamente 0 o 1. Se definen sólo los operadores de negación, conjunción y disyunción difusos, al ser éstos funciones lógicas primitivas. El isomorfismo existente entre la teoría de conjuntos difusos y la lógica difusa permite equiparar las operaciones en uno y otro campo según se muestra en la Tabla 3-2.

Tabla 3-2: Correspondencia entre operaciones de lógica difusa y de teoría de conjuntos difusos

Lógica	Teoría de Conjuntos
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
$\neg$	$\overline{(\ )}$

La definición de estos operadores es, pues, como sigue. Sea p una proposición del tipo "x es A", y q otra proposición de la forma "y es B", que toman valores de verdad $T(p)$ y $T(q)$ difusos dados respectivamente por $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$. Entonces

$$T(\neg p) = \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{3.83}$$

$$T(p \wedge q) = \mu_{A \cap B}(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y) \tag{3.84}$$

$$T(p \vee q) = \mu_{A \cup B}(x,y) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(y) \tag{3.85}$$

No es de extrañar que mayoritariamente se utilicen para las operaciones de negación, conjunción y disyunción las mismas que las estándar de complemento, intersección y unión difusas. El resto de funciones lógicas se construye a partir de estas primitivas, por lo que no es necesario proponer funciones adicionales.

3.2 La implicación.

3.2.1 Implicación nítida

Toda implicación lógica $p \rightarrow q$ expresa, en el lenguaje natural, una sentencia si-entonces de la forma "Si p entonces q", o también

"Si x es A entonces y es B" (3.86)

Este tipo de sentencias constituyen una de las formas de modelar la capacidad humana para relacionar hechos aparentemente inconexos. Por ello, la operación de implicación es una de las bases del razonamiento en lógica, tanto clásica como difusa, motivo por el cual se trata aquí con mayor atención que el resto de conectivas lógicas. Como otras conectivas binarias, la implicación relaciona dos proposiciones distintas, p y q llamadas, respectivamente *antecedente* y *consecuente* mediante la siguiente tabla de verdad representada en la Tabla 3-3, en la que para simplificar se ha obviado el símbolo "valor de verdad" T(·). En ella puede observarse que la implicación es falsa sólo cuando se intenta implicar un consecuente falso a partir de un antecedente verdadero (fila 3 de la tabla). A menudo sorprende el hecho de que el valor de la implicación no sea falso también en la fila 2, puesto que al partir de un antecedente falso puede parecer que el enunciado carece de sentido. Para ver que tal caso es correcto, basta con considerar un antecedente falso cualquiera, (por ejemplo "4=3") y un consecuente verdadero cualquiera (por ejemplo "5>1"), y construir con ellos la proposición de implicación:

"Si 4=3 entonces 5>1"

que es una proposición perfectamente válida desde el punto de vista lógico, puesto que si el consecuente es verdadero no importa cuál sea el antecedente del que se ha obtenido. Quizás lo chocante en este caso es que el sentido que el lenguaje natural quiere dar a esta expresión está más cerca de la función bicondicional (que se expresaría mediante un "si y sólo si 4=3 entonces 5>1" y seria, por lo tanto, falsa) que de la implicación propiamente dicha.

Tabla 3-3: Tabla de verdad para la implicación clásica $p \to q$

p	q	$p \to q$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Tomando como primitivas la negación, conjunción y disyunción, la operación de implicación puede ponerse en función de las mencionadas primitivas de las siguientes formas, que son equivalentes:

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \neg p \tag{3.87}$$

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q \tag{3.88}$$

Estas equivalencias son interesantes, porque van a permitir encontrar expresiones para la implicación difusa a partir de las funciones primitivas.

3.2.2 Implicación difusa

Dado que la implicación no se considera función primitiva, la expresión para el caso difuso puede obtenerse de las ecuaciones (3.87) o (3.88), sustituyendo las conjunciones, negaciones y disyunciones por sus expresiones difusas (3.83)-(3.85), lo que nos da

$$\mathrm{T}(p \to q) = \mu_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}(x,y) = \mathbf{max}\left\{\mathbf{min}\left(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(y)\right), 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x)\right\} \tag{3.89}$$

$$\mathrm{T}(p \to q) = \mu_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}(x,y) = \mathbf{max}\left\{1 - \mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(y)\right\} \tag{3.90}$$

Sin embargo no todo es tan simple, pues al igual que sucede en muchos otros casos dentro de la teoría de conjuntos difusos, los dos operadores de implicación devuelven los mismos resultados cuando manipulan 0 y 1, pero devuelven resultados distintos cuando los valores de verdad están entre 0 y 1. Además, las expresiones (3.89) y (3.90) no son las únicas que pueden proponerse para la implicación difusa: cualquier generalización de una expresión lógica clásica equivalente a la implicación es válida en principio para realizar la implicación difusa, así como cualquier expresión cuya tabla de verdad sea idéntica a la Tabla 3-3 para valores de verdad 0 o 1.

Todo lo que acaba de exponerse redunda en una gran multiplicidad de funciones de implicación posibles, algunas de las cuales se indican en la Tabla 3-4.

Tabla 3-4: Distintas propuestas para la operación implicación difusa $\mu_{A \to B}(x,y)$ ([Ross 1995])

1. Zadeh	$\mathbf{max}\{\mathbf{min}[\mu_A(x),\mu_B(y)], 1-\mu_A(x)\}$	(3.91)
2. Kleene-Dienes	$\mathbf{max}\{\mu_B(y), 1-\mu_A(x)\}$	(3.92)
3. Lukasiewicz	$\mathbf{min}\{1, [1-\mu_A(x)+\mu_B(y)]\}$	(3.93)
4. Correlación-producto	$\mathbf{max}\{\mu_A(x)\cdot\mu_B(y), [1-\mu_A(x)]\}$	(3.94)
5. Goguen	$\mathbf{min}\left\{1, \left[\frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}\right]\right\} \quad \mu_A(x)>0$	(3.95)
6. Mamdani	$\mathbf{min}\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$	(3.96)
7. Larsen	$\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$	(3.97)

De estas propuestas, las dos primeras corresponden a las ecuaciones (3.89) y (3.90). Las demás tienen otros orígenes. De todas ellas se han destacado las dos últimas porque merecen mención especial debido a sus características. En efecto, de su inmediata observación se aprecia que estos dos operadores no satisfacen la función de implicación clásica cuando sus argumentos son 0 o 1. En cambio, son las únicas implicaciones utilizadas en aplicaciones de ingeniería. Esta aparente inconsistencia se justifica adecuadamente en la sección 3.5.

3.2.3 Implicación difusa como relación difusa

Como se ha visto en la sección 3.2.2, una implicación difusa se expresa mediante una función de pertenencia bidimensional en X×Y dada por $\mu_{A \to B}(x,y)$. En este caso, y según lo expuesto en 2.5.4, cabe considerar la implicación como una *relación difusa binaria* entre los universos X e Y. Dicha relación se formaría a partir de los conjuntos difusos A y B usando una expresión de implicación difusa válida, como las descritas en la Tabla 3-4.

A modo de ejemplo, sean los conjuntos difusos A="Grande" y B="Mediano" definidos respectivamente en los universos X=[0..10] e Y=[0..50] por las funciones de pertenencia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$ representadas en la Figura 3.1. Supóngase también que se elige la expresión (3.93) de la Tabla 3-4 para la implicación difusa (implicación de Lukasiewicz). En ese caso, la sentencia "Si x es Grande entonces y es Mediano" puede interpretarse como una relación difusa en X×Y cuya función de pertenencia es la representada en la Figura 3.2.

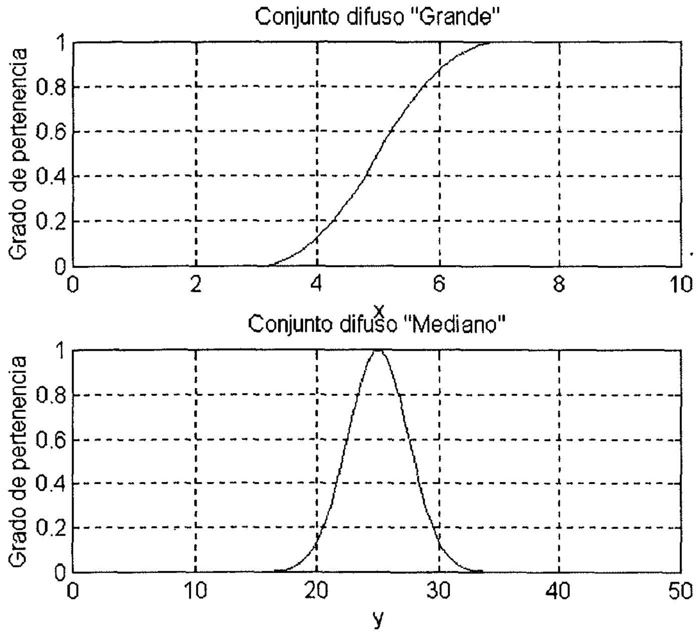

Figura 3.1: Funciones de pertenencia para los conjuntos "Grande" y "Mediano"

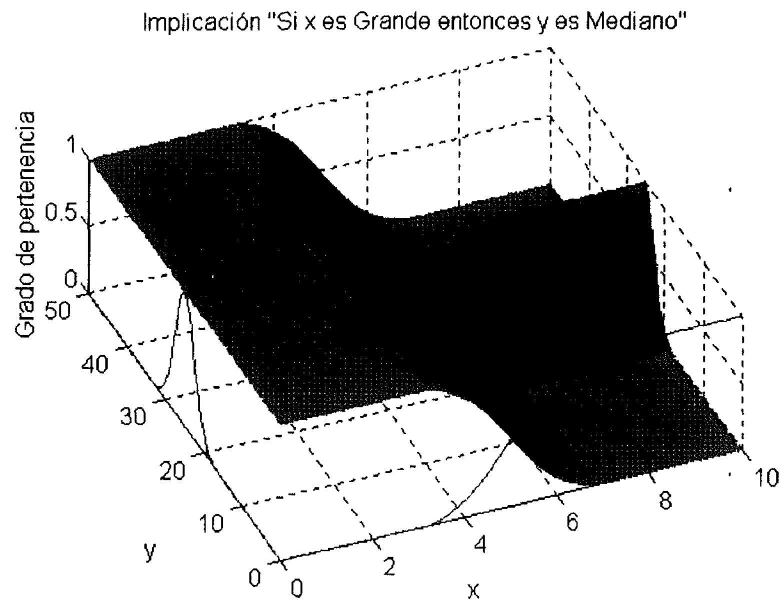

Figura 3.2: Relación difusa "Si x es Grande entonces y es Mediano"

En esta ultima figura puede apreciarse que el valor de verdad de la implicación es bajo sólo cuando el del antecedente es alto y el del consecuente bajo, conforme a lo exigido por la implicación clásica.

Representar la implicación difusa como una relación será de vital importancia, pues nos va a permitir expresar el esquema de razonamiento deductivo difuso por excelencia, el *modus ponens*, como una composición de relaciones difusas (véase sección 3.3).

3.3 Modos de razonamiento en lógica clásica.

Teniendo como base la implicación, existen varios esquemas clásicos de razonamiento en la lógica tradicional, de los cuales tres son los más conocidos: son los llamados *modus ponens*, *modus tollens* y *silogismo hipotético*. Todos ellos son *tautologías lógicas*, es decir, expresiones que son siempre verdaderas independientemente de los valores de verdad que tomen las proposiciones que las componen. El origen de su estudio hay que buscarlo en la necesidad de conocer las leyes que permitiesen construir proposiciones verdaderas, es decir, irrefutables desde el punto de vista lógico, para dotar de cimientos sólidos a disciplinas tan importantes en la antigua

Grecia como la retórica o las matemáticas. Estos tres esquemas clásicos de razonamiento se comentan brevemente a continuación.

3.3.1 Modus Ponens

El *modus ponens* nos permite, partiendo de la aseveración de una proposición p y del conocimiento de una regla de implicación del tipo $p \to q$, aseverar la proposición q, es decir:

$$[p \wedge (p \to q)] \to q \tag{3.98}$$

Si expresamos el *modus ponens* en función de los conjuntos A y B subyacentes a las proposiciones p y q, entonces

Premisa 1 (hecho):	*x es A*
Premisa 2 (regla):	*Si x es A entonces y es B*
Conclusión:	*y es B*

3.3.2 Modus Tollens

El *modus tollens* nos permite, partiendo de la negación de una proposición q y del conocimiento de una regla de implicación del tipo $p \to q$, negar la proposición p, es decir:

$$\left[\overline{q} \wedge (p \to q)\right] \to \overline{p} \tag{3.99}$$

Tal esquema de razonamiento está íntimamente ligado por un lado a la estratagema retórica de aceptar provisionalmente el punto de vista del contrario y rebatirlo después probando que conlleva consecuencias absurdas; por otra parte, es el mecanismo lógico subyacente en toda demostración por reducción al absurdo. Si expresamos el *modus tollens* en función de los conjuntos A y B subyacentes a las proposiciones p y q, entonces

Premisa 1 (hecho):	*y no es B*
Premisa 2 (regla):	*Si x es A entonces y es B*
Conclusión:	*x no es A*

3.3.3 Silogismo Hipotético

Aunque con nombres similares, el silogismo hipotético no tiene el mismo significado que el silogismo de Aristóteles. El que aquí se trata es una forma de razonamiento más general debida a su discípulo Teofrasto, en la que no encontramos ni las figuras ni los modos de la silogística clásica. En su lugar, el silogismo hipotético nos permite construir una implicación entre dos proposiciones p y r partiendo de dos implicaciones entre p y q y entre q y r, de la siguiente forma

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) \tag{3.100}$$

Si expresamos el silogismo hipotético en función de los conjuntos A, B y C subyacentes a las proposiciones p, q y r, entonces

Premisa 1 (regla 1):	*Si x es A entonces y es B*
Premisa 2 (regla 2):	*Si y es B entonces z es C*
Conclusión:	*Si x es A entonces z es C*

Como nota adicional, cabe advertir que algunos autores dan el nombre de silogismo hipotético precisamente al *modus ponens* y *modus tollens,* reservando el nombre desnudo de silogismo para el caso que acaba de discutirse. En la presente tesis, sin embargo, hemos optado por la nomenclatura habitual en los textos sobre lógica difusa, como el de Klir y Yuan [Klir 1995].

Existen patrones de razonamiento derivados de los que se acaban de exponer, como el *modo ponendo tollens*, o el *modo tollendo ponens*, además de otros aún menos evidentes [Trillas 1994], los cuales, por ser poco utilizados, no se comentan aquí. Cada uno de estos métodos de razonamiento puede demostrarse construyendo su tabla de verdad, cosa que se hace a continuación para el *modus ponens*:

Tabla 3-5: Tabla de verdad para el *Modus Ponens*

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$[p\wedge(p\rightarrow q)]\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

que queda de este modo demostrado al ser todo unos la ultima columna de la tabla (tautología lógica).

3.4 Razonamiento aproximado. Regla composicional de inferencia.

En palabras de L.A.Zadeh, "informalmente, por razonamiento aproximado o, equivalentemente, razonamiento difuso queremos significar el proceso o procesos mediante los que una conclusión imprecisa se deduce de una colección de premisas imprecisas. Tal forma de razonamiento es en su mayor parte más cualitativo que cuantitativo en su naturaleza, y casi todo él cae fuera del dominio de aplicación de la lógica clásica" ([Zadeh 1977]). Será la clase de razonamiento indicado cuando nuestro conocimiento del sistema sea impreciso debido a los siguientes factores [Trillas 1994]:

- ♦ Presencia de indeterminación o incertidumbre.
- ♦ Excesiva complejidad del sistema, que conlleva el desconocimiento total o parcial de su modelo matemático.
- ♦ Valores numéricos no medibles, o de medidas poco fiables.

De entre todos los esquemas de razonamiento lógico que acabamos de mencionar el que suele utilizarse para automatizar procesos de razonamiento en los sistemas difusos es una versión generalizada del *modus ponens*, porque el tipo de situación que permite tratar se da con bastante frecuencia en la práctica: Imaginemos que deseamos construir un autómata capaz de ejecutar alguna acción inteligente sobre cierto sistema o proceso (control, simulación...). Para ello debemos conocer de forma más o menos exhaustiva el funcionamiento del proceso en cuestión. Supongamos sin embargo que debido a los factores anteriormente apuntados (complejidad del sistema, etc.) no podemos expresar dicho conocimiento en la forma matemática habitual, siendo sólo capaces de modelar el sistema de forma *verbal*. En este caso la construcción del autómata seguirá el algoritmo que se detalla a continuación:

1. Se describe el sistema mediante un conjunto de reglas Si-Entonces difusas que relacionan los valores posibles de las entradas con los valores que deben de tomar las salidas del proceso para esas entradas. El antecedente de cada regla cubre un cierto rango de valores de entrada, a los que se asocia la misma salida (el consecuente de la regla). Antecedente y consecuente no son números ni intervalos nítidos, sino conceptos vagos modelados mediante conjuntos difusos adecuados. Se crea así una *partición difusa* del espacio de las entradas definido por los distintos antecedentes de cada regla. Todo el conjunto de reglas recibe el nombre de *base de conocimiento (knowledge base)* del autómata.

2. Posteriormente, se presentan al autómata los valores reales de las entradas instante a instante, para que tome la decisión de qué valor colocar a su salida en respuesta a la combinación "entrada dada + base de conocimiento". Las entradas reales pueden ser números nítidos (caso de provenir de un sensor) o difusos. En el primer caso los valores nítidos se convierten a difusos mediante una adecuada fuzzificación.

3. El proceso de decisión se inicia realizando una comparación de las entradas reales con cada uno de los antecedentes de las reglas almacenadas, en busca de coincidencias.

4. Finalmente, una vez conocidas las coincidencias, el sistema de razonamiento coloca a su salida el valor indicado por el consecuente de la regla *compatible* con la situación presente a la entrada en ese instante. El valor de salida, al ser el consecuente de una regla, es en general difuso. Si se necesitase un valor nítido (para excitar un motor, por ejemplo) debería pasarse esa salida por un desfuzzificador.

El proceso que acaba de describirse se fundamenta en el hecho intuitivo de que, si se tiene una regla de implicación del tipo $p \rightarrow q$ junto con una proposición p' parecida (aunque no idéntica) a la proposición p, debería inferirse del conjunto una proposición q' distinta de q aunque no muy diferente. Por su evidente parecido con el *modus ponens* clásico este esquema de razonamiento recibe el nombre de *modus ponens generalizado*, y se ilustra en la Figura 3.3, en donde A, A*, B y B* son conjuntos difusos, con A≅A* y B≅B*.

Premisa 1 (hecho):	*x es A**
Premisa 2 (regla):	*Si x es A entonces y es B*
Conclusión:	*y es B**

Figura 3.3: Modus Ponens *generalizado*

Esencialmente, en el proceso de razonamiento aproximado se permite una compatibilidad parcial entre la entrada actual y el antecedente de la regla, de tal forma que tal situación produzca una salida parcialmente compatible con la prevista en el consecuente de la regla en lugar de no producir salida alguna, como ocurriría en el *modus ponens* clásico. Pueden darse entonces situaciones que resultarían inconsistentes si no manejásemos conjuntos difusos: Por ejemplo, la partición del espacio de entrada puede ser tal que los distintos rangos de entrada se solapen entre sí. Por lo tanto, en cada instante puede haber más de una regla "activada" por concordar su antecedente con la entrada actual. En tal caso el sistema propone dos o más salidas distintas, cosa que seria contradictoria en una situación clásica.

Para encontrar la expresión concreta del conjunto B*, conocidos A, B y A* debemos recurrir a una fórmula matemática que nos devuelva la función de pertenencia $\mu_{B^*}(y)$ en función de $\mu_{A^*}(x)$, $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$. Dicha expresión se conoce con el nombre de *regla composicional de inferencia*, y se basa en dos hechos que se han comentado anteriormente en distintas secciones:

1. La regla Si-Entonces de la premisa 2 expresa una sentencia de implicación difusa, por lo que puede considerarse como una relación difusa en X×Y.

2. El conjunto difuso de salida B* puede encontrarse como la imagen del conjunto difuso A* a través de la relación de implicación.

Esta situación se representa gráficamente en la Figura 3.4 en forma de diagrama de bloques

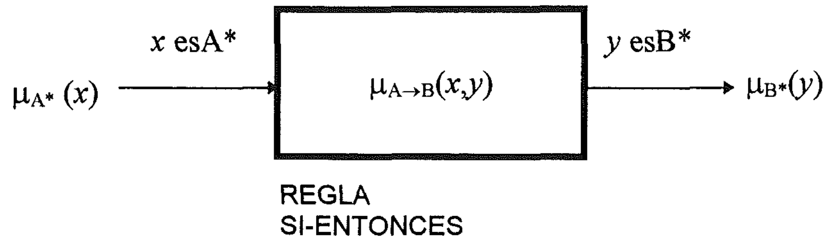

Figura 3.4: Regla composicional de inferencia como diagrama de bloques

En consecuencia, estos dos puntos ponen de manifiesto que la regla composicional de inferencia no es más que un caso especial de composición de relaciones difusas o, equivalentemente, se reduce a encontrar la imagen de un conjunto difuso a través de una relación difusa. La expresión que debe de utilizarse para la regla composicional de inferencia está dada pues por (2.62), haciendo A=A*, B=B*, $\oplus \equiv \vee$, $* \equiv \wedge$, y sustituyendo la relación R por cualquier implicación difusa válida entre los conjuntos A y B, obteniéndose

$$\mu_{B^*}(y) = \bigvee_{x \in X} \left\{ \mu_{A^*}(x) \wedge \mu_{A \to B}(x,y) \right\} \tag{3.101}$$

que utilizando la composición max-min, resulta

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in X} \left\{ \mathbf{min}\left(\mu_{A^*}(x), \mu_{A \to B}(x,y) \right) \right\} \tag{3.102}$$

Una vez escogidos para las normas los operadores máximo y mínimo resta la incertidumbre sobre la elección, de entre las relacionadas en la Tabla 3-4, del candidato adecuado para actuar como implicación difusa. Dado que en las aplicaciones de ingeniería de utilizan exclusivamente las implicaciones de Mamdani o Larsen, puede deducirse de (3.101) unas expresiones más compactas que tengan en cuenta este hecho. Sin embargo, como este punto tiene ya relación muy directa con el tema de esta tesis, las particularizaciones mencionadas se discuten con detalle en el capítulo 4.

3.5 Razonamiento aproximado en ingeniería. Las implicaciones de Mamdani y Larsen.

Como se justificará en este apartado, las implicaciones de Mamdani y Larsen, definidas por las expresiones

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \mathbf{min}\{\mu_A(x),\mu_B(y)\} \qquad \text{(Mamdani)}$$

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(y) \qquad \text{(Larsen)}$$

son las que exclusivamente se utilizan en las aplicaciones de la lógica difusa en ingeniería. Es de una importancia extrema el destacar que las implicaciones de Mamdani y Larsen NO son compatibles con la implicación clásica, es decir, para valores de verdad de 0 y 1 sus tablas de verdad no coinciden, como puede observarse en la Tabla 3-6. De hecho, las operaciones *mínimo* y *producto* son conjunciones, no implicaciones.

Tabla 3-6: Diferencias entre la implicación clásica y las implicaciones de Mamdani y Larsen para valores de verdad nítidos.

$T(p)$	$T(q)$	*Implicación clásica*	*Implicación Mamdani*	*Implicación Larsen*
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

A pesar de ello, la operación *mínimo*, y en menor medida el producto, se han utilizado de forma continuada como funciones de implicación en aplicaciones de ingeniería desde su introducción en 1974, puesto que funcionan mucho mejor que las implicaciones difusas "ortodoxas". El motivo de ello hay que buscarlo en el principio de causalidad exigible a todos los sistemas ingenieriles, que establece que no se puede tener un efecto a la salida de un sistema sin que lo haya provocado causa alguna. Para poner esto en evidencia, considérese el siguiente ejemplo, debido a Mendel [Mendel 1995].

Se tiene una implicación difusa definida mediante la función de pertenencia $\mu_{A\to B}(x,y)$. Dicha implicación relaciona un conjunto A con otro conjunto B. La forma de los conjuntos A y B se muestra en la Figura 3.5, aunque ésta no afecta a la discusión que sigue.

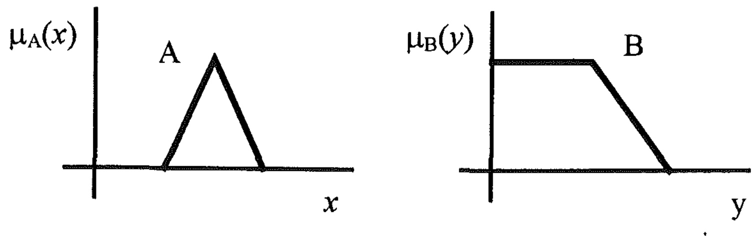

Figura 3.5: Conjuntos difusos A y B para el ejemplo

supongamos en aras de la sencillez que el conjunto A* es un *singleton* centrado en x', de forma que $\mu_{A^*}(x) = 1$ para $x = x'$ y $\mu_{A^*}(x) = 0$ para $x \neq x'$. La expresión (3.102) puede escribirse en este caso como

$$\mu_{B^*}(y) = \mathbf{min}\{\mu_{A^*}(x'), \mu_{A\to B}(x',y)\} = \mathbf{min}\{1, \mu_{A\to B}(x',y)\} = \mu_{A\to B}(x',y) \quad (3.103)$$

Supóngase ahora que se ha escogido representar la implicación difusa mediante la expresión (3.93) de la Tabla 3-4. Entonces la expresión anterior puede ponerse como

$$\mu_{B^*}(y) = \mathbf{min}\{1,[1-\mu_A(x')+ \mu_B(y)]\} \quad (3.104)$$

Si ahora resulta que el valor x' cae fuera del soporte del conjunto A, sucederá que $\mu_A(x')=0$, con lo cual

$$\mu_{B^*}(y) = \mathbf{min}\{1,[1+ \mu_B(y)]\} = 1 \quad \forall y \quad (3.105)$$

O sea que el conjunto del consecuente modificado desulta ser una función plana de valor unidad para todo y. Esta situación entra en conflicto con el principio de causalidad exigible en las aplicaciones de ingeniería: Se parte de una regla *if-then* que especifica el efecto (conjunto B) asociado a la presencia de una determinada causa (conjunto A), y se encuentra que si esta causa no se produce en absoluto, el efecto no sólo es el mismo, sinó que además se activan todos los demás efectos posibles en el universo del discurso Y.

Sin embargo, si en lugar de la implicación de Lukasiewicz, o de cualquier otra compatible con la implicación clásica, utilizamos los operadores de Mamdani o Larsen, la situación a la que se llega es muy distinta. En efecto, en este caso[14] el conjunto B* se determina como

$$\mu_{B^*}(y) = \mathbf{min}\{\mu_A(x'),\mu_B(y)\} \tag{3.106}$$

siendo la función de pertenencia de B* la misma que la de B pero *recortada* al valor $\mu_A(x')$. Evidentemente, si ahora $\mu_A(x')=0$ se tiene también que $\mu_B(y)=0$, preservándose la relación causa-efecto. Ocurre exactamente lo mismo con la implicación de Larsen, pero el resultado final es un *escalado* de la función de pertenencia original, en lugar de un recorte.

Estas consideraciones, ya observadas por Mamdani en su primera aplicación, son la causa de que en ingeniería hoy en día se utilicen exclusivamente las dos funciones mencionadas como operadores de implicación difusa, recibiendo por ello el calificativo de *implicaciones ingenieriles*. En cambio, en ámbitos en los que la causalidad no sea relevante, el comportamiento de las implicaciones de Mamdani o Larsen puede no ser adecuado, y deberá posiblemente recurrirse a otras funciones de implicación para mejorar la representación del problema y los resultados devueltos por el proceso de inferencia.

3.6 Sistemas de inferencia difusa

En el apartado anterior se ha analizado con detalle la regla composicional de inferencia, fundamento del razonamiento aproximado. También se han definido dos bloques: fuzzificador y defuzzificador, cuya función es convertir un conjunto nítido en uno difuso y viceversa.

Procede ahora integrar estos conocimientos con el fin de analizar un sistema de inferencia difusa completo. De ellos, los que tienen aplicación en ingeniería responden a la estructura representada en la Figura 3.6:

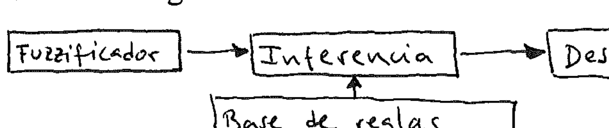

Figura 3.6: Diagrama de bloques de un sistema lógico difuso

---

[14] Utilizando, por ejemplo, la implicación de Mamdani.

En ingeniería, las entradas al sistema son generalmente señales procedentes de sensores y la salida tiene que ser también en cada instante el valor concreto de ciertas variables. Con esto se quiere poner de manifiesto su carácter nítido, de forma que, considerado en su globalidad, el sistema establece una relación entre una salida y y el vector de entradas $\mathbf{x}$, según la expresión $y=f(\mathbf{x})$. Dicho de otra forma, viendo las entradas y la salida no se puede detectar el carácter difuso del sistema. En realidad, este carácter reside en su estructura interna.

El bloque de inferencia obtiene el conjunto difuso de salida a partir del de entrada por aplicación de un conjunto de reglas Si-entonces, que constituye la llamada base de conocimiento. La forma general de cada una de estas reglas es

R^l:	Si	u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y … y u_p es F_p^l
	entonces	v es G^l

donde $l=1,2,\ldots,M$; F_i^l y G^l son conjuntos difusos en $u_i \subset$ P y $v \subset$ R, siendo R el conjunto de los números reales, $u=(u_1,u_2,\ldots,u_p) \in U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_p$ y $v \in$ V, con u y v definidas como variables lingüísticas. Como puede observarse, esta forma corresponde a una regla Si-Entonces similar a las tratadas en el apartado anterior, aunque con múltiples antecedentes.

A modo de ejemplo se presenta de forma resumida la base de conocimiento de un sistema de control difuso, diseñado y realizado por el autor: el péndulo invertido mostrado en la Figura 3.7

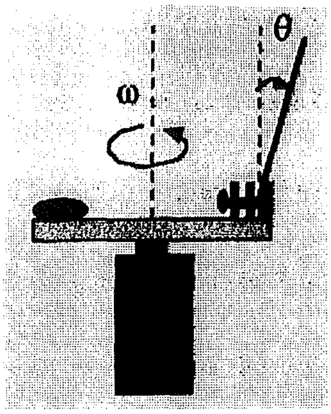

Figura 3.7: Esquema del péndulo invertido

Recurriendo a la experiencia de cualquier persona que intenta estabilizar una escoba apoyada en su dedo, se generan unas reglas que indican que la velocidad del movimiento de la mano debe ser rápido si el ángulo θ es grande y lento si es pequeño. Incorporando a estas reglas la variable velocidad del péndulo $\dot{\theta}$, algunas de las reglas que tiene sentido formular son:

Si	θ es pequeño a la izquierda y $\dot{\theta}$ es aprox. cero
entonces	v es pequeña a la izquierda
Si	θ es aprox. cero y $\dot{\theta}$ es pequeña a la derecha
entonces	v es pequeña a la derecha
Si	θ es pequeño a la derecha y $\dot{\theta}$ es pequeño a la izquierda
entonces	v es aproximadamente cero
Si	θ es pequeño a la derecha y $\dot{\theta}$ es pequeña
entonces	v es mediana a la derecha.

A cada una de las variables lingüísticas de entrada y salida $\theta, \dot{\theta}$ y v se le asignan cinco valores difusos representados por conjuntos del mismo tipo con las etiquetas siguientes:

- para θ y $\dot{\theta}$: NM (negativo medio), NS (negativo pequeño), ZR (cero), PS (positivo pequeño) y PM (positivo medio).

- para v: NL (negativa grande), NM(negativa media), ZR(cero), PM (positiva media) y PL (positiva grande).

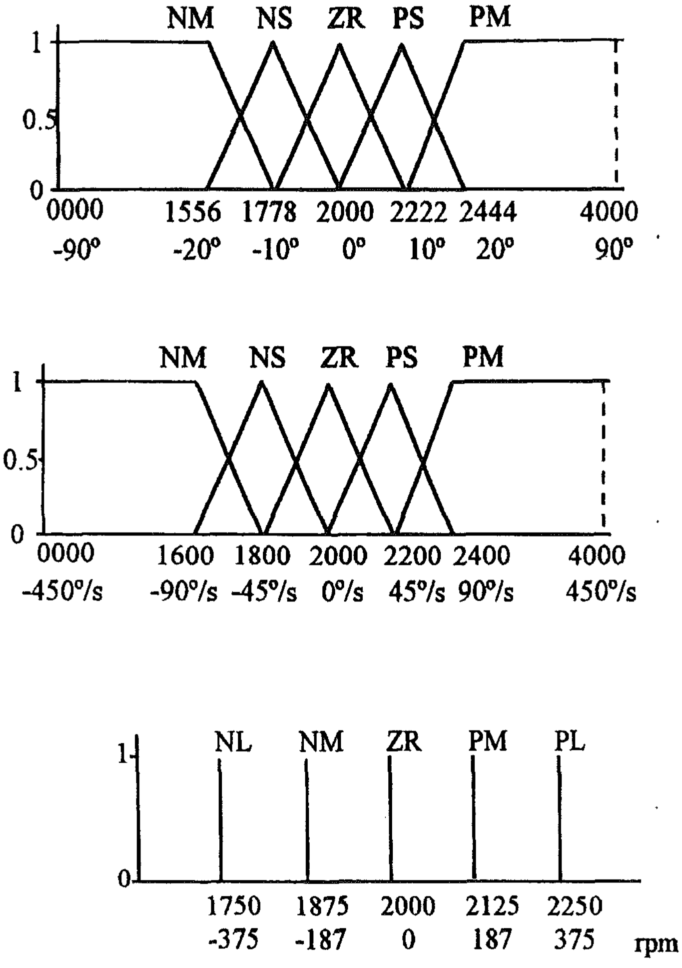

Figura 3.8: Valores difusos para las variables de entrada y salida

Puede observarse que las funciones de pertenencia asignadas a las etiquetas de θ y $\dot{\theta}$ son triangulares con un solapamiento del 50%, lo que hace que la respuesta sea más continua y no se vea sometida a cambios bruscos, mientras que cada una de las etiquetas de la variable v es un singleton. De esta manera, la variable de salida puede tomar únicamente uno de estos valores.

Al sistema implementado se incorporaron, en una primera aproximación, nueve reglas obtenidas a partir de la experiencia de un operador humano. Formuladas en términos de las distintas etiquetas antes definidas constituyen la siguiente base de conocimiento

$$\text{Si } \theta = \text{PM y } \dot{\theta} = \text{ZR entonces } v = \text{PL}$$

$$\text{Si } \theta = \text{NM y } \dot{\theta} = \text{ZR entonces } v = \text{NL}$$

$$\text{Si } \theta = \text{ZR y } \dot{\theta} = \text{PM entonces } v = \text{PL}$$

$$\text{Si } \theta = \text{ZR y } \dot{\theta} = \text{NM entonces } v = \text{NL}$$

$$\text{Si } \theta = \text{ZR y } \dot{\theta} = \text{ZR entonces } v = \text{ZR}$$

$$\text{Si } \theta = \text{PS y } \dot{\theta} = \text{NS entonces } v = \text{ZR}$$

$$\text{Si } \theta = \text{NS y } \dot{\theta} = \text{PS entonces } v = \text{ZR}$$

$$\text{Si } \theta = \text{PS y } \dot{\theta} = \text{PS entonces } v = \text{PM}$$

$$\text{Si } \theta = \text{PS y } \dot{\theta} = \text{NS entonces } v = \text{NM}$$

Para una descomposición más gráfica de este conjunto de reglas, y teniendo en cuenta que el sistema tiene dos entradas y una salida, se recurre a la forma matricial representada en la Figura 3.9

$\Delta\theta$ \ θ	NM	NS	ZR	PS	PM
NM			NL		
NS		NM		ZR	
ZR	NL		ZR		PL
PS		ZR		PM	
PM			PL		

Figura 3.9: Base de reglas para el péndulo invertido

Para comprender en su totalidad el funcionamiento de los sistemas de inferencia quedan pendientes dos problemas. El primero trata de cómo reducir a la forma general antes definida sentencias no del todo coincidentes con ella. El segundo se refiere a cómo generalizar la inferencia difusa descrita en el apartado anterior para una regla con un antecedente y un consecuente a un conjunto de reglas multiantecedente y también de consecuente único.

En cuanto al primero de los problemas, sin entrar de forma exhaustiva, se tratarán aquellos casos que se presentan con mayor frecuencia: sentencias en las que coexisten conectivas "y" y "o"; éstas se traducen a la forma general descomponiéndolas en dos reglas. En efecto, la sentencia

Si	u_1 es F_1 y ... y u_m es F_m
o	u_{m+1} es F_{m+1} y ... y u_p es F_p
entonces	v es G

tiene como equivalente las dos sentencias

Si	u_1 es F_1 y ... y u_m es F_m entonces v es G
Si	u_{m+1} es F_{m+1} y ... y u_p es F_p entonces v es G

Otra situación que merece comentario la constituyen las sentencias con conectivas distintas de "y" y "o", como puede ser "a menos que". Se trata de reglas de la forma

v es G **a menos que** u_1 es F_1 y ... y u_p es F_p

que puede ser expresada como

Si no	(u_1 es F_1 y ... y u_p es F_p)
entonces	v es G

y que por aplicación de la ley de Morgan $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ se transforma en

Si	u_1 no es F_1 o ... o u_p no es F_p
entonces	v es G

esta sentencia responde al conjunto de reglas de la forma general

Si	u_1 no es F_1
entonces	v es G
	$\vdots$
Si	u_p no es F_p
entonces	v es G

cuyo tratamiento implica definir el grado de pertenencia al conjunto difuso "no F_i" a partir de F_i, tema ya tratado ampliamente en capítulos anteriores.

Por último, resulta de interés tratar las llamadas reglas incompletas (reglas IN). Responden a la forma

Si $\quad u_1$ es F_1 y … y u_m es F_m, $\quad m<p$

que puede completarse según

Si $\quad u_1$ es F_1 y … y u_m es F_m y u_{m+1} es IN y … y u_p es IN
entonces $\quad v$ es G

en donde la independencia respecto a las variables lingüísticas $(u_{m+1},\ldots,u_p)$ se refleja haciendo $\mu_{IN}(u)=1\ \forall u \subset R$.

Un caso extremo lo representan sentencias del tipo v es G, que se traducen a la forma general

Si $\quad u_1$ es IN y … y u_p es IN
entonces $\quad v$ es G

La generalización de la regla de inferencia difusa a una base de conocimiento formada por M sentencias multiantecedente y de consecuente único consiste en relacionar el conjunto difuso de entrada $u{:}u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_p$, donde u_i es el resultado de fuzzificar la entrada x_i con el conjunto difuso de salida en V. Para ello, cada regla se interpreta como una implicación R^l: $A \rightarrow B$ en la que $A=F_1^{\,l} \times \ldots \times F_p^{\,l}$ y $B=G^l$. Como se explicó en el apartado anterior, esta implicación puede entenderse como una relación entre los conjuntos A y B a través de $\mu_{R^l}(\mathbf{x},y) = \mu_{A\rightarrow B}(\mathbf{x},y)$, donde $\mathbf{x}$ es el vector $(x_1,\ldots,x_p)$. En consecuencia, se tiene

$$\mu_{R^l}(\mathbf{x},y) = \mu_{R^l}(x_1,\ldots,x_p,y)$$

de forma que

$$\mu_{R^l}(\mathbf{x},y) = \mu_{A\rightarrow B}(\mathbf{x},y) = \mu_{F_1^l}(\mathbf{x},y) * \ldots * \mu_{F_p^l}(\mathbf{x},y) * \mu_{G^l}(\mathbf{x},y)$$

donde se ha elegido una t-norma, ya que en cada regla los antecedentes incluyen únicamente la conectiva "and". Para la t-norma se utilizarán los operadores mínimo o producto, al ser las únicas que tienen sentido en el ámbito de la inferencia.

Abordando la relación entre los conjuntos difusos de entrada y de salida, y definiendo A_x como el conjunto difuso de los vectores de entrada, resulta

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \mu_{X1}(x_1) * \ldots * \mu_{Xp}(x_p)$$

donde $x_k \subset u_k$ corresponden a la salida de los fuzzificadores asociados a cada entrada. De esta forma, puede obtenerse el conjunto de salida como

$$\mu_{B^l}(y) = \mu_{A_x \circ R^l}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in A_x}[\mu_{A_x}(\mathbf{x}) * \mu_{A \to B}(\mathbf{x}, y)]$$

Esta ecuación no es sino la relación salida-entrada para una de las reglas. Queda pendiente cómo asociar los conjuntos difusos B^l en un solo conjunto de salida B. Aparte de otros métodos, lo más común es conectar las reglas con una t-norma, de forma que

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_M$$

para lo que con mucha frecuencia se utiliza el operador "max".

Por último, queda el problema de traducir el valor del conjunto difuso de salida a un valor nítido y. Esta es la función del defuzzificador, explicado en detalle en la sección 2.3.2

Se concluye, de esta manera, la descripción cuantitativa de un sistema de inferencia difusa general, esquema al que corresponden la práctica totalidad de las aplicaciones en ingeniería de la lógica difusa.