Estudi Algebraic de les Extensions dels Càlculs Multivalorats de Łukasiewicz.

JOAN GISPERT I BRASÓ

Memòria presentada per optar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques per la Universitat de Barcelona

Director: Dr. Antoni Torrens Torrell

domtin

Estudi Algebraic de les Extensions dels Càlculs Multivalorats de Łukasiewicz.

JOAN GISPERT I BRASÓ

Memòria presentada per optar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques per la Universitat de Barcelona

Director: Dr. Antoni Torrens Torrell

Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la
Universitat de Barcelona
dins del Programa de Doctorat:
Lògica Pura i Aplicada. Bienni 1993/94-1994/95

Per optar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques
per la Universitat de Barcelona:

Estudi Algebraic de les Extensions dels Càlculs Multivalorats de Łukasiewicz.[1]

JOAN GISPERT BRASÓ

Director: Dr. Antoni Torrens Torrell

Barcelona, juny de 1998

[1]Aquesta memòria ha estat possible gràcies a la beca FI/94-1351 del C.I.R.I.T. de la Generalitat de Catalunya.

a la Laura

$n \to \infty$

Índex

Introducció

L'objectiu d'aquesta memòria és estudiar, classificar i caracteritzar extensions finitàries del càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz. Per mostrar les motivacions que ens han portat a fer aquest treball remarcarem alguns resultats sobre les lògiques i els càlculs multivalorats de Łukasiewicz.

Al 1918, Jan Łukasiewicz, en una conferència a la Universitat de Varsòvia, manifesta la necessitat d'obtenir una lògica, lleugerament diferent a la lògica proposicional clàssica, que admeti més de dos valors de veritat. Al 1920 en [50], introdueix la lògica trivalorada que més tard, al 1922, generalitza en definir les lògiques n-valents i la lògica infinitvalent. Totes aquestes lògiques estan definides semànticament utilitzant el mètode de les matrius.

Mordchaj Wajsberg axiomatitza en [74] (citat anteriorment en [53]) les tautologies, és a dir els teoremes, de la lògica trivalent de Łukasiewicz i, Lindembaum primer (citat en [53]), i més tard Rosser i Turquette en [68] estenen el resultat per tota lògica finitvalent.

Łukasiewicz conjectura que les tautologies de la lògica infinitvalent són derivables a partir dels axiomes

Ł1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ł2 $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \nu) \to (\varphi \to \nu))$

Ł3 $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

Ł4 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Ł5 $((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \varphi)$

i la regla *Modus Ponens*: $\langle\{\varphi, \varphi \to \psi\}, \psi\rangle$.

Al 1935, Wajsberg en [75, pàgina 240] anuncia que ha verificat la conjectura, però no publica la demostració. Rose i Rosser publiquen la primera demostració al 1958 en [67], basant-se en la interpretació donada per McNaughton [56] de les fórmules en l'àlgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Independentment, Chang al 1959 en [18] demostra algebraicament la conjectura, per la qual cosa introdueix per primera vegada les MV-àlgebres [17].

Els càlculs proposicionals obtinguts a partir d'aquestes axiomatitzacions són el que anomenem els càlculs proposicionals multivalorats de Łukasiewicz (càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz pel càlcul obtingut a partir de l'axiomatització de les tautologies de la lògica infinitvalent; i càlcul n-valorat de Łukasiewicz pel cas de les lògiques n-valents).

És important remarcar que tots els resultats esmentats anteriorment identifiquen les tautologies amb les lògiques proposicionals. Al 1973, seguint la tradició de Tarski d'entendre les lògiques no només com a conjunts de fórmules sinó com a operadors de conseqüència (vegeu [70, 52]), Wojcicki en [76] estudia les conseqüències lògiques de les lògiques multivalents i dels càlculs multivalorats de Łukasiewicz. Recordem que *conseqüència lògica* és un *operador de conseqüència estructural* sobre els subconjunts de fórmules d'un llenguatge proposicional (vegeu [49]). Wojcicki demostra que les conseqüències lògiques dels càlculs n-valorats i de les lògiques n-valents coincideixen i són finitàries així com també ho és la del càlcul infinitvalorat. En canvi, les conseqüències lògiques de les lògiques infinitvalents són totes infinitàries. De [76] es dedueix també que la lògica finitària generada per la lògica infinitvalent coincideix amb el càlcul infinitvalorat.

Al 1981 en [44], Komori estudia, caracteritza i classifica totes les extensions axiomàtiques del càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz.

En els treballs ja esmentats [17, 18], Chang busca la contrapartida algebraica del càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz i a tal efecte defineix les MV-àlgebres. Amb el mateix propòsit d'algebrització del càlculs multivalorats de Łukasiewicz, A.J. Rodríguez estudia en [64] les *àlgebres de Wajsberg*, que són una presentació equivalent de les MV-àlgebres [35], però usant la implicació i la negació, a diferència de Chang que també usa la negació i uns altres funcionals binaris $\oplus$ i $\odot$.

Al 1989 en [8], W.Blok i D.Pigozzi construeixen una teoria general d'algebrització de sistemes deductius proposicionals, lògiques proposicionals finitàries, i donen una noció precisa d'allò que fins aleshores s'havia denominat com la *contrapartida algebraica* de les lògiques proposicionals. Així, un sistema deductiu $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és *algebritzable* si, i només si, existeix una classe d'àlgebres $\mathbb{K}$, que anomenem *semàntica algebraica equivalent*, tal que la relació de conseqüència lògica $\vdash$ és interpretable, mitjançant un conjunt finit d'*equacions definidores*, en la conseqüència equacional $\models_{\mathbb{K}}$ associada a la classe $\mathbb{K}$; i a més, existeix una interpretació inversa de $\models_{\mathbb{K}}$ en $\vdash$ determinada per un conjunt finit de *fórmules d'equivalència.* Tot sistema deductiu algebritzable té una única quasivarietat com a semàntica algebraica equivalent que anomenem *quasivarietat semàntica equivalent.* Un dels principals mèrits de la teoria d'algebrització és que permet establir equivalències entre propietats dels sistemes deductius i propietats de llurs quasivarietats semàntiques equivalents (vegeu [8, 9, 10] entre d'altres).

En [8] es demostra que *tota extensió finitària d'un sistema deductiu algebritzable és algebritzable*, i a més s'estableix una *correspondència bijectiva entre les extensions finitàries del sistema deductiu i les subquasivarietats de la quasivarietat semàntica equivalent corresponent.*

Rodríguez, Torrens i Verdú en [66] demostren que el càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz és algebritzable i la seva quasivarietat semàntica equivalent és la varietat de totes les àlgebres de Wajsberg.

Partint de tots aquests resultats, i donat que les àlgebres de Wajsberg són definicionalment equivalents a les MV-àlgebres, hom pot estudiar les extensions finitàries del càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz, mitjançant l'estudi de les quasivarietats de MV-àlgebres, que és l'objectiu d'aquesta memòria.

Hem optat per fer l'estudi algebraic usant les MV-àlgebres per diverses raons. En primer lloc la presentació és més propera a la presentació clàssica de les àlgebres de Boole, els funcionals binaris $\oplus$ i $\odot$ són la generalització dels operadors disjunció i conjunció clàssics. En segon lloc, i tal com detallarem més endavant, les MV-àlgebres estan estretament lligades als grups reticulats abelians (vegeu [59, 61]), la teoria dels quals ha estat àmpliament estudiada. Finalment, la literatura sobre MV-àlgebres és molt extensa, per exemple [3, 20, 22, 23, 30, 31, 40, 41, 59, 60, 61, 72], i això, sense dubte, simplifica la tasca a l'hora d'emprar propietats de les MV-àlgebres.

L'estudi de les quasivarietats de MV-àlgebres en general esdevé molt complex ja que la varietat $\mathbb{W}$ de totes les MV-àlgebres és Q-universal (vegeu [1]), i per tant el reticle de les subquasivarietats de $\mathbb{W}$ conté el reticle lliure generat per una quantitat numerable de generadors. Per aquesta raó restringim el nostre estudi a alguns tipus concrets de quasivarietats. Fins ara les úniques que han estat tractades a fons són les varietats: la seva caracterització es dedueix de la caracterització de les extensions axiomàtiques de Komori [44] i diferents autors han treballat en la recerca d'axiomatitzacions (vegeu [31, 40, 41, 68, 63]). Donat que ens interessen les varietats com a cas especial de quasivarietats, hem obtingut la mateixa caracterització, si bé la demostració és lleugerament diferent i per cada varietat n'hem obtingut els generadors com a quasivarietat. Les altres quasivarietats estudiades són: les generades per MV-àlgebres simples, les n-acotades i les congruent distributives. De totes elles n'hem obtingut una caracterització i els generadors. A més hem estudiat l'axiomatitzabilitat, la propietat de l'extensió de congruències ((R)CEP) i la propietat de les congruències principals equacionalment definibles (EDPC(R)) de les quasivarietats que estan estretament lligades amb l'axiomatitzabilitat, el Teorema Local de Deducció i el Teorema de Deducció de les extensions finitàries associades a les quasivarietats.

Finalment, voldríem remarcar que a l'hora d'estudiar quasivarietats de MV-àlgebres, hen fet servir tècniques pertanyents a matèries diferents: per exemple, per obtenir els resultats referents a les varietats hem usat resultats i nocions de Teoria de Models i Teoria de Grups; en el cas de les quasivarietats generades per MV-àlgebres simples, el Teorema de McNaughton [56], Topologia lineal "a trossos" i Teoria de Grups; per les quasivarietats n-acotades sobretot hem usat resultats de la pròpia Teoria de MV-àlgebres i d'Àlgebra Universal; i per les quasivarietats congruent distributives Àlgebra Universal i Teoria de Grups Totalment Ordenats.

* * *

Hem dividit la memòria en quatre parts:

Una **primera part** de *preliminars* que inclou un capítol dedicat a *Àlgebra Universal i Lògica Algebraica.* El lector no familiaritzat amb aquestes dues matèries hi trobarà algunes nocions i resultats necessaris per seguir aquest treball. Com a textos de referència hem usat [14, 39] per l'Àlgebra Universal, [11, 8, 77, 28] per la teoria general de lògiques proposicionals i [8, 7, 9, 10] per la teoria d'algebrització de sistemes deductius. El segon capítol està dedicat als *càlculs multivalorats de Łukasiewicz.* Enunciem els teoremes de completesa i n'estudiem la seva algebrització. Al final d'aquest capítol justifiquem que *estudiar extensions finitàries del càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz és equivalent a estudiar subquasivarietats de la varietat Walg de les àlgebres de Wajsberg.*

La **segona part** està dedicada íntegrament a les *MV-àlgebres.*

El capítol 3 conté la *teoria general de MV-àlgebres*: àlgebres equivalents, ordre natural, aritmètica, teorema de representació, etc. No es tracta d'un estudi exhaustiu, sinó més aviat d'un recull de nocions i resultats necessaris per l'elaboració de la memòria. Com a bibliografia bàsica i complerta proposem [20, 21].

Un tractament a part mereix la relació entre *els grups abelians reticulats i les MV-àlgebres.* En el capítol 4, recordem l'equivalència functorial entre la categoria de les MV-àlgebres i la categoria dels grups abelians reticulats amb unitat forta definida a partir del functor Γ de Mundici. Al final d'aquesta secció, obtenim els primers resultats originals que ens asseguren, sota certes condicions, la distributivitat dels productes reduïts i ultraproductes respecte de la transformació Γ i que usarem sovint al llarg del treball.

El capítol 5 està dedicat a les *MV-cadenes*. La importància d'aquestes ve donada pel fet que *tota MV-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MV-cadenes* (teorema 3.30) i que *la classe de les MV-cadenes és la classe de les MV-àlgebres finitament subdirectament irreductibles* (corol.lari 3.31). Basant-nos en la transformació Γ i en resultats de Teoria de Models, obtenim que la classe de totes les MV-cadenes és la classe universal generada per l'àlgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$ (teorema 5.5). Anàlogament, i a partir de la caracterització de Komori [44] per les MV-cadenes de rang finit, demostrem que la classe universal generada per l'àlgebra $\mathbf{L}_n^\omega$ és la classe de totes les MV-cadenes de rang n i les seves subàlgebres.

La **tercera part** és la més extensa i la principal de la memòria. Està dedicada a l'estudi de les *quasivarietats de MV-àlgebres.*

En el capítol 6, tractem les *varietats.* Aquestes ja havien estat estudiades anteriorment: Chang [17, 18] demostra que la varietat $\mathbb{W}$ està generada per l'àlgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$. Del treball de Komori [44] es dedueix la caracterització de les subvarietats pròpies de $\mathbb{W}$. Demostrem ambdós resultats de forma diferent a la dels treballs originals. Com que tractem les varietats com a quasivarietats, n'obtenim els generadors com a quasivarietat (teoremes 6.12 i 6.15). Per últim, donem les diverses axiomatitzacions que hi ha a la literatura.

En el capítol 7, estudiem les *quasivarietats generades per MV-àlgebres simples.* A partir del Teorema de McNaughton (teorema 3.11) obtenim una interpretació geomètrica que ens caracteritza la satisfactibilitat d'una quasiequació del tipus $\varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$ per qualsevol MV-àlgebra simple. Usant aquesta interpretació i altres resultats tècnics sobre grups, demostrem el resultat principal d'aquest capítol: *la quasivarietat generada per una MV-àlgebra simple infinita depèn únicament dels racionals que conté aquesta àlgebra* (teorema 7.8). Estenem aquest resultat a famílies de MV-àlgebres infinites simples i a famílies de MV-àlgebres finites simples (teoremes 7.11 i 7.12): *dues famílies de MV-àlgebres infinites (finites) generen la mateixa quasivarietat si, i només si, contenen els mateixos racionals.* Finalment, modifiquem les condicions per obtenir una caracterització general per a famílies arbitràries de MV-àlgebres simples (teorema 7.16).

En el capítol 8, tractem les *quasivarietats n-acotades.* Demostrem que coincideixen amb les quasivarietats de MV-àlgebres localment finites (teorema 8.7). A més, són les úniques quasivarietats de MV-àlgebres finitament generades i els seus generadors són les MV-àlgebres crítiques. Aprofitant la caracterització de les MV-àlgebres crítiques (teorema 8.8), veiem que tota quasivarietat n-acotada és finitament axiomatitzable, donant-ne alguns exemples d'axiomatitzacions.

En el capítol 9, estudiem les *quasivarietats congruent distributives.* Del fet que $\mathbb{W}$ satisfà EDPM, caracteritzem les quasivarietats de MV-àlgebres congruent distributives com les quasivarietats generades per MV-cadenes. El resultat central (teorema 9.16) caracteritza les quasivarietats generades per una MV-cadena no simple de rang n. Per obtenir aquesta caracterització, en primer lloc provem un resultat sobre grups abelians totalment ordenats. En concret, demostrem que *donats un grup abelià totalment ordenat finitament generat i un element distingit del grup, podem submergir el grup en una ultrapotència del grup dels enters* $\mathbf{Z}$ *de manera que la imatge de l'element distingit conservi totes les propietats de divisibilitat.* Així, fent servir la relació entre ℓ-grups i MV-àlgebres, obtenim que *la quasivarietat generada per una MV-cadena no simple de rang n ve determinada per les MV-àlgebres simples que conté la MV-cadena* (corol.lari 9.19).

En el capítol 10, estudiem les propietats (R)CEP i EDPC(R) en les quasivarietats tractades. Fem un esquema de les relacions que hi ha entre els diversos tipus de quasivarietats que hem estudiat i finalment, com a resum, donem una taula classificatòria de les propietats: congruent distributivitat, (R)CEP, EDPC(R) i axiomatitzabilitat finita respecte a les quatre classes de quasivarietats.

La **quarta part** és la darrera i conté les *conclusions* d'aquest treball. En el capítol 11, a partir de la teoria d'algebrització de sistemes deductius *traduïm* els resultats algebraics de les quasivarietats estudiades a propietats lògiques relatives a les extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$.

Finalment, a tall d'apèndix, enunciem alguns dels problemes que resten encara oberts i que tenim la intenció d'estudiar en el futur.

* * *

Aquesta memòria ha gaudit del suport de la beca de *Formació d'Investigadors* de la DGR FI/94-1351. D'altra banda el seu contingut s'emmarca en els objectius del Projecte de Recerca de la DGCICYT PB94-0902 dins el Programa Sectorial de promoció del coneixement, de títol *Lògica Algebraica* i dins l'Acció COST número 15 de la Comissió Europea, de títol *Many-valued Logics for Computer Science Applications.*

Part dels resultats que apareixen en aquesta memòria han estat comunicats en diferents congressos i reunions:

1. *Quasivarieties generated by Simple MV-algebras* en el **Workshop-Conference del COST n.15** celebrat a Barcelona el juny de 1996.

2. *Some finitary extensions of the infinte-valued Łukasiewicz calculus* en el **Workshop-Conference del COST n.15** celebrat a Patras el juny de 1997.

3. *Locally finite quasivarieties of MV-algebras* en el **Workshop on Abstract Algebraic Logic** celebrat a Bellaterra el juliol de 1997.

4. *Komori classes of MV-algebras* en **VIIIth edition of Order in Algebra and Logic with applications** celebrat a Barcelona el gener de 1998.

5. *Embedding theorems in totally ordered abelian groups preserving non-divisibility properties* en el **4th Barcelona Logic Meeting** celebrat a Bellaterra el febrer de 1998.

Part dels resultats corresponents al capítol 7 han estat publicats a [37].

* * *

Finalment voldria expressar els meus agraïments a la meva família per llur amor, paciència i suport; a la Laura per tot això i molt més. Al Dr. Antoni Torrens per dirigir la tesi, proposar-ne el tema i sobretot per estar sempre disposat a atendre'm i donar-me tota la confiança. Al Dr. Ventura Verdú pels seus consells i orientacions a l'hora de promocionar els resultats d'aquesta memòria. També vull agrair el suport donat pel Dr. Josep Maria Font que va avalar la beca obtinguda. L'amistat i bons consells del Dr. Jordi Rebagliato. I la bona acollida que he rebut durant aquests quatre anys per part de la resta dels membres del Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona, en especial el Dr. Ramon Jansana, Dr. Josep Pla i Dr. Juan Carlos Martínez. També vull recordar i agrair l'hospitalitat i dedicació oferta pel Professor Daniele Mundici en l'estada de treball a Milà que ha contribuït de forma important en l'elaboració d'aquesta memòria. Per últim, agraeixo a tots els amics de bàsquet, de PACCS, de la facultat, etc, les estones que hem compartit: han estat un bon contrapès lúdic a aquest treball.

Part I

Preliminars

Capítol 1

Àlgebra Universal i Lògica Algebraica

1.1 Àlgebra Universal

En aquesta secció recordem algunes nocions d' Àlgebra Universal i fixem les notacions usades en aquesta memòria. Suposarem que el lector està familiaritzat amb la teoria bàsica d'Àlgebra Universal, com a textos de referència vegeu: [14, 39].

Un **llenguatge algebraic** és un conjunt F de símbols funcionals i una aplicació $\tau : F \to \omega$, on ω és el conjunt dels naturals. Per tot $f \in F$, $\tau(f)$ rep el nom d'arietat del funcional f.

Si F és un llenguatge algebraic, una **àlgebra A** de tipus F (o també una F-**àlgebra**) és un parell $\langle A, \{f^{\mathbf{A}} \in F\}\rangle$ on el conjunt A és l'univers de l'àlgebra i per tot $f \in F$, si $\tau(f) = n$ aleshores $f^{\mathbf{A}}$ és una operació n-ària d'A. Recordem que una operació 0-ària d'A és un element d'A. (En el cas que tinguem un nombre finit de funcionals $f_1, \ldots, f_n$ escriurem $\mathbf{A} = \langle A, f_1, \ldots, f_n\rangle$ i direm que és una àlgebra de tipus $(\tau(f_1), \ldots, \tau(f_n))$.)

Siguin $\mathbf{A} = \langle A, \{f^{\mathbf{A}}; f \in F\}\rangle$ i $\mathbf{B} = \langle B, \{f^{\mathbf{B}}; f \in F\}\rangle$ dues àlgebres del mateix tipus, diem que $\mathbf{A}$ és **subàlgebra** de $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, si, i només si,

- $A \subseteq B$,
- per tot $c \in F$ d'arietat 0, $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{B}}$
- per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}} \restriction A^n$

Siguin $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues àlgebres del mateix tipus, direm que una aplicació $h : A \to B$ és un **homomorfisme** d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, ho denotem per $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, si, i només si,

- per tot $c \in F$ d'arietat 0, $h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$,
- per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$ i per tot $a_1, \ldots, a_n \in A$, $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{A}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$

$\mathbf{B}$ és **imatge homomorfa** d'$\mathbf{A}$ si, i només si, existeix un homomorfisme h d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ tal que $h : A \to B$ és exhaustiva. Un homomorfime $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és una **immersió** si, i només si, $h : A \to B$ és injectiva. Un homomorfime $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és un **isomorfisme** si, i només si, $h : A \to B$ és bijectiva.

Donades $\mathbf{A} = \langle A, \{f^{\mathbf{A}}; f \in F\}\rangle$ una àlgebra i $\theta \subseteq A^2$, θ és una **relació de congruència** (o simplement congruència) d'$\mathbf{A}$ si, i només si, θ és relació d'equivalència sobre A i a més és tancada per les operacions d'$\mathbf{A}$. És a dir: per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$, si $(a_1, b_1) \in \theta, \cdots, (a_n, b_n) \in \theta$, aleshores $(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in \theta$. El conjunt de totes les congruències d'$\mathbf{A}$, que denotem per $Con(\mathbf{A})$, és tancat per interseccions arbitràries i forma un reticle algebraic determinat per la inclusió que denotem per $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = \langle Con(\mathbf{A}), \cap, \vee\rangle$ on $\bigvee\limits_{i\in I} \theta_i = \bigcap\{\theta : \bigcup\limits_{i\in I} \theta_i \subseteq \theta\}$. El màxim de $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ és $\nabla_{\mathbf{A}} = A^2$ i el mínim és $\Delta_{\mathbf{A}} = \{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$. Siguin $a \in A$ i $\theta \subseteq A^2$ una relació d'equivalència sobre A, definim la **classe de l'element** a com $a/\theta = \{b \in A : (a, b) \in \theta\}$ i el **quocient d'** A **per** θ, com $A/\theta = \{a/\theta : a \in A\}$. Donades $\mathbf{A}$ una àlgebra i $\theta \in Con(\mathbf{A})$, definim l'**àlgebra quocient** $\mathbf{A}/\theta = \langle A/\theta, \{f^{\mathbf{A}/\theta} : f \in F\}\rangle$ de la següent manera:

- Per tot $c \in F$ d'arietat 0, $c^{\mathbf{A}/\theta} = c^{\mathbf{A}}/\theta$.
- Per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$ i per tot $a_1, \ldots, a_n \in A$, $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta$

Donada una família d'àlgebres $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ del mateix tipus definim l'**àlgebra producte**

$$\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i = \langle \prod_{i\in I} A_i, \{f^{\prod\limits_{i\in I} \mathbf{A}_i} : f \in F\}\rangle$$

de la següent forma:

- $\prod\limits_{i\in I} A_i$ és el producte cartesià dels universos.

- Per tot $c \in F$ d'arietat 0, $c^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i} = (c^{\mathbf{A}_i})_{i\in I}$.
- Per tot $f \in F$ és d'arietat $n > 0$ i per tot $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in \prod_{i\in I} A_i$
$f^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(\bar{a}_1(i), \ldots, \bar{a}_n(i))$
on $\bar{b}(i)$ denota la component i-èssima de $\bar{b} \in \prod_{i\in I} A_i$.

Recordem que es defineix un **filtre** $\mathcal{F}$ sobre un conjunt I com un subconjunt de les parts de I, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tal que

- $I \in \mathcal{F}$
- Si $X, Y \in \mathcal{F}$, aleshores $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- Si $X \in \mathcal{F}$ i $X \subseteq Z \subseteq I$, aleshores $Z \in \mathcal{F}$.

Observem que un filtre sobre I és un *filtre d'àlgebra de Boole* de les parts de I.

Donada una família $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ d'àlgebres del mateix tipus i un filtre propi $\mathcal{F}$ sobre I ($\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$), definim la següent relació en $\prod_{i\in I} A_i$: per tot $\bar{a}, \bar{b} \in \prod_{i\in I} A_i$, $\bar{a} \sim_{\mathcal{F}} \bar{b}$ si, i només si, $\{i \in I : \bar{a}(i) = \bar{b}(i)\} \in \mathcal{F}$. $\sim_{\mathcal{F}}$ és una relació de congruència de l'àlgebra $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

Definim l'**àlgebra producte reduït** de $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ que denotem per

$$\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F} = \langle \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}, \{f^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}} : f \in F\} \rangle$$

com $\prod_{i\in I} \mathbf{A_i}/\sim_{\mathcal{F}}$, és a dir:

- $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ és el quocient del producte cartesià $\prod_{i\in I} A_i$ per la relació $\sim_{\mathcal{F}}$.
- Per tot $c \in F$ d'arietat 0, $c^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}} = c^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}/\mathcal{F}$.
- Per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$ i per tot $\bar{a}_1/\mathcal{F}, \ldots, \bar{a}_n/\mathcal{F} \in \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$,
$f^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}}(\bar{a}_1/\mathcal{F}, \ldots, \bar{a}_n/\mathcal{F}) = f^{\prod_{i\in I} A_i}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)/\mathcal{F}$

Sigui $\mathcal{F}$ un filtre propi sobre I, direm que $\mathcal{F}$ és un **ultrafiltre** sobre I si, i només si, satisfà qualsevol de les tres condicions equivalents:

- Per tot $X \subseteq I$, $X \in \mathcal{F}$ si, i només si, $I \setminus X \notin \mathcal{F}$
- Per tot $X, Y \subseteq I$, $X \cup Y \in \mathcal{F}$ si, i només si, $X \in \mathcal{F}$ o $Y \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ és maximal dins el conjunt dels filtres propis sobre I, ordenats per la inclusió.

El producte reduït per un ultrafiltre rep el nom d'**ultraproducte**. Al llarg de tot el treball sovint usarem els següents resultats respecte ultraproductes

Teorema 1.1 [14, pàg. 213] *Tota àlgebra és submergible en un ultraproducte de les seves subàlgebres finitament generades.* □

Lema 1.2 [2, pàg. 123] *Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sobre I i $J \subseteq I$. Si $J \in \mathcal{F}$, aleshores $\mathcal{F} \upharpoonright J = \{X \cap J : X \in \mathcal{F}\}$ és un ultrafiltre sobre J. A més, per qualsevol família d'àlgebres $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$, $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \cong \prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j/\mathcal{F} \upharpoonright J$.* □

Denotarem per $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{P}_R$ i $\mathbb{P}_U$ els operadors sobre classes d'àlgebres que formen les imatges isomorfes, subestructures, imatges homomorfes, productes, productes reduïts i ultraproductes, respectivament.
Per tota classe d'àlgebres $\mathbb{K}$, per tot $\mathbb{O} \in \{\mathbb{S}, \mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{P}_R, \mathbb{P}_U\}$ es satisfà:

1. $\mathbb{O}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{IO}(\mathbb{K})$
2. $\mathbb{IO}(\mathbb{K}) = \mathbb{OI}(\mathbb{K})$
3. $\mathbb{IPS}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{ISP}(\mathbb{K})$
4. $\mathbb{IPH}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{HP}(\mathbb{K})$
5. $\mathbb{ISH}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{IHS}(\mathbb{K})$
6. $\mathbb{ISP}_R(\mathbb{K}) = \mathbb{ISPP}_U(\mathbb{K})$

Donada una classe $\mathbb{K}$ d'àlgebres del mateix tipus direm que $\mathbb{K}$ és **varietat** si, i només si, $\mathbb{K}$ és tancada per $\mathbb{H}, \mathbb{S}$ i $\mathbb{P}$. Si denotem per $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ la varietat generada per $\mathbb{K}$, és a dir la més petita varietat que conté la classe $\mathbb{K}$, aleshores $\mathbb{V}(\mathbb{K}) = \mathbb{HSP}(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K} = \{\mathbf{A}\}$ escriurem $\mathbb{V}(\mathbf{A})$ enlloc de $\mathbb{V}(\{\mathbf{A}\})$.

Siguin X un conjunt de variables i F un llenguatge algebraic, construïm el **conjunt de fórmules** (o **termes**) **sobre** X, $Fm_F(X)$ per inducció:

1. Per tot $x \in X$, $x \in Fm_F(X)$

2. Per tot $f \in F$ d'arietat 0, $f \in Fm_F(X)$

3. Per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fm_F(X)$, aleshores $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in Fm_F(X)$

Donada $\varphi \in Fm_F(X)$, escriurem $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ per indicar que les variables ocurrents en φ estan incloses en $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.

Definim l'**àlgebra de fórmules**

$$\mathbf{Fm}_F(X) = \langle Fm_F(X), \{f^{\mathbf{Fm}_F(X)} : f \in F\}\rangle, \text{ on}$$

1. Per tot $f \in F$ d'arietat 0, $f^{\mathbf{Fm}_F(X)} = f$

2. Per tot $f \in F$ d'arietat $n > 0$, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fm_F(X)$, aleshores $f^{\mathbf{Fm}_F(X)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

És ben conegut que si $|X| = |Y|$, aleshores $\mathbf{Fm}_F(X)$ és isomorf a $\mathbf{Fm}_F(Y)$. Com que el nombre de variables ocurrents en una fórmula és finit, n'hi ha prou en considerar el conjunt de variables numerable $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ i escriurem en general $\mathbf{Fm}_F$ (o $\mathbf{Fm}$ si el tipus és clar). Siguin $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in Fm_F$ i $\mathbf{A}$ una àlgebra del mateix tipus, definim l'aplicació $\varphi^{\mathbf{A}} : A^n \to A$:

1. Si φ és una variable x_i,
   $\varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ per tot $a_1, \ldots, a_n \in A$.

2. Si φ és un funcional c d'arietat 0,
   $\varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = c^{\mathbf{A}}$ per tot $a_1, \ldots, a_n \in A$.

3. Si φ és de la forma $f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$,
   $\varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(\varphi_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi_m^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))$
   per tot $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Una **equació** de tipus F és una expressió de la forma

$$\varphi \approx \psi$$

on $\varphi, \psi \in Fm_F$. Denotem per Eq_F el conjunt d'equacions de tipus F.

Si $\mathbf{A}$ és una àlgebra de tipus F, diem que $\mathbf{A}$ satisfà l'equació

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \approx \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

i escriurem,

$$\mathbf{A} \models \varphi \approx \psi$$

si, i només si, per tot $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \psi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$

Una classe $\mathbb{K}$ d'àlgebres de tipus F satisfà una equació $\varphi \approx \psi \in Eq_F$, i ho denotem per $\mathbb{K} \models \varphi \approx \psi$, si, i només si, per tota $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$, $\mathbf{A} \models \varphi \approx \psi$. Direm que una classe $\mathbb{K}$ d'àlgebres de tipus F satisfà $\Delta \subseteq Eq_F$, i ho escriurem $\mathbb{K} \models \Delta$, si, i només si, $\mathbb{K} \models \varphi \approx \psi$ per tota $\varphi \approx \psi \in \Delta$.

Teorema 1.3 (Birkhoff 1935, vegeu per exemple [14, Thm. 11.9, pàg.75]). *Sigui $\mathbb{K}$ una classe d'àlgebres. $\mathbb{K}$ és una varietat si, i només si, $\mathbb{K}$ és una classe equacional (i.e. existeix $\Delta \subseteq Eq$ tal que $\mathbb{K} = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \models \Delta\}$.* □

Direm que $\mathbb{K}$ és una **quasivarietat** si, i només si, $\mathbb{K}$ és tancada per $\mathbb{I}, \mathbb{S}$ i $\mathbb{P}_R$ o equivalentment tancada per $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{P}$ i $\mathbb{P}_U$. Si denotem per $\mathbb{Q}(\mathbb{K})$ la quasivarietat generada per $\mathbb{K}$, aleshores $\mathbb{Q}(\mathbb{K}) = \mathbb{ISP}_R(\mathbb{K}) = \mathbb{ISPP}_U(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K} = \{\mathbf{A}\}$ escriurem $\mathbb{Q}(\mathbf{A})$ en lloc de $\mathbb{Q}(\{\mathbf{A}\})$.
Una **quasiequació** (o quasi-identitat) de tipus F és una expressió de la forma

$$\varphi_1 \approx \psi_1 \& \cdots \& \varphi_n \approx \psi_n \Rightarrow \varphi \approx \psi \quad (\text{també } \mathop{\&}_{i=1}^{n} \varphi_i \approx \psi_i \Rightarrow \varphi \approx \psi)$$

on $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi_1, \ldots \psi_n, \psi \in Fm_F$. Denotem per Qeq_F el conjunt de quasiequacions de tipus F. Observem que tota equació $\varphi \approx \psi$ és una quasiequació amb la particularitat de tenir $n = 0$, per tant $Eq_F \subseteq Qeq_F$.

Si $\mathbf{A}$ és una àlgebra de tipus F, direm que $\mathbf{A}$ satisfà la quasiequació:

$$\varphi_1 \approx \psi_1 \& \cdots \& \varphi_n \approx \psi_n \Rightarrow \varphi \approx \psi,$$

i ho escriurem,

$$\mathbf{A} \models \varphi_1 \approx \psi_1 \& \cdots \& \varphi_n \approx \psi_n \Rightarrow \varphi \approx \psi$$

si, i només si, per tot $a_1, \ldots, a_m \in A$,

$$\varphi_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \psi_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \psi_n^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m)$$

implica

$$\varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \psi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_m)$$

Si $\mathbb{K}$ és una classe d'àlgebres de tipus F i $\Sigma \cup \{ \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i \approx \psi_i \Rightarrow \varphi \approx \psi \} \subseteq Qeq_F$, aleshores $\mathbb{K} \models \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i \approx \psi_i \Rightarrow \varphi \approx \psi$ si, i només si, per tota $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$, $\mathbf{A} \models \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i \approx \psi_i \Rightarrow \varphi \approx \psi$. I $\mathbb{K} \models \Sigma$ si, i només si, $\mathbb{K} \models \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i \approx \psi_i \Rightarrow \varphi \approx \psi$, per tot $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i \approx \psi_i \Rightarrow \varphi \approx \psi \in \Sigma$

Teorema 1.4 [39, Thm. 3, pàg.379]).
Sigui $\mathbb{K}$ una classe d'àlgebres. $\mathbb{K}$ és una quasivarietat si, i només si, $\mathbb{K}$ és una classe quasiequacional (i.e. existeix $\Sigma \subseteq Qeq$ tal que $\mathbb{K} = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \models \Sigma\}$). □

Com que $Eq_F \subseteq Qeq_F$ dels teoremes 1.3 i 1.4 tenim que *tota varietat és quasivarietat.* Una quasivarietat $\mathbb{K}$ és **estricta** si, i només si, no és varietat.

Donada una quasivarietat $\mathbb{K}$ i $\mathbf{A}$ una àlgebra del mateix tipus definim $Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}) = \{\theta \in Con(\mathbf{A}) : \mathbf{A}/\theta \in \mathbb{K}\}$ el conjunt **de congruències relatives a $\mathbb{K}$.** $Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ és tancat per interseccions arbitràries i tenim que $\mathbf{Con}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}) = \langle Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}), \cap, \vee_{\mathbb{K}} \rangle$ és un reticle algebraic, però no és necessàriament un subreticle de $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ ja que per tota família $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$

$$\bigvee_{i \in I} {}_{\mathbb{K}} \theta_i = \bigcap \{\theta \in Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}) : \text{ per tot } i \in I, \theta_i \subseteq \theta\}$$

Direm que una quasivarietat $\mathbb{K}$ és **congruent distributiva** quan per tota àlgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$, $\mathbf{Con}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ és un reticle distributiu.(Alguns autors anomenen a aquesta propietat congruent distributivitat relativa a la quasivarietat $\mathbb{K}$)
Observi's que si $\mathbb{K}$ és una varietat, aleshores $\mathbf{Con}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A}) = \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ i la nostra definició de varietat congruent distributiva coincideix amb la noció habitual de congruent distributivitat d'una varietat.

Direm que una varietat $\mathbb{K}$ té la **propietat de les congruències principals equacionalment definibles** (ho abreujarem **EDPC**) si, i només si, existeix un conjunt finit d'equacions amb 4 variables

$$\{\sigma_i(x, y, z, w) \approx \tau_i(x, y, z, w) : i < n\}$$

tal que per tota àlgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ i per tot $a, b, c, d \in A$.

$$(c, d) \in \Theta(a, b) \text{ si, i només si, } \sigma_i^{\mathbf{A}}(a, b, c, d) = \tau_i^{\mathbf{A}}(a, b, c, d) \text{ per tot } i < n.$$

on $\Theta(a, b)$ és la congruència principal generada per $\{(a, b)\}$, i.e. la més petita congruència que conté la parella (a, b).

Direm que una varietat $\mathbb{K}$ té la **propietat de l'extensió de congruències** (ho abreujarem **CEP**) si, i només si, per tot $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}$ tals que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, per tot $\theta \in Con(\mathbf{B})$, existeix $\theta' \in Con(\mathbf{A})$ tal que $\theta' \cap B^2 = \theta$.

Ambdues definicions es poden relativitzar respecte una quasivarietat de la forma següent: Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat.

$\mathbb{K}$ té la **propietat de les congruències (relatives) principals equacionalment definibles** (ho abreujarem **EDPC(R)**) si, i només si, existeix un conjunt finit d'equacions amb 4 variables $\{\sigma_i(x, y, z, w) \approx \tau_i(x, y, z, w) : i < n\}$ tal que per tota àlgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ i per tot $a, b, c, d \in A$.

$$(c, d) \in \Theta_{\mathbb{K}}(a, b) \text{ si, i només si, } \sigma_i^{\mathbf{A}}(a, b, c, d) = \tau_i^{\mathbf{A}}(a, b, c, d) \text{ per tot } i < n.$$

on $\Theta_{\mathbb{K}}(a, b)$ és la congruència principal relativa a $\mathbb{K}$ generada per $\{(a, b)\}$.

$\mathbb{K}$ té la **propietat de l'extensió de congruències (relatives)** (ho abreujarem **(R)CEP**) si, i només si, per tot $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}$ tals que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, per tot $\theta \in Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{B})$, existeix $\theta' \in Con_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ tal que $\theta' \cap B^2 = \theta$.

Teorema 1.5 [10, Thm. IV.3.1 i Thm. IV.4.2] *Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat. Si $\mathbb{K}$ satisfà EDPC(R), aleshores $\mathbb{K}$ és congruent distributiva i satisfà (R)CEP.* □

1.2 Lògiques i Sistemes Deductius proposicionals.

Un **llenguatge proposicional** $\mathcal{L}$ és un llenguatge algebraic. Anomenem els símbols funcionals de $\mathcal{L}$, *connectives proposicionals* . Considerem l'**àlgebra de fórmules** de $\mathcal{L}$, $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \{f^{Fm_{\mathcal{L}}} : f \in \mathcal{L}\}\rangle$, una **lògica proposicional** és una parella $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ on $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Fm_{\mathcal{L}}) \times Fm_{\mathcal{L}}$ és una relació que satisfà les següents propietats:

1. Relació de conseqüència:
   Per tot $\Gamma, \Delta \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ i $\varphi, \psi \in Fm_{\mathcal{L}}$,

   (a) Si $\varphi \in \Gamma$, aleshores $\Gamma \vdash \varphi$.

   (b) Si $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, aleshores $\Delta \vdash \varphi$.

   (c) Si $\Gamma \vdash \varphi$ i per tota $\psi \in \Gamma$, $\Delta \vdash \psi$, aleshores $\Delta \vdash \varphi$

2. Estructural:
   Per tot $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ i tota $\sigma : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ substitució (Tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ es anomenat **substitució**),
   si $\Gamma \vdash \varphi$,aleshores $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$.

Direm que una lògica proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és un **sistema deductiu proposicional** (o una lògica proposicional **finitària**) si, i només si, satisfà la següent condició:

3. Finitarietat:
   Per tot $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, si $\Gamma \vdash \varphi$, aleshores existeix $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finit tal que $\Gamma' \vdash \varphi$.

Anomenem **regla d'inferència** sobre $\mathcal{L}$ a una parella $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, on $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ és *finit* i $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$. Diem que una fórmula ψ és **derivable** de Δ per la regla $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ si, i només si, existeix una substitució σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ i $\sigma(\Gamma) \subseteq \Delta$. A partir d'un conjunt de fórmules $Ax_S \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ que anomenem **axiomes** i d'un conjunt de regles d'inferència R_S sobre $\mathcal{L}$ definim la següent relació $\vdash_S$ entre $\mathcal{P}(Fm_{\mathcal{L}})$ i $Fm_{\mathcal{L}}$:
$\Delta \vdash_S \psi$ *si, i només si,* ψ *pertany al més petit conjunt de fórmules que conté* Δ, *totes les instàncies de substitició de* Ax_S *i és tancat per la derivabilitat de les regles* R_S.
És fàcil veure que $\langle \mathcal{L}, \vdash_S \rangle$ és un sistema deductiu proposicional. Anomenem als sistemes deductius proposicionals obtinguts a partir d'axiomes i regles d'inferència, **càlculs proposicionals**. Donat un sistema deductiu proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, si agafem com a axiomes $Ax_S = \{\varphi \in Fm_{\mathcal{L}} : \emptyset \vdash \varphi\}$ i com a regles $R_S = \{\langle \Gamma, \varphi \rangle, \Gamma \text{ finit } : \Gamma \vdash \varphi\}$, aleshores el càlcul proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash_S \rangle$ coincideix amb $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$.

Donada una lògica proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, definim $\langle \mathcal{L}, \vdash^f \rangle$, el **sistema deductiu associat** a $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, també anomenat **lògica finitària generada** per $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, de la següent manera: per tot $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$,

$$\Gamma \vdash^f \varphi \text{ si, i només si, existeix } \Delta \subseteq \Gamma \text{ finit, tal que } \Delta \vdash \varphi$$

Observi's que si $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és un sistema deductiu, aleshores $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle = \langle \mathcal{L}, \vdash^f \rangle$

Direm que $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és una **extensió** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si, i només si, per tot $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma \vdash_* \varphi$. Ho denotem per $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle \leq \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$. És fàcil veure que $\leq$ és una relació d'ordre.

Direm que $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és una **extensió finitària** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si, i només si, és extensió i és sistema deductiu. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és una **extensió axiomàtica** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si s'obté de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ afegint-hi nous axiomes.

Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lògica proposicional i $T \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$. T és una **teoria** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, quan per qualsevol $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$, $\varphi \in T$ si, i només si, $T \vdash \varphi$. Denotem per $Th(\mathcal{L}, \vdash)$, el conjunt de les teories de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$. Com que és tancat per interseccions arbitràries, aleshores $\mathbf{Th}(\mathcal{L}, \vdash) = \langle Th(\mathcal{L}, \vdash), \cap, \vee \rangle$ és un reticle complet; amb $\bigvee_{i \in I} T_i = \bigcap \{T \in Th(\mathcal{L}, \vdash) : \bigcup_{i \in I} T_i \subseteq T\}$. A més, $Fm_{\mathcal{L}}$ és la més gran teoria de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, i els **teoremes** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ (i.e. $\{\varphi \in Fm_{\mathcal{L}} : \emptyset \vdash \varphi\}$) és la mínima teoria de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$. Observem que no totes les teories d'una lògica són tancades per substitucions, anomenem a aquestes teories, **teories plenament invariants** .

Direm que $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és **extensió purament finitària de** $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si és extensió finitària pròpia de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ i no és extensió de cap extensió axiomàtica pròpia de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$; és a dir, si $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ té els mateixos teoremes que $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$.

Si $\mathbf{A}$ és una àlgebra de tipus $\mathcal{L}$ i $F \subseteq A$, aleshores la parella $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ s'anomena $\mathcal{L}$-matriu . Donada una $\mathcal{L}$-matriu $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, podem definir la següent relació entre $\mathcal{P}(Fm_{\mathcal{L}})$ i $Fm_{\mathcal{L}}$: per tot $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$,

$$\Gamma \models_{\langle \mathbf{A}, F \rangle} \varphi$$

si, i només si, per tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{A}$,

$$h(\Gamma) \subseteq F \text{ implica } h(\varphi) \in F$$

Si $F = \{d\}$, escriurem $\langle \mathbf{A}, d \rangle$ enlloc de $\langle \mathbf{A}, \{d\} \rangle$.

Donada una classe $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$-matrius definim la relació $\models_{\mathcal{M}}$ de la següent manera:

$$\Gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi \text{ si, i només si, per tot } \langle \mathbf{A}, F \rangle \in \mathcal{M}, \Gamma \models_{\langle \mathbf{A}, F \rangle} \varphi$$

Teorema 1.6 [49, pàg. 181] *Si $\mathcal{M}$ és una classe de $\mathcal{L}$-matrius, aleshores $\langle \mathcal{L}, \models_{\mathcal{M}} \rangle$ és una lògica proposicional.* □

Siguin $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lògica proposicional i $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ una $\mathcal{L}$-matriu, direm que $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ és **model** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ (també que F és un $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$**-filtre**) si, i només si, $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{A}, F \rangle} \rangle$ és una extensió de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$.

Observi's que si $\mathbf{A} = \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, aleshores els $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$-filtres, són les teories de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$.

Donada una classe $\mathcal{M}$ de matrius direm que $\mathcal{M}$ és una **semàntica de matrius** per $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si, i només si,

$$\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\mathcal{M}} \rangle$$

La classe $\mathbf{Matr}(\langle\mathcal{L},\vdash\rangle)$ de totes les $\mathcal{L}$-matrius que són model de $\langle\mathcal{L},\vdash\rangle$ és una semàntica de matrius per $\langle\mathcal{L},\vdash\rangle$ (vegeu [77, pàg. 189]).

Fixem-nos que tota $\mathcal{L}$-matriu $\langle\mathbf{A},F\rangle$, podem pensar-la com una estructura $\mathbf{A}^* = \langle A;\{f^{\mathbf{A}} f\in\mathcal{L}\};\{D^{\mathbf{A}^*}\}\rangle$ sobre el llenguatge relacional ampliat $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}\cup\{D\}$ on D és un relacional monàdic tal que $D^{\mathbf{A}^*} = F$ (vegeu [77]). D'aquesta manera podem definir les nocions de submatriu, producte directe, imatge homomorfa forta, antiimatge homomorfa forta, producte reduït i ultraproducte de matrius com les nocions de Teoria de Models de subestructura, producte directe, imatge homomorfa forta, antiimatge homomorfa forta, producte reduït i ultraproducte de les estructures equivalents a les matrius (vegeu [2, 19]). $\mathbb{H}_s$ i $\mathbb{H}_s^{-1}$ denoten imatge homomorfa forta i antiimatge homomorfa forta respectivament.

Teorema 1.7 *Donada una classe de matrius $\mathcal{M}$,*

1. [28, Prop. 3.6]

   (a) $\langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{S}(\mathcal{M})}\rangle$

   (b) $\langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{P}(\mathcal{M})}\rangle$

   (c) $\langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{H}_s(\mathcal{M})}\rangle$

   (d) $\langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{H}_s^{-1}(\mathcal{M})}\rangle$

2. ([28, Thm. 5.1] i [11, Cor.2.9]) $\langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle$ *és sistema deductiu si, i només si,* $\langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{P}_U(\mathcal{M})}\rangle$ □

D'aquest resultat deduïm que donada una classe de $\mathcal{L}$-matrius $\mathcal{M}$,

$$\langle\mathcal{L},\models^f_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{P}_U(\mathcal{M})}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathbb{ISPP}_U(\mathcal{M})}\rangle.$$

Corol.lari 1.8 *Si $\mathcal{M}$ és un conjunt finit de matrius finites, aleshores* $\langle\mathcal{L},\models^f_{\mathcal{M}}\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\mathcal{M}}\rangle$. □

Donada una $\mathcal{L}$-matriu $\langle\mathbf{A},F\rangle$, la **congruència de Leibniz** $\Omega_{\mathbf{A}}F \in Con(\mathbf{A})$ està definida de la següent manera: Per tot $a,b\in A$,

$$(a,b)\in\Omega_{\mathbf{A}}F$$

si, i només si, per tot $\varphi(x,y_0,\ldots,y_{n-1})\in Fm_{\mathcal{L}}$ i tot $c_0,\ldots,c_{n-1}\in A$,

$$\varphi^{\mathbf{A}}(a,c_0,\ldots,c_{n-1})\in F \Leftrightarrow \varphi^{\mathbf{A}}(b,c_0,\ldots,c_{n-1})\in F.$$

$\Omega_{\mathbf{A}} F$ té la propietat de ser la més gran congruència d'**A** compatible amb F (i.e. la més gran congruència θ tal que per tot $a, b \in A$, $a \in F$ i $(a, b) \in \theta$ implica $b \in F$). La funció $\Omega_{\mathbf{A}}$, el domini de la qual és el conjunt de tots els subconjunts d'A, s'anomena **operador de Leibniz** sobre **A**. Direm que una matriu $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ és **reduïda** si $\Omega_{\mathbf{A}} F = \Delta_{\mathbf{A}}$ que és la relació d'identitat sobre **A**. Sigui $\mathbf{Matr}^*(\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle) = \{\mathcal{A} \in \mathbf{Matr}(\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle) : \mathcal{A} \text{ és reduïda}\}$, es dedueix fàcilment (vegeu [77, pàg. 189]) que $\mathbf{Matr}^*(\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle)$ és una semàntica de matrius per $\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle$,

1.3 Algebrització de Sistemes Deductius

Si $\mathcal{L}$ és un llenguatge proposicional i $\mathbb{K}$ és una classe de $\mathcal{L}$-àlgebres, aleshores denotarem per $\models_{\mathbb{K}}$ la relació de conseqüència equacional (entre conjunts d'equacions i equacions de $\mathcal{L}$ definida de següent forma:
Per tot $\mathbf{\Delta} \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq_{\mathcal{L}} \cong Fm_{\mathcal{L}}{}^2$,

$$\mathbf{\Delta} \models_{\mathbb{K}} \varphi \approx \psi$$

si, i només si, per tota àlgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ i per tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{A}$,

$$\text{si per tot } \delta \approx \varepsilon \in \mathbf{\Delta},\ h(\delta) = h(\varepsilon)\ ,\ \text{aleshores}\ \ h(\varphi) = h(\psi)$$

Teorema 1.9 *Si $\mathcal{L}$ és un llenguatge proposicional i $\mathbb{K}$ és una classe de $\mathcal{L}$-àlgebres, aleshores*

1. *$\models_{\mathbb{K}}$ és una relació de conseqüència equacional estructural.*
   i.e. per tota substitució σ,
   $\mathbf{\Delta} \models_{\mathbb{K}} \varphi \approx \psi$ implica $\sigma(\mathbf{\Delta}) \models_{\mathbb{K}} \sigma(\varphi) \approx \sigma(\psi)$
   on $\sigma(\mathbf{\Delta}) = \{\sigma(\delta) \approx \sigma(\varepsilon) : \delta \approx \varepsilon \in \mathbf{\Delta}\}$.

2. *$\models_{\mathbb{K}} = \models_{\mathbb{ISP}(\mathbb{K})}$.* □

Lema 1.10 [28, pàg. 72] *Siguin $\mathcal{L}$ un llenguatge proposicional i $\mathbb{K}$ una classe de $\mathcal{L}$-àlgebres. Si $\mathbb{P}_U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$, aleshores $\models_{\mathbb{K}}$ és una relació de conseqüència finitària.* □

Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle$ un sistema deductiu proposicional i $\mathbb{K}$ una classe de $\mathcal{L}$-àlgebres. $\mathbb{K}$ és una **semàntica algebraica** per a $\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle$ si, i només si, existeix un conjunt *finit* d'equacions amb una variable

$$\delta(x) \approx \varepsilon(x)\ =\ \{\delta_i(x) \approx \varepsilon_i(x) : i < n\},$$

que anomenem **sistema d'equacions definidores**, tal que per tot $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \{\delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi) : \psi \in \Gamma\} \models_{\mathbb{K}} \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)$$

on $\delta(\gamma) \approx \varepsilon(\gamma)$ vol dir $\{\delta_i(\gamma) \approx \varepsilon_i(\gamma) : i < n\}$

Com que $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és una lògica finitària del teorema 1.9 i del lema 1.10, deduïm:

Corol.lari 1.11 [8, Cor. 2.3] *Si $\mathbb{K}$ és una semàntica algebraica per un sistema deductiu proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, aleshores $\mathbb{Q}(\mathbb{K})$ també ho és i té el mateix sistema d'equacions definidores.* □

Teorema 1.12 [8, Thm. 2.4] *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu proposicional, $\mathbb{K}$ una classe de $\mathcal{L}$-àlgebres i $\delta(x) \approx \varepsilon(x)$ un sistema d'equacions en una variable. Les següents condicions són equivalents:*

1. *$\mathbb{K}$ és una semàntica algebraica per a $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ amb equacions definidores $\delta(x) \approx \varepsilon(x)$.*
2. *La classe $\mathcal{M} = \{\langle \mathbf{A}, F_{\mathbf{A}}^{\delta \approx \varepsilon} \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}$ és una semàntica de matrius per $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$.*

on $F_{\mathbf{A}}^{\delta \approx \varepsilon} = \{a \in A : \delta^{\mathbf{A}}(a) = \varepsilon^{\mathbf{A}}(a)\}$ □

Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu proposicional i $\mathbb{K}$ una classe de $\mathcal{L}$ - àlgebres. $\mathbb{K}$ és una **semàntica algebraica equivalent** per a $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si, i només si, $\mathbb{K}$ és una semàntica algebraica per a $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ i existeix un conjunt *finit* de fórmules amb dues variables $\Delta(x, y) = \{\Delta_j(x, y) : j < m\}$ que anomenem fórmules d'equivalència tal que per tota $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathcal{L}}$,

$$\varphi \approx \psi =\mid \models_{\mathbb{K}} \delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \varepsilon(\Delta(\varphi, \psi))$$

on $\delta \approx \varepsilon$ és el conjunt d'equacions definidores de $\mathbb{K}$ i $\delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \varepsilon(\Delta(\varphi, \psi))$ vol dir $\{\delta_i(\Delta_j(\varphi, \psi)) \approx \varepsilon_i(\Delta_j(\varphi, \psi)) : i < n, j < m\}$.

Direm que un sistema deductiu proposicional és **algebritzable** si té una semàntica algebraica equivalent.

Teorema 1.13 [8, Cor. 2.11] *Sigui $\mathbb{K}$ una semàntica algebraica per un sistema deductiu proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$. $\mathbb{K}$ és equivalent a $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ si, i només si, $\mathbb{Q}(\mathbb{K})$ també ho és.* □

Teorema 1.14 [8, Cor. 2.15] *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu proposicional. Si $\mathbb{K}$ i $\mathbb{K}'$ són dues semàntiques algebraiques equivalents per a $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, aleshores $\mathbb{Q}(\mathbb{K}) = \mathbb{Q}(\mathbb{K}')$.* □

Anomenem a aquesta quasivarietat, **quasivarietat semàntica equivalent** de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$.

Teorema 1.15 [8, Cor. 4.6] *Tota extensió finitària d'un sistema deductiu proposicional algebritzable és algebritzable amb el mateix sistema d'equacions definidores i les mateixes fórmules d'equivalència.* □

Corol.lari 1.16 *Siguin $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu proposicional algebritzable i $\mathbb{K}$ la seva quasivarietat semàntica equivalent. Aleshores hi ha un isomorfisme d'ordre dual entre les extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ i les subquasivarietats de $\mathbb{K}$ ordenades per la inclusió.* □

La importància de l'algebrització ve donada pel poder de traducció de propietats lògiques a propietats algebraiques i viceversa. Per exemple:

Teorema 1.17 [8, Thm. 2.17] *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu proposicional axiomatitzable per un conjunt Ax d'axiomes i un conjunt R de regles d'inferència. Si $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és algebritzable, i $\delta \approx \varepsilon$ és un sistema d'equacions definidores i Δ és el conjunt de fórmules d'equivalència, aleshores la quasivarietat semàntica equivalent $\mathbb{K}$ de $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és axiomatitzable per:*

1. $\delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)$ *per tot* $\varphi \in Ax$.
2. $\delta(\Delta(x, x)) \approx \varepsilon(\Delta(x, x))$.
3. $\delta(\varphi_0) \approx \varepsilon(\varphi_0)\ \&\ldots\&\ \delta(\varphi_{n-1}) \approx \varepsilon(\varphi_{n-1}) \Rightarrow \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)$ *on* $\langle \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}, \varphi \rangle \in R$
4. $\delta(\Delta(x, y)) \approx \varepsilon(\Delta(x, y)) \Rightarrow x \approx y$. □

Usant un argument similar al de la demostració de teorema anterior, s'obté el resultat recíproc. És a dir, obtenim una axiomatització del sistema deductiu algebritzable a partir de l'axiomatització de la quasivarietat semàntica equivalent.

Teorema 1.18 *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu proposicional algebritzable, $\mathbb{K}$ la seva quasivarietat semàntica equivalent i $\delta \approx \varepsilon$ el sistema d'equacions definidores i Δ el conjunt de fórmules d'equivalència. Si $\mathbb{K}$ és axiomatitzable per $Eq_{\mathbb{K}}$ conjunt d'equacions i per $Qeq_{\mathbb{K}}$ conjunt de quasiequacions, aleshores $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és axiomatitzable per:*

1. $\Delta(\varphi, \psi)$ *per tota* $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathbb{K}}$.

2. $\Delta(x, x)$

3. $\langle \Delta(x, y), \Delta_j(y, x) \rangle$ *per tot* $j < m$.

4. $\langle \Delta(x, y) \cup \Delta(y, z), \Delta_j(x, z) \rangle$ *per tot* $j < m$.

5. $\langle \bigcup_{k<r} \Delta(x_k, y_k), \Delta_j(f(x_0, \ldots, x_{r-1}), f(y_0, \ldots, y_{r-1})) \rangle$ *per tot* $j < m$, *per tot* $f \in \mathcal{L}$ *d'arietat* r

6. $\langle \Delta(\varphi_0, \psi_0) \cup \cdots \cup \Delta(\varphi_k, \psi_k), \Delta_j(\varphi, \psi) \rangle$ *per tot* $j < m$ *i per tota* $\varphi_0 \approx \psi_0 \ \& \cdots \& \ \varphi_k, \psi_k \Rightarrow \varphi \approx \psi \in Qeq_{\mathbb{K}}$.

7. $\langle \Delta(\delta(x), \varepsilon(x)), x \rangle$

8. $\langle \{x\}, \Delta_j(\delta_i(x), \varepsilon_i(x)) \rangle$ *per tot* $i < n$, $j < m$. □

Corol.lari 1.19 *Sigui* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *un sistema deductiu algebritzable i* $\mathbb{K}$ *la seva quasivarietat semàntica equivalent. Aleshores* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *és finitament axiomatitzable si, i només si,* $\mathbb{K}$ *és finitament axiomatitzable.* □

Teorema 1.20 [8, Thm. 5.1] *Sigui* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *un sistema deductiu proposicional i* $\mathbb{K}$ *una quasivarietat.*

1. *Les següents propietats són equivalents:*

   (a) $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *és algebritzable i* $\mathbb{K}$ *és la seva quasivarietat equivalent.*

   (b) *Per tota àlgebra* $\mathbf{A}$, *l'operador de Leibniz* $\Omega_{\mathbf{A}}$ *és un isomorfisme entre el reticle dels* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$*-filtres i les* $\mathbb{K}$*-congruències d'*$\mathbf{A}$.

2. *Si* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *és algebritzable,* $\mathbb{K}$ *és la seva quasivarietat equivalent,* $\delta(x) \approx \varepsilon(x)$ *és un sistema d'equacions definidores i per tota àlgebra* $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ *i tota congruència* $\theta \in Con(\mathbf{A})$ *definim*

$$H_{\mathbf{A}}\theta = \{a \in A : (\delta^{\mathbf{A}}(a), \varepsilon^{\mathbf{A}}(a)) \in \theta\},$$

   aleshores $H_{\mathbf{A}}$ *restringit a* $\mathbf{Con}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ *és la inversa de* $\Omega_{\mathbf{A}}$. □

Pel cas particular de les teories d'un sistema deductiu obtenim

Corol.lari 1.21 *Sigui* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *un sistema deductiu algebritzable i* $\mathbb{K}$ *la seva quasivarietat semàntica equivalent. Aleshores el reticle de totes les teories de* $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *és distributiu si, i només si,* $\mathbb{K}$ *és congruent distributiva.* □

Un altre exemple de propietats lògiques que tenen el seu equivalent algebraic via l'algebrització del sistema deductiu són: Teorema de Deducció i Teorema Local de Deducció.

Un sistema deductiu proposicional $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ té **Teorema de Deducció** (abreujat DDT), si, i només si, existeix un conjunt *finit* de fórmules amb dues variables

$$E(x, y) = \{\eta_i(x, y) : i < n\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}(x, y)$$

tal que per tot $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$,

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ si, i només si, } \Gamma \vdash E(\varphi, \psi)$$

Teorema 1.22 [10, Thm. VI.1.3] *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu algebritzable i $\mathbb{K}$ la seva quasivarietat semàntica equivalent. Aleshores $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ té Teorema de Deducció (DDT) si, i només si, $\mathbb{K}$ satisfà la propietat de les congruències principals relatives equacionalment definibles (EDPCR).* □

Direm que $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ té **Teorema Local de Deducció** (abreujat LDDT), si, i només si, existeix un conjunt de fórmules (no necessàriament finit) amb dues variables

$$\Sigma(x, y) = \{\eta_i(x, y) : i \in I\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}(x, y)$$

tal que per tot $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, existeix $E(x, y) \subseteq \Sigma(x, y)$ finit tal que

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ si, i només si, } \Gamma \vdash E(\varphi, \psi)$$

Teorema 1.23 [9, Cor. 5.3] *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ un sistema deductiu algebritzable i $\mathbb{K}$ la seva quasivarietat semàntica equivalent. Aleshores $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ té Teorema Local de Deducció (LDDT) si, i només si, $\mathbb{K}$ satisfà la propietat de l'extensió de congruències relatives (RCEP).* □

Capítol 2

El Càlcul Infinitvalorat de Łukasiewicz

2.1 Les lògiques i els càlculs multivalorats

Sigui $\mathcal{L} = \{\rightarrow, \neg\}$ un llenguatge proposicional de tipus $(2,1)$. Considerem l'àlgebra $\langle [0,1], \rightarrow, \neg \rangle$ del mateix tipus, que té per univers el segment real de la unitat $[0,1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ on R és el conjunt dels nombres reals i per tot $x, y \in [0,1]$,

$$x \rightarrow y =_{def} \text{mín}\{1, 1 - x + y\} \qquad \neg x =_{def} 1 - x.$$

Anomenem **subàlgebra de Łukasiewicz** a tota subàlgebra de $\langle [0,1], \rightarrow, \neg \rangle$. Per exemple:

- $\langle [0,1], \rightarrow, \neg \rangle$.
- $\langle [0,1] \cap Q, \rightarrow, \neg \rangle$ on Q és el conjunt dels nombres racionals.

Per cada $0 < n \in \omega$,

- $\mathbf{L}_n = \langle \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}, \rightarrow, \neg \rangle$.
- $\langle [0,1] \cap A, \rightarrow, \neg \rangle$ on A és el conjunt dels nombres algèbrics.

Per cada nombre irracional $0 < \theta < 1$,

- $\mathbf{S}(\theta) = \langle \{m + n\theta : m, n \in Z \text{ i } 0 \leq m + n\theta \leq 1\}, \rightarrow, \neg \rangle$ on Z és el conjunt dels nombres enters.

Donada una subàlgebra de Łukasiewicz **S**, considerem

$$\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{S},1\rangle} \rangle$$

la lògica proposicional obtinguda per la matriu $\langle \mathbf{S}, 1\rangle$. És a dir:
Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \models_{\langle \mathbf{S},1\rangle} \varphi$ si, i només si, per tot $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{S}$ homomorfisme, si $h[\Gamma] \subseteq \{1\}$ aleshores $h(\varphi) = 1$.

Observi's que l'àlgebra $\mathbf{L}_1 = \langle \{0,1\}, \to, \neg \rangle$ és polinomialment equivalent a l'àlgebra de Boole de dos elements i per tant $\models_{\langle \mathbf{L}_1,1\rangle}$ és la lògica proposicional clàssica. En realitat el paper que tenen les subàlgebres de Łukasiewicz respecte aquestes lògiques és el mateix que el que té l'àlgebra de Boole $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ respecte la lògica clàssica: són taules de veritat que admeten més de dos valors de veritat. D'aquesta manera s'obtenen per cada $0 < n \in \omega$, lògiques finitvalents (o finitvalorades) $\models_{\langle \mathbf{L}_n,1\rangle}$ amb $n+1$ valors de veritat i lògiques infinitvalents en el cas que la subàlgebra de Łukasiewicz sigui infinita.

Sigui **S** una subàlgebra de Łukasiewicz. $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$ és una **tautologia de** $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{S},1\rangle} \rangle$ si, i només si per tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{S}$, $h(\varphi) = 1$. Equivalentment, si, i només si, $\emptyset \models_{\langle \mathbf{S},1\rangle} \varphi$. Per cada $0 < n \in \omega$ denotarem per $\mathbf{Taut}_{n+1}$ les tautologies de $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{L}_n,1\rangle} \rangle$. Łukasiewicz i Tarski citen en [53] a Lindenbaum com el primer en demostrar:

2.1 $\mathbf{Taut}_n \subseteq \mathbf{Taut}_m$ *si, i només si* $n-1$ *divideix* $m-1$.

2.2 *Totes les subàlgebres de Łukasiewicz infinites tenen les mateixes tautologies.*

Denotarem per $\mathbf{Taut}_\infty$ el conjunt de les tautologies d'una subàlgebra infinita de Łukasiewicz.

Teorema 2.3 (Lindembaum, citat a [53]) *Per tot* $2 < n \in \omega$,
$\mathbf{Taut}_\infty \subset \mathbf{Taut}_n \subset \mathbf{Taut}_2$. □

Finalment

Teorema 2.4 (Tarski [53]) *Si* $2 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ *és una successió infinita de nombres naturals, aleshores* $\mathbf{Taut}_\infty = \bigcap_{k\in\omega} \mathbf{Taut}_{n_k}$. □

Al 1931, Wajsberg [74] donà una llista d'axiomes

CN1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

CN2. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \nu) \to (\varphi \to \nu))$

CN3. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

CN4. $((\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi) \to \varphi$

que juntament amb la regla **Modus Ponens**: $\langle\{\varphi, \varphi \to \psi\}, \psi\rangle$ permet deduir sintàcticament $\mathbf{Taut}_3$. Aquest càcul proposicional l'anomenem **càlcul trivalorat de Łukasiewicz** i el denotem per $\langle\mathcal{L}, \vdash_3\rangle$. Wajsberg estengué aquest resultat per tot nombre primer i Lindembaum per tot nombre natural (ambdos citats a [53]). Al 1952, Rosser i Turquette [68] donen un mètode constructiu per obtenir l'axiomàtica de cada $\mathbf{Taut}_n$. Aquesta axiomàtica, igual que en el cas 3-valent, té com a única regla el Modus Ponens. El càlculs obtinguts a partir d'aquesta axiomàtica els anomenem **càlculs n-valorats de Łukasiewicz** i els denotem per $\langle\mathcal{L}, \vdash_n\rangle$.

Łukasiewicz va conjecturar que $\mathbf{Taut}_\infty$ era derivable dels axiomes:

Ł1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ł2. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \nu) \to (\varphi \to \nu))$

Ł3. $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

Ł4. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Ł5. $((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \varphi)$

i la regla **Modus Ponens**: $\langle\{\varphi, \varphi \to \psi\}, \psi\rangle$.

Chang [16] i Meredith [57] demostraren que l'axioma **Ł5.** és derivable a partir dels altres quatre. Anomenem a aquest càlcul el **càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz** i el denotem per $\langle\mathcal{L}, \vdash_\infty\rangle$.

Al 1935, Wajsberg [75, pàgina 240] anunciava que havia verificat la conjectura, però no publicà la demostració. La primera demostració fou publicada per Rose i Rosser al 1958 [67] basant-se en la interpretació de les fórmules en l'àlgebra $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ donada per McNaughton [56]. Al 1959, Chang [18] demostrà la conjectura a partir de les propietats de les MV-àlgebres [17] i llur relació amb els grups abelians totalment ordenats.

Cal remarcar que els teoremes de completesa donats en [18, 67, 68, 74] són tots teoremes de completesa en sentit feble. És a dir que només tenen en compte les tautologies.

Teorema 2.5 (teoremes de completesa feble)[18, 67, 68, 74]
Per tota $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$

1. *Per tot $n \in \omega$,*

$$\models_{\langle \mathbf{L}_n, 1\rangle} \varphi \quad \textit{si, i només si} \quad \vdash_{n+1} \varphi$$

2. *Per tota subàlgebra de Łukasiewicz infinita* $\mathbf{S}$,

$$\models_{\langle \mathbf{S}, 1\rangle} \varphi \quad \textit{si, i només si} \quad \vdash_{\infty} \varphi$$

2.2 Algebrització de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$

Observem que les lògiques del tipus $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{S},1\rangle}\rangle$ amb $\mathbf{S}$ subàlgebra de Łukasiewicz, són totes extensions de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ ja que pel teorema 2.3 contenen $\mathbf{Taut}_\infty$ i a més a més són tancades per la regla Modus Ponens. Aquestes lògiques però, no són totes finitàries [42, 76]. Wojcicki demostra en [76], que les lògiques $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}]\cap \mathbf{Q},1\rangle}\rangle$ i $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}],1\rangle}\rangle$ són diferents i no són finitàries, mentre que les lògiques n-valents són totes finitàries i coincideixen amb els càlculs n-valorats de Łukasiewicz. Ja hem vist en el capítol 1 que donada una lògica podem construir la lògica finitària generada per ella. En [76] es demostra

2.6 $\langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}]\cap \mathbf{Q},1\rangle}\rangle \;=\; \langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}],1\rangle}\rangle$

Dels resultats de Wojcicki [76] i el teorema de completesa feble per la lògica infinitvalent de Łukasiewicz [18, 67] obtenim el teorema de completesa forta.

Teorema 2.7 (teorema de completesa forta)
$\langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}]\cap \mathbf{Q},1\rangle}\rangle \;=\; \langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}],1\rangle}\rangle \;=\; \langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ □

Com que $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ és una lògica proposicional finitària, aleshores és un sistema deductiu i per tant podem aplicar les tècniques d'algebrització desenvolupades per Blok i Pigozzi [8]. Per això necessitem introduir les **àlgebres de Wajsberg** (Foren definides per primer cop per Komori [44] amb el nom de *CN-àlgebres*, si bé nosaltres seguim la nomenclatura de Rodríguez en [64]).

Direm que una àlgebra $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow, \neg \rangle$ de tipus $(2,1)$ és una **àlgebra de Wajsberg**, si, i només si satisfà les següents equacions:

W1. $(x \rightarrow x) \rightarrow y \approx y$

W2. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx x \to x$

W3. $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$

W4. $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) \approx x \to x$

Com que la classe de totes les àlgebres de Wajsberg és equacional, aleshores és una varietat que denotarem per $Walg$.

Corol.lari 2.8 *La varietat Walg satisfà:*

W5 $x \to x \approx y \to y$.

Prova :

$$\begin{array}{rcll} x \to x & \approx & (x \to x) \to (x \to x) & \text{de } \mathbf{W1} \\ & \approx & ((x \to x) \to (y \to y)) \to (((y \to y) \to y) \to ((x \to x) \to y)) & \text{de } \mathbf{W2} \\ & \approx & (y \to y) \to (((y \to y) \to y) \to y) & \text{de } \mathbf{W1} \\ & \approx & (y \to y) \to (y \to y) & \text{de } \mathbf{W1} \\ & \approx & y \to y & \text{de } \mathbf{W1} \end{array}$$

□

Per tant $x \to x$ és una constant algebraica de la varietat $Walg$. Definim $1 =_{df} x \to x$.

Teorema 2.9 [66] *El càlcul proposicional infinitvalorat de Lukasiewicz* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ *és algebritzable amb equació definidora* $\delta(p) \approx \varepsilon(p) = p \approx 1$ *i fórmules d'equivalència* $\Delta(p,q) = \{p \to q, q \to p\}$ *i la seva quasivarietat semàntica equivalent és la classe de les àlgebres de Wajsberg.* □

De les propietats dels sistemes deductius algebritzables, obtenim que totes les extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ són algebritzables (teorema 1.15) i les seves quasivarietats semàntiques equivalents són subquasivarietats de la varietat $Walg$ (corol.lari 1.16). A més, hi ha un isomorfisme dual entre el reticle de les extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ i el reticle de les subquasivarietats de $Walg$.

Com que $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ satisfà

$$\varphi, \psi \vdash_\infty \varphi \to \psi \quad \text{i} \quad \varphi, \psi \vdash_\infty \psi \to \varphi$$

(cas particular de la regla G, vegeu [8, Cor. 5.4]), aleshores la classe de matrius $\mathcal{M}_{Walg} = \{\langle \mathbf{A}, 1 \rangle : \mathbf{A} \in Walg\}$ és una semàntica de matrius reduïdes per $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$. En particular tenim que $\mathbf{Matr}^*(\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle) = \mathcal{M}_{Walg}$.

Anàlogament, tota extensió finitària $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ té com a semàntica de matrius reduïdes $\mathbf{Matr}^*(\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle) = \mathcal{M}_{\mathbb{K}} = \{\langle \mathbf{A}, 1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}$ on $\mathbb{K}$ és la quasivarietat semàntica equivalent de $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$. Així doncs, tenim que tota extensió finitària del càlcul proposicional infinitvalorat de Łukasiewicz ve donada per $\models_{\mathcal{M}_{\mathbb{K}}}$ on $\mathbb{K}$ és una subquasivarietat de $Walg$. I tota lògica del tipus $\langle \mathcal{L}, \models_{\mathcal{M}_{\mathbb{K}}} \rangle$ abans esmentat, és una extensió finitària de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$.

El següent esquema il.lustra l'isomorfisme entre extensions finitàries i subquasivarietats:

Extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	**Subquasivarietats de** $Walg$
$\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$	$\mapsto$	$\mathbb{K}_*$ la quasivarietat semàntica equivalent de $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$
$\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1\rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}} \rangle$	$\leftarrow$	$\mathbb{K}$

El teoremes 1.18 i 1.17 ens proporcionen dos algorismes per obtenir una axiomàtització d'una extensió finitària a partir de l'axiomàtica de la seva quasivarietat semàntica equivalent i viceversa. Aquests algorismes preserven la propietat de la finitud. Observem que en el cas de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ i $Walg$ ja coneixem una axiomàtica pel sistema deductiu i una altra per la quasivarietat que no provenen una de l'altra via els algorismes dels teoremes 1.18 i 1.17. Això ens permet reformular els algorismes d'axiomatització de la següent forma:

1. Si $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és un sistema deductiu proposicional axiomatitzable per

   - **Axiomes :**

     (a) **Ł1.**,**Ł2.**,**Ł3.** i **Ł4.**

     (b) $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$

   - **Regles :**

     (a) **M.P.**

     (b) $R_* \subseteq \mathcal{P}_\omega(Fm_{\mathcal{L}}) \times Fm_{\mathcal{L}}$,

   aleshores la seva quasivarietat semàntica equivalent és axiomatitzable per

   (a) **W1.**,**W2.**,**W3.** i **W4.**

(b) $\gamma \approx 1$ per tot $\gamma \in \Gamma$

(c) $\varphi_1 \approx 1 \& \cdots \& \varphi_n \approx 1 \Rightarrow \varphi \approx 1$, per tota $\langle \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}, \varphi \rangle \in R_*$

2. Si $\mathbb{K}$ és una subquasivarietat de $Walg$, axiomatitzable per

   (a) **W1.**,**W2.**,**W3.** i **W4.**

   (b) $Eq_{\mathbb{K}} \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$

   (c) $Qeq_{\mathbb{K}}$ conjunt de quasiequacions,

   aleshores el sistema deductiu equivalent $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}} \rangle$ és axiomatitzable per

   - **Axiomes :**

     (a) **Ł1.**,**Ł2.**,**Ł3.** i **Ł4.**

     (b) $\varphi \to \psi, \psi \to \varphi$, per tota $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathbb{K}}$

   - **Regles :**

     (a) **M.P.**

     (b) $\langle \{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \ldots \varphi_n \to \psi_n, \psi_n \to \varphi_n\}, \varphi \to \psi \rangle$
     i $\langle \{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \ldots \varphi_n \to \psi_n, \psi_n \to \varphi_n\}, \psi \to \varphi \rangle$,
     per tota $\varphi_1 \approx \psi_1 \& \cdots \varphi_n \approx \psi_n \Rightarrow \varphi \approx \psi \in Qeq_{\mathbb{K}}$

D'aquests dos algorismes d'axiomatització deduïm el següent resultat:

2.10 *Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ una extensió finitària de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ i $\mathbb{K} \subseteq Walg$ la seva quasivarietat semàntica equivalent, aleshores*

1. *$\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és extensió axiomàtica pròpia de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ si, i només si $\mathbb{K}$ és una subvarietat pròpia de $Walg$.*

2. *$\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és extensió purament finitària de de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ si, i només si $\mathbb{V}(\mathbb{K}) = Walg$ i $\mathbb{K} \neq Walg$.* □

Observem doncs, que *estudiar les extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$, és equivalent a estudiar les subquasivarietats de la varietat $Walg$.* D'aquesta manera podem emprar eines i resultats algebraics per obtenir resultats lògics.

Part II

MV-àlgebres

Capítol 3

MV-àlgebres

Observem que en el cas de la lògica clàssica, les àlgebres de Boole no es defineixen normalment a partir de les operacions $\rightarrow$ i $\neg$ sinó a partir de les constants 0 i 1 i les operacions $\vee$, $\wedge$ i $\neg$. Ambdues definicions són equivalents, si bé s'usa mes freqüentment la segona per tenir propietats algebraiques més addients.

Anàlogament al cas clàssic nosaltres podem donar una definició polinomialment equivalent de les àlgebres de Wajsberg, són les anomenades **MV-àlgebres**.

3.1 Definicions i propietats bàsiques

Una **MV-àlgebra** és una àlgebra $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ de tipus $(2,1,0)$ que satisfà les següents equacions:

MV1. $(x \oplus y) \oplus z \approx x \oplus (y \oplus z)$

MV2. $x \oplus y \approx y \oplus x$

MV3. $x \oplus 0 \approx x$

MV4. $\neg(\neg x) \approx x$

MV5. $x \oplus \neg 0 \approx \neg 0$

MV6. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(x \oplus \neg y) \oplus x$

Si prenem $y = \neg 0$ en MV6, deduïm:

MV7. $x \oplus \neg x \approx \neg 0$.

Donada una MV-àlgebra **A**, podem definir la constant 1, i les operacions binàries $\odot$ i $\rightarrow$ de la següent manera:

1. $1 =_{def} \neg 0$
2. $x \odot y =_{def} \neg(\neg x \oplus \neg y)$
3. $x \rightarrow y =_{def} \neg x \oplus y$

Originalment, Chang [17] va definir les MV-àlgebres amb les operacions $\oplus$, $\odot$, $\neg$ i les constants 0 i 1. La nostra presentació més curta és equivalent a la de Chang i el primer en donar-la fou Mangani [54]. Com que la classe de totes les MV-àlgebres està definida equacionalment, és una varietat que denotem per $\mathbb{W}$.

El següent resultat ens dóna l'equivalència polinomial entre les àlgebres de Wajsberg i les MV-àlgebres.

Teorema 3.1 [35, teoremes 4 i 5]

1. *Si* $\mathbf{A} = \langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ *és una MV-àlgebra, i definim sobre* A*:*

$$x \rightarrow y =_{def} \neg x \oplus y,$$

aleshores $\mathbf{A}' = \langle A, \rightarrow \neg\rangle$ *és una àlgebra de Wajsberg tal que* $\neg x \rightarrow y = x \oplus y$.

2. *Si* $\mathbf{B} = \langle B, \rightarrow, \neg\rangle$ *és una àlgebra de Wajsberg i definim sobre* B*:*

$$x \oplus y =_{def} \neg x \rightarrow y \quad i \quad 0 =_{def} \neg(x \rightarrow x),$$

aleshores $\mathbf{B}^* = \langle B, \oplus, \neg, 0\rangle$ *és una MV-àlgebra tal que* $\neg x \oplus y = x \rightarrow y$.

3. *Si* $\mathbf{A}$ *és una MV-àlgebra i* $\mathbf{B}$ *és una àlgebra de Wajsberg*

$$(\mathbf{A}')^* = \mathbf{A} \quad i \quad (\mathbf{B}^*)' = \mathbf{B}$$

□

Observi's que la definició de $\oplus$ i $\odot$ a partir de $\neg$ i $\rightarrow$ ens suggereix que són la generalització de les connectives clàssiques disjunció i conjunció per la lògica de Łukasiewicz.

Altres presentacions equivalents son: les *L-àlgebres* de Lacava [46], les *S-àlgebres* de Buff [15], els *bricks* de Bosbach [12], els *Wajsberg hoops acotats* definits per Blok i Ferrerim [34, 5, 6] així com les BCK-àlgebres acotades i commutatives [73, 60].

Des d'ara, i si no diem el contrari, considerem $\mathcal{L}$ el llenguatge algebraic $\{\oplus, \neg, 0\}$.

3.2 El singletó $\{0\}$ és un exemple trivial de MV-àlgebra.

3.3 El primer exemple de MV-àlgebra no trivial és:

$$[\mathbf{0},\mathbf{1}] = \langle [0,1], \oplus, \neg, 0 \rangle$$

que té per univers el segment real de la unitat $[0,1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ on R és el conjunt dels nombres reals i per tot $x, y \in [0,1]$ definim

$$x \oplus y =_{def} \text{mín}\{1, x+y\} \qquad \neg x =_{def} 1 - x \qquad 0 = 0.$$

3.4 Donada una àlgebra de Boole $\langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1 \rangle$ definim la MV-àlgebra

$$\mathbf{B} = \langle B, \oplus, \neg, 0 \rangle$$

tal que per tot $x, y \in B$ definim

$$x \oplus y =_{def} x \vee y \qquad \neg x =_{def} -x.$$

3.5 Subàlgebres de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$:

- $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q} = \langle [0,1] \cap Q, \oplus, \neg, 0 \rangle$.
- Per cada $0 < n < \omega$,

$$\mathbf{Ł}_n = \langle \{\frac{r}{n} : r \in Z \text{ i } 0 \leq r \leq n\}, \oplus, \neg, 0 \rangle.$$

- Per cada nombre irracional $0 < \theta < 1$,

$$\mathbf{S}(\theta) = \langle \{m + n\theta : m, n \in Z \text{ i } 0 \leq m + n\theta \leq 1\}, \oplus, \neg, 0 \rangle.$$

- **[0,1]∩A**$= \langle [0,1] \cap A, \oplus, \neg, 0\rangle$
  on A és el conjunt dels nombres algèbrics.

Observem que les subàlgebres de **[0,1]** són polinomialment equivalents a les subàlgebres de Łukasiewicz.

3.6 Sigui **Fm** l'àlgebra de fórmules sobre el llenguatge $\{\oplus, \neg, 0\}$ i considerem la relació d'equivalència $\sim$ tal que per tot $\alpha, \beta \in Fm$,

$$\alpha \sim \beta \text{ si, i només si, } \alpha^{\mathbf{[0,1]}} = \beta^{\mathbf{[0,1]}}.$$

$$\mathbf{Fm}/\sim\, = \langle Fm/\sim, \oplus, \neg, 0\rangle$$

tal que per tot $\alpha/\sim,\ \beta/\sim\, \in Fm/\sim$,

$$\alpha/\sim\, \oplus\, \beta/\sim\, =_{def} (\alpha \oplus \beta)/\sim \qquad \neg(\alpha/\sim) =_{def} (\neg\alpha)/\sim$$

$$0 =_{def} \neg\tau/\sim \text{ per qualsevol tautologia } \tau, \text{ és a dir: } \tau^{\mathbf{[0,1]}} = 1.$$

Fm/$\sim$ és l'àlgebra lliure respecte $\mathbb{W}$ amb $\aleph_0$ generadors.

3.7 Sigui $\mathbf{G} = \langle G, \vee, \wedge, +, -, 0\rangle$ un grup abelià reticulat i sigui $u \in G$, $u > 0$.

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u) = \langle \{x \in G : 0 \leq x \leq u\}, \oplus, \neg, 0\rangle$$

tal que per tot $0 \leq x, y \leq u$:

$$x \oplus y =_{def} u \wedge x + y \qquad \neg x =_{def} u - x.$$

3.8 Donat un grup additiu abelià totalment ordenat **G** i $0 \leq b \in G$. Per cada $0 < n < \omega$,

$$\mathbf{Ł}_n^{G,b} = \langle \{(\frac{r}{n}, g) \in Q_n \otimes G : (0,0) \leq (\frac{r}{n}, g) \leq (1, b)\}, \oplus, \neg, 0\rangle$$

on $Q_n \otimes G$ és el producte lexicogràfic del conjunt dels racionals amb denominador n, per G. Per tot $(0,0) \leq (x_1, x_2), (y_1, y_2) \leq (1; b)$,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &=_{def} \text{mín}\{(1, b), (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\} \\ \neg(x_1, x_2) &=_{def} (1 - x_1, b - x_2) \\ 0 &=_{def} (0, 0)\end{aligned}$$

En el cas particular que **G** sigui el grup additiu dels enters **Z**, escriurem

$$\mathbf{Ł}_n^{\omega} = \mathbf{Ł}_n^{Z,0} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{Ł}_n^{k} = \mathbf{Ł}_n^{Z,k}.$$

L'àlgebra $\mathbf{Ł}_1^{\omega}$ és equivalent a l'àlgebra **C** definida per Chang [17] i la generalització d'aquesta àlgebra per qualsevol nombre natural n, $\mathbf{Ł}_n^{\omega}$ és equivalent a l'àlgebra $\mathbf{S}_n^{\omega}$ definida per Komori [44].

3.9 Siguin A un conjunt no buit i $[0,1]^A$ el conjunt de les funcions d'A en l'interval $[0,1]$.

$$\mathbf{[0,1]^A} = \langle [0,1]^A, \oplus, \neg, 0\rangle$$

tal que per tot $f, g \in [0,1]^A$ i per tot $a \in A$:

$$(\neg f)(a) =_{def} \neg(f(a)) \qquad (f \oplus g)(a) =_{def} f(a) \oplus g(a) \qquad 0(a) =_{def} 0.$$

3.10 Una funció $f : [0,1]^n \to [0,1]$ és una **funció de McNaughton sobre el cub** $[0,1]^n$ si, i només si, és una funció contínua i lineal a trossos amb coeficients enters. i.e.

1. f és contínua amb la topologia natural de $[0,1]^n$
2. Existeix un nombre finit de polinomis de grau 1, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, de manera que cada
$$\lambda_i = m_{i1}x_1 + \ldots + m_{i(n)}x_n + b_i,$$
amb $b_i, m_{il} \in Z$ per tot $1 \leq l \leq n$, i tal que per cada $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$, existeix j, $1 \leq j \leq k$ tal que
$$f(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_j(a_1, \ldots, a_n).$$

Obervi's que tota funció de McNaughton pot ser pensada com una funció amb κ variables (κ un cardinal qualsevol) que només depèn, en realitat d'un nombre finit de variables. Així, una funció $g : [0,1]^\kappa \to [0,1]$ és una **funció de McNaughton sobre el cub** $[0,1]^\kappa$ si, i només si, existeix un nombre finit d'ordinals $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \kappa$ i una funció de McNaughton f sobre $[0,1]^n$ tal que per tot $\bar{x} \in [0,1]^\kappa$, $g(\bar{x}) = f(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})$. En el cas particular que $\kappa = \aleph_0$, direm que g és senzillament una **funció de McNaughton**.

Siguin M, M_n i M_κ els conjunts de totes les funcions de McNaughton, sobre els cubs $[0,1]^{\aleph_0}$, $[0,1]^n$, $[0,1]^\kappa$ respectivament. Definim les MV-àlgebres:

- $\mathbf{M} = \langle M, \oplus, \neg, 0\rangle \subseteq \mathbf{[0,1]}^{[0,1]^\omega}$
- $\mathbf{M}_n = \langle M_n, \oplus, \neg, 0\rangle \subseteq \mathbf{[0,1]}^{\mathbf{[0,1]^n}}$
- $\mathbf{M}_\kappa = \langle M_\kappa, \oplus, \neg, 0\rangle \subseteq \mathbf{[0,1]}^{[0,1]^\kappa}$

on les operacions estan definides punt a punt com en l'exemple anterior.

$\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_n$ i $\mathbf{M}_\kappa$ són les àlgebres lliures respecte $\mathbb{W}$ amb $\aleph_0, n, \kappa$ generadors respectivament. Les funcions de McNaughton foren introduïdes per primer cop per McNaughton [56] per caracteritzar les interpretacions de les fórmules de $\mathcal{L}$ en l'àlgebra $[\mathbf{0,1}]$:

Teorema 3.11 (Teorema de McNaughton)[56, teorema 2]
Donada una funció $f : [0,1]^n \to [0,1]$, existeix una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in Fm_{\mathcal{L}}$ tal que $f = \varphi^{[\mathbf{0,1}]}$ si, i només si, f és una funció de McNaughton sobre el cub $[0,1]^n$

Observació: el Teorema de McNaughton va ser originalment enunciat i demostrat pel lleguatge $\{\to, \neg\}$ i l'àlgebra $\langle [0,1], \to, \neg \rangle$. Donada l'equivalència polinomial entre les àlgebres de Wajsberg i les MV-àlgebres, hem reformulat el teorema a $\mathcal{L} = \{\oplus, \neg, 0\}$ i l'àlgebra $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = \langle [0,1], \oplus, \neg, 0 \rangle$.

En tots els exemples que hem donat de MV-àlgebres hem partit d'estructures que es poden ordenar. El següent resultat ens permet obtenir de forma algebraica un ordre per qualsevol MV-àlgebra, és a dir podem definir un ordre a partir d'una equació.

Lema 3.12 *Si definim sobre una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ la següent relació:*

$$x \leq y \quad \textit{si, i només si,} \quad \neg x \oplus y = x \to y = 1,$$

aleshores $\leq$ és una relació d'ordre parcial sobre $\mathbf{A}$ que té les següents propietats de compatibilitat amb les constants i les operacions: Per tot $a, b, c \in A$,

1. $0 \leq a \leq 1$
2. *Si $a \leq b$ aleshores:*
   - $a \oplus c \leq b \oplus c$
   - $a \odot c \leq b \odot c$
   - $c \to a \leq c \to b$
   - $b \to c \leq a \to c$
   - $\neg b \leq \neg a$
3. $a \odot b \leq c$ *si, i només si,* $a \leq b \to c$. □

Anomenem **ordre natural d' A** a la relació $\leq$ definida en **A**. Observi's que l'ordre natural de **[0,1]**, **B**, $\mathbf{L}_n^{G,b}$ i $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$ coincideix amb l'ordre habitual dels reals, de l'àlgebra de Boole amb univers B, del producte lexicogràfic $Q_n \otimes G$ i del grup reticulat amb univers G respectivament.

Direm que una MV-àlgebra és una **MV-cadena** si, i només si, el seu ordre natural és ordre total.

Sigui **A** una MV-àlgebra i definim sobre **A** les operacions binàries $\vee$ i $\wedge$ de la següent manera:

- $x \vee y =_{def} \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \rightarrow y) \rightarrow y.$
- $x \wedge y =_{def} \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(\neg x \odot y) \odot y = (x \oplus \neg y) \odot y$

Lema 3.13 *Sigui* **A** *una MV-àlgebra.*

1. *Per tot $a, b \in A$,*
   - *$a \vee b$ és el suprem respecte l'ordre natural d'**A** de a i b.*
   - *$a \wedge b$ és l'ínfim respecte l'ordre natural d'**A** de a i b.*
2. *$\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ és una àlgebra de Kleene. i.e*
   (a) *És un reticle distributiu amb màxim 1 i mínim 0.*
   (b) *Satisfà les lleis de DeMorgan*
   $$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \qquad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$
   (c) *Satisfà la llei de Kleene*
   $$x \wedge \neg x \leq y \vee \neg y$$
3. *Per tot $a, b \in A$, $a \odot b \leq a \wedge b \leq a, b \leq a \vee b \leq a \oplus b$.* □

Observem que $\langle A, \odot, \oplus, \neg, 0, 1\rangle$ és una àlgebra de Boole si, i només si, **A** és una MV-àlgebra tal que per tot $a, b \in A$, $a \odot b = a \wedge b$ i $a \oplus b = a \vee b$.

Qualsevol MV-àlgebra satisfà les següents propietats (vegeu per exemple [20]):

3.14 $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$.

3.15 $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$.

3.16 $x = y$ *si, i només si,* $x \to y = 1$ *i* $y \to x = 1$.

3.17 $x = 1$ *i* $y = 1$ *si, i només si,* $x \odot y = 1$ *si, i només si,* $x \wedge y = 1$.

3.18 $x = 0$ *i* $y = 0$ *si, i només si,* $x \oplus y = 0$ *si, i només si,* $x \vee y = 0$.

Sigui **A** una MV-àlgebra, per tot $n < \omega$ definim per inducció les operacions unàries nx, x^n i les operacions binàries $x \to_n y$ sobre **A**.

- $0x =_{def} 0$ i per tot $n < \omega$, $(n+1)x =_{def} x \oplus nx$.
- $x^0 =_{def} 1$ i per tot $n < \omega$, $x^{(n+1)} =_{def} x \odot x^n$.
- $x \to_0 y =_{def} y$ i per tot $n < \omega$, $x \to_{n+1} y =_{def} x \to (x \to_n y)$

Com a conseqüència de les definicions de $\odot$, nx, x^n i $\to_n$ tenim que tota MV-àlgebra satisfà les equacions:

$$n(\neg x) \approx \neg(x^n), \quad \neg(nx) \approx (\neg x)^n \text{ i } x \to_n 0 \approx n(\neg x)$$

El següent resultat ens dóna les propietats de compatibilitat amb l'ordre natural.

Lema 3.19 *Sigui* **A** *una MV-àlgebra. Per tot* $a, b \in A$,

1. $a \leq na$ *i* $a^n \leq a$, *per tot* $0 < n < \omega$.
2. *Si* $a \leq b$, *aleshores* $na \leq nb$ *i* $a^n \leq b^n$ *per tot* $n < \omega$.
3. *Si* $a \wedge b = 0$, *aleshores* $na \wedge nb = 0$ *per tot* $n < \omega$.
4. *Si* $a \vee b = 1$, *aleshores* $a^n \vee b^n = 1$ *per tot* $n < \omega$. □

3.2 Ideals, congruències i homomorfismes

Sigui **A** una MV-àlgebra. Un subconjunt $I \subseteq A$ és un **ideal** si satisfà:

I1. $0 \in I$,

I2. Si $a \in I$ i $b \in I$ aleshores $a \oplus b \in I$,

I3. Si $a \leq b$ i $b \in I$ aleshores $a \in I$.

Del lema 3.13, tenim que $\mathbf{L}(\mathbf{A}) = \langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ és un reticle acotat distributiu amb mínim 0 i màxim 1. A més com que $x \vee y \leq x \oplus y$ [lema 3.13, 3)], es dedueix que si I és un ideal de $\mathbf{A}$ aleshores també és un ideal de reticle de $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Denotarem per $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ el conjunt dels ideals de $\mathbf{A}$. $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ és tancat per interseccions i per suprems i per tant és l'univers d'un reticle algebraic, ordenat per la inclusió, amb mínim $\{0\}$ i màxim A que denotarem per $\mathbf{I}(\mathbf{A})$. El següent resultat ens caracteritza els ideals d'una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ a partir de les seves congruències.

Teorema 3.20 [17, teorema 4.3] *Sigui* $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = \langle Con(\mathbf{A}), \cap, \vee, \Delta, A^2\rangle$ *el reticle algebraic acotat de les congruències de la MV-àlgebra* $\mathbf{A}$*. La correspondència:*

$$\begin{array}{rcl} J : Con(\mathbf{A}) & \rightarrow & \mathcal{I}(\mathbf{A}) \\ \theta & \mapsto & J(\theta) = 0/\theta = \{a \in A : (a, 0) \in \theta\} \end{array}$$

estableix un isomorfisme de $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ *sobre* $\mathbf{I}(\mathbf{A})$*. I la inversa de* J *ve donada per:*

$$\begin{array}{rcl} J^{-1} : \mathcal{I}(\mathbf{A}) & \rightarrow & Con(\mathbf{A}) \\ I & \mapsto & J^{-1}(I) = \{(a, b) \in A^2 : (a \odot \neg b) \oplus (b \odot \neg a) \in I\} \end{array}$$

□

Així per cada $I \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$, escriurem $\mathbf{A}/I$ enlloc de $\mathbf{A}/J^{-1}(I)$. Siguin $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues MV-àlgebres i $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorfisme de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Anomenem **nucli de** h, el denotem per $h^{-1}(\{0\})$ a l'antiimatge del zero de $\mathbf{B}$.

$$h^{-1}(\{0\}) = \{x \in A : h(x) = 0\}$$

Observi's la distinció entre el nucli de h que com veurem és un ideal i el $Ker(h) = \{(a, b) \in A^2 : h(a) = h(b)\} \in Con(\mathbf{A})$. Del teorema anterior i de la relació entre congruències i homomorfismes (vegeu [14]) obtenim:

Lema 3.21 *Siguin* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *dues MV-àlgebres i* $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfisme. Són vàlides les següents propietats:*

1. *Per cada* $I \in \mathcal{I}(\mathbf{B})$, $h^{-1}(I) = \{x \in A : h(x) \in I\} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$*. En particular el nucli de* h *és un ideal.*

2. *Per tot* $I \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$, I *és el nucli de l'homomorfisme canònic* $h_I : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/I$.

3. *$h(\mathbf{A})$ és isomorf a $\mathbf{A}/I$ on I és el nucli de h.*

4. *Per tot $a, b \in A$, $h(a) \leq h(b)$ si, i només si, $a \odot \neg b \in h^{-1}(\{0\})$.* □

En [24] i [35] es demostra que la varietat de les MV-àlgebres és aritmètica, és a dir, tota MV-àlgebra és congruent permutable i congruent distributiva. Per tant, per qualsevol MV-àlgebra $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}(\mathbf{A})$ és un reticle distributiu.

Sigui $\mathbf{A}$ una MV-àlgebra i sigui $X \subseteq A$, definim l'**ideal generat** per X i el denotem com $\langle X \rangle = \bigcap\{J \in \mathcal{I}(\mathbf{A}) : X \subseteq J\}$. Direm que un ideal és **principal** si està generat per un singletó. Donat $a \in A$, escriurem $\langle a \rangle$ enlloc de $\langle \{a\} \rangle$.

3.22 $\langle a \rangle = \{x \in A : x \leq na \ \ \textit{per algun} \ \ n \in \omega\}$

3.23 $\langle X \cup \{a\} \rangle = \{x \in A : x \leq na \oplus b \ \ \textit{per algun} \ \ n \in \omega \ \ \textit{i} \ b \in X\}$

3.24 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \wedge b \rangle$

3.25 $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle = \langle a \oplus b \rangle = \langle a \vee b \rangle$

Direm que un ideal I d'$\mathbf{A}$ és **primer** si, i només si, és un ideal primer de $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. És a dir:

IP. $I \neq A$ i $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$.

Si $\mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ representa el conjunt dels ideals primers d'$\mathbf{A}$, aleshores tenim:

Teorema 3.26 *Siguin $\mathbf{A}$ una MV-àlgebra i $I, J \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$.*

1. *$I \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ si, i només si, $\mathbf{A}/I$ és una MV-cadena.*

2. *Si $\mathbf{A}$ és una MV-cadena aleshores $\mathcal{S}pec(\mathbf{A}) = \mathcal{I}(\mathbf{A}) \setminus \{A\}$.*

3. *Si $I \neq A$ i $J \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ tal que $J \subseteq I$, aleshores $I \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$.*

4. *Si $I \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$, aleshores el conjunt $\{H \in \mathcal{I}(\mathbf{A}) : I \subseteq H\}$ està totalment ordenat per la inclusió.*

5. *Si $I \neq A$, aleshores existeix $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ tal que $I = \bigcap_{P \in \mathcal{J}} P$.*

6. *$I \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ si, i només si, és un ideal finitament $\cap$-irreductible. i.e. Si $I_0, \ldots I_{n-1} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$*

$$I = I_0 \cap \cdots \cap I_{n-1} \ \textit{implica} \ I = I_k \ \textit{per algun} \ k < n \qquad \square$$

Direm que $I \subseteq A$ és un ideal **maximal** d'**A** si, i només si, I és un ideal propi d'**A** i no està estrictament contingut en cap ideal propi d'**A**. És a dir:

IM. $I \neq A$ i $I \subsetneq J \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ implica $J = A$.

Denotem per $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ el conjunt dels ideals maximals d'**A**. Del teorema 3.26 deduïm el següent resultat:

Teorema 3.27 *Siguin* $\mathbf{A}$ *una MV-àlgebra i* $I \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$.

1. *Si* $I \in Spec(\mathbf{A})$, *aleshores existeix un únic* $M \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *tal que* $I \subseteq M$.
2. *Si* $I \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, *aleshores* $I \in Spec(\mathbf{A})$. □

Recordem que una àlgebra **A** és representable com a **producte subdirecte** d'una família d'àlgebres $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$,

$$\mathbf{A} \hookrightarrow_{ps} \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

si, i nomes si existeix

$$h : \mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

una immersió (homomorfisme injectiu) d'**A** en l'àlgebra producte $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, de manera que per tot $i \in I$,

$$\pi_i \circ h(A) = A_i$$

on $\pi_i : \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i$ és la projecció canònica, $\pi_i(a) = a(i)$ per tot $a \in \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$.
El següent resultat de Birkhoff ens caracteritza quan una àlgebra és representable com a producte subdirecte.

Teorema 3.28 [39, teoremes 1 i 2, pàg. 123] *Una àlgebra* **A** *és representable com a* **producte subdirecte** *de* $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *si, i nomes si existeix una família* $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq Con(\mathbf{A})$ *tal que*

1. $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}/\theta_i$ *per tot* $i \in I$.
2. $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta$. □

Del fet que $\mathbb{W}$ és varietat i que les congruències queden determinades pels ideals (teorema 3.20), es dedueix:

Teorema 3.29 *Una MV-àlgebra* $\mathbf{A}$ *és representable com a* **producte subdirecte** *d'una família* $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *de MV-àlgebres si, i només si, existeix una família* $\{J_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{A})$ *tal que*

1. $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}/J_i$ *per tot* $i \in I$.
2. $\bigcap_{i \in I} J_i = \{0\}$. □

D'aquest resultat i del teorema 3.26 deduïm:

Teorema 3.30 (Teorema de representació subdirecta de Chang [18].)
Tota MV-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MV-cadenes.
□

Usant la propietat 6) del teorema 3.26 es dedueix:

Corol.lari 3.31 *Una MV-àlgebra és una MV-cadena si, i només si, és subdirectament idescomposable (finitament subdirectament irreductible).* □

Una àlgebra $\mathbf{A}$ és **simple** quan $Con(\mathbf{A}) = \{\Delta_A, A^2\}$. En el cas de les MV-àlgebres com que pel teorema 3.20 hi ha isomorfisme entre congruències i ideals podem donar una definició equivalent:

Una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ *és* **simple** *si, i només si, l'únic ideal propi d'*$\mathbf{A}$ *és* $\{0\}$.

Observem que si $\mathbf{A}$ és simple, aleshores $\{\{0\}\} = \mathcal{M}(\mathbf{A})$ i pels teoremes 3.26 i 3.27 tenim que $\mathbf{A}$ és una MV-cadena. El següent resultat ens caracteritza les MV-àlgebres simples.

Teorema 3.32 [18] *Per qualsevol MV-àlgebra* $\mathbf{A}$, *les següents condicions són equivalents:*

1. $\mathbf{A}$ *és simple.*
2. $\mathbf{A}$ *és isomorf a una subàlgebra de* $[\mathbf{0,1}]$.
3. *Per tot* $a \in A$, $a \neq 0$, *existeix un nombre natural* $n > 0$ *tal que* $nx = 1$.
   □

Així doncs, les àlgebres simples són (tret d'isomorfisme) polinomialment equivalents a les subàlgebres de Łukasiewicz (vegeu secció 2.1).

3.33 *Tota MV-àlgebra simple finita és isomorfa a* $\mathbf{L}_n$ *per algun nombre natural* n.

3.34 $\mathbf{L}_n \subseteq \mathbf{L}_m$ *si, i només si,* n *divideix* m *(en símbols* $n|m$*).*

3.35 *[72, lema 2.2.]* $\mathbf{L}_n$ *és submergible en una MV-àlgebra* $\mathbf{A}$ *si, i només si, existeix* $a \in A$, $a \neq 1$ *tal que* $(n-1)(\neg a) = a$.

Lema 3.36 *Siguin* $0 < r < n < \omega$ *tals que* $m.c.d.(n,r) = 1$, *aleshores* $\frac{r}{n}$ *genera* $\mathbf{L}_n$.

Prova : Com que

$$\frac{m}{n} = m\frac{1}{n} \quad \text{per qualsevol } 0 \leq m \leq n$$

és evident que $\frac{1}{n}$ genera $\mathbf{L}_n$. Per tant només hem de demostrar que si $m.c.d.(n,r) = 1$, aleshores $\frac{1}{n}$ es pot obtenir a partir de $\frac{r}{n}$ mitjançant MV-operacions.
Si $m.c.d.(n,r) = 1$, aleshores,per l'algorisme d'Euclides, existeixen dues successions finites de nombres naturals $t_0, t_1, \ldots, t_{s+1}$ i $m_1, m_2, \ldots, m_s$ tals que:

$$\begin{aligned}
&t_0 = n \\
&t_1 = r \\
&t_{s+1} = 1 \\
&t_i > t_{i+1} > 0 \\
&t_{i+2} = t_i - m_{i+1}t_{i+1}
\end{aligned}$$

Així obtenim que $\frac{t_i}{t_0} \in \mathrm{L}_n$, ja que $t_0 = n$ i $0 < t_i \leq t_0 = n$.
Sabent que $t_{i+2} = t_i - m_{i+1}t_{i+1}$, és tracta només d'una simple verficació veure que

$$\frac{t_{i+2}}{t_0} = \neg(\neg\frac{t_i}{t_0} \oplus m_{i+1}\frac{t_{i+1}}{t_0})$$

Obviament, $\frac{t_0}{t_0} = 1$ i $\frac{t_1}{t_0} = \frac{r}{n}$ s'obtenen a partir de $\frac{r}{n}$. Així doncs, per inducció tenim que per qualsevol $0 \leq i \leq s+1$, $\frac{t_i}{t_0} \in \mathrm{L}_n$ i $\frac{t_i}{t_0}$ s'obté de $\frac{r}{n}$.
En particular $\frac{t_{s+1}}{t_0} = \frac{1}{n}$ s'obté de $\frac{r}{n}$. $\square$

Una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ és **semi-simple**, si, i només si, és representable com a producte subdirecte de simples. Trivialment tota àlgebra simple és semi-simple.
Donada una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ anomenem **radical d'A**, escriurem $\mathbf{Rad(A)}$, a la intersecció de tots els ideals maximals d'$\mathbf{A}$. És a dir:

$$\mathbf{Rad(A)} = \bigcap_{I \in \mathcal{M}(\mathbf{A})} I$$

Com que $\mathbf{I(A)}$ és un reticle complet algebraic, tenim que $\mathbf{Rad(A)} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$. Del teorema 3.29 obtenim la següent caracterització per les MV-àlgebres semi-simples

Teorema 3.37 *Una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ és semi-simple si, i només si, $Rad(\mathbf{A}) = \{0\}$.* □

Observem que tota MV-cadena semi-simple és simple ja que per ser cadena només té un únic maximal que és $\mathbf{Rad(A)}$.
Sigui $\mathbf{A}$ una MV-àlgebra, per tot $a \in \mathbf{A}$, diem que a és un **infinitèssim** d'$\mathbf{A}$, escriurem $a \in \mathbf{Inf(A)}$, si, i només si, $na \leq \neg a$ per tot $n \in \omega$.

Teorema 3.38 [64, teorema 6, pàg. 109] *Per tota MV-àlgebra $\mathbf{A}$,*

$$\mathbf{Rad(A)} = \mathbf{Inf(A)} \qquad \square$$

Teorema 3.39 [64, teorema 3, pàg. 126] *Una MV-àlgebra $\mathbf{A}$ és finita si, i només si, és isomorfa a un producte finit de MV-àlgebres simples finites. i.e.*

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k} \text{ on } n_1, \ldots, n_k \in \omega$$

Aquesta representació és única llevat de l'ordre dels factors. □

Capítol 4

ℓ-grups i MV-àlgebres

4.1 El functor Γ.

Recordem que un **grup abelià reticulat**, per simplificar **ℓ-grup**, és una àlgebra $\langle G, +, -, \vee, \wedge, 0\rangle$ tal que el reducte $\langle G, +, -, 0\rangle$ és un grup abelià, el reducte $\langle G, \vee, \wedge\rangle$ és un reticle i que satisfà la següent identitat:

$$(x \vee y) + z \approx (x + z) \vee (y + z).$$

Siguin $\mathbf{G}$ un ℓ-grup $0 < u \in G$. (L'ordre ve determinat per l'estructura de reticle). Recordem la transformació $\mathbf{\Gamma}$, (definida en 3.7)

$$\mathbf{\Gamma} : (\mathbf{G}, u) \mapsto \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u) = \langle [0, u], \oplus, \neg, 0\rangle$$

on $[0, u] = \{x \in G : 0 \leq x \leq u\}$ i

$$\begin{aligned} x \oplus y &=_{def} (x + y) \wedge u \\ \neg x &=_{def} u - x \\ 0 &=_{def} 0_G \end{aligned}$$

Siguin $\mathbf{G}$ un ℓ-grup i $0 < u \in G$ (anomenem u **unitat**). u és una **unitat forta de $\mathbf{G}$** si, i només si, per tot $x \in G$, existeix $n \in \omega$ tal que $x \leq n \cdot u$.
Direm que la parella $(\mathbf{G}, u)$ és un **grup abelià reticulat amb unitat forta** no trivial, escriurem **u-grup** no trivial, si, i només si, $\mathbf{G}$ és un ℓ-grup i $u \in G$ és unitat forta de G. Considerem $(\{0\}, 0)$ com el u-grup trivial.
Sigui $\mathcal{G}$ la categoria dels grups abelians reticulats amb unitat forta:
Els **objectes de $\mathcal{G}$** són els u-grups.

Siguin $(\mathbf{G}, u)$ i $(\mathbf{G}', u')$ dos u-grups, direm que $h : (\mathbf{G}, u) \to (\mathbf{G}', u')$ és un **morfisme de** $\mathcal{G}$ si, i només si, h és un homomorfisme de grup, és un homomorfisme de reticle i $h(u) = u'$.
Sigui $\mathcal{MV}$ la categoria de les MV-àlgebres on els objectes de $\mathcal{MV}$ són les MV-àlgebres i els morfismes de $\mathcal{MV}$ són els homomorfismes de MV-àlgebres. Definim la tranformació $\Gamma : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{MV}$ de la forma següent:

- Per tot $(\mathbf{G}, u) \in \mathbf{Obj}(\mathcal{G})$, $\Gamma((\mathbf{G}, u)) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$.

- Per tot $h \in \mathbf{Mor}(\mathcal{G})$, $\Gamma(h) = h \restriction [0, u]$.
  i.e. Si $h : (\mathbf{G}, u) \to (\mathbf{G}', u')$, aleshores

$$\Gamma(h) : \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u) \to \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}', u') : a \mapsto h(a)$$

Teorema 4.1 [59, teorema 3.9] *La correspondècia $\Gamma : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{MV}$ és un functor d'equivalència entre la categoria dels grups abelians reticulats amb unitat forta i la categoria de les MV-àlgebres.* □

Chang ja establí en [17] l'equivalència entre els grups abelians totalments ordenats amb unitat forta i les MV-cadenes. En realitat si restringim el functor Γ als grups abelians totalment ordenats amb unitat forta obtenim l'equivalència de Chang.

Corol.lari 4.2 *Per qualsevol MV-àlgebra $\mathbf{A}$, existeix un u-grup $(\mathbf{G}, u)$ tal que $\mathbf{A} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$. A més $(\mathbf{G}, u)$ està unívocament determinat per $\mathbf{A}$ llevat d'isomorfisme.* □

Així tenim que:

- $[\mathbf{0,1}] \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}, 1)$ on $\mathbf{R}$ és el grup dels reals.

- $[\mathbf{0,1}] \cap \mathbf{Q} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}, 1)$ on $\mathbf{Q}$ és el grup dels racionals.

- $\mathbf{Ł}_n \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n}, 1)$ on $\mathbf{Q}_n$ és el subgrup dels racionals amb numerador n.

- $\mathbf{Ł}_n^{G,b} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}, (1, b))$ on $\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}$ és el grup producte lexicogràfic de $\mathbf{Q}_n$ i $\mathbf{G}$.

- $[\mathbf{0,1}]^{\mathbf{A}} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}^{\mathbf{A}}, 1)$. $\mathbf{R}^{\mathbf{A}}$ és el grup de les funcions d'A en els reals on les operacions de grup es defineixen element a element i per tot $a \in A$, $1(a) = 1$.

- $\mathbf{M} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{L}, 1)$. $\mathbf{L}$ és el grup de les funcions contínues i lineals a trossos amb coeficients enters on les operacions de grup es defineixen com en el cas anterior.

Sigui $\mathbf{G}$ un ℓ-grup, direm que $J \subseteq G$ és un **ℓ-ideal** de $\mathbf{G}$ si, i només si, J és un subgrup de G que satisfà la següent condició de convexitat: Per tot $a, b \in G$

$$\text{Si } a \in J \text{ i } |b| \leq |a|, \text{ aleshores } b \in J.$$

Denotem per $\mathfrak{I}(\mathbf{G})$ el conjunt dels ℓ-ideals de $\mathbf{G}$.
Anàlogament al cas de les MV-àlgebres l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbf{Con}(\mathbf{G}) & \to & \mathbf{I}(\mathbf{G}) \\ \theta & \mapsto & \Psi(\theta) = \{x \in G : (x, 0) \in \theta\} \end{array}$$

ens dóna un isomorfisme entre el reticle de les congruències de $\mathbf{G}$ i el reticle dels ℓ-ideals de $\mathbf{G}$. La seva inversa és:

$$\begin{array}{rcl} \Psi^{-1} : \mathbf{I}(\mathbf{G}) & \to & \mathbf{Con}(\mathbf{G}) \\ J & \mapsto & \Psi^{-1}(J) = \{(a, b) \in G^2 : a - b \in J\} \end{array}$$

Sigui $(\mathbf{G}, u)$ un u-grup i $J \in \mathfrak{I}(\mathbf{G})$, observem que J és propi si, i només si, no conté u. El següent resultat relaciona els ideals de MV-àlgebres amb els ℓ-ideals dels u-grups.

Teorema 4.3 [23, teorema 1.2] *Sigui* $(\mathbf{G}, u)$ *un u-grup.*
La correspondència:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbf{I}(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)) & \to & \mathbf{I}(\mathbf{G}) \\ I & \mapsto & \Phi(I) = \{x \in G : |x| \wedge u \in I\} \end{array}$$

defineix un isomorfisme entre el reticle dels ideals de $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$ *i el reticle dels* ℓ*-ideals de* $\mathbf{G}$. *A més, l'isomorfisme invers és:*

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1} : \mathbf{I}(\mathbf{G}) & \to & \mathbf{I}(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)) \\ I & \mapsto & \Phi^{-1}(I) = I \cap [0, u]. \end{array}$$

□

Denotem per $\mathbf{G}/J$ el ℓ-grup quocient $\mathbf{G}/\Psi^{-1}(J)$. Observem que si $u \in G$ és una unitat forta de $\mathbf{G}$, aleshores u/J és una unitat forta de $\mathbf{G}/J$.

Teorema 4.4 [20, teorema 5.1.13] *Si* $(\mathbf{G}, u)$ *és un u-grup i* $J \in \mathfrak{I}(\mathbf{G})$*, alesores*

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}/J, u/J) \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)/(J \cap [0, u]) \qquad \square$$

Siguin $\mathbf{G}$ un ℓ-grup i J un ℓ-ideal de $\mathbf{G}$. J és un ℓ-ideal **primer** si, i només si, $\mathbf{G}/J$ és totalment ordenat.
Com a conseqüència dels dos teoremes anteriors 4.3 i 4.4 obtenim que l'aplicació Φ restringida als ideals primers també és un isomorfisme que preserva l'ordre entre els ideals primers de MV-àlgebra i els ℓ-ideals primers. Per tant ideals maximals de MV-àlgebra es corresponen amb ℓ-ideals maximals.

4.2 Productes reduïts i ultraproductes

Sigui $\{(\mathbf{G_i}, u_i) : i \in I\}$ una família de ℓ-grups amb unitat. Considerem $\prod \mathbf{G_i}$ el producte directe sobre I. Definim $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{0}} \in \prod G_i$ tals que $\bar{\mathbf{u}}(i) = u_i$ i $\bar{\mathbf{0}}(i) = 0$.

Sigui $\mathcal{F}$ un filtre propi sobre I, per cada $A \subseteq \prod G_i$ escrivim

$$A_{\mathcal{F}} = \{\bar{b}/\mathcal{F} : \bar{b} \in A\}.$$

Lema 4.5 *Sigui* $\{(\mathbf{G_i}, u_i) : i \in I\}$ *una família de ℓ-grups amb unitat (no necessàriament unitat forta). Si $\mathcal{F}$ és un filtre propi sobre I, aleshores la correspondència:*

$$h_{\mathcal{F}} : [\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}] \to [\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{u}}]_{\mathcal{F}} : \alpha \mapsto ((\bar{a} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}})/\mathcal{F} \quad \text{on } \bar{a} \in \alpha,$$

és un isomorfisme de $\mathbf{\Gamma}(\prod_I \mathbf{G_i}/\mathcal{F}; \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F})$ *en* $\prod_I \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G_i}; u_i)/\mathcal{F}$.

Prova : Anem a veure que la correspondència està ben definida. Obviament si $\bar{a} \in \prod G_i$ aleshores $(\bar{a} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}} \in [\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{u}}]$. Per tant si $\bar{a} \in \alpha \in [\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}]$, aleshores $((\bar{a} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}})/\mathcal{F} \in [\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{u}}]_{\mathcal{F}}$. Sigui $\alpha \in [\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}]$ i $\bar{a}, \bar{b} \in \prod G_i$ tals que $\bar{a}, \bar{b} \in \alpha$, és a dir $\bar{a}, \bar{b}$ són dos representants de la classe α. Com que $\bar{a}/\mathcal{F} = \bar{b}/\mathcal{F}$, aleshores

$$\{i \in I : \bar{a}(i) = \bar{b}(i)\} = I_1 \in \mathcal{F}$$

Del fet que $\bar{a}/\mathcal{F}, \bar{b}/\mathcal{F} \in [\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}]$ deduïm:

$$\{i \in I : 0 \leq \bar{a}(i) \leq u_i\} = I_2 \in \mathcal{F}$$

$$\{i \in I : 0 \leq \bar{b}(i) \leq u_i\} = I_3 \in \mathcal{F}$$

I com que per tot $i \in I$ i per tot $c \in G_i$, $0 \leq c \leq u_i$ si, i només si, $c = (c \vee 0) \wedge u_i$, aleshores

$$I_2 = \{i \in I : \bar{a}(i) = (\bar{a}(i) \vee 0) \wedge u_i = ((\bar{a} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}})(i)\}.$$

Per tant $\bar{a}, (\bar{a} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}} \in \alpha$.
Anàlogament

$$I_3 = \{i \in I : \bar{b}(i) = (\bar{b}(i) \vee 0) \wedge u_i = ((\bar{b} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}})(i)\}$$

i $\bar{b}, (\bar{b} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}} \in \beta$.
Així obtenim que

$$\{i \in I : ((\bar{a} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}})(i) = ((\bar{b} \vee \bar{\mathbf{0}}) \wedge \bar{\mathbf{u}})(i)\} = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \in \mathcal{F}$$

I per tant $h_{\mathcal{F}}(\bar{a}/\mathcal{F}) = h_{\mathcal{F}}(\bar{b}/\mathcal{F}) = h_{\mathcal{F}}(\alpha)$. Això demostra que la correspondència no depèn del representant escollit i, a més, que per tot $\alpha \in [\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}]$, existeix $\bar{b} \in [\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{u}}] \subseteq \prod G_i$ tal que $\bar{b} \in \alpha$ i $h_{\mathcal{F}}(\alpha) = h_{\mathcal{F}}(\bar{b}/\mathcal{F}) = \bar{b}/\mathcal{F}$. Així doncs $h_{\mathcal{F}}$ és una correspondència injectiva i exhaustiva.
Siguin $\alpha, \beta \in [\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}]$ i $\bar{a}$, $\bar{b} \in [\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{u}}] \subseteq \prod G_i$ tals que $\bar{a} \in \alpha$ i $\bar{b} \in \beta$.

- $h_{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}) = \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}$.
- $h_{\mathcal{F}}(\neg\alpha) = h_{\mathcal{F}}(\neg(\bar{a}/\mathcal{F})) = h_{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F} - \bar{a}/\mathcal{F}) = h_{\mathcal{F}}((\bar{\mathbf{u}} - \bar{a})/\mathcal{F}) = (\bar{\mathbf{u}} - \bar{a})/\mathcal{F} = \neg(\bar{a}/\mathcal{F}) = \neg h_{\mathcal{F}}(\bar{a}/\mathcal{F}) = \neg h_{\mathcal{F}}(\alpha)$.
- $h_{\mathcal{F}}(\alpha \oplus \beta) = h_{\mathcal{F}}(\bar{a}/\mathcal{F} \oplus \bar{b}/\mathcal{F}) = h_{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F} \wedge (\bar{a}/\mathcal{F} + \bar{b}/\mathcal{F})) = h_{\mathcal{F}}((\bar{\mathbf{u}} \wedge (\bar{a} + \bar{b}))/\mathcal{F}) = (\bar{\mathbf{u}} \wedge (\bar{a} + \bar{b}))/\mathcal{F} = (\bar{a} \oplus \bar{b})/\mathcal{F} = \bar{a}/\mathcal{F} \oplus \bar{b}/\mathcal{F} = h_{\mathcal{F}}(\bar{a}/\mathcal{F}) \oplus h_{\mathcal{F}}(\bar{b}/\mathcal{F}) = h_{\mathcal{F}}(\alpha) \oplus h_{\mathcal{F}}(\beta)$.

Per tant $h_{\mathcal{F}}$ és homomorfisme. □

Lema 4.6 *Si* $(\mathbf{G}, v)$ *i* $(\mathbf{G_i}, u_i)$, $i \in I$ *són* ℓ*-grups amb unitat i* $\mathcal{F}$ *és un filtre propi sobre* I, *aleshores la correspondència*

$$\begin{array}{rcl} l_{\mathcal{F}} : [(0, \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}), (v, \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F})] & \rightarrow & [(\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{0}})(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}})]_{\mathcal{F}} \\ (r, \alpha) & \mapsto & (\bar{\mathbf{r}}, \bar{a})/\mathcal{F} \end{array}$$

on $\bar{a} \in \alpha$ *i* $(0,0) \leq (\bar{\mathbf{r}}, \bar{a})(i) = (r, \bar{a}(i)) \leq (v, u_i)$ *per tot* $i \in I$,
és una immersió de $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G} \otimes \prod_I \mathbf{G_i}/\mathcal{F}; (v, \mathbf{u}/\mathcal{F}))$ *en* $\prod_I \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G_i}; (v, u_i))/\mathcal{F}$.
A més si $\mathcal{F}$ *és un ultrafiltre i* $[0, v]$ *és finit, aleshores* $l_{\mathcal{F}}$ *és isomorfisme.*

Prova : Usant el mateix raonament del lema anterior la correspondència està ben definida i no depèn del representant d'α escollit.
Siguin $(r,\alpha),(s,\beta) \in [(0,\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}),(v,\bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F})]$ i $\bar{a},\bar{b} \in \prod_I G_i$, si $\bar{a} \in \alpha$ i $\bar{b} \in \beta$, aleshores $(r,\alpha) \neq (s,\beta)$ implica $r \neq s$ o $\{i \in I : \bar{a}(i) \neq \bar{b}(i)\} \in \mathcal{F}$.
Si $r \neq s$, aleshores

$$\{i \in I : (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})(i) \neq (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})(i)\} = I \in \mathcal{F}.$$

Per ser $\mathcal{F}$ ultrafiltre $\{i \in I : (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})(i) = (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})(i)\} \notin \mathcal{F}$. Per tant $l_{\mathcal{F}}(r,\alpha) = (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})/\mathcal{F} \neq (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})/\mathcal{F} = l_{\mathcal{F}}(s,\beta)$.
Si $\{i \in I : \bar{a}(i) \neq \bar{b}(i)\} \in \mathcal{F}$, aleshores com que

$$\{i \in I : \bar{a}(i) \neq \bar{b}(i)\} \subseteq \{i \in I : (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})(i) \neq (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})(i)\} \in \mathcal{F},$$

tenim que $l_{\mathcal{F}}(r,\alpha) \neq l_{\mathcal{F}}(s,\beta)$. Per tant $l_{\mathcal{F}}$ és injectiva.
Siguin $(r,\alpha),(s,\beta) \in [(0,\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}),(v,\bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F})]$ i $\bar{a},\bar{b} \in \prod_I G_i$ tals que $\bar{a} \in \alpha$ i $\bar{b} \in \beta$.
• $l_{\mathcal{F}}(0,\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}) = (\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})/\mathcal{F}$.
• $l_{\mathcal{F}}(\neg(r,\alpha)) = l_{\mathcal{F}}((v,\bar{u}/\mathcal{F}) - (r,\alpha)) = l_{\mathcal{F}}(v-r,(\bar{\mathbf{u}}-\bar{a})/\mathcal{F})$
$= (\bar{\mathbf{v}}-\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{u}}-\bar{a})/\mathcal{F} = (\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{u}})/\mathcal{F} - (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})/\mathcal{F} = \neg(\bar{\mathbf{r}},\bar{a})/\mathcal{F}$
$= \neg l_{\mathcal{F}}(r,\alpha)$.
• $l_{\mathcal{F}}((r,\alpha) \oplus (s,\beta)) =$
$= \begin{cases} l_{\mathcal{F}}(r+s,(\bar{a}+\bar{b})/\mathcal{F}) & \text{si } (r+s<v) \text{ o } (r+s=v \text{ i } (\bar{a}+\bar{b})/\mathcal{F} \leq \bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}) \\ l_{\mathcal{F}}(v,\bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F}) & \text{altrament} \end{cases}$
$= \begin{cases} (\bar{\mathbf{r}}+\bar{\mathbf{s}},\bar{a}+\bar{b})/\mathcal{F} = (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})/\mathcal{F} + (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})/\mathcal{F} \\ (\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{u}})/\mathcal{F} = (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})/\mathcal{F} \oplus (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})/\mathcal{F} \end{cases}$
$= (\bar{\mathbf{r}},\bar{a})/\mathcal{F} \oplus (\bar{\mathbf{s}},\bar{b})/\mathcal{F} = l_{\mathcal{F}}(r,\alpha) \oplus l_{\mathcal{F}}(s,\beta)$.
Per tant $l_{\mathcal{F}}$ és una immersió.
Si $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre i $[0,v]$ és finit, aleshores donat $(\bar{t},\bar{d})/\mathcal{F} \in [(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{u}})]_{\mathcal{F}}$, per qualsevol $r \in [0,v]$ considerem $H_r = \{i \in I : \bar{t}(i) = r\}$. Obviament $\bigcup_{r \in [o,v]} H_r = I$. I com que $[0,v]$ és finit i $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, existeix un $q \in [0,v]$ tal que $H_q \in \mathcal{F}$. Si prenem $(q,\bar{d}/\mathcal{F}) \in [(0,\bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}),(v,\bar{\mathbf{u}}/\mathcal{F})]$, com que

$$\{i \in I : l_{\mathcal{F}}(q,\bar{d}/\mathcal{F})(i) = (\bar{t},\bar{d})(i)\} = \{i \in I : (\bar{\mathbf{q}},\bar{d})(i) = (\bar{t},\bar{d})(i)\} = H_q \in \mathcal{F},$$

aleshores $l_{\mathcal{F}}(q,\bar{d}/\mathcal{F}) = (\bar{t},\bar{d})/\mathcal{F}$ i per tant $l_{\mathcal{F}}$ és exhaustiva. $\square$

Capítol 5

MV-cadenes

5.1 Caracterització de les MV-cadenes

Recordem que una MV-cadena és una MV-àlgebra tal que el seu ordre natural és total. Denotem la classe de les MV-cadenes per $\mathbb{C}_W$. Ja hem vist en la capítol 3 que l'interès de $\mathbb{C}_W$ ve perquè tota MV-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MV-cadenes (teorema 3.30) i aquestes es caracteritzen per ésser les MV-àlgebres subdirectament idescomposables (corol.lari 3.31).

El nostre objectiu és caracteritzar la classe de les MV-cadenes i altres subclasses de $\mathbb{C}_W$ de forma algebraica. És a dir donar-ne una caracterització a partir d'operadors algebraics i de les àlgebres que generen aquestes classes.

Com que l'odre natural en les MV-àlgebres és definible per una equació:

$$x \leq y \text{ sii } \neg x \oplus y \approx 1$$

tenim que $\mathbb{C}_W$ és definible a partir dels axiomes:

- **MV1.**, **MV2.**, **MV3.**, **MV4.**, **MV5.** i **MV6.**
- $\forall x \, \forall y \, [(\neg x \oplus y \approx 1) \text{ o } (\neg y \oplus x \approx 1)]$.

Així doncs, $\mathbb{C}_W$ és una classe universal i per tant tancada pels operadors $\mathbb{I}$, $\mathbb{S}$ i $\mathbb{P}_U$ (vegeu per exemple [14]).
Com que l'ordre el podem definir a través d'una equació, la linealitat es conserva també per imatges homomorfes. Sigui $\mathbf{B} = h(\mathbf{A})$ una imatge homomorfa d'una MV-cadena $\mathbf{A}$. Siguin $b_1 = h(a_1), b_2 = h(a_2) \in \mathbf{B}$. $a_1 \leq a_2$ o $a_2 \leq a_1$ ja que $\mathbf{A}$ és una MV-cadena. Si $a_1 \leq a_2$, aleshores $\neg a_1 \oplus a_2 = 1$

i com que h és un homomorfisme, $\neg h(a_1) \oplus h(a_2) = 1$ i per tant $b_1 \leq b_2$. Anàlogament l'altre cas.

Tot seguit enunciem un resultat de Teoria de Grups que usarem en aquesta memòria

Lema 5.1 (vegeu per exemple [4]) *Tot grup abelià totalment ordenat* $\mathbf{G}$ *es pot submergir en un grup abelià totalment ordenat divisible* $\mathbf{H}$. □

El següent teorema és un resultat conegut de Teoria de Models (vegeu per exemple [19, secció 3.5]):

Teorema 5.2 *La classe dels grups abelians divisibles totalment ordenats és model completa, completa i és la model completació de la classe dels grups abelians totalment ordenats. A més, tot grup abelià divisible totalment ordenat és elementalment equivalent al grup abelià divisible totalment ordenat* $\mathbf{Q}$ *dels racionals.* □

El següent corol.lari es dedueix del Teorema de Frayne (vegeu per exemple [19, pàg. 256]), del lema 5.1 i del teorema 5.2.

Corol.lari 5.3 *Tot grup abelià totalment ordenat és submergible en una ultrapotència de* $\mathbf{Q}$. □

Teorema 5.4 [30, teorema 1] *Tota MV-cadena es pot submergir en un ultraproducte de* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$.

Prova : Sigui $\mathbf{C}$ una MV-cadena. Pel corol.lari 4.2, $\mathbf{C}$ és isomorf a $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$ on $(\mathbf{G}, u)$ és un u-grup. Com que $\mathbf{C}$ és cadena, $\mathbf{G}$ és un grup abelià totalment ordenat. Pel corol.lari 5.3, existeix un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sobre un conjunt d'índexs I i una immersió $h : \mathbf{G} \hookrightarrow \prod_I \mathbf{Q}/\mathcal{F}$. De forma natural, la restricció de h a $[0, u]$ ens defineix una immersió $h^* : \mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u) \hookrightarrow \mathbf{\Gamma}(\prod_I \mathbf{Q}/\mathcal{F}, h(u))$. Sigui $\bar{r} \in \prod_I Q$ tal que $\bar{r} \in h(u)$, sense pèrdua de generalitat podem suposar que $\bar{r}(i) > 0$ per tot $i \in I$. Definim $r_i = \bar{r}(i) \in Q$. Pel lema 4.5, $\mathbf{\Gamma}(\prod_I \mathbf{Q}/\mathcal{F}, \mathbf{h}(\mathbf{u}))$ és isomorf a $\prod_I \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}, r_i)/\mathcal{F}$. I com que la correspondència

$$\begin{array}{rcl} g_{r_i} : [0, r_i] \cap Q & \rightarrow & [0, 1] \cap Q \\ b & \mapsto & \dfrac{b}{r_i} \end{array}$$

és un isomorfisme entre $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}, r_i)$ i $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}, 1) = [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$, aleshores

$$\mathbf{C} \in \mathbb{ISP}_U\mathbb{I}([\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) = \mathbb{ISP}_U([\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbf{Q})$$

Per tant $\mathbf{C}$ és submergible en una ultrapotència de $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$. $\square$

Finalment caracteritzem $\mathbb{C}_W$ en termes d'operadors algebraics i de l'àlgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$.

Teorema 5.5

$$\mathbb{C}_W = \mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) = \mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}]) = \mathbb{HSP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) = \mathbb{HSP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}]).$$

Prova : Pel teorema 5.4 sabem que

$$\mathbb{C}_W \subseteq \mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{HSP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}).$$

A més, com que $\mathbb{C}_W$ és una classe universal, $\mathbb{C}_W$ és tancada per $\mathbb{I}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}_U$ i ja hem vist que també per $\mathbb{H}$. Evidentment $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_W$, per tant

$$\mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{HSP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{C}_W) = \mathbb{C}_W$$

D'altra banda com que $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$ és una subàlgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ tenim que

$$\mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}]) \subseteq \mathbb{C}_W = \mathbb{ISP}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q})$$

$\square$

5.2 MV-cadenes de rang finit

Sigui $\mathbf{A} = \langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ una MV-cadena i $a \in A$. Anomenem **ordre d' a**, que representem per $ord(a)$, el més petit natural n tal que $na = 1$. Si no existeix cap enter que compleixi aquesta condició, aleshores $ord(a) = \infty$. Observi's que per tot $a \in A$

$$ord(a) = \infty \text{ si, només si, } a \in \mathbf{Inf}(\mathbf{A}) \text{ si, només si, } a \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A})$$

Definim l'**ordre d' A** com

$$ord(\mathbf{A}) = sup\{ord(a) : a \in A\}.$$

És fàcil de veure que

$$si\ ord(\mathbf{A}) = n\ ,\ aleshores\ \mathbf{A}\ és\ isomorf\ a\ \mathbf{Ł}_n. \tag{5.1}$$

Sigui $\mathbf{A}$ una MV-cadena, definim el **rang** d'$\mathbf{A}$ com

$$rank(\mathbf{A}) = ord(\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})).$$

Com que $\mathbf{A}$ és una MV-cadena, aleshores $\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ és l'únic ideal maximal d'$\mathbf{A}$ i per tant $\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ és una MV-àlgebra simple.

D'aquest fet i de l'observació abans esmentada (5.1) deduïm

$$rank(\mathbf{A}) = n \quad \text{si, i només si,} \quad \mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{Ł}_n$$

$$rank(\mathbf{A}) = \infty \quad \text{si, i només si,} \quad \mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{S} \subseteq [\mathbf{0},\mathbf{1}] \text{ infinita}$$

El següent resultat de Komori ens caracteritza les cadenes de rang n.

Teorema 5.6 [44] $\mathbf{A}$ *és una MV-cadena no simple de rang n si, i només si, existeixen un grup abelià totalment ordenat no trivial $\mathbf{G}$ i un element $b \in \mathbf{G}^+$ tals que $\mathbf{A} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}; (1,b)) = \mathbf{Ł}_n^{G,b}$.* □

Observeu que si $\mathbf{A}$ és una MV-cadena simple de rang n, aleshores si prenem $\mathbf{G} = \{0\}$ i $b = 0$, aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n \cong \mathbf{Ł}_n^{\{0\},0}$.

Teorema 5.7 *Si $\mathbf{Ł}_n^{G,b}$ és una cadena de rang n, aleshores per tot $c \in G$, $\mathbf{Ł}_n^{G,b}$ és isomorf a $\mathbf{Ł}_n^{G,b+nc}$. En particular si b és divisible per n, $\mathbf{Ł}_n^{G,b}$ és isomorf a $\mathbf{Ł}_n^{G,0}$.*

Prova : Considerem la següent correspondència :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}; (1,b)) & \rightarrow & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}; (1,b+nc)) \\ (\frac{m}{n}, a) & \mapsto & (\frac{m}{n}, a+mc) \end{array}$$

Siguin $(\frac{m_1}{n}, a_1), (\frac{m_2}{n}, a_2) \in \mathbf{Ł}_n^{G,b}$ tals que $h(\frac{m_1}{n}, a_1) = h(\frac{m_2}{n}, a_2)$ aleshores $\frac{m_1}{n} = \frac{m_2}{n}$ i $a_1 + m_1 c = a_2 + m_2 c$, d'on es dedueix que $m_1 = m_2$ i $a_1 = a_2$ i per tant h és injectiva. Obviament la correspondència és exhaustiva i la inversa vé donada per

$$\begin{array}{rcl} h^{-1} : \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}; (1,b+nc)) & \rightarrow & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}; (1,b)) \\ (\frac{m}{n}, a) & \mapsto & (\frac{m}{n}, a-mc) \end{array}$$

- $h(0,0) = (0,0)$,
- $h(\neg(\frac{m}{n}, a)) = h(\frac{n-m}{n}, b-a) = (\frac{n-m}{n}, b-a+(n-m)c) =$
$= (\frac{n-m}{n}, (b+nc)-(a+mc)) = \neg(\frac{m}{n}, a+mc) = \neg h(\frac{m}{n}, a)$,
- $h((\frac{m_1}{n}, a_1) \oplus (\frac{m_2}{n}, a_2)) =$

$$= \begin{cases} h(\frac{m_1+m_2}{n}, a_1+a_2) & \text{si } (m_1+m_2<n) \text{ o } (m_1+m_2=n \text{ i } a_1+a_2\leq b) \\ h(1,b) & \text{altrament} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (\frac{m_1+m_2}{n}, a_1+a_2+(m_1+m_2)c) = (\frac{m_1+m_2}{n}, (a_1+m_1c)+(a_2+m_2c)) \\ (\frac{m_1}{n}, a_1+m_1c)\oplus(\frac{m_2}{n}, a_2+m_2c) \end{cases}$$
$$= h(\frac{m_1}{n}, a_1)\oplus h(\frac{m_2}{n}, a_2).$$

Hem demostrat que h és isomorfisme.
Si $b\in G$ és divisible per n aleshores existeix un $0\geq c\in G$ tal que $0=b+n(c)$ i per tant

$$\mathbf{Ł}_n^{G,b}\cong\mathbf{Ł}_n^{G,0}.$$

□

El nostre objectiu és caracteritzar les classes de MV-cadenes d'un cert rang. Per qualsevol $n\in\omega$, $\mathbb{C}_{Wn}$ representa la classe de MV-cadenes de rang n.

Teorema 5.8 *Si* $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_W$ *i rank(*$\mathbf{A}$*)=n, aleshores* $\mathbf{A}\in\mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^Q)$

Prova : Suposem que $\mathbf{A}$ és una cadena de rang n. pel teorema 5.6 existeix un grup abelià totalment ordenat $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{A}\cong\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{G};(1,b))$ on $b\in\mathbf{G}^+$. Usant el resultat del corol.lari 5.3 obtenim una immersió γ de $\mathbf{G}$ en un ultraproducte de $\mathbf{Q}$, $\prod_I\mathbf{Q}/\mathcal{F}$. Aquesta immersió es pot estendre de forma natural a $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{G};(1,b))$,

$$\begin{array}{rcl}\gamma^*:\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{G};(1,b)) & \to & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\prod_I\mathbf{Q}/\mathcal{F};(1,\gamma(b))) \\ (\frac{r}{n},g) & \mapsto & (\frac{r}{n},\gamma(g))\end{array}$$

i així obtenim que $\mathbf{A}$ és submergible en $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\prod_I\mathbf{Q}/\mathcal{F};(1,\gamma(b)))$.
Sigui $\bar{q}\in\prod_I Q$ tal que $\bar{q}\in\gamma(b)$, podem suposar que $0<\bar{q}(i)$ per tot $i\in I$. Definim $q_i=\bar{q}(i)\in Q$. Pel lema 4.6, com que $\mathbf{Q}_n\cap[0,1]$ és finit $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\prod_I\mathbf{Q}/\mathcal{F};(1,\gamma(b)))$ és isomorf a $\prod_I\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{Q};(1,q_i))/\mathcal{F}$. Pel teorema 5.7, com que q_i és divisible (en $\mathbf{Q}$) per n, aleshores $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{Q};(1,q_i))$ és isomorf a $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{Q};(1,0))=\mathbf{Ł}_n^Q$. Per tant hem demostrat que

$$\mathbf{A}\in\mathbb{ISP}_U\mathbb{I}(\mathbf{Ł}_n^Q)=\mathbb{ISP}_U(\mathbf{Ł}_n^Q)$$

□

Observem com són les subestructures finitament generades de $\mathbf{Ł}_n^Q$.

Lema 5.9 *Tota subàlgebra finitament generada de* $\mathbf{Ł}_n^Q$ *és submergible en* $\mathbf{Ł}_n^\omega$

Prova : Sigui $\mathbf{A}$ una subàlgebra de $\mathbf{Ł}_n^Q$ generada per $(\frac{r_1}{n}, \frac{a_1}{q_1}), \ldots (\frac{r_m}{n}, \frac{a_m}{q_m})$. Sigui $q = m.c.d.(q_1, \ldots, q_m)$. Com que per qualsevol $a \in A$, a és expressable en la forma $(\frac{r}{n}, \frac{b}{q})$, és trivial veure que la correspondència d' $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Ł}_n^\omega$ definida de la manera següent:

$$\left(\frac{r}{n}, \frac{b}{q}\right) \longmapsto \left(\frac{r}{n}, b\right)$$

és una immersió d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{Ł}_n^\omega$. □

Teorema 5.10 $\mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^Q) = \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega)$.
i.e. $\mathbf{Ł}_n^Q$ *i* $\mathbf{Ł}_n^\omega$ *generen la mateixa classe universal.*

Prova : Com que $\mathbf{Ł}_n^\omega \subseteq \mathbf{Ł}_n^Q$, aleshores

$$\mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^Q).$$

Sigui F_G la família de les subàlgebres finitament generades de $\mathbf{Ł}_n^Q$. Pel lema 1.1, tota àlgebra és submergible en un ultraproducte de les seves subàlgebres finitament generades, per tant $\mathbf{Ł}_n^Q \subseteq \mathbb{ISP}_u(F_G)$. Pel lema 5.9, $F_G \subseteq \mathbb{IS}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$. Per tant $\mathbf{Ł}_n^Q \subseteq \mathbb{ISP}_u\mathbb{IS}(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega)$. Així obtenim

$$\mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^Q) \subseteq \mathbb{ISP}_u\mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega) \qquad \square$$

Lema 5.11 *La classe* $\mathbb{C}_{Wn}$ *és tancada per ultraproductes i per imatges homomorfes.*

Prova : Sigui $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ una família d'àlgebres de $\mathbb{C}_{Wn}$. Pel teorema 5.6, $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \mathbf{G}_i; (1, b_i))$ per alguns grups abelians totalment ordenats $\mathbf{G}_i$ i $b_i \in \mathbf{G}_i^+$. Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sobre I i $\bar{b} \in \prod_I G_i$ tal que per tot $i \in I$, $\bar{b}(i) = b_i$. Pel lema 4.6,

$$\prod_I \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q_n} \otimes \prod_I \mathbf{G}_i/\mathcal{F}; (1, \bar{b}/\mathcal{F})) \in \mathbb{C}_{Wn}$$

ja que $[0,1] \cap \mathbf{Q_n}$ és finit. I com que $\prod_I \mathbf{G}_i/\mathcal{F}$ és un grup abelià totalment ordenat i $\bar{b}/\mathcal{F} \geq \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{F}$ pel teorema 5.6 $\prod_I \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \in \mathbb{C}_{Wn}$.
Sigui $\mathbf{B} = h(\mathbf{A})$ una imatge homomorfa d'una MV-cadena $\mathbf{A}$ de rang n. Ja hem vist anteriorment que la linealitat es conserva per imatges homomorfes. Anem a veure que $rank(\mathbf{B}) = n$. Recordem que $Ker(h) \in Con(\mathbf{A})$ i que

$\mathbf{A}/Ker(h) \cong \mathbf{B}$. Pel teorema *de correspondència* (vegeu per exemple [14, pàg. 49]) hi ha un isomorfisme de reticle

$$\begin{array}{rcl} \langle\{\theta \in Con(\mathbf{A}) : Ker(h) \subseteq \theta\}, \cap, \vee\rangle & \to & \mathbf{Con}(\mathbf{A}/Ker(h)) \\ \theta & \mapsto & \theta/Ker(h) = \{(a/\theta, b/\theta) : (a,b) \in Ker(h)\} \end{array}$$

Com que $\mathbf{A}/Ker(h)$ és una cadena, $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}/Ker(h))$ és l'únic ideal maximal de $\mathbf{A}/Ker(h)$, anàlogament $\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ és l'únic ideal maximal d'$\mathbf{A}$. Pel teorema 3.20 i per l'isomorfime entre les congruències d'$\mathbf{A}$ que contenen el $Ker(h)$ i les congruències de $\mathbf{A}/Ker(h)$, tenim que $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}/Ker(h)) = \mathbf{Rad}(\mathbf{A})/Ker(h)$. Així, pel *segon teorema d'isomorfime*:

$$(\mathbf{A}/Ker(h))/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}/Ker(h)) \cong \mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$$

i per tant

$$\mathbf{B}/\mathbf{Rad}(\mathbf{B}) \cong \mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{Ł}_n$$

i $rank(\mathbf{B}) = n$. □

Observem, però que la classe $\mathbb{C}_{Wn}$ no és tancada per subestructures: Per exemple si $m|n$ i $m \neq n$, aleshores $\mathbf{Ł}_m \subsetneq \mathbf{Ł}_n \in \mathbb{C}_{Wn}$ i obviament $\mathbf{Ł}_m \notin \mathbb{C}_{Wn}$.

Teorema 5.12 *Considerem* $\mathbb{C}_n = \bigcup_{\{m:m|n\}} \mathbb{C}_{Wm}$, *aleshores*

$$\mathbb{C}_n = \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{HSP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{S}(\mathbb{C}_{Wn})$$

Prova : Pels teoremes 5.8 ,5.10 sabem que

$$\mathbb{C}_{Wm} \subseteq \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_m^{\mathbb{Q}}) = \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_m^\omega).$$

I com que $\mathbf{Ł}_m^\omega \subseteq \mathbf{Ł}_n^\omega$ per tot m divisor de n, aleshores per tot $m|n$,

$$\mathbb{C}_{Wm} \subseteq \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_m^\omega) \subseteq \mathbb{ISP}_u\mathbb{S}(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega)$$

Per tant

$$\mathbb{C}_n \subseteq \mathbb{ISP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{HSP}_u(\mathbf{Ł}_n^\omega)$$

Anem a veure que $\mathbb{C}_n$ és una classe tancada per $\mathbb{H}, \mathbb{S}$ i $\mathbb{P}_u$.
$\mathbb{C}_n$ és tancada per imatges homomorfes ja que per tot $m|n$, $\mathbb{C}_{Wm}$ és tancada per imatges homomorfes, pel lema 5.11.
Siguin $\{\mathbf{A}_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}_n$ i $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sobre I. Observem que

$$\bigcup_{\{m:m|n\}} \{i \in I : \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}_{Wm}\} = I \in \mathcal{F},$$

per tant existeix $m_0 \in \{m : m|n\}$ tal que $J = \{i \in I : \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}_{Wm_0}\} \in \mathcal{F}$, ja que $\{m : m|n\}$ és un conjunt finit i $\mathcal{F}$ és un filtre primer. Pel lema 1.2, $\prod_I \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \cong \prod_J \mathbf{A}_j/\mathcal{F}\restriction J$ i com que, pel lema 5.11, $\mathbb{C}_{Wn}$ és tancat per ultraproductes i imatges isomorfes, tenim que $\prod_I \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \in \mathbb{C}_{Wm_0} \subseteq \mathbb{C}_n$.
Sigui $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \in \mathbb{C}_n$, obviament $\mathbf{B}$ és una MV-cadena. Si $m = rank(\mathbf{A})$, aleshores $\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \cong \text{Ł}_m$, designem per α aquest isomorfisme. Considerem l'homomorfisme natural $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) : a \mapsto a/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$, aleshores $\alpha \circ \pi \restriction \mathbf{B} : \mathbf{B} \to \text{Ł}_m$ és una immersió i per tant $(\alpha \circ \pi \restriction \mathbf{B})\ (\mathbf{B}) \subseteq \text{Ł}_m$. D'aquí deduïm que $\mathbf{B}/Ker(\alpha \circ \pi \restriction \mathbf{B}) \cong \text{Ł}_k$ per algun $k|m$. Ara bé, com que Ł_k és una MV-àlgebra simple, $(\alpha \circ \pi \restriction \mathbf{B})^{-1}(0)$ és un ideal maximal. Per tant $\mathbf{Rad}(\mathbf{B}) = (\alpha \circ \pi \restriction \mathbf{B})^{-1}(0)$, ja que $\mathbf{B}$ és una MV-cadena. Així tenim que $\mathbf{B}/\mathbf{Rad}(\mathbf{B}) \cong \text{Ł}_k$, per tant $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_{Wk}$ i com que $k|m$ i $m|n$, aleshores $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_n$.
Per tant $\mathbb{C}_n = \mathbb{ISP}_U(\mathbb{C}_n) = \mathbb{HSP}_U(\mathbb{C}_n)$. Així tenim que

$$\mathbb{ISP}_U(\text{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{ISP}_U(\mathbb{C}_n) = \mathbb{C}_n \quad \text{i} \quad \mathbb{HSP}_U(\text{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{C}_n) = \mathbb{C}_n$$

ja que $\text{Ł}_n^\omega \in \mathbb{C}_n$
Usant el mateix raonament per demostrar que $\mathbb{S}(\mathbb{C}_n) = \mathbb{C}_n$ tenim que $\mathbb{S}(\mathbb{C}_{Wn}) \subseteq \mathbb{C}_n$. D'altra banda com que $\text{Ł}_n^\omega \in \mathbb{C}_{Wn}$, aleshores

$$\mathbb{C}_n = \mathbb{ISP}_U(\text{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{ISP}_U(\mathbb{C}_{Wn}) = \mathbb{S}(\mathbb{C}_{Wn}),$$

ja que pel lema 5.11, $\mathbb{C}_{Wn}$ és tancada per ultraproductes i per imatges homomorfes. □

Part III

Quasivarietats de MV-àlgebres

En aquesta tercera part estudiarem les quasivarietats de MV-àlgebres (recordem que pel teorema 3.1, les àlgebres de Wajsberg són polinomialment equivalents a les MV-àlgebres).

Donada una quasivarietat $\mathbb{K}$ d'àlgebres qualssevol (no necessàriament MV-àlgebres), el conjunt de totes les quasivarietats contingudes en $\mathbb{K}$ és tancat per interseccions arbitràries i forma un reticle respecte la inclusió que denotem per $\mathbf{L}(\mathbb{K})$. En el cas de $\mathbb{W}$, el següent resultat mostra la complexitat de $\mathbf{L}(\mathbb{W})$.

Teorema 5.13 [1] $\mathbb{W}$ *és una quasivarietat Q-universal. És a dir:*
Per tota quasivarietat $\mathbb{K}$ *d'àlgebres de tipus finit (no necessàriament de MV-àlgebres),* $\mathbf{L}(\mathbb{K})$ *és imatge homomorfa d'un subreticle de* $\mathbf{L}(\mathbb{W})$. □

D'aquest teorema es dedueix que $\mathbf{L}(\mathbb{W})$ conté el reticle lliure generat per ω elements, per tant no satisfà cap identitat de reticle no trivial i és de cardinal $2^{\aleph_0}$. A causa d'aquesta complexitat, ens restringirem a estudiar alguns tipus de quasivarietats tenint en compte algunes propietats algebraiques que compleixen.

Capítol 6

Varietats

Un cas especial de quasivarietats són les varietats. Les varietats de MV-àlgebres han estat àmpliament estudiades. Chang [17, 18] fou el primer en estudiar la varietat $\mathbb{W}$ i demostrà que la varietat $\mathbb{W}$ està generada per $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$. Dels treballs de Komori [44] es dedueix la classificació de les subvarietats de $\mathbb{W}$. Una gran part de la literatura sobre varietats de MV-àlgebres està dedicada a les axiomatitzacions d'aquestes (vegeu per exemple [40, 41, 72, 31, 63]). El nostre objectiu és obtenir aquesta classificació i estudiar les varietats com a quasivarietats.

6.1 Caracterització i Classificació

Dels treballs de Chang [17, 18] obtenim:

Teorema 6.1 [18] $\mathbb{W} = \mathbb{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) = \mathbb{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$.

Prova : Pel teorema 3.30 de representació de Chang, tota MV-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MV-cadenes. Hem vist en el teorema 5.5 que la classe de les MV-cadenes $\mathbb{C}_W = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q})$. Per tant

$$\begin{array}{llll} \mathbb{W} & \subseteq \mathbb{I}\mathbb{P}_{SD}\mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) & \subseteq \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}\mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}_U([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) & \subseteq \\ \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) & \subseteq \mathbb{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) & \subseteq \mathbb{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]) & = \\ \mathbb{W}. & & & \square \end{array}$$

De [44] es dedueix la classificació de les varietats de MV-àlgebres.

Lema 6.2 *Sigui $\gamma \subseteq \omega$ un subconjunt infinit de naturals, aleshores $\bigcup_{n\in\gamma} (\text{Ł}_n)^k$ és dens en $[0,1]^k$*

Prova : Sigui $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ un element de $[0,1]^k$. Construïm la següent successió $(\bar{b}_n)_{n\in\gamma}$ d'elements en $\bigcup_{n\in\gamma} (\text{Ł}_n)^k$:
$\bar{b}_n = (\frac{t_{n1}}{n}, \ldots, \frac{t_{nk}}{n})$ on t_{nj} és el màxim $t \in \omega \quad 0 < t \leq n$ tal que $\frac{t}{n} \leq a_j$.
Si el màxim no existeix, aleshores t_{nj} és el mínim $t \in \omega \quad 0 \leq t < n$ tal que $\frac{t}{n} \geq a_j$.
Així tenim que en la topologia natural de $\mathbb{R}^n$, $d(\bar{a}, \bar{b}_n) < \frac{\sqrt{k}}{n}$.
Per tant, $\lim_{n\to\infty} (\bar{b}_n)_{n\in\gamma} = \bar{a}$. □

El següent resultat es troba implícit en Tarski, [53].

Teorema 6.3 *Sigui $\{\mathbf{Ł}_n : n \in \gamma\}$ una família infinita de MV-àlgebres simples finites, aleshores $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_n : n \in \gamma\}) = \mathbb{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}]) = \mathbb{W}$*

Prova : Obviament $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_n : n \in \gamma\}) \subseteq \mathbb{W} = \mathbb{V}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$.
Sigui $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \approx \psi\,(x_1, \ldots, x_k)$ una equació tal que

$$[\mathbf{0},\mathbf{1}] \not\models \varphi(x_1, \ldots, x_k) \approx \psi\,(x_1, \ldots, x_k). \tag{6.1}$$

És a dir, existeix $(a_1, \ldots, a_k) \in [0,1]^k$ tal que

$$\varphi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}\,(a_1, \ldots, a_k) \neq \psi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}\,(a_1, \ldots, a_k).$$

Suposem que $\mathbf{Ł}_n \models \varphi(x_1, \ldots, x_k) \approx \psi(x_1, \ldots, x_k)$ per tot $n \in \gamma$. Considerem la successió $(\bar{b}_n)_{n\in\gamma}$ de $\bigcup_{n\in\gamma} (\text{Ł}_n)^k$ construida en el lema 6.2, tal que $(\bar{b}_n)_{n\in\gamma} \to (a_1, \ldots, a_k)$.
Per hipòtesi, $\varphi^{\mathbf{Ł}_n}\,(\bar{b}_{n_1}, \ldots, \bar{b}_{n_k}) = \psi^{\mathbf{Ł}_n}\,(\bar{b}_{n_1}, \ldots, \bar{b}_{n_k})$ per tot $n \in \gamma$.
Per tant , com que $\varphi^{\mathbf{Ł}_n} \approx \psi^{\mathbf{Ł}_n} = \varphi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \approx \psi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \restriction \mathbf{Ł}_n$ tenim que

$$\varphi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}\,(\bar{b}_{n_1}, \ldots, \bar{b}_{n_k}) = \psi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}\,(\bar{b}_{n_1}, \ldots, \bar{b}_{n_k}) \quad \forall n \in \gamma. \tag{6.2}$$

Usant ara el teorema 3.11 (Teorema de McNaughton [56]), qualsevol terme en el lleguatge de les MV-àlgebres expressa una funció real contínua i 1-valorada. Siguin f i g les funcions contínues associades a φ i ψ. Per (6.2), $f(\bar{b}_{n_1}, \ldots, \bar{b}_{n_k}) = g(\bar{b}_{n_1}, \ldots, \bar{b}_{n_k})$ per tot $n \in \gamma$. Com que $(\bar{b}_n)_{n\in\gamma}$

és una successió de límit $(a_1, \ldots, a_k)$ i f i g són contínues, obtenim que $f(a_1, \ldots, a_k) = g(a_1, \ldots, a_k)$, i arribem a contradicció ja que de (6.1) tenim que $\varphi^{[0,1]}(a_1, \ldots, a_k) \neq \psi^{[0,1]}(a_1, \ldots, a_k)$. Per tant, existeix $n \in \gamma$ tal que $\mathbf{Ł}_n \not\models \varphi(x_1, \ldots, x_k) \approx \psi(x_1, \ldots, x_k)$.
Hem vist doncs, que donada una equació $\varepsilon \approx \delta$ en el llenguatge de les MV-àlgebres

$$\mathbf{Ł}_n \models \varepsilon \approx \delta \quad \text{per tot } n \in \gamma, \quad \text{implica} \quad [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \models \varepsilon \approx \delta$$

Per tant, $\mathbb{W} = \mathbb{V}([\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_n : n \in \gamma\})$ □

Corol.lari 6.4 [44] *Sigui $\mathbb{K}$ una varietat de MV-àlgebres. $\mathbb{K}$ és una subvarietat pròpia, si, i nomes si $\mathbb{K}$ conté un nombre finit de $\mathbf{Ł}_n$'s.* □

Com que tota subàlgebra infinita de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ és densa en $[0, 1]$, usant un argument similar al de la demostració anterior es dedueix el següent resultat:

Teorema 6.5 (Lindembaum [53], també [20]) *Sigui $\mathbf{S}$ una subàlgebra infinita de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, aleshores $\mathbb{V}(\mathbf{S}) = \mathbb{V}([\mathbf{0}, \mathbf{1}]) = \mathbb{V}([\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbf{Q})$.* □

Del teorema 3.30 de representació de Chang, es dedueix que les cadenes contingudes en una subvarietat pròpia de MV-àlgebres generen aquesta subvarietat. Els següents resultats van encaminats a caracterizar les subvarietats pròpies a partir dels seus generadors.

Lema 6.6 *Sigui $\mathbb{K}$ una varietat de MV-àlgebres. $\mathbb{K}$ és una subvarietat pròpia, si, i només si, tota MV-cadena de $\mathbb{K}$ és de rang finit. A més, si $\mathbf{A}$ és una MV-cadena de $\mathbb{K}$ i $\mathbb{K} \neq \mathbb{W}$, aleshores $rank(\mathbf{A}) = n$ per algun $n \in \omega$ tal que $\mathbf{Ł}_n \in \mathbb{K}$.*

Prova : Si per tota MV-cadena $\mathbf{A}$, el rang d'$\mathbf{A}$ és finit, aleshores com que $rank([\mathbf{0}, \mathbf{1}]) = \omega$, $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \notin \mathbb{K}$ i per tant $\mathbb{K} \neq \mathbb{W}$.
Sigui $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ una MV-cadena de rank infinit. Això ens diu que $\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ és una subàlgebra infinita de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Com que $\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \in \mathbb{H}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{K}$, pel teorema 6.5, $\mathbb{W} = \mathbb{V}(\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})) \subseteq \mathbb{K}$. Per tant $\mathbb{K} = \mathbb{W}$.
Sigui $\mathbb{K} \neq \mathbb{W}$ una subvarietat pròpia de MV-àlgebres, pel corol.lari 6.4 $\mathbb{K}$ conté un nombre finit de $\mathbf{Ł}_n$'s. Sigui $I = \{n < \omega : \mathbf{Ł}_n \in \mathbb{K}\}$. Sigui $\mathbf{A}$ una MV-cadena i suposem que $rank(\mathbf{A}) = n$ per algun $n \notin I$, aleshores $\mathbf{A}/\mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ és isomorf a $\mathbf{Ł}_n$. Per tant $\mathbf{Ł}_n \in \mathbb{K}$. Contradicció, ja que $n \notin I$.
Així, $rank(\mathbf{A}) = i$ per algun $i \in I$. □

Lema 6.7 *Sigui* $\mathbf{A}$ *una MV-cadena, si* $rank(\mathbf{A}) = n$, *aleshores* $\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$

Prova : Sigui $\mathbf{A}$ una MV-cadena de $rank(\mathbf{A}) = n$, aleshores pel teorema 5.12 tenim que

$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{Wn} \subseteq \mathbb{C}_n = \mathbb{ISP}_U(\mathbf{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$$

□

Anem a veure quan una cadena genera la mateixa varietat que $\mathbf{Ł}_n^\omega$. Per això necessitem uns lemes previs.

Lema 6.8 *Una MV-cadena* $\mathbf{A}$ *conté una còpia de* $\mathbf{Ł}_n^\omega$*, si, i només si, es satisfan les dues condicions:*

1. $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$
2. $\mathbf{Ł}_n$ *és submergible en* $\mathbf{A}$

Prova : Si h és una immersió de $\mathbf{Ł}_n^\omega$ en $\mathbf{A}$, aleshores $h(0,1) \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \setminus \{0\}$ i obviament com que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_n^\omega$, tenim que $\mathbf{Ł}_n$ és submergible en $\mathbf{A}$.
Sigui φ una immersió de $\mathbf{Ł}_n$ en $\mathbf{A}$. Donat $c \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \setminus \{0\}$, només és una simple verificació veure que la correspondència

$$(\frac{r}{n}, z) \longmapsto \begin{cases} \varphi(\frac{r}{n}) \oplus zc & \text{si } z \leq 0 \\ \varphi(\frac{r}{n}) \odot \neg((-z)c) & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

és una immersió de $\mathbf{Ł}_n^\omega$ en $\mathbf{A}$. □

Teorema 6.9 *Sigui* $\mathbf{A}$ *una MV-cadena tal que* $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$.
Si $rank(\mathbf{A}) = n$ *aleshores* $\mathbf{Ł}_n^\omega \in \mathbb{V}(\mathbf{A})$

Prova : Com que $rank(\mathbf{A}) = n$ pel teorema 5.6, $\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n^{G,b}$. Com que $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$, aleshores $\mathbf{G}$ és un grup abelià totalment ordenat no trivial. Considerem $\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U}$ una ultrapotència d'$\mathbf{A}$ on $\mathcal{U}$ és un ultrafiltre no principal sobre ω. Pel lema 4.6, $\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U} \cong \mathbf{Ł}_n^{G^\omega/\mathcal{U}, \bar{\mathbf{b}}/\mathcal{U}}$. Observi's que per tot $a \in A^\omega/\mathcal{U}$

$$a \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U}) \text{ si, i només si, } a = (0, \bar{c}/\mathcal{U}) \quad \bar{c} \in G^\omega \quad \bar{c}/\mathcal{U} \geq \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{U} \quad (6.1)$$

Sigui $\bar{c}/\mathcal{U} \in A^\omega/\mathcal{U}$, definit de la forma següent $\bar{c}(m) = (0, mb)$ per tot $m \in \omega$. Per (6.1), $\bar{c}/\mathcal{U} \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U})$.

Considerem ara, l'element $\bar{d}/\mathcal{U} \in A^\omega/\mathcal{U}$, definit de la forma següent $\bar{d}(m) = (0, m^2 b)$ per tot $m \in \omega$. Anàlogament $\bar{d}/\mathcal{U} \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U})$.
Observem que per tot $k \in \omega$,

$$k(\bar{c}/\mathcal{U}) < \bar{d}/\mathcal{U}$$

Per tant, $\bar{d}/\mathcal{U} \notin \langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle$ l'ideal generat per $\bar{c}/\mathcal{U}$. Considerem l'àlgebra

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U})/\langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle,$$

com que $\langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle$ és un subideal propi de $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}^\omega/\mathcal{U})$ tenim que

$$\mathbf{Rad}(\mathbf{B}) \neq \{0\}$$

D'altra banda observem que els elements $(n-1, \bar{\mathbf{b}}/\mathcal{U})$ i $(n-1, \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{U})$ difereixen en $(0, \bar{\mathbf{b}}/\mathcal{U}) \in \langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle$ i per tant

$$(n-1, \bar{\mathbf{b}}/\mathcal{U})/\langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle = (n-1, \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{U})/\langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle$$

A més com que $(n-1)(\neg(n-1, \bar{\mathbf{b}}/\mathcal{U})) = (n-1, \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{U})$ aleshores tenim que

$$(n-1)(\neg(n-1, \bar{\mathbf{b}}/\mathcal{U})/\langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle) = (n-1, \bar{\mathbf{0}}/\mathcal{U})/\langle \bar{c}/\mathcal{U} \rangle$$

Per tant per la propietat 3.35 tenim que

$$\text{Ł}_n \text{ és submergible en } \mathbf{B}$$

I aplicant el lema 6.8 obtenim

$$\text{Ł}_n^\omega \text{ és submergible en } \mathbf{B}$$

Per tant hem trobat una àlgebra $\mathbf{B} \in \mathbb{HP}_U(\mathbf{A})$ tal que $\text{Ł}_n^\omega \in \mathbb{IS}(\mathbf{B})$. És a dir:

$$\text{Ł}_n^\omega \in \mathbb{ISHP}_U(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{V}(\mathbf{A}). \qquad \square$$

Corol.lari 6.10 *Si* $\mathbf{A}$ *és una MV-cadena de rang n, aleshores*

$$\mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\text{Ł}_n^\omega) \quad o \quad \mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\text{Ł}_n).$$

Prova : Si $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) = \{0\}$ aleshores trivialment $\mathbf{A}$ és isomorf a Ł_n i per tant $\mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\text{Ł}_n)$. Si $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$, aleshores dels teorema 6.9 i lema 6.7 es dedueix que $\mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\text{Ł}_n^\omega)$. $\square$

Finalment obtenim una classificació de les varietats de MV-àlgebres anàloga a la classificació de les extensions axiomàtiques de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ donada per Komori en [44].

Teorema 6.11 [44] *Sigui $\mathbb{K}$ una varietat no trivial de MV-àlgebres.*
$\mathbb{K} \neq \mathbb{W}$, si, i només si, existeixen dos conjunts finits I i J de nombres naturals $I \cap J = \emptyset$ tals que

$$\mathbb{K} = \mathbb{V}(\{\text{Ł}_i \; i \in I\} \cup \{\text{Ł}_j^\omega \; j \in J\})$$

Prova : Anem a veure que $\mathbb{V}(\{\text{Ł}_i \; i \in I\} \cup \{\text{Ł}_j^\omega \; j \in J\})$ és una subvarietat pròpia. Sigui $m = \text{màx}\{n \in \omega : n \in I \cup J\}$, existeix ja que $I \cup J$ és finit. Sigui $m < k \in \omega$ i considerem la següent equació:

$$mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1$$

Anem a veure que

$$\{\text{Ł}_i \; i \in I\} \cup \{\text{Ł}_j^\omega \; j \in J\} \models mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1.$$

Com que $G = \{\text{Ł}_i \; i \in I\} \cup \{\text{Ł}_j^\omega \; j \in J\}$ és una família de cadenes, n'hi ha prou en veure que donada una cadena $\mathbf{A} \in G$ per tot $a \in A$

$$ma = \mathbf{1} \quad \text{o} \quad \neg a \oplus \neg(ka) = \mathbf{1}$$

Com que $rank(\mathbf{A}) \leq m$, aleshores per tot $a \in A \setminus \mathbf{Rad}(\mathbf{A})$, $ma = \mathbf{1}$. Si $a \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ aleshores $ka \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A})$ i per tant $ka \leq \neg(ka) \leq \neg a$ o equivalentment $\neg a \oplus \neg(ka) = \mathbf{1}$. Així queda demostrada l'afirmació. En canvi

$$\text{Ł}_k \not\models mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1.$$

ja que si considerem l'element $\frac{1}{k} \in \text{Ł}_k$, aleshores

$$m(\frac{1}{k}) \vee (\neg\frac{1}{k} \oplus \neg(k\frac{1}{k})) = \frac{m}{k} \vee (\frac{k-1}{k} \oplus 0) = \frac{k-1}{k} \neq 1$$

Per tant, per tot $k > m$,

$$\text{Ł}_k \notin \mathbb{V}(\{\text{Ł}_i \; i \in I\} \cup \{\text{Ł}_j^\omega \; j \in J\}) \neq \mathbb{W}.$$

Sigui $\mathbb{K}$ una varietat de MV-àlgebres diferent de $\mathbb{W}$. Pel teorema 3.30 sabem que les MV-cadenes de $\mathbb{K}$ generen $\mathbb{K}$. Denotem la classe de les MV-cadenes de $\mathbb{K}$ per $\mathbb{C}_K$. Pel corol.lari 6.4, $\mathbb{K}$ conté un nombre finit de $\text{Ł}_n{}'s$. Sigui $I = \{i < \omega : \text{Ł}_i \in \mathbb{K}\}$, $I \neq \emptyset$, ja que $\text{Ł}_1 \in \mathbb{K}$ per ser $\mathbb{K}$ no trivial. Pel lema 6.6, si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_K$, aleshores $rank(\mathbf{A}) = i$ per algun $i \in I$.
Sigui

$$J = \{j \in I : \exists\, \mathbf{B} \in \mathbb{C}_K \text{ tal que } rank(\mathbf{B}) = j \text{ i } \mathbf{Rad}(\mathbf{B}) \neq \{0\}\}.$$

Obviament J és finit ja que $J \subseteq I$ i I és finit.(J pot ser buit).
Pel teorema 6.9 tenim que $\{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\} \subseteq \mathbb{K}$ i com que $\{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \subseteq \mathbb{K}$ aleshores:

$$\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) \subseteq \mathbb{K}.$$

Pel lema 6.6, per qualsevol $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_K$, existeix $j \in I$ tal que $rank(\mathbf{A}) = j$.
Si $j \in J$, aleshores del lema 6.7 deduïm que

$$\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) \subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}).$$

Si $j \notin J$, aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_j$, per tant

$$\mathbf{A} \in \{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}).$$

Per tant $\mathbb{C}_K \subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\})$, d'on es dedueix

$$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I \setminus J\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\})$$

□

6.2 Varietats com a Quasivarietats

En aquesta secció ens interessen les varietats com a cas especial de quasivarietats, per tant no només volem trobar els generadors com a varietat, sinó que també volem obtenir els generadors com a quasivarietat. El següent resultat es troba en la demostració del teorema 6.1 i està implícit en [30, 76] i [5].

Teorema 6.12 $\mathbb{W} = \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) = \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$. □

Basant-nos en el resultat anterior obtenim:

Teorema 6.13 $\mathbb{W} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_n : n \in \omega\})$. □

Prova : Pel teorema anterior $\mathbb{W} = \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q})$. Observi's que totes les subàlgebres finitament generades de $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$ són $\mathbf{L}_n$ per algun $n \in \omega$. Pel teorema 1.1, l'àlgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}$ és submergible en un ultraproducte de $\{\mathbf{L}_n : n \in \omega\}$. En conseqüència,

$$\mathbb{W} = \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{Q}\mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}_U(\{\mathbf{L}_n : n \in \omega\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_n : n \in \omega\}).$$

□

En el cas de la varietat $\mathbb{W}$, hem vist doncs, quins són els seus generadors com a quasivarietat. Volem obtenir un resultat anàleg pel cas de les subvarietats pròpies de $\mathbb{W}$. Primer necessitem un resultat previ que ens caracteritza de forma algebraica les MV-cadenes contingudes en una determinada subvarietat pròpia

Lema 6.14 *Siuin I i J dos conjunts finits de nombres naturals tals que $I \cap J = \emptyset$, aleshores*

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\, i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\, j\in J\})} &= \mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}) \\ &= \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}).\end{aligned}$$

Prova : Obviament, $\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\} \subseteq \mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\, i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\, j\in J\})}$ i $\mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}) \subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})$ i com que el fet de ser MV-cadena és tancat per $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ i $\mathbb{P}_U$ (vegeu el capítol 5) tenim que

$$\mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}) \subseteq \mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\, i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\, j\in J\})}$$

Com que $\mathbb{W}$ és aritmètica, $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}) \subseteq \mathbb{W}$ també ho és, en particular és congruent distributiva. Usant un resultat de Jónsson [14, pàg 147] tenim que

$$\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})_{FSI} \subseteq \mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})$$

on $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})_{FSI}$ és la classe de les àlgebres finitament subdirectament irreductibles de $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})$. Pel teorema 3.30, $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})_{FSI} = \mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\, i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\, j\in J\})}$, per tant

$$\mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\, i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\, j\in J\})} \subseteq \mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\})$$

Trivialment

$$\mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}) \subseteq \mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}).$$

Per demostrar la inclusió inversa, observem primer que com que $I \cup J$ és un conjunt finit, aleshores

$$\mathbb{P}_U(\{\mathbf{L}_i\; i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\; j \in J\}) = \bigcup_{i\in I} \mathbb{P}_U(\mathbf{L}_i) \cup \bigcup_{j\in J} \mathbb{P}_U(\mathbf{L}_j^\omega)$$

Per tant

$$\mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) = \bigcup_{i\in I} \mathbb{HSP}_U(\mathbf{L}_i) \cup \bigcup_{j\in J} \mathbb{HSP}_U(\mathbf{L}_j^\omega)$$

Pel teorema 5.12, $\mathbb{HSP}_U(\mathbf{L}_j^\omega) = \mathbb{ISP}_U(\mathbf{L}_j^\omega)$. D'altra banda com que $\mathbf{L}_i$ és una àlgebra finita, simple i hereditàriament simple $\mathbb{HSP}_U(\mathbf{L}_i) = \mathbb{HS}(\mathbf{L}_i) = \mathbb{IS}(\mathbf{L}_i)$. Així doncs, tenim

$$\begin{aligned} \mathbb{HSP}_U(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) &= \bigcup_{i\in I} \mathbb{IS}(\mathbf{L}_i) \cup \bigcup_{j\in J} \mathbb{ISP}_U(\mathbf{L}_j^\omega) \\ &\subseteq \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}). \end{aligned}$$

Finalment obtenim els generadors com a quasivarietat de qualsevol subvarietat pròpia de MV-àlgebres:

Teorema 6.15 $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\})$.

Prova : Del teorema 3.30 (Teorema de representació de Chang [18]) es dedueix que $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) = \mathbb{IP}_{SD}(\mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\ j\in J\})})$ i com que pel lema anterior
$\mathbb{C}_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i\in I\}\cup\{\mathbf{L}_j^\omega\ j\in J\})} = \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\})$, aleshores:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) &\subseteq \mathbb{IP}_{SD}\mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) \\ \subseteq \mathbb{ISPISP}_U(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) &= \mathbb{ISPP}_u(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) \\ = \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) &\subseteq \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega\ j \in J\}) \end{aligned}$$

□

6.3 Axiomatitzacions

Ja hem vist que la varietat $\mathbb{W}$ és una varietat finitament axiomatitzable, per exemple per **MV1.**, **MV2.**, **MV3.**, **MV4.**, **MV5.** i **MV6.** Dels resultats de Komori [44, Theorem 5.3] es dedueix :

Teorema 6.16 *Tota varietat de MV-àlgebres és finitament axiomatitzable.*
□

Una subvarietat especial és la varietat $\mathbb{V}(\mathbf{L}_1)$ ja que com que $\mathbf{L}_1$ és polinomialment equivalent a l'àlgebra de Boole de 2 elements, aleshores $\mathbb{V}(\mathbf{L}_1)$ és polinomialment equivalent a la varietat $\mathbb{B}$ de les àlgebres de Boole i pot ser axiomatitzable per

- Axiomes de $\mathbb{W}$.
- $x \approx x \oplus x$

De l'axiomatització del càlcul trivalorat de Łukasiewicz donada per Wajsberg [74] es dedueix que l'axiomàtica de $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_2)$ és la següent:

- Axiomes de $\mathbb{W}$
- $2x \approx 3x$

Es podria pensar que per cada $1 < n \in \omega$, l'axioma $(n-1)x \approx nx$ axiomatitza la varietat $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_{n-1})$, però això no és cert. Direm que una MV-àlgebra és n-**acotada** si, i només si, satisfà l'axioma anterior. Justament la classe de les MV-àlgebres n-acotades coincideix amb $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_1, \mathbf{Ł}_2, \ldots, \mathbf{Ł}_{n-1}\})$ (vegeu [64, 20]). Observi's que $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_1, \mathbf{Ł}_2\}) = \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_2)$ ja que $\mathbf{Ł}_1 \subseteq \mathbf{Ł}_2$.
Grigolia al 1973 [40, 41] dóna una axiomàtica per cada $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n)$

- Axiomes de $\mathbb{W}$.
- $nx \approx (n+1)x$

  Per cada $0 < j < n$ tal que $j \not| n$,

- $n(\neg(jx) \oplus (x \odot (j-1)x)) \approx 1$

Rodríguez i Torrens [65], obtenen per cada $n \in \omega$ un terme $v_n(x) \in Fm(x)$ tal que $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n)$ és axiomatitzable per tots els axiomes de $\mathbb{W}$ i

- $v_n(x) \approx \mathbf{1}$.

  Amb la particularitat que es pot estendre a tota $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_1}, \ldots, \mathbf{Ł}_{n_k}\})$ amb $0 < n_1, \ldots, n_k \in \omega$ per l'axioma

- $v_{n_1}(x) \vee \cdots \vee v_{n_k}(x) \approx \mathbf{1}$.

D'altra banda $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_1^\omega)$ és axiomatitzable per:

- Axiomes de $\mathbb{W}$.
- $(2x)^2 \approx 2x^2$.

DiNola i Lettieri [31], seguint els treballs de Grigolia, donen la següent axiomatització per qualsevol subvarietat pròpia, $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{Ł}_j^\omega\ j \in J\})$:

- **MV1.**, **MV2.**, **MV3.**, **MV4.**, **MV5.** i **MV6.**

Sigui $n = \text{màx}\{I \cup J\}$,

- $((n+1)x^n)^2 \approx 2x^{n+1}$

Per tot natural $1 < p < n$ tal que per tot $i \in I \cup J$, $p \not| i$,

- $(px^{p-1})^{n+1} \approx (n+1)x^p$

Per tot natural $1 < q < n$ tal que per tot $j \in J$, $q \not| j$ i tal que existeix $i \in I$ tal que $q|j$,

- $(n+1)x^q \approx (n+2)x^q$

Finalment, Panti [63], basant-se en tècniques geomètriques, obté, donada una subvarietat pròpia $\mathbb{K}$ de $\mathbb{W}$, un terme computable $\alpha_K(x) \in Fm(x)$ d'una sola variable tal que $\mathbb{K}$ és axiomatitzable per:

- **MV1.**, **MV2.**, **MV3.**, **MV4.**, **MV5.** i **MV6.**
- $\alpha_K(x) \approx \mathbf{1}$.

Capítol 7

Quasivarietats generades per MV-àlgebres Simples

En l'estudi de les varietats de MV-àlgebres fet en el capítol anterior, hem observat que *tota MV-àlgebra simple infinita genera la varietat* $\mathbb{W}$ *de les MV-àlgebres* i que *tota família infinita de MV-àlgebres simples finites també genera* $\mathbb{W}$. En el teoremes 6.12 i 6.13 hem vist que

$$\mathbb{W} = \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}] \cap \mathbf{Q}) = \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}]) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_n : n \in \omega\}).$$

Malgrat això observem que, per exemple, si $\mathbf{S}$ és una MV-àlgebra simple infinita tal que $\frac{1}{2} \notin S$ aleshores $\mathbf{S}$ satisfà la quasi-equació

$$\neg x \approx x \Rightarrow x \approx 1$$

mentre que l'àlgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ no la satisfà. Per tant $\mathbb{Q}(\mathbf{S}) \neq \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}]) = \mathbb{W}$. Anàlogament, si donat $\alpha \subseteq \omega$, $\{\mathbf{L}_n : n \in \alpha\}$, és una família infinita de MV-àlgebres simples finites tals que per tot $n \in \alpha$, $\frac{1}{2} \notin \mathrm{L}_n$, aleshores usant un argument similar també obtenim que $\mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_n : n \in \alpha\}) \neq \mathbb{W}$.

7.1 Quasivarietats generades per MV-àlgebres Simples Infinites

El nostre objectiu és demostrar que tota quasivarietat generada per una MV-àlgebra simple infinita només depèn dels racionals que conté. Primer observi's:

Lema 7.1 *Si* $\mathbf{S}$ *i* $\mathbf{T}$ *són dues MV-àlgebres simples, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\mathbf{S}) = \mathbb{Q}(\mathbf{T}) \ \textit{implica}\ S \cap Q = T \cap Q.$$

Prova : Si $S \cap Q \neq T \cap Q$, aleshores, sense pèrdua de generalitat podem suposar que $S \cap Q \setminus T \cap Q \neq \emptyset$. Per tant existeix $\frac{r}{n}$,en forma irreduïble, tal que $\frac{r}{n} \in S$ i $\frac{r}{n} \notin T$. Pel lema 3.36, $\frac{r}{n}$ genera $\mathbf{Ł}_n$, per tant tenim que $\frac{n-1}{n} \in S$ i $\frac{n-1}{n} \notin T$. Afirmem:

$$\mathbf{S} \not\models (n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1$$

i

$$\mathbf{T} \models (n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1.$$

Observem que si $a \in [0,1]$, aleshores

$$[\mathbf{0},\mathbf{1}] \models (n-1)(\neg x) \approx x\ [a] \quad \text{sii} \quad a = \frac{n-1}{n}.$$

Com que $\frac{n-1}{n} \in S$ i $\frac{n-1}{n} \neq 1$, tenim que

$$\mathbf{S} \not\models (n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1.$$

D'altra banda, com que $\frac{n-1}{n} \notin T$,

$$\mathbf{T} \models (n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1.$$

Així queda demostrada l'afirmació. Per tant $\mathbb{Q}(\mathbf{S}) \neq \mathbb{Q}(\mathbf{T})$. □

Per demostrar el recíproc per MV-àlgebres simples i infinites, recordem que el Teorema de McNaughton [56, teorema 2] (en aquesta memòria teorema 3.11) ens permet associar a cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in Fm_{\mathcal{L}}$ una funció de McNaughton sobre el cub $[0,1]^n$, f_φ, de manera que $f_\varphi = \varphi^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$. En la demostració del Teorema de McNaughton ([56, pàg. 2]), el n-cub $[0,1]^n$ es divideix en un nombre finit de regions tancades i convexes $D_1^\varphi, \ldots, D_s^\varphi$ tals que dues regions o no intersequen o si intersequen, ho fan en punts de la frontera de cada regió. A més, per tot D_k^φ existeix $j \leq \mu \in \omega$ tal que $f_\varphi \upharpoonright D_k^\varphi = \lambda_j \upharpoonright D_k^\varphi$ (on $\{\lambda_j : 1 \leq j \leq \mu\}$ és la família de polinomis constituents de f_φ). Per qualsevol $1 \leq k \leq s$, si $f_\varphi \upharpoonright D_k^\varphi = \lambda_j \upharpoonright D_k^\varphi$, existeix un subconjunt $I \subseteq \{1,\dots,\mu\}$ tal que D_k^φ es pot definir per les següents inequacions:

$$\begin{array}{rl} \lambda_m - \lambda_j \leq 0 & m \in I \\ \lambda_j - \lambda_n \leq 0 & n \in \{1,\dots,\mu\} \setminus I \\ 0 \leq \lambda_j \leq 1 & \\ 0 \leq x_i \leq 1 & \text{per tot } i \in \{1,\dots,n\} \end{array}$$

Recordem que una **cel.la convexa** D de R^n és un subconjunt compacte no buit de R^n que és el conjunt de les solucións d'un nombre finit d'igualtats lineals $f_i(x_1,\dots,x_n) = 0$ i desigualtats lineals $g_j(x_1,\dots,x_n) \leq 0$. Observem que una intersecció finita no buida de cel.les convexes és una cel.la convexa. Una **cara** de D és una cel.la convexa obtinguda canviant algunes desigualtats $g_j \leq 0$ per igualtats $g_j = 0$. Un **vèrtex** és una cara formada per un sol punt. I un **políedre** de R^n és una reunió finita de cel.les convexes (vegeu [43]).

Donat un terme $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$, les regions $D_1^\varphi,\dots,D_s^\varphi$ són cel.les convexes. A més, com que les desigualtats lineals que defineixen cada D_k^φ tenen els coeficients enters, els vèrtexs de D_k^φ són racionals.

Per cada terme $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ considerem el conjunt

$$H_\varphi = \{(a_1,\dots,a_n) \in [0,1]^n : \mathbf{[0,1]} \models \varphi \approx 1[a_1,\dots,a_n]\}.$$

Per tant

$$H_\varphi = \{(a_1,\dots,a_n) \in [0,1]^n : f_\varphi(a_1,\dots,a_n) = 1\}.$$

Per cada $j \in \{1,\dots,\mu\}$, sigui D_k^φ tal que $f_\varphi \restriction D_k^\varphi = \lambda_j \restriction D_k^\varphi$, aleshores $H_\varphi^k = H_\varphi \cap D_k^\varphi$ ve definit per les següents igualtats i desigualtats lineals:

$$\begin{array}{rl} \lambda_m - \lambda_j \leq 0 & m \in I \quad I \subseteq \{1,\dots,\mu\} \\ \lambda_j - \lambda_n \leq 0 & n \in \{1,\dots,\mu\} \setminus I \\ \lambda_j = 1 & \\ 0 \leq x_i \leq 1 & \text{per tot } i \in \{1,\dots,n\} \end{array}$$

Per tant H_φ^k és una cara de D_k^φ. A més, dues regions H_φ^k i H_φ^l o no intersequen, o ho fan en punts de la frontera (H_φ^k i H_φ^l poden ser iguals). Obviament, $H_\varphi = \bigcup_{1 \leq k \leq s} H_\varphi^k$, per tant H_φ és un poliedre de R^n. Observem que els punts aïllats, si existeixen, són racionals.

Lema 7.2 *Sigui* $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \approx 1 \Rightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n) \approx 1$ *una quasiequació. Aleshores per qualsevol MV-àlgebra simple* $\mathbf{S}$ *es satisfà:*

$$\mathbf{S} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1 \quad \textit{si, i només si,} \quad H_\varphi \cap S^n \subseteq H_\psi \cap S^n.$$

Prova : Suposem que $\mathbf{S} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$. És a dir:
Per tot $(a_1,\ldots,a_n) \in S^n$,

$$\varphi^{\mathbf{S}}(a_1,\ldots,a_n) = 1 \text{ implica } \psi^{\mathbf{S}}(a_1,\ldots,a_n) = 1.$$

Com que $\mathbf{S}$ és una subàlgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, l'anterior propietat és equivalent a que per tot $(a_1,\ldots,a_n) \in S^n$

$$f_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = 1 \text{ implica } f_\psi(a_1,\ldots,a_n) = 1.$$

Per definició, és equivalent a $H_\varphi \cap S^n \subseteq H_\psi \cap S^n$. □

Per demostrar el nostre resultat principal, necessitem introduir alguns resultats de Teoria de Grups. Primer, recordem un resultat clàssic en la Teoria de les matrius d'enters:

Teorema 7.3 (Forma Normal de Smith) [62, teorema II.9] *Tota matriu* $m \times n$ *d'enters* A *és equivalent a una matriu diagonal d'enters* D *en la forma normal de Smith:*
Per qualsevol matriu $m \times n$ *d'enters* A *existeixen una matriu* $m \times m$ *d'enters unimodular* U *i una matriu* $n \times n$ *d'enters unimodular* V *(i.e.* $|det(U)| = |det(V)| = 1$*) tals que* $UAV = D$ *on* D *és una matriu* $m \times n$ *d'enters de la forma:*

$$\begin{pmatrix}
d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & & \ddots & & 0 & 0 & & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & d_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix},$$

r *és el rang d'A i* $d_i | d_{i+1}$ *per tot* $i \leq r$. □

Utilitzant la *forma normal de Smith*, teorema 7.3, obtenim el següent resultat.

Teorema 7.4 *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema d'igualtats lineals finit a coeficients enters.*

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 & + & a_2^1 x_2 & + & \cdots & + & a_n^1 x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^m x_1 & + & a_2^m x_2 & + & \cdots & + & a_n^m x_n & = & b_m \end{cases}$$

Si $\mathbf{H}$ és un subgrup aditiu de $\mathbf{R}$ que conté $\mathbf{Z}$ tal que $\mathcal{S}$ té solució en $\mathbf{H}$, aleshores $\mathcal{S}$ és resoluble en $\mathbf{H} \cap \mathbf{Q}$.

A més, si $\mathbf{G}$ és un subgrup dens de $\mathbf{R}$ tal que $\mathbf{H} \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{G}$, aleshores per qualsevol solució $(h_1, \ldots, h_n)$ de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{H}$ existeix una successió de solucions $\{(g_1, \ldots, g_n)\}_k$ de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{G}$ amb límit $(h_1, \ldots, h_n)$.

Prova : Escrivim el sistema lineal $\mathcal{S}$ en forma matricial $AX = N$. Pel teorema 7.3, existeixen U i V matrius unimodulars i D en la forma normal de Smith tals que $UAV = D$. Per tant $A = U^{-1}DV^{-1}$. És senzill demostrar que el sistema $\mathcal{S}$ és equivalent al sistema $\mathcal{S}'$: $DY = UN$, en el següent sentit:

- $\mathcal{S}$ és resoluble si, i només si, $\mathcal{S}'$ és resoluble,
- si X és solució de $\mathcal{S}$, aleshores $V^{-1}X$ és solució de $\mathcal{S}'$ i si Y és solució de $DY = UN$, aleshores VY és solució de $\mathcal{S}$.

Com que $\mathcal{S}$ té una solució $X_0 \in H^n$, aleshores $V^{-1}X_0$ és una solució de $\mathcal{S}'$. Tota solució de $DY = UN$ és de la forma $(q_1, \ldots, q_r, t_1, \ldots, t_{n-r})$ on els q_i's són uns racionals determinats i els t_k's poden prendre qualsevol valor. Com que V és unimodular, aleshores V^{-1} és una matriu entera i $V^{-1}X_0 \in H^n$. Per tant $Y_1 = (q_1, \ldots, q_r, 0, \ldots, 0) \in H^n \cap Q^n$ i és solució de $\mathcal{S}$'. Per tant $X_1 = VY_1 \in H^n \cap Q^n$ és solució de $\mathcal{S}$.
Sigui $\mathbf{G}$ un subgrup dens de $\mathbf{R}$ tal que $\mathbf{H} \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{G}$. Considerem $X_{\mathbf{H}} = (h_1, \ldots, h_n)$ una solució de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{H}$.
Si $\mathcal{S}$ és un sistema compatible i determinat, aleshores $X_{\mathbf{H}} \in H^n \cap Q^n \subseteq G^n$ i trivialment obtenim la successió de solucions en $\mathbf{G}$.
Si $\mathcal{S}$ és indeterminat, aleshores $V^{-1}X_{\mathbf{H}} = (q_1, \ldots, q_r, t_1, \ldots, t_{n-r})$, on $q_i \in H \cap Q \subseteq G$ per tot $i \leq r$ i $t_j \in H$ per tot $j \leq n - r \neq 0$. Com que $\mathbf{G}$ és dens en $\mathbf{R}$ i $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{R}$, per qualsevol t_j $j \leq n - r$, existeix una successió $\{\alpha_j\}_k$ de $\mathbf{G}$ amb límit t_j. Així doncs, existeix una successió de solucions de $\mathcal{S}'$ en $\mathbf{G}$

$$\{(q_1, \ldots, q_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r})\}_k := (q_1, \ldots, q_r, \{\alpha_1\}_k, \ldots, \{\alpha_{n-r}\}_k)$$

amb límit

$$(q_1, \ldots, q_r, t_1, \ldots, t_{n-r}) = V^{-1}X_{\mathbf{H}}.$$

Com que la matriu V es pot interpretar com una aplicació lineal de R^n en R^n, per continuitat, $\{V(q_1,\ldots,q_r,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-r})\}_k$ és una successió de solucions de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{G}$ amb límit $VV^{-1}X_{\mathbf{H}} = X_{\mathbf{H}}$. □

Finalment ja podem demostrar:

Teorema 7.5 *Siguin* $\mathbf{S}$ *i* $\mathbf{T}$ *MV-àlgebres simples infinites tals que* $T \cap Q \subseteq S \cap Q$. *Aleshores per qualsevol quasiequació* $\varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$ *es satisfà:*

$$\mathbf{S} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1 \quad \textit{implica} \quad \mathbf{T} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1.$$

Prova : Sense pèrdua de generalitat podem assumir que φ i ψ tenen les mateixes variables, per exemple $x_1,\ldots,x_n$.
Si $\mathbf{S} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$, pel lema 7.2, tenim que $H_\varphi \cap S^n \subseteq H_\psi \cap S^n$. Volem veure que $H_\varphi \cap T^n \subseteq H_\psi \cap T^n$.
Com ja hem posat de manifest, H_φ és la reunió finita de les cel.les convexes H_φ^k. Si $(a_1,\ldots,a_n) \in H_\varphi$, sigui $J = \{j : (a_1,\ldots,a_n) \in H_\varphi^j\}$. La cel.la convexa $H_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \bigcap_{j\in J} H_\varphi^j$ és una regió convexa i tancada d'un m-espai, $m \le n$ que té la mateixa "dimensió" que l'espai lineal. El m-espai associat a $H_\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ ve definit per un sistema finit $\mathcal{S}$ d'igualtats lineals amb coeficients enters:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_1^1x_1 & + & a_2^1x_2 & + & \cdots & + & a_n^1x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^mx_1 & + & a_2^mx_2 & + & \cdots & + & a_n^mx_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Sigui $(a_1,\ldots,a_n) \in T^n$ tal que $\mathbf{T} \models \varphi \approx 1[a_1,\ldots,a_n]$. Per tant

$$(a_1,\ldots,a_n) \in H_\varphi(a_1,\ldots,a_n) \cap T^n.$$

Siguin $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ els grups abelians totalment ordenats generats respectivament per $\mathbf{S}$ i $\mathbf{T}$. Aleshores $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ són subgrups densos de $\mathbf{R}$ que contenen $\mathbf{Z}$ tals que $\mathbf{H} \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{G}$, $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G},\mathbf{1}) = \mathbf{S}$ i $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{H},\mathbf{1}) = \mathbf{T}$.
Com que $(a_1,\ldots,a_n) \in H_\varphi(a_1,\ldots,a_n) \cap T^n$, $(a_1,\ldots,a_n)$ és solució de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{H}$. Pel teorema 7.4, existeix una successió de solucions de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{G}$ amb límit $(a_1,\ldots,a_n)$. Com que

$$(a_1,\ldots,a_n) \in H_\varphi(a_1,\ldots,a_n) \cap T^n = H_\varphi(a_1,\ldots,a_n) \cap [0,1]^n \cap H^n,$$

i $H_\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ és una regió convexa i tancada del m-espai de solucions de $\mathcal{S}$ de la mateixa "dimensió" m, podem obtenir una successió $\{(b_1,\ldots,b_n)\}_{k\in\omega}$ amb límit $(a_1,\ldots,a_n)$ tal que

$$(b_1,\ldots,b_n)_k \in H_\varphi(a_1,\ldots,a_n)\cap[0,1]^n\cap G^n = H_\varphi(a_1,\ldots,a_n)\cap S^n \subseteq H_\varphi\cap S^n.$$

Per hipòtesi, $H_\varphi \cap S^n \subseteq H_\psi \cap S^n$. Per tant $(b_1,\ldots,b_n)_k \in H_\psi \cap S^n$. Així tenim una successió $\{(b_1,\ldots,b_n)\}_{k\in\omega}$ de $H_\psi \cap S^n$ amb límit $(a_1,\ldots,a_n)$ tal que $f_\psi(\{(b_1,\ldots,b_n)\}_k) = 1$. I com que f_ψ és una funció contínua, tenim $f_\psi(a_1,\ldots,a_n) = 1$. En conseqüència $(a_1,\ldots,a_n) \in H_\psi\cap T^n$. Hem demostrat que $H_\varphi \cap T^n \subseteq H_\psi \cap T^n$ i això clou la demostració. □

Les següents propietats són vàlides per qualsevol MV-àlgebra :

7.6 $x \odot y \approx 1$ *sii* $x \approx 1$ *i* $y \approx 1$. (És la propietat 3.17)

7.7 $(\neg x \oplus y) \odot (\neg y \oplus x) \approx 1$ *sii* $x \approx y$. (Es dedueix de les propietats 3.16, 3.17 i de la definició de $\rightarrow$)

De 7.7 es dedueix que per qualsevol equació $\sigma \approx \gamma$, existeix una equació de la forma $\varphi \approx 1$, amb les mateixes variables, tal que per qualsevol MV-àlgebra $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \models \sigma \approx \gamma \Rightarrow \varphi \approx 1 \quad \text{i} \quad \mathbf{A} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \sigma \approx \gamma.$$

A partir d'aquesta equivalència entre equacions i de 7.6, és fàcil demostrar que per qualsevol quasiequació $\varphi_1 \approx \psi_1 \,\&\ldots\&\, \varphi_{n-1} \approx \psi_{n-1} \Rightarrow \varphi_n \approx \psi_n$, existeix una quasiequació de la forma $\varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$ amb les mateixes variables, per exemple $x_1,\ldots,x_m$, tal que per qualsevol MV-àlgebra $\mathbf{A}$ i per qualsevol assignació $(a_1,\ldots,a_m) \in A^m$

$$\mathbf{A} \models \varphi_1 \approx \psi_1 \,\&\ldots\&\, \varphi_{n-1} \approx \psi_{n-1} \Rightarrow \varphi_n \approx \psi_n[a_1,\ldots,a_m]$$

si, i només si,

$$\mathbf{A} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1[a_1,\ldots,a_m].$$

Així, com a conseqüència del teorema 7.5, obtenim que la quasivarietat generada per una MV-àlgebra simple i infinita només depèn dels racionals que conté l'àlgebra.

Teorema 7.8 *Siguin* $\mathbf{S}$ *i* $\mathbf{T}$ *dues MV-àlgebres simples i infinites. Aleshores*

$$\mathbb{Q}(\mathbf{S}) = \mathbb{Q}(\mathbf{T}) \text{ si, i només si, } S\cap Q = T\cap Q.$$

Prova : Pel lema 7.1, $\mathbb{Q}(\mathbf{S}) = \mathbb{Q}(\mathbf{T})$ implica $S \cap Q = T \cap Q$.
Després del comentari anterior, per demostrar l'altra implicació, n'hi ha prou en considerar quasiequacions de la forma $\varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$. Aleshores, pel teorema 7.5, $S \cap Q = T \cap Q$ implica

$$\mathbf{S} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1 \text{ si, i només si, } \mathbf{T} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1.$$

Per tant $\mathbb{Q}(\mathbf{S}) = \mathbb{Q}(\mathbf{T})$. □

El teorema anterior es pot estendre a famílies de MV-àlgebres simples infinites. Usant un argument similar al de de la prova del lema 7.1 es dedueix el següent resultat que és una primera aproximació del resultat general.

Lema 7.9 *Si $\{\mathbf{S}_i : i \in I\}$ i $\{\mathbf{T}_j : j \in J\}$ són famílies MV-àlgebres simples, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i : i \in I\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}) \textit{ implica } \bigcup_{i \in I} S_i \cap Q = \bigcup_{j \in J} T_j \cap Q. \qquad \square$$

Lema 7.10 *Siguin $\{\mathbf{S}_i : i \in I\}$ i $\{\mathbf{T}_j : j \in J\}$ famílies de MV-àlgebres simples, aleshores les següents condicions són equivalents:*

(i) $\bigcup_{j \in J} T_j \cap Q \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i \cap Q$.

(ii) *Per cada $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}_j$ existeix $i \in I$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i$.*

Prova :(i) implica (ii): Si $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}_j$ aleshores $\frac{n-1}{n} \in T_j$, i per (i), tenim que

$$\frac{n-1}{n} \in T_j \cap Q \subseteq \bigcup_{j \in J} T_j \cap Q \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i \cap Q.$$

Per tant, existeix $i \in I$ tal que $\frac{n-1}{n} \in S_i$. Pel lema 3.36, $\frac{n-1}{n}$ genera $\mathbf{Ł}_n$. Així $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i$.
(ii) implica (i): Si $\frac{p}{n} \in \bigcup_{j \in J} T_j \cap Q$, $\frac{p}{n}$ en forma irreduïble, aleshores existeix $j \in J$ tal que $\frac{p}{n} \in T_j$. Per tant, pel lema 3.36, $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}_j$. De la condició (ii), deduïm que existeix $i \in I$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i$. Per tant $\frac{p}{n} \in S_i \cap Q \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i \cap Q$.
□

Teorema 7.11 *Siguin* $\{\mathbf{S}_i : i \in I\}$ *i* $\{\mathbf{T}_j : j \in J\}$ *dues famílies de MV-àlgebres simples i infinites. Aleshores*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i : i \in I\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}) \quad \textit{si, i només si,} \quad \bigcup_{i\in I} S_i \cap Q = \bigcup_{j\in J} T_j \cap Q.$$

Prova : Pel lema 7.9,

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i : i \in I\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}) \text{ implica } \bigcup_{i\in I} S_i \cap Q = \bigcup_{j\in J} T_j \cap Q.$$

Per veure el recíproc necessitem demostrar prèviament:
$\bigcup_{i\in I} S_i \cap Q \subseteq \bigcup_{j\in J} T_j \cap Q$ *implica que per qualsevol* $i \in I$ *existeix una MV-àlgebra simple infinita* $\mathbf{T} \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\})$ *tal que* $S_i \cap Q \subseteq T$.
En efecte, si $S_i \cap Q$ és finit, aleshores $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Ł}_n$ per algun $n \in \omega$. Pel lema 7.10, $\bigcup_{i\in I} S_i \cap Q \subseteq \bigcup_{j\in J} T_j \cap Q$ implica que existeix $j \in J$ tal que

$$\mathbf{Ł}_n = \mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{T}_j \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}).$$

Sigui $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q}$ una subàlgebra infinita. Pel teorema 1.1, $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q}$ és submergible en un ultraproducte de les seves subàlgebres finitament generades. Com que totes les subàlgebres finitament generades de $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q}$ són $\mathbf{Ł}_n$ per alguns $n \in \omega$, aleshores pel lema 7.10, tenim que per tot $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S}_i$, existeix $j \in J$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}_j$. Per tant $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q}$ és submergible en un ultraproducte de membres de $\mathbb{S}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\})$ i per tant $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\})$. La qual cosa demostra l'afirmació.
Si $\bigcup_{i\in I} S_i \cap Q = \bigcup_{j\in J} T_j \cap Q$, aleshores, pel resultat que hem demostrat, per cada $i \in I$ existeix una MV-àlgebra simple infinita $\mathbf{T}^i \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\})$ tal que $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{T}^i$. Pel teorema 7.5, deduïm que

$$\mathbb{Q}(\mathbf{S}_i) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{T}^i) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}) \text{ per tot } i \in I,$$

per tant $\mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i : i \in I\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\})$.
Simètricament, es demostra que $\mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i : i \in I\})$, per tant $\mathbb{Q}(\{\mathbf{T}_j : j \in J\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i : i \in I\})$. □

7.2 Quasivarietats generades per famílies arbitràries de MV-àlgebres Simples.

El teorema 7.8 ens diu que dues MV-àlgebres simples infinites generen la mateixa quasivarietat si, i només si, ambdues àlgebres contenen els mateixos racionals. El teorema 7.11 generalitza aquest resultat per famílies de MV-àlgebres simples i infinites. En el cas de dues MV-àlgebres simples i finites, com que ambdues contenen els mateixos racionals si, i només si, són iguals, la mateixa propietat es satisfà trivialment. Del lema 7.10 es dedueix que el recíproc del lema 7.9 és vàlid si totes les MV-àlgebres simples són finites.

Teorema 7.12 *Siguin* $\alpha, \beta \subseteq \omega$. *Si* $\{\mathbf{Ł}_n : n \in \alpha\}$ *i* $\{\mathbf{Ł}_m : m \in \beta\}$ *són famílies de MV-àlgebres simples i finites, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_n : n \in \alpha\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_m : m \in \beta\}) \text{ si, i només si, } \bigcup_{n\in\alpha} \mathbf{Ł}_n = \bigcup_{m\in\beta} \mathbf{Ł}_m.$$

□

El nostre objectiu és veure si podem estendre aquest resultat a altres classes de MV-àlgebres simples. Sigui $\mathbf{T}$ una MV-àlgebra simple infinita tal que $\mathbf{T} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Ł}_n$ per un cert $0 < n \in \omega$. Observis que $\mathbf{Ł}_n \models \neg((n+1)x) \oplus nx \approx 1$, mentre que, com que T és infinita i densa en $[0,1]$, qualsevol element $a \in T$ tal que $0 < a < \frac{1}{n}$, $\neg((n+1)a) \oplus na \neq 1$. Per tant $\mathbf{T} \not\models \neg((n+1)x) \oplus nx \approx 1$. I com que una equació és una cas particular de quasiequació, tenim que $\mathbb{Q}(\mathbf{T}) \neq \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n)$. Fent servir un argument similar es pot veure que *qualsevol quasivarietat generada per un conjunt finit de MV-àlgebres simples finites és diferent de qualsevol quasivarietat que contingui una MV-àlgebra simple infinita.*

Per poder trobar una caracterització per a famílies arbitràries necessitem primer els següents resultats:

Lema 7.13 *Sigui* $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *una família de MV-àlgebres no trivials. Si* $\mathbf{S}$ *és una MV-àlgebra simple submergible en* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, *aleshores* $\mathbf{S}$ *és submergible en* $\mathbf{A}_i$ *per tot* $i \in I$.

Prova : Sigui ρ una immersió de $\mathbf{S}$ en $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$. Per cada $i \in I$, considerem la projecció natural $\pi_i\colon \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i$. Clarament, $\pi_i \circ \rho\colon \mathbf{S} \to \mathbf{A}_i$ és un homomorfisme i $(\pi_i \circ \rho)(\mathbf{S})$ és una subàlgebra no trivial d' $\mathbf{A}_i$ ja que $\mathbf{A}_i$ és no trivial. Com que $\mathbf{S}$ és simple, aleshores $\pi_i \circ \rho$ és una immersió de $\mathbf{S}$ en $\mathbf{A}_i$. □

Lema 7.14 *Siguin* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltre sobre* I, $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *una família de MV-àlgebres i* $n \in \omega$. *Si* $\mathbf{Ł}_n$ *és submergible en* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}$, *alhesores existeixen*

$J \subseteq I$ i un ultrafiltre $\mathcal{H}$ sobre J tal que $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \cong \prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j/\mathcal{H}$ i $\mathbf{Ł}_n$ és submergible en $\mathbf{A}_j$ per cada $j \in J$.
A més, si el cardinal de les diferents àlgebres de $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ que contenen $\mathbf{Ł}_n$ és finit, aleshores existeix una àlgebra $\mathbf{B} \in \{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ que conté una còpia de $\mathbf{Ł}_n$ tal que $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}$ és isomorf a una ultrapotència de $\mathbf{B}$.

Prova : Considerem $J = \{i \in I : \mathbf{Ł}_n$ és submergible en $\mathbf{A}_i\}$. I sigui $\rho\colon \mathbf{Ł}_n \hookrightarrow \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}$ una immersió. Si $\bar{c} \in \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i$ és tal que $\bar{c} \in \rho(\frac{n-1}{n})$, aleshores

$$\{i \in I : (n-1)(\neg\bar{c}(i)) = \bar{c}(i)\} \in \mathcal{F}.$$

Com que per la propietat 3.35, qualsevol MV-àlgebra $\mathbf{A}$ que conté un element $a \in A$ tal que $(n-1)\neg a = a$, conté una còpia de $\mathbf{Ł}_n$, obtenim:

$$\{i \in I : (n-1)(\neg\bar{c}(i)) = \bar{c}(i)\} \subseteq J \in \mathcal{F}.$$

Pel lema 1.2, $\mathcal{F}\restriction J$ és un ultrafiltre sobre J i $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \cong \prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j/\mathcal{F}\restriction J$.
Suposem que $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m\}$, $m \in \omega$, és el conjunt de les diferents MV-àlgebres de $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ que contenen una còpia de $\mathbf{Ł}_n$. Per cada $0 \leq k \leq m$ escrivim $J_k = \{i \in I : \mathbf{A}_i = \mathbf{B}_k\}$, aleshores

$$J = J_1 \cup \cdots \cup J_m \in \mathcal{F}$$

i com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, existeix $1 \leq k \leq m$ tal que $J_k \in \mathcal{F}$. Així $\mathcal{F}\restriction J_k$ és un ultrafiltre sobre J_k i $\prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F} \cong \mathbf{B}_k^{J_k}/\mathcal{F}\restriction J_k$. □

Usant els lemes 7.13 i 7.14, podem demostrar:

Teorema 7.15 *Siguin $\alpha \subseteq \omega$ i $\mathbf{S}_l$ una MV-àlgebra simple infinita tal que $\mathbf{S}_l \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Ł}_l$ per un cert $l \in \omega$. Aleshores $\mathbb{Q}(\mathbf{S}_l) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \alpha\})$ si, i només si, existeix un conjunt infinit $\beta \subseteq \alpha$ tal que $\mathbf{Ł}_l \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per tot $r \in \beta$.*

Prova : $\mathbb{Q}(\mathbf{S}_l) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \alpha\})$ implica $\mathbf{S}_l \in \mathbb{ISPP}_U(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \alpha\})$. Pel lema 7.13, existeix $\beta \subseteq \alpha$, tal que $\mathbf{S}_l$ és submergible en un ultraproducte de $\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta\}$. Com que $\mathbf{Ł}_l \subseteq \mathbf{S}_l$, pel lema 7.14, podem suposar que $\mathbf{Ł}_l \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per tot $r \in \beta$. Si β és finit, per la segona part del lema 7.14, existeix $m \in \beta$ tal que $\mathbf{Ł}_l \subseteq \mathbf{Ł}_m$ i $\mathbf{S}_l$ és submergible en una ultrapotència de $\mathbf{Ł}_m$. Tota ultrapotència de $\mathbf{Ł}_m$ és isomorfa a $\mathbf{Ł}_m$ ja que $\mathbf{Ł}_m$ és finit (vegeu [2] i [14]). Això contradiu el fet que $\mathbf{S}_l$ és infinit. Per tant, el nombre de $\mathbf{Ł}_r$'s que

contenen $\mathbf{Ł}_l$ ha de ser infinit.
Per demostrar el recíproc n'hi ha prou en veure que per cada quasiequació de la forma $\varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$.

$$\{\mathbf{Ł}_r : r \in \alpha\} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1 \text{ implica } \mathbf{S}_l \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1.$$

Fem servir la mateixa notació i arguments similars als usats en els teoremes 7.4 i 7.5. Sigui $(a_1, \ldots, a_n) \in {S_l}^n$ tal que $\mathbf{S}_l \models \varphi \approx 1[a_1, \ldots, a_n]$. Per tant

$$(a_1, \ldots, a_n) \in H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap {S_l}^n.$$

Siguin $\mathbf{G}$ i $\mathbf{Q_r}$, $r \in \alpha$, els grups abelians totalment ordenats generats per $\mathbf{S}_l$ i $\mathbf{Ł}_r$, $r \in \alpha$. $\mathbf{G}$ i $\mathbf{Q_r}$, $r \in \alpha$, són subgrups de $\mathbf{R}$ que contenen $\mathbf{Z}$ tals que $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, \mathbf{1}) = \mathbf{S}_l$ i $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_r, \mathbf{1}) = \mathbf{Ł_r}$, per tot $r \in \alpha$.
Recordem que $H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \subseteq H_\varphi$ és una regió tancada i convexa d'un m-espai, $m \leq n$ que té la mateixa "dimensió" que l'espai lineal. El m-espai ve definit per un sistema finit d'igualtats lineals amb coeficients enters.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_1^1 x_1 & + & a_2^1 x_2 & + & \cdots & + & a_n^1 x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^m x_1 & + & a_2^m x_2 & + & \cdots & + & a_n^m x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

i $(a_1, \ldots, a_n)$ és solució de $\mathcal{S}$ en $\mathbf{G}$ ja que $(a_1, \ldots, a_n) \in H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap {S_l}^n$. Per hipòtesi, existeix $\beta \subseteq \alpha$ infinit tal que $\mathbf{Ł}_l \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per tot $r \in \beta$. Per tant $\mathbf{G} \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}_r$ per tot $r \in \beta$ ja que $\mathbf{S}_l \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Ł}_l$. Com que $\mathbf{G} \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}_r$ per cada $r \in \beta$ i $\bigcup_{r \in \beta} {Q_r}^n$ és dens en R^n, fent servir un argument similar al del teorema 7.4, podem demostrar que existeix una successió de solucions $\{(b_1, \ldots, b_n)\}_{r \in \beta}$ de $\mathcal{S}$ amb límit $(a_1, \ldots, a_n)$ tal que $(b_1, \ldots, b_n)_r \in {Q_r}^n$. Com que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap {S_l}^n = H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap [0,1]^n \cap G^n$$

i $H_\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ és una regió tancada i convexa del m-espai de solucions de $\mathcal{S}$ de "dimensió" m, podem obtenir una subsuccessió $\{(b_1, \ldots, b_n)\}_{k \in \gamma}$, $\gamma \subseteq \beta$ and γ infinit, amb límit $(a_1, \ldots, a_n)$ tal que per cada $k \in \gamma$:

$$(b_1, \ldots, b_n)_k \in H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap [0,1]^n \cap {Q_k}^n = H_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap {\text{Ł}_k}^n \subseteq H_\varphi \cap {\text{Ł}_k}^n$$

Com que $\{\mathbf{Ł}_r : r \in \alpha\} \models \varphi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$ i $\gamma \subseteq \alpha$, aleshores per tot $k \in \gamma$, $H_\varphi \cap {\text{Ł}_k}^n \subseteq H_\psi \cap {\text{Ł}_k}^n$. Per tant $(b_1, \ldots, b_n)_k \in H_\psi \cap {\text{Ł}_k}^n$. Així, hem trobat una successió $\{(b_1,\ldots,b_n)\}_{k\in\gamma}$ amb límit $(a_1,\ldots,a_n)$ tal que $f_\psi(\{(b_1,\ldots,b_n)\}_k) = 1$. Com que f_ψ és una funció contínua, aleshores $f_\psi(a_1,\ldots,a_n) = 1$. Per tant, $\mathbf{S}_l \models \varphi \approx 1[a_1,\ldots,a_n]$. □

Finalment el següent resultat ens dóna una caracterització per les quasivarietats generades per famílies arbitràries de MV-àlgebres simples.

Teorema 7.16 *Sigui $\alpha,\beta \subseteq \omega$ i siguin $\{\mathbf{S}_i : i\in I\}$ i $\{\mathbf{T}_j : j\in J\}$ dues famílies de MV-àlgebres simples infinites.*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł_m} : m\in\alpha\}\cup\{\mathbf{S}_i : i\in I\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł_r} : r\in\beta\}\cup\{\mathbf{T}_j : j\in J\})$$

si, i només si,

1. $$\left(\bigcup_{m\in\alpha}Ł_m \cup \bigcup_{i\in I} S_i\right)\cap Q = \left(\bigcup_{r\in\beta}Ł_r \cup \bigcup_{j\in J} T_j\right)\cap Q,$$

2. *Per qualsevol $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i$ o existeix $j\in J$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}_j$ o existeix $\beta_n \subseteq \beta$ infinit tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per tot $r\in\beta_n$.*

3. *Per qualsevol $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}_j$ o existeix $i\in I$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i$ o existeix $\alpha_n \subseteq \alpha$ infinit tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_m$ per tot $m\in\alpha_n$.*

Prova : Si $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_m : m\in\alpha\}\cup\{\mathbf{S}_i : i\in I\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r\in\beta\}\cup\{\mathbf{T}_j : j\in J\})$, aleshores pel lema 7.9, es satisfà la condició 1.

Suposem que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{S}_i$ i $\mathbf{Ł}_n \not\subseteq \mathbf{T}_j$ per cap $j\in J$. Pels lemes 7.13 i 7.14, $\mathbf{S}_i$ és submergible en un ultraproducte de $\{\mathbf{Ł}_r : r\in\gamma\subseteq\beta\}$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per cada $r\in\gamma$. Com que $\mathbf{S}_i$ és infinita, la segona part del lema 7.14, obliga que γ sigui infinit. Així hem demostrat que es satisfà la condició 2.

La condició 3 és la simètrica de la condició 2.

Suposem que es satisfan les condicions 1, 2 i 3. Pel lema 7.10, la condició 1 implica que

$$\{\mathbf{Ł}_m : m\in\alpha\} \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r\in\beta\}\cup\{\mathbf{T}_j : j\in J\})$$

i

$$\{\mathbf{Ł}_r : r\in\beta\} \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_m : m\in\alpha\}\cup\{\mathbf{S}_i : i\in I\}).$$

Afirmem que $\mathbf{S}_i \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r\in\beta\}\cup\{\mathbf{T}_j : j\in J\})$ per qualsevol $i\in I$.

Sigui $\mathbf{S} = \mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q}$. Si $\mathbf{S}$ és infinita, aleshores $\delta = \{l\in\omega : \mathbf{Ł}_l \subseteq \mathbf{S}\}$ és infinit. Com que les subàlgebres finitament generades de $\mathbf{S}$, són $\{\mathbf{Ł}_l : l\in\delta\}$, pel teorema 1.1, $\mathbf{S}$ és submergible en un ultraproducte de $\{\mathbf{Ł}_l : l \in \delta\}$. Per la condició 1 i pel lema 7.10,

$$\mathbf{Ł}_l \in \mathbb{S}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta\} \cup \{\mathbf{T}_j : j \in J\}) \text{ per qualsevol } l \in \delta.$$

Per tant,

$$\mathbf{S} \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta\} \cup \{\mathbf{T}_j : j \in J\}).$$

Com que $\mathbf{S}$ i $\mathbf{S}_i$ són infinites, pel teorema 7.8, tenim que

$$\mathbf{S}_i \in \mathbb{Q}(\mathbf{S}_i) = \mathbb{Q}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta\} \cup \{\mathbf{T}_j : j \in J\}).$$

Si $\mathbf{S}$ és finita, aleshores $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Ł}_m$ per un cert $m \in \omega$. Per la condició 2, $\mathbf{Ł}_m \subseteq \mathbf{T}_j$ per un cert $j \in J$ o existeix un subconjunt infinit $\beta_m \subseteq \beta$ tal que $\mathbf{Ł}_m \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per tot $r \in \beta_m$.
Si $\mathbf{Ł}_m \subseteq \mathbf{T}_j$ per un cert $j \in J$, aleshores $\mathbf{S}_i \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{T}_j \cap \mathbf{Q}$. I pel teorema 7.5, tenim que

$$\mathbf{S}_i \in \mathbb{Q}(\mathbf{S}_i) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{T}_j) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta\} \cup \{\mathbf{T}_j : j \in J\}).$$

Si existeix $\beta_m \subseteq \beta$ infinit tal que $\mathbf{Ł}_m \subseteq \mathbf{Ł}_r$ per tot $r \in \beta_m$, aleshores pel teorema 7.15,

$$\mathbf{S}_i \in \mathbb{Q}(\mathbf{S}_i) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta_m\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_r : r \in \beta\} \cup \{\mathbf{T}_j : j \in J\}).$$

Això ens demostra l'afirmació.
Simètricament, utilitzant la condició 3, es demostra que

$$\mathbf{T}_j \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_n : n \in \alpha\} \cup \{\mathbf{S}_i : i \in I\})$$

per tot $j \in J$. I això clou la prova. □

Corol.lari 7.17 *Sigui $\{\mathbf{S}_i; i \in I\}$ una famílila de MV-àlgebres simples, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i; i \in I\}) = \mathbb{W} \textit{ si, i només si, } \bigcup_{i \in I} S_i \cap Q = [0,1] \cap Q$$

□

Corol.lari 7.18 *Sigui $\{\mathbf{S}_i; i \in I\}$ una famílila de MV-àlgebres simples, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{S}_i; i \in I\}) = \mathbb{V}(\{\mathbf{S}_i; i \in I\})$$

si, i només si,

1. $\bigcup_{i \in I} S_i \cap Q = [0,1] \cap Q$
o

2. *existeixen* $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ *tals que* $\{\mathbf{S}_i; i \in I\} = \{\text{Ł}_{n_1}, \ldots, \text{Ł}_{n_k}\}$ □

Per últim donem una presentació uniforme dels generadors de les quasivarietats generades per famílies arbitràries de MV-àlgebres simples.

Teorema 7.19 *Sigui* $\mathbb{K}$ *una quasivarietat generada per MV-àlgebres simples. Existeixen dos conjunts disjunts de nombres naturals* α, β *tals que*

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\text{Ł}_n : n \in \alpha\} \cup \{\mathbf{S}_r : r \in \beta\}),$$

on per tot $r \in \beta$, $\mathbf{S}_r$ *és una MV-àlgebra simple infinita tal que* $\mathbf{S}_r \cap \mathbf{Q} = \text{Ł}_r$.

Prova : Sigui $\mathbb{S}$ la famíla de MV-àlgebres simples que genera $\mathbb{K}$. Considerem

- $\gamma = \{n \in \omega : \text{Ł}_n \in \mathbb{S}\}$
- $\mathbb{S}_f = \{\mathbf{T} \in \mathbb{S} : \mathbf{T}$ és infinita i $\mathbf{T} \cap \mathbf{Q}$ és finita$\}$
- $\beta = \{r \in \omega : \text{Ł}_r = \mathbf{T} \cap Q,$ per un cert $\mathbf{T} \in \mathbb{S}_f\}$
- $\mathbb{S}_{inf} = \{\mathbf{T} \in \mathbb{S} : \mathbf{T}$ i $\mathbf{T} \cap \mathbf{Q}$ són infinites$\}$
- Si $\mathbf{T} \in \mathbb{S}_{inf}$ i $\varepsilon_{\mathbf{T}} = \{n \in \omega : \text{Ł}_n \subseteq \mathbf{T}\}$, aleshores $\delta = \bigcup_{\mathbf{T} \in \mathbb{S}_{inf}} \varepsilon_{\mathbf{T}}$

Per cada $r \in \beta$, escollim $\mathbf{S}_r$ un membre de $\mathbb{S}_f$ tal que $\text{Ł}_r = \mathbf{S}_r \cap \mathbf{Q}$. Així, pel teorema 7.16, si $\alpha = (\gamma \cup \delta) \setminus \beta$, aleshores

$$\mathbb{Q}(\mathbb{S}) = \mathbb{Q}(\{\text{Ł}_n : n \in \alpha\} \cup \{\mathbf{S}_r : r \in \beta\}).$$

□

Observació: D'aquest resultat es dedueix que les quasivarietats generades per famílies de MV-àlgebres simples es poden generar de forma "contable".

Capítol 8

Quasivarietats n-acotades

8.1 Quasivarietats localment finites i àlgebres crítiques.

Recordem que una MV-àlgebra és **n-acotada** si, i només si, satisfà l'equació

$$(n-1)x \approx nx$$

Direm que una classe $\mathbb{K}$ de MV-àlgebres és **n-acotada** si, i només si, tots els seus membres ho són. Com que la definició d'àlgebra n-acotada ve donada per una equació, tenim que una classe $\mathbb{K}$ de MV-àlgebres és n-acotada si, i només si, $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ és n-acotada. Per tant necessitem caracteritzar les varietats de MV-àlgebres n-acotades.

Teorema 8.1 (vegeu [20]) *Una varietat $\mathbb{M}$ de MV-àlgebres és n-acotada si, i només si, existeixen $n_1, \ldots, n_k < n$ tal que $\mathbb{M} = \mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_1}, \ldots \mathbf{Ł}_{n_k}\})$* □

Una àlgebra **A** és **localment finita** si, i només si, tota subàlgebra finitament generada és finita. Una classe $\mathbb{K}$ és **localment finita** si, i només si, tota àlgebra de $\mathbb{K}$ és localment finita.
Una classe $\mathbb{K}$ és **finitament generada** si, i només si, està generada per un conjunt finit d'àlgebres finites.
Recordem propietats de varietats i quasivarietats localment finites

Teorema 8.2 [14, pàg. 70] *Sigui $\mathbb{L}$ un conjunt finit d'àlgebres finites. Aleshores $\mathbb{V}(\mathbb{L})$ és localment finita.* □

Teorema 8.3 [14, pàg. 69] *Siguin* $\mathbb{M}$ *una varietat i* $\mathrm{F}_{\mathbb{M}}(X)$ *l'àlgebra lliure respecte* $\mathbb{M}$ *amb generadors lliures* X*. Aleshores* $\mathbb{M}$ *és localment finita si, i només si,*

$$| X |< \omega \text{ implica } | \mathrm{F}_{\mathbb{M}}(X) |< \omega \qquad \square$$

Teorema 8.4 *Sigui* $\mathbb{K}$ *una quasivarietat. Les següents condicions són equivalents:*

1. $\mathbb{K}$ *és una quasivarietat localment finita*
2. $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ *és una varietat localment finita.*
3. $\mathbb{K}$ *està continguda en una varietat localment finita.*

Prova : $1 \Rightarrow 2$: Suposem que $\mathbb{K}$ és localment finita. Com $\mathbb{K}$ és una quasivarietat aleshores $\mathrm{F}_{\mathbb{V}(\mathbb{K})}(X) \in \mathbb{K}$ i per tant si $|X| < \omega$ aleshores $|\mathrm{F}_{\mathbb{V}(\mathbb{K})}(X)| < \omega$ ja que $\mathbb{K}$ és localment finita. I pel teorema 8.3 tenim que $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ és localment finita.
$2 \Rightarrow 3$: És evident, ja que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{K})$.
$3 \Rightarrow 1$: Com que tota subclasse d'una classe localment finita és localment finita, trivialment de 3 obtenim 1 $\square$

Corol.lari 8.5 *Tota quasivarietat finitament generada és localment finita.* $\square$

Volem caracteritzar les varietats i les quasivarietats localment finites de MV-àlgebres.

Teorema 8.6 *Sigui* $\mathbb{M}$ *una varietat de MV-àlgebres.* $\mathbb{M}$ *és localment finita si, i només si, existeix un* $n \in \omega$ *tal que* $\mathbb{M}$ *és* n*-acotada*

Prova : Si $\mathbb{M}$ és n-acotada per algun $n \in \omega$, aleshores pel teorema 8.1 $\mathbb{M}$ és finitament generada i pel teorema 8.2, és una varietat localment finita.
Suposem que $\mathbb{M}$ no és n-acotada per cap $n \in \omega$. Pels teoremes 6.11 i 8.1, tenim que $\mathbb{M} = \mathbb{W}$ o $\mathbb{M} = \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i \ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega \ j \in J\})$ per algun $I, J \subseteq \omega$ finits tal que $J \neq \emptyset$.
Si $\mathbb{M} = \mathbb{W}$, aleshores observem que $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ no és localment finita, ja que, per exemple, la subàlgebra generada per qualsevol irracional $a \in [0, 1]$ és infinita. Per tant, $\mathbb{M}$ no és localment finita.
Si $\mathbb{M} = \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i \ i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega \ j \in J\})$ amb $J \neq \emptyset$, aleshores existeix $j \in J$ tal que $\mathbf{L}_j^\omega \in \mathbb{M}$. Ara bé $\mathbf{L}_j^\omega$ no és localment finita, ja que, per exemple, la subàlgebra generada per l'element $(0, 1)$ és $\mathbf{L}_1^\omega$ que obviament no és finita. Per tant $\mathbb{M}$ no és una varietat localment finita. $\square$

Dels teoremes 8.4 i 8.6 es dedueix: