UNIVERSITAT DE BARCELONA

Algunos resultados sobre cohomología de las variedades kählerianas

Juan Girbau Badó

JUAN GIRBAU

A L G U N O S   R E S U L T A D O S
S O B R E   C O H O M O L O G I A
D E   L A S   V A R I E D A D E S
K Ä H L E R I A N A S

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA
1 9 7 1

Memoria redactada para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas por la Universidad de Barcelona.

Juan Girbau

Vº Bº El Director de la Tesis

José Vaquer

Barcelona, 30 de Abril de 1971

INTRODUCCION

En esta introducción, después de un breve resumen de los antecedentes inmediatos de nuestro trabajo, damos los enunciados de los resultados de esta Tesis y a la vez los situamos en el marco de los ya conocidos.

Sea W una variedad kähleriana, compacta, de dimensión compleja n. Sea $E \xrightarrow{\pi} W$ un fibrado de línea, complejo, holomorfo. Designemos por $c_1(E)$ la primera clase de Chern de E. Designemos por $\Omega^p(E)$ el haz de gérmenes de p-formas holomorfas sobre W, a coeficientes en E. Dada una 2-forma antisimétrica γ de tipo (1,1) sobre W, llamaremos simetrizada de γ la 2-forma simétrica $s(\gamma)$ definida por: $s(\gamma)(X,Y) = \gamma(X,JY)$, donde J es el operador que da la estructura compleja sobre W. Se dice que $c_1(E) < 0$ (respectivamente $c(E) \leq 0$) si existe un representante $\gamma \in c_1(E)$ tal que $s(\gamma)$ es una forma cuadrática estrictamente definida negativa (respectivamente, definida negativa en sentido no estricto) en todo punto de W. Analogamente se define $c_1(E) > 0$ y $c_1(E) \geqslant 0$.

Akizuki y Nakano [1] demostraron el siguiente resultado:

Teorema de Akizuki-Nakano.- Si $c_1(E) < 0$, entonces se verifica $H^q(W,\Omega^p(E)) = 0$, para $p+q \leq n-1$.

Anteriormente Kodaira habia obtenido uno de sus más famosos teoremas [6]:

Teorema de Kodaira.- Si $c_1(E \otimes K(W)^*) > 0$, donde K(W) indica el fibrado canónico de W, entonces $H^q(W, \Omega^o(E)) = 0$, para $0 < q \leq n$.

Puede demostrarse que cuando en el teorema de Akizuki-Nakano se toma $p = 0$ se obtiene un resultado equivalente al teorema de Kodaira. Si en éste se toma como E el fibrado trivial se obtiene:

Teorema de Bochner ([2], teorema 6) .- Si $c_1(W) > 0$, entonces $h^{o,p} = h^{p,o} = 0$, para $0 < p \leq n$, donde $h^{p,q} = \dim H^q(W, \Omega^p(1))$ (1 indica el fibrado trivial).

Bochner había enunciado este resultado con la hipótesis $R > 0$, donde R es el tensor de Ricci, en lugar de $c_1(W) > 0$.

Todos estos teoremas son falsos si se sustituyen en cada uno de ellos, las hipótesis, por las siguientes:

$c_1(E) \leq 0$, en el primero,

$c_1(E \otimes K(W)^*) \geq 0$, en el segundo, y

$c_1(W) \geq 0$, en el tercero.

Ello puede probarse con ejemplos fáciles.

¿Qué resultados pueden obtenerse con este tipo de hipótesis?

Hay que poner de relieve que $c_1(W) > 0$ implica que W es una variedad algebraica (Kodaira), mientras que $c_1(W) \geq 0$ no implica que W sea algebraica. Saltar pues de la hipótesis $c_1(W) > 0$ a la hipótesis $c_1(W) \geq 0$ equivale a salirse del marco de las variedades algebraicas.

Lichnerowicz ha demostrado el siguiente resultado [9] que generaliza el teorema de Bochner:

Teorema de Lichnerowicz.- (a) Si $c_1(W) \geq 0$, toda p-forma holomorfa que se anule en un punto es idénticamente nula, y además $h^{p,o} = h^{o,p} \leq \binom{n}{p}$, para $o < p \leq n$.

(b) Si $c_1(W) \geq 0$ y en un punto de W la desigualdad es estricta, entonces $h^{p,o} = h^{o,p} = 0$, para $0 < p \leq n$.

Enunciemos ahora los resultados que obtenemos en el presente trabajo :

Teorema 1.-Si existe un representante $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(E)$ tal que la forma cuadrática $pR - \frac{1}{2}$ traza $s(\gamma)g \geq 0$, y en un punto de W es estrictamente positiva, entonces $H^o(W, \Omega^p(E)) = 0$. (R indica el tensor de Ricci y g la métrica)

Corolario.-Si $R\geqslant 0$ y en un punto de W es estrictamente positivo, y si traza de $c_1(E)\leq 0$, entonces $H^0(W,\Omega^p(E))=0$.

Teorema 2.-Si existe un representante $\frac{\gamma}{2\pi}\in c_1(E)$ tal que $pR-\frac{1}{2}$ traza $s(\gamma)g\leq 0$, y en un punto de W es estrictamente negativa, entonces $T^p(E^*)=0$, donde $T^p(E^*)$ indica el espacio vectorial de los p-tensores holomorfos a coeficientes en E^*.

Corolario.-Si $R\leq 0$, y en un punto de W es estrictamente negativo, y si traza de $c_1(E)\geqslant 0$, entonces $T^p(E^*)=0$.

Teorema 3.-Si W tiene dimensión compleja $n\geqslant 2$, y $c_1(E)\leq 0$ con rango de $c_1(E)\geqslant 2$ (rango complejo, es decir rango real $\geqslant 4$) en todo punto de W, entonces $H^1(W,\Omega^0(E))=0$.

El teorema 3 puede aplicarse para calcular deficiencias de fibrados:

Si S es una subvariedad analítica no singular de W, de dimensión compleja n-1, y E_S indica la restricción de E a S, Kodaira y Spencer introducen [7] el concepto de deficiencia de E con respecto S de la siguiente manera:

Sea r la restricción $\Omega^0(E)\xrightarrow{r}\Omega^0(E_S)$. Se define la deficiencia def(E/S) (Se lee deficiencia de E con respecto S) por la fórmula :

$$\mathrm{def}(E/S)=\dim H^0(S,\Omega^0(E_S))-\dim r_*H^0(W,\Omega^0(E))$$

Se verifica siempre:

$\mathrm{def}(E/S)\leq\dim H^1(W,\Omega^0(E\otimes\{S\}^*))$, donde $\{S\}$ indica el fibrado de linea asociado al divisor determinado por S.

Nosotros, como corolario del teorema 3, obtenemos:

Teorema 4 .-Si la dimensión compleja de W es mayor o igual que 2, y si $c_1(E)\leq 0$, con rango de $c_1(E)\geqslant 2$ en todo punto de W, entonces se verifica: $\mathrm{def}(E/S)=\dim H^1(W,\Omega^0(E\otimes\{S\}^*))$.

Obtenemos también:

Teorema 5.-Si $c_1(E)\leq 0$,con rango de $c_1(E)$ constante,igual a k,sobre W,entonces $H^q(W,\Omega^o(E))=0$ para $0\leq q\leq k-1$.

Cuando k=n este teorema coincide con el de Akizuki-Nakano para p=0.El teorema 5 puede enunciarse de esta otra manera:

Corolario.-Si $c_1(E\otimes K(W)^*)\geqslant 0$,con rango de $c_1(E\otimes K(W)^*)$ constante igual a k,sobre W,entonces $H^q(W,\Omega^o(E))=0$,para $n-k<q\leq n$. Si k=n,este teorema coincide con el de Kodaira.Caso particularmente interesante resulta al considerar como E el fibrado trivial.Se obtiene entonces:

Corolario.-Si $c_1(W)\geqslant 0$,con rango de $c_1(W)$ constante igual a k,sobre W,entonces $h^{p,o}=h^{o,p}=0$ para $n-k<p\leq n$.

Cuando k=n este resultado coincide con el teorema de Bochner.

Teorema 6.-Si W es una variedad de Hodge (es decir,algebraica) sumergida en un espacio proyectivo complejo,y si R es el tensor de Ricci de la métrica de W inducida por la métrica de Fubini,si $R\geqslant 0$ se verifica $h^{p,o}=h^{o,p}=0$,para $n-k<p\leq n$,donde k es el máximo de todos los rangos de R en los diferentes puntos de W.

Son también de cierta importancia,aunque no nos hemos atrevido a bautizarlos con el nombre de teoremas,los resultados que en el texto vienen enunciados como proposición 11 y proposición 12.

Conjeturamos que los teoremas 1 y 2 siguen siendo ciertos sustituyendo en las hipótesis el tensor de Ricci,por un representante cualquiera de $c_1(W)$.Estos resultados se obtendrían automáticamente de ser cierta la famosa conjetura de Calabi :

Sobre una variedad kähleriana compacta,dada una forma cerrada de tipo (1 ,1) : $\frac{1}{2\pi i}c_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha\wedge d\overline{z^\beta}$,cohomóloga a $\frac{1}{2\pi i}R_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha\wedge d\overline{z^\beta}$, existe otra métrica de Kähler cuyo tensor de Ricci es $(c_{\alpha\bar\beta})$.Esta conjetura de Calabi data de 1957 y continua abierta. Nuestra conjetura referente a los teoremas 1 y 2 es más débil.

Algunos de los resultados expuestos en el presente trabajo fueron enunciados en publicaciones anteriores [3], [4].

Hemos empleado, sin ningún reparo, coordenadas en nuestros cálculos y toda suerte de índices sin preocuparnos de que tomaran una apariencia que hoy en dia se ha venido en llamar "no intrínseca". Sin embargo los resultados que obtenemos son "intrínsecos". Los cálculos son siempre pesados, pero necesarios y cada cual los hace a su manera. A fin de cuentas dice Antonio Machado que

"...la verdad es lo que es
y sigue siendo verdad
aunque se piense al revés".

No me queda sino agradecer a mis profesores José Teixidor y José Vaquer, a quienes debo gran parte de mi formación matemática, su ayuda de todo orden. Gracias a ellos entablé contacto con el profesor André Lichnerowicz, a quien agradezco sobremanera el interés que se ha tomado en mi trabajo, sus orientaciones y las conversaciones que hemos sostenido sobre Geometria de las variedades kählerianas.

CAPITULO I : P R E L I M I N A R E S

Trabajaremos sobre una variedad kähleriana,compacta,W, de dimensión compleja n.Dadas dos formas φ y ψ del mismo tipo, sobre W,designaremos por (φ,ψ) la contracción de φ y ψ respecto la métrica.La razón de adoptar esta notación es que (,) constituye un producto escalar (local,es decir en cada punto) de formas.Obtenemos un producto escalar global de formas $< \ , \ >$ por integración sobre toda la variedad :

$$<\varphi,\psi> = \int_W (\varphi,\psi)\,\eta$$ (η indica el elemento de volumen)

Designaremos por d la diferencial exterior,que se descompone en $d'+d''$.Designaremos por δ , δ' y δ'' los operadores traspuestos de d,d' y d''respectivamente,mediante el producto escalar de formas $< \ , \ >$ .Se verifica $\delta = \delta' + \delta''$.Designaremos por Δ la laplaciana de de Rahm : $\Delta = d\delta + \delta d$.En las variedades kählerianas se verifica: $\Delta = 2(d'\delta' + \delta' d') = 2(d''\delta'' + \delta'' d'')$.Designaremos por $\Delta' = 2(d'\delta' + \delta' d')$ y por $\Delta'' = 2(d''\delta'' + \delta'' d'')$.Se tiene pues $\Delta = \Delta' = \Delta''$. (Esta igualdad es específica de las variedades kählerianas.Para las fórmulas explícitas de los operadores δ y Δ remitimos al libro de Lichnerowicz [8] .

Sea $E \xrightarrow{\pi} W$ un fibrado de linea,holomorfo,sobre W,es decir un fibrado vecorial,con fibra **C**,dado por funciones de transición holomorfas.El grupo estructural de E es $\mathbf{C}^*$ (grupo multiplicativo de los números complejos no nulos).Designaremos por E^* el fibrado dual de E.Si E viene dado por funciones de transición $\{f_{ij}\}$ sobre un recubrimiento $\{U_i\}$ de W,E^* vendrá dado por las funciones de transición $\{f_{ij}^{-1}\}$.

Dar una estructura hermítica sobre E consiste en asignar sobre cada fibra $\pi^{-1}(x)$ un producto escalar hermítico h_x dependiendo diferenciablemente de x,en el sentido de que si φ y ψ son dos secciones diferenciables de E,la función $h_x(\varphi(x),\psi(x))$ depende diferenciablemente de x.En términos de trivializaciones locales y funciones de transición,una estructura hermítica,positiva,sobre E consiste en una familia $a = \{a_i\}$,donde cada a_i es una función real,positiva sobre U_i de modo que :

$$\|f_{ij}(x)\|^2 = \frac{a_i(x)}{a_j(x)} \qquad \text{sobre } U_i \cap U_j \ .$$

Siempre es posible dar una estructura hermítica sobre E.Designemos por γ la forma diferencial de tipo $(1,1)$ sobre W definida sobre cada U_j por : $\gamma_j = \sqrt{-1}\, d'd'' \log a_j$ .Se verifica que $\frac{\gamma}{2\pi}$ es un representante de la primera clase de Chern de E(que designaremos por $c_1(E)$).

El fibrado canónico de W,que designaremos por K(W),es el fibrado de linea dado por el sistema de funciones de transición $\{J_{ij}\}$ de jacobianos :

$$J_{ij} = \frac{\partial(z_j^1 \ldots z_j^n)}{\partial(z_i^1 \ldots z_i^n)} \ ,$$

o dicho de otra manera,el fibrado de linea asociado a la clase canónica de divisores.

La primera clase de Chern de la variedad W,que designaremos por $c_1(W)$,es por definición $c_1(K(W)^*)$,es decir $-c_1(K(W))$. Si designamos por R el tensor de Ricci de W,la forma diferencial $\frac{1}{2\pi i} R_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ es un representante de $c_1(W)$.

Designaremos por $s(\gamma)$ (simetrizada de γ)la forma simétrica definida por: $s(\gamma)(X,Y) = \gamma(X,JY)$,donde J es el operador que da la estructura compleja de W.Diremos que $c_1(E)<0$ (respectivamente $c_1(E)\leq 0$) si existe un representante $\frac{\gamma}{2\pi}\in c_1(E)$ tal que $s(\gamma)$ es una forma cuadrática estrictamente definida negativa (respectivamente, definida negativa en sentido no estricto)en todo punto de W.Análogamente se define $c_1(E)>0$ y $c_1(E)\geqslant 0$ .Estas definiciones,aunque dependan de un representante son intrínsecas de la clase de Chern en el sentido de que no pueden existir en $c_1(E)$ un representante positivo y uno negativo al mismo tiempo.Para ello remitimos por ejemplo al artículo de Lichnerowicz [9] .

Designemos por $T \xrightarrow{\pi} W$ el fibrado tangente.Consideremos el fibrado $\Lambda^p T\otimes\Lambda^q\bar{T}\otimes E$ como fibrado diferenciable.Designaremos por $\Omega^{p,q}(E)$ el haz de gérmenes de secciones diferenciables del fibrado anterior.Una sección global del haz $\Omega^{p,q}(E)$ es,por definición,una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E.Una tal forma puede darse por un sistema $\{\varphi_j\}$ de formas de tipo (p,q) φ_j ,sobre cada U_j ,verificando la condición : $\varphi_k = f_{kj}\,\varphi_j$ sobre $U_j\cap U_k$.

A las formas a coeficientes en el fibrado trivial las llamaremos en adelante "sin coeficientes".

Para las formas de tipo (p,q) a coeficientes en E,definimos los operadores d'_a ,d'' , δ' y δ''_a (relativos a la estructura hermítica $a=\{a_j\}$ del fibrado E) de la siguiente manera: sobre cada U_j se define :

$$(d'_a\varphi)_j = a_j\, d'\left(\frac{\varphi_j}{a_j}\right)\ ;\ (d''\varphi)_j = d''\varphi_j\ ;\ (\delta'\varphi)_j = \delta'\varphi_j\ ;\ (\delta''_a\varphi)_j = a_j\,\delta''\left(\frac{\varphi_j}{a_j}\right) .$$

Con estas definiciones se verifica que $d'_a\varphi$,$d''\varphi$, $\delta'\varphi$ y $\delta''_a\varphi$ son formas a coeficientes en E.Comprobémoslo por ejemplo para $d'_a\varphi$:

$$a_j\, d'\left(\frac{\varphi_j}{a_j}\right) = a_j\, d'\left(\frac{f_{jk}\varphi_k}{a_j}\right) = a_j\, d'\left(\frac{\varphi_k}{\bar{f}_{jk}a_k}\right) = a_j\, d'\left(\frac{\varphi_k \bar{f}_{kj}}{a_k}\right) =$$

$$= a_j\,\bar{f}_{kj}\, d'\left(\frac{\varphi_k}{a_k}\right) + d'\bar{f}_{kj}\wedge a_j\,\frac{\varphi_k}{a_k}\ ;$$

pero este último término es nulo a causa de que las f_{kj} son holomorfas. Así pues :

$$a_j\, d'\left(\frac{\varphi_j}{a_j}\right) = \frac{a_j}{\delta_{jk}}\, d'\left(\frac{\varphi_k}{a_k}\right) = f_{jk}\, a_k\, d'\left(\frac{\varphi_k}{a_k}\right)$$

como queríamos demostrar.

Para las formas a coeficientes en E definimos el producto escalar local relativo a la estructura hermítica $a = \{a_i\}$ de E, poniendo sobre cada U_j:

$$(\,(\varphi, \psi)_a)_j = \frac{1}{a_j}(\varphi_j, \psi_j)\ .$$

$(\varphi, \psi)_a$ es una función sin coeficientes puesto que:

$$\frac{1}{a_j}(\varphi_j, \psi_j) = \frac{1}{a_j}(f_{jk}\varphi_k, f_{jk}\psi_k) = \frac{f_{jk}\overline{f_{jk}}}{a_j}(\varphi_k, \psi_k) = \frac{1}{a_k}(\varphi_k, \psi_k)$$

en $U_j \cap U_k$.

Definimos el producto escalar global relativo a la estructura hermítica $a = \{a_i\}$ de E, de la siguiente manera :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_a = \int_W (\varphi, \psi)_a\, \eta$$

donde η es el elemento de volumen de W.

Si φ es una forma a coeficientes en E y ψ es una forma a coeficientes en E^*, se define el producto exterior $\varphi \wedge \psi$ de manera natural, como una forma "sin coeficientes".

Designemos por $*$ el operador definido sobre las formas sin coeficientes por: $*\alpha = i(\alpha)\eta$.(i( ), indica contraccíon interior). Se tiene : $\Omega^{p,q}(1) \xrightarrow{*} \Omega^{n-q,n-p}(1)$ (donde 1 indica el fibrado trivial). Designemos por $\bar{*}$ el operador que consiste en aplicar primero $*$ y luego conjugar. Definamos :

$\Omega^{p,q}(E) \xrightarrow{\#} \Omega^{n-p,n-q}(E)$, de la siguiente manera:

$(\#\varphi)_j = \frac{1}{a_j}\bar{*}\,\varphi_j$. Se verifica:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_a = \int_W \varphi \wedge \# \psi$$

Se comprueba también fácilmente que :

$$\langle d'_a \varphi, \psi \rangle_a = \langle \varphi, \delta' \psi \rangle_a$$
$$\langle d'' \varphi, \psi \rangle_a = \langle \varphi, \delta''_a \psi \rangle_a\ .$$

Podemos definir ahora las dos laplacianas (relativas a la estructura hermítica $a=\{a_i\}$ de E):

$$\Delta'_a = 2(d'_a\delta' + \delta' d'_a)$$
$$\Delta''_a = 2(d''\delta''_a + \delta''_a d'')$$

Cuando E es el fibrado trivial y $a=1$ estas dos laplacians son las laplacianas Δ' y Δ'' que hemos definido antes,y se verifica $\Delta = \Delta' = \Delta''$ por ser la variedad kähleriana.Pero en general Δ'_a y Δ''_a no coinciden.Más adelante calcularemos su diferencia en términos de la primera clase de Chern de E.

Las laplacianas Δ'_a y Δ''_a son operadores estrictamente positivos en el sentido siguiente: $<\Delta'_a\varphi,\varphi>_a \geqslant 0$, $<\Delta''_a\varphi,\varphi>_a \geqslant 0$ y las igualdades sólo se alcanzan cuando φ es idénticamente nula. En efecto,se tiene :

$$<\Delta'_a\varphi,\varphi>_a = 2<d'_a\varphi, d'_a\varphi>_a + 2<\delta'\varphi,\delta'\varphi>_a \geqslant 0.$$

Si designamos por $\Omega^p(E)$ el haz de gérmenes de p-formas holomorfas (de tipo (p,0)) a coeficientes en E,y por $H^{p,q}(E)$ el espacio vectorial de las formas de tipo (p,q) a coeficientes en E, que son Δ''_a-armónicas,se verifica el siguiente isomorfismo,debido a Hodge,Dolbeault y Kodaira :

$$H^{p,q}(E) = H^q(W,\Omega^p(E)).$$

Una demostración de dicho isomorfismo puede encontrarse en el libro de Hirzebruch [5]. Este resultado pone en evidencia que la laplaciana Δ''_a es muy importante.Por esta razón es muy empleada en la literatura,mientras que la laplaciana Δ'_a apenas se usa. Gran parte del éxito del presente trabajo consiste en emplear conjuntamente las dos laplacianas Δ''_a y Δ'_a .

Terminemos este capítulo con algunas notaciones.Siempre que empleemos índices latinos supondremos que varían de 1 a 2n, mientras que cuando empleemos índices griegos supondremos que varían de 1 a n. Si i es un índice, $\bar{i}$ inicará i+n si $i \leq n$, ó bien i-n si $i > n$. Siempre que empleemos coordenadas reales en una carta local $U,(x^1..x^n,y^1...y^n)$ supondremos que verifican $J\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, J\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Designaremos por $z^\alpha= x^\alpha+\sqrt{-1}y^\alpha$, y por $z^{\bar{\alpha}}= x^\alpha-\sqrt{-1}\, y^\alpha$. Siempre que empleemos coordenadas de un tensor o de una forma con índices griegos, las supondremos referidas a $(z^\alpha,z^{\bar{\alpha}})$.

CAPÍTULO II : CÁLCULOS REFERNTES A LAS LAPLACIANAS Δ'_α Y Δ''_α

Designemos por F la forma de Kähler de W, definida por: $F(X,Y) = g(JX,Y)$, donde g es la métrica. Designaremos por Λ y L los operadores: $\Lambda = i(F)$ (contracción interior por F), $L=e(F)$ (producto exterior por F). Los operadores Λ y L transforman formas a coeficientes en E, en formas a coeficientes en E, y son traspuestos uno del otro respecto del producto escalar $< , >_\alpha$.

<u>Proposición 1</u>.—Se verifican las siguientes identidades :

(1) $d''d'_\alpha + d'_\alpha d'' = -\sqrt{-1}\, e(\gamma)$ (4) $\delta'\delta''_\alpha + \delta''_\alpha \delta' = \sqrt{-1}\, i(\gamma)$

(2) $\Lambda d'' - d''\Lambda = -\sqrt{-1}\, \delta'$ (5) $\delta''_\alpha L - L\delta''_\alpha = \sqrt{-1}\, d'_\alpha$

(3) $L\delta' - \delta' L = \sqrt{-1}\, d''$ (6) $d'_\alpha \Lambda - \Lambda d'_\alpha = -\sqrt{-1}\, \delta''_\alpha$

donde γ viene dada sobre cada U_j por: $\gamma_j = \sqrt{-1}\, d'd'' \log a_j$.

Demostración: (4),(5) y(6) son las traspuestas de (1),(2) y (3) respecto el producto escalar $< , >_\alpha$. (2) y(3) son las mismas que para formas "sin coeficientes" y se suponen conocidas. Remitimos, por ejemplo, al lector al libro de Lichnerowicz [γ]. Basta pues demostrar (1). En cada carta local U_j se tiene :

$$d''d'_\alpha \varphi_j = d''\left(a_j d'\left(\frac{\varphi_j}{a_j}\right)\right) = d''d'\varphi_j - d''(d'\log a_j \wedge \varphi_j) =$$

$$= d''d'\varphi_j - d''d'\log a_j \wedge \varphi_j + d'\log a_j \wedge d''\varphi_j \; .$$

Por otro lado:

$$d'_\alpha d''\varphi_j = a_j\, d'\left(\frac{1}{a_j} d''\varphi_j\right) = d'd''\varphi_j - d'\log a_j \wedge d''\varphi_j$$

Sumando, y teniendo en cuenta que $d'd''+d''d'=0$, se tiene:

$$(d''d'_\alpha + d'_\alpha d'')\varphi_j = -d''d'\log a_j \wedge \varphi_j = d'd''\log a_j \wedge \varphi_j$$

O sea: $(d''d'_\alpha + d'_\alpha d'')\varphi = -\sqrt{-1}\, e(\gamma)\varphi$, como queríamos demostrar.

Proposición 2.- Se verifica : $\Delta'_a - \Delta''_a = 2(\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)$

Demosrtación: De (2) se obtiene :

$$\sqrt{-1}\ \delta' d'_a = -\Lambda d'' d'_a + d''\Lambda d'_a$$

$$\sqrt{-1}\ d'_a \delta' = -d'_a \Lambda d'' + d'_a d''\Lambda$$

Sumando:

(7) $\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ \Delta'_a = -\Lambda d'' d'_a + d''\Lambda d'_a - d'_a \Lambda d'' + d'_a d''\Lambda$

De (6) se obtiene:

$$\sqrt{-1}\ \delta''_a d'' = \Lambda d'_a d'' - d'_a \Lambda d''$$

$$\sqrt{-1}\ d''\delta''_a = d''\Lambda d'_a - d'' d'_a \Lambda$$

Sumando:

(8) $\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ \Delta''_a = \Lambda d'_a d'' - d'_a \Lambda d'' + d''\Lambda d'_a - d'' d'_a \Lambda$

De (7) y (8):

$$\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ (\Delta'_a - \Delta''_a) = -\Lambda(d'' d'_a + d'_a d'') + (d'_a d'' + d'' d'_a)\Lambda =$$

$$= \sqrt{-1}\ (\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)$$

como queríamos demostrar.

CÁLCULO LOCAL DE Δ'_a Y Δ''_a : Situémonos en una carta local U_j fija. Para simplificar la notación escribiremos φ en lugar de φ_j y a en lugar de a_j. Introduzcamos algunas notaciones. Dado un tensor simétrico t, covariante, de tipo $(1,1)$, designaremos por Q'(t) y Q"(t) los operadores que actuan sobre las formas φ de tipo (p,q) de la siguiente manera:

$$(Q'(t)\varphi)_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\nu_2\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} t_\lambda{}^{\varsigma}\ \varphi_{\varsigma\nu_2\ldots\nu_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$

$$(Q''(t)\varphi)_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = \frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\tau}\bar{\nu}_2\ldots\bar{\nu}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} t_{\bar{\tau}}{}^{\bar{\varsigma}}\ \varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\varsigma}\bar{\nu}_2\ldots\bar{\nu}_q}$$

Designaremos por K el siguiente operador:

$$(K\varphi)_{k_1\ldots k_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\,\varepsilon^{\varsigma s_2\ldots s_p}_{k_1\ldots k_p}\,\varepsilon^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}\,R^{k}{}_{\varsigma\bar{\sigma}}{}^{\bar{\mu}}\,\varphi_{k s_2\ldots s_p\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}$$

donde $R^{k}{}_{\varsigma\bar{\sigma}}{}^{\bar{\mu}}$ son las componentes del tensor de curvatura.

Antes de calcular las laplacianas Δ'_α y Δ''_α necesitamos algunas expresiones de la laplaciana ordinaria Δ (para las formas sin coeficientes). Es bien conocida la siguiente expresión:

$$(\Delta\varphi)_{k_1\ldots k_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = -\nabla^k\nabla_k\,\varphi_{k_1\ldots k_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} + \sum_i R_{k_i}{}^{s}\,\varphi_{k_1\ldots(s)_i\ldots k_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$
$$+ \sum_j R_{\bar{\tau}_j}{}^{\bar{s}}\,\varphi_{k_1\ldots k_p\bar{\tau}\ldots(\bar{s})_j\ldots\bar{\tau}_q} - 2\sum_{i,j} R_{k_i}{}^{\varsigma}{}_{\bar{\tau}_j}{}^{\bar{\sigma}}\,\varphi_{k_1\ldots(\varsigma)_i\ldots k_p\bar{\tau}_1\ldots(\bar{\sigma})_j\ldots\bar{\tau}_q}$$

donde $(k)_s$ indica que el índice k está situado en el lugar s.

Fácilmente puede verse que :

$$\Delta\varphi = -\nabla^k\nabla_k\,\varphi + \Phi'(R)\varphi + \Phi''(R)\varphi + 2K(\varphi)$$

Pero : $-\nabla^k\nabla_k = -\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda} = -2\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}} + (\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda})$

y de la identidad de Ricci se deduce fácilmente que:

$$\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda} = \Phi''(R) - \Phi'(R)\ .$$

Se tiene pues la siguiente expresión de Δ :

$$\Delta\varphi = -2\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}}\,\varphi + 2\Phi''(R)\varphi + 2K\varphi$$

Análogamente puede obtenerse esta otra expresión:

$$\Delta\varphi = -2\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}\,\varphi + 2\Phi'(R)\varphi + 2K\varphi$$

Pasemos ahora a las laplacianas Δ'_α y Δ''_α que nos ocupan.

<u>Proposición 3</u>.-Se verifica : $\Delta''_\alpha = -2\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}} - 2(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})\nabla_{\bar{\lambda}} + 2\Phi''(R+s(r)) + 2K$,donde R es el tensor de Ricci.

Demostración:Se tiene : $\Delta''_\alpha\varphi = 2d''(a\delta''(a^{-1}\varphi)) + 2a\delta''(a^{-1}d''\varphi)$.

Es decir :

$$(\Delta''_\alpha\varphi)_{s_1\ldots s_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = -\frac{2}{(q-1)!}\,\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}\,\nabla_{\bar{\mu}}\left\{a\nabla^{\bar{\lambda}}(a^{-1}\varphi_{s_1\ldots s_p\bar{\lambda}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q})\right\}$$
$$-2a\nabla^{\bar{\lambda}}\left\{a^{-1}(d''\varphi)_{\bar{\lambda}s_1\ldots s_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}\right\} = -\frac{2}{(q-1)!}\,\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}\,\nabla_{\bar{\mu}}\nabla^{\bar{\lambda}}\varphi_{s_1\ldots s_p\bar{\lambda}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}$$
$$-\frac{2}{(q-1)!}\,\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}\,\nabla_{\bar{\mu}}\left\{(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})\varphi_{s_1\ldots s_p\bar{\lambda}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q}\right\} - 2(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})(d''\varphi)_{\bar{\lambda}s_1\ldots s_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$

$-2\nabla^{\bar{\lambda}}(d''\varphi)_{\bar{\lambda}s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}$ .Observando ahora que la suma del primero y último término da la laplaciana ordinaria Δ ,se tiene:

$$(\Delta''_a\varphi)_{s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}=(\Delta\varphi)_{s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}-\frac{2}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}\nabla_{\bar{\mu}}\left\{(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\lambda}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}\right\}$$

$$-2(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})(d''\varphi)_{\bar{\lambda}s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}$$

Pero:

$$(d''\varphi)_{\bar{\lambda}s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}=\frac{1}{q!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\mu}_1\dots\bar{\mu}_q}_{\bar{\lambda}\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}\nabla_{\bar{\mu}}\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\mu}_1\dots\bar{\mu}_q}$$

En esta expresión de $d''\varphi$, cuando $\bar{\lambda}=\bar{\mu}$ se obtiene el término: $\nabla_{\bar{\lambda}}\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}$, y cuando $\bar{\lambda}=\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2\dots\bar{\mu}_q$, se obtienen q sumandos iguales cuya suma vale:

$$-\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\mu}_2\dots\bar{\mu}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}\nabla_{\bar{\mu}}\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\lambda}\bar{\mu}_2\dots\bar{\mu}_q}$$

Sustituyendo en la expresión de $\Delta''_a\varphi$ que teníamos,se obtiene:

$$(9)\ (\Delta''_a\varphi)_{s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}=(\Delta\varphi)_{s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}-\frac{2}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}\nabla_{\bar{\mu}}\left\{(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\lambda}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}\right\}$$

$$-2(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})\nabla_{\bar{\lambda}}\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}+\frac{2}{(q-1)!}(a\nabla^{\bar{\lambda}}a^{-1})\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\mu}_2\dots\bar{\mu}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}\nabla_{\bar{\mu}}\varphi_{s_1\dots s_p\bar{\lambda}\bar{\mu}_2\dots\bar{\mu}_q}$$

Por otro lado,ten~~g~~iendo en cuenta que $s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}}=\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}}\log a$,se tiene:

$$(\Phi''(s(\gamma))\varphi)_{h_1\dots h_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}=\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}(\nabla_{\bar{\mu}}\nabla^{\bar{s}}\log a)\varphi_{h_1\dots h_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}=$$

$$=-\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}(\nabla_{\bar{\mu}}(a\nabla^{\bar{s}}a^{-1}))\varphi_{h_1\dots h_p\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}=$$

$$=-\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}\nabla_{\bar{\mu}}\left\{(a\nabla^{\bar{s}}a^{-1})\varphi_{h_1\dots h_p\bar{s}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}\right\}+\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\dots\bar{\tau}_q}(a\nabla^{\bar{s}}a^{-1})\nabla_{\bar{\mu}}\varphi_{h_1\dots h_p\bar{s}\bar{\sigma}_2\dots\bar{\sigma}_q}$$

Comparando con (9) se tiene:

$$\Delta''_a=\Delta+2\,\Phi''(s(\gamma))-2(a\nabla^{\bar{s}}a^{-1})\nabla_{\bar{s}}$$

y teneiendo presente la expresión de Δ que habíamos obtenido:

$$\Delta=-2\,\nabla^{\bar{\lambda}}\nabla_{\bar{\lambda}}+2\,\Phi''(R)+2\,K$$

se tiene el enunciado de la proposición.

<u>Proposición 4</u>.- Se verifica:

$$\Delta'_a\varphi=-2\,\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}\varphi-2\,\nabla^{\lambda}\{(a\nabla_{\lambda}a^{-1})\varphi\}+2\,\Phi'(R-s(\gamma))\varphi+2K\varphi$$

Demostración:

$$(\Delta'_a \varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = \frac{2}{(p-1)!}\, a\, \varepsilon^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}_{s_1\ldots s_p} \nabla_\lambda \left\{a^{-1}(\delta'\varphi)_{\lambda_2\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\} - 2\nabla^\lambda(l'_a\varphi)_{\lambda s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

$$= \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}_{s_1\ldots s_p}\nabla_\lambda(\delta'\varphi)_{\lambda_2\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} + \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}_{s_1\ldots s_p}(a\nabla_\lambda a^{-1})(\delta'\varphi)_{\lambda_2\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

$$- \frac{2}{p!}\varepsilon^{\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_p}_{\lambda s_1\ldots s_p}\nabla^\lambda\left\{(a\nabla_{\sigma_0}a^{-1})\varphi_{\sigma_1\ldots\sigma_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\} - \frac{2}{p!}\varepsilon^{\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_p}_{\lambda s_1\ldots s_p}\nabla^\lambda\nabla_{\sigma_0}\varphi_{\sigma_1\ldots\sigma_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} .$$

La suma del primero y del último término de esta expresión, da la laplaciana ordinaria Δ. Se tiene pues:

$$(\Delta'_a \varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = (\Delta\varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} + \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}_{s_1\ldots s_p}(a\nabla_\lambda a^{-1})(\delta'\varphi)_{\lambda_2\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

$$- \frac{2}{p!}\varepsilon^{\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_p}_{\lambda s_1\ldots s_p}\nabla^\lambda\left\{(a\nabla_{\sigma_0}a^{-1})\varphi_{\sigma_1\ldots\sigma_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\} = (\Delta\varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} -$$

$$- \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}_{s_1\ldots s_p}(a\nabla_\lambda a^{-1})\nabla^s\varphi_{s\lambda_2\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} - \frac{2}{p!}\varepsilon^{\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_p}_{\lambda s_1\ldots s_p}\nabla^\lambda\left\{(a\nabla_{\sigma_0}a^{-1})\varphi_{\sigma_1\ldots\sigma_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\}$$

En este último sumando, cuando $\lambda = \sigma_0$ se obtiene:

$$-2\,\nabla^\lambda\left\{(a\nabla_\lambda a^{-1})\varphi_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\}$$

y cuando $\lambda = \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_p$, se obtienen p sumandos iguales cuya suma vale:

$$\frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\sigma_0\sigma_2\ldots\sigma_p}_{s_1\ldots s_p}\nabla^{\sigma_1}\left\{(a\nabla_{\sigma_0}a^{-1})\varphi_{\sigma_1\ldots\sigma_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos de Δ'_a, se obtiene:

$$(10)\quad (\Delta'_a\varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = (\Delta\varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} - \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}_{s_1\ldots s_p}(a\nabla_\lambda a^{-1})\nabla^s\varphi_{s\lambda_2\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

$$-2\,\nabla^\lambda\left\{(a\nabla_\lambda a^{-1})\varphi_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\} + \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\sigma_0\sigma_2\ldots\sigma_p}_{s_1\ldots s_p}\nabla^{\sigma_1}\left\{(a\nabla_{\sigma_0}a^{-1})\varphi_{\sigma_1\ldots\sigma_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\right\}$$

Por otro lado:

$$(\wp'(s(\gamma))\varphi)_{s_1\ldots s_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = -\frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\nu_2\ldots\nu_p}_{s_1\ldots s_p}\left(\nabla^s(a\nabla_\lambda a^{-1})\right)\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

$$= -\frac{1}{(p-1)!}\,\varepsilon^{\lambda\nu_2\ldots\nu_p}_{s_1\ldots s_p}\nabla^{s}\{(a\nabla_\lambda a^{-1})\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\} + \frac{1}{(p-1)!}\,\varepsilon^{\lambda\nu_2\ldots\nu_p}_{s_1\ldots s_p}(a\nabla_\lambda a^{-1})\nabla^{s}\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\,.$$

Comparando con (10) se obtiene:

$$\Delta'_a\varphi = \Delta\varphi - 2\,\mathcal{O}'(s(\gamma))\varphi - 2\,\nabla^{\lambda}\{(a\nabla_\lambda a^{-1})\varphi\}\,,$$

y teniendo presente que $\Delta = -2\nabla^{\lambda}\nabla_\lambda + 2\,\mathcal{O}'(R) + 2K$,

se obtiene el enunciado de la proposición.

FÓRMULAS GLOBALES :

Si φ es una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E, designaremos por $A(\varphi)$ la forma de tipo $(p,q+1)$, a coeficientes en E, definida en cada U_j por :

$$(A(\varphi)_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\mu\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q})_j = \nabla_{\bar\mu}(\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q})_j$$

Proposición 5 .- Si φ es una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E, se verifica:

$$<\Delta''_a\varphi,\varphi>_a - 2<(\mathcal{O}''(R+s(\gamma))+K)\varphi,\varphi>_a = 2(q+1)<A(\varphi),A(\varphi)>_a$$

Demostración: Sea ξ la forma de tipo $(0,1)$ "sin coeficientes", definida sobre cada U_j por:

$$(\xi_{\bar\mu})_j = \frac{1}{p!\,q!}\,a_j^{-1}\,(\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q})\,\bar\varphi^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

donde $\bar\varphi^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$ indica $\overline{\varphi^{\bar\lambda_1\ldots\bar\lambda_p\tau_1\ldots\tau_q}}$.

Por comodidad, cuando no haya lugar a confusión, suprimiremos el sub-índice j, y escribiremos a en lugar de a_j. Calculemos $\delta''\xi$:

$$\delta''\xi = -\frac{1}{p!\,q!}\nabla^{\bar\mu}(a^{-1}\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\,\bar\varphi^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}) =$$

$$= -\frac{1}{p!\,q!}(\nabla^{\bar\mu}a^{-1})(\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q})\,\bar\varphi^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} - \frac{a^{-1}}{p!\,q!}(\nabla^{\bar\mu}\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q})\bar\varphi^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

$$- \frac{a^{-1}}{p!\,q!}\left(\nabla_{\bar\mu} \varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right)\left(\nabla^{\bar\mu}\bar\varphi^{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right).$$

Por otro lado,en virtud de la proposición 3,se tiene,empleando el producto escalar local $(\ ,\ )_a$:

$$(\Delta''_a \varphi, \varphi)_a - 2\left(\left(\varphi''(R+s(\gamma))+K\right)\varphi, \varphi\right)_a = -\frac{2a^{-1}}{p!\,q!}\left(\nabla^{\bar\mu}\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right)\bar\varphi^{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$$

$$-\frac{2}{p!\,q!}\left(\nabla^{\bar\mu}a^{-1}\right)\left(\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right)\bar\varphi^{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} = 2\,\delta''\xi\ +$$

$$+\frac{a^{-1}}{p!\,q!}\nabla_{\bar\mu}\varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\nabla^{\bar\mu}\bar\varphi^{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} = 2\,\delta''\xi + 2(q+1)\left(A(\varphi),A(\varphi)\right)_a .$$

Integrando esta expresión sobre toda la varidad y teniendo en cuenta que $\int_W \delta''\xi = 0$, en virtud del teorema de Green($\delta''\xi$ es una divergencia),se obtiene el enunciado de la proposición.

Si φ es una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E, designaremos por $B(\varphi)$ la forma de tipo (p+1,q) a coeficientes en E,definida en cada U_j por :

$$\left(B(\varphi)_{\mu\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right)_j = a_j \nabla_\mu\left(a_j^{-1}\varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right)$$

Suprimiremos como siempre el sub-índice j cuando no haya lugar a confusión.

<u>Proposición 6</u>.- Si φ es una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E,se verifica:

$$\langle \Delta'_a\varphi, \varphi\rangle_a - 2\langle\left(\varphi'(R-s(\gamma))+K\right)\varphi, \varphi\rangle_a = 2(p+1)\langle B(\varphi), B(\varphi)\rangle_a .$$

Demostración:Sea ξ la forma de tipo (1,0) sin coeficientes,definida sobre cada U_j por:

$$(\xi_\mu)_j = \frac{1}{p!\,q!}\left\{\nabla_\mu\left(a_j^{-1}\varphi_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\right)\right\}\bar\varphi^{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$$

Se tiene,escribiendo abreviadamente:

$$\xi_\mu = \frac{1}{p!\,q!}(\nabla_\mu a^{-1})\,\varphi\,\overline{\varphi} + \frac{a^{-1}}{p!\,q!}(\nabla_\mu \varphi)\,\overline{\varphi}$$

Calculemos $\delta'\xi$:

$$\delta'\xi = \frac{1}{p!q!}\Big\{-(\nabla^\mu \nabla_\mu a^{-1})\varphi\overline{\varphi} - (\nabla_\mu a^{-1})(\nabla^\mu\varphi)\overline{\varphi} - (\nabla_\mu a^{-1})\varphi(\nabla^\mu\overline{\varphi}) -$$

$$-(\nabla^\mu a^{-1})(\nabla_\mu\varphi)\overline{\varphi} - a^{-1}(\nabla^\mu\nabla_\mu\varphi)\overline{\varphi} - a^{-1}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\overline{\varphi}\Big\}$$

Se tiene,en virtud de la proposición 4:

$$(\Delta'_a\varphi\,,\,\varphi)_a - 2\big((\Phi'(R-s(\gamma))+K)\varphi\,,\,\varphi\big)_a - 2\,\delta'\xi =$$

$$= \frac{2}{p!\,q!}\Big\{(a\nabla_\mu a^{-1})(\nabla^\mu a^{-1})\varphi\overline{\varphi} + \nabla_\mu\varphi(\nabla^\mu a^{-1})\overline{\varphi} + a^{-1}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\overline{\varphi} + (\nabla_\mu a^{-1})\varphi\nabla^\mu\overline{\varphi}\Big\}$$

$$= \frac{2}{p!\,q!}\; a\,\nabla_\mu(a^{-1}\varphi)\,\nabla^\mu(a^{-1}\overline{\varphi}) = 2(p+1)(B(\varphi),B(\varphi))_a\,.$$

Integrando esta expresión sobre toda la variedad se obtiene el enun ciado de la proposición.

CAPÍTULO III : PRINCIPALES RESULTADOS

Definición.- Si P es un operador cualquiera que actua sobre las formas de tipo (p,q) a coeficientes en E, transformándolas en formas de tipo (p,q) a coeficientes en E, diremos que P es estrictamente positivo en un punto de W, si en dicho punto se verifica: $(P(\varphi),\varphi)_{a} \geqslant 0$,y la igualdad sólo es alcanzada para las formas φ que se anulan en dicho punto. Cuando P sea estrictamente positivo en todo punto de W escribiremos $P>0$. Definiciones análogas se dan para $P\geqslant 0$, $P<0$, y $P\leqslant 0$.

El operador $Q''(R+s(\gamma))+K$ que aparece en la proposición 5, es el operador de Kodaira [6] (Kodaira lo designa por $\theta^{p,q}(\gamma)$). Cuando este operador es estrictamente positivo pueden obtenerse de la proposición 5 los famosos "vanishing theorems" de Kodaira mediante el siguiente razonamiento :

Si φ es una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E, Δ''_{a}-armónica, por ser $\Delta''_{a}\varphi=0$, de la proposición 5 se deduce:

$$-2<(Q''(R+s(\gamma))+K)\varphi,\varphi>_{a}=2(q+1)<A(\varphi),A(\varphi)>_{a}$$

Por ser $Q''(R+s(\gamma))+K>0$, el primer miembro es negativo y el segundo p[illegible] luego ambos deben ser nulos. De la anulación del primer miembro y de ser $Q''(R+s(\gamma))+K>0$,se desprende que φ debe ser idénticamente nula, por consiguiente $H^{p,q}(E)=0$.

Así pues, de la proposición 5 salen los teoremas de Kodaira. ¿Y de la proposición 6, qué se puede obtener?

En primer lugar observemos que en la proposición 6 figura la laplaciana Δ'_{a} ,pero en virtud del isomorfismo de Hodge, Dolbeault y Kodaira, las verdaderamente interesantes son las formas Δ''_α-armónicas.

Sustituyendo en la proposición 6 Δ'_α por $\Delta''_\alpha + 2(\Lambda e(\gamma) - e(\gamma)\Lambda)$ (En virtud de la proposición 2), se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 7.-Si φ es una forma de tipo (p,q) a coeficientes en E, se verifica:

$$< \Delta''_\alpha \varphi , \varphi >_\alpha - 2 < T(\varphi) , \varphi >_\alpha = 2(p+1) < B(\varphi), B(\varphi) >_\alpha$$

donde T es el siguiente operador:

$$T = e(\gamma)\Lambda - \Lambda e(\gamma) + \varphi'(R - s(\gamma)) + K$$

Por el mismo razonamiento anterior, cuando T sea positivo se obtendrán otros teoremas de anulación. Pero de momento T es un operador complicado. ¿Cuándo T será positivo?

CÁLCULO LOCAL DEL OPERADOR T :

Proposición 8.- Se verifica:

$$T(\varphi) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} s(\gamma)\, \varphi + \varphi''(s(\gamma))\, \varphi + \varphi'(R)\varphi + K(\varphi) .$$

donde tr $s(\gamma)$ indica la traza de la forma cuadrática $s(\gamma)$.

Demostración: Probaremos que

$$\left(e(\gamma)\Lambda - \Lambda e(\gamma)\right) \varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} s(\gamma)\, \varphi + \varphi'(s(\gamma))\varphi + \varphi''(s(\gamma))\, \varphi$$

El cálculo que sigue está inspirado en la demostración del teorema de Hodge-Lepage (ver por ejemplo Lichnerowicz [8], pag. 215-216).

Trabajaremos utilizando coordenadas reales y empleando índices latinos que varían de 1 a 2n. Designaremos por F la forma de Kähler. Tendremos:

$$(\Lambda e(\gamma)\varphi)_{i_1\ldots i_r} = \frac{1}{4.r!}\,\varepsilon^{lmt_1\ldots t_r}_{jki_1\ldots i_r}\,F^{jk}\gamma_{lm}\varphi_{t_1\ldots t_r}\,.$$

Los términos del segundo miembro de la expresión anterior pueden ser de uno de los tres tipos siguientes:

a) Términos en los que los índices j,k ,coinciden con l,m. Ello puede suceder de dos maneras distintas: 1º) j=l ,k=m; 2º) j=m,k=l . Cuando suceda 1º) aparecerán los términos :

$$\frac{1}{4}F^{jk}\gamma_{jk}\varphi_{i_1\ldots i_r}$$

y cuando suceda 2º) aparecerán términos iguales que los anteriores. Por tanto la suma de todos los términos del tipo a) será:

$$\frac{1}{2}F^{jk}\gamma_{jk}\varphi_{i_1\ldots i_r}$$

b) Términos en los que solamente uno de los índices j,k coincide con uno de los índices l,m. Ello puede suceder de cuatro maneras: 1º) j=l,k≠m ;2º) j=m,k≠l ;3º) j≠l,k=m ;4º) j≠m,k=l. Cuando suceda 1º) ,k será igual a algún t. Cuando k sea igual a $t_1, t_2, \ldots t_r$ se obtendrán r sumandos iguales, la suma de los cuales valdrá:

$$-\frac{1}{4.(r-1)!}\,\varepsilon^{mt_2\ldots t_r}_{i_1\ldots i_r}\,F^{jk}\gamma_{jm}\varphi_{kt_2\ldots t_r}$$

Cuando suceda 2º),3º) y 4º) se obtendrán términos iguales al que hemos hallado. La suma de todos los términos del tipo b) será pues:

$$-\frac{1}{(r-1)!}\,\varepsilon^{mt_2\ldots t_r}_{i_1\ldots i_r}\,F^{jk}\gamma_{jm}\varphi_{kt_2\ldots t_r}$$

c) Términos en los que j y k pertenecen ambos a la sucesión $t_1\ldots t_r$. Supongamos j=t_1 ,k=t_2, obtendremos :

$$\frac{1}{4.r!}\,\varepsilon^{lmt_3\ldots t_r}_{i_1\ldots i_r}\,F^{t_1t_2}\gamma_{lm}\varphi_{t_1t_2\ldots t_r}$$

Hay r(r-1) términos como éste, por tanto la suma de todos ellos vale:

$$\frac{1}{4.(r-2)!}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_r}^{l m k_3\ldots k_r}\,F^{k_1k_2}\,\gamma_{lm}\,\varphi_{k_1k_2k_3\ldots k_r}=\left(e(\gamma)\wedge\varphi\right)_{i_1\ldots i_r}$$

De todo ello se desprende que :

$$\left(e(\gamma)\Lambda-\Lambda e(\gamma)\right)\varphi_{i_1\ldots i_r}=-\frac{1}{2}F^{jk}\gamma_{jk}\varphi_{i_1\ldots i_r}+\frac{1}{(r-1)!}\varepsilon_{i_1\ldots i_r}^{m k_2\ldots k_r}F^{jk}\gamma_{jm}\varphi_{k k_2\ldots k_r}.$$

Pero $F^{jk}\gamma_{jk}=tr\, s(\gamma)$.

Si φ es una forma de tipo (p,q), poniendo r=p+q, tendremos:

$$\left(e(\gamma)\Lambda-\Lambda e(\gamma)\right)\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}=-\frac{1}{2}tr\, s(\gamma)\,\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}+$$

$$+\frac{1}{(p+q-1)!}\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}^{m k_2\ldots\ldots k_r}F^{jk}\gamma_{jm}\varphi_{k k_2\ldots k_r}$$

(Recordemos que los índices griegos varían de 1 a n y los latinos de 1 a 2n). Este último término se descompondrá en dos, según m sea un ν, o m sea un $\bar\sigma$. Se tendrá:

$$\frac{1}{(p-1)!\,q!}\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}^{\nu_1\ldots\nu_p\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_q}F^{\bar\tau s}\gamma_{\bar\tau\nu_1}\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_q}+\frac{1}{p!(q-1)!}\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}^{\bar\sigma_1\nu_1\ldots\nu_p\bar\sigma_2\ldots\bar\sigma_q}F^{\lambda\bar\mu}\gamma_{\lambda\bar\sigma_1}\varphi_{\bar\mu\nu_1\ldots\nu_p\bar\sigma_2\ldots\bar\sigma_q}$$

$$=\frac{1}{(p-1)!\,q!}\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\nu_1\ldots\nu_p}\varepsilon_{\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}^{\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_q}F^{s\bar\tau}\gamma_{\nu_1\bar\tau}\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_q}+\frac{1}{p!(q-1)!}\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\nu_1\ldots\nu_p}\varepsilon_{\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}^{\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_q}F^{\lambda\bar\mu}\gamma_{\lambda\bar\sigma_1}\varphi_{\nu_1\ldots\nu_p\bar\mu\bar\sigma_2\ldots\bar\sigma_q}$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\nu_1\ldots\nu_p}F^{s\bar\tau}\gamma_{\nu_1\bar\tau}\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}+\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon_{\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}^{\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_q}F^{\lambda\bar\mu}\gamma_{\lambda\bar\sigma_1}\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\mu\bar\sigma_2\ldots\bar\sigma_q}$$

Pero $F^{s\bar\tau}\gamma_{\nu_1\bar\tau}=g^{s\bar\sigma}J_{\bar\sigma}^{\bar\tau}\gamma_{\nu_1\bar\tau}=-i\,g^{s\bar\tau}\gamma_{\nu_1\bar\tau}=g^{s\bar\tau}s(\gamma)_{\nu_1\bar\tau}$

(puesto que $J_{\bar\sigma}^{\bar\tau}=-i\delta_{\sigma\tau}$)

También se verifica : $F^{\lambda\bar\mu}\gamma_{\lambda\bar\sigma_1}=g^{\lambda\bar\sigma}J_{\bar\sigma}^{\bar\mu}\gamma_{\lambda\bar\sigma_1}=-i\,g^{\lambda\bar\mu}\gamma_{\lambda\bar\sigma_1}=g^{\lambda\bar\mu}s(\gamma)_{\lambda\bar\sigma_1}$

Se tiene pues :

$$\left(e(\gamma)\Lambda - \Lambda e(\gamma)\right)\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} + \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} g^{s\bar{\tau}} s(\gamma)_{\nu_1\bar{\tau}}\varphi_{s\nu_2\ldots\nu_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$

$$+\frac{1}{(q-1)!}\varepsilon^{\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_q}_{\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} g^{\lambda\bar{\mu}} s(\gamma)_{\lambda\bar{\sigma}_1}\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\mu}\bar{\sigma}_2\ldots\bar{\sigma}_q} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)\varphi + Q'(s(\gamma))\varphi + Q''(s(\gamma))\varphi .$$

Ello concluye la demostración de la proposición.

RESULTADOS QUE SE DESPRENDEN DE LA PROPOSICIÓN 7 PARA LAS FORMAS DE TIPO (p,0) :

Sobre las formas de tipo (p,0),Q" y K se anulan y el operador T queda :

$$T(\varphi) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)\varphi + Q'(R)\varphi$$

Se tendrá pues :

$$\left(T(\varphi),\varphi\right)_a = -\frac{a^{-1}}{p!}\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)\varphi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\bar{\varphi}^{\lambda_1\ldots\lambda_p} + \frac{a^{-1}}{(p-1)!}R_{\lambda}{}^{\mu}\varphi_{\mu\lambda_2\ldots\lambda_p}\bar{\varphi}^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}$$

$$= \frac{a^{-1}}{p!}\left(pR_{\lambda\bar{\mu}} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g_{\lambda\bar{\mu}}\right)\varphi^{\bar{\mu}}{}_{\lambda_2\ldots\lambda_p}\bar{\varphi}^{\lambda\lambda_2\ldots\lambda_p}$$

Por tanto el operador T tiene el mismo carácter que la forma cuadrática $pR-\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g$ (R indica el tensor de Ricci,g la métrica y γ un representante de $c_1(E)$).De aquí se desprende que si $pR-\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g>0 \Longrightarrow H^{p,0}(E) = 0$.No obstante este resultado puede mejorarse generalizando los métodos empleados en el artículo de Lichnerowicz [9].Esto es lo que vamos a hacer a continuación.

Sobre las formas de tipo (p,o),decir que una forma es Δ''_a-armónica equivale a decir que es holomorfa.Designaremos por $T^p(E^*)$ el espacio vectorial de los p-tensores holomorfos a coeficientes en E^* (Llamamos p-tensor a un tensor contravariante,antisimétrico,de tipo (p,0)).

Dado un p-tensor X a coeficientes en E^*, designaremos por $\alpha(X)$ la p-forma a coeficientes en E, definida en cada carta local U_j por:

$$\left(\alpha(X)_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\right)_j = a_j\left(\bar{X}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\right)_j$$

donde $\bar{X}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \overline{g_{\lambda_1 s_1}\cdots g_{\lambda_p s_p} X^{s_1\ldots s_p}}$

Cuando no haya lugar a confusión suprimiremos, como siempre, el sub-índice j. α da una biyección entre los p-tensores a coeficientes en E^* y las p-formas a coeficientes en E.

<u>Proposición 9</u>.- $X\in T^p(E^*) \Longleftrightarrow B(\alpha(X)) = 0$, donde B es el operador que aparece en las proposiciones 6 y 7.

Demostración: $X\in T^p(E^*) \Longleftrightarrow \partial_{\bar\mu} X^{\lambda_1\ldots\lambda_p} = 0 \Longleftrightarrow$ $\nabla_{\bar\mu} X^{\lambda_1\ldots\lambda_p} = 0 \Longleftrightarrow \nabla_{\mu}\bar{X}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = 0 \Longleftrightarrow a\nabla_{\mu}\left\{a^{-1}(a\bar{X}_{\lambda_1\ldots\lambda_p})\right\} = 0$ $\Longleftrightarrow B(\alpha(X)) = 0$.

<u>Proposición 10</u>.- Si $X\in T^p(E^*)$ y $\varrho\in H^{p,0}(E)$, entonces $i(X)\varrho$ es una constante.

Demostración: $i(X)\varrho$ es una función "sin coeficientes" holomorfa sobre toda la variedad, luego es una constante.

<u>Proposición 11</u>.-Si la forma cuadrática $pR - \frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g \geqslant 0$, toda forma $\varrho\in H^{p,0}(E)$ que se anule en un punto, es idénticamente nula. En particular $\dim_C H^{p,0}(E) \leqslant \binom{n}{p}$

Demostración: Sabemos que el operador T tiene el mismo carácter que la forma cuadrática $pR - \frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g$. Por tanto $T\geqslant 0$. Sea $\varrho\in H^{p,0}(E)$. Sea $X = \alpha^{-1}(\varrho)$. Teniendo en cuenta que $\Delta''_a\varrho = \Delta''_a\alpha(X) = 0$ de la proposición 7 se deduce:

$$-2\langle T(\alpha(X)),\alpha(X)\rangle_a = -2(p+1)\langle B(\alpha(X)),B(\alpha(X))\rangle_a$$

Por ser $T \geqslant 0$,ambos miembros son nulos,por tanto $B(\alpha(X))$ $=0$,de donde, en virtud de la proposición 9,$X \in T^p(E^*)$,por tanto $(\varrho,\varrho)_\alpha = i(X)\varrho$ será una constante en virtud de la proposición 10,y si ϱ se anula en un punto esta constante será cero,por tanto ϱ será idénticamente nula.Para demostrar la segunda parte de la proposición,supongamos que $\dim_C H^{p,o}(E) > \binom{n}{p}$.Sea $\varrho_1 \ldots\ldots \varrho_k$ una base de $H^{p,o}(E)$,con $k > \binom{n}{p}$.En todo punto $x \in W$ se verifica: $\dim_C(\Lambda^p T_x \otimes E_x)$ $= \binom{n}{p}$,por consiguiente para un x cualquiera $(\varrho_1)_x \ldots (\varrho_k)_x$ son linealmente dependientes,por tanto existe una combinación lineal $\sum k_i(\varrho_i)_x = 0$.Sea $\varrho = \sum k_i \varrho_i$ .Entonces ϱ se anula en el punto x, por consiguiente $\varrho \equiv 0$,así pues se tiene una combinación lineal no trivial de $\varrho_1 \ldots\ldots \varrho_k$,en contra de la hipótesis de que constituyan una base.

<u>Teorema 1</u>.- Si la forma cuadrática $pR - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\; s(\gamma)g \geqslant 0$, y en un punto de W es estrictamente positiva,entonces $H^o(W,\Omega^p(E)) =$ $= 0$.

Demostración: Toda $\varrho \in H^{p,o}(E)$ verifica :

$$-2 < T(\varrho),\varrho >_\alpha = 2(p+1) < B(\varrho), B(\varrho) >_\alpha$$

Por ser $T \geqslant 0$,ambos miembros son nulos,por tanto $< T(\varrho),\varrho >_\alpha = 0$ Por ser $T \geqslant 0$,ello implica que en cada punto x,el producto escalar local $(T(\varrho),\varrho)_\alpha = 0$.Por ser T estrictamente positivo en un punto de W, ϱ debe anularse en dicho punto,y en virtud de la proposición 11,debe ser idénticamente nula.Ello concluye la demostración del teorema.

<u>Corolario</u>.-Si $R \geqslant 0$,y en un punto es estrictamente positivo,y si $\mathrm{tr}\; c_1(E) \leqslant 0$,entonces $H^o(W,\Omega^p(E)) = 0$.

<u>Proposición 12</u>.- Si $pR-\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g\leq 0$, todo tensor $X\in T^p(E^*)$ ue se anule en un punto, es idénticamente nulo y además se verifi- a: $\dim T^p(E^*)\leq \dim H^{p,o}(E)$.

Demostración: Si $X\in T^p(E^*)$, se tiene: $B(\alpha(X))=0$, en virtud de la proposición 9, luego se tendrá, en virtud de la proposición 7:

$$\langle \Delta''_{\alpha}\alpha(X),\alpha(X)\rangle_{\alpha}-2\langle T(\alpha(X)),\alpha(X)\rangle_{\alpha}=0$$

Pero T tiene el mismo carácter que la forma cuadrática $pR-\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g$, luego $T\leq 0$. Pero $\Delta''_{\alpha}>0$, luego los dos términos del primer miembro son positivos, luego ambos tienen que ser nulos, luego $\alpha(X)\in H^{p,o}(E)$, y en virtud de la proposición 10, $i(X)(\alpha(X))$ es una constante, luego si X se anula en un punto esta constante será nula y de aquí se deduce que X debe anularse en toda la variedad W.

Para probar la segunda parte de la proposición basta que observemos que el morfismo

$$\begin{array}{ccc} T^p(E^*) & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & H^{p,o}(E) \\ X & \longrightarrow & \alpha(X) \end{array}$$

es inyectivo.

<u>Teorema 2</u> .- Si $pR-\frac{1}{2}\operatorname{tr} s(\gamma)g\leq 0$, y en un punto de W es estrictamente negativa, entonces $T^p(E^*)=0$.

Demostración: Si $X\in T^p(E^*)$, se tiene:

$$\langle \Delta''_{\alpha}\alpha(X),\alpha(X)\rangle_{\alpha}-2\langle T(\alpha(X)),\alpha(X)\rangle_{\alpha}=0$$

Por ser $T\leq 0$, ambos términos deben ser nulos. Por ser T estrictamente negativo en un punto de W, $\alpha(X)$ debe anularse en dicho punto.Por tanto X debe anularse también en dicho punto,y en virtud de la proposición 12,debe ser idénticamente nulo.

Corolario.- Si $R \leqslant 0$ y en un punto es estrictamente negativo,y si tr $c_1(E) \geqslant 0$,entonces $T^p(E^*)=0$.

RESULTADOS QUE SE DESPRENDEN DE LA PROPOSICIÓN 7 PARA LAS FORMAS DE TIPO (0,q) :

Sobre las formas de tipo (0,q) los operadores Q' y K se anulan y en virtud de la proposición 8 el operador T toma la siguiente expresión :

$$T(\varphi) = -\frac{1}{2}\, tr\, s(\gamma)\,\varphi + \phi''(s(\gamma))\,\varphi$$

Se tendrá pues:

$$(T(\varphi),\varphi)_a = -\frac{a^{-1}}{q!}\frac{1}{2}\, tr\, s(\gamma)\,\varphi_{\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\varphi}^{\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} +$$

$$+\frac{a^{-1}}{(q-1)!}\, s(\gamma)_{\bar\tau}{}^{\bar\beta}\,\varphi_{\bar\beta\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\varphi}^{\bar\tau\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q} =$$

$$= \frac{a^{-1}}{q!}\left(q\, s(\gamma)_{\bar\tau\beta} - \frac{1}{2}\, tr\, s(\gamma)\, g_{\bar\tau\beta}\right)\varphi^{\beta}{}_{\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\varphi}^{\bar\tau\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}$$

Se desprende pues que el operador T tiene el mismo carácter que la forma cuadrática $q s(\gamma) - \frac{1}{2} tr\, s(\gamma) g$.

Téngase en cuenta que tr $s(\gamma) = g^{ik} s(\gamma)_{ik}$,donde i,k varían de 1 a 2n.Empleando índices griegos se tendrá pues:

$$tr\, s(\gamma) = g^{\alpha\bar\varrho}\, s(\gamma)_{\alpha\bar\varrho} + g^{\bar\alpha\varrho}\, s(\gamma)_{\bar\alpha\varrho} = 2\, g^{\alpha\bar\varrho} s(\gamma)_{\alpha\bar\varrho}$$

Es decir:

$\frac{1}{2}$tr $s(\gamma)$ = traza de la forma hermítica $(s(\gamma)_{\alpha\bar\varrho})$.

Después de estas consideraciones, está claro que se verifica la siguiente proposición (que se desprende de la proposición 7) :

<u>Proposición 13</u>.- Si la forma hermítica $qs(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}} - (\mathrm{tr}\ s(\gamma)_{\bar{\beta}}) g_{\alpha\bar{\beta}} > 0$, entonces $H^{0,q}(E) = H^q(W, \Omega^0(E)) = 0$.

Supongamos ahora que la dimensión compleja n de W es $\geqslant 2$. Supongamos que $c_1(E) \leqslant 0$, con rango de $c_1(E) \geqslant 2$ en todo punto de W, es decir, que exista un representante $\frac{\Upsilon}{2\pi} \in c_1(E)$ tal que la forma hermítica $(s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}})$ sea $\leqslant 0$ y rango de $(s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}})$ sea $\geqslant 2$. Entonces, como corolario de la proposición 13 se desprende el siguiente teorema:

<u>Teorema 3</u>.-Si W tiene dimensión compleja $n \geqslant 2$ y $c_1(E) \leqslant 0$, con rango de $c_1(E) \geqslant 2$ en todo punto de W, se verifica $H^1(W, \Omega^0(E)) = 0$.

Demostración: Sea x_0 un punto de W y tomemos en x_0 una base tal que $g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$ y tal que la forma hermítica $(s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}})$ se exprese en dicha base de manera diagonal:

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

Los c_i serán ≤ 0, para todo i. En virtud de las hipótesis existirán dos índices k, s, para los cuales $c_k < 0, c_s < 0$. Se verificará por tanto: $\sum_{i=1}^{n} c_i < c_i \leqslant 0$. Como $q=1$, la forma hermítica $qs(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}} - (\mathrm{tr}\ s(\gamma))g_{\alpha\bar{\beta}}$, será en x_0 :

$$\begin{pmatrix} c_1 - \Sigma c_i & & & \\ & c_2 - \Sigma c_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n - \Sigma c_i \end{pmatrix} > 0$$

Por tanto se verifican las hipótesis de la proposición 13.

<u>Aplicación del teorema 3 al cálculo de deficiencias de fibrados</u> :

Sea S una subvariedad analítica no singular de W, de dimensión compleja $n-1$. Designemos por $\{S\}$ el fibrado de línea asociado al divisor determinado por S. Sea $\{U_j\}$ un recubrimiento de W tal que si $S\cap U_j \neq \phi$, la subvariedad S venga expresada en U_j por una ecuación holomorfa $s_j=0$. En los U_j tales que $S\cap U_j = \phi$, ponemos $s_j\equiv 1$. El divisor determinado por S vendrá expresado en el recubrimiento $\{U_j\}$ por el sistema de funciones $\{s_j\}$, y el fibrado de línea $\{S\}$ vendrá dado por las funciones de transición :

$$g_{ij}=\frac{s_j}{s_i} \quad \text{en } U_i\cap U_j .$$

Consideremos la restricción canónica

$$\Omega^o(E) \xrightarrow{\quad r \quad} \Omega^o(E_S)$$

(E_S indica la restricción de E a S). Definamos ahora una aplicación

$$\Omega^o(E\otimes\{S\}^*) \xrightarrow{\quad i \quad} \Omega^o(E)$$

de la siguiente manera:

El fibrado $E\otimes\{S\}^*$ tiene funciones de transición $\frac{s_k}{s_j}f_{jk}$ en $U_j\cap U_k$. (f_{jk} son las funciones de transición de E). Un germen $\eta\in\Omega^o(E\otimes\{S\}^*)_p$ (en el punto p) vendrá dado por su coordenada η_j en la fibra $\mathbf{C}$, en cada $U_j\ni p$, los η_j verificando:

$$\eta_j = \frac{s_k}{s_j} f_{jk} \eta_k$$

Definimos la aplicación i de la siguiente manera :

$$\eta_j \xrightarrow{\ i\ } s_j \eta_j$$

Es fácil comprobar que se tiene la siguiente sucesión exacta de haces:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(E\otimes\{S\}^*) \xrightarrow{\ i\ } \Omega^0(E) \xrightarrow{\ r\ } \Omega^0(E_S) \longrightarrow 0$$

Kodaira y Spencer [7] definen la deficiencia de E respecto la subvariedad S,def(E/S),de la siguiente manera:

$$\mathrm{def}(E/S) = \dim H^0(S, \Omega^0(E_S)) - \dim r_* H^0(W, \Omega^0(E)).$$

De la sucesión exacta anterior se desprende la siguiente sucesión exacta de cohomología :

$$\longrightarrow H^0(W, \Omega^0(E)) \xrightarrow{r_*} H^0(S, \Omega^0(E_S)) \longrightarrow H^1(W, \Omega^0(E\otimes\{S\}^*)) \xrightarrow{i_*} H^1(W, \Omega^0(E))$$

Se desprende pues de esta sucesión exacta que :

$$\mathrm{def}(E/S) \leqslant \dim H^1(W, \Omega^0(E\otimes\{S\}^*)) \ .$$

Podemos aplicar el teorema 3 a esta situación y obtenemos:

Teorema 4.-Sea W una variedad kählleriana compacta de dimensión compleja $n \geqslant 2$, $E \xrightarrow{\pi} W$ un fibrado de línea holomorfo,S una subvariedad analítica no singular de W,de dimensión compleja n-1 . Si $c_1(E) \leqslant 0$,con rango de $c_1(E) \geqslant 2$ en todo punto de W,entonces:

$$\operatorname{def}(E/S) = \dim H^{1}(W, \Omega^{0}(E\otimes\{S\}^{*})).$$

Demostración: Basta considerar la sucesión exacta de cohomología anterior, observando que $H^{1}(W, \Omega^{0}(E)) = 0$, en virtud del teorema 3.

Cuando se toma $E = \{S\}$, la deficiencia $\operatorname{def}(\{S\}/S)$ se llama deficiencia característica de S. En este caso la dimensión de $H^{1}(W, \Omega^{0}(E\otimes\{S\}^{*}))$ ($= \dim H^{1}(W, \Omega^{0}(1))$) es la mitad del primer número de Betti de W, es lo que en Geometría algebraica se llama la irregularidad de W.

De la proposición 13 hemos sacado consecuencias solamente cuando $q = 1$. Veamos qué conclusiones podemos sacar para $q > 1$.

<u>Consecuencias de la proposición 13 para $q>1$</u>:

Para estudiar el carácter de la forma hermítica $q\, s(\gamma)_{\alpha\bar\beta} - (\operatorname{tr} s(\gamma)_{\gamma\bar\gamma})g_{\alpha\bar\beta}$, necesitamos el siguiente lema:

<u>Lema 1</u>.- Sea W una variedad kähleriana de dimensión compleja n. Sea γ una forma real cerrada, de tipo $(1,1)$ sobre W. Sea $c=s(\gamma)$. Se supone $c\leq 0$ y rango de $(c_{\alpha\bar\beta})$ constante, igual a k, sobre W. Bajo estas hipótesis existe una métrica kähleriana G, sobre W, de modo que en cada carta local las formas hermíticas $(c_{\alpha\bar\beta})$ y $(G_{\alpha\bar\beta})$, puedan expresarse, en una base conveniente, de la siguiente manera:

$$c = \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1}^{k} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \;; \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración: Sea g una métrica kähleriana cualquiera sobre W. En cada punto $p\in W$ sea M_p el subespacio del espacio real tangente a W en p, $T_p(W)$, formado por los X_p tales que $c(X_p, Y_p)=0$

para todo Y_p de $T_p(W)$,es decir,el núcleo de la forma caudrática c.
Sea $M_p^{\perp}$ el ortocomplemento de M_p en $T_p(W)$ respecto la métrica g.
Definimos la métrica G en cada punto p,poniendo:

$$G(X_p,Y_p) = - c(X_p,Y_p) \quad \text{si } X_p,Y_p \in M_p^{\perp} ,$$
$$G(X_p,Y_p) = g(X_p,Y_p) \quad \text{si } X_p,Y_p \in M_p ,$$
$$G(X_p,Y_p) = 0 \quad \text{si } X_p \in M_p , \; Y_p \in M_p^{\perp} .$$

La dificultad mayor consiste ahora en ver que esta métrica G es kähleriana.Para ello probemos en primer lugar que el sistema diferencial que a cada punto p asigna el espacio M_p,es integrable.Tenemos que probar que si X,Y son campos,en una carta local U,tales que $X_p,Y_p \in M_p$ en todo punto p de U,entonces $[X,Y]_p \in M_p$.
Tomemos en U unas coordenadas$(x^1 \ldots x^n, y^1 \ldots y^n)$ tales que $J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}$.
Sea Z uno cualquiera de los vectores de la base : $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$.
Tenemos que probar que $c([X,Y],Z)=0$.La condición de que la forma γ sea cerrada se traduce en la base : $\left\{\frac{\partial}{\partial z^1} \cdots \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$
por las ecuaciones : $\partial_\mu c_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha c_{\mu\bar{\beta}}$; $\partial_{\bar{\mu}} c_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\bar{\beta}} c_{\alpha\bar{\mu}}$.
Empleando índices latinos podemos escribir $\partial_i c_{jk} = \partial_j c_{ik}$ (donde cada índice latino puede ser igual a un α o un $\bar{\alpha}$). Para poder utilizar estas condiciones bajo esta forma,operaremos tomando componentes en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right\}$.De la identidad:

$$c_{ij} Y^i Z^j = 0$$

se desprende:

$$X^k \partial_k (c_{ij} Y^i Z^j) = 0$$

que se puede escribir:

$$(1) \quad X^k(\partial_k c_{ij})Y^i Z^j + X^k c_{ij}(\partial_k Y^i)Z^j = 0$$

(Puesto que las componentes de Z en la base que consideramos son constantes). Análogamente de

$$c_{ij}X^i Z^j = 0$$

se desprende:

$$(2) \quad Y^k(\partial_k c_{ij})X^i Z^j + Y^k c_{ij}(\partial_k X^i)Z^j = 0 \,.$$

El primer término de (1) coincide con el primer término de (2) puesto que $\partial_k c_{ij} = \partial_i c_{kj}$ .Restando (2) de (1) se obtiene:

$$c_{ij}(X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i)Z^j = 0 \,.$$

Es decir:

$$c_{ij}[X,Y]^i Z^j = 0 \,.$$

Por el teorema de Frobenius en cada punto tendremos una subvariedad integral del sistema diferencial $\{M_p\}$ .Por ser γ de tipo (1,1) los espacios M_p son invariantes por J,es decir,en las subvariedades integrales tendremos un operador J definido por restricción del operador J de W.

Construyamos ahora en un entorno de un punto p_0 una familia de subvariedades,también invariantes por J,de dimensión complementaria,de tal modo que cada subvariedad de la familia que vamos a construir cor[illegible] un punto a cada subvariedad integral de $\{M_p\}$ .Para construir esta nueva familia podemos proceder de la siguiente manera:

Tomemos coordenadas $(x^1 \ldots x^n, y^1 \ldots y^n)$ en un entorno U de p_0 ,tales que p_0 sea el origen de coordenadas,y tales que $J(\frac{\partial}{\partial x^i})=$

$= \frac{\partial}{\partial y^i}$ .En $T_{p_0}(W)$ podemos encontrar una base $\{e_1 \dots e_n, Je_1 \dots Je_n\}$ tal que $\{e_{k+1} \dots e_n, Je_{k+1} \dots Je_n\}$ constituyan una base de M_{p_0}.

Se tendrá :

$$\left.\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=1}^{n} a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{p_0} + \sum_{j=1}^{n} b_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{p_0} \\ Je_i &= -\sum_{j=1}^{n} b_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{p_0} + \sum_{j=1}^{n} a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{p_0} \end{aligned}\right\} i = 1 \dots n$$

Consideremos las subvariedades de dimensión 2k definidas paramétricamente por:

$$\left.\begin{aligned} x^j &= \sum_{i=1}^{k} a_i^j \lambda^i + \sum_{i=1}^{k} b_i^j \mu^i + c^j \\ y^j &= -\sum_{i=1}^{k} b_i^j \lambda^i + \sum_{i=1}^{k} a_i^j \mu^i + r^j \end{aligned}\right\} j = 1 \dots n$$

donde c^j, r^j son constantes.Para cada valor de las constantes tendremos una subvariedad de dimensión 2k,invariante por J,puesto que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \lambda^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial \lambda^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} a_i^j + \sum_{j=1}^{n} b_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \mu^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial \mu^i} = -\sum_{j=1}^{n} b_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^{n} a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Se verifica pues : $J\left(\frac{\partial}{\partial \lambda^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \mu^i}$

La subvariedad de esta familia,que pasa por el origen, corta en un solo punto a la subvariedad integral de $\{M_p\}$ que pasa por el origen,por construcción.Luego en un entorno suficientemente pequeño del origen,cada subvariedad de esta familia cortará en un solo punto a cada subvariedad integral de la distribución $\{M_p\}$,tal como queremos.

Designemos por V_{p_o} la subvariedad integral de $\{M_p\}$ que pasa por el origen p_o. Esta subvariedad posee una estructura casi-compleja (es decir, un operador J) cuya torsión es nula (por ser subvariedad de una variedad compleja), luego por el teorema de New-lander-Nirenberg, es una variedad compleja. Podemos encontrar pues sobre esta variedad, coordenadas en un entorno de p_o: $(u^{k+1}\ldots u^n, v^{k+1}\ldots v^n)$ tales que $J(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \frac{\partial}{\partial v^i}$.

Sea V'_{p_o} la subvariedad de la otra familia, que pasa por p_o. También será una variedad compleja, y podremos encontrar coordenadas sobre esta variedad, en un entorno de p_o: $(u^1\ldots u^k, v^1\ldots v^k)$ tales que $J(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \frac{\partial}{\partial v^i}$. Introduzcamos ahora las coordenadas $(u^1\ldots u^n$ $v^1\ldots v^n)$ en un entorno suficientemente pequeño de p_o, en W, de la siguiente manera:

Por el punto de coordenadas $(u^1\ldots u^k, v^1\ldots v^k)$ de V'_{p_o}, trazamos la única superficie integral de $\{M_p\}$ que pasa por dicho punto. Por el punto de coordenadas $(u^{k+1}\ldots u^n, v^{k+1}\ldots v^n)$ de V_{p_o}, trazamos la única subvariedad de la otra familia, que pasa por dicho punto. El punto donde se cortan estas dos subvariedades es por definición el punto de coordenadas $(u^1\ldots u^n, v^1\ldots v^n)$.

En estas coordenadas, el sistema diferencial $\{M_p\}$ tendrá en cada punto p la base: $\left\{\frac{\partial}{\partial u^{k+1}}\cdots\frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial v^{k+1}}\cdots\frac{\partial}{\partial v^n}\right\}$ con $J(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \frac{\partial}{\partial v^i}$.

Consideremos ahora el sistema diferencial $\{M_p^{\perp}\}$. Probemos que es integrable. Sea Z uno cualquiera de los vectores: $\left\{\frac{\partial}{\partial u^{k+1}}\cdots\frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial v^{k+1}}\cdots\frac{\partial}{\partial v^n}\right\}$. Para poder utilizar con comodidad la condición de que la métrica g es kähleriana, pongamos: $w^\alpha = u^\alpha + \sqrt{-1}\, v^\alpha$, y utilicemos la base $\left\{\frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\alpha}\right\}$ en la cual la condición de kählerianidad se escribe: $\partial_i g_{jk} = \partial_j g_{ik}$. Sean X, Y dos campos definidos en un entorno U de p_o, tales que $X_p, Y_p \in M_p^{\perp}$, para todo p de U. Se tendrá :

$$g_{ij}Y^iZ^j = 0 \qquad ; \qquad g_{ij}X^iZ^j = 0$$

de donde:

$$X^k \partial_k(g_{ij}Y^iZ^j) = 0 \qquad ; \quad Y^k \partial_k(g_{ij}X^iZ^j) = 0 .$$

Teniendo en cuenta que $\partial_k Z^j = 0$, se tendrá :

$$X^k(\partial_k g_{ij})Y^iZ^j + X^k g_{ij}(\partial_k Y^i)Z^j = 0$$

$$Y^k(\partial_k g_{ij})X^iZ^j + Y^k g_{ij}(\partial_k X^i)Z^j = 0$$

Restando y teniendo en cuenta que $\partial_k g_{ij} = \partial_i g_{kj}$, se tiene :

$$0 = g_{ij}(X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i)Z^j = g_{ij}[X,Y]^iZ^j .$$

Tendremos ahora dos familias de subvariedades, las subvariedades integrales de $\{M_p\}$ y las subvariedades integrales de $\{M_p^{\perp}\}$. Cada subvariedad es invariante por J y además cada subvariedad de una familia corta a cada subvariedad de la otra familia en un solo punto. Procediendo pues como antes, podremos encontrar unas coordenadas $(x^1 \ldots x^n, y^1 \ldots y^n)$ en un entorno del ~~punto~~ p_o , tales que $x^1 = cte. \ldots x^k = cte.$ $y^1 = cte. \ldots y^k = cte.$ serán subvariedades integrales de $\{M_p\}$, y las subvariedades integrales de $\{M_p^{\perp}\}$ serán $x^{k+1} = cte. \ldots x^n = cte.$ $y^{k+1} = cte. \ldots y^n = cte.$

Así pues $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1} \ldots \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^1} \ldots \frac{\partial}{\partial y^k}\right\}$ constituirá una base de $M^{\perp}$, en cada punto, y $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{k+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^{k+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ será en cada punto una base de M.Poniendo $\tilde{x}^{\alpha}= x^{\alpha}+F^{\alpha}\,y^{\alpha}$,tendremos,en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial \bar{\tilde{x}}^{\alpha}}\right\}$ la siguiente expresión de $(G_{\alpha\bar{\beta}})$:

$$G = \left(\begin{array}{c|c} -c_{\lambda\bar{\mu}} & 0 \\ \hline 0 & g_{\nu\bar{\xi}} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \lambda,\mu,\text{varían de 1 a k} \\ \nu,\xi,\text{varían de k+1 a n.} \end{array}$$

Para ver que la métrica G es kähleriana tenemos que ver que $\partial_{\gamma} G_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\alpha} G_{\gamma\bar{\beta}}$ .Supongamos que λ,μ,τ varían de 1 a k, y ν,ξ,σ varían de k+1 a n.Se presentarán los siguientes casos:

$$\partial_{\tau} G_{\lambda\bar{\mu}} = -\partial_{\tau} c_{\lambda\bar{\mu}} = -\partial_{\lambda} c_{\tau\bar{\mu}} = \partial_{\lambda} G_{\tau\bar{\mu}}$$

$$\partial_{\sigma} G_{\lambda\bar{\mu}} = -\partial_{\sigma} c_{\lambda\bar{\mu}} = -\partial_{\lambda} c_{\sigma\bar{\mu}} = 0 = \partial_{\lambda} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{G_{\sigma\bar{\mu}}}}$$

$$\partial_{\tau} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{G_{\lambda\bar{\nu}}}} = \partial_{\lambda} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{G_{\tau\bar{\nu}}}}$$

$$\partial_{\sigma} G_{\nu\bar{\xi}} = \partial_{\sigma} g_{\nu\bar{\xi}} = \partial_{\nu} g_{\sigma\bar{\xi}} = \partial_{\nu} G_{\sigma\bar{\xi}}$$

$$\partial_{\sigma} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{G_{\lambda\bar{\nu}}}} = \partial_{\sigma} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g_{\lambda\bar{\nu}}}} = \partial_{\lambda} g_{\sigma\bar{\nu}} = \partial_{\lambda} G_{\sigma\bar{\nu}}$$

$$\partial_{\tau} G_{\nu\bar{\xi}} = \partial_{\tau} g_{\nu\bar{\xi}} = \partial_{\nu} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g_{\tau\bar{\xi}}}} = \partial_{\nu} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{G_{\tau\bar{\xi}}}}$$

Ello prueba que G es kähleriana.

Diagonalizando ahora c respecto la mética G se obtiene el enunciado del lema.

Usando el lema y apoyándonos en la proposición 13 demostraremos el siguiente teorema :

Teorema 5 .-Si existe un representante $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(E)$ tal que $s(\gamma) \leq 0$, y rango de $s(\gamma)$ constante, igual a k, sobre W, entonces $H^q(W, \Omega^0(E)) = 0$ para $0 \leq q \leq k-1$.

(k indica el rango de $s(\gamma)$ como forma hermític, es decir, el rango de $s(\gamma)$ como forma real es 2k)

Cuando k=n (dim de W) este enunciado coincide con el de Akizuki-Nakano sobre las formas de tipo (0,q) [1], o bien con el teorema 2 de Kodaira [6].

Demostración: En virtud del lema, existe una métrica kähleriana sobre W tal que $\left(s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}}\right)$ podrá expresarse en una base ortonormal de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad -1 \quad \ddots \quad -1}^{k} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

La forma hermítica $q s(\gamma)_{\alpha\bar{\beta}} - (\mathrm{tr}\, s(\gamma)_{\lambda\bar{\mu}}) g_{\alpha\bar{\beta}}$, que aparece en el enunciado de la proposición 13, se expresará en dicha base :

$$\begin{pmatrix} k-q & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k-q & & \\ & & & k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & k \end{pmatrix}$$

Será pues positiva cuando $0 \leq q \leq k-1$. Basta pues aplicar la proposición 13 para obtener el teorema.

Corolario .-Si existe un representante $\frac{\gamma}{2\pi} \in c_1(E \otimes K(W)^*)$, donde K(W) indica el fibrado canónico de W, tal que $s(\gamma) \geq 0$, con rango de $s(\gamma)$ constante, igual a k, sobre W, entonces $H^q(W, \Omega^0(E)) = 0$ para $n-k < q \leq n$.

Cuando k=n este teorema coincide con el teorema 3 de Kodaira [6] .

Demostración: Se tiene, como caso particular de la dualidad de Serre :

$$H^q(W,\Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(W,\Omega^{n-p}(E^*))$$

Por otro lado es inmediato probar que :

$$\Omega^o(E) \cong \Omega^n(E\otimes K(W)^*).$$

Se tiene pues:

$$H^{oq}(E) \cong H^q(W,\Omega^o(E)) \cong H^q(W,\Omega^n(E\otimes K(W)^*)) \cong H^{n-q}(W,\Omega^o(K(W)\otimes E^*)).$$

Sea $\rho = -\gamma$. $\frac{\rho}{2\pi}\in c_1(K(W)\otimes E^*)$,con $s(\rho)\leq 0$.Aplicando el teorema anterior se tiene:

$$H^{n-q}(W,\Omega^o(K(W)\otimes E^*))=0,\text{si } 0\leq n-q<k.$$

Es decir,si $n-k<q\leq n$,como queríamos demostrar.

Tomando en este corolario E igual al fibrado trivial,se obtiene este otro importante corolario:

Corolario.-Si existe un representante $\frac{\gamma}{2\pi}\in c_1(W)$ tal que $s(\gamma)\geq 0$ con rango de $s(\gamma)$ constante,igual a k,sobre W,entonces $h^{o,p}=h^{p,o}=0$ para $n-k<p\leq n$.($h^{p,q}$ indica la dimensión de $H^q(W,\Omega^o(1))$, donde 1 indica el fibrado trivial)

Cuando k = n este resultado coincide con el de Bochner (teorema 6 [2]).

Teorema 6.-Si W es una variedad de Hodge (es decir,algebraica) sumergida en un espacio proyectivo complejo,y si R es el tensor de Ricci de la métrica de W inducida por la métrica de Fubini del espacio proyectivo,si $R\geq 0$ se verifica $h^{p,o}=h^{o,p}=0$ para $n-k<p\leq n$,donde k es el máximo de los rangos de R en los diferentes puntos de W.

Demostración : Por ser W una subvariedad analítica de PC_d ,el conjunto de puntos de W en los que el rango de R no es máximo tiene dimensión $< n$.El teorema quedará probado si se verifia el siguiente lema:

Lema 2 .-Si el operador T de la proposición 7,que actua sobre las formas de tipo (p,q) a coeficientes en E,es$\geqslant 0$ sobre toda la variedad W,y $T > 0$ salvo quizá en un conjunto de medida nula, entonces $H^{p,q}(E)=0$.

Demostración del lema: Si φ es una forma Δ''_{α}-armónica, en virtud de la proposición 7,se tendrá :

$$-2 < T(\varphi), \varphi >_{\alpha} = 2(p+1) < B(\varphi), B(\varphi) >_{\alpha}$$

Por ser $T \geqslant 0$,ambos miembros deben ser nulos. φ se anulará en todos los puntos en que T sea > 0, luego se anulará en todo W,salvo quizá en un conjunto de medida nula.Pero por continuidad, deberá anularse en toda la variedad W.

B I B L I O G R A F I A

[1] AKIZUKI-NAKANO: Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems. Proc. Japan Acd. 30,266-272 (1954).

[2] BOCHNER: Vectors fields and Ricci curvature. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 776-797.

[3] GIRBAU: Sur les théorèmes d'annulation de Kodaira. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris (1971) t.272. pg. 740-742.

[4] GIRBAU: Sur les théorèmes d'annulation de Kodaira II. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris (en curso de publicación).

[5] HIRZEBRUCH: Topological methods in Algebraic Geometry. 3ª edición Springer Verlag (1966)

[6] KODAIRA: On a differential geometric method in the theory of analytic stacks. Proc. Nat. Acd. Sc. USA 39 (1953) 1268-1273

[7] KODAIRA-SPENCER: On a theorem of Lefschetz and the lemma of Enriques-Severi-Zariski. Proc. Nat, Acad. Sc. USA 39 (1953) 1273-1278

[8] LICHNE ROWICZ: Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Edizione Cremonese. Roma (1962)

[9] LICHNEROWICZ: Variétés kähleriennes et première classe de Chern. J. Diff. Geom. 1 (1967) 195-223.

[10] NEWLANDER-NIRENBERG: Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. Ann. of Math. 65 (1957) 391-404.