Universitat Jaume I

Escuela Superior de Tecnología
y Ciencias Experimentales
Departamento de Matemáticas
Castellón

CONTINUIDAD AUTOMÁTICA DE OPERADORES LINEALES Y SU REPRESENTACIÓN COMO APLICACIONES COMPOSICIÓN CON PESO

Memoria presentada por **Juan José Font Ferrandis** para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, y elaborada bajo la dirección de los Profesores Dr. **Jesús Araujo Gómez** y Dr. **Salvador Hernández Muñoz**.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los Profesores **Jesús Araujo y Salvador Hernández**, por haber depositado su confianza en mi y por su inestimable aportación científica y humana, sin la cual no hubiese sido posible la realización de esta memoria.

Es también mi deseo agradecer al Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón la ayuda de todo tipo que he recibido en la elaboración de este trabajo.

A mi familia

Índice

Introducción.

La finalidad de esta memoria es aportar algunos resultados a la teoría de los operadores lineales entre espacios de funciones continuas o integrables. Nos centraremos en la representación de dos tipos de operadores lineales que están íntimamente relacionados: las aplicaciones separadoras (Capítulos 1 y 2) y las isometrías (Capítulos 3 y 4).

Sea $\mathbf{K}$ el conjunto de los números reales o complejos. Sea $C(X)$ el anillo formado por las funciones continuas definidas sobre el espacio de Tychonov X y que toman valores en $\mathbf{K}$. La obtención de relaciones topológicas entre dos espacios de Tychonov X e Y a partir de las vinculaciones algebraicas, topológico-algebraicas o de orden entre $C(X)$ y $C(Y)$ ha sido ampliamente tratada en la literatura matemática desde los años 30. Entre otras cosas, ha inspirado varias de las construcciones más importantes de la topología general, como por ejemplo, la compactificación de Stone-Čech o la realcompactificación de Hewitt.

El primero de tales resultados es el conocido Teorema de Banach-Stone. El actual enunciado del citado teorema es como sigue: Sean X e Y espacios localmente compactos y $C_0(X)$ (resp. $C_0(Y)$) el álgebra de Banach (con la norma supremo) de las funciones continuas definidas sobre X (resp. Y), que toman valores escalares y que se anulan en el infinito. Si existe una isometría lineal sobreyectiva T entre $C_0(X)$ y $C_0(Y)$, entonces existe un homeomorfismo h entre Y y X y una aplicación continua $a : Y \to \mathbf{K}$, $|a| \equiv 1$, de forma que T puede escribirse como una aplicación composición con peso, i.e.,

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \textit{ para todo } y \in Y \textit{ y toda } f \in C_0(X).$$

Este importante teorema ha sido generalizado en gran número de direcciones. Por ejemplo, estudiando isometrías no necesariamente sobreyectivas. El resultado más importante en esta dirección se debe a W.

Holsztyński ([40]): si existe una isometría lineal T entre $C(X)$ y $C(Y)$ (X e Y compactos), entonces podemos encontrar un subconjunto cerrado Y_0 de Y, una aplicación h continua y sobreyectiva entre Y_0 y X y una aplicación continua $a : Y_0 \to \mathbf{K}$, $|a| \equiv 1$, de forma que

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \textit{ para todo } y \in Y_0 \textit{ y todo } f \in C(X).$$

Algunos años antes, Geba y Semadeni ([30]) habían obtenido un resultado análogo al Teorema de Holsztyński, aunque para isometrías lineales, inyectivas y bipositivas.

También se pueden obtener generalizaciones similares si se reemplaza el espacio $C(X)$ por alguno de sus subespacios o subálgebras. Así, en 1948, Myers ([49]) probó que, si las funciones toman valores reales, entonces una condición suficiente para que X y Y sean homeomorfos es que un subespacio completamente regular de $C(X)$ (cf. Definición 3.2.5) y otro de $C(Y)$ sean isométricamente isomorfos.

En 1959, M. Nagasawa ([50]) (véase también [23]) extendió el Teorema de Banach-Stone a *álgebras uniformes (sobre un espacio compacto X)*, i.e., subálgebras de $C(X)$ cerradas, separadoras y con unidad. Nagasawa probó que dos de estas subálgebras son isomorfas como álgebras si y sólo si son isométricas como espacios de Banach.

En 1975, P. Novinger ([51]) fue un poco más lejos y extendió alguna de las generalizaciones anteriormente citadas con el siguiente teorema: si existe una isometría lineal T entre un subespacio vectorial separador A de $C(X)$ que contiene las funciones constantes, y $C_0(Y)$, entonces existe una aplicación h continua y sobreyectiva entre $Ch(T(A))$ (frontera de Choquet de $T(A)$) y $Ch(A)$, y una aplicación continua $a : Ch(T(A)) \to \mathbf{K}$, $|a| \equiv 1$, de forma que

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \textit{ para todo } y \in Ch(T(A)) \textit{ y todo } f \in A.$$

Otro tipo de extensiones del Teorema de Banach-Stone pueden conseguirse si consideramos subespacios de $C_0(X)$ dotados de normas distintas a la norma supremo. Entre estos subespacios cabe destacar: espacios de funciones diferenciables (cf. [18]); espacios de funciones absolutamente continuas (cf. [53]); y espacios de funciones de Lipschitz (cf. [22]).

Si debilitamos el vínculo geométrico entre $C_0(X)$ y $C_0(Y)$, el homeomorfismo entre X y Y puede no existir: A.A. Milutin ([48]) probó que si X es cualquier espacio compacto, métrico y no numerable (por ejemplo, $X = [0,1] \cup \{2\}$), entonces $C(X)$ es linealmente homeomorfo a $C([0,1])$, es decir, son isomorfos como espacios de Banach.

Sin embargo, si la isometría no se debilita demasiado, todavía se pueden obtener buenos resultados: en 1965-66, D. Amir ([4]) y M. Cambern ([17]) probaron, independientemente, que si entre $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ existe un isomorfismo T que satisface la relación $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$, entonces X e Y son homeomorfos.

Este resultado ha sido extendido a varios subespacios de $C_0(X)$, por ejemplo, subespacios extremadamente regulares (cf. [15], [21], [19] o [43]) y subálgebras separadoras con unidad (cf. [44]).

El Teorema de Banach-Stone para funciones continuas que toman valores en un espacio de Banach E no es cierto, ni incluso si consideramos $E = \mathbf{R}^2$ y X, Y espacios compactos y métricos ([56]). Así pues, el principal objetivo dentro de este contexto es determinar las propiedades geométricas del espacio E que proporcionan resultados similares al Teorema de Banach-Stone.

Recientemente varios autores han iniciado el estudio de un tipo especial de isometrías lineales $T : C(X) \longrightarrow C(X)$ (X compacto): Aquellas cuyo rango, $T(C(X))$, tiene codimensión 1 en $C(X)$. Este tipo de aplicaciones, a las que denominaremos *isometrías con codimensión 1*, tiene su origen en los operadores que a continuación detallamos: Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Diremos que $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un operador translación (Shift Operator) si $T(\phi_n) = \phi_{n+1}$ para $n = 1, 2, ...$

En 1972, R.M. Crownover dio una definición de operador translación para espacios de Banach en general, sin utilizar bases: Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Banach. Diremos que $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un operador translación si

1. T es una isometría lineal,

2. La codimensión del rango de T, $T(\mathcal{K})$, en $\mathcal{K}$ es 1,

3. $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(\mathcal{K}) = \{0\}$.

Si suprimimos la condición (3), entonces tenemos una isometría lineal con codimensión 1 (Quasi-shift Operator).

En [34], los autores estudiaron en profundidad las isometrías lineales con codimensión 1 definidas sobre el espacio de Banach $C(X)$ (X compacto). En primer lugar, clasificaron dicho tipo de operadores basándose en el siguiente teorema: Sea $T : C(X) \longrightarrow C(X)$ una isometría lineal con codimensión 1. Entonces existe un subconjunto cerrado X_0 de X de forma que (1) $X_0 = X \setminus \{p\}$ donde p es un punto aislado de X, o (2) $X_0 = X$ y tal que existe una aplicación continua y sobreyectiva $h : X_0 \longrightarrow X$ y una función $a \in C(X_0)$, $|a| \equiv 1$, de manera que

$$(Tf)(x) = a(x) \cdot f(h(x))$$

para todo $x \in X_0$.

La prueba de este resultado se basa en el Teorema de Holsztyński (op. cit.). Aquellas isometrías lineales con codimensión 1 que satisfacen la condición (1) se denominan de Tipo I. Las que satisfacen la condición (2) se denominan de Tipo II. Es importante destacar que existen isometrías lineales con codimensión 1 que son a la vez de tipo I y de tipo II.

En [34], los autores estudian también las condiciones sobre el espacio compacto X para que $C(X)$ admita operadores translación. Por ejemplo, si X no es separable y no tiene puntos aislados, entonces $C(X)$ no admite dichos operadores.

Recientemente, F.O. Farid y K. Varadarajan ([26]) han obtenido un método para construir isometrías lineales con codimensión 1 sobre $C(X)$. En dicho trabajo los autores mejoran ligeramente la clasificación anterior.

Por otra parte, si la condición de isometría lineal se sustituye por la de isomorfismo de álgebras entre $C(X)$ y $C(Y)$ con X e Y compactos, el homeomorfismo que nos proporciona el Teorema de Banach-Stone se sigue conservando (Gelfand-Kolmogoroff, [32]). Además se simplifica la forma del isomorfismo puesto que ahora la función peso a es la función 1. En este mismo contexto, si suprimimos la compacidad de X e Y, el mencionado homeomorfismo puede no existir, pero Hewitt probó que las realcompactificaciones de X e Y son aún homeomorfas ([32]).

En 1941, M. Stone demostró que si $C(X)$ y $C(Y)$ (X e Y compactos) son isomorfos como grupos reticulados, el homeomorfismo entre X e Y se mantiene. Por su parte, en 1947, I. Kaplansky probó el mismo resultado exigiendo sólamente que $C(X)$ y $C(Y)$ fueran isomorfos como retículos. Finalmente, en 1956, y tras una serie de generalizaciones similares, M. Henriksen concluyó que, para cualquier par de espacios topológicos X e Y, $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos si y sólo si lo son como semigrupos o como retículos.

En el contexto de los grupos topológicos localmente compactos y Abelianos y las álgebras de funciones integrables que están definidas sobre dichos grupos también puede hallarse resultados del tipo de los anteriormente citados. En 1953, H. Helson, ([36]), probó que si $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es un isomorfismo entre las álgebras de funciones absolutamente integrables definidas sobre los grupos localmente compactos y Abelianos, G_1 y G_2, tal que $\|T\| \leq 1$, entonces G_1 y G_2 son isomorfos como grupos y homeomorfos como espacios topológicos, i.e., topológicamente isomorfos. Además, si $h : G_2 \longrightarrow G_1$ es el citado isomorfismo, entonces existe un escalar k y un carácter γ sobre G_2 (cf. Sección 2.2) tal que

$$Tf(y) = k \cdot (\gamma(y)) \cdot f(h(y)) \qquad f \in L^1(G_1), \;\; y \in G_2.$$

Poco después, A. Beurling y H. Helson, ([16]), probaron, en esa linea, que si el grupo dual de G_2 (cf. Sección 2.2) es conexo, entonces se obtiene la misma relacion entre los grupos, incluso si $\|T\| > 1$. En 1976, N.J. Kalton y G. Wood, ([47]), estudiaron la influencia de la norma del isomorfismo T. Concretamente demostraron que si $\|T\| < \sqrt{2}$, entonces los grupos siguen siendo topológicamente isomorfos y propusieron un ejemplo con $\|T\| = \sqrt{2}$ donde el resultado ya no es cierto.

Durante el desarrollo de una versión del Teorema de Banach-Stone para funciones continuas que toman valores en un cuerpo no arquimediano, E. Beckenstein y L. Narici (véase también [5]) adaptaron al contexto de los espacios de funciones continuas un tipo de operadores que extiende el concepto de homomorfismo de anillos, de álgebras, de semigrupos, etc: Las aplicaciones *separadoras*. Una aplicación lineal entre espacios de funciones se dice *separadora* si satisface la implicación $f \cdot g \equiv 0 \Longrightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0$. Este tipo de operadores ya fue descrito por S. Banach en los años 30, cuando demostró que todas las isometrías de $L_p[0,1]$, $p \neq 2$, son separadoras.

En [13] y [45], los autores estudiaron en profundidad las propiedades de las aplicaciones separadoras con el objetivo de obtener condiciones que aseguren su continuidad automática y su representación como aplicaciónes composición con peso. Concretamente, se demuestra que toda biyección separadora entre espacios de funciones continuas definidas sobre compactos es continua e induce un homeomorfismo entre dichos compactos. También se prueba la existencia de aplicaciones separadoras *discontinuas* entre $C(X)$ y $C(Y)$ para cualquier par X e Y de espacios compactos infinitos. Recientemente, Araujo, Beckenstein y Narici ([6]) extendieron los resultados que acabamos de enumerar a espacios realcompactos asumiendo que la inversa de la biyección separadora es también separadora.

En el contexto de los retículos de Banach, las aplicaciones separadoras han sido ampliamente estudiadas. Por ejemplo, su representación multiplicativa en [1], [2], [27] y [35], sus propiedades espectrales en [10] y [11], o su descomposición como suma de aplicaciones positivas en [52]. Recientemente, C.B. Huijsmans y B. de Pagter ([41]) estudiaron en qué condiciones la inversa de una biyección separadora es separadora, aunque este problema continua abierto en su versión más general.

La teoría de las aplicaciones separadoras tiene una aplicación natural en el contexto de los espacios de funciones continuas que toman valores vectoriales. En este campo quedan muchos problemas abiertos relacionados, por ejemplo, con la versión vectorial del Teorema de Banach-Stone anteriormente citada. En [37], Beckenstein, Hernández y Narici aplican el concepto de aplicación separadora a estas cuestiones, caracterizando las isometrías vectoriales que satisfacen el Teorema de Banach-Stone y dando pruebas alternativas a resultados clásicos de M. Jerison and K. Lau. Otro estudio de las aplicaciones separadoras en el campo vectorial puede encontrarse en [42], aunque aquí los autores asumen la continuidad de la aplicación separadora.

En el capítulo 1 de esta memoria estudiaremos la continuidad automática y la representación de las aplicaciones separadoras T entre subálgebras de $C_0(X)$ que contienen a $C_{00}(X)$. Para ello, analizaremos el comportamiento de los puntos de continuidad de T (cf. Definición 1.3.1) ya que de ellos depende la continuidad de T (cf. Proposición 1.3.1). Concretamente, si la aplicación separadora T es biyectiva, entonces probaremos que es automáticamente continua y que se puede escribir como una aplicación composición con peso.

Si asumimos que T está definida entre $C_0(X)$ y $C_0(Y)$, entonces podremos asegurar, como hizo K. Jarosz ([45]) en el caso compacto, que los espacios localmente compactos Y y X son homeomorfos.

Como aplicación de los resultados que acabamos de citar, obtendremos una versión del Teorema de Holsztyński (op. cit.) para espacios del tipo $C_{00}(X)$. Esta generalización se deducirá del hecho que toda isometría lineal es una aplicación separadora.

En el capítulo 2 introduciremos el concepto de aplicación separadora entre las álgebras de Banach $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ siendo G_1 y G_2 grupos localmente compactos y Abelianos. Nuestra definición generaliza el concepto usual de homomorfismo de álgebras antes mencionado y nuestro objetivo es precisamente estudiar hasta qué punto se puede extender los resultados clásicos del análisis armónico (cf. Sección 2.2). Concretamente probaremos que una biyección separadora $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es siempre continua e induce un homeomorfismo entre los grupos duales de G_1 y G_2, o lo que es lo mismo, entre los espacios de los ideales maximales de $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$.

Estos resultados nos permitirán obtener la siguiente caracterización de las biyecciones separadoras: La aplicación $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es biyectiva y separadora si y sólo si se puede escribir como la composición de un isomorfismo de álgebras $T_1 : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ y una aplicación lineal y continua $T_2 : L^1(G_2) \longrightarrow L^1(G_2)$ que conmuta con todas las translaciones.

En la última parte de este segundo capítulo probaremos algunas aplicaciones de los teoremas principales. Así, demostraremos que toda biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ tiene una única extensión a una biyección separadora entre los espacios de medidas $M(G_1)$ y $M(G_2)$. También estudiaremos qué condiciones adicionales debe satisfacer T para asegurar que los grupos G_1 y G_2 sean topológicamente isomorfos.

El capítulo 3 esta dedicado al Teorema de Banach-Stone, es decir, a las isometrías lineales entre subespacios de funciones continuas. En realidad estudiaremos isometrías lineales T entre un subespacio vectorial $A \subseteq C_0(X)$ que separa completamente los puntos de X (cf. Definición 3.2.4), y $C_0(Y)$ (X e Y son espacios localmente compactos). Demostraremos que dichas isometrías pueden escribirse como una aplicación composición con peso sobre ciertos subconjuntos singulares de Y.

Además, si el rango de la isometría es también un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(Y)$, demostraremos que los citados subconjuntos son homeomorfos.

Como consecuencia de este último resultado, obtenemos que el conjunto de los puntos frontera fuerte de A y $T(A)$ son homeomorfos y que las fronteras de Shilov de A y $T(A)$ también son homeomorfas.

Con un ejemplo demostraremos que las afirmaciones anteriores no son ciertas si reemplazamos la hipótesis "A es un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(X)$" por "A es un subespacio vectorial separador de $C_0(X)$".

Finalmente, extenderemos los resultados (op. cit.) de Holsztyński ([40]), Myers ([49]) y Novinger ([51]), y aplicaremos los resultados obtenidos previamente al estudio de las isometrías entre subálgebras de funciones continuas; concretamente, entre álgebras de Banach semisimples, conmutativas y sin unidad.

El capítulo 4 lo dedicaremos al estudio de las isometrías lineales con codimensión 1 definidas entre álgebras uniformes (sobre el espacio compacto X). Concretamente, propondremos y analizaremos una clasificación de dichas isometrías lineales. Esta clasificación amplia la que Gutek-Hart-Jamison-Rajagopalan ([34]) proponen para el álgebra uniforme $C(X)$ y se basa en los resultados del capítulo 3, fundamentalmente en los Teoremas 3.4.1 y 3.5.1, y en el hecho que el rango de toda isometría lineal con codimensión 1 separa completamente los puntos de X salvo, a lo sumo, dos.

Preliminares

0.1 Notación y terminología.

Escribiremos **N** (resp. **R**, **C**) para denotar el conjunto de los números naturales (resp. reales, complejos). **K** designará a **R** o **C**.

La palabra espacio servirá para designar a un espacio topológico de Hausdorff y completamente regular.

Dado un espacio compacto X, escribiremos $C(X)$ para referirnos al álgebra de todas las funciones continuas definidas sobre X con valores reales o complejos y dotada de la topología uniforme, es decir, la que induce la norma supremo ($\|\cdot\|$). Recíprocamente, cuando escribamos $C(X)$, asumiremos que X es un espacio compacto. Si X no es compacto, escribiremos $C^*(X)$ para denotar las funciones continuas y acotadas definidas sobre X.

Si X es un espacio localmente compacto, entonces $C_0(X)$ representa el espacio de Banach de todas las funciones continuas f definidas sobre X con valores reales o complejos y que se anulan en el infinito, es decir, dado $\epsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto. Es inmediato comprobar que si X es compacto, entonces $C(X) = C_0(X)$. Por otra parte, $C_{00}(X)$ denotará el ideal de $C_0(X)$ formado por la funciones con soporte compacto. Consideraremos en ambos espacios la topología uniforme. Recíprocamente, cuando escribamos $C_0(X)$ o $C_{00}(X)$, asumiremos que X es un espacio localmente compacto.

Si X es un espacio localmente compacto, X^* denota su compactificación de Alexandroff; es decir, $X^* = X \cup \{\infty\}$, siendo ∞ un punto ideal cuyos entornos son los subconjuntos de X^* con complementario compacto en X. cX denotará cualquier compactificación de Hausdorff de X.

Si $f \in C(X)$ (resp. $C_0(X)$ o $C_{00}(X)$), llamaramos conjunto cozero de f a $coz(f) := \{t \in X : f(t) \neq 0\}$. Escribiremos $supp(f)$ para designar el soporte de la función f, i.e., la clausura de $coz(f)$.

Cuando U sea cualquier subconjunto del espacio X, denotaremos por $cl_X(U)$ ($cl(U)$ si no hay posibilidad de confusión) a la clausura de U en X y por $int_X(U)$ a su interior. $f_{|U}$ representa la restricción de f a U, para cualquier $f \in C(X)$.

1 denota la función de $C(X)$ tal que $1(t) = 1$ para todo $x \in X$.

Dado un punto $x \in X$, escribiremos $x^t : C(X) \longrightarrow \mathbf{K}$ para referirnos al funcional evaluación $x^t(f) := f(x)$.

Sea $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ una aplicación lineal. Dado un elemento $y \in Y$, llamaremos $T^t y^t : C(X) \rightarrow \mathbf{K}$ a la aplicación definida como

$$T^t y^t(f) := (Tf)(y)$$

para todo $f \in C(X)$.

0.2 Nociones básicas.

A continuación enunciaremos algunos resultados básicos relacionados con la teoría de los espacios normados y de las álgebras de Banach, de los cuales haremos uso en el transcurso de esta memoria.

Espacios normados.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, es decir, un espacio vectorial complejo dotado de una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{X}$ es completo respecto de la métrica inducida por $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, entonces $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach.

Una aplicación lineal T definida entre dos espacios normados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ es continua si existe un número real C tal que

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq C \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}, \qquad x \in \mathcal{X}.$$

El valor más pequeño que puede tomar C se denomina norma de T, $\|T\|$. Es fácil comprobar que

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|Tx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}}, x \neq 0\right\}$$

Teorema de la Gráfica Cerrada. *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos espacios de Banach y T una aplicación lineal entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Si las relaciones*

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\|_{\mathcal{X}} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \|Tx_n - y\|_{\mathcal{Y}} = 0$$

implican que $Tx = y$, entonces T es una aplicación continua.

Denotaremos por $\mathcal{X}'$ el espacio dual del espacio normado $\mathcal{X}$, es decir, $\mathcal{X}'$ es el conjunto de todos los funcionales lineales $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{K}$ continuos.

Escribiremos $V[\mathcal{X}']$ para designar la bola unidad de $\mathcal{X}'$, i.e.,

$$V[\mathcal{X}'] := \{\varphi \in \mathcal{X}' : \|\varphi\|_{\mathcal{X}'} \leq 1\}$$

siendo $\|\varphi\|_{\mathcal{X}'} := sup\{|\varphi(x)| : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1\}$. Con esta norma, $\mathcal{X}'$ es un espacio de Banach.

Sea M un subconjunto convexo de $\mathcal{X}$. Diremos que un elemento x de M es un *punto extremo* de M si no existe ningún segmento abierto contenido en M y que contenga al punto x. Recordemos que un segmento abierto es un subconjunto de $\mathcal{X}$ cuyos elementos tienen la siguiente forma:

$$tx_2 + (1-t)x_1$$

con $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ y $x_1 \neq x_2$. Escribiremos $ex(M)$ para designar el conjunto de los puntos extremos de M.

Teorema. (Krein-Milman) $ex(V[\mathcal{X}']) \neq \emptyset$.

Teorema. *Supongamos que A es un subespacio vectorial de $C_0(X)$. Entonces los elementos de $ex(V[A'])$ tienen la siguiente forma :*

$$\{z \cdot x^t : \ |z| = 1, \ x \in X\}.$$

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos espacios de Banach y T una aplicación lineal y continua definida entre ambos. La aplicación

$$x \longrightarrow \varphi(T(x)), \qquad \varphi \in \mathcal{Y}', x \in \mathcal{X}$$

es un funcional lineal y continuo. Por tanto existe un elemento de $\mathcal{X}'$, que denotaremos por $T'(\varphi)$, tal que

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)), \qquad x \in \mathcal{X}.$$

La aplicación T' definida entre $\mathcal{Y}'$ y $\mathcal{X}'$ se denomina *adjunta* de T y es una aplicación lineal y continua.

Teorema. *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos espacios de Banach y T una aplicación lineal, inyectiva y continua definida entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Supongamos que $T(\mathcal{X})$ es un subconjunto denso de $\mathcal{Y}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) $T(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.
ii) $T'(\mathcal{Y}') = \mathcal{X}'$.

Teorema de extensión de Tietze. *Sea $\mathcal{E}$ un espacio normal y $\mathcal{F}$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{E}$. Si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}$ es una función continua, entonces existe otra función continua $\hat{f} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\hat{f}_{|\mathcal{F}} \equiv f$.*

Álgebras de Banach.

Un espacio vectorial complejo $\mathcal{A}$ es una álgebra conmutativa si en $\mathcal{A}$ definimos un producto que cumple las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva usuales.

Si en $\mathcal{A}$ definimos una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ que convierte a $\mathcal{A}$ en un espacio de Banach y tal que

$$\|a \cdot b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \|b\|_{\mathcal{A}} \qquad (a, b \in \mathcal{A}),$$

entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa.

Diremos que $\mathcal{A}$ posee unidad si existe un elemento, 1, tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Además, podemos asumir, reemplazando la norma de $\mathcal{A}$ por otra equivalente si es necesario, que $\|1\|_{\mathcal{A}} = 1$.

Sea X el conjunto de todos los funcionales multiplicativos $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$. La topología débil inducida en X por las funciones a^t, $a \in \mathcal{A}$, se denomina *topología de Gelfand.* Al espacio X se le llama *espacio de los ideales maximales de* $\mathcal{A}$. Si el álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$ posee unidad entonces X es un espacio compacto. En caso contrario, X es un espacio localmente compacto.

Dado $a \in \mathcal{A}$, la función a^t es un elemento de $C_0(X)$. La aplicación (de Gelfand), que a cada elemento $a \in \mathcal{A}$ le hace corresponder la función a^t, es un homomorfismo de álgebras entre $\mathcal{A}$ y la subálgebra $\mathcal{A}^t$ de $C_0(X)$ formada por todas las funciones a^t, $a \in \mathcal{A}$. Además la aplicación de Gelfand es continua puesto que

$$\left\|a^t\right\| \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Llamaremos *transformada de Gelfand de* $a \in \mathcal{A}$ a la función a^t.

Diremos que un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$ es semisimple si su aplicación de Gelfand es inyectiva. En este caso, los elementos de X separan los puntos de $\mathcal{A}$.

Capítulo 1

Aplicaciones separadoras entre subálgebras de funciones continuas.

1.1 Introducción.

En [12], E. Beckenstein y L. Narici introdujeron el concepto de aplicación separadora como herramienta para probar el teorema de Banach-Stone para funciones que toman valores en un cuerpo no arquimediano. En [13], dichas aplicaciones fueron estudiadas en profundidad en el contexto de las funciones continuas que toman valores reales o complejos.

Más tarde, en [45], K. Jarosz demostró que una biyección separadora entre $C(X)$ y $C(Y)$ (X e Y espacios compactos) es continua, se puede escribir como una aplicación composición con peso e induce un homeomorfismo entre los espacios compactos Y y X. Además probó que dados dos espacios compactos X e Y cualesquiera, siempre existe una aplicación separadora discontinua definida entre $C(X)$ y $C(Y)$.

En este capítulo estudiaremos la continuidad automática y la representación de las aplicaciones separadoras T entre subespacios de $C_0(X)$ que contienen a $C_{00}(X)$. Para ello, analizaremos el comportamiento de los puntos de continuidad de T (cf. Definición 1.3.1) ya que de ellos depende la continuidad de T (cf. Proposición 1.3.1). Concretamente, si la aplicación separadora T es biyectiva, entonces es automáticamente continua y se puede escribir como una aplicación composición con peso.

Si asumimos que T está definida sobre $C_0(X)$ y su rango es $C_0(Y)$, entonces podemos asegurar, como hizo K. Jarosz en el caso compacto, que los espacios localmente compactos Y y X son homeomorfos.

Como aplicación de los resultados que acabamos de citar, obtendremos la siguiente versión del Teorema de Holsztyński (cf. Introducción) para espacios de funciones continuas con soporte compacto:

Si T es una isometría lineal entre $C_{00}(X)$ y $C_{00}(Y)$, entonces existe un subconjunto cerrado $\Omega \subseteq Y$, una función $h : \Omega \to X$ continua y sobreyectiva y una función continua $\chi : \Omega \to \mathbf{K}$ tal que

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $y \in \Omega$ y todo $f \in C_{00}(X)$.

Esta generalización se deducirá del hecho que toda isometría lineal es una aplicación separadora. Concretamente demostraremos que si $K : C_{00}(X) \to C_{00}(Y)$ una isometría lineal, entonces existe un subconjunto cerrado Ω de Y tal que la aplicación $T = \rho \circ K$ es una isometría separadora, siendo $\rho : C_{00}(Y) \to C_{00}(\Omega)$ la aplicación definida como $\rho(f) := f_{|\Omega}$.

En el capítulo 3 estudiaremos en profundidad el comportamiento de las isometrías lineales definidas entre subespacios de funciones continuas.

1.2 Definiciones y resultados preliminares.

Una aplicación lineal T definida entre una subálgebra A de $C_0(X)$ y una subálgebra B de $C_0(Y)$ se denomina *separadora o d-homomorfismo* si $f \cdot g \equiv 0$ implica $Tf \cdot Tg \equiv 0$ para todo $f, g \in A$.

Como ejemplos de aplicaciones separadoras se tienen los homomorfismos de anillos o de retículos, las isometrías sobreyectivas, las aplicaciones composición con peso, los operadores diferenciación, etc. Gran parte de los operadores integrales son aplicaciones lineales no separadoras.

Diremos que un subconjunto abierto U de X^* es un *anulador* de la aplicación $T^t y^t$ si para toda función $f \in A$ tal que $coz(f) \subset U \cap X$, se cumple que $T^t y^t(f) = 0$.

En este capítulo, X e Y representan espacios localmente compactos. Por su parte, A será una subálgebra de $C_0(X)$ que contiene a $C_{00}(X)$ y que es, además, un ideal en el anillo de las funciones continuas y acotadas definidas en X, y B será una subálgebra de $C_0(Y)$ que contiene a $C_{00}(Y)$. Por último, T denotará una aplicación separadora entre A y B.

Definición 1.2.1 *Dado $y \in Y$ y una aplicación separadora $T : A \longrightarrow B$, denotaremos por $suppT^t y^t$ al conjunto*

$$\{x \in X^* \ : \ \textit{para cualquier entorno abierto } U \textit{ de } x \textit{ en } X^*,$$

$$\textit{existe } f \in A \textit{ tal que } (Tf)(y) \neq 0 \textit{ y } coz(f) \subseteq U \cap X\}.$$

Lema 1.2.1 *Sea $y \in Y$. Entonces*

$$suppT^t y^t = X^* \setminus \bigcup \{U \subset X^* : U \textit{ es un anulador de } T^t y^t\}.$$

Demostración. Sea $x \in suppT^t y^t$ y supongamos que existe un anulador U de $T^t y^t$ tal que $x \in U$. Como U es un entorno abierto de x, existe, por la Definición 1.2.1, una función $f \in A$ tal que $(Tf)(y) \neq 0$ y $coz(f) \subset U$, lo cual contradice la definición de conjunto anulador.

Recíprocamente, sea x un elemento del conjunto

$$X^* \setminus \bigcup \{U \subset X^* : U \textit{ es un anulador de } T^t y^t\}.$$

Supongamos que $x \notin suppT^t y^t$. En ese caso, existe un entorno abierto U de x en X^* tal que para toda función $f \in A$ con $coz(f) \subseteq U \cap X$, se tiene $(Tf)(y) = 0$. En consecuencia, U es una anulador de $T^t y^t$ y, como $x \in U$, llegamos a una contradicción. $\square$

Nota 1.2.1 Cuando asumamos que $A = C_0(X)$, llamaremos Y_0 al subconjunto de Y formado por los puntos y tales que existe una función $f_y \in C_0(X)$ con $Tf_y(y) \neq 0$. Es inmediato comprobar que Y_0 es un subconjunto abierto de Y y, en consecuencia, localmente compacto ([25], 3.3.11). Nótese, además, que si, por ejemplo, la aplicación separadora $T : C_0(X) \longrightarrow B$ es sobreyectiva, entonces $Y = Y_0$.

Por otra parte, si $A \neq C_0(X)$, entonces consideraremos que $Y_0 \subseteq Y$ es el subconjunto de los puntos y tales que existe una función $f_y \in C_{00}(X)$ con $Tf_y(y) \neq 0$. En este caso, también se puede deducir, de forma análoga, que Y_0 es localmente compacto.

En el transcurso de este capítulo y en cualquiera de los dos casos anteriores, asumiremos, sin pérdida de generalidad (puesto que Y_0 es localmente compacto), que $Y_0 = Y$.

El Lema y la Proposición que demostraremos a continuación son una adaptación al contexto de los espacios localmente compactos de ciertos resultados análogos probados por Beckenstein, Narici y Todd ([13]).

Lema 1.2.2 *Sea $T : A \longrightarrow B$ una aplicación separadora. Para todo $y \in Y$, el conjunto $suppT^t y^t$ contiene un único elemento.*

Demostración. Supongamos que el conjunto $suppT^t y^t$ es vacío. Entonces

$$X^* = \bigcup \{U \subset X^* : U \text{ es un anulador de } T^t y^t\}.$$

Como X^* es compacto, existen $U_1, U_2, \ldots U_n$ conjuntos anuladores de $T^t y^t$ tal que

$$X^* = U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Consideremos a continuación una partición de la unidad en $C(X^*)$ subordinada a $U_1, U_2, \ldots U_n$, es decir, una familia de funciones $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset$

$C(X^*)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$$

en X^* y $coz(f_i) \subset U_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, y como quiera que A es un ideal en $C^*(X)$, tenemos que

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot f$$

para cualquier función $f \in A$ con $(f_i \cdot f) \in A$ para todo i. Como además $coz(f_i \cdot f) \subset U_i$, entonces, por la definición de conjunto anulador, $T(f \cdot f_i)(y) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Así pues, $(Tf)(y) = 0$ para todo $f \in A$, pero esto no es posible ya que hemos asumido que $Y_0 = Y$ (cf. Nota 1.2.1).

Por otra parte, supongamos que existen dos elementos distintos x_1 y x_2 de $suppT^t y^t$. Sean U y V dos entornos disjuntos de x_1 y x_2 respectivamente. Entonces existen dos funciones $f, g \in A$ tal que

$$(Tf)(y) \cdot (Tg)(y) \neq 0$$

con $coz(f) \subset U$ y $coz(g) \subset V$, lo cual es imposible porque T es una aplicación separadora. □

Como consecuencia de este lema, podemos definir la siguiente función asociada a la aplicación separadora $T : A \longrightarrow B$:

Definición 1.2.2 *Dada una aplicación separadora $T : A \longrightarrow B$, definimos su función soporte $h : Y \to X^*$ del siguiente modo:*

$$h(y) := suppT^t y^t.$$

Proposición 1.2.1 *Sea $T : A \longrightarrow B$ una aplicación separadora y sea U un subconjunto abierto de X^*. Supongamos que $f \in A$. Entonces,*

1. *La función soporte h de T es continua.*

2. *$f_{|U \cap X} \equiv 0$ implica $Tf_{|h^{-1}(U)} \equiv 0$.*

3. $h(coz(Tf)) \subset cl_{X^*}(coz(f))$.

4. Si la aplicación T es inyectiva, entonces $h(Y)$ es un subconjunto denso de X^*.

Demostración. (1) Sea (y_d) una red en Y que converge a $y \in Y$. Seguiremos denotando por $(h(y_d))$ a una subred de $(h(y_d))$ que converge a un cierto $x \in X^*$. Supongamos que $h(y) \neq x$. En ese caso podemos considerar dos entornos disjuntos V y U de $h(y)$ y x respectivamente. Entonces existe una función $f \in A$ tal que $(Tf)(y) \neq 0$ y $coz(f) \subset V$. Por tanto, puesto que Tf es una función continua en Y, existirá un índice d_0 tal que

$$(Tf)(y_{d_0}) \neq 0 \ \text{ y } \ h(y_{d_0}) \in U.$$

Ahora, por la definición de $suppT^t y_{d_0}^t$, podemos considerar una función $g \in A$ tal que

$$(Tg)(y_{d_0}) \neq 0 \ \text{ y } \ coz(g) \subset U.$$

En consecuencia,

$$coz(g) \cap coz(f) = \emptyset$$

pero

$$(Tf)(y_{d_0}) \cdot (Tg)(y_{d_0}) \neq 0,$$

lo cual es una contradicción por ser T una aplicación separadora.

En definitiva, hemos probado que ninguna subred de $(h(y_d))$ converge a un punto distinto de $h(y)$ en el compacto X^*. En consecuencia, $(h(y_d))$ converge a $h(y)$.

(2) Supongamos que $f_{|U \cap X} \equiv 0$. Si tomamos un elemento $y \in h^{-1}(U)$, entonces existe una función $g \in A$ tal que

$$coz(g) \subset U \ \text{ y } \ (Tg)(y) \neq 0.$$

Como $coz(f) \cap coz(g) = \emptyset$, deducimos que

$$(Tf)(y) = 0$$

puesto que T es una aplicación separadora.

(3) Supongamos que $y \in coz(Tf)$ pero $h(y) \notin cl_{X^*}(coz(f))$. Así, podemos encontrar un entorno U de $h(y)$ tal que

$$f_{|U \cap X} \equiv 0.$$

Por (2), $(Tf)(y) = 0$, lo cual es imposible ya que $y \in coz(Tf)$.

(4) Supongamos que $h(Y)$ no es denso en X^*. Entonces existe un elemento $x \in X^*$ tal que

$$x \notin cl_{X^*}(h(Y)).$$

Sea U y V entornos abiertos de x y $cl_{X^*}(h(Y))$ respectivamente y tal que

$$cl_{X^*}(U) \cap cl_{X^*}(V) = \emptyset.$$

Como $C_{00}(X) \subseteq A$, podemos tomar una función $f \in A$, $f \neq 0$, tal que $coz(f) \subset U \cap X$. Entonces $f_{|V \cap X} \equiv 0$ y, por (2),

$$Tf_{|h^{-1}(V)} \equiv 0.$$

Por tanto, como $Y \subset h^{-1}(V)$, resulta que la inclusión $coz(f) \subset U$ implica que $Tf \equiv 0$ siendo $f \neq 0$. Esto contradice el hecho que la aplicación T sea inyectiva y lineal. $\square$

En los resultados que siguen (concretamente en las Proposiciones 1.2.2, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, y en el Teorema 1.4.1), consideramos en A y B la topología compacta abierta, salvo mención expresa de la topología de la convergencia uniforme.

Proposición 1.2.2 *Sea $T : A \longrightarrow B$ una aplicación separadora. Si $y \in Y$ y, además, $T^t y^t$ es una aplicación continua, entonces $h(y) \in X$.*

Demostración. Supongamos que $h(y) \notin X$, es decir, $h(y) = \infty$. Puesto que $A \subseteq C_0(X)$, podemos considerar el siguiente entorno de $h(y)$ para cada $f \in A$:

$$U_n := \{x \in X : |f(x)| \leq 1/n\}$$

y sea

$$K_n := \{x \in X : |f(x)| > 2/n\}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Según la definición de $C_0(X)$, cada K_n es un subconjunto compacto de X.

Como X es un espacio localmente compacto y K_n es compacto, entonces podemos encontrar una función $g_n \in C_{00}(X) \subseteq A$, $g_n : X \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que

$$0 \leq g_n \leq 1$$

$$g_{n|K_n} \equiv 1$$

$$g_{n|U_n} \equiv 0$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Como consecuencia, tenemos que la sucesión $(g_n \cdot f)$ converge a f en la topología de la convergencia uniforme dada por la norma supremo $\|\cdot\|$ puesto que

$$\| f - (g_n \cdot f) \| < \frac{4}{n}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Por tanto, dicha sucesión también converge a f en la topología compacta abierta de A.

Además, según la Proposición 1.2.1 (*2*), resulta que

$$T(g_n \cdot f)(y) = 0$$

para todo $n \in \mathbf{N}$ debido a que $(g_n \cdot f)_{|U_n \cap X} \equiv 0$ y a que el punto y pertenece a $h^{-1}(U_n)$.

Como $T^t y^t$ es una aplicación continua, la sucesión $(T^t y^t(g_n \cdot f))$ converge a $T^t y^t(f)$, pero acabamos de ver que $T^t y^t(g_n \cdot f) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por tanto,

$$T^t y^t(f) = 0.$$

Este razonamiento es válido para toda función $f \in A$, lo cual es imposible porque, de acuerdo con la Nota 1.2.1, suponemos que para todo $y \in Y$, existe una función f con $(Tf)(y) \neq 0$. $\square$

Nota 1.2.2 Es fácil comprobar que la Proposición que acabamos de probar es cierta si en A y B consideramos la topología de la convergencia uniforme.

Nota 1.2.3 (Función peso asociada a una aplicación separadora). A partir de una aplicación separadora $T : A \longrightarrow B$, definiremos a continuación una aplicación continua

$$\chi : h^{-1}(X) \subseteq Y \to \mathbf{K}$$

del siguiente modo: dado $y \in h^{-1}(X)$, sea U un entorno de $h(y)$ relativamente compacto en X, i.e., $cl_X(U)$ es un compacto, y sea $e_{(y,U)}$ cualquier función en A tal que $e_{(y,U)} \equiv 1$ en U. Definamos

$$\chi(y) := T(e_{(y,U)})(y).$$

Por la Proposición 1.2.1, es fácil comprobar que la definición de χ no depende de la función que toma el valor 1 en U, i.e., si $e'_{(y,U)} \in A$ y es igual a 1 en U, entonces

$$T(e'_{(y,U)})(y) = T(e_{(y,U)})(y).$$

Por otra parte, si V es otro entorno relativamente compacto en X de $h(y)$ y tomamos $e_{(y,V)}$, entonces

$$T(e_{(y,U)}) = T(e_{(y,V)})$$

en $h^{-1}(U \cap V)$ según la Proposición 1.2.1.

Por tanto, la función χ está bien definida y, dado que, para todo $y \in h^{-1}(X)$, dicha función es igual a $T(e_{(y,U)})$ en $h^{-1}(U)$, que es un entorno de y, deducimos que χ es una función continua.

1.3 Puntos de continuidad.

Definición 1.3.1 *Sea $T : A \longrightarrow B$ una aplicación separadora. Denotaremos por Y_c* (puntos de continuidad de T) *al subconjunto de Y formado por todos los $y \in Y$ tales que $T^t y^t$ es continua y, por Y_d* (puntos de discontinuidad de T), *al complementario de Y_c en Y.*

Proposición 1.3.1 *Sea* $y \in h^{-1}(X)$. *Entonces la aplicación* $T^t y^t : A \longrightarrow \mathbf{K}$ *es continua, es decir,* $y \in Y_c$, *si y sólo si* $T^t y^t$ *es una aplicación composición con peso. Concretamente:*

$$T^t y^t(f) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para toda función $f \in A$.

Demostración. Supongamos que $y \in Y_c$. Demostraremos en primer lugar que si $f(h(y)) = 0$, entonces $(Tf)(y) = 0$ para todo $f \in A$. Así, puesto que $f(h(y)) = 0$ y f es continua, podemos encontrar, para cada $n \in \mathbf{N}$, entornos abiertos U_n de $h(y)$ tal que

$$sup\{|f(x)| : x \in cl(U_n)\} < \frac{1}{n}.$$

Tomemos un entorno abierto V_n de $h(y)$ relativamente compacto en X tal que

$$cl(V_n) \subset U_n$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Consideremos una función $g_n \in C_{00}(X) \subseteq A$ tal que

$$g_{n|cl(V_n)} \equiv 1$$

y

$$g_n \equiv 0$$

fuera de U_n. Claramente la sucesión $(f \cdot g_n)$ converge a 0 en la topología compacta abierta, y además

$$f \cdot g_n \equiv f$$

en V_n para cada $n \in \mathbf{N}$. Por tanto, por la Proposición 1.2.1,

$$(Tf)(y) = T(f \cdot g_n)(y)$$

y, en consecuencia, como $y \in Y_c$, $(Tf)(y) = 0$.

Por otra parte, supongamos que $f(h(y)) \neq 0$. A continuación definimos la siguiente función:

$$g = f - f(h(y)) \cdot e_{(y,V)},$$

donde $e_{(y,V)}$ es la función que hemos introducido en la Nota 1.2.3. Como T es lineal y $g(h(y)) = 0$, tenemos que

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $f \in A$.

Recíprocamente, supongamos que $T^t y^t$ es una aplicación composición con peso. Sea (f_α) una red en A que converge a $f \in A$ en la topología compacta abierta. Como $T^t y^t(f_\alpha) = \chi(y) \cdot f_\alpha(h(y))$ para todo índice α y $h(y)$ es un conjunto compacto de X, entonces la red $(T^t y^t(f_\alpha))$ converge claramente a $\chi(y) \cdot f(h(y)) = T^t y^t(f)$. □

Nota 1.3.1 Es fácil comprobar que la Proposición que acabamos de probar es cierta si en A y B consideramos la topología de la convergencia uniforme.

Proposición 1.3.2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La aplicación $T^t y^t : A \longrightarrow \mathbf{K}$ es continua para todo $y \in Y$, es decir, $Y = Y_c$.*

2. *T es una aplicación continua.*

Además, si se cumple (1) o (2), y $A = C_0(X)$, entonces la aplicación T es continua si consideramos la topología de la convergencia uniforme en A y B.

Demostración. (1)$\rightarrow$(2) Notemos en primer lugar que $h(Y) \subseteq X$ por la Proposición 1.2.2. Consideremos ahora una red (f_α) en A tal que converge a $f \in A$ en la topología compacta abierta. Dado cualquier subconjunto compacto K de Y, vamos a ver que la red (Tf_α) converge a Tf en K.

Sea $\epsilon > 0$. Por la Proposición 1.3.1 y como $h(K)$ es un subconjunto compacto de X, existe un índice α' tal que

$$sup\{|\chi(y)| \cdot |f_\alpha(h(y)) - f(h(y))| : y \in K\} < \epsilon$$

para todo $\alpha \geq \alpha'$ porque la función χ está acotada en K. En consecuencia,

$$sup\{|(Tf)_\alpha(y) - (Tf)(y)| : y \in K\} < \epsilon$$

y esto completa la prueba de esta implicación.

(2)$\rightarrow$ (1) Supongamos que T es continua. En ese caso, si (f_α) es una red en A que converge a $f \in A$ en la topología compacta abierta, entonces (Tf_α) converge a Tf en cada subconjunto compacto de Y, en particular en cada punto de Y. En consecuencia, la red $((Tf_\alpha)(y)) = (T^t y^t(f_\alpha))$ converge a $(Tf)(y) = T^t y^t(f)$ para cada $y \in Y$.

Finalmente, supongamos que la aplicación T cumple, por ejemplo, la condición (1) y que $A = C_0(X)$. Para obtener la continuidad de T en la topología uniforme, es suficiente probar que la función χ esta acotada en $h^{-1}(X)$. Sea la sucesión (y_n) en $h^{-1}(X)$ tal que

$$|\chi(y_n)| > n.$$

Si existe un conjunto compacto K tal que contiene infinitos elementos de la sucesión $(h(y_n))$, entonces podemos encontrar una función $e \in C_0(X)$ con $e_{|K} \equiv 1$ tal que

$$(Te)(y_n) = \chi(y_n).$$

Esto contradice el hecho que Te esté acotada. Por otra parte, si no existe un conjunto compacto K como el arriba citado, entonces existe una subsucesión $(h(y_m))$ de $(h(y_n))$ convergente a ∞. Por tanto,

$$K = \{(h(y_m))_{m \in \mathbf{N}}\} \cup \{\infty\}$$

es un conjunto compacto. Sea $\varphi \in C(K)$ tal que

$$\varphi(h(y_m)) = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Entonces, por el Teorema de extensión de Tietze, existe $f \in C_0(X)$ tal que $f_{|K} \equiv \varphi$. Así,

$$|(Tf)(y_m)| = |\chi(y_m) \cdot \varphi(h(y_m))| > \sqrt{m}$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 1.3.3 *Los puntos de continuidad y de discontinuidad de una aplicación separadora $T : A \longrightarrow B$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Y_c es un subconjunto cerrado de Y.*
2. *$h(Y_d)$ es un subconjunto formado por puntos de acumulación de X^*.*
3. *$h(Y_d) \cap int(K)$ es finito para todo subconjunto compacto K de X.*

Demostración. (1) Consideremos una red (y_α) en Y_c convergente a $y \in Y$. Por la Proposición 1.3.1,

$$(Tf)(y_\alpha) = \chi(y_\alpha) \cdot f(h(y_\alpha))$$

para todo índice α y toda función $f \in A$. Supongamos en primer lugar que $h(y) \in X$. En este caso, como χ, $f \circ h$, y Tf son continuas, es evidente que

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $f \in A$; es decir, $y \in Y_c$ por la Proposición 1.3.1.

Por último veamos que no es posible que $h(y) = \infty$. Si consideramos que $A = C_0(X)$, entonces la función peso χ está acotada en $Y_c \subseteq h^{-1}(X)$ según queda probado en la demostración de la Proposición 1.3.2. Por tanto, como la red $(f(h(y_\alpha)))$ converge a 0 para cualquier $f \in C_0(X)$, resulta que $(Tf)(y) = 0$ para toda $f \in C_0(X)$, lo cual contradice la Nota 1.2.1. Por otra parte, consideremos ahora que $A \neq C_0(X)$. Para cada función $f \in C_{00}(X)$, existe α' tal que $(Tf)(y_\alpha) = \chi(y_\alpha) \cdot f(h(y_\alpha)) = 0$ para $\alpha > \alpha'$. En consecuencia, $(Tf)(y) = 0$ para toda $f \in C_{00}(X)$, lo cual contradice la Nota 1.2.1. En resumen, el único caso posible, si existe una red en Y_c convergente a un cierto $y \in Y$, es que $h(y) \in X$.

(2) Veamos que si $h(y) \in X$ es aislado en X para algún $y \in Y$, entonces $T^t y^t$ es continua, i.e., $y \in Y_c$. Dada una función $f \in A$, definamos la función

$$g = f(h(y)) \cdot e_{(y,U)}$$

para cualquier compacto U de X. Como $f_{|\{h(y)\}} \equiv g_{|\{h(y)\}}$, tenemos que $(Tf)(y) = (Tg)(y)$ como se deduce fácilmente de la Proposición 1.2.1. Por tanto,

$$T^t y^t(f) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $f \in A$, lo cual implica que la aplicación $T^t y^t$ es continua por la Proposición 1.3.1.

(3) Para probar que $h(Y_d) \cap int(K)$ es finito para cada subconjunto compacto K de X, supongamos que existe una sucesión $(h(y_n))$ formada por elementos distintos de $int(K)$ tal que $y_n \in Y_d$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Como K es un espacio de Hausdorff, podemos asumir, tomando una subsucesión si es necesario, que (U_n) es una sucesión de subconjuntos abiertos K disjuntos dos a dos tal que $h(y_n) \in U_n \subseteq K$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Sea V_n un entorno cerrado de $h(y_n)$ con $V_n \subset U_n$. Así, existe una función $k_n \in C_{00}(X) \subseteq A$ tal que

$$0 \leq k_n \leq 1$$

$$k_{n|V_n} \equiv 1$$

$$coz(k_n) \subset U_n$$

para cada $n \in \mathbf{N}$.

Por otra parte, puesto que $T^t y_n^t$ es discontinua, existe una función $f_n \in A$ que cumple

$$sup\{| f_n(t) |: t \in K\} \leq 1$$

$$| T^t y_n^t(f_n) |=| (Tf_n)(y_n) |> n^3$$

para todo $n \in \mathbf{N}$.

Definamos ahora la función

$$g_n := \frac{1}{n^2} \cdot f_n \cdot k_n.$$

Puesto que $k_n \equiv 1$ en V_n y $h(y_n) \in V_n$, entonces tenemos que

$$| (Tg_n)(y_n) |= \frac{1}{n^2} \cdot | (Tf_n)(y_n) |> n.$$

En consecuencia, $| (Tg_n)(y_n) |> n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Es fácil ver que $\|g_n\| \leq \frac{1}{n^2}$ ya que $k_n \equiv 0$ en $X \backslash K$. Por tanto, podemos definir la función

$$g := \sum_{n \in \mathbf{N}} g_n.$$

Dado que

$$supp(g) \subseteq cl(\bigcup(supp(g_n))) \subset K$$

deducimos que $g \in C_{00}(X)$. Por otra parte, como los elementos de la familia (U_n) son disjuntos dos a dos y $coz(g_n) \subset U_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces tenemos que

$$Tg_{n|h^{-1}(U_m)} \equiv 0$$

para $n \neq m$. En resumen,

$$| (Tg)(y_n) |=| (Tg_n)(y_n) |> n$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Esto es una contradicción porque Tg es una función acotada. □

1.4 Biyecciones separadoras.

Teorema 1.4.1 *Sea $T : A \longrightarrow B$ una biyección separadora. Entonces T es una aplicación continua, su función soporte es inyectiva y T es una aplicación composición con peso, i.e.,*

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $y \in Y$ y todo $f \in A$.

Demostración. Como $Y_c \cup Y_d = Y$, entonces

$$h(Y_c) \cup h(Y_d) = h(Y).$$

Como T es inyectiva,

$$cl_{X^*}(h(Y)) = X^*$$

según la Proposición 1.2.1. Por tanto, dado $x \in X$ y un entorno U de x relativamente compacto en X, tenemos, por la Proposición 1.3.3, que $U \cap h(Y_d)$ tiene una cantidad finita de elementos que son a su vez de acumulación en X^*. En consecuencia, $h(Y_c) \cap U \neq \emptyset$, i.e.,

$$cl_{X^*}(h(Y_c)) = X^*.$$

Por otra parte, si $y \in Y_c$ y $f \in A$, entonces, por la Proposición 1.3.1,

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y)).$$

Como T es sobreyectiva, es evidente que $\chi(y) \neq 0$ y, por tanto, si $(Tf)(y) = 0$ para algún $f \in A$, entonces $f(h(y)) = 0$. En consecuencia, si $Tf_{|Y_c} \equiv 0$, entonces $f_{|h(Y_c)} \equiv 0$, pero $h(Y_c) \subset X$ (cf. Proposición 1.2.2) y $cl_{X^*}(h(Y_c)) = X^*$, lo cual implica que

$$\text{si } Tf_{|Y_c} \equiv 0, \text{ entonces } f \equiv 0.$$

Supongamos ahora que $y \in Y$ pero $y \notin Y_c$. Como Y_c es un subconjunto cerrado de Y y T es sobreyectiva, existe una función $f \in A$ no idénticamente nula tal que

$$Tf_{|Y_c} \equiv 0$$

$$(Tf)(y) = 1.$$

Este hecho contradice claramente el párrafo anterior. Por tanto, $Y = Y_c$ y el resto de la prueba se obtiene a partir de la Proposición 1.3.2.

Para probar la inyectividad de h, sean y y z dos elementos de Y. Supongamos que $h(y) = h(z)$. Como

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

y

$$(Tf)(z) = \chi(z) \cdot f(h(z))$$

para todo $f \in A$ y la función χ no se anula en su dominio, deducimos que

$$(Tf)(y) = \frac{\chi(y)}{\chi(z)} \cdot (Tf)(z)$$

para todo $f \in A$. Esto implica, teniendo en cuenta que T es sobreyectiva, que no podemos encontrar una función $g \in C_{00}(Y) \subseteq B$ tal que $g(y) \neq 0$ y $g(z) = 0$, lo cual es una contradicción puesto que $C_{00}(Y)$ separa los puntos de Y. □

Teorema 1.4.2 *Si existe una biyección separadora $T : C_0(X) \longrightarrow C_0(Y)$, entonces los espacios X y Y son homeomorfos.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.1 y las Proposiciones 1.2.1 y 1.2.2, tenemos que $h(Y) \subseteq X$, h es continua e inyectiva, y su rango es denso en X. Por tanto, si asumimos que Y es compacto, entonces h es un homeomorfismo biyectivo entre Y y X (cf. Teorema 3.1.13, [25]). Si, por el contrario, Y no es compacto, consideremos la aplicación $h^* : Y^* \longrightarrow X^*$ definida del siguiente modo:

$$h^*(y) = \begin{cases} suppT^t y^t & \text{si } y \in Y \\ \infty & \text{si } y = \infty \end{cases}$$

Si seguimos denotando por h la función soporte de T, es obvio que

$$(h^*)_{|Y} \equiv h,$$

i.e., $(h^*)_{|Y}$ es continua. Además, por el Teorema 1.4.1, es obvio que h^* es inyectiva, pues h lo es. Por tanto, sólo necesitamos probar que h^* es continua en ∞.

Sea K un subconjunto compacto de X. Probaremos que

$$\infty \notin cl_{Y^*}(h^{-1}(K)).$$

Supongamos lo contrario. En primer lugar, asumiremos que $0 \notin cl(\chi(\Delta))$ siendo $\Delta := h^{-1}(K)$. Podemos suponer que $|\,\chi(y)\,| \geq 1$ para todo $y \in \Delta$.

Sea (y_b) una red en Δ convergente a ∞. Como K es compacto, existe un elemento $x \in K$ y una subred $(h(y_\alpha))$ que converge a x. Para cada $f \in C_0(X)$, tenemos que la red $(f(h(y_\alpha)))$ converge a $f(x)$ y que $((Tf)(y_\alpha))$ converge a $(Tf)(\infty) = 0$, es decir, $(\chi(y_\alpha) \cdot f(h(y_\alpha)))$ converge a 0, según se deduce del Teorema 1.4.1. Por tanto, como $|\chi(y)| \geq 1$ para cada $y \in \Delta$, se tiene que $(f(h(y_\alpha)))$ converge a 0 para toda $f \in C_0(X)$, lo cual es una contradicción porque existe una función $f \in C_0(X)$ tal que $f(x) \neq 0$.

Por otra parte, supongamos que $0 \in cl(\chi(\Delta))$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea y_n un elemento de Δ tal que $| \chi(y_n) | < \frac{1}{n}$. Entonces la sucesión $(\chi(y_n))$ converge a 0. Supongamos entonces que la sucesión (y_n) no converge a ∞. En ese caso existe un subconjunto compacto L en Y y una subred (y_α) de (y_n) tal que $(y_\alpha) \subset L$. Como L es compacto, podemos asegurar que existe $y_0 \in L$ y una subred $(y_{\alpha'})$ de (y_α) que converge a y_0. Como $(y_{\alpha'})$ es una subred de (y_n), deducimos que $(\chi(y_{\alpha'}))$ converge a 0, i.e.,

$$\chi(y_0) = 0$$

y, en consecuencia, $(Tf)(y_0) = 0$ para toda $f \in C_0(X)$, lo cual es una contradicción porque hemos asumido que $Y_0 = Y$ (cf. Nota 1.2.1). En consecuencia, podemos considerar que la sucesión (y_n) converge a ∞.

Definamos ahora el conjunto

$$W := \{(y_n)_{n\in\mathbf{N}}\} \cup \{\infty\}.$$

Es evidente que W es un subconjunto compacto de Y^*. Podemos asumir que la función peso χ pertenece a $C(W)$ con $\chi(\infty) = 0$. Por el Teorema de extensión de Tietze, existe una función $\Psi \in C(Y^*)$ tal que

$$\Psi_{|W} \equiv \chi,$$

con lo que $\Psi_{|Y} \in C_0(Y)$. Como la aplicación T es sobreyectiva, podemos encontrar una función $g \in C_0(X)$ tal que

$$Tg \equiv \sqrt{|\Psi_{|Y}|}.$$

Por el Teorema 1.4.1, podemos escribir

$$(Tg)(y_n) = \chi(y_n) \cdot g(h(y_n))$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. En consecuencia,

$$g(h(y_n)) = \frac{\sqrt{|\Psi(y_n)|}}{\Psi(y_n)} = \frac{1}{\sqrt{|\Psi(y_n)|}}.$$

Esto implica que la sucesión $(g(h(y_n))$ no está acotada, lo cual es una contradicción porque $g \in C_0(Y)$.

En resumen, la función h^* es continua en ∞, i.e., h^* un homeomorfismo sobreyectivo entre Y^* y X^*. Por tanto, y según la definición de h^*, h es también un homeomorfismo sobreyectivo entre Y y X. □

1.5 Aplicaciones a isometrías lineales.

Teorema 1.5.1 *Sea $T : C_{00}(X) \to C_{00}(Y)$ una aplicación separadora e inyectiva. Entonces existe un subconjunto cerrado Y_c de Y tal que X es imagen continua de Y_c a través de la función soporte h de T. Además*

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $y \in Y_c$ y todo $f \in C_{00}(X)$.

Demostración. En primer lugar, resaltemos que $Y_c \neq \emptyset$ porque en caso contrario tendríamos que $cl_{X^*}(h(Y_d)) = X^*$ ya que la aplicación T es inyectiva. Este hecho contradice la Proposición 1.3.3. Además Y_c es un subconjunto localmente compacto de Y puesto que Y_c es cerrado.

Como en la prueba del Teorema 1.4.2, definimos la función h^* : $Y_c^* \longrightarrow X^*$ del siguiente modo:

$$h^*(y) = \begin{cases} suppT^t y^t & \text{si } y \in Y_c \\ \infty & \text{si } y = \infty \end{cases}$$

Sólo nos resta probar que h^* es continua en ∞. Por tanto debemos probar que si K es un subconjunto compacto de X, entonces

$$\infty \notin cl_{Y_c^*}(h^{-1}(K)).$$

Supongamos lo contrario. Sea $\Delta := h^{-1}(K)$. Si asumimos que $0 \notin cl(\chi(\Delta))$, entonces se puede probar que $\infty \notin cl_{Y^*}(h^{-1}(K))$ de forma análoga a la demostración del Teorema 1.4.2.

Por otra parte, supongamos que $0 \in cl(\chi(\Delta))$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea y_n un elemento de Δ tal que $| \chi(y_n) | < 1/n$. Por tanto, la sucesión $(\chi(y_n))$ converge a 0. Como en la prueba del Teorema 1.4.2, podemos asumir que (y_n) converge a ∞.

Dado que $(h(y_n)) \subseteq K$, hay una subred $(h(y_\alpha))$ de $(h(y_n))$ y $x \in K$ tal que $(h(y_\alpha))$ converge a x. Sea V un entorno compacto de x en X. Existe un índice α_0 tal que $h(y_\alpha) \in int(V)$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Si consideramos una función $f \in C_{00}(X)$ tal que $f_{|V} \equiv 1$, entonces

$$(Tf)(y_\alpha) = \chi(y_\alpha) \cdot f(h(y_\alpha)) \neq 0$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Como (y_α) converge a ∞, la función Tf no tiene soporte compacto, lo cual es contradictorio.

En definitiva, $h^* : Y_c^* \to X^*$ es una función continua entre espacios compactos y, como en la prueba del Teorema 1.4.1, sabemos que $h^*(Y_c^*)$ es denso en X^*. Por tanto h^* es sobreyectiva y, por la definición de h^*, h también lo es. $\square$

Corolario 1.5.1 *Con la mismas hipótesis que el Teorema 1.5.1, si el rango de T separa los puntos de Y, entonces Y_c y X son homeomorfos.*

Demostración. Es inmediato comprobar que h es inyectiva de forma análoga al Teorema 1.4.1. El resto de la prueba se deduce inmediatamente del Teorema 1.5.1. $\square$

W. Holsztyński probó, en [40], la siguiente generalización del Teorema de Banach-Stone: Sean X and Y dos espacios compactos. Sea

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal (no necesariamente sobreyectiva). Entonces existe un subconjunto cerrado Ω de Y, una función h continua y sobreyectiva definida entre Ω y X y una función $w \in C(Y)$ tal que

$$(Tf)(y) = w(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $y \in \Omega$ y todo $f \in C(X)$.

El resto del capítulo está dedicado a probar una generalización del resultado de Holsztyński en el contexto de los espacios localmente compactos y de las funciones con soporte compacto. Las pruebas están basadas en el concepto de aplicación separadora; concretamente, se demuestra que toda isometría lineal es una aplicación separadora.

Proposición 1.5.1 *Sea $K : C_{00}(X) \rightarrow C_{00}(Y)$ una isometría lineal. Entonces existe un subconjunto cerrado Ω de Y tal que la aplicación $T = \rho \circ K$ es una isometría separadora, siendo $\rho : C_{00}(Y) \rightarrow C_{00}(\Omega)$ la aplicación definida como $\rho(f) := f_{|\Omega}$.*

Demostración. Para todo $x \in X$, sea

$$C_x = \{f \in C_{00}(X) : \| f \| = |f(x)|\}.$$

Para todo $f \in C_{00}(X)$, sea

$$L(f) = \{y \in Y : \| Kf \| = |(Kf)(y)|\}.$$

Finalmente, para todo $x \in X$, sea

$$I_x = \cap\{L(f) : f \in C_x\}.$$

A continuación probaremos que I_x es un subconjunto compacto no vacío de Y para cada $x \in X$. Para cada $f \in C_{00}(X)$ se tiene que Kf tiene soporte compacto en Y. Por tanto, es suficiente, para probar que el conjunto I_x es distinto de vacío, demostrar la siguiente implicación: Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pertenecen a C_x, entonces

$$L(f_1) \cap \ldots \cap L(f_n) \neq \emptyset.$$

Sabemos que $\| f_i \|= |f_i(x)|$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $\| f_i \|= 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Definimos $f \in C_{00}(X)$ como

$$f = \overline{(f_1(x))} \cdot f_1 + \ldots + \overline{(f_n(x))} \cdot f_n$$

siendo $\overline{(f_i(x))}$ el conjugado de $f_i(x)$. Es inmediato verificar que $|f(x)| = n$, y por tanto, $\| f \|= n$. Así,

$$\| Kf \|= n$$

y existe $y \in Y$ tal que

$$n = |(Kf)(y)| = |\overline{(f_1(x))} \cdot (Kf_1)(y) + \ldots + \overline{(f_n(x))} \cdot (Kf_n)(y)|.$$

Dado que $\| \overline{(f_i(x))} \cdot (Kf_i) \|\leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, deducimos que

$$| (Kf_i)(y) |= 1$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. En definitiva,

$$y \in L(f_1) \cap \ldots \cap L(f_n).$$

A continuación probaremos que si $x \neq x'$, entonces $I_x \cap I_{x'} = \emptyset$. Supóngase que existe $y \in I_x \cap I_{x'}$ y sea $f \in C_x$ tal que

$$\| f \|= |f(x)| = 1$$

y

$$x' \notin supp(f).$$

Podemos asumir, multiplicando por una constante de módulo 1 si es necesario, que $(Kf)(y) = 1$. De forma análoga, existe una función $g \in C_{x'}$ tal que

$$\| g \|= |g(x')| = 1$$

$$(Tg)(y) = 1$$

$$g_{|supp(f)} \equiv 0.$$

Entonces $\| f + g \| = 1$ y, en consecuencia,

$$2 = | (Kf)(y) + (Kg)(y) | \leq \| K(f+g) \| = 1$$

lo cual es una contradicción.

Veamos ahora que

$$si \;\; f \in C_{00}(X) \;\; y \;\; f(x') = 0, \;\; entonces \;\; (Kf)(y) = 0 \qquad (1.1)$$

para todo $y \in I_{x'}$. Supóngase que $y \in I_{x'}$ y $(Kf)(y) \neq 0$. Podemos asumir que $\| f \| = 1$. Entonces $(Kf)(y) = \alpha \leq 1$. Definimos el subconjunto U de X del siguiente modo:

$$U := \{x \in X : |f(x)| \geq \alpha/2\}.$$

Sea una función $g \in C_{00}(X)$ tal que

$$1 = \| g \| = |g(x')|$$

$$g_{|U} \equiv 0$$

$$(Kg)(y) = 1.$$

Es inmediato comprobar que $\| f + g \| \leq 1 + \alpha/2$, pero

$$1 + \alpha = (Kf)(y) + (Kg)(y) \leq \| K(f+g) \| .$$

lo cual contradice el hecho que K sea una isometría.

Definamos ahora el conjunto

$$\Omega := cl_Y(\bigcup\{I_x : x \in X\})$$

y también la aplicación $T = \rho \circ K$. Para concluir probaremos que T es una aplicación separadora definida entre $C_{00}(X)$ y $C_{00}(\Omega)$.

Supongamos que existen dos funciones $f, g \in C_{00}(X)$ tal que $f \cdot g \equiv 0$ y un $y' \in \Omega$ con $(Tf)(y') = a > 0$ y $(Tg)(y') = b > 0$. Sean

$$P := \{y \in \Omega : (Tf)(y) > a/2\}$$

$$V := \{y \in \Omega : (Tg)(y) > b/2\}.$$

Definamos el conjunto $W := P \cap V$. Como W es un entorno de y', existe un $y \in \bigcup\{I_x : x \in X\} \cap W$. Sea $y \in I_x \cap W$. Dado que $coz(f) \cap coz(g) = \emptyset$, se tiene que $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$. Sin embargo, como $y \in W$, resulta que $(Tf)(y) > a/2$ y $(Tg)(y) > b/2$. Esto contradice la implicación 1.1 y demuestra que la aplicación T es separadora. $\square$

Teorema 1.5.2 *Si T es una isometría lineal entre $C_{00}(X)$ y $C_{00}(Y)$, entonces existe un subconjunto cerrado $\Omega \subseteq Y$ y una función $h : \Omega \to X$ continua y sobreyectiva tal que*

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y))$$

para todo $y \in \Omega$ y todo $f \in C_{00}(X)$.

Demostración. Esta prueba es consecuencia inmediata de la Proposición 1.5.1 y del Teorema 1.5.1. $\square$

1.6 Ejemplos.

Para terminar este capítulo, se incluyen dos ejemplos, originales de E. Beckenstein y L. Narici, que demuestran que el Teorema 1.4.1 no es cierto para aplicaciones separadoras inyectivas o sobreyectivas.

Ejemplo 1. Aplicación separadora sobreyectiva y discontinua.

Consideremos el siguiente subconjunto compacto de $\mathbf{R}$:

$$X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}.$$

Definimos $\mathcal{D} := \{D \subset X : (X \setminus D) \text{ } es \text{ } finito\}$. Es fácil comprobar que $\mathcal{D}$ es un filtro. Sea $\mathcal{E}$ un ultrafiltro que contenga a $\mathcal{D}$.

Sea $i : X \longrightarrow \mathbf{R}$ una aplicación definida como

$$i(x) := x \qquad x \in X.$$

Consideremos $C(X)$ dotado de la topología uniforme. A continuación definamos el siguiente subconjunto de $C(X)$:

$$\mathcal{M} := \{f \in C(X) : f \cdot \chi_E = c \cdot i \cdot \chi_E \ \textit{para un cierto}\ E \in \mathcal{E},\ \ c \in \mathbf{K}\}.$$

Veamos que $\mathcal{M}$ es un subespacio vectorial de $C(X)$ y para ello consideremos dos elementos f , $g \in \mathcal{M}$. Entonces existen dos conjuntos $E, F \in \mathcal{E}$ y dos escalares $c, d \in \mathbf{K}$ tales que

$$f \cdot \chi_E = c \cdot i \cdot \chi_E$$

$$g \cdot \chi_F = d \cdot i \cdot \chi_F$$

y como $E \cap F \in \mathcal{E}$, resulta que

$$(f + g) \cdot \chi_{E\cap F} = (c + d) \cdot i \cdot \chi_{E\cap F},$$

de lo cual se deduce que la función $f + g$ es un elemento de $\mathcal{M}$.

Sea $\mathcal{L}$ cualquier complemento algebraico de $\mathcal{M}$ en $C(X)$, i.e.,

$$C(X) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{L}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el complemento algebraico $\mathcal{L}$ de forma que la función $(1 - i)$ pertenezca a $\mathcal{L}$ ya que $i \in \mathcal{M}$ y $1 = i + (1 - i)$.

Por otra parte, sea Y un espacio formado por un único elemento, i.e., $Y := \{y\}$. Es bien conocido que se pueden identificar los espacios $C(Y)$ y $\mathbf{K}$.

Con todos estos datos podemos definir una aplicación lineal T entre $C(X)$ y $C(Y)$ de forma que si tenemos un escalar $c \in \mathbf{K}$, un conjunto $E \in \mathcal{E}$, una función $m \in \mathcal{M}$ y otra función $l \in \mathcal{L}$ tal que

$$f = m + l$$

$$m \cdot \chi_E = c \cdot i \cdot \chi_E,$$

entonces $Tf := c$

Veamos, en un principio, que T está bien definida. Sea $m \in \mathcal{M}$, $a, b \in \mathbf{K}$, y $D, E \in \mathcal{E}$ de forma que

$$m \cdot \chi_D = a \cdot i \cdot \chi_D$$

$$m \cdot \chi_E = b \cdot i \cdot \chi_E.$$

Necesitamos probar que $a = b$. Cualquier conjunto $F \in \mathcal{E}$ tiene infinitos elementos, pues en caso contrario,

$$(X \setminus F) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{E}$$

y entonces

$$(X \setminus F) \cap F = \emptyset \in \mathcal{E}$$

lo que contradice el hecho de que $\mathcal{E}$ es un filtro. Por tanto, $D \cap E \in \mathcal{E}$ será un conjunto infinito. Podemos tomar entonces un $x \in D \cap E \setminus \{0\}$, y tendremos

$$m(x) = m \cdot \chi_D(x) = a \cdot i(x) \cdot \chi_D(x) = a \cdot x$$

$$m(x) = m \cdot \chi_E(x) = b \cdot i(x) \cdot \chi_E(x) = b \cdot x$$

de lo cual se deduce que $a = b$ pues $x \neq 0$.

Veamos a continuación que T es una aplicación separadora. Sean dos funciones $f, g \in C(X)$ con cozeros disjuntos. Denotaremos dichos cozeros por $D := coz(f)$ y $E := coz(g)$. Distinguimos dos casos:

- Supongamos que $D \notin \mathcal{E}$. Entonces $X \setminus D \in \mathcal{E}$. En caso contrario, todo elemento F de $\mathcal{E}$ tiene intersección no vacía con $X \setminus D$, ya que si $F \cap (X \setminus D) = \emptyset$, entonces $F \subset D$, con lo que $D \in \mathcal{E}$. Por tanto, como $X \setminus D \in \mathcal{E}$, resulta que el conjunto $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cup (X \setminus D)$ es una base de filtro, lo cual contradice la maximalidad del ultrafiltro $\mathcal{E}$. Entonces

$$m \cdot \chi_{(X \setminus D)} = 0 = 0 \cdot i \cdot \chi_{(X \setminus D)}$$

siendo $f = m + l$ como más arriba. En definitiva $Tf = 0$ y, por tanto, la aplicación T es separadora.

- Si $D \in \mathcal{E}$, entonces, $E \notin \mathcal{E}$ pues $D \cap E = \emptyset$. Procediendo como en el caso anterior, resulta que $Tg = 0$.

Probaremos a continuación que la aplicación T no es continua. Supongamos lo contrario. En ese caso, por la Proposición 1.3.1, podemos escribir T como una aplicación composición con peso, i.e.,

$$(Tf)(y) = \chi(y) \cdot f(h(y)) \qquad f \in C(X).$$

Es obvio, por la forma en que se define la función peso χ en la nota 1.2.3, que en este caso $\chi = T1$. Además, como hemos asumido que la función $1 - i$ está en $\mathcal{L}$, resulta que $T(1 - i) = 0$. Entonces

$$T1 = Ti = 1.$$

En definitiva,

$$T(1 - i)(y) = (1 - i)(h(y)),$$

es decir,

$$1 = 1(h(y)) = i(h(y)) = h(y).$$

Por otra parte, probaremos que $h(y) = 0$. En efecto, si suponemos que $h(y) \neq 0$, entonces, para todo entorno abierto V de $h(y)$ en X, existe una función $f \in C(X)$ tal que

$$coz(f) \subset V \qquad y \qquad (Tf)(y) \neq 0.$$

Teniendo en cuenta como se ha definido la aplicación T y que $h(y) \neq 0$, podemos tomar un entorno abierto V de $h(y)$ en X que sea finito. Entonces

$$X \setminus V \in \mathcal{D} \subset \mathcal{E}$$

luego

$$f \cdot \chi_{(X \setminus V)} = 0 \cdot i \cdot \chi_{(X \setminus V)},$$

es decir, $(Tf)(y) = 0$. Esta contradicción prueba que la aplicación no es continua.

Por último, notemos que la función soporte $h : Y \longrightarrow X$ de T es inyectiva pues Y consta de un único elemento y que T es una aplicación sobreyectiva.

Ejemplo 2. Aplicación separadora inyectiva y discontinua.

Si $X := [0,1]$, sea $j \in C(X)$, la aplicación definida como

$$z(x) = 1 - x \qquad\qquad x \in X.$$

Sea $\mathcal{E}$ un ultrafiltro en $[0,1]$ que contenga el filtro de los entornos reducidos del punto 1. Sea $\mathcal{M}$ el siguiente subespacio de $C(X)$:

$$\mathcal{M} := \{f \in C(X) : f \cdot \chi_E = c \cdot j \cdot \chi_E \ \textit{para un cierto} \ E \in \mathcal{E} \ \textit{y} \ c \in \mathbf{K}\}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, se demuestra que $\mathcal{M}$ es un subespacio vectorial de $C(X)$. Por tanto podemos considerar un complemento algebraico $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$ en $C(X)$.

Con todos estos datos podemos definir una aplicación lineal T' entre $C(X)$ y $\mathbf{K}$ de forma que si tenemos un escalar $c \in \mathbf{K}$, un conjunto $E \in \mathcal{E}$, una función $m \in \mathcal{M}$ y otra función $l \in \mathcal{L}$ tal que

$$f = m + l$$

$$m \cdot \chi_E = c \cdot j \cdot \chi_E,$$

entonces $T'(f) := c$.

Veamos primero que la aplicación T' está bien definida. Supongamos que existen dos elementos D y E del ultrafiltro $\mathcal{E}$ de forma que $D \cap E = \{1\}$. En este caso, $\{1\} \in \mathcal{E}$ y tomado cualquier entorno reducido V del punto 1, obtenemos

$$V \cap \{1\} = \emptyset \in \mathcal{E},$$

lo cual es imposible. En consecuencia, si tenemos las igualdades

$$m \cdot \chi_D = a \cdot j \cdot \chi_D$$

$$m \cdot \chi_E = b \cdot j \cdot \chi_E$$

siendo $m \in \mathcal{M}$, $a, b \in \mathbf{K}$, y $D, E \in \mathcal{E}$, entonces podemos escoger un punto $x \in (D \cap E) \setminus \{1\}$ tal que

$$m(x) = a \cdot j(x)$$

$$m(x) = b \cdot j(x).$$

Como $x \neq 1$, entonces $j(x) \neq 0$ y, por tanto, $a = b$. En definitiva, la aplicación T' está bien definida.

Por otra parte, y de forma similar al ejemplo anterior, se puede demostrar, debido a la maximalidad del ultrafiltro $\mathcal{E}$, que T' es una aplicación separadora. También se demuestra, con un razonamiento análogo, que T' es discontinua.

Definamos a continuación el espacio $Y := [0,1] \cup \{2\}$ y una aplicación lineal $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ del siguiente modo:

$$(Tf)(y) = \begin{cases} (1-y) \cdot f(y) & \text{si } y \in [0,1] \\ T'(f) & \text{si } y = 2 \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que T es una aplicación separadora ya que T' también lo es. Además, como la aplicación $T^t 2^t = T'$ es discontinua, resulta que T es también discontinua por la Proposición 1.3.1.

Por último, sea una función $f \in C(X)$ tal que $Tf \equiv 0$. Entonces $f \equiv 0$ y, en consecuencia, la aplicación T es inyectiva.

Capítulo 2

Aplicaciones separadoras entre espacios de funciones integrables.

2.1 Introducción.

En este capítulo introduciremos y estudiaremos el concepto de aplicación separadora en el contexto de las funciones absolutamente integrables respecto a la medida de Haar: una aplicación lineal $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ (G_1 y G_2 serán grupos localmente compactos y Abelianos en todo el capítulo 3) es *separadora* si dadas dos funciones $f, g \in L^1(G_1)$, tal que $f * g \equiv 0$, se tiene que $Tf * Tg \equiv 0$.

Según se explica en la introducción, nuestra definición generaliza el concepto usual de homomorfismo de álgebras. Recordemos que $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es un homomorfismo de álgebras si

$$T(f * g) = Tf * Tg \qquad f, g \in L^1(G_1).$$

Nuestro objetivo es extender algunos resultados clásicos de homomorfismos que enumeraremos en la sección 2.2. Dichos resultados han sido ya generalizados en varias direcciones. Por ejemplo, se han obtenido resultados análogos para grupos localmente compactos no necesariamente

Abelianos o para homomorfismo de álgebras cuya norma es menor que $\sqrt{2}$. Nuestra generalización va pues en dirección distinta a las anteriores y proporcionará pruebas alternativas a los resultados clásicos de la sección 2.2.

En la sección 2.3 estudiaremos las propiedades elementales de las aplicaciones separadoras. En la sección 2.4 enunciamos los resultados principales de este capítulo. Concretamente probaremos que una biyección separadora $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es siempre continua e induce un homeomorfismo entre los grupos duales de G_1 y G_2, o lo que es lo mismo, entre los espacios de los ideales maximales de $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$. Estos resultados nos permitirán obtener la siguiente caracterización de las biyecciones separadoras: $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es biyectiva y separadora si y sólo si se puede escribir como la composición de un isomorfismo de álgebras $T_1 : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ y una aplicación lineal y continua $T_2 : L^1(G_2) \longrightarrow L^1(G_2)$ que conmuta con todas las translaciones.

En la sección 2.5 probaremos tres corolarios de los teoremas de la sección anterior. Así, demostraremos que toda biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ tiene una única extensión a una biyección separadora entre los espacios de medidas $M(G_1)$ y $M(G_2)$. También estudiaremos qué condiciones adicionales debe satisfacer T para asegurar que los grupos G_1 y G_2 sean topológicamente isomorfos.

2.2 Definiciones y resultados clásicos.

Sea G un grupo topológico localmente compacto y Abeliano con respecto a la operación binaria $+$.

Diremos que una función compleja γ definida sobre G es un carácter de G si $|\gamma(x)| = 1$ para todo elemento $x \in G$ y además

$$\gamma(x + y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$$

para cualquier par $x, y \in G$. El conjunto Γ de todos los caracteres continuos de G es un grupo Abeliano respecto a la operación binaria

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x) \qquad (x \in G; \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma)$$

y se denomina grupo dual de G.

Sea $L^1(G)$ el espacio de todas las funciones definidas sobre G que toman valores complejos y que son absolutamente integrables con respecto a m, la medida de Haar sobre G. Sabemos que $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa si consideramos el producto de convolución, es decir,

$$(f * g)(x) = \int_G f(x - y) \cdot g(y) dm(y)$$

para todo $f, g \in L^1(G)$ y la norma

$$||f||_1 = \int_G | f(x) | dm(x)$$

para todo $f \in L^1(G)$.

Por otra parte, dado un carácter $\gamma \in \Gamma$ y una función $f \in L^1(G)$, definiremos

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(x) \cdot \gamma(-x) dm(x)$$

Es inmediato comprobar que la aplicación $f \longrightarrow \hat{f}(\gamma)$ es un homomorfismo de $L^1(G)$ en $\mathbf{C}$. Recíprocamente, se puede probar que todo homomorfismo de $L^1(G)$ es de esa forma y que distintos caracteres de Γ inducen homomorfismos distintos. Así pues, podemos identificar Γ con el espacio de los ideales maximales de $L^1(G)$. Si dotamos al grupo Γ

con la topología de Gelfand, es decir, con la topología débil inducida por las funciones del tipo $\hat{f}$, entonces Γ es un grupo topológico localmente compacto y Abeliano.

La función $\hat{f}$ definida, como acabamos de ver, sobre Γ se denomina transformada de Fourier de $f \in L^1(G)$ y es en realidad la transformada de Gelfand de f. Escribiremos $A(\Gamma)$ para denotar el conjunto de las transformadas de Fourier del grupo G; concretamente

$$A(\Gamma) := \{\hat{f} \,:\, f \in L^1(G)\}.$$

Este conjunto tiene algunas propiedades que cabe resaltar:

1. $A(\Gamma)$ es una subálgebra de $C_0(\Gamma)$.

2. $A(\Gamma)$ separa los puntos de Γ: dados $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, existe una función $\hat{f} \in A(\Gamma)$ tal que $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ y $\hat{f}(\gamma') = 0$.

3. $A(\Gamma)$ es densa en $C_0(\Gamma)$ si se considera la norma supremo $\|\cdot\|$. En el transcurso de este capítulo consideraremos $A(\Gamma)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme inducida por la norma supremo.

4. La transformada de Fourier de $(f * g)$ es $(\hat{f} \cdot \hat{g})$.

5. La transformada de Fourier (o de Gelfand), considerada como una aplicación entre $L^1(G)$ y $C_0(\Gamma)$, es continua. Concretamente, $\left\|\hat{f}\right\| \leq \|f\|_1$. Además, por ser $L^1(G)$ un álgebra de Banach semisimple, dicha aplicación es inyectiva.

Escribiremos $M(G)$ para denotar el álgebra de Banach (con respecto al producto de convolución) de todas las medidas complejas, regulares y acotadas definidas sobre G. Además, a diferencia de $L^1(G)$, $M(G)$ es un álgebra con unidad: Dado un elemento $x \in G$, escribiremos δ_x para denotar la medida de Dirac de x, es decir, dado un subconjunto E de G, $\delta_x(E) = 1$ si $x \in E$ y $\delta_x(E) = 0$ si $x \notin E$. Es inmediato comprobar que δ_0 es la unidad de $M(G)$.

Si $\mu \in M(G)$, denotaremos por $\hat{\mu}$ la transformada de Fourier-Stieltjes de μ. Es decir,

$$\hat{\mu}(\gamma) := \int_G \gamma(-x)d\mu(x)$$

Denotaremos por $B(\Gamma)$ el conjunto de las transformadas de Fourier-Stieltjes de G. $B(\Gamma)$ es un subconjunto de $C^*(\Gamma)$. El siguiente teorema caracteriza los elementos de $B(\Gamma)$.

Teorema 2.2.1 *Sea θ una función definida sobre Γ que toma valores complejos. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\theta \in B(\Gamma)$ y $\|\theta\| \leq A$, donde A es una constante.*

2. *θ es una función continua, y*

$$\mid \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \theta(\gamma_i) \mid \leq A \cdot \parallel \theta \parallel_\infty$$

para cada polinomio trigonométrico ϕ definido sobre G y que tiene la siguiente forma:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \gamma_i(x) \qquad (x \in G, \quad \gamma_i \in \Gamma).$$

El siguiente resultado también caracteriza los elementos de $B(\Gamma)$:

Teorema 2.2.2 *Sea θ una función definida sobre Γ que toma valores complejos y tal que $\theta \cdot \hat{f} \in B(\Gamma)$ para toda función $\hat{f} \in A(\Gamma)$. Entonces $\theta \in B(\Gamma)$.*

Cada función $f \in L^1(G)$ genera una medida $\mu_f \in M(G)$, definida como

$$\mu_f(E) = \int_E f(x)d\mu(x),$$

y que es absolutamente continua con respecto a la medida de Haar de G. Recíprocamente, el Teorema de Radon-Nikodym demuestra que toda medida $\mu \in M(G)$ absolutamente continua es del tipo μ_f para alguna función $f \in L^1(G)$. Además hay una correspondencia biyectiva entre $L^1(G)$ y las medidas absolutamente continuas en $M(G)$. En resumen, podemos considerar $L^1(G)$ como una subálgebra de $M(G)$.

Los siguientes Lemas son resultados técnicos sobre la existencia de funciones localmente constantes en $A(\Gamma)$ y que utilizaremos posteriormente.

Lema 2.2.1 *Si V es un subconjunto abierto de Γ que contiene un conjunto compacto C, entonces existe una función $f \in L^1(G)$ tal que*

$$\hat{f}_{|C} \equiv 1 \qquad y \qquad \hat{f}_{|(\Gamma \setminus V)} \equiv 0.$$

Lema 2.2.2 *Supongamos que $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, $\hat{f}(\gamma_0) = 0$, V es un entorno del punto γ_0, y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función $g \in L^1(G)$ tal que*

1. $||g||_1 < 2$.
2. *$\hat{g}$ toma el valor 1 en un entorno de γ_0 y el valor 0 en $\Gamma \setminus V$.*
3. $||f * g||_1 < \epsilon$.

Lema 2.2.3 *Supongamos que C un subconjunto compacto de Γ y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función $g \in L^1(G)$ tal que $\hat{g}$ toma el valor 1 en C, su soporte es compacto y $||g||_1 < 1 + \epsilon$.*

A continuación resumimos algunos resultados clásicos en el contexto de las aplicaciones lineales y homomorfismos entre espacios del tipo $L^1(G)$ y $M(G)$. Consideraremos, en lo que resta de capítulo, que G_1 y G_2 son dos grupos Abelianos localmente compactos y que Γ_1 y Γ_2 son sus respectivos grupos duales.

Definición 2.2.1 *Sea $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ una aplicación lineal. Definimos la aplicación $\hat{T} : A(\Gamma_1) \longrightarrow A(\Gamma_2)$ como $\hat{T}\hat{f} := \widehat{Tf}$ para toda función $f \in L^1(G_1)$.*

Por la propiedades de la transformada de Fourier (o de Gelfand), considerada como una aplicación entre $L^1(G)$ y $C_0(\Gamma)$, es inmediato comprobar que la aplicación T es separadora (resp. inyectiva o sobreyectiva) si y sólo si $\hat{T}$ es separadora (resp. inyectiva o sobreyectiva).

Teorema 2.2.3 *Supongamos que $T : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ es una aplicación lineal y continua que conmuta con todas las translaciones, i.e.,*

$$T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$$

donde $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$ para toda $f \in L^1(G)$ y todo $x, a \in G$. Entonces existe una función θ definida sobre Γ tal que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \theta(\gamma)\hat{f}(\gamma) \qquad (f \in L^1(G), \;\; \gamma \in \Gamma). \tag{2.1}$$

Recíprocamente, si la aplicación T cumple la igualdad 2.1, entonces $T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$ para todo $a \in G$.

Corolario 2.2.1 *Supongamos que $T : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ es una aplicación lineal y continua que conmuta con todas las translaciones. Entonces existe una medida $\mu \in M(G)$ de forma que*

$$Tf = f * \mu \qquad (f \in L(G)).$$

Teorema 2.2.4 *Sea $T : L^1(G_1) \longrightarrow M(G_2)$ un homomorfismo de álgebras. Entonces*

1. *$\hat{T}\hat{f} = \hat{f} \circ h$, $f \in L^1(G_1)$, donde h es una aplicación afín a trozos entre un cierto subgrupo de Γ_2 y Γ_1.*

2. *$T(L^1(G_1)) \subseteq L^1(G_2)$ si y sólo si $h^{-1}(C)$ es compacto para cada subconjunto compacto C de Γ_1.*

Teorema 2.2.5 *Si $T : M(G_1) \longrightarrow M(G_2)$ un isomorfismo de álgebras sobreyectivo, entonces $T(L^1(G_1)) = L^1(G_2)$.*

Recíprocamente, cada isomorfismo de álgebras sobreyectivo entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ tiene una única extensión a un isomorfismo sobreyectivo entre $M(G_1)$ y $M(G_2)$.

Teorema 2.2.6 *Sea $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ un isomorfismo de álgebras sobreyectivo. Si $||T|| \leq \sqrt{2}$ o si Γ_2 es un espacio conexo, entonces los grupos G_1 y G_2 son topológicamente isomorfos y existe una constante positiva k y un caracter $\gamma \in \Gamma_2$ tal que*

$$(Tf)(y) = k \cdot (\gamma(y)) \cdot f(h(y)) \qquad (f \in L^1(G_1), y \in G_2),$$

donde h es el isomorfismo topológico.

Todos los resultados que acabamos de enunciar pueden encontrarse en [38], [39], [47] y [55].

2.3 Resultados preliminares.

En el resto del capítulo y salvo mención expresa, consideraremos que $T : L^1(G_1) \longrightarrow L^1(G_2)$ es una aplicación separadora. Además, $\hat{T} : A(\Gamma_1) \longrightarrow A(\Gamma_2)$ denotará la aplicación separadora asociada a T (cf. Definición 2.2.1).

Sea $J := \{f \in L^1(G_1) : \hat{f} \in C_{00}(\Gamma_1)\}$. Por 33.13 de [39], J es un ideal denso en $L^1(G_1)$. Este ideal nos permite introducir el siguiente subconjunto del grupo dual Γ_2 de G_2:

$$\Gamma := \{\gamma \in \Gamma_2 : \textit{existe } f \in J \textit{ con } (\hat{T}\hat{f})(\gamma) \neq 0\}.$$

Sea $\gamma \in \Gamma_2$. Definimos $T^t\gamma^t : A(\Gamma_1) \rightarrow \mathbf{C}$ del siguiente modo:

$$T^t\gamma^t(\hat{f}) = (\hat{T}\hat{f})(\gamma)$$

para todo $\hat{f} \in A(\Gamma_1)$.

Diremos que un subconjunto abierto V de Γ_1 es un *anulador* de $T^t\gamma^t$ si para todo $\hat{f} \in A(\Gamma_1)$ con $coz(\hat{f}) \subseteq V$, se cumple que $T^t\gamma^t(\hat{f}) = 0$.

El siguiente Lema es una adaptación para $A(\Gamma_1)$ de un resultado clásico sobre la existencia de particiones de la unidad.

Lema 2.3.1 *Sea K un subconjunto compacto de Γ_1. Sea $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ un cubrimiento abierto de K. Entonces existen $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset L^1(G_1)$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i = 1 \quad en \quad K$$

y $coz(\hat{f}_i) \subset V_i$ para todo $i = 1, ..., n$.

Demostración. Dado $\zeta \in K$, sea $U(\zeta)$ un entorno compacto de ζ tal que $U(\zeta) \subset V_i$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Como K es compacto, existen $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\} \subset K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U(\zeta_j).$$

A continuación definamos

$$K_i := \bigcup (U(\zeta_j) \ : \ U(\zeta_j) \subset V_i)$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Como cada K_i es compacto, existe $g_i \in L^1(G_1)$ tal que $\hat{g}_i \equiv 1$ en K_i y $coz(\hat{g}_i) \subset V_i$ (cf. Lema 2.2.1). Por el mismo motivo, existe $g \in L^1(G_1)$ tal que $\hat{g} \equiv 1$ en K. Definamos las siguientes funciones:

$$\hat{f}_1 = \hat{g}_1;$$

$$\hat{f}_2 = (\hat{g} - \hat{g}_1)\hat{g}_2;$$

$$\vdots$$

$$\hat{f}_{n-1} = (\hat{g} - \hat{g}_1)(\hat{g} - \hat{g}_2) \cdots (\hat{g} - \hat{g}_{n-2})\hat{g}_{n-1};$$

$$\hat{f}_n = (\hat{g} - \hat{g}_1)(\hat{g} - \hat{g}_2) \cdots (\hat{g} - \hat{g}_{n-1})\hat{g}_n.$$

Es inmediato comprobar que $coz(\hat{f}_i) \subseteq coz(\hat{g}_i) \subseteq V_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Además, si fijamos $\zeta \in K$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\zeta) + \hat{f}_2(\zeta) &= \hat{g}_1(\zeta) + (1 - \hat{g}_1(\zeta))\hat{g}_2(\zeta) \\ &= 1 - (1 - \hat{g}_1(\zeta)) + (1 - \hat{g}_1(\zeta))\hat{g}_2(\zeta) \\ &= 1 - (1 - \hat{g}_1(\zeta))(1 - \hat{g}_2(\zeta)). \end{aligned}$$

Procediendo por induccion obtenemos

$$\hat{f}_1(\zeta) + \hat{f}_2(\zeta) + \ldots + \hat{f}_n(\zeta) = 1 - (1 - \hat{g}_1(\zeta))(1 - \hat{g}_2(\zeta)) \ldots (1 - \hat{g}_n(\zeta)).$$

Como $\zeta \in K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U(\zeta_j)$, existe un subíndice i_0 tal que $\zeta \in K_{i_0}$. En consecuencia, $\hat{g}_{i_0}(\zeta) = 1$ y $\hat{f}_1(\zeta) + \hat{f}_2(\zeta) + \ldots + \hat{f}_n(\zeta) = 1$. □

Proposición 2.3.1 *Si $\Gamma \neq \emptyset$, entonces el conjunto*

$$suppT^t\gamma^t := \Gamma_1 \setminus \bigcup(V \subset \Gamma_1 : V \text{ es un anulador de } T^t\gamma^t)$$

contiene un único elemento para cada $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Supongamos que $suppT^t\gamma^t$ es vacío. Entonces

$$\Gamma_1 = \bigcup(V \subset \Gamma_1 : V \text{ es un anulador de } T^t\gamma^t).$$

Si consideramos $f \in J$, entonces

$$cl(coz(\hat{f})) \subset \bigcup\{V \subset \Gamma_1 : V \text{ es un anulador de } T^t\gamma^t\}.$$

Como $cl(coz(\hat{f}))$ es un compacto, existen $V_1, V_2, \ldots V_n$ conjuntos anuladores de $T^t\gamma^t$ tal que

$$cl(coz(\hat{f})) \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

Por lo demostrado en el Lema anterior, existen $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset L^1(G_1)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i = 1$$

en $cl(coz(\hat{f}))$ y $coz(\hat{f}_i) \subset V_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por tanto,

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i \cdot \hat{f}.$$

Como $coz(\hat{f}_i \cdot \hat{f}) \subset V_i$, entonces $\hat{T}(\hat{f}_i \cdot \hat{f})(\gamma) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Así, $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0$ para todo $f \in J$, pero esto es imposible ya que $\gamma \in \Gamma$.

Por otra parte, supongamos que existen dos elementos ζ_1 y ζ_2 de $suppT^t\gamma^t$. Sean U y V dos entornos disjuntos de ζ_1 y ζ_2 respectivamente. Entonces existen $f, g \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) \cdot (\hat{T}\hat{g})(\gamma) \neq 0$$

con $coz(\hat{f}) \subset U$ y $coz(\hat{g}) \subset V$, lo cual contradice la propiedad separadora de $\hat{T}$. □

El resultado que acabamos de probar nos permite definir la función soporte de una aplicación separadora:

Definición 2.3.1 *Dada una aplicación separadora $\hat{T}$, definimos su función soporte $h : \Gamma \to \Gamma_1$ del siguiente modo:*

$$h(\gamma) := suppT^t\gamma^t.$$

Proposición 2.3.2 *La función soporte h de $\hat{T}$ es continua.*

Demostración. Sea (γ_d) una red en Γ que converge a $\gamma \in \Gamma$. Como Γ_1 es un espacio localmente compacto, podemos considerar la compactación de Alexandroff, Γ_1^*, de Γ_1. Seguimos denotando por $(h(\gamma_d))$ a una subred de $(h(\gamma_d))$ que converge a $\zeta \in \Gamma_1^*$. Supongamos que $h(\gamma) \neq \zeta$. Sean V y U dos entornos disjuntos de $h(\gamma)$ y ζ respectivamente. Entonces existe una función $f \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) \neq 0$$

y $coz(\hat{f}) \subset V$. Por tanto, puesto que $(\hat{T}\hat{f})$ es una función continua en Γ, existirá un subíndice d_0 tal que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma_{d_0}) \neq 0$$

y $h(\gamma_{d_0}) \in U$. Ahora podemos considerar una función $g \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{g})(\gamma_{d_0}) \neq 0$$

y $coz(\hat{g}) \subset U$. En consecuencia,

$$coz(\hat{g}) \cap coz(\hat{f}) = \emptyset$$

pero

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma_{d_0}) \cdot (\hat{T}\hat{g})(\gamma_{d_0}) \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. En definitiva, hemos probado que ninguna subred de $(h(\gamma_d))$ converge a un punto distinto de $h(\gamma)$. En consecuencia, $(h(\gamma_d))$ converge a $h(\gamma)$. □

Proposición 2.3.3 *Dado cualquier subconjunto abierto U de Γ_1 y cualquier $f \in L^1(G_1)$, se tiene que:*

1. *Si $\hat{f}_{|U} \equiv 0$, entonces $(\hat{T}\hat{f})_{|h^{-1}(U)} \equiv 0$.*
2. *$h(coz(\hat{T}\hat{f}) \cap \Gamma) \subseteq cl(coz(\hat{f}))$.*
3. *Si T es inyectiva, entonces $h(\Gamma)$ es denso Γ_1 y Γ es distinto de vacio.*

Demostración. (1) Supongamos que $\hat{f}_{|U} \equiv 0$. Si tomamos $\gamma \in h^{-1}(U)$, entonces existe $g \in L^1(G_1)$ tal que $coz(\hat{g}) \subset U$ y

$$(\hat{T}\hat{g})(\gamma) \neq 0.$$

Como $coz(\hat{f}) \cap coz(\hat{g}) = \emptyset$, deducimos que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0.$$

(2) Supongamos que $\gamma \in coz(\hat{T}\hat{f})$ pero $h(\gamma) \notin cl(coz(\hat{f}))$. Así, podemos encontrar un entorno U de $h(\gamma)$ tal que

$$\hat{f}_{|U} \equiv 0.$$

Por (1), $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0$, lo cual es imposible.

(3) Supongamos que $h(\Gamma)$ no es denso en Γ_1. Entonces existe $\zeta \in \Gamma_1$ tal que

$$\zeta \notin cl(h(\Gamma)).$$

Sea U y V entornos abiertos de ζ y $cl(h(\Gamma))$ respectivamente y tal que

$$cl(U) \cap cl(V) = \emptyset.$$

Si tomamos $f \in L^1(G_1)$ tal que $coz(\hat{f}) \subset U$, entonces $\hat{f}_{|V} \equiv 0$ y, por (1),

$$(\hat{T}\hat{f})_{|h^{-1}(V)} \equiv 0.$$

Por tanto, como $\Gamma \subset h^{-1}(V)$, $coz(\hat{f}) \subset U$ implica que $(\hat{T}\hat{f})_{|\Gamma} \equiv 0$ para cualquier $f \in L^1(G_1)$.

Por el Lema 2.2.3, existe una función $g \in J$, $g \not\equiv 0$, tal que $coz(\hat{g}) \subset U$. Así,

$$(\hat{T}\hat{g})_{|\Gamma} \equiv 0.$$

Por la definición de Γ, se sigue que $\hat{T}\hat{g} \equiv 0$, lo cual es una contradicción porque $\hat{T}$ es inyectiva y lineal. □

Proposición 2.3.4 *Si la aplicación separadora T es sobreyectiva, entonces la función soporte $h : \Gamma \to \Gamma_1$ tiene una extensión continua $h^* : \Gamma_2 \to \Gamma_1^*$.*

Demostración. Definimos $h^* : \Gamma_2 \to \Gamma_1^*$ tal que

$$h^*(\gamma) = \begin{cases} h(\gamma) & \text{si } \gamma \in \Gamma \\ \infty & \text{si } \gamma \in \Gamma_2 \setminus \Gamma \end{cases}$$

Por la definición de Γ, es evidente que Γ es un subconjunto abierto de Γ_2, de forma que h^* es continua en cada punto de Γ.

Por otra parte, si $\gamma_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma$ y existe un entorno V of γ_0 tal que $V \subset \Gamma_2 \setminus \Gamma$, entonces h^* es continua en γ_0. Por tanto, podemos asumir que $\gamma_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma$ y que existe una red (γ_d) en Γ convergente a γ_0 tal que $(h(\gamma_d))$ converge a $\zeta_0 \in \Gamma_1$. Por el Lema 2.2.3, existe una función $f \in J$ tal que $\hat{f} \equiv 1$ en un entorno U de ζ_0.

Por otra parte, puesto que T es sobreyectiva y $A(\Gamma_2)$ es una subálgebra de $C_0(\Gamma_2)$ que separa puntos, podemos considerar $\hat{g} \in A(\Gamma_2)$ tal que $(\hat{T}\hat{g})(\gamma_0) \neq 0$. Por tanto

$$(\hat{g} - \hat{f} \cdot \hat{g})_{|U} \equiv 0$$

y la red $(\hat{T}(\hat{g} - \hat{f} \cdot \hat{g})(\gamma_d))$ converge a

$$\hat{T}(\hat{g} - \hat{f} \cdot \hat{g})(\gamma_0) = (\hat{T}\hat{g})(\gamma_0) - \hat{T}(\hat{f} \cdot \hat{g})(\gamma_0) = (\hat{T}\hat{g})(\gamma_0) \neq 0$$

porque $(f * g) \in J$ y $\gamma_0 \notin \Gamma$. En consecuencia, existe un subíndice d_0 tal que

$$\hat{T}(\hat{g} - \hat{f} \cdot \hat{g})(\gamma_d) \neq 0$$

para todo $d > d_0$. Esto implica, por la Proposición 2.3.3 (2), que

$$h(\gamma_d) \in cl(coz(\hat{g} - \hat{f} \cdot \hat{g}))$$

para todo $d > d_0$. Tenemos, por tanto, una contradicción puesto que

$$(\hat{g} - \hat{f} \cdot \hat{g}) \equiv 0$$

en un entorno abierto de γ_0. □

Nota 2.3.1 (Función peso asociada a una aplicación separadora). Definamos una aplicación continua

$$\chi : \Gamma \to \mathbf{K}$$

del siguiente modo: dado $\gamma \in \Gamma$, sea U un entorno relativamente compacto de $h(\gamma)$ y sea $e_{(\gamma,U)}$ cualquier función en $L^1(G_1)$ tal que $\hat{e}_{(\gamma,U)} \equiv 1$ en U. Estas funciones existen por el Lema 2.2.1. Definamos a continuación la siguiente función

$$\chi(\gamma) = \hat{T}(\hat{e}_{(\gamma,U)})(\gamma).$$

Por la Proposición 2.3.3, es fácil comprobar que la definición de χ no depende de la función que toma el valor 1 en U, i.e., si $\hat{e}'_{(\gamma,U)} \in A(\Gamma_1)$ y es igual a 1 en U, entonces

$$\hat{T}(\hat{e}'_{(\gamma,U)})(\gamma) = \hat{T}(\hat{e}_{(\gamma,U)})(\gamma).$$

Por otra parte, si V es otro entorno relativamente compacto de $h(\gamma)$ y tomamos $e_{(\gamma,V)}$, entonces

$$\hat{T}(\hat{e}_{(\gamma,U)}) = \hat{T}(\hat{e}_{(\gamma,V)})$$

en $h^{-1}(U \cap V)$ según la Proposición 2.3.3.

Por tanto, la función χ está bien definida y, dado que para todo $\gamma \in \Gamma$ dicha función es igual a $\hat{T}(\hat{e}_{(\gamma,U)})$ en $h^{-1}(U)$, que es un entorno de γ, deducimos que χ es una función continua.

Definición 2.3.2 *Denotaremos por* Γ_c (puntos de continuidad) *al subconjunto de* Γ *formado por todos los* $\gamma \in \Gamma$ *tales que la aplicación* $T^t\gamma^t$ *es continua y por* Γ_d (puntos de discontinuidad) *al complementario de* Γ_c *en* Γ.

Proposición 2.3.5 *Los puntos de continuidad y de discontinuidad de una aplicación separadora* T *tienen las siguientes propiedades:*

1. *Sea* $\gamma \in \Gamma$. *Entonces* $\gamma \in \Gamma_c$ *si y sólo si* $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$ *para toda* $f \in L^1(G_1)$.
2. Γ_c *es un subconjunto cerrado de* Γ.
3. $h(\Gamma_d)$ *es un subconjunto formado por puntos de acumulación de* Γ_1.
4. $h(\Gamma_d) \cap int(K)$ *es finito para todo subconjunto compacto* K *de* Γ_1.

Demostración. (1) Dado $\gamma \in \Gamma_c$, demostraremos en primer lugar que si $\hat{f}(h(\gamma)) = 0$, entonces $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0$ para todo $f \in L^1(G_1)$. Puesto que $\hat{f}(h(\gamma)) = 0$ y $\hat{f}$ es continua, podemos encontrar, para cada $n \in \mathbf{N}$, entornos abiertos U_n de $h(\gamma)$ tal que

$$sup\{|\hat{f}(\zeta)| : \zeta \in cl(U_n)\} < \frac{1}{n}.$$

Tomemos un entorno abierto relativamente compacto V_n de $h(\gamma)$ tal que

$$cl(V_n) \subset U_n$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Por el Lema 2.2.1, existe $g_n \in L^1(G_1)$ tal que

$$\hat{g}_{n|cl(V_n)} \equiv 1$$

y

$$\hat{g}_n \equiv 0$$

fuera de U_n. Claramente la sucesión $(\hat{f} \cdot \hat{g}_n)$ converge a 0 y

$$\hat{f} \cdot \hat{g}_n \equiv \hat{f}$$

en V_n para cada $n \in \mathbf{N}$. Por tanto, por la Proposición 2.3.3,

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \hat{T}(\hat{f} \cdot \hat{g}_n)(\gamma)$$

y, en consecuencia, como $\gamma \in \Gamma_c$, deducimos que $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0$.

Por otra parte, supongamos que $\hat{f}(h(\gamma)) \neq 0$. A continuación definimos la siguiente función:

$$\hat{g} = \hat{f} - \hat{f}(h(\gamma)) \cdot \hat{e}_{(\gamma,V)},$$

donde $\hat{e}_{(\gamma,V)}$ es la función que hemos introducido en la Nota 2.3.1. Como $\hat{T}$ es lineal y $\hat{g}(h(\gamma)) = 0$, tenemos que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$$

para todo $f \in L^1(G_1)$.

El recíproco se demuestra de forma análoga a la Proposición 1.3.1.

(2) Consideremos una red (γ_α) en Γ_c que converge a $\gamma \in \Gamma$. Por el apartado (1), tenemos

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma_\alpha) = \chi(\gamma_\alpha) \cdot \hat{f}(h(\gamma_\alpha))$$

para todo índice α y toda función $f \in L^1(G_1)$. Como las funciones χ, $\hat{f} \circ h$, y $\hat{T}\hat{f}$ son continuas, es evidente que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$$

para toda $f \in L^1(G_1)$, es decir, $\gamma \in \Gamma_c$.

(3) Veamos que si $h(\gamma) \in \Gamma_1$ es un punto aislado en Γ_1 para algún $\gamma \in \Gamma$, entonces $T^t\gamma^t$ es una aplicación continua, i.e., $\gamma \in \Gamma_c$. Dada $f \in L^1(G_1)$, definamos la aplicación

$$\hat{g} := \hat{f}(h(\gamma)) \cdot \hat{e}_{(\gamma,U)}$$

para cada entorno abierto relativamente compacto U de γ (cf. Nota 2.3.1). Como

$$\hat{f}_{|\{h(\gamma)\}} \equiv \hat{g}_{|\{h(\gamma)\}},$$

tenemos, por la Proposición 2.3.3, que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = (\hat{T}\hat{g})(\gamma).$$

Por tanto, según la definición de χ, resulta que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$$

para todo $f \in L^1(G_1)$, lo cual implica que $T^t\gamma^t$ es una aplicación continua por (1).

(4) Para probar que $h(S_d) \cap int(K)$ es finito para cada subconjunto compacto K de Γ_1, supongamos que existe una sucesión $(h(\gamma_n))$ formada por elementos distintos de $int(K)$ tal que $\gamma_n \in S_d$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Como K es un espacio normal, podemos asumir, tomando una subsucesión si es necesario, que (U_n) es una sucesión de subconjuntos abiertos de K disjuntos dos a dos tal que

$$h(\gamma_n) \in U_n \subseteq K$$

para cada $n \in \mathbf{N}$.

Para todo $\gamma_n \in \Gamma_d$ existe, por el apartado (1), una función $g_n \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{g}_n)(\gamma_n) \neq \chi(\gamma_n) \cdot \hat{g}_n(h(\gamma_n)).$$

A continuación definamos la función

$$\hat{f}_n := \hat{g}_n - \hat{g}_n(h(\gamma_n)) \cdot \hat{e}_{(\gamma_n,V)},$$

siendo $\hat{e}_{(\gamma_n,V)}$ como en la Nota 2.3.1 y $K \subseteq V$. Por tanto, $(\hat{T}\hat{f}_n)(\gamma_n) \neq 0$ y $\hat{f}_n(h(\gamma_n)) = 0$. Además, como $\hat{T}$ es lineal, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mid (\hat{T}\hat{f}_n)(\gamma_n) \mid > n$.

Por otra parte, por el Lema 2.2.2, existe, para cada $n \in \mathbf{N}$, una función $k_n \in L^1(G_1)$ y un entorno $V_n \subset U_n$ de $h(\gamma_n)$ tal que:

$$\| \hat{k}_n \|_\infty \leq \| k_n \|_1 < 2$$

$$\hat{k}_{n|V_n} \equiv 1$$

$$\hat{k} \equiv 0 \text{ fuera de } U_n$$

$$\| \hat{f}_n \cdot \hat{k}_n \|_\infty < \| f_n * k_n \|_1 < \frac{1}{n^2}.$$

Definamos, para cada $n \in \mathbf{N}$, la función

$$\varphi_n := f_n * k_n.$$

Entonces $\hat{\varphi}_n = \hat{f}_n \cdot \hat{k}_n$ y, como $\hat{k}_{n|V_n} \equiv 1$, tenemos, por la Proposición 2.3.3 (1), que

$$| (\hat{T}\hat{\varphi}_n)(\gamma_n) | = | (\hat{T}\hat{f}_n)(\gamma_n) | > n.$$

Por las propiedades que satisface k_n y como $L^1(G_1)$ es un álgebra de Banach, podemos definir la siguiente función de $L^1(G_1)$:

$$\varphi := \sum_{n \in \mathbf{N}} \varphi_n.$$

Puesto que la transformada de Fourier, considerada como una aplicación entre $L^1(G_1)$ y $C_0(\Gamma_1)$, es lineal y continua, concluimos que la función

$$\hat{\varphi} = \sum_{n \in \mathbf{N}} \hat{\varphi}_n$$

pertenece a $A(\Gamma_1)$. Como, además, $\hat{T}$ es una aplicación separadora, los miembros de la familia (U_n) son disjuntos dos a dos y $coz(\hat{\varphi}_n) \subset U_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces deducimos que

$$(\hat{T}\hat{\varphi}_n)_{|h^{-1}(U_m)} \equiv 0$$

si $n \neq m$. Así,

$$| (\hat{T}\hat{\varphi})(\gamma_n) | = | (\hat{T}\hat{\varphi}_n)(\gamma_n) | > n$$

para todo $n \in \mathbf{N}$, lo cual es una contradicción pues $\hat{T}\hat{\varphi}$ es una función acotada. □

Proposición 2.3.6 *La función peso χ esta acotada en Γ_c.*

Demostración. Supongamos que la función χ no está acotada en Γ_c. Entonces, para cada $n \in \mathbf{N}$, existe un elemento $\gamma_n \in \Gamma_c$ tal que

$$\chi(\gamma_n) > 4^n.$$

Si $(h(\gamma_n))$ es un conjunto finito, podemos asumir que $h(\gamma_n) = \zeta$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Tomemos ahora una función $f \in L^1(G_1)$ tal que $\hat{f}(\zeta) = 1$. Así, por la Proposición 2.3.5 (1), tenemos

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma_n) = \chi(\gamma_n) \cdot \hat{f}(\zeta) > 4^n,$$

lo cual es una contradicción porque la función $\hat{T}\hat{f}$ esta acotada en Γ_2.

Por otra parte, si el conjunto $(h(\gamma_n))$ tiene infinitos elementos, podemos asumir que

$$h(\gamma_n) \neq h(\gamma_m)$$

si $n \neq m$. Sea (U_n) una sucesión de entornos abiertos de $(h(\gamma_n))$ relativamente compactos y disjuntos dos a dos. Por el Lema 2.2.2, existe una sucesión $(f_n) \subset L^1(G_1)$ tal que

$$cl(coz(\hat{f}_n)) \subset U_n,$$

$$\hat{f}_n(h(\gamma_n)) = 1$$

$$\|f_n\|_1 < 2$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. A continuación definimos la función

$$\varphi_n := \frac{f_n}{2^n}.$$

Es inmediato comprobar que

$$\hat{\varphi}_n(h(\gamma_n)) = \frac{1}{2^n}$$

$$\| \varphi_n \|_1 < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como consecuencia, podemos definir la siguiente función en $L^1(G_1)$:

$$\varphi := \sum_{n \in \mathbf{N}} \varphi_n.$$

Puesto que la transformada de Fourier, considerada como una aplicación entre $L^1(G_1)$ y $C_0(\Gamma_1)$, es lineal y continua, concluimos que la función

$$\hat{\varphi} = \sum_{n \in \mathbf{N}} \hat{\varphi}_n$$

pertenece a $A(\Gamma_1)$. Finalmente, recordemos que las funciones $(\hat{\varphi}_n)$ tienen cozeros disjuntos dos a dos. Por tanto, como la aplicación $\hat{T}$ es separadora,

$$| (\hat{T}\hat{\varphi})(\gamma_n) |=| (\hat{T}\hat{\varphi}_n)(\gamma_n) |=| \chi(\gamma_n) \cdot \hat{\varphi}_n(h(\gamma_n)) |> 4^n \cdot \frac{1}{2^n} = 2^n.$$

Esta contradicción completa la prueba. □

2.4 Biyecciones separadoras.

Teorema 2.4.1 *Sea T una biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$. Entonces*

1. $\Gamma = \Gamma_c$.
2. $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$ *para toda* $f \in L^1(G_1)$ *y todo* $\gamma \in \Gamma$.
3. *La función soporte h de T es inyectiva.*
4. $\Gamma_2 = \Gamma$.
5. *La aplicación $\hat{T} : A(\Gamma_1) \to A(\Gamma_2)$ es continua.*
6. *La aplicación T es $\| \cdot \|_1$-continua.*
7. *La inversa de T es una biyección separadora entre $L^1(G_2)$ y $L^1(G_1)$.*
8. *La función soporte h de T es un homeomorfismo entre Γ_2 y Γ_1.*
9. *La aplicación $\hat{T} : A(\Gamma_1) \to A(\Gamma_2)$ tiene una única extensión a una biyección separadora $\bar{T} : C_0(\Gamma_1) \to C_0(\Gamma_2)$. Además, $\bar{T}$ es continua.*

Demostración. (1) Sabemos que $h(\Gamma)$ es un subconjunto denso de Γ_1 porque T es una aplicación inyectiva. Por tanto, dado $\zeta \in \Gamma_1$ y un entorno U abierto y relativamente compacto de dicho elemento, tenemos, por la Proposición 5, que $U \cap h(\Gamma_d)$ tiene una cantidad finita de elementos. Además $h(\Gamma_d)$ está formado por puntos de acumulación de Γ_1. En definitiva, deducimos que

$$h(\Gamma_c) \cap U \neq \emptyset$$

o equivalentemente, $h(\Gamma_c)$ es denso en Γ_1.

Por otra parte, si $\gamma \in \Gamma_c$, entonces, por la Proposición 2.3.5, tenemos que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$$

para toda $f \in L^1(G_1)$. Esto implica que

$$\chi(\gamma) \neq 0$$

puesto que T es una aplicación sobreyectiva y $A(\Gamma_2)$ es una subálgebra separadora de $C_0(\Gamma_2)$. Por tanto, si $(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0$ para algún $f \in L^1(G_1)$, entonces $\hat{f}(h(\gamma)) = 0$. Así pues,

$$\text{si } \ (\hat{T}\hat{f})_{|\Gamma_c} \equiv 0 \ \text{ entonces } \ \hat{f} \equiv 0 \tag{2.2}$$

dado que $h(\Gamma_c)$ es un subconjunto denso de Γ_1.

Supongamos ahora que $\gamma \in \Gamma$ pero $\gamma \notin \Gamma_c$. Como Γ_c es cerrado en Γ, existe un subconjunto cerrado C de Γ_2 tal que

$$\Gamma_c = \Gamma \cap C.$$

De lo anterior deducimos que

$$\gamma \notin C.$$

Por tanto podemos considerar, por el Lema 2.2.1 y puesto que $\hat{T}$ es una aplicación sobreyectiva, existe una función $f \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{f})_{|C} \equiv 0$$

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 1.$$

Pero, como $\Gamma_c \subseteq C$ y $(\hat{T}\hat{f})_{|C} \equiv 0$, entonces, por la implicación 2.2, resulta que $\hat{f} \equiv 0$. Esta contradicción prueba que $\Gamma = \Gamma_c$.

(2) Este apartado es consecuencia del apartado (1) y de la Proposición 2.3.5 (1).

(3) Para probar que h es una función inyectiva, consideremos dos elementos γ, γ' de Γ. Supongamos que $h(\gamma) = h(\gamma')$. Como quiera que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$$

y

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma') = \chi(\gamma') \cdot \hat{f}(h(\gamma'))$$

para todo $f \in L^1(G_1)$ y la función χ no se anula en su dominio, resulta que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \frac{\chi(\gamma)}{\chi(\gamma')} \cdot (\hat{T}\hat{f})(\gamma').$$

Es decir, no podemos encontrar una función $f \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) \neq 0$$

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma') = 0.$$

Esto es imposible porque la aplicación $\hat{T}$ es sobreyectiva y $A(\Gamma_2)$ es una subálgebra separadora de $C_0(\Gamma_2)$.

(4) Probaremos primero que $\Gamma_2 \setminus \Gamma$ es un subconjunto abierto de Γ_2. Escogemos un elemento γ de $\Gamma_2 \setminus \Gamma$ y supongamos que existe una red $(\gamma_\alpha) \subset \Gamma$ que converge a γ. Por la Proposición 2.3.4, tenemos que la red $(h(\gamma_\alpha))$ converge a ∞ en Γ_1^*. Como T es una aplicación sobreyectiva, existe una función $f \in L^1(G_1)$ tal que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) \neq 0.$$

Recordemos que, por el apartado (1),

$$\Gamma = \Gamma_c.$$

Por tanto, por la Proposición 2.3.5 y puesto que la función χ está acotada en Γ, deducimos que la red

$$((\hat{T}\hat{f})(\gamma_\alpha)) = (\chi(\gamma_\alpha) \cdot \hat{f}(h(\gamma_\alpha)))$$

converge a 0, ya que $\hat{f} \in C_0(\Gamma_1)$ y $h(\gamma_\alpha)$ converge a ∞. En definitiva tenemos que

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = 0$$

debido a la continuidad de la función $\hat{T}\hat{f}$. Esta contradicción prueba que el conjunto $\Gamma_2 \setminus \Gamma$ es abierto.

Supongamos ahora que $\Gamma_2 \setminus \Gamma \neq \emptyset$. Puesto que es abierto, existe una función $g \in L^1(G_2)$ tal que

$$coz(\hat{g}) \subset \Gamma_2 \setminus \Gamma.$$

Como además la aplicación T es sobreyectiva, existe una función $f \in L^1(G_1)$ no idénticamente nula tal que

$$\hat{T}\hat{f} = \hat{g}.$$

Sea $\zeta \in h(\Gamma)$ y $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$h(\gamma) = \zeta.$$

Así pues,

$$0 = \hat{g}(\gamma) = (\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma)),$$

lo cual implica que

$$\hat{f}(h(\gamma)) = \hat{f}(\zeta) = 0$$

pues la función χ no toma el valor 0. En consecuencia,

$$\hat{f}_{|h(\Gamma)} \equiv 0,$$

pero, como $h(\Gamma)$ es denso en Γ por la inyectividad de T, entonces

$$\hat{f} \equiv 0.$$

Esta contradicción completa la prueba de este apartado.

(5) De lo apartados (1) y (4), deducimos que

$$\Gamma_2 = \Gamma = \Gamma_c,$$

o de forma equivalente,

$$(\hat{T}\hat{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}(h(\gamma))$$

para cualquier $\gamma \in \Gamma_2$ y $f \in L^1(G_1)$. Consideramos una sucesión de funciones $(\hat{f}_n)$ en $A(\Gamma_1)$ convergente a la función $\hat{f}$. Como la función χ esta acotada en Γ_2, según la Proposición 2.3.6, es obvio que la sucesión $(\hat{T}\hat{f}_n)$ converge a $\hat{T}\hat{f}$, que era lo que queríamos probar.

(6) Probaremos que la aplicación T tiene gráfica cerrada. Supongamos que la sucesión $(f_n) \subset L^1(G_1)$ converge a $f \in L^1(G_1)$, y que la sucesión $(Tf_n) \subset L^1(G_2)$ converge a $g \in L^1(G_2)$, ambas en la norma $\|\cdot\|_1$. Por las propiedades de la transformada de Fourier deducimos que la sucesión $(\hat{f}_n)$ converge a $\hat{f}$ y $(\hat{T}\hat{f}_n)$ converge a $\hat{g}$, ambas en la norma supremo. Como quiera que la aplicación $\hat{T}$ es continua según hemos probado en el apartado (5), entonces

$$\hat{T}\hat{f} = \hat{g},$$

es decir,

$$Tf = g.$$

Finalmente, puesto que los espacios $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ son de Banach, el Teorema de la Gráfica Cerrada nos proporciona la continuidad de la aplicación T.

(7) Será suficiente probar que la aplicación inversa $(\hat{T})^{-1}$ de $\hat{T}$ es también separadora. Consideremos dos funciones $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in A(\Gamma_2)$ tales que

$$coz(\hat{g}_1) \cap coz(\hat{g}_2) = \emptyset.$$

Por la sobreyectividad de la aplicación T, existen dos funciones $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in A(\Gamma_1)$ tales que

$$\hat{T}\hat{f}_1 = \hat{g}_1$$

$$\hat{T}\hat{f}_2 = \hat{g}_2.$$

Como ya hemos probado en (1), la función χ no toma el valor 0 en Γ_2. En consecuencia,

$$coz(\hat{f}_1) \cap coz(\hat{f}_2) = \emptyset$$

en $h(\Gamma_2)$. Como $h(\Gamma_2)$ es denso en Γ_1, tenemos que

$$coz(\hat{f}_1) \cap coz(\hat{f}_2) = \emptyset,$$

es decir,

$$coz((\hat{T})^{-1}(\hat{g}_1)) \cap coz((\hat{T})^{-1}(\hat{g}_2)) = \emptyset.$$

En resumen, la aplicación $(\hat{T})^{-1}$ es separadora y, por tanto, T^{-1} es también separadora.

(8) Sea $k : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ la función soporte de $(\hat{T})^{-1}$ (cf. Definición 2.3.1). Es evidente que la función k es continua, inyectiva y su rango es denso en Γ_2.

A continuación probaremos que

$$(h \circ k)(\zeta) = \zeta$$

para cualesquiera $\zeta \in \Gamma_1$. Supongamos que $h(k(\zeta)) \neq \zeta$ para algún $\zeta \in \Gamma_1$ y consideremos dos entornos U y V compactos y disjuntos de $h(k(\zeta))$ y ζ respectivamente. Por la definición de la función soporte h de T, tenemos que existe una función $\hat{f}_0 \in A(\Gamma_1)$ tal que

$$coz(\hat{f}_0) \subset U$$

$$(\hat{T}\hat{f}_0)(k(\zeta)) \neq 0.$$

De este modo, por la Proposición 2.3.3 (2), deducimos que

$$\zeta \notin cl(coz(\hat{f}_0))$$

$$h(k(\zeta)) \in cl(coz(\hat{f}_0)).$$

Sea $\hat{f}_1 \in A(\Gamma_1)$ tal que $\hat{f}_1(\zeta) \neq 0$ y $\hat{f}_1 \equiv 0$ en $coz(\hat{f}_0)$. Así pues,

$$coz(\hat{f}_1) \cap coz(\hat{f}_0) = \emptyset$$

y, puesto que $\hat{T}$ es una aplicación separadora,

$$coz(\hat{T}\hat{f}_0) \cap coz(\hat{T}\hat{f}_1) = \emptyset.$$

Por otra parte, el conjunto $coz(\hat{T}\hat{f}_0)$ es un entorno abierto de $k(\zeta)$, de tal forma que si tomamos cualquier función $\hat{g} \in A(\Gamma_2)$ tal que

$$coz(\hat{g}) \subset coz(\hat{T}\hat{f}_0),$$

entonces

$$coz(\hat{f}_1) \cap coz((\hat{T})^{-1}(\hat{g})) = \emptyset$$

ya que $(\hat{T})^{-1}$ es una aplicación separadora. En consecuencia,

$$(\hat{T})^{-1}(\hat{g})(\zeta) = 0$$

pues $\hat{f}_1(\zeta) \neq 0$. Este hecho contradice la definición de la función soporte k de $(\hat{T})^{-1}$.

De forma similar, se prueba que $(k \circ h)(\gamma) = \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma_2$. En resumen, por la continuidad de las funciones h y k, deducimos que h es un homeomorfismo entre Γ_2 y Γ_1; concretamente, la función soporte k de $\hat{T}^{-1}$ es la inversa de la función soporte h de $\hat{T}$.

(9) Como la aplicación

$$\hat{T} : A(\Gamma_1) \to A(\Gamma_2)$$

es lineal y continua, y los espacios $A(\Gamma_1)$ y $A(\Gamma_2)$ son densos en $C_0(\Gamma_1)$ y $C_0(\Gamma_2)$ respectivamente, entonces la aplicación $\hat{T}$ tiene una extensión continua

$$\bar{T} : C_0(\Gamma_1) \to C_0(\Gamma_2).$$

Además, si $\gamma \in \Gamma_2$ y $\bar{f} \in C_0(\Gamma_1)$, entonces existe una sucesión $(\hat{f}_n)$ en $A(\Gamma_1)$ convergente a $\bar{f}$. Por el apartado (2) , y ya que la aplicación $\bar{T}$ es continua, tenemos que la sucesión $((\hat{T}\hat{f}_n)(\gamma))$ converge a $(\bar{T}\bar{f})(\gamma)$ y que $(\hat{T}\hat{f}_n)(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}_n(h(\gamma))$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por tanto, podemos escribir

$$(\bar{T}\bar{f})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \bar{f}(h(\gamma))$$

para cada $\gamma \in \Gamma_2$ y $\bar{f} \in C_0(\Gamma_1)$. En consecuencia, es ahora evidente que la aplicación $\bar{T}$ es única, inyectiva y separadora.

Para probar que la aplicacion $\bar{T}$ es sobreyectiva, consideremos una función $\bar{g} \in C_0(\Gamma_2)$. Por densidad, podemos encontrar una sucesión $(\hat{g}_n)$ en $A(\Gamma_2)$ convergente a $\bar{g}$. Por ser $\hat{T}$ una aplicación sobreyectiva, consideraremos la sucesión $(\hat{f}_n) \subset A(\Gamma_1)$ tal que

$$\hat{T}\hat{f}_n = \hat{g}_n$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Así pues,

$$\hat{g}_n(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{f}_n(h(\gamma))$$

para cualquier $\gamma \in \Gamma_2$.

Por otra parte, probaremos que, para un cierto $r > 0$,

$$\inf\{\mid \chi(\gamma) \mid : \gamma \in \Gamma_2\} \geq r > 0.$$

Supongamos que existe una sucesión $(\gamma_m) \subset \Gamma_2$ de forma que

$$\mid \chi(\gamma_m) \mid < \frac{1}{4^m}$$

para todo $m \in \mathbf{N}$ y $\gamma_{m'} \neq \gamma_m$ si $m' \neq m$. Tomamos, para cada $m \in \mathbf{N}$, un entorno compacto U_m de γ_m tal que $U_{m'} \cap U_m = \emptyset$ si $m' \neq m$. Para cada $m \in \mathbf{N}$, existe, por el Lema 2.2.1, una función $\varphi_m \in L^1(G_2)$ tal que

$$\hat{\varphi}_m(\gamma_m) = \frac{1}{3^m},$$

$$\| \varphi_m \|_1 < \frac{2}{3^m},$$

$$\hat{\varphi}_m \equiv 0$$

fuera de U_m. Definamos a continuación la siguiente función en $L^1(G_2)$:

$$\varphi := \sum_{m \in \mathbf{N}} \varphi_m.$$

Consideremos, por sobreyectividad, la función $k \in L^1(G_1)$ tal que

$$Tk = \varphi.$$

Así pues, como

$$|\ (\hat{T}\hat{k})(\gamma_m)\ |=|\ \hat{\varphi}(\gamma_m)\ |=|\ \chi(\gamma_m)\ |\cdot|\ \hat{k}(h(\gamma_m))\ |,$$

deducimos que

$$|\ \hat{k}(h(\gamma_m))\ |> \frac{4^m}{3^m}$$

para cada $m \in \mathbf{N}$. Esta contradicción prueba que

$$\inf\{|\ \chi(\gamma)\ | : \gamma \in \Gamma_2\} \geq r > 0.$$

Como consecuencia, ya que, para cada $n \in \mathbf{N}$, $\hat{g}_n = \chi \cdot (\hat{f}_n \circ h)$ y la sucesión $(\hat{g}_n)$ es de Cauchy en $C_0(\Gamma_2)$, podemos afirmar que la sucesión $(\hat{f}_n)$ es de Cauchy en $h(\Gamma)$. Como además $h(\Gamma)$ es denso en Γ_1, entonces $(\hat{f}_n)$ es de Cauchy en Γ_1. En definitiva, por completitud, existe una función $\bar{f} \in C_0(\Gamma_1)$ tal que $(\hat{f}_n)$ converge a $\bar{f}$. De esta forma, $\bar{T}\bar{f} = \bar{g}$.

Por otra parte, cualquier biyección separadora entre $C_0(\Gamma_1)$ y $C_0(\Gamma_2)$ es continua según el Teorema 1.4.1. Por tanto, la unicidad de la extensión $\bar{T}$ de $\hat{T}$ es consecuencia directa de la densidad de $A(\Gamma_1)$ en $C_0(\Gamma_1)$. $\square$

El siguiente teorema caracteriza las biyecciones separadoras entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$.

Teorema 2.4.2 *Una biyección lineal $T : L^1(G_1) \to L^1(G_2)$ es separadora si, y sólo si,*

$$T = T_2 \circ T_1$$

siendo $T_1 : L^1(G_1) \to L^1(G_2)$ un isomorfismo de álgebras y $T_2 : L^1(G_2) \to L^1(G_2)$ una aplicación continua y lineal de forma que

$$T_2(g) = g * \mu$$

para cualquier $g \in L^1(G_2)$ y $\mu \in M(G_2)$.

Demostración. Supongamos que T es una biyección separadora. En primer lugar probaremos que la función peso χ es la transformada de Fourier-Stieltjes de una cierta medida perteneciente a $M(G_2)$, i.e.,

$$\chi \in B(\Gamma_2).$$

Con ese objetivo y por el Teorema 2.2.1, tan sólo necesitamos probar que existe una constante A de forma que

$$\mid \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi(\gamma_i) \mid \leq A \cdot \parallel \phi \parallel_\infty$$

para cada polinomio trigonométrico ϕ definido en G_2 y que tiene la siguiente forma:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \gamma_i(x)$$

con $x \in G_2$ y $\gamma_i \in \Gamma_2$. Consideremos, por tanto, un polinomio trigonométrico ϕ en G_2. Por el Lema 2.2.2, existe una función, $f \in L^1(G_1)$ tal que

$$\parallel f \parallel_1 < 2$$
$$\hat{f}(h(\gamma_i)) = 1$$

para $i = 1, .., n$. Si denotamos por g la función Tf, entonces

$$\begin{aligned} \mid \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi(\gamma_i) \mid &= \mid \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (\hat{T}\hat{f})(\gamma_i) \mid \\ &= \mid \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \hat{g}(\gamma_i) \mid \\ &= \mid \sum_{i=1}^{n} c_i (\int_{G_2} g(x)\gamma_i(-x)dx) \mid \\ &\leq \int_{G_2} \mid g(x) \mid \cdot \mid \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \gamma_i(-x) \mid dx \\ &\leq \parallel g \parallel_1 \cdot \parallel \phi \parallel_\infty . \end{aligned}$$

Como T es, por el teorema anterior, una aplicación continua, entonces existe una constante positiva M tal que

$$\parallel g \parallel_1 \leq M \cdot \parallel f \parallel_1 \leq 2M.$$

En consecuencia, se tiene

$$| \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi(\gamma_i) | \leq 2M \cdot \| \phi \|_\infty$$

para cualquier polinomio trigonométrico ϕ, y por tanto, $\chi \in B(\Gamma_2)$.

A continuación probaremos que, para toda función $f \in L^1(G_1)$, tenemos

$$(\hat{f} \circ h) \in A(\Gamma_2)$$

siendo h la función soporte de la aplicación T. Dado $\gamma \in \Gamma_2$, consideremos una función $g \in L^1(G_2)$ tal que $\hat{g}(\gamma) = 1$. Por el teorema anterior sabemos que la aplicación inversa $(\hat{T})^{-1}$ de $\hat{T}$ es separadora y suponemos que k denota su función soporte. Por tanto podemos escribir

$$(\hat{T})^{-1}(\hat{g})(\zeta) = \Psi(\zeta) \cdot \hat{g}(k(\zeta))$$

para cualesquiera $g \in L^1(G_2)$ y $\zeta \in \Gamma_1$ siendo

$$\Psi : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbf{C}$$

una aplicación continua definida de forma análoga a la función peso χ. Así pues, se tiene

$$\begin{aligned} 1 = \hat{g}(\gamma) &= \hat{T}((\hat{T})^{-1}(\hat{g}))(\gamma) \\ &= \chi(\gamma) \cdot (\hat{T})^{-1}(\hat{g})(h(\gamma)) \\ &= \chi(\gamma) \cdot \Psi(h(\gamma)) \cdot \hat{g}(k(h(\gamma))) \\ &= \chi(\gamma) \cdot \Psi(h(\gamma)), \end{aligned}$$

es decir,

$$\chi(\gamma) \cdot \Psi(h(\gamma)) = 1$$

para todo $\gamma \in \Gamma_2$.

Por otra parte, consideremos, para cada $g \in L^1(G_2)$, la siguiente función en $A(\Gamma_1)$:

$$\Psi \cdot \Psi \cdot (\hat{g} \circ k).$$

Esta función es un elemento de $A(\Gamma_1)$ porque $\Psi \cdot (\hat{g} \circ k) \in A(\Gamma_1)$ y $\Psi \in B(\Gamma_1)$ y, además, $A(\Gamma_1)$ es un ideal en $B(\Gamma_1)$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{T}(\Psi \cdot \Psi \cdot (\hat{g} \circ k))(\gamma) &= \chi(\gamma) \cdot \Psi(h(\gamma)) \cdot \Psi(h(\gamma)) \cdot (\hat{g}(k(h(\gamma)))\\ &= \Psi(h(\gamma)) \cdot \hat{g}(\gamma)\end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma_2$. Esto implica que la función $(\Psi \circ h) \cdot \hat{g}$ pertenece a $A(\Gamma_2)$ para toda $\hat{g} \in A(\Gamma_2)$. Si ahora aplicamos el Teorema 2.2.2, deducimos que $(\Psi \circ h)$ pertenece a $B(\Gamma_2)$. Finalmente, puesto que $A(\Gamma_2)$ es un ideal en $B(\Gamma_2)$ y la función $\chi \cdot (\hat{f} \circ h)$ pertenece a $A(\Gamma_2)$, se tiene que $(\Psi \circ h) \cdot \chi \cdot (\hat{f} \circ h) = (\hat{f} \circ h)$ pertenece a $A(\Gamma_2)$ para toda $f \in L^1(G_1)$.

Si recopilamos la información obtenida hasta ahora, resulta que podemos escribir

$$T = T_2 \circ T_1$$

donde $T_1 : L^1(G_1) \to L^1(G_2)$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo de manera que

$$\hat{T}_1(\hat{f}) = \hat{f} \circ h$$

para toda $f \in L^1(G_1)$ y $T_2 : L^1(G_2) \to L^1(G_2)$ es una aplicación lineal y continua tal que

$$\hat{T}_2(\hat{g}) = \chi \cdot \hat{g}$$

para toda $g \in L^1(G_2)$. Del Teorema 2.2.3 se sigue que T_2 conmuta con todas las translaciones, es decir,

$$T_2 \circ \tau_a = \tau_a \circ T_2$$

donde

$$\tau_a(g)(x) = g(x - a)$$

para toda $g \in L^1(G_2)$ y todo $x, a \in G_2$. Así pues, aplicando ahora el Corolario 2.2.1, obtenemos una medida $\mu \in M(G_2)$ de forma que

$$T_2(g) = g * \mu$$

para toda $g \in L(G_2)$.

Tan sólo resta por probar que la aplicación T_1 es sobreyectiva. Supongamos lo contrario. Entonces existe una función $\hat{g} \in A(\Gamma_2)$ tal que $\hat{T}_1(\hat{f}) \neq \hat{g}$ para toda $\hat{f} \in A(\Gamma_1)$. Esto, unido al hecho que la aplicación $\hat{T}_2$ es inyectiva, implica que

$$\hat{T}\hat{f} = \hat{T}_2(\hat{T}_1(\hat{f})) \neq \hat{T}_2(\hat{g})$$

para toda $f \in L^1(G_1)$, lo que contradice la sobreyectividad de la aplicación T.

El recíproco es inmediato. □

2.5 Corolarios.

Los siguientes corolarios extienden sendos resultados de Beurling y Helson ([16]) y de Kalton y Wood ([47]) (cf. Teorema 2.2.6).

Corolario 2.5.1 *Sea T una biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$. Si el grupo dual Γ_2 de G_2 es conexo, entonces los grupos G_1 y G_2 son topológicamente isomorfos, es decir, isomorfos como grupos y homeomorfos como espacios topológicos.*

Demostración. Del teorema anterior se deduce, de forma inmediata, que la aplicación T_1 es un isomorfismo de álgebras entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$. En consecuencia, basta aplicar el Teorema 2.2.6. □

Corolario 2.5.2 *Sea T una biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$. Si $\| T \| \leq \frac{\sqrt{2}}{\|\mu^{-1}\|}$, donde $\mu \in M(G_2)$ es la medida que aparece en el Teorema 2.4.2, entonces los grupos G_1 y G_2 son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Sean χ y Ψ las funciones peso asociadas a las aplicaciones separadoras $\hat{T}$ y $(\hat{T})^{-1}$ respectivamente. Por la demostración del Teorema 2.4.2, sabemos que existen dos medidas $\mu, v \in M(G_2)$ tal que

$$\hat{\mu} = \chi,$$

$$\hat{v} = \Psi \circ h$$

$$T = \mu * T_1.$$

De esta forma, si definimos $H := v * \mu * T_1$, entonces

$$\hat{H} = (\Psi \circ h) \cdot \chi \cdot \hat{T}_1 = \hat{T}_1.$$

Por las propiedades de la transformada de Fourier-Stieltjes, deducimos que $H = T_1$ y también que $\mu^{-1} = v$. Como consecuencia,

$$\begin{aligned} \| T_1 \| &= \| H \| \\ &= \| \mu^{-1} * \mu * T_1 \| \\ &\leq \| \mu^{-1} \| \cdot \| T \| . \end{aligned}$$

Por tanto, si $||T|| \leq \frac{\sqrt{2}}{||\mu^{-1}||}$, entonces $\| T_1 \| \leq \sqrt{2}$. Finalmente, como T_1 es un isomorfismo de álgebras entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$, la tesis se deduce del Teorema 2.3.6. □

Corolario 2.5.3 *Sea T una biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$. Entonces T tiene una única extensión a una biyección separadora entre $M(G_1)$ y $M(G_2)$.*

Demostración. Probaremos primero que existe una extensión $\mathcal{T}$ de la aplicación T de modo que

$$(\hat{\mathcal{T}} \hat{\mu})(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{\mu}(h(\gamma))$$

para toda medida $\mu \in M(G_1)$ y todo $\gamma \in \Gamma_2$.

Seguimos denotando por T_1 el isomorfismo de álgebras que aparece en el Teorema 2.4.2. Por el Teorema 2.2.5, sabemos que T_1 tiene una única extensión a un isomorfismo de álgebras $\mathcal{T}_1$ definido entre $M(G_1)$ y $M(G_2)$ dado por

$$\hat{\mathcal{T}}_1(\hat{\mu})(\gamma) = \hat{\mu}(h(\gamma))$$

para toda medida $\mu \in M(G_1)$ y todo $\gamma \in \Gamma_2$.

Para probar que la aplicación $\mathcal{T}$ es sobreyectiva, consideremos la medida $\mu \in M(G_2)$. Entonces $\hat{\mu} \in B(\Gamma_2)$ y es inmediato comprobar que

$$\hat{\mathcal{T}}(\Psi \cdot (\hat{\mathcal{T}}_1)^{-1}(\hat{\mu})) = \hat{\mu}$$

con el mismo razonaniento que el utilizado en la prueba del Teorema 2.4.2. En consecuencia, la aplicación $\mathcal{T}$, que estamos considerando, es una biyección separadora entre $M(G_1)$ y $M(G_2)$.

Para completar la demostración de este corolario, tenemos que probar que, si una cierta biyección separadora $\mathcal{K}$ entre $M(G_1)$ y $M(G_2)$ es otra extensión de T, entonces $\mathcal{T} \equiv \mathcal{K}$, o de forma equivalente, $\hat{\mathcal{T}} \equiv \hat{\mathcal{K}}$. Por el Teorema 2.4.1 (9), podemos considerar que las aplicaciones $\hat{\mathcal{T}}$ y $\hat{\mathcal{K}}$ están definidas en $C_0(\Gamma_1)$. Además, coinciden en $C_0(\Gamma_1)$ debido a la unicidad obtenida en el citado Teorema 2.4.1 (9).

Consideremos a continuación una medida $v \in M(G_1)$. Recordemos que $\hat{v} \in B(\Gamma_1)$ está acotada. Sea

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot f_i$$

una partición de la unidad localmente finita tal que $f_i \in C_0(\Gamma_1)$ para todo i $\in$I. Por tanto,

$$\hat{\mathcal{K}}\hat{v} = \hat{\mathcal{K}} \sum_{i \in I} a_i \cdot f_i \cdot \hat{v}.$$

Como $\hat{\mathcal{K}}$ es una aplicación separadora y la partición de la unidad es localmente finita, obtenemos la igualdad

$$\hat{\mathcal{K}} \sum_{i \in I} a_i \cdot f_i \cdot \hat{v} = \sum_{i \in I} a_i \cdot \hat{\mathcal{K}}(f_i \cdot \hat{v}).$$

Finalmente, puesto que $(f_i \cdot \hat{v}) \in C_0(\Gamma_1)$ para todo $i \in I$ y las aplicaciones $\hat{\mathcal{T}}$ y $\hat{\mathcal{K}}$ coinciden precisamente en $C_0(\Gamma_1)$, deducimos que

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{v} = \hat{\mathcal{K}}\hat{v}$$

para toda medida $v \in M(G_1)$, con lo que se completa esta demostración. $\square$

Corolario 2.5.4 *Sea T una biyección separadora entre $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ y sea $\mathcal{T}$ la extensión obtenida en el corolario anterior. Si, para cada $x \in G_1$, existe un elemento $y(x)$ de G_2 y un escalar $\lambda(x)$ tal que*

$$\mathcal{T}\delta_x = \lambda(x) \cdot \delta_{y(x)},$$

entonces los grupos G_1 y G_2 son topológicamente isomorfos.

Demostración. Es sabido que, dado $x \in G_1$,

$$\hat{\delta}_x(\zeta) = \zeta(x) =< x, \zeta >$$

para todo $\zeta \in \Gamma_1$. Así pues, por hipótesis, tenemos

$$(\hat{\mathcal{T}}\hat{\delta}_x)(\gamma) = \lambda(x) \cdot \hat{\delta}_{y(x)}(\gamma) = \lambda(x) \cdot < y(x), \gamma >$$

para todo $\gamma \in \Gamma_2$.

Por otra parte, por el corolario 2.5.3, se cumple

$$(\hat{\mathcal{T}}\hat{\delta}_x)(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \hat{\delta}_x(h(\gamma)) = \chi(\gamma) \cdot < x, h(\gamma) >$$

para todo $\gamma \in \Gamma_2$. Si e denota el elemento neutro del grupo G_1, entonces

$$\lambda(e) \cdot < y(e), \gamma >= \chi(\gamma) \cdot \hat{\delta}_e(h(\gamma)) = \chi(\gamma)$$

para todo $\gamma \in \Gamma_2$. Por tanto,

$$\lambda(x) \cdot < y(x), \gamma >= \lambda(e) \cdot < y(e), \gamma > \cdot \hat{\delta}_x(h(\gamma)),$$

es decir,

$$\hat{\delta}_x(h(\gamma)) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(e)} \cdot < y(x) - y(e), \gamma > .$$

Definiremos, para abreviar,

$$\lambda'(x) := \frac{\lambda(x)}{\lambda(e)}$$

$$y'(x) := y(x) - y(e).$$

Sea $\gamma_0 \in \Gamma_2$ tal que $h(\gamma_0)$ es el elemento neutro de Γ_1. Entonces

$$< x, h(\gamma_0) >= \lambda'(x) \cdot < y'(x), \gamma_0 > .$$

En consecuencia,

$$\lambda'(x) =< y'(x), -\gamma_0 >$$

$$< x, h(\gamma) >=< y'(x), \gamma - \gamma_0 > .$$

Definimos a continuación el siguiente homeomorfismo h' entre Γ_2 y Γ_1:

$$h'(\gamma) = h(\gamma + \gamma_0).$$

En efecto la aplicación h' es un homeomorfismo puesto que es la composición de dos homeomorfismos. Además,

$$\begin{aligned}
< x, h'(\gamma_1 + \gamma_2) > &= < x, h(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_0) > \\
&= < y'(x), \gamma_1 + \gamma_2 > \\
&= < y'(x), \gamma_1 > \cdot < y'(x), \gamma_2 > \\
&= < x, h'(\gamma_1) > \cdot < x, h'(\gamma_2) > \\
&= < x, h'(\gamma_1) + h'(\gamma_2) >
\end{aligned}$$

para todo $x \in G_1$. Por tanto, $h'(\gamma_1 + \gamma_2) = h'(\gamma_1) + h'(\gamma_2)$. Esto prueba que h' es un isomorfismo topológico entre Γ_2 y Γ_1, lo que implica que los grupos G_1 y G_2 son también topológicamente isomorfos (cf. [38] 24.41 (c)). $\square$

Capítulo 3

Isometrías lineales entre subespacios de funciones continuas.

3.1 Introducción.

En este capítulo estudiaremos las isometrías lineales entre un subespacio vectorial completamente separador A de $C_0(X)$ (cf. Definición 3.2.4) y $C_0(Y)$. Por consiguiente, en adelante, por isometría entenderemos isometría lineal.

En la sección 3.3 obtendremos una relación entre ciertos elementos singulares de Y y de X. Esta relación va a ser, según veremos en la sección 3.4, una aplicación continua que nos permitirá escribir la isometría como una aplicación composición con peso sobre los elementos singulares antes citados.

En la sección 3.5, probaremos que si el rango, $T(A)$, de la isometría es también un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(Y)$, entonces los conjuntos $\sigma_0 A$ y $\sigma_0 T(A)$ (cf. Definición 3.2.2) son homeomorfos. Dichos conjuntos coinciden, en muchos casos, con las fronteras de Shilov de A y de $T(A)$ respectivamente.

Como consecuencia de este último resultado, obtenemos que el conjunto de los puntos frontera fuerte de A y $T(A)$ (cf. Definición 3.2.3) son homeomorfos. Un ejemplo demostrará que, sin embargo, las fronteras de Shilov de A y $T(A)$ no son, en general, homeomorfas. También estudiaremos qué hipótesis adicionales deben cumplir A y $T(A)$ para que esta propiedad se satisfaga.

Con otro ejemplo demostraremos que las afirmaciones anteriores no son ciertas si reemplazamos la hipótesis "A es un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(X)$" por "A es un subespacio vectorial separador de $C_0(X)$".

En las secciones 3.5 y 3.6, extendemos algunos de los resultados (op. cit.) de Amir y Arbel ([?]), Holsztyński ([40]), Myers ([49]) y Novinger ([51]), que en su mayoría fueron formulados para subespacios de $C(X)$ (X compacto) que contienen las funciones constantes.

Finalmente, en la sección 3.7, aplicamos los resultados obtenidos previamente al estudio de isometrías entre subálgebras de funciones continuas; concretamente, entre álgebras de Banach semisimples, conmutativas y sin unidad.

Las demostraciones del Teorema de Banach-Stone y de sus numerosas generalizaciones suelen basarse en el estudio de varios conceptos tales como los puntos extremos de la bola unidad del espacio dual de $C_0(X)$, los T-conjuntos o los M-ideales (cf. [14]). Las demostraciones que aparecen en este capítulo están basadas, sin embargo, en conceptos elementales, en la linea de [40].

3.2 Definiciones básicas.

Asumiremos en esta sección que A es un subespacio vectorial de $C_0(X)$.

Definición 3.2.1 *Escribiremos σA para designar el conjunto de todos los $x_0 \in X$ tal que para cada entorno U de x_0, existe una función f en A de forma que $|f(x)| < \|f\|$ para todo $x \in X \setminus U$.*

Definición 3.2.2 *Escribiremos $\sigma_0 A$ para referirnos al conjunto*

$$\sigma A \cap \{x \in X : \text{ existe } f \in A \text{ tal que } f(x) \neq 0\}.$$

Diremos que $F \subseteq X$ es una *frontera* de A si cada función de A alcanza su norma en algún elemento de F. Se puede demostrar que siempre existe una frontera minimal cerrada de A, aunque puede no ser única. En caso de serlo, se denomina *frontera de Shilov* de A y escribiremos ∂A para referirnos a ella.

Definición 3.2.3 *Diremos que un elemento $x_0 \in X$ es un punto frontera fuerte de A si para cada entorno U de x_0, existe una función f en A tal que $|f(x_0)| = \|f\|$ y $|f(x)| < \|f\|$ para todo $x \in X \setminus U$.*

Denotaremos por τA el conjunto de los puntos frontera fuerte de A.

Escribiremos $Ch(A)$ para designar la *frontera de Choquet de A*. Recordemos que su definición es

$$Ch(A) := \{x \in X : x^t \text{ es un punto extremo de } V[A']\}.$$

Ésta no es la definición usual de frontera de Choquet para subespacios vectoriales de $C(X)$ que contienen las funciones constantes y separan puntos, aunque está demostrado (cf. [51]) que ambas definiciones coinciden en este último caso y que $Ch(A)$ es, efectivamente, una frontera de A.

Definición 3.2.4 *Diremos que el subespacio A es separador (resp. completamente separador) si dados dos elementos distintos x_1, x_2 de X, entonces existe una función $f \in A$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$ (resp. $|f(x_1)| \neq |f(x_2)|$).*

Es un hecho conocido que la frontera de Shilov de una subálgebra separadora de $C_0(X)$ siempre existe.

Definición 3.2.5 *Diremos que A es completamente regular si todo elemento $x \in X$ es un punto frontera fuerte de A, i.e., $\tau A = X$.*

En este capítulo asumiremos que cualquier subespacio vectorial A de $C_0(X)$ tiene frontera de Shilov no vacía y que toda isometría es lineal. De todas formas, cabe resaltar que la frontera de Shilov de un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(X)$ siempre existe (cf. [7], Teorema 1).

3.3 Lemas previos.

Lema 3.3.1 *Sea A un subespacio vectorial de $C_0(X)$. Entonces $\partial A = \sigma A$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \partial A$. Dado un entorno abierto U de x_0, el conjunto cerrado $X \setminus U$ no puede ser una frontera de A pues no contiene a ∂A. En consecuencia, existe una función $f \in A$ que no alcanza su valor máximo en $X \setminus U$, es decir, $|f(x)| < \|f\|$ para todo $x \in X \setminus U$.

Recíprocamente, sea $x_0 \in \sigma A$. Si $x_0 \notin \partial A$, entonces existe un entorno abierto U de x_0 tal que

$$\partial A \cap U = \emptyset.$$

Por tanto, existe una función $f \in A$ que no toma su valor máximo en ∂A, lo cual contradice la definición de frontera. □

Lema 3.3.2 *Sea A un subespacio vectorial de $C_0(X)$. Sea T una isometría entre A y $C_0(Y)$. Sea $x \in X$ tal que existe una función $f \in A$ con*

$\|f\| = |f(x)|$. *Definimos, para cada elemento x con esta propiedad, el siguiente conjunto:*

$$C_x := \{f \in A : 1 = \|f\| = |f(x)|\}.$$

Por otra parte, para cada función $f \in A$, definimos el conjunto

$$L(f) := \{y \in Y : \|Tf\| = |(Tf)(y)|\}$$

y, por último, sea $I_x := \bigcap_{f \in C_x} L(f)$. Entonces cada conjunto I_x es un subconjunto no vacío de Y.

Demostración. Para cada función $f \in C_x$, tenemos la inclusión

$$I_x \subset M_f := \{y \in Y : |(Tf)(y)| \geq \|Tf\|/2\}$$

y, además, el conjunto M_f es compacto porque la función Tf es un elemento de $C_0(Y)$. Por tanto, para probar que $I_x \neq \emptyset$, bastará demostrar, gracias a la Propiedad de la Intersección Finita del conjunto M_f, que si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ pertenecen a C_x, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} L(f_i) \neq \emptyset.$$

Sabemos, por definición, que $1 = \|f_i\| = |f_i(x)|$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Definamos a continuación la siguiente función de A:

$$f := \sum_{i=1}^{n} \frac{|f_i(x)|}{f_i(x)} \cdot f_i.$$

Es fácil verificar que $|f(x)| = n = \|f\|$. Como T es una isometría, entonces $\|Tf\| = n$ y existe un elemento y de Y de forma que

$$n = |(Tf)(y)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{|f_i(x)|}{f_i(x)} \cdot (Tf_i)(y) \right|.$$

Como además $\|Tf_i\| \leq 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$, deducimos que $|(Tf_i)(y)| = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$, es decir, $y \in \bigcap_{i=1}^{n} L(f_i)$ y el Lema queda probado. $\square$

Nota 3.3.1 Sea A un subespacio vectorial de $C_0(X)$ y sea $x_0 \in \partial A$. Entonces definimos el siguiente subconjunto de Y:

$$V_{x_0} := \{y \in Y : |(Tf)(y)| = |f(x_0)| \text{ } para \text{ } todo \text{ } f \in A\}.$$

Lema 3.3.3 *Sea A un subespacio vectorial de $C_0(X)$ y sea $x_0 \in \sigma_0 A$. Entonces $V_{x_0} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $f_0 \in A$ tal que $|f_0(x_0)| = 1$. Dado $\epsilon > 0$, definiremos

$$U_{f_0,\epsilon} := \{x \in X : 1 - \epsilon < |f_0(x)| < 1 + \epsilon\}.$$

Consideremos un entorno abierto U de x_0. Asumiremos que $U \subseteq U_{f_0,\epsilon}$. Como $x_0 \in \sigma_0 A$ y U es un entorno abierto de x_0, existe una función $g_0 \in A$ tal que $\|g_0\| = 1$ y $|g_0(x)| < 1$ para todo $x \in X \setminus U$. Como además $X^* \setminus U$ es un conjunto compacto, podemos considerar la siguiente constante

$$s := \sup_{x \in X \setminus U} \{|g_0(x)|\} < 1.$$

Entonces existe un número real $M > 0$ tal que

$$\|f_0\| + Ms < 1 + \epsilon + M.$$

Fijemos $x \in U$. Así pues

$$|(f_0 + Mg_0)(x)| < 1 + \epsilon + M.$$

Si $x \notin U$, entonces

$$|(f_0 + Mg_0)(x)| < \|f_0\| + Ms < 1 + \epsilon + M.$$

Como consecuencia,

$$\|f_0 + Mg_0\| < 1 + \epsilon + M.$$

Por tanto, como T es una isometría, resulta que

$$\|T(f_0 + Mg_0)\| < 1 + \epsilon + M.$$

Además, como
$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\|f_0 + Mg_0\|}{1+M} = 1,$$
podemos elegir el número real M de tal manera que la función $|f_0 + Mg_0|$ alcance su valor máximo sólamente dentro de U, ya que, en caso contrario,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\|f_0 + Mg_0\|}{1+M} \leq \lim_{M\to+\infty} \frac{\|f_0\| + Ms}{1+M} = s < 1,$$

lo cual es imposible. Por tanto, existe $x_1 \in U$ de forma que

$$\|f_0 + Mg_0\| = |(f_0 + Mg_0)(x_1)|.$$

Sea, por otra parte, $x_2 \in U$ tal que

$$\|g_0\| = |g_0(x_2)| = 1.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos escoger la función g_0 de forma que

$$|(f_0 + Mg_0)(x_2)| = |f_0(x_2)| + M|g_0(x_2)|.$$

Así,
$$\|f_0 + Mg_0\| \geq |(f_0 + Mg_0)(x_2)| \geq M + 1 - \epsilon.$$
En consecuencia,
$$\|Tf_0 + MTg_0\| \geq M + 1 - \epsilon.$$
A partir de la definición del conjunto I_{x_1} (cf. Lema 3.3.2), deducimos que
$$\|Tf_0 + MTg_0\| = |(Tf_0 + MTg_0)(y_1)| \geq M + 1 - \epsilon$$
para todo $y_1 \in I_{x_1}$. Como $|(Tg_0)(y)| \leq 1$ para todo $y \in Y$, resulta que

$$|(Tf_0)(y_1)| \geq 1 - \epsilon$$

para todo $y_1 \in I_{x_1}$.

A continuación probaremos que

$$|(Tf_0)(y_1)| \leq 1 + \epsilon$$

para todo $y_1 \in I_{x_1}$. Definamos la función

$$g_1 := \frac{f_0 + Mg_0}{\|f_0 + Mg_0\|}.$$

Es evidente que $|g_1(x_1)| = 1 = \|g_1\|$ y que $|g_1| < 1$ en $X \setminus U$. Como el conjunto $X^* \setminus U$ es compacto, podemos considerar la constante

$$r := \sup_{x \in X \setminus U} \{|g_1(x)|\} < 1.$$

Con el mismo razonamiento que hemos utilizado anteriormenre, podemos encontrar un escalar N de tal forma que la función $|f_0 + Ng_1|$ alcance su valor máximo en U y que

$$\|f_0 + Ng_1\| < 1 + \epsilon + |N|.$$

Además, y siempre razonando como antes, podemos elegir el escalar N de forma que

$$|(Tf_0 + NTg_1)(y_1)| = |(Tf_0)(y_1)| + |N||(Tg_1)(y_1)|.$$

En consecuencia, como $|(Tg_1)(y_1)| = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |N| + 1 + \epsilon &\geq \|Tf_0 + NTg_1\| \\ &\geq |(Tf_0 + NTg_1)(y_1)| \\ &= |(Tf_0)(y_1)| + |N|, \end{aligned}$$

es decir,

$$|(Tf_0)(y_1)| \leq 1 + \epsilon$$

para todo $y_1 \in I_{x_1}$.

Si ahora recopilamos la información obtenida hasta aquí, resulta claro que existe una red (x_α) en X convergente a x_0 y una red (y_α) en Y tal que $y_\alpha \in I_{x_\alpha}$ para todo índice α y que posee una subred (y_β) convergente a algún elemento $y_0 \in Y^*$ con $|(Tf_0)(y_0)| = 1$. Este último hecho prueba que

$$y_0 \neq \infty.$$

Además, es inmediato comprobar que, dado cualquier entorno abierto V de x_0, existe un término x_{β_0} de la red (x_β) y una función $g_{\beta_0} \in A$ tal que

$$|g_{\beta_0}(x_{\beta_0})| = 1 = \|g_{\beta_0}\|$$

y $|g_{\beta_0}| < 1$ en $X \setminus V$.

Por otra parte, sea $g \in A$ tal que $g(x_0) = 0$. A continuación probaremos que $(Tg)(y_0) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, definamos el conjunto

$$U_{g,\epsilon} := \{x \in X : |g(x)| < \epsilon\}.$$

Consideremos un entorno abierto V de x_0 tal que $V \subseteq U_{g,\epsilon}$. Entonces, por el párrafo anterior, existe un término x_{β_0} de la red (x_β) y una función $g_{\beta_0} \in A$ tal que

$$|g_{\beta_0}(x_{\beta_0})| = 1 = \|g_{\beta_0}\|$$

y $|g_{\beta_0}| < 1$ en $X \setminus V$. De igual manera que antes, existe un escalar P de tal forma que la función $|g + Pg_{\beta_0}|$ alcanza su valor máximo en V y

$$\|g + Pg_{\beta_0}\| < \epsilon + |P|.$$

Además, podemos elegir el escalar P de forma que

$$|(Tg + PTg_{\beta_0})(y_{\beta_0})| = |(Tg)(y_{\beta_0})| + |P||(Tg_{\beta_0})(y_{\beta_0})|$$

En consecuencia, como $|(Tg_{\beta_0})(y_{\beta_0})| = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |P| + \epsilon &\geq \|Tg + PTg_{\beta_0}\| \\ &\geq |(Tg + PTg_{\beta_0})(y_{\beta_0})| \\ &= |(Tg)(y_{\beta_0})| + |P|, \end{aligned}$$

es decir,

$$|(Tg)(y_{\beta_0})| \leq \epsilon.$$

Por tanto, como la red (y_β) converge a y_0, deducimos que $(Tg)(y_0) = 0$.

Consideremos ahora una función $l \in A$ tal que $|l(x_0)| = 1$. Definamos, a partir de l, la función

$$l' := \frac{f_0(x_0)}{l(x_0)} \cdot l$$

y sea una función $g \in A$ de tal forma que tal

$$l' = f_0 + g.$$

Es evidente que $g(x_0) = 0$. En consecuencia, $(Tg)(y_0) = 0$ y, como $|l'(x_0)| = 1$,

$$|(Tl')(y_0)| = |(Tf_0)(y_0) + (Tg)(y_0)| = 1$$

y, así, $|(Tl)(y_0)| = 1$.

Finalmente, si $f \in A$, entonces definimos la función

$$f' := \frac{f}{|f(x_0)|}.$$

Es claro que $|f'(x_0)| = 1$. Como consecuencia, tenemos que $|(Tf')(y_0)| = 1$ por el párrafo anterior, es decir,

$$|f(x_0)| = |(Tf)(y_0)|$$

y concluimos la prueba de este lema. □

Lema 3.3.4 *Sea A un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(X)$ y sea T una isometría entre A y $C_0(Y)$. Si x_0 es un punto frontera fuerte de A, entonces $V_{x_0} = I_{x_0}$.*

Demostración. Será suficiente probar que $I_{x_0} \subseteq V_{x_0}$ dado que la otra inclusión es evidente.

En primer lugar demostraremos que si $f \in A$ cumple $f(x_0) = 0$, entonces $(Tf)(y) = 0$ para todo $y \in I_{x_0}$. Supongamos que existe un elemento $y_0 \in I_{x_0}$ tal que $(Tf)(y_0) \neq 0$ y $f(x_0) = 0$ para alguna función $f \in A$. Asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $\|f\| = 1$ y $(Tf)(y_0) = \alpha > 0$. Sea

$$U = \{x \in X : |f(x)| \geq \alpha/2\}.$$

Como x_0 es un punto frontera fuerte de A y $y_0 \in I_{x_0}$, existe una función $g \in A$ tal que, multiplicando por una constante si es necesario, $|g(x_0)| =$

$1 = \|g\|$, $|g(x)| < 1$ para todo elemento $x \in U$ y $(Tg)(y_0) = 1$. Como U es, por la definición de $C_0(X)$, un conjunto compacto, podemos considerar

$$s := \sup_{x \in U}\{|g(x)|\} < 1.$$

Entonces existe un número real $M > 0$ tal que $1 + Ms < \alpha + M$. Consideremos dos casos: Si $x \in U$, entonces

$$|(f + Mg)(x)| \leq 1 + Ms.$$

Si $x \notin U$, entonces

$$|(f + Mg)(x)| \leq \alpha/2 + M.$$

En definitiva, resulta que $\|f + Mg\| < \alpha + M$, pero

$$\alpha + M = (Tf)(y_0) + (MTg)(y_0) \leq \|T(f + Mg)\|,$$

lo cual es absurdo por ser T una isometría.

Finalmente supongamos que existe un elemento $y' \in I_{x_0}$ tal que $|(Tf)(y')| \neq |f(x_0)|$ para alguna función $f \in A$. Como x_0 es un punto frontera fuerte de A, existirá una función $k \in A$ tal que $k(x_0) = 1 = \|k\|$. Entonces es inmediato comprobar que la función

$$l := f - f(x_0) \cdot k$$

pertenece a A y que, además,

$$l(x_0) = 0$$

y

$$(Tl)(y') = (Tf)(y') - f(x_0) \cdot (Tk)(y') \neq 0$$

puesto que $|(Tk)(y')| = 1$. Este hecho contradice el párrafo anterior. □

Lema 3.3.5 *([25]) Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Si cada subred de una cierta red $(x_\alpha) \subset \mathcal{X}$ tiene a su vez una subred que converge a $x \in \mathcal{X}$, entonces (x_α) converge a x.*

3.4 Isometrías entre subespacios.

Teorema 3.4.1 *Sea T una isometría entre un subespacio vectorial completamente separador A de $C_0(X)$ y $C_0(Y)$. Entonces existe un subconjunto Y_0 de Y que es una frontera de $T(A)$, una aplicación $h : Y_0 \longrightarrow \sigma_0 A$ continua y sobreyectiva, y una función continua $a : Y_0 \to \mathbf{K}$, tal que $|a(y)| = 1$ para todo $y \in Y_0$, y*

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \text{ para todo } y \in Y_0 \text{ y toda } f \in A.$$

Además, si $\sigma_0 A$ es compacto, entonces Y_0 es cerrado.

Demostración. Definamos en primer lugar el conjunto

$$Y_0 := \bigcup_{x \in \sigma_0 A} V_x.$$

El Lema 3.3.3 nos asegura que Y_0 es distinto del conjunto vacío. Para demostrar que Y_0 es una frontera de $T(A)$, consideremos una función $g \in T(A)$ y veamos que existe un punto $y_0 \in Y_0$ tal que $\|g\| = |g(y_0)|$. Sea $f \in A$ tal que $Tf = g$. Sea $x_0 \in \sigma_0 A$ tal que

$$|f(x_0)| = \|f\| = \|Tf\|.$$

Por el Lema 3.3.3, existe un elemento $y_0 \in V_{x_0} \subset Y_0$ tal que

$$\|f\| = \|Tf\| = |f(x_0)| = |Tf(y_0)|.$$

Definamos ahora la aplicación sobreyectiva $h : Y_0 \longrightarrow \sigma_0 A$ como

$$h(y) := x \quad si \ y \in V_x.$$

Como A es completamente separador, dados dos elementos distintos $x, x' \in \sigma_0 A$, es inmediato comprobar que

$$V_x \cap V_{x'} = \emptyset.$$

De esta forma queda probado que la aplicación h está bien definida. Además, como $V_x \neq \emptyset$ para todo $x \in \sigma_0 A$, deducimos que h es también sobreyectiva.

Para probar la continuidad de la aplicación h, supongamos que $h(y_0) = x_0$ para algún $y_0 \in Y_0$. Sea $f \in A$ tal que $f(x_0) = 1$. Por tanto,

$$|(Tf)(y_0)| = 1.$$

Consideremos ahora una red (y_α) en Y_0 convergente a y_0 y tal que

$$h(y_\alpha) = x_\alpha$$

para todo índice α. Como $|(Tf)(y_0)| = 1$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$||(Tf)(y_\alpha)| - 1| < \frac{1}{2}$$

para todo índice α. Entonces, por la definición de V_{x_α} (cf. Nota 3.3.1), resulta que

$$|f(x_\alpha)| > \frac{1}{2}$$

para todo índice α. Sea (x_β) una subred de (x_α) convergente a un cierto x_1 en el compacto X^*. En consecuencia,

$$|f(x_1)| \geq \frac{1}{2}.$$

Este hecho nos asegura que $x_1 \neq \infty$ pues $f \in C_0(X)$. Si $x_1 \neq x_0$, entonces podemos tomar una función $g \in A$ de forma que

$$|g(x_0)| = 1 \neq s = |g(x_1)|.$$

Sea (y_γ) una subred de (y_β) tal que

$$||(Tg)(y_\gamma)| - |(Tg)(y_0)|| < \frac{|1-s|}{2}.$$

Por tanto

$$||g(h(y_\gamma))| - 1| < \frac{|1-s|}{2}$$

y la red $(|g(x_\gamma)|)$ no converge a $|g(x_1)|$, lo cual es una contradicción. Así pues, la continuidad de h es consecuencia del Lema 3.3.5.

A continuación definamos la aplicación a entre Y_0 y $\mathbf{K}$ como sigue: dado $y \in Y_0$, sea f cualquier función A tal que $f(h(y)) = 1$. Entonces definimos

$$a(y) := (Tf)(y)$$

para todo $y \in Y_0$. Esta aplicación está bien definida ya que si tomamos otra función g de A tal que $g(h(y)) = 1$, entonces $(f - g)(h(y)) = 0$ y, por la definición de h, resulta que $(Tf)(y) = (Tg)(y)$.

Por otra parte, es obvio que $|a(y)| = 1$ para todo $y \in Y_0$.

Probaremos ahora que la aplicación T puede escribirse como una aplicación composición con peso y, como consecuencia, obtendremos la continuidad de a. Ya hemos demostrado que si $y \in Y_0$, $f \in A$ y $f(h(y)) = 0$, entonces $(Tf)(y) = 0$. Si suponemos que $f(h(y)) \neq 0$ para alguna función $f \in A$ y algún $y \in Y_0$, entonces consideramos la función

$$g := f - f(h(y))k$$

siendo k cualquier función A que cumpla $k(h(y)) = 1$. Claramente, $g(h(y)) = 0$. Así pues, $(Tg)(y) = 0$, lo cual implica que

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)).$$

Para obtener la continuidad de la función a, demostraremos que para cada $y \in Y_0$, existe un entorno abierto de y donde a es continua. Consideremos cualquier función $f \in A$ tal que $f(h(y)) \neq 0$ y sea

$$W := \{x \in \sigma_0 A : f(x) \neq 0\}.$$

Es evidente que el conjunto $h^{-1}(W)$ es un entorno abierto de y. Además, la función

$$\frac{Tf}{f \circ h}$$

es continua en $h^{-1}(W)$ y ambas funciones, a y $Tf/(f \circ h)$, coinciden en $h^{-1}(W)$.

Finalmente, supongamos que $\sigma_0 A$ es un conjunto compacto y sea un elemento $y_0 \in Y$ tal que existe una red (y_α) en Y_0 que converge a y_0.

Para todo índice α, tenemos que y_α pertenece a V_{x_α} (cf. Lema 3.3.3) con $h(y_\alpha) = x_\alpha \in \sigma_0 A$. Por tanto, la red arriba citada tiene una subred (x_β) que converge a algún punto $x_0 \in \sigma_0 A$. Como quiera que

$$|f(x_\beta)| = |(Tf)(y_\beta)|$$

para todo índice β y toda función $f \in A$, deducimos, por la continuidad de las funciones f y Tf, que

$$|f(x_0)| = |(Tf)(y_0)|$$

para toda $f \in A$, es decir, $y_0 \in V_{x_0} \subset Y_0$. □

Nota 3.4.1 El Teorema 3.4.1 generaliza el Teorema de Holsztyński si asumimos que el espacio X es compacto y $A = C(X)$. Recordemos que W. Holsztyński ([40]) probó que si existe una isometría lineal T entre $C(X)$ y $C(Y)$ (X e Y compactos), entonces podemos encontrar un subconjunto cerrado Y_0 de Y, una aplicación h continua y sobreyectiva entre Y_0 y X y una aplicación continua $a : Y_0 \to \mathbf{K}$, $|a| \equiv 1$, de forma que

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \text{ para todo } y \in Y_0 \text{ y toda } f \in C(X).$$

Corolario 3.4.1 *Con la mismas hipótesis que el Teorema 3.4.1, el rango de la aplicación h restringida a $Ch(T(A))$ es $Ch(A)$.*

Demostración. Por el Teorema 1 de [7], sabemos que la frontera de Choquet de A esta contenida en ∂A. Por otra parte, para cada punto x de $Ch(A)$, existe una función $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$ y, por tanto,

$$Ch(A) \subset \sigma_0 A.$$

Consideremos la isometría sobreyectiva

$$T^{-1} : T(A) \to A.$$

Sea $(T^{-1})' : A' \to (T(A))'$ la aplicación adjunta de T^{-1} (cf. sección 0.2), es decir,

$$(T^{-1})'(L)(f) := L((T^{-1})(f))$$

para todo funcional $L \in A'$ y toda función $f \in T(A)$. Es conocido (cf. [23]) que $(T^{-1})'$ es una isometría sobreyectiva y que

$$(T^{-1})'(ex(V[A])) = ex(V[T(A)]).$$

Por tanto, si $x \in ChA$, entonces

$$(T^{-1})'x^t = \mu y^t,$$

donde $\mu \in \mathbf{K}$, $|\mu| = 1$ and $y \in Y$. Así pues, si $f \in A$,

$$\begin{aligned}
|(Tf)(y)| &= |\mu(Tf)(y)| \\
&= \left|\mu y^t(Tf)\right| \\
&= \left|((T^{-1})'x^t)(Tf)\right| \\
&= |f(x)|.
\end{aligned}$$

En definitiva, $y \in V_x$ y de esa forma tenemos que $Ch(A) \subset h(Ch(T(A)))$.

La otra inclusión se prueba de forma análoga teniendo en cuenta que $(T^{-1})'$ es una biyección. □

Nota 3.4.2 Es evidente, a partir del Corolario 3.4.1, que el Teorema 3.4.1 extiende el Teorema de Novinger ([51], Teorema 1). Recordemos que W.P. Novinger demostró que si existe una isometría lineal T entre un subespacio vectorial A de $C(X)$, que es separador y contiene las funciones constantes, y $C_0(Y)$, entonces existe una aplicación continua h continua y sobreyectiva entre $Ch(T(A))$ y $Ch(A)$ y una aplicación continua $a : Ch(T(A)) \longrightarrow \mathbf{K}$, $|a| \equiv 1$, de forma que

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \text{ para todo } y \in Ch(T(A)) \text{ y todo } f \in A.$$

Teorema 3.4.2 *Sea T una isometría entre un subespacio vectorial completamente separador A de $C_0(X)$ y $C_0(Y)$. Entonces*

$$Tf = E(a \cdot (f \circ h)),$$

donde h es una aplicación continua y sobreyectiva definida entre un subconjunto Y_0 de Y y $\sigma_0 A$, $a : Y_0 \to \mathbf{K}$ es una aplicación continua tal que $|a| \equiv 1$, $Z := \{a \cdot (f \circ h) : f \in A\}$ y $E : Z \to C_0(Y)$ es una extensión continua y lineal que conserva la norma.

Demostración. Sean a, h, y Y_0 como en el Teorema 3.4.1. Definamos $Eg := Tf$ siendo $g = a \cdot (f \circ h)$ para algún $f \in A$. Es fácil comprobar que ésta es la extensión que buscamos. □

3.5 El caso sobreyectivo.

Teorema 3.5.1 *Sea T una isometría sobreyectiva entre un subespacio vectorial completamente separador A de $C_0(X)$ y otro subespacio vectorial completamente separador B de $C_0(Y)$. Entonces existe un homeomorfismo h sobreyectivo entre $\sigma_0 B$ y $\sigma_0 A$ y una aplicación continua $a : \sigma_0 B \to \mathbf{K}$ tal que $|a(y)| = 1$ para todo $y \in \sigma_0 B$, y*

$$(Tf)(y) = a(y) f(h(y)) \text{ para todo } y \in \sigma_0 B \text{ y toda } f \in A.$$

Demostración. Consideremos la aplicación h y el conjunto Y_0 que aparecen en el Teorema 3.4.1. En primer lugar probaremos que la aplicación h es ahora inyectiva. Para ello, basta comprobar que los conjuntos del tipo V_x están formados por un único elemento. Supongamos que y_0, y_1 son dos elementos distintos de V_x, para algún $x \in \sigma_0 A$. Entonces

$$|(Tf)(y_0)| = |(Tf)(y_1)| = |f(x)|$$

para toda función $f \in A$, lo cual contradice el hecho que B es completamente separador.

A continuación probaremos que $Y_0 = \sigma_0 B$. Sea $y_0 \in Y_0$. Entonces existe un $x_0 \in \sigma_0 A$ tal que

$$x_0 = h(y_0).$$

Sea U un entorno abierto de y_0. Por la forma en que hemos obtenido y_0 (cf. Lema 3.3.3), sabemos que existe un conjunto del tipo I_x, para algún

$x \in X$, contenido en U. Esto quiere decir, según la definición de I_x (cf. Lema 3.3.2), que

$$\bigcap_{f \in C_x} L(f) \subset U,$$

es decir,

$$\left(\bigcap_{f \in C_x} L(f)\right) \cap (X^* \setminus U) = \emptyset.$$

Tenemos una intersección de cerrados cuya intersección con el compacto $X^* \backslash U$ es vacía. Así pues, existe un cantidad finita de funciones $\{f_1, ..., f_n\} \subset C_x$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{n} L(f_i) \subset U.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\|f_i\| = f_i(x) = 1, \qquad i = 1, ..., n.$$

Entonces la función $f := \sum_{i=1}^{n} f_i$ satisface $f(x) = n$. En consecuencia,

$$|(Tf)(y)| < \|Tf\| = n$$

para todo $y \notin U$, con lo que se demuestra que $y_0 \in \sigma_0 B$.

Recíprocamente, probaremos que $\sigma_0 B \subset Y_0$. Sea $y_0 \in \sigma_0 B$. Consideremos la aplicación inversa, T^{-1}, de T. La aplicación T^{-1} es, por supuesto, una isometría sobreyectiva entre B y A. Entonces, por el Teorema 3.4.1, existe una aplicación k continua y sobreyectiva definida entre un subconjunto X_0 de X y $\sigma_0 B$. Concretamente,

$$X_0 := \bigcup_{y \in \sigma_0 B} V_y.$$

De la misma forma que en el párrafo anterior, deducimos que

$$X_0 \subset \sigma_0 A.$$

Consideremos el elemento x_0 de X_0 tal que $k(x_0) = y_0$. Es suficiente, por tanto, probar que $y_0 \in V_{x_0}$. Sabemos que, para todo $g \in B$,

$$\left|(T^{-1}g)(x_0)\right| = |g(y_0)|,$$

es decir, para todo $f \in A$, resulta que

$$|(Tf)(y_0)| = |f(x_0)|.$$

En consecuencia,

$$h(y_0) = x_0.$$

Así pues, la aplicación h resulta ser un homeomorfismo sobreyectivo entre $\sigma_0 B$ y $\sigma_0 A$. Finalmente, como en el Teorema 3.4.1, se prueba que T es una aplicación composición con peso. $\square$

Corolario 3.5.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 3.5.1, las fronteras de Choquet de A y B son homeomorfas.*

Demostración. Por el Teorema 3.5.1 y el Corolario 3.4.1, tenemos que h es un homeomorfismo sobreyectivo entre $Ch(B)$ y $Ch(A)$. $\square$

Nota 3.5.1 1. Sea T la inmersión isométrica usual de $C_0(\mathbf{N})$ en $C(\mathbf{N}^*)$. Este ejemplo muestra que, en el Teorema 3.4.1, el conjunto Y_0 puede no ser cerrado, a diferencia del conjunto análogo que aparece en el Teorema de Holsztyński. El mismo ejemplo sirve para demostrar que, en el Teorema 3.5.1, las fronteras de Shilov de A y B no son, en general, homeomorfas. Sin embargo, si asumimos que A (resp. B) es un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(X)$ (resp. $C_0(Y)$) tal que

$$\{x \in X \text{ (resp. } Y) : \ f(x) = 0 \text{ para toda } f \in A \text{ (resp. } B)\} = \emptyset,$$

entonces es evidente, por la definición de $\sigma_0 A$ (resp. $\sigma_0 B$) y por el Lema 3.3.1, que sus fronteras de Shilov son homeomorfas.

2. El siguiente ejemplo demuestra que esta última afirmación puede ser falsa si A es un subespacio vectorial separador pero no completamente separador. Definamos el siguiente conjunto compacto:

$$X := \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{-1, 1\}$$

y sea A' el conjunto formado por todas las funciones $f_n \in C(X)$, $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, definidas como sigue:

si n es par,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 - \frac{1}{n} \\ -1 + \frac{1}{n} & \text{si } x = -1 + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si n es impar,

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = -1 + \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } x = 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado $x \in X$ (resp. $x \in Y$), denotaremos por ξ_x la función característica del conjunto $\{x\}$. Definamos a continuación una función $f \in C(X)$ del siguiente modo:

$$f(x) := (\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)) + \xi_1 + \xi_{-1}$$

Sea entonces A el subespacio vectorial generado por A' y la función f.

Por otra parte, definamos el conjunto compacto

$$Y := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$$

y la función $g \in C(Y)$ como sigue:

$$g(x) := (\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{\frac{1}{n}}) + \xi_0$$

Sea entonces B el subespacio vectorial generado por el conjunto $\{\xi_{\frac{1}{n}} : n \in \mathbf{N}\}$ y la función g.

Es fácil verificar que A es un subespacio vectorial separador de $C(X)$, pero no es completamente separador. Además, la aplicación T definida como $Tf_n := \xi_n$ para $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ y $T(f) := g$ puede extenderse por linealidad a una isometría biyectiva entre A y B.

Sin embargo,

$$\partial A = \{1 - \frac{1}{n} : n \text{ par}\} \cup \{-1 + \frac{1}{n} : n \text{ impar}\} \cup \{-1, 1\}$$

no es homeomorfo a $\partial B = Y$.

3. Las condiciones exigidas en el Teorema 3.5.1 no son suficientes para asegurar que X sea homeomorfo a Y. Como ejemplo, consideremos la isometría T definida entre $C_0(X) = C_0((0,1))$ y $C_0(Y) = C_0((0,1) \cup (1,2))$ del siguiente modo:

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (0,1) \\ \frac{f(x-1)}{2} & \text{si } x \in (1,2) \end{cases}$$

Claramente, X no es homeomorfo a Y puesto que Y no es conexo.

Corolario 3.5.2 *Sean T, X, Y, A y B como en el Teorema 3.5.1. Si además asumimos que τA o τB es un conjunto no vacío, entonces τA y τB son homeomorfos.*

Demostración. En primer lugar, suponiendo que $\tau A \neq \emptyset$, definamos el conjunto

$$Y_{00} := \bigcup_{x \in \tau A} V_x.$$

Por la definición de la aplicación h (cf. demostración del Teorema 3.4.1) y puesto que es inyectiva (cf. Teorema 3.5.1), deducimos que

$$h(Y_{00}) = \tau A.$$

Por tanto, en virtud del Teorema 3.5.1, es suficiente comprobar que $Y_{00} = \tau B$. Sea $y_0 \in Y_{00}$. Existe un $x_0 \in \tau A$ tal que $x_0 = h(y_0)$. Sea U un entorno abierto de y_0. Si $y \notin U$, entonces $y \notin V_{x_0}$. Recordemos que, por el Lema 3.3.4, se cumple $V_{x_0} = I_{x_0}$. Así pues, por el Lema 3.3.2, existe una función $f_y \in A$ de forma que

$$1 = f_y(x_0) = \|f_y\|$$

y

$$|(Tf_y)(y)| < 1.$$

Para cada elemento $y \in Y^* \setminus U$, tomamos un entorno abierto U_y de y tal que

$$|(Tf_y)(y')| < 1$$

para todo $y' \in U_y$. Como $Y^* \setminus U$ es un conjunto compacto, podemos encontrar $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y^* \setminus U$ de tal forma que

$$Y^* \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

A continuación, definamos la aplicación

$$g := \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{y_i}}{n}.$$

Claramente,

$$1 = g(x_0) = \|g\|$$

y

$$1 = |(Tg)(y_0)| = \|Tg\|.$$

Además, $|(Tg)(y)| < 1$ para todo $y \in Y \setminus U$. En consecuencia, los elementos del conjunto Y_{00} son puntos frontera fuerte de B.

Recíprocamente, sea $y_0 \in \tau B$. Razonando como en el párrafo anterior, se prueba que $X_{00} \subset \tau A$, siendo

$$X_{00} := \bigcup_{y \in \tau B} V_y.$$

Así, existe un $x_0 \in \tau A$ tal que $k(x_0) = y_0$, donde k es la aplicación inversa de h (cf. Teorema 3.5.1). Es decir,

$$y_0 \in V_{x_0} \subset Y_{00}$$

y el corolario queda probado. $\square$

El próximo corolario extiende el siguiente resultado de Myers ([49]) a espacios no necesariamente compactos y a funciones que pueden tomar valores complejos:

Si asuminos que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, entonces una condición suficiente para que X y Y sean homeomorfos es que un subespacio vectorial completamente regular de $C(X)$ y otro de $C(Y)$ sean linealmente isométricos. Recordemos que un subespacio vectorial cerrado A de $C_0(X)$ es completamente regular si cada $x \in X$ es un punto frontera fuerte de A, i.e., $\tau A = X$.

Corolario 3.5.3 *Sea T una isometría sobreyectiva entre un subespacio vectorial completamente regular A de $C_0(X)$ y otro subespacio completamente regular B de $C_0(Y)$. Entonces existe un homeomorfismo h entre Y y X y una aplicación continua $a : Y \to \mathbf{K}$, tal que $|a(y)| = 1$ para todo $y \in Y$, y*

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \text{ para todo } y \in Y \text{ y toda } f \in A.$$

Demostración. Es evidente, a partir de la definición de subespacio completamente regular, que $\sigma_0 A = X$ y $\sigma_0 B = Y$. Este corolario es, pues, consecuencia directa del Teorema 3.5.1. □

Nota 3.5.2 La isometría que aparece en el Corolario 3.5.3 tiene una única extensión a una isometría sobreyectiva definida entre $C_0(X)$ y $C_0(Y)$.

3.6 Subespacios como espacios cocientes.

Corolario 3.6.1 *Sea T una isometría entre un subespacio vectorial completamente separador A de $C_0(X)$ y $C_0(Y)$. Entonces $\sigma_0 A$ es homeomorfo a un cociente de un subespacio Y_0 de Y.*

Demostración. Con la misma notación que en el Teorema 3.4.1, definiremos la siguiente relación de equivalencia en Y_0: $y_0 \sim y_1$ si y_0, y_1 pertenece al mismo conjunto V_x (cf. Definición 3.3.1), para algún $x \in \sigma_0 A$. Si π denota la aplicación cociente natural entre Y_0 y $(Y_0/\sim)$, entonces la aplicación

$$h^{\sim} = h \circ \pi^{-1}$$

es una biyección entre $(Y_0/\sim)$ y $\sigma_0 A$. Además, $h^{\sim}$ es continua por serlo $h^{\sim} \circ \pi = h$ (cf. [25], 2.4.2).

Para probar la continuidad de $(h^{\sim})^{-1}$, consideremos una red (x_α) en $\sigma_0 A$ convergente a $x_0 \in \sigma_0 A$. Para cada índice α, elijamos un punto $y_\alpha \in V_{x_\alpha}$. Claramente existe una subred (y_β) de (y_α) convergente a un punto $y_0 \in Y^*$. Consideremos cualquier función $f \in A$. Entonces la red $(|f(x_\beta)|)$ converge a $|f(x_0)|$ y la red $|(Tf)(y_\beta)|$ converge a $|(Tf)(y_0)|$. Como

$$|(Tf)(y_\beta)| = |f(x_\beta)|$$

para todo índice β, tenemos que

$$|f(x_0)| = |(Tf)(y_0)|$$

para todo $f \in A$, es decir,

$$y_0 \in V_{x_0}.$$

Por tanto, como $\pi(y_\beta) = (h^\sim)^{-1}(x_\beta)$, $\pi(y_0) = (h^\sim)^{-1}(x_0)$ y la red $(\pi(y_\beta))$ converge a $\pi(y_0)$, resulta que $((h^\sim)^{-1}(x_\beta))$ converge a $(h^\sim)^{-1}(x_0)$. De esta forma, cada subred de $((h^\sim)^{-1}(x_\alpha))$ tiene una subred convergente a $(h^\sim)^{-1}(x_0)$. Así pues, $((h^\sim)^{-1}(x_\alpha))$ converge a $(h^\sim)^{-1}(x_0)$. En consecuencia, la aplicación $(h^\sim)^{-1}$ es continua.

$\square$

3.7 Isometrías entre subálgebras.

Teorema 3.7.1 *Sea T una isometría sobreyectiva entre una subálgebra separadora A de $C_0(X)$ y una subálgebra separadora B de $C_0(Y)$. Si para todo $x \in X$ (resp. $y \in Y$) existe $f \in A$ (resp. $g \in B$) tal que $f(x) \neq 0$ (resp. $g(y) \neq 0$), entonces*

1.– *∂A es homeomorfo a ∂B*

2.– *Existe una aplicación continua $b : Y \to \mathbf{K}$ tal que*

$$T(fg)(y) = b(y)(Tf)(y)(Tg)(y) \textit{ para todo } y \in Y \textit{ y todo } f, g \in A.$$

Demostración. 1.– En virtud del Teorema 3.5.1, será suficiente probar que A es completamente separadora. Sean $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$. Existe entonces una función $f \in A$ de forma que $f(x_1) = z_1$ y $f(x_2) = z_2$ siendo $z_1 \neq z_2$. Si $|z_1| = |z_2|$, entonces consideremos la función $g := f + f^2 \in A$. En ese caso,

$$g(x_1) = z_1(1 + z_1)$$

y

$$g(x_2) = z_2(1 + z_2).$$

Sin pérdida de generalidad, asumiremos que la parte real de z_1, Re z_1, y Re z_2 son ambos números (reales) diferentes. Así pues,

$$\begin{aligned} |g(x_1)|^2 &= |z_1|^2 |1 + z_1|^2 \\ &= |z_1|^2 (1 + z_1)\overline{(1 + z_1)} \\ &= |z_1|^2 (1 + z_1 + \overline{z_1} + |z_1|^2) \\ &= |z_1|^2 \left|1 + 2\mathrm{Re}\, z_1 + |z_1|^2\right| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |g(x_2)|^2 &= |z_2|^2 |1 + z_2|^2 \\ &= |z_2|^2 (1 + z_2)\overline{(1 + z_2)} \\ &= |z_2|^2 (1 + z_2 + \overline{z_2} + |z_2|^2) \\ &= |z_2|^2 \left|1 + 2\mathrm{Re}\, z_2 + |z_2|^2\right| \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que $|g(x_1)| \neq |g(x_2)|$ y, en consecuencia, A es un subespacio vectorial completamente separador de $C_0(X)$.

2.– Sabemos, por el Teorema 3.5.1, que

$$a(y)T(fg)(y) = (Tf)(y)(Tg)(y)$$

para cualquier $f, g \in A$ y todo $y \in \partial B$. En consecuencia, si b denota el conjugado complejo de la función a, resulta que

$$T(fg)(y) = b(y)(Tf)(y)(Tg)(y)$$

para todo $y \in \partial B$ y cualquier $f, g \in A$.

Sea $y_0 \in Y \setminus \partial B$ y sea una función $f \in A$ tal que $(Tf)(y_0) = 0$. Tengamos en cuenta que las funciones

$$T(fg)(Tk)(Tk)$$

y

$$(Tk^2)(Tf)(Tg)$$

coinciden en ∂B, siendo $k \in A$ cualquier función que verifique $(Tk)(y_0) \neq 0$. De esta forma, por la propia definición de frontera de Shilov, resulta que ambas funciones coinciden en Y y, en consecuencia, tenemos que

$$T(fg)(y_0) = 0$$

para toda función $g \in A$.

Para extender la función b de ∂B a Y, tomemos, para cada $y \in Y \backslash \partial B$, dos funciones cualesquiera f, g de A tales que $(Tf)(y) \neq 0$ y $(Tg)(y) \neq 0$. Teniendo esto en cuenta, definimos

$$b(y) := \frac{T(fg)(y)}{(Tf)(y)(Tg)(y)}.$$

Esta extensión de la función b a todo el conjunto Y está bien definida: si consideramos dos funciones $k, l \in A$, con $(Tk)(y) \neq 0$ y $(Tl)(y) \neq 0$, entonces

$$T(fg)(Tk)(Tl)$$

y

$$(Tf)(Tg)T(kl)$$

coinciden en ∂B y, por tanto, en Y. La continuidad de b es consecuencia de la continuidad de la funciones $T(fg)$, Tf y Tg en un entorno abierto de cada $y \in Y$. □

Teorema 3.7.2 *Sean A y B dos álgebras de Banach, semisimples y conmutativas (no necesariamente con unidad), tal que $\|f\|^2 = \|f^2\|$ para toda función $f \in A$ (resp. $f \in B$). Si T es una isometría (resp. sobreyectiva) entre A y B, entonces existe una aplicación continua y sobreyectiva (resp. un homeomorfismo sobreyectivo) h definida entre un subconjunto Y_0 del espacio de los ideales maximales Y de B (resp. la frontera de Shilov de B, ∂B) y la frontera de Shilov, ∂A, de A y una función continua $a : Y_0 \to \mathbf{K}$ (resp. $a : \partial B \to \mathbf{K}$) con $|a(y)| = 1$ para todo $y \in Y_0$) (resp. $y \in \partial B$) y*

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)) \text{ para todo } y \in Y_0 \text{ (resp. } \partial B) \text{ y toda } f \in A.$$

Demostración. Como $\|f\|^2 = \|f^2\|$ para cualquier $f \in A$ (resp. $f \in B$), resulta que la transformada de Gelfand es una isometría entre A (resp. B) y $C_0(X)$ (resp. $C_0(Y)$), donde X (resp. Y) es el espacio de los ideales maximales de A (resp. B). Como son semisimples, podemos considerar A y B como subálgebras separadoras de $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ respectivamente. El resto de la prueba es consecuencia directa de los Teoremas 3.4.1 y 3.5.1.

□

Corolario 3.7.1 (Nagasawa, [50]). *Sean A y B dos álgebras de Banach, semisimples, conmutativas y con unidad tal que $\|f\|^2 = \|f^2\|$ para cualquier $f \in A$ (resp. $f \in B$). Entonces A y B son isométricas como espacios de Banach si y sólo si son isomorfas como álgebras.*

Demostración. Como en el Teorema anterior, podemos considerar A y B como subálgebras separadoras de $C(X)$ y $C(Y)$, donde X e Y representan el espacio de los ideales maximales de A y B respectivamente. Debido a que A y B tienen unidad, tenemos que X e Y son espacios compactos. Por el mismo motivo, es obvio que la función peso a que estudiamos en la prueba del Teorema 3.7.1 resulta ser $T1$. Es decir, $a = T1$ pertenece a B. Además, puesto que T es una aplicación sobreyectiva, existe una función $f \in A$ de forma que $Tf = 1$.

Finalmente, por el Teorema 3.7.1, deducimos que $b = a^{-1}$ pertenece a B y que $b \cdot T$ es el isomorfimo de álgebras que estamos buscando.

El recíproco es inmediato. □

Nota 3.7.1 Como corolario inmediato del Teorema 3.7.2, deducimos, por ejemplo, que la frontera de Shilov de H^∞ (el álgebra de Banach formada por las funciones analíticas y acotadas en el disco unidad) es homeomorfa a la frontera de Shilov de la subálgebra H_0^∞ de H^∞, formada por las funciones que se anulan en el origen: basta considerar la isometría sobreyectiva $f \hookrightarrow z \cdot f$ definida entre H^∞ y H_0^∞. Nótese que H_0^∞ es en realidad el conjunto $\{z \cdot f : f \in H^\infty\}$ donde z denota la identidad en el disco unidad.

Este ejemplo demuestra, además, que existen álgebras de Banach semisimples y conmutativas (H^{∞} y H_0^{∞}) que son isométricas como espacios de Banach, pero no son isomorfas como álgebras, puesto que H_0^{∞} no tiene función identidad. En consecuencia, en nuestro contexto no podemos obtener un teorema análogo al Teorema de Nagasawa dado para álgebras con unidad (cf. Corolario 3.7.1).

Capítulo 4

Isometrías lineales con codimensión 1.

4.1 Introducción.

En este capítulo nos centraremos en aquellas isometrías lineales definidas sobre álgebras uniformes cuyos rangos tienen codimensión 1, es decir, en cierto pueden considerarse como "casi" sobreyectivas.

Salvo mención de lo contrario, X denotará un espacio compacto en todo el capítulo. Recordemos que un *álgebra uniforme* A (sobre el espacio compacto X) es una subálgebra cerrada de $C(X)$ que separa los puntos de X y que contiene las funciones constantes de $C(X)$. Por el Teorema 3.7.1, un álgebra uniforme es completamente separadora.

En primer lugar probaremos que todo subespacio vectorial de un álgebra uniforme A con codimensión 1 separa completamente los puntos de X (cf. Sección 3.2) salvo, a lo sumo, dos. Este resultado junto con los Teoremas 3.4.1 y 3.5.1 nos permitirá clasificar las isometrías lineales $T : A \longrightarrow A$ con codimensión 1 como sigue:

Tipo I. El rango de T separa completamente todos los elementos de ∂A excepto dos.

Tipo II. El rango de T separa completamente todos los puntos de

∂A, y existe un elemento $x_0 \in \partial A$ de forma que $f(x_0) = 0$ para toda función $f \in T(A)$.

Tipo III. El rango de T separa completamente todos los puntos de ∂A, y para cada punto $x \in \partial A$, existe una función $f \in T(A)$ de forma que $f(x) \neq 0$.

El resto del capítulo lo dedicaremos a analizar esta clasificación. Así pues, demostraremos que las isometrías de Tipo I son aquellas tales que ∂A coincide con cierta frontera cerrada de $T(A)$. Por otra parte, probaremos que si T es una isometría de tipo II, entonces existe un elemento x_0 de ∂A tal que $\partial T(A) = \partial A \setminus \{x_0\}$. Propondremos también varios ejemplos de isometrías con codimensión 1 de cada uno de los tipos de la clasificación que hemos propuesto.

4.2 Clasificación de las isometrías lineales con codimensión 1.

Proposición 4.2.1 *Sea A un álgebra uniforme. Si B es un subespacio vectorial de A con codimensión* 1 *en A, entonces B separa completamente los puntos de X salvo, a lo sumo, dos.*

Demostración. Como A es un álgebra uniforme, A separa los puntos de X, es decir, dados dos elementos de X, x_1 y x_2, existirá una función $f \in A$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Consideremos a continuación la siguiente función de A:

$$g := f - f(x_1) \cdot 1.$$

Es inmediato comprobar que $g(x_1) = 0$ and $g(x_2) \neq 0$. En consecuencia podemos asumir que existe una función $g \in A$ tal que $g(x_1) = 0$ y $g(x_2) = 1$.

Paso 1. Supongamos que existen dos elementos de X, x_1 y x_2, que no pueden separarse completamente con funciones de B. Consideremos un tercer elemento de X, x_3. Demostraremos en lo que sigue que existe una función en B que separa completamente el punto x_3 de los puntos x_1 y x_2.

Con ese objetivo, consideremos tres funciones en A, f_1, f_2 y f_3, de forma que

$$f_1(x_1) = 1 \text{ y } f_1(x_i) = 0 \text{ para } i = 2, 3.$$

$$f_2(x_2) = 1 \text{ y } f_2(x_i) = 0 \text{ para } i = 1, 3.$$

$$f_3(x_3) = 1 \text{ y } f_3(x_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2.$$

Es fácil demostrar que el álgebra uniforme A dispone de estas funciones puesto que, por ejemplo, existen $h_2, h_3 \in A$ de manera que

$$h_2(x_1) = 1,$$

$$h_3(x_1) = 1,$$

$$h_2(x_2) = 0,$$

$$h_3(x_3) = 0.$$

Por tanto es suficiente definir $f_1 := h_2 \cdot h_3$. De forma análoga se procede con f_2 y f_3.

Por otra parte, es obvio que ni f_1 ni f_2 pertenecen a B porque x_1 y x_2 no pueden separarse completamente con funciones de B. En consecuencia, si f_3 pertenece a B, el paso 1 queda probado puesto que ya podríamos separar completamente x_3 de x_1 y x_2.

Asumiremos, por tanto, que $f_3 \notin B$. Si consideramos tres escalares β_1, β_2 y β_3 tal que

$$\beta_1 \cdot f_1 + \beta_2 \cdot f_2 + \beta_3 \cdot f_3 \equiv 0,$$

entonces $\beta_1 \cdot f_1(x_1) = 0$, $\beta_2 \cdot f_2(x_2) = 0$, y $\beta_3 \cdot f_3(x_3) = 0$, i.e., $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. En consecuencia, las funciones f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes. Por tanto, como la codimensión de B es 1, existirán dos escalares no nulos, α_1 y α_2, de forma que

$$(\alpha_1 \cdot f_1 + f_3) \in B,$$

y

$$(\alpha_2 \cdot f_2 + f_3) \in B.$$

Así pues, como resulta que

$$(\alpha_1 \cdot f_1 + f_3)(x_3) = 1,$$

$$(\alpha_1 \cdot f_1 + f_3)(x_2) = 0,$$

$$(\alpha_2 \cdot f_2 + f_3)(x_3) = 1$$

y

$$(\alpha_2 \cdot f_2 + f_3)(x_1) = 0,$$

deducimos que el punto x_3 puede separarse completamente de x_1 y x_2 con funciones de B.

Paso 2. Sean x_1 y x_2 como en el paso anterior. Consideremos ahora dos elementos de X, x_3 y x_4, que sean distintos de x_1 y x_2. En lo que sigue, probaremos que x_3 y x_4 pueden separarse completamente con funciones de B.

Con este objetivo, consideremos tres funciones de A, g_1, g_3 y g_4, de tal manera que

$$g_1(x_1) = 1 \text{ y } g_1(x_i) = 0 \text{ para } i = 2, 3, 4.$$

$$g_3(x_3) = 1 \text{ y } g_3(x_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, 4.$$

$$g_4(x_4) = 1 \text{ y } g_4(x_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Dichas funciones se construyen con el mismo razonamiento utilizado en el paso 1 para la construcción de las funciones f_1, f_2 y f_3. Si g_3 o g_4 fuesen elementos de B, entonces habríamos terminado puesto que los puntos x_3 y x_4 ya podrían separarse completamente con funciones de B.

Asumamos, por tanto, que estas dos funciones no pertenecen a B. Como los puntos x_1 y x_2 no se pueden separar completamente con funciones de B, entonces la función g_1 tampoco pertenece a B. Además, como en el paso 1, es inmediato comprobar que las funciones g_1, g_3 y g_4 son linealmente independientes. Por tanto, como la codimensión de B es 1, existen dos escalares no nulos β_1 and β_2 de forma que

$$(\beta_1 \cdot g_1 + g_3) \in B,$$

y

$$(\beta_2 \cdot g_1 + g_4) \in B.$$

En consecuencia, y debido a que

$$(\beta_1 \cdot g_1 + g_3)(x_3) = 1,$$

$$(\beta_1 \cdot g_1 + g_3)(x_4) = 0,$$

$$(\beta_2 \cdot g_1 + g_4)(x_4) = 1$$

y

$$(\beta_2 \cdot g_1 + g_4)(x_3) = 0,$$

deducimos que los puntos x_3 y x_4 pueden separarse completamente con funciones de B, con lo cual concluimos el paso 2. □

Nota 4.2.1 Sea A un álgebra uniforme. Si $f \in A$, entonces $\hat{f}$ denota la restricción de la función f a ∂A. Es bien conocido que la aplicación $f \longrightarrow \hat{f}$ es un isomorfismo isométrico entre A y $C(\partial A)$. Así pues, en el resto del capítulo consideraremos, sin pérdida de generalidad, que A es un álgebra uniforme sobre el conjunto compacto ∂A en lugar de sobre X.

Proposición 4.2.2 *Sea A un álgebra uniforme. Si B es un subespacio vectorial de A con codimensión 1 en A y Δ es cualquier frontera cerrada de B, entonces $\Delta = \partial A$ o $\Delta = \partial A \setminus \{p\}$ para algún elemento $p \in \partial A$.*

Demostración. Recordemos que los puntos frontera fuerte de A (cf. Definición 3.2.3) pertenecen a ∂A (cf. [54], p. 138). Probaremos en primer lugar que sólo puede haber, a lo sumo, un punto frontera fuerte de A fuera de Δ. Supongamos que existen dos puntos frontera fuerte x_1 y x_2 de A que no pertenecen a Δ. Sea V_1 un entorno abierto de x_1 tal que

$$V_1 \cap (\Delta \cup \{x_2\}) = \emptyset$$

y sea V_2 un entorno abierto de x_2 tal que

$$V_2 \cap (\Delta \cup \{x_1\}) = \emptyset.$$

Como x_1 y x_2 son puntos frontera fuerte, existen dos funciones f_1 y f_2 en A de manera que

$$f_i(x_i) = 1 = \|f_i\|$$

y

$$|f_i(x)| < 1$$

para cualquier punto x fuera de V_i $(i = 1, 2)$.

Sea $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$|f_i^n(x)| < \frac{1}{4}$$

para todo $x \notin V_i$ $(i = 1, 2)$.

Si, por una parte, f_1^n o f_2^n es un elemento de B, entonces f_1^n o f_2^n no alcanzaría su norma en Δ, con lo cual Δ no sería una frontera de B.

Asumamos, por consiguiente, que $f_1^n \notin B$ y $f_2^n \notin B$. Es fácil comprobar que las funciones f_1^n y f_2^n son linealmente independientes. Por tanto, como B tiene codimensión 1 en A, existen dos escalares no nulos α y β de manera que

$$\alpha \cdot f_1^n + \beta \cdot f_2^n \in B.$$

Asumiremos, sin pérdida de generalidad, que

$$\alpha \cdot f_1^n + f_2^n \in B.$$

En consecuencia,

$$(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x_1) = \alpha + f_2^n(x_1),$$

$$(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x_2) = \alpha \cdot f_1^n(x_2) + 1$$

y

$$(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x) = \alpha \cdot f_1^n(x) + f_2^n(x)$$

para todo elemento $x \in \Delta$.

Distinguiremos dos casos. Si $|\alpha| \geq 1$, entonces, teniendo en cuenta que $|f_i^n(x)| < \frac{1}{4}$ para todo $x \in \Delta$ $(i = 1, 2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x_1)| &= |\alpha + f_2^n(x_1)| \\ &\geq |\alpha| - |f_2^n(x_1)| \\ &> |\alpha \cdot f_1^n(x)| + |f_2^n(x)| \\ &\geq |(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x)| \end{aligned}$$

para todo $x \in \Delta$. Por otra parte, si $|\alpha| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} |(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x_2)| &= |\alpha \cdot f_1^n(x_2) + 1| \\ &\geq 1 - |\alpha \cdot f_1^n(x_2)| \\ &> |\alpha \cdot f_1^n(x)| + |f_2^n(x)| \\ &\geq |(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)(x)| \end{aligned}$$

para todo $x \in \Delta$. Es decir, la función $(\alpha \cdot f_1^n + f_2^n)$, que pertenece a B, alcanza su norma fuera de Δ, lo cual contradice el hecho que Δ sea una frontera de B. En definitiva, hemos probado que sólo puede haber, a lo sumo, un punto frontera fuerte de A fuera de Δ.

Para concluir la prueba de esta proposición basta tener en cuenta que los puntos frontera fuerte de A forman un conjunto denso en ∂A (cf. [7], Teorema 2) y que Δ es un subconjunto cerrado de ∂A; es decir, si $\Delta \neq \partial A$, entonces $\Delta = \partial A \setminus \{p\}$ siendo p un punto frontera fuerte de A.

$\square$

El siguiente teorema resume los resultados principales del Capítulo 3 (Teoremas 3.4.1 y 3.5.1), que a continuación utilizaremos para clasificar las isometrías lineales con codimensión 1 definidas sobre álgebras uniformes.

Teorema $\mathcal{A}$. *Sea A un álgebra uniforme sobre ∂A y sea $T : A \longrightarrow A$ una isometría lineal. Entonces existe una frontera cerrada $(\partial A)_0 \subseteq \partial A$ de $T(A)$, una aplicación $h : (\partial A)_0 \longrightarrow \partial A$ continua y sobreyectiva, y una función continua $a : (\partial A)_0 \to \mathbf{K}$ tal que $|a(x)| = 1$ para todo $x \in (\partial A)_0$, y*

$$(Tf)(x) = a(x)f(h(x)) \text{ para todo } x \in (\partial A)_0 \text{ y toda } f \in A.$$

Si $T(A)$ separa completamente los puntos de ∂A, entonces $(\partial A)_0$ es la frontera de Shilov de $T(A)$ ($(\partial A)_0 = \partial T(A) \setminus \{x_0\}$ tal que $g(x_0) = 0$ para toda $g \in T(A)$) y la aplicación h es un homeomorfismo.

Teorema $\mathcal{B}$. ([7], Teorema 1.) *Si B es un subespacio vectorial de $C_0(X)$ que separa completamente los puntos de X, entonces la frontera de Shilov de B existe.*

Así pues, la Proposición 4.2.1 y el Teorema $\mathcal{A}$ indican que existen tres tipos de isometrías lineales $T : A \longrightarrow A$ con codimensión 1:

Tipo I. El rango de T separa completamente todos los elementos de ∂A excepto dos.

Tipo II. El rango de T separa completamente todos los puntos de

∂A, y existe un elemento $x_0 \in \partial A$ de forma que $f(x_0) = 0$ para toda función $f \in T(A)$.

Tipo III. El rango de T separa completamente todos los puntos de ∂A, y para cada punto $x \in \partial A$, existe una función $f \in T(A)$ de forma que $f(x) \neq 0$.

4.3 Isometrías lineales con codimensión 1 de Tipo I.

Sea $(\partial A)_0 \subseteq \partial A$ la frontera cerrada de $T(A)$ que aparece en el Teorema $\mathcal{A}$ y cuya definición se encuentra en la demostración del Teorema 3.4.1. Recordemos aquí que

$$(\partial A)_0 := \bigcup_{x \in \partial A} V_x$$

donde

$$V_x := \{x' \in \partial A : |(Tf)(x')| = |f(x)| \text{ para todo } f \in A\}.$$

Para cualquier punto $x \in \partial A$, el conjunto V_x es distinto del conjunto vacío según quedó probado en el Lema 3.3.3.

Teorema 4.3.1 *Sea A un álgebra uniforme y sea $T : A \longrightarrow A$ una isometría lineal con codimensión 1 de Tipo I. Entonces*

$$(\partial A)_0 = \partial A.$$

Demostración. Sean x_1 y x_2 los elementos de la frontera de Shilov de A, ∂A, que no pueden separarse completamente con funciones de $T(A)$. Como $T(A)$ tiene codimensión 1 en A y $(\partial A)_0$ es una frontera cerrada de $T(A)$, entonces, por la Proposición 4.2.2, sólo hay dos posibilidades:

$$(\partial A)_0 = \partial A$$

o existe un punto $p \in \partial A$ tal que

$$(\partial A)_0 = \partial A \setminus \{p\}.$$

Supongamos que $(\partial A)_0 = \partial A \setminus \{p\}$. Veamos en primer lugar que si se da este caso, entonces el punto p es distinto de x_1 y x_2. En caso contrario, si por ejemplo $x_1 = p$, entonces x_2 pertenece a $(\partial A)_0$. Es decir, existe un punto $x_2' \in \partial A$ de manera que

$$x_2 \in V_{x_2'}.$$

Por tanto, como x_1 y x_2 no pueden separarse completamente con funciones de $T(A)$, deducimos que

$$x_1 \in V_{x_2'} \subseteq (\partial A)_0$$

lo cual es imposible porque $x_1 = p$ no pertenece a $(\partial A)_0$. En definitiva, resulta que $x_1 \neq p \neq x_2$.

Por otra parte, como $(\partial A)_0$ es cerrado, resulta que p es un punto aislado en ∂A. Por tanto, como los puntos frontera fuerte de A son densos en ∂A, deducimos que p es también un punto frontera fuerte de A. Como en la demostración de la Proposición 4.2.1, podemos encontrar una función $f_1 \in A$ de forma que

$$f_1(x_1) = 1$$

y

$$f_1(x_2) = f_1(p) = 0.$$

Denotaremos $\|f_1\| := M \geq 1$. Como p es un punto frontera fuerte de A, existe una función $g \in A$ tal que

$$g(p) = 1 = \|g\|$$

y

$$|g(x)| < 1$$

para todo punto $x \in (\partial A)_0$. Es evidente que f_1 no pertenece a $T(A)$ porque x_1 y x_2 no se pueden separar completamente con funciones de $T(A)$. De igual forma, g^n no pertenece a $T(A)$ pues $(\partial A)_0$ es una frontera de $T(A)$ y $p \notin (\partial A)_0$. En consecuencia, como $T(A)$ tiene codimensión 1 en A y las funciones f_1 y g^n son linealmente independientes, existe una escalar no nulo, α_n, tal que

$$(\alpha_n \cdot f_1 + g^n) \in T(A)$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Como los puntos x_1 y x_2 no pueden separarse completamente con funciones de $T(A)$, resulta que

$$|\alpha_n \cdot f_1(x_1) + g^n(x_1)| = |\alpha_n \cdot f_1(x_2) + g^n(x_2)| = |g^n(x_2)|.$$

Esta igualdad implica, eligiendo previamente un número natural n suficientemente grande, que $|\alpha_n| < \frac{1}{2M^2}$. Como además, y sin pérdida de generalidad, podemos elegir el citado número natural n tal que

$$|g^n(x)| < \frac{1}{4M^2}$$

para todo punto $x \in (\partial A)_0$, resulta que

$$(\alpha_n \cdot f_1 + g^n)(p) = 1$$

y

$$|\alpha_n \cdot f_1(x) + g^n(x)| < \frac{1}{2M^2} + \frac{1}{4M^2} < 1$$

para todo punto $x \in (\partial A)_0$ pues $\|f_1\| = M \geq 1$, lo cual contradice el hecho que $(\partial A)_0$ es una frontera de $T(A)$. □

Ejemplo 4.3.1 Sea $\mathbf{N}^*$ la compactificación de Alexandroff de los números naturales. Entonces, el álgebra uniforme $A := C(\mathbf{N}^*)$ puede identificarse con el espacio de las sucesiones convergentes de números naturales. Sea $T : C(\mathbf{N}^*) \longrightarrow C(\mathbf{N}^*)$ la isometría lineal definida como

$$(x_1, x_2, ...) \longrightarrow (-x_1, x_1, x_2, ...).$$

Es inmediato comprobar que el rango de T tiene codimensión 1 en $C(\mathbf{N}^*)$. Además, $\mathbf{N}^* = \partial C(\mathbf{N}^*)$ y los puntos 1 y 2 no pueden separarse completamente con funciones de $T(C(\mathbf{N}^*))$. Por tanto, T es una isometría lineal con codimensión 1 de Tipo I. Por último, cabe destacar que $(\mathbf{N}^*)_0 = \mathbf{N}^*$.

Nota 4.3.1 En el ejemplo anterior, se comprueba inmediatamente que los subconjuntos $\{1, 3, 4, ...\}$ y $\{2, 3, 4, ...\}$ de $\mathbf{N}^*$ son fronteras cerradas minimales de $T(C(\mathbf{N}^*))$. Por tanto, la frontera de Shilov de $T(C(\mathbf{N}^*))$ no existe. Esto demuestra que, en la tesis del Teorema 4.3.1, no podemos asegurar que $(\partial A)_0 = \partial T(A)$.

4.4 Isometrías lineales con codimensión 1 de Tipo II.

Teorema 4.4.1 *Sea A un álgebra uniforme y sea $T : A \longrightarrow A$ una isometría lineal con codimensión 1 de Tipo II. Entonces*

$$\partial T(A) = \partial A \setminus \{x_0\},$$

donde x_0 es el elemento de ∂A tal que $f(x_0) = 0$ para toda función $f \in T(A)$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.2, y como $\partial T(A)$, que existe por el Teorema $\mathcal{B}$, es una frontera cerrada de $T(A)$, será suficiente probar que $x_0 \notin \partial T(A)$, i.e., $x_0 = p$. Supongamos que $x_0 \in \partial T(A)$. Entonces, por la prueba del Teorema 3.5.1, sabemos que $(\partial A)_0 = \partial T(A) \setminus \{x_0\}$, pero, por el Teorema $\mathcal{A}$, resulta que $(\partial A)_0$ una frontera cerrada de $T(A)$. Esto contradice la minimalidad de $\partial T(A)$. $\square$

Ejemplo 4.4.1 Sea $T : C(\mathbf{N}^*) \longrightarrow C(\mathbf{N}^*)$ la isometría lineal definida como

$$(x_1, x_2, ...) \longrightarrow (0, x_1, x_2, ...)$$

Es inmediato comprobar que el rango de T tiene codimensión 1 en $C(\mathbf{N}^*)$ y que T es de Tipo II con $x_0 = 1$. También es obvio que $\partial T(C(\mathbf{N}^*)) = \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

4.5 Isometrías lineales con codimensión 1 de Tipo III.

Para cualquier isometría lineal con codimensión 1 de Tipo III se tiene, por el Teorema $\mathcal{A}$, que $(\partial A)_0 = \partial T(A)$. Sin embargo, como se verá en los Ejemplos 4.5.1 y 4.5.2, pueden darse cualquiera de las dos posibilidades

$$\partial T(A) = \partial A \text{ } o \text{ } \partial T(A) = \partial A \setminus \{p\}$$

que aparecen en la Proposición 4.2.2. En cualquier caso, y por el Teorema $\mathcal{A}$, se tiene que ∂A es homeomorfo a $\partial T(A)$.

Ejemplo 4.5.1 Sea $T : C(\mathbf{N}^*) \longrightarrow C(\mathbf{N}^*)$ la isometría lineal definida como

$$(x_1, x_2, ...) \longrightarrow \left(\frac{-(x_1 + x_2)}{2}, x_1, x_2, ... \right)$$

Es inmediato comprobar que el rango de T tiene codimensión 1 en $C(\mathbf{N}^*)$ y que T es de Tipo III. Además,

$$\partial T(C(\mathbf{N}^*)) = \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$$

puesto que no existe ninguna función $f \in C(\mathbf{N}^*)$ tal que

$$(Tf)(1) = 1 = \|Tf\|$$

y

$$|(Tf)(x)| < 1$$

para todo punto $x \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

Ejemplo 4.5.2 Es bien conocido que H^∞ (cf. Nota 3.7.1) es un álgebra uniforme sobre su frontera de Shilov, ∂H^∞. Además, H_0^∞ (cf. Nota 3.7.1) es un ideal maximal de H^∞, es decir, H_0^∞ tiene codimensión 1 en H^∞. Por tanto, la isometría lineal $T : H^\infty \longrightarrow H^\infty$ definida como $T(f) := z \cdot f$ tiene codimensión 1. Las funciones de H_0^∞ separan completamente los puntos de ∂H^∞ y para todo $x \in \partial H^\infty$ existe una $f \in T(H^\infty) = H_0^\infty$ tal que $f(x) \neq 0$, es decir, T es una isometría lineal con codimensión 1 de Tipo III. Finalmente, notemos que la norma de una función $f \in H^\infty$ coincide con la de $z \cdot f$ y, además, $|f| = |z \cdot f|$ en ∂H^∞. Por tanto, como ∂H_0^∞ es un subconjunto de ∂H^∞, deducimos, por la definición de frontera de Shilov, que $\partial H^\infty = \partial H_0^\infty$.

Bibliografía

[1] Y. Abramovich, *Multiplicative representation of disjointness preserving operators.* Indag. Mathem. **45** (1983), 265-279.

[2] Y. Abramovich, A.I. Veksler y A.V. Koldunov, *On operators preserving disjointness.* Soviet Math. Dokl. **248**, N5, (1979),1033-1036.

[3] Y. Abramovich, E.L. Arenson y A.K. Kitover, *Banach $C(K)$ - modules and operators preserving disjointness.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, **277** (1993).

[4] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces.* Israel J. Math. **3** (1966), 205-210.

[5] J. Araujo y J. Martínez-Maurica, *The non-archimedean Banach-Stone theorem.* Lecture Notes in Math. 1454, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1990), 64-79.

[6] J. Araujo, E. Beckenstein y L. Narici, *Biseparating maps and homeomorphic real-compactifications.* J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), 258-265.

[7] J. Araujo y J.J. Font, *On Šilov boundaries for linear subspaces of continuous functions.* Pendiente de publicación en Topology and its Applications.

[8] J. Araujo y J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions.* Pendiente de publicación en Transactions A.M.S..

[9] J. Araujo, J.J. Font y S. Hernández, *A note on Holsztyński's Theorem.* Pendiente de publicación en Proceedings of Tenth Summer Conference on General Topology and Its Applications.

[10] W. Arendt, *Spectral properties of Lamperti operators.* Indiana Univ. Math. J. **32**, 199-215 (1983).

[11] W. Arendt y D.R. Hart, *The spectrum of quasi-invertible disjointness preserving operators.* J. Funct. Anal. **68** (2), (1986), 149-167.

[12] E. Beckenstein y L. Narici, *A nonarchimedean Banach-Stone theorem.* Proc. A.M.S. **100** (1987), 242-246.

[13] E. Beckenstein, L. Narici y R. Todd, *Automatic continuity of linear maps on spaces of continuous functions.* Manuscripta Math., **62** (1988), 257-275.

[14] E. Behrends, *M-structure and the Banach-Stone theorem.* Lecture Notes in Mathematics **736**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1979).

[15] Y. Benyamini, *Small into isomorphisms between spaces of continuous functions.* Proc. A.M.S. **83** (1981), 479-485.

[16] A. Beurling y H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers.* Math. Scand. **1** (1953), 120-126.

[17] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound.* Proc. A.M.S. **18** (1967), 1062-1066.

[18] M. Cambern y V.D. Pathak, *Isometries of spaces of differentiable functions.* Math. Japonica **26** (1981), 253-260.

[19] B. Cengiz, *A generalization of the Banach-Stone theorem.* Proc. A.M.S. **40** (1973), 426-430.

[20] P.J. Cohen, *On homomorphisms of group algebras.* Am. J. Math. **82** (1960), 213-226.

[21] H.B. Cohen, *A bound-two isomorphism between C(X) Banach spaces.* Proc. A.M.S. **50** (1975), 215-217.

[22] K. DeLeeuw, *Banach spaces of Lipschitz functions.* Studia Math. **21** (1961), 55-66.

[23] K. DeLeeuw, W. Rudin y J. Wermer, *The isometries of some functions spaces.* Proc. A.M.S. **11** (1960), 694-698.

[24] R.E. Edwards, *Bipositive and isometric isomorphisms of some convolution algebras.* Can. J. Math., **17** (1965), 839-846.

[25] R. Engelking, *General Topology.* Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[26] F. O. Farid y K. Varadarajan, *Isometric shift operators on* $C(X)$. Can. J. Math. **46** (1994), 532-542.

[27] W.A. Feldman y J.F. Porter, *Operators on Banach lattices as weighted compositions.* J. Lond. Math. Soc. **33** (1986), 149-156.

[28] J.J. Font y S. Hernández, *Separating maps between locally compact spaces.* Arch. Math. (Basel), **63** (1994), 158-165.

[29] J.J. Font y S. Hernández, *Automatic continuity and representation of certain linear isomorphisms between group algebras.* Indag. Mathem. (N.S.) **6** (4) (1995), 397-409.

[30] K. Geba y Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (V).* Studia Math. **19** (1960), 303-320.

[31] I. Gelfand y A. Kolmogoroff, *On the ring of continuous functions on a topological space.* Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), **22** (1939), 11-15.

[32] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of Continuous Functions.* University Ser. in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.

[33] I. Glicksberg, *Homomorphisms of certain algebras of measures.* Pacific J. Math. **10** (1960), 167-191.

[34] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison y M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces.* J. Funct. Anal. **101** (1991), 97-119.

[35] D.R. Hart, *Some properties of disjointness preserving operators.* Indag. Mathem. **47** (1985), 183-197.

[36] H. Helson, *Isomorphisms of Abelian group algebras.* Ark. Mat. **2** (1953), 475-487.

[37] S. Hernández, E. Beckenstein y L. Narici, *Banach-Stone theorems and separating maps.* Manuscripta Math. **86** (1995), 409-416.

[38] E. Hewitt y K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I.* New York Springer Verlag, 1963.

[39] E. Hewitt y K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis II.* New York Springer Verlag, 1970.

[40] H. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions.* Studia Math. **26** (1966), 133-136.

[41] C.B. Huijsmans y B. de Pagter, *Invertible disjointness preserving operators.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1993), 125-132.

[42] J.E. Jamison y M. Rajagopalan, *Weighted composition operator on* $C(X, E)$. J. Operator Theory **19** (1988), 307-317.

[43] K. Jarosz, *Into isomorphisms of spaces of continuous functions.* Proc. A.M.S. **90** (1984), 373-377.

[44] K. Jarosz, *Perturbations of Banach algebras.* Lecture Notes in Math. **1120**, Springer-Verlag, (1985).

[45] K. Jarosz, *Automatic continuity of separating linear isomorphisms.* Canad. Math. Bull., **33** (2) (1990), 139-144.

[46] K. Jarosz y V.D. Pathak, *Isometries and small bound isomorphisms of function spaces.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **136**, Dekker (1992), 241-271.

[47] N.J. Kalton y G.V. Wood, *Homomorphims of group algebras with norm less than* $\sqrt{2}$. Pacific J. Math., **62** (1976), 439-460.

[48] A.A. Milutin, *Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacta of the power of the continuum* (Russian), Tero. Funkcii Funkcional Anal. i Prilozen. **2** (1966), 150-156.

[49] S. B. Myers, *Banach spaces of continuous functions.* Ann. of Math. **49** (1948), 132-140.

[50] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with application to rings of analytic functions.* Kodai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 182-188.

[51] W. P. Novinger, *Linear isometries of subspaces of continuous functions.* Studia Math. **53** (1975), 273-276.

[52] B. de Pagter, *A note on disjointness preserving operators.* Proc. A.M.S. **90** (1984), 543-549.

[53] V.D. Pathak, *Linear isometries of absolutely continuous functions.* Canadian J. Math. **34** (1982), 298-306.

[54] C.E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras.* Van Nostrand, Princeton, N. J., (1960).

[55] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Publishers, New York, 1962.

[56] K. Sundaresan, *Spaces of continuous functions into a Banach space.* Studia Math. **48** (1973), 15-22.