DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

HACIA UNA TEORIA DE CARTERAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA REVISION

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR:

Mª Teresa Preixens Benedicto

DIRECTOR:

Dr.D. Máximo Borrell Vidal

CATEDRATICO DE UNIVERSIDAD

BARCELONA, FEBRERO DE 1992

ANEXO

PROGRAMACION DINAMICA

1. INTRODUCCION

Los modelos financieros que tratan la teoría de la cartera desde un punto de vista dinámico tienen por objeto maximizar la utilidad de la riqueza final de un individuo que ha invertido su riqueza inicial durante un número finito de periodos y entre varios activos. El objetivo es conocer cuál debe ser la cuantía invertida en cada activo y en cada periodo para maximizar la utilidad de la riqueza final después de varios periodos. La resolución de este tipo de problemas hace necesaria la utilización de **técnicas de optimización dinámica** que permitirán conocer el *camino que han de seguir las variables en el tiempo para poder* conseguir el objetivo de maximización de la utilidad.

Una de las técnicas de optimización dinámica es el **cálculo de variaciones clásico** cuyo origen[253] se encuentra en la solución a un problema en Física obtenida por los hermanos **Bernouilli** a finales de la primera década del siglo XVII. Las primeras aplicaciones a la economía aparecieron a finales de la década de los 20 y principios de la de los 30

[253] **M.BORRELL**, Aplicaciones de la Teoría del Control Optimo a la Gestión Empresarial (Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1984), pp.35-51.

de este siglo de la mano de **Roos**[254], **Evans**[255], **Hotelling**[256] y **Ramsey**[257].

La **teoría del control óptimo** ó cálculo de variaciones moderno la empezó a desarrollar, en su versión determinista, **Pontryagin**[258] y sus colaboradores a finales de la década de los 50. Actualmente, se trabaja de un modo muy intenso en su versión estocástica.

Por último, dentro de las técnicas de optimización dinámica cabe distinguir la **programación dinámica**, desarrollada por **Bellman**[259] en la década de los 50 de nuestro siglo.

Bellman, poco antes de la aparición del máximo de Pontryagin, presentó una solución alternativa a los problemas de optimización dinámica orientada especialmente para aquellos casos en los que se van tomando decisiones en sucesivas etapas y el resultado de cada decisión se conoce antes de tomar la siguiente.

---

[254] **C.F.ROOS**, "A Dynamical Theory of Economics", J.P.E., 1927, pp.632-656.

[255] **G.C.EVANS**, Mathematical Introduction to Economics (McGraw-Hill, New York, 1930).

[256] **H.HOTELLING**, "The Economics of Exhaustible Resources", J.P.E., 1931, pp.137-175.

[257] **F.P.RAMSEY**, "A Mathematical Theory of Saving", E.J., 1928, pp.543-549.

[258] **PONTRYAGIN,L.S.-V.G.BOLTYANSKII-R.V.GAMKRELIDZE-E.F.MISHCHENKO**, The Mathematical Theory of Optimal Processes, (John Wiley & Sons, New York, 1962).

[259] **R.BELLMAN**, Dynamic Programming (Princeton University Press, Princeton, 1957).

En un principio, la programación dinámica se aplica a problemas en que el tiempo es una variable de carácter discreto[260], pero con posterioridad se ha desarrollado también en su vertiente continua[261], pudiéndose encontrar los puntos de coincidencia con el cálculo de variaciones clásico y la teoría del control óptimo.

Las características del problema que se deriva del modelo de maximización directa de la función de utilidad esperada de la riqueza final hacen que de las tres técnicas de optimización dinámica presentadas, la más adecuada sea la Programación Dinámica, cuyos principales rasgos se presentan a continuación.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL[262]

Sea:

•) t: en los problemas que trata de resolver la Programación Dinámica, el **tiempo** es una variable que, normalmente, se considera discreta y toma los valores

---

[260] **Intriligator** define como problemas de optimización de etapa múltiple aquellos en que el tiempo es una variable discreta. **M.D.INTRILIGATOR**, Optimización Matemática y Teoría Económica, (Prentice-Hall Internacional, Madrid, 1973) p.321.

[261] **KAMIEN,M.I.-N.L.SCHWARTZ**, Dynamic Optimization (North Holland, New York, 1981), pp.238-242.

[262] **D.KOO**, Elements of Optimization with Applications in Economic and Business (Springer-Verlag, New York, 1977), pp.167-172.
M.D.INTRILIGATOR, op. cit., pp.283-288.

$$t = t_0, t_1, t_2, \ldots, T$$

donde

t_0: tiempo inicial
T: tiempo final

En general, se suele considerar que $\Delta t = t_{k+1} - t_k = 1$ $(k=0,1,2,\ldots,T-1)$ y, por tanto,

$$t = t_0, t_0+1, t_0+2, \ldots, T.$$

•) $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt}$: en cada momento t $(t = t_0, t_1, t_2, \ldots, T)$, el sistema se caracteriza por las **variables de estado** x_{it}, $i=1,2,\ldots,n$.

Para cada t, las variables de estado definen el **vector de estado:**

$$\vec{x}_t = \left[x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt}\right]'$$

El conjunto de vectores de estado, para todos los valores de t, $(t = t_0, t_1, t_2, \ldots, T)$, constituye la **trayectoria de estado:**

$$\{\vec{x}_t\} = \{\vec{x}_t \in \mathbb{R}^n / \ t = t_0, t_1, \ldots, T\}$$

Las condiciones de contorno son:

$$\vec{x}_{t_0} = \vec{x}_0 \qquad \text{(Estado inicial)}$$

$$\vec{x}_T = \vec{x}_T \qquad \text{(Estado final)}$$

Si bien el estado inicial está definido, no ocurre lo mismo con el estado final pudiendo ocurrir que estando definido T, $\vec{x}_T$ sea libre o bien que tanto T como $\vec{x}_T$ sean libres.

•) $u_{1t}, u_{2t}, \ldots, u_{nt}$: en cada momento t $(t=t_0,t_1,\ldots,T)$, se ha de escoger el valor de m **variables de control** u_{jt}, $j=1,2,\ldots,m$.

Para cada t, las variables de control forman el vector de control:

$$\vec{u}_t = \left[u_{1t}, u_{2t}, \ldots, u_{nt}\right]'$$

y el conjunto de todos los vectores de control, para todos los valores de t, $(t=t_0,t_1,\ldots,T)$, consituye la **trayectoria de control:**

$$\{\vec{u}_t\} = \{\vec{u}_t \in \mathbb{R}^m / \; t=t_0,t_1,\ldots,T\}$$

Las variables de control se eligen sujetas a ciertas condiciones de modo que

$$\vec{u}(t) \in U \qquad \forall t, \; t=t_0,t_1,\ldots,T$$

Se dice que una trayectoria de control es **admisible** si todas sus compontentes pertenecen al conjunto U. Y se llama **conjunto de control** al conjunto de las trayectorias de control admisibles.

•) La trayectoria de estado $\{\vec{x}_t\}$ se caracteriza por las **ecuaciones de movimiento** (ecuaciones de estado) que son un conjunto de n ecuaciones en diferencias que relacionan las variables de estado en los momentos t y t+1 $(t=t_0,t_1,\ldots,T-1)$ en función de las variables de estado, las variables de control y del tiempo.

Dichas ecuaciones de movimiento,considerando que $\Delta t=1$, son:

$$\Delta\vec{x}_t = \vec{g}(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t)$$

o bien

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{g}(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t)$$

Dados los valores iniciales de las variables de estado (estado inicial),

$$\vec{x}_{t_0} = \left[x_{1t_0}, x_{2t_0}, \ldots, x_{nt_0}\right]' = \vec{x}_0$$

y una trayectoria de control $\{\vec{u}_t\}$ admisible, existe una única trayectoria de estado $\{\vec{x}_t\}$ que satisface las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno. Dicha trayectoria recibe el calificativo de **factible**, y cualquier vector de estado alcanzado con una trayectoria factible en un tiempo finito se denomina accesible.

•) El **funcional objetivo**, J, es la función que se trata de optimizar y en el caso más general es ($\Delta t=1$):

$$J(\vec{x}_0) = \sum_{t=t_0}^{T-1} f(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t)\cdot\Delta t + f_T(T,\vec{x}_t)$$

El problema de optimización dinámica consiste en elegir la trayectoria temporal de las variables de control de modo que maximice el funcional objetivo. La elección de las variables de control determina, a través de las ecuaciones de movimiento, la trayectoria de estado que describe el sistema estudiado.

Este problema recibe el nombre de **problema de control (problema de Bolza)** y, en general, se formaliza del siguiente modo:

$$\max_{\{\vec{u}_t\}} J(\vec{x}_0) = \sum_{t_0}^{T-1} f_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t)\cdot\Delta t + f_T(T,\vec{x}_T)$$

sujeto a

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{g}_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t) \qquad t=t_0,t_0+1,t_0+2,\dots,T-1$$

$$\vec{x}_{t_0} = \vec{x}_0$$

T dado

Si $f_T(T,\vec{x}_T)$ se obtiene el problema de Lagrange y si $\sum_{t_0}^{T-1} f_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t) = 0$, se obtiene el problema de Mayer.

En el caso que t_0, T, $\vec{x}_0$ y $\vec{x}_T$ sean valores numéricos y conocidos, el problema es de **fronteras fijas**. En caso contrario, el problema es de **fronteras móviles**.

Si $\{\vec{u}_t^*\}$ es la trayectoria de control óptima para el estado inicial $\vec{x}_0$, entonces

$$J_{\{\vec{u}_t^*\}}(\vec{x}_0) = \underset{\vec{u}_t \in U}{\text{Max}}\ J_{\{\vec{u}_t\}}(\vec{x}_0) = J^*(\vec{x}_0)$$

donde U es el conjunto de las trayectorias de control admisibles y $J^*(\vec{x}_0)$ es el valor funcional óptimo.

En cada momento t se toma una decisión cuyo resultado se conoce antes de tomar la siguiente en $t+\Delta t$ y que afecta al proceso de optimización.

3. SOLUCION AL PROBLEMA DE CONTROL MEDIANTE LA PROGRAMACION DINAMICA

Para resolver este problema mediante la programación dinámica deben tenerse en cuenta los siguientes principios:

1) Principio de optimalidad de Bellman

En un proceso de toma de decisiones en varias etapas, dado un punto del tiempo y el estado asociado al mismo, la secuencia de decisiones restantes ha de constituir una política óptima. Es decir, sea cual sea el estado del que se parte (estado inicial) y la decisión que ha conducido a dicho estado, todas las futuras decisiones han de ser óptimas.

2) Principio de división[263]

En lugar de intentar resolver directamente un problema difícil, se divide en un conjunto de problemas más sencillos y se obtiene la solución al problema original como resultado de la solución a los subproblemas en que se ha dividido.

Según el principio de optimalidad de Bellman si

$$\{\vec{u}_t^{\,*}\} = \{\vec{u}_{t_0}^{\,*}, \vec{u}_{t_0+1}^{\,*}, \ldots, \vec{u}_{T-1}^{\,*}\}$$

es la trayectoria de control óptimo para el problema definido y se considera el subproblema

$$\text{Max} \sum_{t}^{T-1} f_t(t, \vec{x}_t, \vec{u}_t) + f_T(T, \vec{x}_T) \qquad t \neq t_0$$

entonces, la trayectoria de control $\{\vec{u}_t, \vec{u}_{t+1}, \ldots, \vec{u}_{T-1}\}$ ha de ser óptima para dicho subproblema.

Así, en el momento T-1 (inicio del periodo T), el vector de estado es $\vec{x}_{T-1}$ y de entre todos los vectores de control factibles en dicho momento se escoge aquel $\vec{u}_{T-1}^{\,*}$ que optimice el funcional objetivo para el último periodo

$$f_{T-1}(T-1, \vec{x}_{T-1}, \vec{u}_{T-1})$$

---

[263] D.KOO, op. cit., 1977, pp.196-197.

Simbolizaremos por $J_{T-1}(\vec{x}_{T-1})$ el valor óptimo para el último periodo, es decir,

$$J_{T-1}(\vec{x}_{T-1}) = \underset{\vec{u}_{T-1}}{\mathrm{Max}}\ f_{T-1}(T-1,\vec{x}_{T-1},\vec{u}_{T-1}) = f_{T-1}(T-1,\vec{x}_{T-1},\vec{u}^{\,*}_{T-1})$$

En el momento T-2 (inicio del periodo T-1), con un vector de estado $\vec{x}_{T-2}$, se escogerá aquel vector de control $\vec{u}_{T-2}$ que optimice no sólo el funcional objetivo de dicho periodo sino la suma del funcional objetivo del periodo T-1 y el funcional objetivo del periodo T bajo el supuesto que se aplicará la política óptima en este periodo, es decir,

$$f_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2}) + J_{T-1}(\vec{x}_{T-1}) =$$

$$= f_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2}) + J_{T-1}[\vec{g}_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2})]$$

$$J_{T-2}(\vec{x}_{T-2}) = \underset{\vec{u}_{T-2}}{\mathrm{Max}} \left[f_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2}) + J_{T-1}[\vec{g}_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2})]\right]$$

Y en general,

$$J_t(\vec{x}_t) = \underset{\vec{u}_t}{\mathrm{Max}} \left[f_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t) + J_{t+1}[\vec{g}_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t)]\right] \quad t=t_0,t_0+1,\dots,T-1$$

y $$J_T(\vec{x}_T) = f_T(\vec{x}_T)$$

Siguiendo este proceso hacia atrás en el tiempo y como último paso del algoritmo se llega a determinar $J_{t_0}(\vec{x}_0)$ que es el valor óptimo del funcional objetivo original, $J^*(\vec{x}_0)$.

Demostración[264]:

$$J^*(\vec{x}_0) = \underset{\vec{u}_{t_0},\vec{u}_{t_1},\ldots,\vec{u}_{T-1}}{\text{Max}} \Big[f_{t_0}(t_0,\vec{x}_{t_0},\vec{u}_{t_0}) + f_{t_1}(t_1,\vec{x}_{t_1},\vec{u}_{t_1}) +$$

$$+\ldots+ f_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2}) + f_{T-1}(T-1,\vec{x}_{T-1},\vec{u}_{T-1}) + f_T(T,\vec{x}_T)\Big] =$$

$$= \underset{\vec{u}_{t_0}}{\text{Max}} \Big\{ f_{t_0}(t_0,\vec{x}_{t_0},\vec{u}_{t_0}) + \underset{\vec{u}_{t_1}}{\text{Max}} \Big[f_{t_1}(t_1,\vec{x}_{t_1},\vec{u}_{t_1}) +\ldots+$$

$$+ \underset{\vec{u}_{T-2}}{\text{Max}} \Big[f_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2}) + \underset{\vec{u}_{T-1}}{\text{Max}} \Big[f_{T-1}(T-1,\vec{x}_{T-1},\vec{u}_{T-1}) + f_T(T,\vec{x}_T)\Big]\Big]\ldots\Big]\Big\}$$

Teniendo en cuenta que

•) $f_T(T,\vec{x}_T) = J_T(\vec{x}_T)$

•) $\underset{\vec{u}_{T-1}}{\text{Max}} \Big[f_{T-1}(T-1,\vec{x}_{T-1},\vec{u}_{T-1}) + f_T(T,\vec{x}_T)\Big] = J_{T-1}(\vec{x}_{T-1})$

•) $\underset{\vec{u}_{t_1}}{\text{Max}} \Big[f_{t_1}(t_1,\vec{x}_{t_1},\vec{u}_{t_1}) +\ldots+ \underset{\vec{u}_{T-2}}{\text{Max}} \Big[f_{T-2}(T-2,\vec{x}_{T-2},\vec{u}_{T-2}) +$

[264] D.P.BERTSEKAS, Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987), pp.14-15.

$$\underset{\vec{u}_{T-1}}{\mathrm{Max}} \left[f_{T-1}(T-1,\vec{x}_{T-1},\vec{u}_{T-1}) + f_T(T,\vec{x}_T) \right] \Bigg] \ldots \Bigg] = J_{t_1}(\vec{x}_{t_1})$$

$J^*(\vec{x}_0)$ puede escribirse también del siguiente modo:

$$J^*(\vec{x}_0) = \underset{\vec{u}_{t_0}}{\mathrm{Max}} \left\{ f_{t_0}(t_0,\vec{x}_{t_0},\vec{u}_{t_0}) + J_{t_1}(\vec{x}_{t_1}) \right\} = J_{t_0}(\vec{x}_{t_0})$$

Mediante la programación dinámica se descompone el problema original en T problemas de optimización más sencillos que el primero (principio de la división).

En el caso que el problema no sea determinista sino estocástico, deberá añadirse una nueva variable de caráter aleatorio, $\vec{w}_t$ $(t=t_0,t_1,\ldots,T)$

$$\vec{w}_t = (w_{1t}, w_{2t},\ldots,w_{nt})$$

cuya distribución de probabilidad se considera conocida y que obliga a a modificar el funcional objetivo[265]. De este modo, se trata de encontrar la trayectoria de control admisible que

$$\underset{\{\vec{u}_t\}}{\mathrm{Max}}\ J(\vec{x}_0) = E\left\{ \sum_{t_0}^{T-1} f_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t,\vec{w}_t) + f_T(T,\vec{x}_T) \right\}$$

[265] D.P. BERTSEKAS, op cit., 1987, p.2.

y en general,

$$J_t(\vec{x}_t) = \underset{\vec{u}_t}{\mathrm{Max}}\ E\left[f_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t,\vec{w}_t) + J_{t+1}[\vec{g}_t(t,\vec{x}_t,\vec{u}_t,\vec{w}_t)]\right]$$

$$t=t_0,t_0+1,\ldots,T-1$$

CONCLUSIONES

1. CONCLUSIONES RELATIVAS AL CONJUNTO DE MODELOS DE REVISION DE CARTERA

El poseedor de una cartera de valores, definida en la presente Tesis, como

> **un conjunto de activos financieros bursátiles de renta fija y/o variable que se ha consituido con fines de inversión,**

se enfrenta al problema de la adaptación, en el tiempo, de la composición de dicha cartera. Este proceso de adaptación es el que constituye la **revisión de la cartera**, que en general puede proceder de:

a) Revisión de la política de la cartera con una modificación de los objetivos del inversor a medida que transcurre el tiempo;

b) Revisión en la cartera por cambios no asociados a la política del inversor (cambio en las expectativas, posibilidad de reinvertir los dividendos, variación en el precio de mercado de los títulos, etc.).

En los modelos de revisión considerados en este trabajo hemos supuesto, en general, que el objetivo del inversor no sufre modificaciones y, por tanto, los cambios realizados en la cartera se deben a causas externas al propio inversor.

La clasificación general de los modelos de revisión de cartera que hemos realizado en el epígrafe **4.** del capítulo **de Planteamiento, Objetivos y Estructura de la Tesis Doctoral** y a la que hemos llegado después de estudiar los trabajos de distintos autores nos permite afirmar que la revisión de cartera puede enfocarse de dos maneras distintas, que dan origen a dos tratamientos de la revisión totalmente diferentes.

El primer enfoque (revisión de carácter uniperiódico) supone el **tratamiento individualizado de cada uno de los T periodos** en los que se puede dividir el tiempo total que transcurre desde el momento de constitución de la cartera hasta que se liquida definitivamente. Como consecuencia, se ignora toda relación entre periodos y la influencia que las decisiones tomadas en cada uno de ellos pueda tener sobre los restantes. Este comportamiento, llamado **"miope"**, se traduce matemáticamente en T problemas sucesivos de optimización de carácter estático.

Este enfoque es adecuado cuando el inversor se fija objetivos inmediatos sin querer esperar el momento de liquidar la cartera para verlos cumplidos. Se puede considerar que el inversor pretende alcanzar resultados a corto plazo.

El segundo enfoque (revisión de carácter multiperiódico) **trata de forma conjunta los T periodos** en que dividimos el horizonte temporal de posesión de la cartera y ello implica que la decisión tomada en cada periodo esté condicionada por la decisión tomada en el resto de periodos.

Este enfoque resulta adecuado para un inversor que marca un objetivo que no es inmediato sino que deberá esperar al momento en que liquida la cartera para verlo realizado. En este caso el inversor busca resultados a largo plazo.

La diferencia entre ambos planteamientos da lugar a que **en cada periodo la cartera seleccionada por cada uno de ellos sea, en general,**

distinta y como consecuencia la maximización de la utilidad esperada de la riqueza disponible al final de cada periodo no conducirá a la maximización de la utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento de proceder a la liquidación de la cartera. En el apartado **3.** de las **Conclusiones** se especificarán aquellos casos particulares para los que existe una coincidencia entre la revisión de carácter uniperiódico y la revisión de carácter multiperiódico.

Excepto cuando la política miope resulta ser la óptima, en cuyo caso resulta indiferente, la verdadera revisión de cartera, para nosotros, es la de naturaleza multiperiódica, puesto que los T periodos en que se divide el plazo total de posesión de la cartera no pueden considerarse como unidades independientes (al tener en cuenta que lo que ocurra en cada periodo influirá en todos los siguientes).

2. CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS MODELOS UNIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA

El estudio de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera realizada en la **Parte I**, nos ha permitido establecer lazos de unión entre ellos, que se resumen en la clasificación que hemos presentado en las pp. 41-48 y que creemos que constituye, en sí misma, una conclusión del trabajo. De dicha clasificación pueden destacarse los siguientes aspectos:

1) Estos modelos de revisión de cartera se califican como uniperiódicos porque suponen la aplicación sucesiva, en cada punto decisorio t ($t=0,1,2,\ldots,T-1$), de **modelos de selección de cartera para un único periodo,** lo cual permite determinar la cartera óptima del periodo que se inicia en t y en consecuencia, fruto de la revisión, las

modificaciones que deben efectuarse en la cartera poseída durante el periodo anterior a t.

2) La mayor parte de los modelos uniperiódicos de revisión tiene como objetivo la **maximización de la utilidad esperada** de la variable "rentabilidad de la cartera" limitando el campo de elección de la cartera óptima al conjunto de **carteras eficientes**. Ello se debe a que este conjunto (dependiente del criterio escogido) es el mismo, en principio, para todos los inversores y, como consecuncia, se facilita el proceso de elección de la cartera óptima, especialmente cuando es un intermediario (sociedad de inversión) quien se encarga de realizar estas funciones en lugar del propio inversor. Si bien el conjunto eficiente es común para todos los inversores, la cartera óptima ya no lo es puesto que depende de cuál sea la función de utilidad particular y de la riqueza pueda invertirse.

3) Todos los modelos que determinan el conjunto eficiente como paso previo a la selección de la cartera óptima, surgen a raiz de los **modelos Esperanza-Varianza de Markowitz y/o los de índices** en un intento de mejorarlos o de adaptarlos a otras hipótesis. Esta apreciación ha sido la que nos ha permitido calificar el modelo de Markowitz como **modelo Esperanza-Varianza básico** y a los dos conjuntamente como **modelos fundamentales**.

Respecto a los diferentes modelos uniperiódicos de revisión de cartera, que se han incluído en la **Parte I**, exponemos a continuación las conclusiones obtenidas de su estudio.

En cuanto al **modelo E-V básico**, el rasgo principal que lo diferencia de otros modelos, que, como éste, determinan previamente el conjunto de carteras eficientes para después escoger aquélla que maximiza la utilidad esperada, es la **forma de considerar el riesgo asociado a cada cartera**; así, se estima igualmente perjudicial para el inversor cualquier desviación respecto a la rentabilidad esperada, sea positiva o negativa.

Aunque el propio **Markowitz** y otros autores proponen diferentes formas de definir la frontera eficiente, hemos demostrado que éstas son equivalentes y que proporcionan, por tanto, el mismo conjunto eficiente.

La función de utilidad, que el modelo E-V básico maximiza en el primer periodo para determinar la cartera óptima, no puede aplicarse en los periodos sucesivos al estar definida respecto a la "rentabilidad de la cartera".

Para superar esta limitación, en el epígrafe **1.2.5.** hemos propuesto una **generalización del modelo E-V básico** para que pueda ser aplicado en cualquier punto decisorio t $(t=0,1,\ldots,T-1)$ y hemos demostrado la conveniencia de definir una función de utilidad dependiente de la riqueza disponible en el momento t+1, $U(\tilde{W}_{t+1})$, en lugar de la tradicional función de utilidad respecto a la rentabilidad de la cartera en t+1, $U(\tilde{R}_{ct+1})$.

En concreto, demostramos que en la función de utilidad

$$U(\tilde{R}_{ct+1}) = a + b\cdot\tilde{R}_{ct+1} + c\cdot(\tilde{R}_{ct+1})^2$$

los parámetros a, b y c no permanecen constantes a lo largo del horizonte inversor, sino que dependen de la riqueza disponible al inicio de cada periodo, según las expresiones:

$$a = \alpha + \beta\cdot W_t + \gamma\cdot(W_t)^2$$

$$b = \beta\cdot W_t + 2\cdot\gamma\cdot(W_t)^2$$

$$c = \gamma\cdot(W_t)^2$$

donde α, β y γ son los parámetros que definen la función de utilidad respecto a la riqueza

$$U^{*}(\tilde{W}_{t+1}) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{t+1} + \gamma\cdot(\tilde{W}_{t+1})^2$$

Es decir,

$$U(\tilde{R}_{ct+1}) = a(W_t) + b(W_t)\cdot\tilde{R}_{ct+1} + c(W_t)\cdot(\tilde{R}_{ct+1})^2$$

Los demás modelos fundamentales, los de índices, no son importantes únicamente por el hecho de simplificar la aplicación práctica del modelo E-V básico sino también y sobre todo por introducir en el contexto de la Teoría de la Cartera el **comportamiento del mercado.** Este comportamiento se tiene en cuenta al considerar que la variable aleatoria "tasa de rentabilidad del título i", $\tilde{r}_i$, no sólo depende del propio título sino también de un conjunto de índices sectoriales, la fluctuaciones de los cuales se trasladarán al título. Este nuevo supuesto ha dado origen a otra línea de trabajo de la que es representativo[266] el CAPM (Capital Asset Pricing Model), que se basa en la posibilidad de constituir una cartera de mercado (combinación de todos los títulos, cada uno en proporción a su valor de mercado) que, bajo las hipótesis correspondientes, es la única cartera eficiente.

En la presente Tesis hemos propuesto una generalización del **modelo de Sharpe y del modelo multi-índice de Cohen-Pogue (en forma diagonal y en forma covarianza)**, caracterizados ambos por asociar la rentabilidad de un título, $\tilde{r}_i$, con un único índice, aunque en el caso del modelo multi-índice cada título puede estar asociado a un índice distinto.

En el modelo que nosotros hemos desarrollado (**modelo de índices múltiples en forma diagonal y en forma covarianza**) admitimos la

---

[266] Véase, por ejemplo, **W.SHARPE**, op. cit., 1985, pp.145-181. También, **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, (John Wiley & Sons, New York, 1987), pp.259-358.

posibilidad de que la rentabilidad de un título pueda depender del comportamiento de más de un índice. En este sentido y en el caso más general, si se supone la existencia de L índices distintos, la rentabilidad del título i es

$$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is} \cdot \tilde{I}_s + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N$$

donde, suponiendo que los diferentes índices de mercado se puedan relacionar entre sí a través de un índice común, tendremos:

$$\tilde{I}_s = a_{N+s} + b_{N+s} \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_{N+s} \qquad s=1,2,\ldots,L$$

$$\tilde{I} = a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1}$$

A partir de estas expresiones, que corresponden al modelo de índices múltiples en forma diagonal, se pueden obtener las correspondientes al resto de modelos de índices, considerados en el apartado **1.3.**, por lo que cabe considerarlos casos particulares.

Los modelos fundamentales utilizan como hipótesis de partida que **la distribución de la variable aleatoria "tasa de rentabilidad del título i" es normal**; sin embargo, en el caso de que dicha distribución no sea normal, la esperanza y la varianza ya no sirven para describirla. Esto obliga a buscar, para cada distribución particular, qué momentos estadísticos son los adecuados para representarla.

El **modelo de Fama** supone que **la distribución es del tipo Pareto estable** y en realidad constituye, en las dos versiones que hemos desarrollado en el apartado **2.2.1.**, una generalización del modelo E-V básico en el caso que se suponga independencia entre las rentabilidades de los títulos que constituyen la cartera y, otra generalización, ahora del modelo de índices múltiples en forma diagonal ya que ambos modelos suponen una distribución normal de la rentabilidad (y ésta puede obtenerse como caso particular de la de Pareto estable).

El **modelo de Fama-Elton-Gruber** incorpora al modelo E-V básico **la distribución lognormal de** $\tilde{R}'_{t+1}=1+\tilde{R}_{ct+1}$. Este nuevo supuesto provoca que, a diferencia del modelo E-V básico, en el de Fama-Elton-Gruber, entre dos carteras con igual rentabilidad esperada no siempre se prefiera la que presenta una menor varianza. Para el caso en que la distribución de la rentabilidad de la cartera sea lognormal y como consecuencia de este resultado **no es posible deducir un criterio de eficiencia de carácter general.**

De lo anterior se desprende que la definición usual de inversor racional como el inversor que prefiere más rentabilidad y menos riesgo debe limitarse, en el contexto de la Teoría de la Cartera, a unas determinadas funciones de distribución de la probabilidad (entre ellas, la normal).

Si bien en los anteriores modelos se ha supuesto que no era posible el endeudamiento ni las ventas al descubierto, estas hipótesis también pueden relajarse. Así, en el apartado 2.3. hemos presentado una generalización de los tres modelos que modifican las hipótesis del modelo E-V básico respecto a la participación de cada título en la cartera:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{R}_c) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{R}_c) = E^* \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 + X_{N+1} \\ & V_i \leq X_i \leq U_i \\ & X_{N+1} \geq -1 \end{array}\right\}$$

De este modo admitimos que el inversor pueda endeudarse (**modelo Tobin-Sharpe-Lintner**) a la vez que deba limitar su colocación en determinados títulos (**modelo E-V con límites superiores**) y efectuar ventas al descubierto (**modelo de Black**). De este modelo general se obtienen, como casos particulares, los anteriores modelos.

Otra de las hipótesis del modelo E-V básico hace referencia a la forma de la función de utilidad, que se supone cuadrática. Las limitaciones que presenta esta función (decreciente para determinados valores de la rentabilidad o riqueza, aversión absoluta al riesgo creciente, etc) han hecho que se considere la posibilidad de que la **función de utilidad representativa de las preferencias del inversor sea cúbica (Modelo de Hanoch-Levy)**:

$$U(\tilde{R}_c) = \tilde{R}_c + b\cdot\tilde{R}_c^2 + c\cdot\tilde{R}_c^3$$

En este caso, la función de utilidad esperada depende de los tres primeros momentos estadísticos $[E(\tilde{R}_c),\ V(\tilde{R}_c),\ \mu_3(\tilde{R}_c)]$, razón por la cual el criterio E-V ya no sirve para determinar la eficiencia de una cartera.

Para poder determinar un criterio de eficiencia válido para este modelo es necesario analizar el efecto de estos tres momentos sobre la utilidad esperada; si bien el efecto de $E(\tilde{R}_c)$ y μ_3 sobre la utilidad esperada está plenamente determinado (efecto positivo en ambos casos) no ocurre lo mismo con la $V(\tilde{R}_c)$ cuyo efecto sobre $E[U(\tilde{R}_c)]$ puede ser tanto positivo como negativo. Como consecuencia, es imposible deducir un criterio de eficiencia de carácter general parecido al derivado del criterio E-V.

Si la función de utilidad es cúbica se concluye que una cartera *A* es preferida a otra cartera B si y sólo si

$$\frac{\Delta\mu_3}{3\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)} + \frac{[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2}{12} - \left[\frac{\Delta V(\tilde{R}_c)}{2\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)}\right]^2 + \frac{2\cdot V(\tilde{R}_c) - \Delta V(\tilde{R}_c)}{2} > 0$$

y en el caso que la rentabilidad esperada de la cartera A sea igual a la de la cartera B $[E(\tilde{R}_{cA})=E(\tilde{R}_{cB})]$ tampoco este criterio es válido, por lo que la elección entre ambas carteras se basa, únicamente, en las preferencias del inversor.

La revisión de cartera supone unos cambios en la composición de la misma que implican, en general, la venta de unos títulos y la compra de otros. **Los costes asociados a estas modificaciones deberían ser considerados en cualquier modelo de revisión junto a los costes asociados al mantenimiento de una cartera ya formada.**

La incorporación al modelo de revisión de los costes de mantenimiento y revisión de cartera (costes derivados de la negociación por la compra y venta de títulos, impuestos sobre la ganancia extra de capital, etc.) puede realizarse de tres formas distintas:

1) La revisión sólo se lleva a cabo si el incremento de rentabilidad que se espera obtener de dicha revisión compensa los costes asociados. En este caso el inversor puede decidirse por mantener una cartera que deja de ser eficiente y que además no tiene por que ser la que maximiza la utilidad esperada que era su primer objetivo.

2) Los costes se consideran como una restricción presupuestaria y en este caso se determina la frontera eficiente de acuerdo con la cuantía que realmente está disponible para ser invertida.

3) La tercera posibilidad es la de considerar que los costes disminuyen la rentabilidad esperada de la cartera lo cual influye inmediatamente en la determinación del conjunto eficiente.

En los casos 2) y 3) se sigue optando por constituir la frontera eficiente a diferencia de la propuesta 1) que, a nuestro juicio, no es apropiada porque nos arriesgamos a mantener hasta su liquidación una cartera no óptima, desvirtuando el objetivo inicialmente marcado.

En realidad, los modelos propuestos en 2) y 3) son generalizaciones del modelo E-V básico puesto que éste es, obviamente, un caso particular: *con costes de revisión y mantenimiento de la cartera* nulos.

Además del modelo E-V básico y todas las modificaciones a las *que* ha dado lugar, existen otros modelos de revisión de cartera que se caracterizan también por su carácter uniperiódico y por considerar como único objetivo la maximización de la utilidad esperada del inversor. Este *es el caso de los* **modelos de Baumol (E-L), Esperanza-Semivarianza (E-S), Esperanza-Entropía (E-H)** y **Dominancia Estocástica.** En todos estos modelos el objetivo perseguido es de carácter mixto puesto que la cartera óptima ha de ser, a su vez, eficiente.

Los tres primeros modelos (**E-L, E-S** y **E-H**) se basan, para la determinación del conjunto eficiente, en dos momentos de la distribución de probabilidad pero mientras el primero es común (Esperanza), difieren *en el parámetro representativo del riesgo* asociado a la cartera. Así, mientras el **modelo de Baumol** mide el riesgo a través del "**límite inferior de confianza**" definido por

$$L = E(\tilde{R}_c) - K \cdot V(\tilde{R}_c)$$

donde k es el coeficiente de aversión al riesgo y el **modelo E-S** utiliza como medida la **semivarianza (negativa)**, que se define como

$$S_h^- = [E(\tilde{R}_c - h)^-]^2$$

donde h es el nivel de rentabilidad fijado por el inversor, el **modelo E-H** define la **entropía** para medir el riesgo asociado a la cartera del siguiente modo:

$$H_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot H_i$$

donde X_i es la proporción de la riqueza total invertida en el título i y H_i su entropía definida por

$$H_i = - \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log_2 p_j$$

siendo p_j $(j=1,2,\ldots,m)$ la probabilidad asociada a cada uno de los valores que puede tomar la rentabilidad del título i, $\tilde{r}_i$.

De estas tres distintas medidas del riesgo, L y S_h^- surgen, en realidad, de una concepción del riesgo similar puesto que ambas penalizan únicamente las desviaciones negativas de la rentabilidad ya sea respecto a la rentabilidad esperada (modelo de Baumol) o respecto a un nivel de rentabilidad arbitrariamente elegido por el inversor (modelo E-S). Con ello intentan poner de manifiesto la diferente actitud del inversor ante desviaciones positivas y desviaciones negativas respecto a un valor fijado de la rentabilidad de la cartera. El tratamiento del riesgo es la característica que diferencia a estos modelos del modelo E-V básico que considera igualmente nociva cualquier desviación respecto a la rentabilidad esperada.

El modelo E-V básico puede considerarse como un caso particular del modelo E-S cuando la distribución de la rentabilidad es normal y, además, cuando el nivel de rentabilidad fijado por el inversor coincide con la rentabilidad esperada.

El inconveniente que presentan los modelos de Baumol y E-S es que tanto el "límite inferior de confianza" como la semivarianza son **medidas del riesgo particulares para cada inversor** ya que el coeficiente de aversión al riesgo y el nivel de rentabilidad mínimo exigido pueden variar de un inversor a otro. Y si cada inversor define el valor de estos parámetros, el conjunto (la frontera) eficiente también será peculiar para cada inversor. Ello significa que se pierde la ventaja, para el gestor de carteras, que supone el hecho de disponer de un conjunto de carteras eficientes igual para todo un colectivo de inversores al facilitar la elección final de la cartera óptima.

Sólo en el caso de que en el modelo E-S se considere que todos los inversores definen un nivel de rentabilidad igual a la rentabilidad esperada, se conseguiría disponer de una medida del riesgo independiente del inversor y de un conjunto eficiente único.

En cuanto al modelo de Baumol, el coeficiente de aversión al riesgo particular para cada inversor ya se tiene en cuenta en la función de utilidad, por lo que no parece necesario introducir este elemento subjetivo en el conjunto eficiente.

Por otra parte, tanto la utilización de K como de h supone una dificultad añadida si tenemos en cuenta que en cada punto decisorio se debe determinar la frontera eficiente correspondiente al nuevo periodo y que estos dos parámetros pueden variar periodo a periodo en función de la riqueza del inversor.

La ventaja que presenta la utilización de la **entropía** respecto al "límite inferior de confianza" de Baumol o a la semivarianza se basa en su **independencia respecto al inversor**, sin introducir en la medida del riesgo elementos subjetivos. Como consecuencia, el conjunto eficiente será el mismo para todos los inversores, del mismo modo que ocurre en el modelo E-V básico. Además, la entropía no sólo es independiente respecto al inversor sino que **tampoco depende de la esperanza**, a diferencia de otras medidas del riesgo donde este momento constituye una referencia.

Por último, el **modelo de Dominancia Estocástica** se diferencia de los tres modelos anteriores y del modelo E-V básico en que el criterio de eficiencia no se apoya en dos momentos de la distribución de probabilidad sino en la propia función de distribución, considerada ésta en su globalidad. La ventaja que presenta este criterio es que puede admitirse cualquier distribución sin necesidad de añadir hipótesis sobre la misma.

Por otra parte, el modelo de Dominancia Estocástica permite definir criterios de eficiencia adaptados a distintos tipos de funciones de utilidad, ampliando el abanico de posibilidades de aplicación del modelo, a diferencia de otros que deben añadir hipótesis restrictivas respecto a dicha función.

En la clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera se distinguió, dentro del grupo de los que consideran un único objetivo y al que pertenecen todos los modelos anteriores, el **modelo Media Geométrica** que, como su nombre indica, pretende maximizar una media geométrica, la de $\tilde{R}'_{ct+1} = 1+\tilde{R}_{ct+1}$, definida como

$$MG = \prod_{s=1}^{S} (R_{st+1})^{q_{st+1}}$$

donde R_{st+1} $(s=1,2,\ldots,S)$ representa los valores que puede tomar $\tilde{R}'_{ct+1}$, cada uno de los cuales tiene asociada una probabilidad q_{st+1}.

Dado que se demuestra que cuando la función de utilidad del inversor (respecto a la riqueza disponible en t+1) es logarítmica, la maximización de la media geométrica equivale a la maximización de la utilidad esperada, podemos incluir el modelo Media Geométrica en el conjunto de modelos cuyo objetivo es maximizar directamente la utilidad esperada.

Por otra parte, si se supone que $\tilde{R}'_{ct+1}$ se distribuye según una lognormal, se demuestra que la cartera que maximiza la media geométrica y, por tanto, la utilidad esperada, es una cartera eficiente según el criterio E-V. Esto significa que, aunque el modelo no considere explícitamente la condición de eficiencia de la cartera como un subobjetivo, también la satisface.

Por último, la importancia del modelo radica en la **relación que mantiene con el mismo modelo de carácter multiperiódico** puesto que la maximización de la media geométrica de cada periodo es consistente con la maximización de la media geométrica para el conjunto de T periodos. Esta relación permite que en cada periodo sea suficiente considerar únicamente dos elementos: la distribución de probabilidad asociada a la rentabilidad de la cartera de dicho periodo, y la riqueza disponible para ser invertida.

La mayoría de modelos que se plantean cuál es la cartera óptima para el inversor, consideran que éste se comporta maximizando su utilidad esperada; sin embargo, debe admitirse la posibilidad que el inversor pueda fijarse un objetivo distinto, en el que la utilidad no intervenga.

En este sentido, los **modelos Safety First**, a diferencia de todos los anteriores, no pretenden maximizar la utilidad esperada del inversor sino **asegurarle una determinada rentabilidad.** Se supone que el inversor busca, ante todo, seguridad y para conseguirla puede aplicar el **modelo de Roy, de Kataoka o de Telser.**

Los tres modelos se caracterizan por fijar un nivel de rentabilidad que sirve de referencia (nivel de subsistencia), pero mientras el **modelo de Roy** pretende minimizar la pobabilidad de que la *rentabilidad real de la cartera se inferior al nivel de subsistencia*, el **modelo de Kataoka** fija el valor de dicha probabilidad y para el mismo, maximiza el nivel de subsistencia. El **modelo de Telser**, a diferencia de los anteriores fija el nivel de subsistencia y el valor que se desea que tome la probabilidad de que la rentabilidad real esté por debajo del anterior nivel y maximiza, para estos valores, la rentabilidad esperada.

Por último, dentro de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera es posible diseñar un modelo ajustado a cada inversor particular, en el que se tengan en cuenta múltiples objetivos. Este es el caso del **modelo de Programación por Objetivos**, que admite la incorporación de cuantos objetivos el inversor desee alcanzar, inclusive cuando éstos muestren cierto grado de incompatibilidad mutua. En este modelo se supone que el inversor no pretende optimizar sino "suboptimizar" es decir, que el resultado de cada objetivo esté lo más cerca posible del valor deseado; es por ello que se permite la presencia de objetivos no totalmente compatibles, a través de la utilizacion de unos coeficientes que determinan el grado de prioridad con que deben ser conseguidos cada uno de los objetivos.

Este modelo permite también que **el inversor modifique sus objetivos periodo a periodo**, que es el otro supuesto que puede motivar la revisión de la cartera y que en el resto de modelos uniperiódicos de revisión de cartera no puede ser tenido en cuenta al considerar un único objetivo.

3. *CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS MODELOS MULTIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA*

En la **Parte II** hemos estudiado modelos de revisión de cartera cuya diferencia básica respecto a los de la **Parte I** estriba en el tratamiento de los T periodos que constituyen el horizonte temporal de posesión de la cartera. Asi, mientras los modelos uniperiódicos consideran aisladamente cada uno de los T periodos, los multiperiódicos los tratan como un conjunto, y condicionan la decisión tomada en cada uno de ellos a las decisiones que se han tomado en los anteriores.

Esta diferencia en el carácter de la revisión provoca también diferencias en cuanto al método utilizado para la determinación, en cada caso, de la cartera óptima. La consideración global de los T periodos se traduce, matemáticamente, en un problema de optimización de carácter dinámico que nosotros hemos resuelto mediante la aplicación de la Programación Dinámica, aunque cabría la posibilidad de utilizar también la Teoría del Control Optimo[267].

Una de las razones por las que nos hemos decantado por la Programación Dinámica obedece a que este método de optimización nace para resolver problemas de optimización donde la variable tiempo es de carácter discreto lo cual coincide con la naturaleza discreta de la revisión de carteras. Por el contrario, la Teoría del Control Optimo considera, en sus inicios, que la variable tiempo es continua, mientras que el salto a lo discreto es posterior y todavía se está desarrollando, (existe una linea de investigación en la Universidad de Valencia).

Además, el encadenamiento existente entre la decisión tomada en un periodo y las tomadas en periodos anteriores, ampara la aplicación de la metodología optimizadora, que hemos llamado "retro-optimización" y en la que se basa la Programación Dinámica.

La utilización de este método de optimización nos ha permitido determinar, desde el momento t=0 (constitución de la cartera) y gracias al proceso de retro-optimización, cuál es la cuantía óptima que debe invertirse en cada punto decisorio (t=0,1,2,...,T-1) y en cada activo

---

[267] **B.A.BENSOUSSAN-E.GERALD HURST,JR.-B.NASLUND,** Management Applications of Modern Control Theory (North Holland, Amsterdam, 1974), pp.111-140.

para conseguir el objetivo deseado (maximización de la utilidad esperada de la riqueza disponible en T). Esta cuantía óptima (Y^*_{it}), es una función de W_t (riqueza disponible en t; t=0,1,...,T-1) que es un dato cuando se llega al momento t considerado.

El estudio de los modelos multiperiódicos de revisión de cartera nos ha permitido realizar la clasificación que hemos presentado en las pp. 266-273 de esta Tesis y que tiene como objetivo mostrar una visión general de cuáles son las principales líneas que está siguiendo lo que podriamos llamar Teoría de dichos modelos.

Queda en evidencia la gran importancia que han adquirido todos los modelos que consideran al inversor como un maximizador de la utilidad esperada, ya sea de la riqueza final, $[U(\tilde{W}_T)]$, del "lifetime consumption", $[U(\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,...)]$, o de la rentabilidad de la cartera periodo a periodo, $[U(\tilde{R}_{c1},\tilde{R}_{c2},...,\tilde{R}_{cT})]$. En nuestro trabajo hemos tratado, únicamente, los modelos que consideran que la finalidad del inversor es maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible en T puesto que son los que aparecieron en primer lugar y todavía no están superados. Por otra parte, la función de utilidad dinámica en que se basan los otros modelos, requiere, por sí misma, de un estudio previo.

Del mismo modo que en los modelos uniperiódicos, la maximización de la utilidad esperada de la riqueza disponible en T puede constituir un **objetivo de carácter puro**, adjetivo que hemos utilizado para indicar que se maximiza directamente la función de utilidad esperada; pero, asimismo, puede tratarse de un **objetivo de carácter mixto**, en cuyo caso, la cartera óptima deberá ser, a su vez, una cartera eficiente.

Si se delimita la elección de la cartera óptima al conjunto eficiente, se puede considerar la **extensión del modelo E-V básico al caso**

multiperiódico, lo cual exige la definición de la frontera eficiente para el conjunto de T periodos (epígrafes **4.2.** y **4.3.**).

Bajo hipótesis de independencia (en el tiempo y dentro de cada periodo), estacionariedad y mantenimiento de las proporciones invertidas en cada título en el transcurso del tiempo demostramos, que la cartera eficiente para el primer periodo es también eficiente para el conjunto de T periodos. **Esta constituye una importante relación entre el modelo E-V básico y el modelo E-V multiperiódico**, pero se consigue bajo hipótesis muy restrictivas.

Además, el criterio de eficiencia basado en el valor esperado y en la varianza no es adecuado para el caso multiperiódico puesto que el tercer momento para el conjunto de T periodos no es cero a pesar de que periodo a periodo este tercer momento pueda ser nulo. Así, el tercer momento debe ser tenido en cuenta para determinar la eficiencia de una cartera, pero su consideración no permite deducir un criterio de eficiencia de carácter general puesto que, mientras un incremento de la varianza provoca un incremento del tercer momento, el efecto de un incremento de la rentabilidad esperada en dicho momento no está determinado. La dificultad que supone la definición de un criterio de eficiencia basado en los tres primeros momentos estadísticos nos sugiere en principio, buscar la cartera que maximiza directamente la función de utilidad esperada sin reparar en la eficiencia de dicha cartera.

En realidad, disponer de la frontera eficiente es útil cuando puede determinarse fácilmente, pero si su búsqueda plantea problemas importantes, los beneficios que reporta desaparecen. A mayor abundamiento, del estudio realizado por **Kroll**, **Levy** y el propio **Markowitz**[268], se desprende que hay pocas diferencias entre la cartera óptima que maximiza directamente la utilidad esperada y la que, además, es eficiente.

---

[268] **KROLL,Y.-H.LEVY,-H.M.MARKOWITZ**, op. cit., 1984, pp.47-61.

A diferencia del modelo E-V de Markowitz, el modelo E-V multiperiódico no permite ser calificado (¿todavía?) como básico puesto que pocos son los trabajos que han seguido esta línea. También nosotros abandonamos este camino por las dificultades que presenta y, en su lugar, proponemos un modelo de revisión de carteras (**Capítulo 5**) en el que se considera como único objetivo de carácter puro la maximización de la función de utilidad esperada de la riqueza disponible en T (momento de liquidación de la cartera).

En el **Capítulo 5** hemos considerado la posibilidad de que la función de utilidad del inversor respecto a la riqueza disponible en T fuera de uno de los siguientes tipos, cuya denomiación corresponde a su estructura algebraica:

•) cuadrática: $U(\tilde{W}_T) = \alpha + \beta \cdot \tilde{W}_T + \gamma \cdot (\tilde{W}_T)^2$

•) logarítmica: $U(\tilde{W}_T) = \ln\ (\mu + \tilde{W}_T)$

•) potencial: $U(\tilde{W}_T) = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot (\mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T)^{1-(1/\lambda)}$

Para cada tipo de función hemos deducido, bajo hipótesis de independencia y estacionariedad, cual es la cuantía óptima que debe invertirse en cada activo (i=1,2,...,N) y en cada punto decisorio (t=0,1,...,T-1) para conseguir maximizar la utilidad esperada en T que es el único objetivo fijado por el inversor. Para ello ha sido necesario la definición de la función de utilidad "derivada", $f_t(\tilde{W}_t)$, que es la función que debe maximizarse en cada uno de los periodos para garantizar la maximización de la función de utilidad real, $U(\tilde{W}_T)$.

La función logarítmica y la potencial tienen una característica común

$$-\frac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda\cdot\tilde{W}_T \qquad (\lambda\neq 0)$$

gracias a la cual es posible realizar un estudio global de ambas funciones y después particularizar los resultados obtenidos para cada tipo de función.

El anterior cociente, que es una función lineal de $\tilde{W}_T$, constituye el inverso del coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt.

Además de deducir cuál debe ser la cuantía invertida en cada activo y en cada punto decisorio, hemos estudiado en que casos la política miope es la óptima; es decir, en qué casos la maximización de la función de utilidad esperada de la riqueza disponible en t+1 ($t=0,1,\ldots,T-1$) conduce a los mismos resultados que la maximización de la función de utilidad esperada de la riqueza disponible en T mediante la Programación Dinámica. En estos casos, **la función de utilidad "derivada" puede sustituirse por la función de utilidad correspondiente al periodo considerado, $U(\tilde{W}_{t+1})$ y al estar definida respecto a $\tilde{W}_{t+1}$ coincide con la función $U(\tilde{W}_T)$ inicialmente definida.**

Este resultado al que hemos llegado, nos parece importante porque:

1) **simplifica el proceso de determinación de las funciones de utilidad "derivadas"**; y,

2) **da validez a los modelos uniperiódicos** basados en la maximización directa, en cada periodo, de la función de utilidad esperada, puesto que, en este caso, la utilidad esperada en el momento T coincidirá con la obtenida mediante la aplicación de los modelos multiperiódicos.

Los resultados que hemos obtenido a través del modelo propuesto en este capítulo, pueden resumirse en los cuatro siguientes cuadros:

•) **CUADRO I:** Función de utilidad cuadrática - Vector de cuantías óptimas invertidas en cada uno de los activos en el momento t, (Y_t^*)

•) **CUADRO II:** Funciones de utilidad que cumplen la relación $\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$ - Vector de cuantías óptimas invertidas en cada uno de los activos en el momento t, (Y_t^*)

•) **CUADRO III:** Función de utilidad cuadrática - Política miope óptima

•) **CUADRO IV:** Funciones de utilidad que cumplen la relación $\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$ - Política miope óptima

CUADRO I

Función de utilidad cuadrática - Vector de cuantías óptimas invertidas en cada uno de los activos en el momento t, (Y_t^*)

- **Función de utilidad cuadrática** $U(\tilde{W}_T)=\alpha+\beta\cdot\tilde{W}_T+\gamma\cdot(\tilde{W}_T)^2$
  - N activos arriesgados y un activo sin riesgo
    - Caso general: $\left[\dfrac{\beta}{\prod_{k=t+1}^{T-1} a_{ok}} + 2\cdot\gamma\cdot a_{ot}\cdot W_t\right]\cdot D_t$
    - Caso particular $s_{ot} = 0$: $(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_t)\cdot D$
    - Posibilidad de endeudamiento: $(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_t)\cdot D_t$
  - N activos arriesgados
    - Caso general: $(\beta_{t+1}+2\cdot\gamma_{t+1}\cdot W_t\cdot\varepsilon_N)\cdot D_t+W_t\cdot V_N\cdot G$
    - Posibilidad de endeudamiento: $(\beta + 2\cdot\gamma\cdot W_t)\cdot D$

La matriz D_t tiene en todos los casos la misma estructura

$$D_t = -\frac{1}{2\cdot\gamma}\cdot(A_t)^{-1}\cdot C_t$$

aunque las matrices A_t y C_t son particulares para cada uno de dichos casos y están definidas en los apartados correspondientes. Si se consideran N activos arriesgados y un activo sin riesgo y además $s_{ot}=0$, las matrices A y C son las mismas para cualquier punto decisorio t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$. Lo mismo ocurre si se consideran N activos arriesgados con posibilidad de endeudamiento.

CUADRO II

Funciones de utilidad que cumplen la relación $\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$ -

Vector de cuantías óptimas invertidas

en cada uno de los activos en el momento t, (Y_t^*)

- **Función de utilidad** $\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu + \lambda \cdot \tilde{W}_T$
  - **N activos arriesgados y un activo sin riesgo**
    - **Caso general**: $\left[\dfrac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} a_{ok}} + \lambda \cdot a_{ot} \cdot W_t\right] \cdot D_t$
    - **Caso particular $\lambda = 1$**: $\left[\dfrac{\mu}{\prod_{k=t+1}^{T-1} a_{ok}} + a_{ot} \cdot W_t\right] \cdot D_t$
    - **Caso particular $s_{ot} = 0$**: $(\mu + \lambda \cdot W_t) \cdot D_t$
    - **Caso particular $\mu = 0$**: $(\mu + \lambda \cdot W_t) \cdot D_t$
    - **Caso particular $\lambda = -1$** $\Longrightarrow$ **Función cuadrática**
    - **Posibilidad de endeudamiento**: $(\mu + \lambda \cdot W_t) \cdot D_t$
  - **N activos arriesgados**
    - **Caso general** $\Longrightarrow$ **A través del procedimiento utilizado, no es posible deducir una expresión general**
    - **Caso particular $\mu = 0$**: $W_t \cdot M_t$
    - **Posibilidad de endeudamiento**: $(\beta + 2 \cdot \gamma \cdot W_t) \cdot D$

En todos los casos $D_t = -\dfrac{1}{\lambda} \cdot (A_t)^{-1} \cdot C_t$, pero las matrices A_t y D_t son particulares para cada uno de ellos. Estas matrices están definidas en los apartados 5.6.2. y 5.6.3.

De la observación de los cuadros I y II pueden destacarse los siguientes rasgos:

1) Para cualquiera de las funciones de utilidad estudiadas, **las expresiones obtenidas para el caso de N activos arriesgados con posibilidad de endeudamiento pueden obtenerse como un caso particular de las expresiones deducidas del caso en que se consideran N activos arriesgados y un activo sin riesgo con posibilidad, además, de endeudamiento.** Para ello es suficiente con eliminar la primera fila y la primera columna de la matriz A_t donde aparecen los coeficientes relacionados con el activo sin riesgo y la primera fila de la matriz C_t (Véanse los apartados **5.5.2.2.** y **5.5.3.2.** para la función de utilidad cuadrática y los apartados **5.6.2.5.** y **5.6.3.2.** para el resto de funciones).

2) La función de utilidad potencial con $\lambda=-1$ da lugar a una función de utilidad cuadrática concreta y hemos demostrado que **los resultados obtenidos para la función de utilidad cuadrática general son aplicables a este caso** y coincidentes con los derivados del estudio de la función potencial.

3) **En el caso que el inversor se comporte en cada periodo maximizando la función de utilidad esperada correspondiente al mismo, la cuantía invertida en cada punto decisorio tendrá la misma estructura que la cuantía invertida en el momento T-1** para los caso que hemos estudiado sustituyendo T-1 por t. De hecho, el comportamiento miope se caracteriza por tratar cada periodo como si fuera el último, de ahí la validez de este resultado.

CUADRO III

Función de utilidad cuadrática - Política miope óptima

			MIOPIA OPTIMA
Función de utilidad cuadrática $U(\tilde{W}_T)=\alpha+\beta\cdot\tilde{W}_T+\gamma\cdot(\tilde{W}_T)^2$	N activos arriesgados y un activo sin riesgo	Caso general	NO
		Caso particular $s_{ot} = 0$	SI
		Posibilidad de endeudamiento	SI
	N activos arriesgados	Caso general	NO
		Posibilidad de endeudamiento	SI

CUADRO IV

Funciones de utilidad que cumplen la relación $\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu+\lambda\cdot\tilde{W}_T$ - Política miope óptima

Función de utilidad			MIOPIA OPTIMA
$\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \mu+\lambda\cdot\tilde{W}_T$	N activos arriesgados y un activo sin riesgo	Caso general	NO
		Caso particular $\lambda = 1$	NO
		Caso particular $s_{ot} = 0$	SI
		Caso particular $\mu = 0$	SI
		Caso particular $\lambda = -1$	NO
		Posibilidad de endeudamiento	SI
	N activos arriesgados	Caso general	NO
		Caso particular $\mu = 0$	SI
		Posibilidad de endeudamiento	SI

De la observación de los cuadros III y IV se puede ver en qué casos la politica miope es la óptima y en qué casos no lo es y, en concreto, pueden extraerse los siguientes resultados:

1) Para los tres tipos de funciones de utilidad estudiados y para el caso más general, **la política miope no es la óptima** ya sea considerando que todos los activos son arriesgados o admitiendo la posibilidad de un activo sin riesgo. Esto significa que el resultado de aplicar la Programación Dinámica para maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible en T no proporciona la misma secuencia de carteras que si maximizamos periodo a periodo la utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento t+1 $(t=0,1,...,T-1)$.

2) En el caso que se consideren N activos arriesgados y un activo sin riesgo y éste sea, en concreto, dinero en caja $(s_{ot}=0)$, **la política miope es la óptima** sea cual sea la función de utilidad esperada.

3) Si se posibilita el endeudamiento del inversor, **la política miope es siempre la óptima** independientemente de la función de utilidad y del tipo de activos considerados incluso en el caso en que $s_{ot}=0$, si incluimos un activo sin riesgo.

4) Si la función de utilidad cumple la relación $\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \lambda\cdot\tilde{W}_T \;(\lambda\neq 0)$, **la política miope es la óptima** tanto cuando se considera que todos los títulos son arriesgados como cuando se incluye un activo sin riesgo y en este último caso no hace falta que $s_{ot}=0$.

Por último, la maximización de la utilidad esperada de la riqueza disponible en T en el caso que la función de utilidad sea logarítmica del tipo $U(\tilde{W}_T) = \ln \tilde{W}_T$ $\left[\dfrac{-U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \tilde{W}_T\right]$, es consistente con la maximización de la media geométrica de la rentabilidad de la cartera de cada periodo. Y como este comportamiento equivale a maximizar la utilidad esperada de cada periodo, se reafirma la conclusión sobre la optimalidad de la política miope en el caso de $-\dfrac{U'(\tilde{W}_T)}{U''(\tilde{W}_T)} = \tilde{W}_T$ $(\lambda=1)$.

A su vez, es consistente con la maximización de la utilidad esperada de $\tilde{R}_T$ (rentabilidad global para los T periodos) si la función de utilidad es también logarítmica.

Por otra parte, en el apartado **3.7.** se demostró que en el caso de que la distribución de la rentabilidad $(\tilde{R}'_{ct+1}=1+\tilde{R}'_{ct+1})$ sea lognormal, la cartera que maximiza la media geométrica es también una cartera eficiente en el espacio E-V. Por tanto, en este supuesto, la secuencia de carteras encontradas a partir de la aplicación de la Programación Dinámica es una secuencia de carteras eficientes, aunque este objetivo no sea expresamente perseguido.

4. *CONCLUSIONES PROYECTIVAS*

La realización de esta Tesis nos ha permitido profundizar en algunos de los aspectos de la Teoría de Carteras desde el punto de vista de la revisión. Somos conscientes, sin embargo, de que existen otros aspectos que no se han tratado en este trabajo pero que, por su importancia en el contexto señalado, merecerían una especial atención.

Entre estos aspectos deben destacarse los siguientes:

En la **Parte I** (La rentabilidad de los títulos se distribuye según una lognormal; apartado **2.2.2.**), se ha puesto de manifiesto que la definición usual, en la literatura financiera, de racionalidad (se prefiere más a menos rentabilidad y menos a más riesgo) no puede utilizarse para cualquier distribución de probabilidad. Este hecho nos hace pensar en la necesidad de realizar un estudio por **familias de distribuciones** que presenten características comunes. De este modo, se podrían evitar problemas de hipótesis que se filtran al estudiar las distribuciones particulares.

Para la determinación de la composición óptima de la cartera en cada periodo se debe concretar, además de la función de distribución, la de utilidad, y en todos los modelos considerados, esta función de utilidad se ha hecho depender de una única variable. Sin embargo, parece más probable que la utilidad del inversor pueda depender de más de un factor. Esta posibilidad implicaría la definición de una **función de utilidad multiatributo** que tuviera en cuenta todos los factores que el inversor pueda considerar adecuados. Es, ésta, una de las tres grandes líneas de investigación -la americana- dentro del análisis multicriterio.

En cuanto al calificativo de básico con el que hemos caracterizado al modelo Esperanza-Varianza uniperiódico (por constituir un punto de referencia para el resto de modelos de revisión uniperiódicos), no lo hemos podido hacer extensivo al mismo modelo de carácter multiperiódico, debido a los problemas que ha presentado. Sin embargo, tal como se ha puesto de manifiesto en el apartado **4.3.** (Selección de la cartera multiperiódica óptima) existen conexiones entre ambos modelos que nos hacen pensar en si un cambio de orientación en el primero nos permitiría definir un **único modelo básico** del cuál se pudieran deducir las dos versiones, uniperiódica y multiperiódica. Y, en el caso que esto no fuera posible, podría pensarse en la necesidad de dar un enfoque totalmente distinto al modelo E-V multiperiódico para eludir las dificultades planteadas.

En la **Parte II** y en concreto, en el apartado **5.6.3.** (Consideración de N activos arriesgados), hemos desarrollado un modelo de revisión multiperiódico suponiendo que todos los títulos que constituyen la cartera son arriesgados y la función de utilidad del inversor es logarítmica o potencial. Para este caso y mediante la utilización de la Programación Dinámica no nos ha sido posible deducir una expresión de carácter general que nos permita determinar la cuantía que debe ser invertida en cualquier activo y en cualquier momento. A pesar de ello, no podemos concluir que esta expresión no exista sino que no puede ser hallada a través de este método. Para encontrar esta expresión general, podría intentarse resolver este caso, por ejemplo, mediante la aplicación de la **Teoría del Control Optimo de carácter discreto.**

Ahora bien, tanto la Programación Dinámica como la Teoría del Control Optimo se concibieron, en un principio, para resolver problemas cuyas variables son de naturaleza cierta, aunque después se hayan extendido al campo de no certeza. Debido al carácter aleatorio de la rentabilidad de los títulos que forman la cartera y de la propia cartera, sería necesaria la utilización de **métodos de optimización estocásticos** para resolver de un modo adecuado los problemas planteados.

La anterior reflexión hace referencia a la forma de resolver el problema que se deduce del modelo propuesto en el **Capítulo 5** y que surge de unas determinadas hipótesis. La modificaciones a dichas hipótesis constituyen nuevas posibilidades para ampliar el campo de aplicación del modelo considerado.

Así, una primera hipótesis, no explicitada, hace referencia al comportamiento de la rentabilidad de los diferentes títulos que constituyen la cartera (la rentabilidad de un título depende, únicamente, del comportamiento del mismo). También en el caso de los modelos multiperiódicos, se podría considerar el supuesto de que dicha rentabilidad esté asociada al comportamiento de unos índices de mercado.

De este modo se conseguiría un **modelo de índices** que, al incorporar el mercado en el modelo de selección y revisión de carteras, acaso pudiera dar origen al **CAPM multiperiódico.**

En cuanto a las funciones de utilidad consideradas en el modelo de revisión multiperiódico, hemos supuesto que dependen de la variable aleatoria "riqueza disponible en T", de lo que se deduce el carácter estático de dichas funciones (igual que en la revisión de naturaleza uniperiódica).

Para orientarnos hacia una verdadera Teoría Dinámica de la Cartera de Valores es necesario considerar una **función de utilidad realmente dinámica** que considere el tiempo como una más de las variables de las que depende.

La revisión de cartera verdaderamente multiperiódica debería caracterizarse, no sólo por el tratamiento conjunto de los T periodos, sino además por una función de utilidad que tuviera en cuenta el estado de la variable de la que se hace depender (riqueza, consumo, rentabilidad, etc.) en cada uno de dichos periodos. A este respecto, la más reciente de las familias de métodos que se utilizan en el análisis multicriterio actual propone alternar las etapas de cálculo, que delimitan los sucesivos puntos de decisión, con las que, podríamos denominar, de diálogo; es decir, con la fuentes de información suplementarias referidas a las preferencias del inversor.

Respecto a las relaciones existentes entre las rentabilidades, en un mismo periodo, de diferentes títulos y a las existentes entre la rentabilidad de un mismo título en diferentes periodos, podríamos eliminar, en los **Capítulos 4. y 5.**, las hipótesis sobre la independencia (en cada periodo y entre periodos) y la estacionariedad de la variable aleatoria $\tilde{r}_{it}$. De este modo, se podría conseguir un modelo más cercano a la realidad.

El estudio de la revisión de carácter multiperiódico podría ser ampliado, también, con la **incorporación de los costes asociados al mantenimiento y revisión de cartera** de un modo parecido a las alternativas ofrecidas para su inclusión en el modelo de revisión uniperiódica.

Por último, tanto en la **Parte I** como en la **Parte II** se ha supuesto que la revisión se efectúa de forma equiperiódica y con último momento cierto, hipótesis que cabría modificar para abarcar un mayor número de casos posibles. En concreto, parece necesario abordar la revisión de la cartera suponiendo que el **último momento no se conoce con certeza.** Este nuevo supuesto se acerca más a la realidad si tenemos en cuenta, que el inversor sabe el momento en que constituye la cartera pero puede ser que no se plantee cuando la liquidará.

La presente Tesis debe ser considerada como un paso previo para una posterior y progresiva incorporación de todos estos aspectos en un modelo general de revisión de cartera.

BIBLIOGRAFIA CITADA

ANTON LOPEZ,A. - M.BOSCH PRINCEP - F.J.MARTINEZ DE ALBENIZ SALAS - N.M.NAUSIRAT - M.J.ROMERO SANTO TOMAS, "Selección de Cartera: el enfoque de la Media Geométrica", artículo no publicado, 1990, pp.1-28.

ARDITTI,F.D. - H.LEVY, "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments. The Multiperiod Case", J.F., Vol. 30 nº 3, Junio 1975, pp.797-809.

BAUMOL,W.J., "An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection", M.S., Vol. 10 nº 1, Octubre 1963, pp.174-181.

BAWA,V.S., "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects", J.F.E., Vol. 2 nº 1, Marzo 1975, pp.95-121.

BAWA,V.S. - J.N.BODURTHA - M.R.RAO - H.L.SURI, "On Determintation of Stochastic Dominance Optimal Sets", J.F., Vol. 40 nº 2, Junio 1985, pp.417-431.

BELLMAN,R., Dynamic Optimization (Princeton University Press, Princeton, 1957).

BERTSEKAS,D.P., Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987).

BLACK,F., "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", J.B., Vol. 45 nº 3, Julio 1972, pp.444-455.

BODILY,S.A. - Ch.C.WHITE, "Optimal Consumption and Portfolio Strategies in a Discrete-Time Model with Summary-Dependent Preferences", J.F.Q.A., Vol 17, nº 1, Marzo 1982, pp.1-14.

BORCH,K.L., La Economía de la Incertidumbre (Tecnos, Madrid, 1977).

BORRELL,M., Aplicaciones de la Teoría del Control Optimo a la Gestión Empresarial (Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1984).

CHAMBERS,D. - A.CHARNES, "Inter-Temporal Analysis and Optimization of Bank Portfolios", M.S., Vol. 7 nº 4, Julio 1961, pp.393-410.

CHARNES,A. - W.W.COOPER, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming (John Wiley & Sons, New York, 1961).

CHEN,A.H.Y. - F.C.JEN - S.ZIONTS, "The Optimal Portfolio Revision Policy", J.B., Vol. 44 nº 1, Enero 1971, pp.51-61.

CLARKSON,G.P. - A.H.MELTZER, "Portfolio Selection: a Heuristic Approach", J.F., Vol. 15 nº 4, Diciembre 1960, pp.465-480.

COHEN,K.J. - J.A.POGUE, "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models", J.B., Vol. 40 nº 2, Abril 1967, pp.166-193.

COX,K.J. - Ch.F.HUANG, "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process", J.E.T., Vol. 49 nº 1, Octubre 1989, pp.33-83.

DICKINSON,J.P., "Portfolio Theory: an Overview" incluido en DICKINSON,J.P., Portfolio Analysis: a Book of Readings (Saxon House/Lexington Books, Lexington, 1974), pp.5-15.

DURBAN,S., La Empresa ante el Riesgo (Ibérico Europea de Ediciones, Madrid,1983).

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER, "On the Optimality of Some Multiperiod Portfolio Selection Criteria", J.B., Vol. 47 nº 2, Abril 1974 a), pp.231-243.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER, "On the Maximization of the Geometric Mean with Lognormal Return Distribution", M.S., Vol. 21 nº 4, Diciembre 1974 b), pp.483-488.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER, "Portfolio Theory when Investment Relatives are Lognormally Distributed", J.F., Vol. 29 nº 4, Diciembre 1974 c), pp.1265-1273.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER, Finance as a Dynamic Process (Prentice-Hall, New Jersey, 1975).

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis (John Wiley & Sons, New York, 1987).

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER - M.W.PADBERG, "Simple Criteria for Optimal Portolio Selection", J.F., Vol. 31 nº 5, Diciembre 1976, pp.1341-1357.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER - M.W.PADBERG, "Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection with Upper Bounds", O.R., Vol. 25, nº 6, Noviembre-Diciembre 1977, pp.952-967.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER - M.W.PADBERG, "Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: Tracing out the Efficient Frontier", J.F., Vol. 33 nº 1, Marzo 1978, pp.296-302.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER - M.W.PADBERG, "The Selection of Optimal Portfolios: some Simple Tecniques" incluido en **BICKSLER,J.L.** (ed), Handbook of Financial Economics [North Holland, Amsterdam, 1979 a)], pp.339-364.

ELTON,E.J. - M.J.GRUBER - M.W.PADBERG, "Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: the Multi-Index Case" incluido en **ELTON.E.J. - M.J.GRUBER** (eds), Portfolio Theory, 25 Years After [North Holland, Amsterdam, 1979 b)], pp.7-19.

EVANS,G.C., Mathematical Introduction to Economics (McGraw-Hill, New York, 1930)

FAMA,E.F., "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", M.S., Vol. 11 nº 3, Enero 1965 a), pp.404-419.

FAMA,E.F., "The Behavior of Stock Prices", J.B., Vol. 38 nº 1, Enero 1965 b), pp.34-105.

FAMA,E.F., "Multiperiod Consumption-Investment Decisions", A.E.R., Vol. 60 nº 1, Marzo 1970, pp.163-174.

FAMA,E.F., Foundations of Finance; Portfolio Decision and Securities Prices (Basil Blackwell, Oxford, 1977).

FISHBURN,P.C., "Convex Stochastic Dominance with Continuous Distributions Functions", J.E.T., Vol. 7 nº 2, Febrero 1974, pp.143-158.

FISHBURN,P.C., "Convex Stochastic Dominance" incluido en **WHITMORE,G.A. - M.Ch.FINDLAY** (eds), Stochastic Dominance: an Approach to Decision Making under Uncertainty (Lexington Books, Lexington, 1978), pp.337-351.

FRANCIS.J.C. - S.H.ARCHER, Analisis y Gestión de Carteras de Valores (ICE, Madrid, 1977).

GOLDSMITH,D., "Transactions Costs and the Theory of Portfolio Selection", J.F., Vol. 31 nº 4, Septiembre 1976, pp.1127-1139.

HADAR,J. - W.R.RUSEELL, "Rules for Ordering Uncertain Prospects", A.E.R., Vol. 59 nº 1, Marzo 1969, pp.25-34.

HAKANSSON,N.H., "Optimal Investment and Consumption Strateies Under Risk for a Class of Utility Functions", Ec., Vol. 38, Septiembre 1970, pp.587-607.

HAKANSSON,N.H., "On Optimal Myopic Policies with and without Serial Correlation of Yields", J.B., Vol. 44 , nº3, Julio 1971, pp.324-334.

HAMMOND III,J.S., "Simplifying the Choice between Uncertain Prospects where Preference is Nonlinear", M.S., Vol. 20, nº 7, Marzo 1974, pp.1047-1072.

HANOCH,G. - H.LEVY, "Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility", J.B., Vol. 43, nº 2, Abril 1970, pp.181-189.

HICKS,J.R., "A Suggestion for Simplifying the Theory of Money", Eco., nº 5, Febrero 1935, pp.1-19.

HOGAN,W.W. - J.M.WARREN, "Computation on the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model", J.F.Q.A., Vol. 7 nº 3, Septiembre 1972, pp.1881-1896.

HOTELLING,H., The Economics of Exhaustible Resources", J.P.E., Vol. 40, 1931, pp.137-175.

IJIRI,Y., Managemente Goals and Accounting for Control (North Holland, Amsterdam, 1965).

INTRILIGATOR,M.D., Optimización Matemática y Teoría Económica (Prentice-Hall, Madrid, 1973).

KAMIEN,M.I. - N.L.SCHWARTZ, Dynamic Optimization (North Holland, New York, 1981).

KATAOKA,S., "A Stochastic Programming Model", Ec., Vol. 31 nº 1-2, Enero-Abril 1963, pp.181-196.

KNIGHT,F.H., Risk, Uncertainty and Profit (Kelly & Millman, New York, 1957).

KOO,D., Elements of Optimization with Aplications in Economics and Business (Springer-Verlag, New York, 1977).

KROLL,Y. - H.LEVY - H.M.MARKOWITZ, "Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization", J.F., Vol. 39 nº 1, Marzo 1984, pp.47-61.

KUMAR,P.C. - G.PHILIPPATOS - J.R.EZZEL, "Goal Programming and the Selection of Portfolios by Dual-Purpose Funds", J.F., Vol. 33 nº 1, Marzo 1978, pp.303-310.

LATANE,H.A., "Criteria for Choice among Risky Ventures", J.P.E., Vol. 67 nº 2, Abril 1959 pp.144-155.

LEAVEN,D.H., "Diversification of Planning", T.E., 1945, pp.469-473.

LEE,S.M. - A.J.LERRO, "Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds", J.F., Vol. 28 nº 5, Diciembre 1973, pp.1087-1101.

LEVY,H., "Stochastic Dominance; Efficiency Criteria and Efficient Portfolios: The Multi-Period Case", A.E.R., Vol 63 nº 5, 1973, pp.986-994.

LEVY,H. - J.PAROUSH, "Multi-Period Stochastic Dominance", M.S., Vol 21 nº 4, Diciembre 1974, pp.428-435.

LEVY,H. - M.SARNAT, "Safety First - An Expected Utility Principle", J.F.Q.A., Vol. 7 nº 2, June 1972, pp.1829-1834.

LINTNER,J., "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", R.E.A.S., Vol. 47 nº 1, Febrero 1965, pp.13-37.

MAIER,S.F. - D.W.PETERSON - J.H.VANDER WEIDE, "A Monte Carlo Investigation of Characteristics of Optimal Geometric Mean Portfolios", J.F.Q.A., Vol. 12 nº 2, Junio 1977, pp.215-233.

MAO,J.C.T. - J.F.BREWSTER, "An E-Sh Model of Capital Budgeting", incluido en **DICKINSON,J.P.** (ed), Portfolio Analysis: A Book of Readings, (Saxon House/Lexington Books, Lexington, 1974), pp.85-100.

MAO,J.C.T., "Models of Capital Budgeting, E-V vs E-S", J.F.Q.A., Vol. 5 nº 1, Enero 1970, pp.657-675.

MARKOWITZ,H.M., "Portfolio Selection", J.F., Vol. 7 nº 1, Marzo 1952, pp.77-91.

MARKOWITZ,H.M., Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment (John Wiley & Sons, New York, 1959).

MARKOWITZ,H.M., Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Market (Basil Blackwell, Oxford, 1989).

MARTIN,A.D., "Mathematical Programming of Portfolio Selection", M.S., Vol. 1 nº 2, Enero 1955, pp.152-166.

MASSE,P., La elección de las Inversiones (Sagitario, Barcelona, 1963).

MERTON,R.C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous-Time Model", R.E.S., Vol 51 nº 3, Agosto 1969, pp.247-257.

MERTON,R.C., "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", J.E.T., Vol 3 nº 4, Diciembre 1971, pp.373-413.

MOSSIN,J., "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", J.B., Vol. 41 nº 2, Abril 1968, pp.215-229.

MYERS,S.C., "A Time-State-Preference Model of Security Valuation", J.F.Q.A., Vol. 3 nº 1, Marzo 1968, pp.1-33.

NASLUND,B - A.WINSTON, "A Model of Multiperiod Investment under Uncertainty", M.S., Vol. 8 nº 2, Enero 1962, pp.184-200.

PARADA DAZA,J.R., "Medición de la eficiencia de una cartera de valores mobiliarios", A.D., Vol. 20 nº 114, Marzo-Abril 1984, pp.35-40.

PEREZ GOROSTEGUI,E., "La Selección de Carteras: combinando Títulos con Riesgo", A.F., nº 40, Octubre-Noviembre 1988, pp.2121-2132.

PERRY,F.E., A Dictionary of Banking (Macdonald and Evans, London, 1979).

PHELPS,E.S., "The Accumulation of Risky Capital: a Sequential Utility Analysis", Ec., Vol. 30 nº 4, Octubre 1962, pp.729-743.

PHILIPPATOS,G.C., "Mean-Variance Portolio Selection Strategies", incluido en **BICKSLER,J.L.** (ed), Handbook of Financial Economics [North-Holland, Amsterdam, 1979 a)], pp.309-337.

PHILIPPATOS,G.C., "Alternatives to Mean-Variance Portfolio Selection", incluido en **BICKSLER,J.L.** (ed), Handbook of Financial Economics [North-Holland, Amsterdam, 1979 b)], pp.365-386.

PHILIPPATOS,G.C. - N.GRESSIS, "Conditions of equivalence among E-V, SSD, and E-H Portfolio Selection Criteria: the Case of Uniform, Normal and Lognormal Distributions", M.S., Vol. 21 nº 6, Febrero 1975, pp.617-625.

PHILIPPATOS,G.C. - C.J.WILSON, "Entropy, Market Risk, and the Selection Portfolios", A.E., Vol. 6 nº 1, Septiembre 1974, pp.77-81.

PONTRYAGIN,L.S. - V.G.BOLTYANSKII - R.V.GAMKRELIDZE - E.F.MISHCHENKO, The Mathematical Theory of Optimal Processes, (John Wiley & Sons, New York, 1962)

PORTER,R.B., "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean Variance Portfolio Choice Criteria", J.F.Q.A., Vol. 8 nº 3, Septiembre 1973, pp.587-608.

PORTER,R.B., "Semivariance and Stochstic Dominance: A Comparison", A.E.R., Vol. 64 nº 1, Marzo 1974, pp.200-204.

PORTER,R.B. - R.P.BEY, "An Evaluation of the Empirical Significance of Optimal Seeking Algorithms in Portfolio Selection", J.F., Vol. 29 nº 5, Diciembre 1974, pp.1479-1490.

PORTER,R.B. - J.E.GAUMNITZ, "Stochastic Dominance vs Mean-Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation", A.E.R., Vol. 62 nº 3, Junio 1972, pp.438-446.

PYLE,D.H. - S.J.TURNOVSKY, "Safety-First and Expected Utility Maximization in Mean-Standard Deviation Portfolio Analysis", R.E.A.S., Vol. 52 nº 1, Febrero 1970, pp.75-81.

QUIRK,J.P. - R.SAPOSNIK, "Admissibility and Measurable Utility Functions", R.E.S., Vol. 29(2) nº 79, Febrero 1962, pp.140-146.

RYAN,T.M., Theory of Portfolio Selection (Macmillan Press, London, 1978).

ROSENBERG,J.M., Dictionary of Business and Management (John Wiley & Sons, New York, 1978).

RAMSEY,F.P., "A Mathematical Theory of Saving", E.J., Vol 38, 1928, pp.543-549.

ROOS,C.F., "A Dynamical Theory of Economics", J.P.E., Vol. 35, 1927, pp.632-656.

ROY,A.D., "Safety First and the Holding of Assets", Ec., Vol. 20 nº 3, Julio 1952, pp.431-449.

SAMUELSON,P.A., "Efficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments" J.F.Q.A., Vol. 2 nº 2, Junio 1967, pp.107-122.

SAMUELSON,P.A., "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", R.E.A.S., Vol. 51 nº 3, Agosto 1969, pp.239-246.

SHARPE,W.F., "A Simplified Model for Porfolio Analysis", M.S., Vol. 9 nº 2, Septiembre 1963, pp.277-293.

SHARPE,W.F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", J.F., Vol. 19 nº 3, Enero 1964, pp.425-442.

SHARPE,W.F., Teoría de la Cartera y del Mercado de Capitales (Deusto, Bilbao, 1974).

SHARPE,W.F., Investments (Prentice-Hall, New Jersey, 1985).

SMITH,K.V., "A Transition Model for Portfolio Revision", J.F., Vol. 22 nº 3, Septiembre 1967, pp.425-439.

SMITH,K.V., "Alternative Procedures for Revising Investment Portfolios", J.F.Q.A., Vol. 3 nº 4, Diciembre 1968.

SMITH,K.V., "Stock Prices and Economic Indexes for Generating Efficient Portolios", J.B., Vol. 42 nº 3, Julio 1969, pp.326-336.

TELSER,L.G., "Safety First and Hedding", R.E.S., Vol. 23(1) nº 60, 1955-56, pp.1-16.

TOBIN,J., "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk", R.E.S., Vol. 25(2) nº 67, Febrero 1958, pp.65-86.

TOBIN,J., "Teoría de la Selección de Cartera" incluido en **HAHN,F.H. - F.P.R.BRECHLING** (eds), Teoría de los Tipos de Interés (Labor, Barcelona, 1974), pp.19-70.

WALLINGFORD,B.A., "A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models", J.F.Q.A., Vol. 2 nº 2, Junio 1967, pp.85-106.

WESTON,J.F. - E.F.BRIGHAM, Finanzas en Administración (Nueva Editorial Interamericana, México,D.F., 1984).

WHITMORE,G.A., "Third-Degree Stochastic Dominance", A.E.R., Vol. 60 nº 3, Junio 1970, pp.457-459.

WILLIAMS,J.B., The Theory of Investment Value (Harvard University Press, Cambridge, 1938).

WINKLER,R.L. - C.B.BARRY, "A Bayesian Model for Portfolio Selection and Revision", J.F., Vol. 30 nº 1, Marzo 1975, pp.179-192.