Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes lògics deductius

Josep Pla i Carrera

CONTRIBUCIÓ A L ESTUDI DE LES ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES DELS SISTEMES LÒGICS DEDUCTIUS

Per Josep Pla i Carrera
Departament de Calcul de
Probabilitats i Estadistica
Matematica
Universitat de Barcelona

Memoria dirigida pel Dr
Francesc d'Assis Sales i Valles
presentada per Josep Pla i Carrera
per assolir el grau de Doctor en
Matematiques per la Universitat
de Barcelona

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

L any 1923 David Hilbert introdui el calcul proposicional implicatiu positiu pensat com una estructura algebraica (A,), ens proporciona l estructura anomenada algebra de Hilbert Antoni Monteiro els anys seixanta generalitza aquesta estructura algebraica introduïnt el concepte de pre-algebra de Hilbert La idea intuïtiva d aquesta generalitzacio és que mentre que en l algebra de Hilbert el concepte de veritat està representat per un **element** distingit anomenat 1 absorbent per la dreta en la pre-algebra de Hilbert el conce te le veritat ve donat per un cert sub-conjunt distingit D no buit absorbent per la dreta aquests sub-conjunts distingits D s anomenen sistemes deductius (clàssics)

Aquesta idea intuïtiva es pot traduir algebraicament de la manera seguent en una algebra de Hilbert la relacio definida en A per mitja de

$$x \leq y \quad \text{si, i nomes si} \quad x\ y = 1$$

és una <u>relació d ordre</u> en una pre-algebra de Hilbert, la relacio paral lela

$$x \leq_D y \quad \text{si i nomes si} \quad x\ y \in D$$

és una <u>relació de pre-ordre</u> Per pas al quocient mòdul el pre-ordre aquest es converteix en un ordre D er l i l àlgebra quocient és una algebra de Hilbert

Aquest fet ens permet de relacionar els sistemes deductius classics amb les operacions pre-ordenadores respecte de conjunts pre-ordenadors (Sales [1973]) tal com fou realitzat entre operacions ordenadoras i àlgebras de Hilbert (Sales [1971])

L'any 1930 Alfred Tarski introdueix el concepte d operador consequència Aquest concepte s introdueix axiomàticament i es una aplicació Cn de P(A) en P(A). Un element x de A és una conseqüència del conjunt $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ si i només si $x \in C_n(S)$. En l'article Untersuchungen über den Aussagenkalkul Tarski demostra en el teorema I que l'obtenció dels teoremes del càlcul proposicional a partir d'un sistema d'axiomes X proporciona un operador conseqüència Cn(X). És clar que aquest resultat admet una rèplica en el cas del càlcul de proposicions positiu. Ens limitarem sempre a aquest. En el cas de deduccions finites, és a dir $x \in Cn(X)$ si, i només si existeix un conjunt finit $Y \subseteq X$ tal que $x \in Cn(Y)$ és conegut el següent resultat

$$x \in Cn(\{x_1, \ldots, x_n\})$$

o equivalentment

$$x_1, \ldots, x_n \vdash x$$

si i només si

$$\vdash x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (x_n \rightarrow x) \ldots))$$

Si interpretem $\rightarrow$ com una llei de composició interna en el conjunt A de les proposicions i la designem . tenim que

x es una conseqüència de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ si i només si la proposició $x_1 . (x_2 . \ldots . (x_r . x) \ldots))$ es vera.

Plantejat el problema d'aquesta manera hem trobat un lligam entre el concepte de conseqüència i el concepte "ésser ver". Podem dir:

$$x_1, \ldots, x_n \underset{D}{\vdash} x$$

si i només si

$$x_1 . (x_2 . \ldots . (x_n . x) \ldots)) \in D$$

El que acabem de fer ens permet de construir operadors conseqüència, a partir del sub-conjunt distingit D i de l operac o de l estructura algebraica (A,) Aquesta idea fou portada a terme en Sales [1974] i nosaltres la reprenem aci per aprofundir-la

Les nostres aportacions estan clasificades en tres capitols i cada un d ells consta de 8 paragrafs En ferem un breu resum

En el primer capítol el paràgraf 1 recull els conceptes indispensables per tal de poder relacionar els dos problemes plantejats en el cas concret de les <u>consequències immediates</u> un element x de A és consequència d un sol element y aixo es,

$$y \underset{D}{\longmapsto} x$$

o equivalentment

$$y\ x \in D$$

Les consequencies immediates respecte de D condueixen d una manera natural al concepte d <u>operador de deduccio debil o immediata</u> C_D (def I 1 1) Resulta que una condicio necessaria i suficient per tal que C_D sigui un operador consequencia es que D sigui un <u>sistema pre-ordenador debil</u> respecte de l operació de (A) (teor 1 1 1 Aquest resultat obliga a definir el concepte de sistema pre-ordenador debil (def I 1 4) i d operador consequència (def I 2)

L anterior teorema permet d establir en el paragraf I 2 una aplicació Φ entre el conjunt PO(A) - dels sistemes pre-ordenadors debils de A - i el conjunt $\Delta(P(A)^*)$ - de les clausures definides en $P(A)^* = P(A) - \{\emptyset\}$ Veiem que, en general Φ no es pas exhaustiva puix els operadors consequencia induïts per el concepte de deducció debil són morfismes respecte de les reunions arbitràries i en canvi, el operadors clausura no cal que ho siguin (prop I 2 1)

Un cop analitzada l exhaustivitat de Φ passem a analitzar la injectivitat i trobem que en general la injectivitat falla Això ens porta a introduir el concepte d element factoritzable (def I 2 1) en (A) i a demostrar que l aplicacio Φ es injectiva si i nomes si tot element de A es factoritzable (prop I 2 2)

Fet aixo ens trobem que, en aquestes hipotesis, Φ indueix una bijecció entre el reticle dels sistemes pre-ordenadors de A i la Im Φ Veiem aleshores que Φ és un morfisme d ordre per tant Φ es un morfisme reticular Ara be l estructura reticular amb que cal dotar la Im Φ per tal que es verifiqui aquest isomorfisme es tal que la Im Φ no es pas sub-reticle del reticle de les clausures (prop I 2 3)

Un exemple ens permet d afirmar que, en general, PO(A) no es pas un reticle modular i per tant no pot esser tampoc associatiu (prop I 2 4)

En el paragraf I 3 es fan certes consideracions sobre com estendre un operador consequència - definit en P(A)* - a un operador clausura definit en tot I(A) L extensio mes natural es la que converteix l operador clausura en un operador clausura topològica (def I 1 3)

El paragraf I 4 trencant potser l analisi anterior dona unes notes marginals sobre com són els sistemes pre-ordenadors en certes estructures algebraiques S obtenen resultats bastant generals si l estructura algebraica disposa de certs elements distingits (cor 1 i 2) En el cas concret dels grups s obte que la condicio necessaria i suficient per tal que un sub-conjunt D sigui pre-ordenador es que sigui un sub-grup que contingui els quadrats dels elements del grup (prop I 4 1) Es veu tambe que tot sistema pre-ordenador dèbil es un sub-grup normal (prop I 4 2) pero el reciproc es fals Es comparen els dos conjunts quocients $A/_D$ i $A/_{\equiv_D}$ - induits respectivament pel sub-grup normal i pel pre-ordre - i es veu que coincideixen obtenint-se un grup quocient totalment desordenat (prop I 4 3)

La idea inicial s ha pres analitzant el cas classic però en ell els sistemes deductius - que són pre-ordenadors dèbils i més - son absorbents per la dreta i satisfan el modus ponens Estudiem que significa en el llenguatge dels operadors consequencia la introducció d aquests conceptes Recollim certes condicions necessaries i suficients que es troben en Sales [1974] i en donem d altres que son originals Aquest analisi ocupa els paragrafs I 6 i I 7

S indica tambe i creiem que es un resultat interessant de quina manera la presencia de l absorcio per la dreta i del modus ponens permet d'estendre els operadors consequencia a operadors clausura sobre tot l(A) de forma que deixin d esser operadors clausura topologica Retrobem així el resultat ja classic de lògica les tesis es dedueixen del no-res (Porte [1965])

Tambe trobem una incidència entre el concepte de sistema deductiu (def I 6 2) (via Monteiro) i el concepte de sistema deductiu (via Tarski) que es tot sub-conjunt $S \subseteq A$ tal que $Cn(S) = S$ $(S \neq \emptyset)$ tots sistema deductiu via Monteiro es deductiu via Tarski si i nomes si verifica M P Hi poden haver sistemes deductius via Tarski que no ho siguin via Monteiro

El capítol acaba veient en I 8 que si be tot sistema pre-ordenador permet de definir una relació d equivalència $\equiv_D$ en general el sistema pre-ordenador que la defineix no és classe d equivalència en $A/_{\equiv_D}$ Això ens porta a introduir el concepte de sistema pre-ordenador maximalment tancat (def I 8 1) Es demostra que D es classe d equivalencia en $A/_{\equiv_D}$ si i nomes si D és maximalment tancat (prop I 8 3) A mes resulta que, en presència de l absorcio per la dreta D es maximalment tancat si, i només si, D verifica el modus ponens (props I 8 4 i I 8 5) Això proporciona un altre enfocament i una altra demostració d un resultat obtingut en Sales [1973] S obté també que l absorcio per la dreta equival a que la classe d equivalència engendrada pels elements de D - que es unica - sigui maxima en $(A/_{\leqslant_D} \leqslant_D)$ (props I 8 1 i I 8 2)

Els darrers resultats de I 8 ens diuen que sempre és possible de construir un sistema pre-ordenador maximalment tancat a partir d un sistema pre-ordenador donat D i que la construcció es pot fer de baix a dalt (prop I 8 7) i de dalt a baix (prop I 8 6) en el sentit de Enderton [1972] A fi de veure que els dos mètodes de construccio donen el mateix sistema deductiu cal salvar una dificultat (que consisteix en veure que en la construccio des de baix es pot suprimir la hipòtesi suplementaria $D\ D \subseteq D$ que no es necessaria en la construccio des de dalt) Això es precisament el que s obté en la darrera pagina del primer capitol - generalitzant d aquesta manera un resultat de Sales [1973]

El capitol II preté generalitzar el concepte de deduccio debil o immediata donant el concepte de <u>deducció orta</u> En vistas a aquest fi en el paràgraf II 2 a partir del concepte de <u>sistema pre-ordenador fort</u> (def II 1 1) s introdueix el concepte de <u>deducció forta</u> Hem conseguit donar una caracterització de sistema deductiu fort diferent de la donada per Sales [1974]

A continuació analitz nt el teorema II 2 1 que estableix que una c ndicio suficient per tal que l operador de consequència forta K_D $P(A)^{*} \longrightarrow P(A)$ sigui un operador clausura en $(P(A)^{*}, \leq)$ es que D sigui un conjunt pre-ordenador fort ens sorprèn que no es generalitzi totalment el teorema anàleg relatiu a sistemes pre-ordenadors dèbils i operadors conseqüència dèbils, el qual **afirma que la condició és necessària i suficient** A què és degut que en el cas fort la condició no sigui necessaria? La resposta a aquesta pregunta ens porta a adoptar un de les dues solucions seguents

- o bé abandonem la definicio de sistema pre-ordenador fort donada per Sales [1974] i n adoptem una altra de diferent perfectament precisa que <u>no generalitza</u> la noció de sistema deductiu dèbil - i aixo s allunya dels nostres interessos puix desitgem que tal com passa en el cas dels sistemes deductius classics, els sistemes pre-ordenadors forts siguin sistemes pre-ordenadors dèbils
- o bé renunciem a generalitzar totalment el teor I 1 1

Aquest analisi constitueix el paragraf II 2

En el paragraf II 3, seguint el paral lelisme amb el cas dèbil, introduïm una aplicacio $\overline{\Phi}$ definida entre POF(A) - conjunt dels sistemes pre-ordenadors forts de A - i $\Delta(P(A)^{*})$ - conjunt de les clausures definides en $P(A)^{*}$ Veiem que en general l aplicació $\overline{\Phi}$ no es ni exhaustiva ni injectiva i que una condició necessaria per tal que $\overline{\Phi}$ sigui injectiva és que tot element de A sigui factoritzable Tambe veiem que el reticle $(POF(A), \wedge \vee)$ no és distributiu

En el paragraf II 4 demostrem que, en el cas dels grups un sub-conjunt D és un sistema pre-ordenador fort si i només si és un sub-grup que conte els quadrats dels elements del grup (Aquest resultat es analeg al resultat obtingut en el cas dels sistemes deductius dèbils en grups pero les demostracions en un i altre cas son totalment diferents en el cas fort la demostració es mes 'barroca' i utilitza el fet que afirma que tot subgrup que conte els quadrats és normal)

S anlitza també, fent us d un resultat obtingut per Sales [1973], l associativitat de l operacio i s arriva a la conclusió que pel que fa referència a la logica l associativitat es mes aviat molesta es a dir, no es possible fer logica - en el sentit que es precisa - en un grup

El paragraf II 5 compara les propietats dels operadors C_D i K_D - això es possible puix tot sistema pre-ordenador fort es debil Veiem (prop II 5 2) que K_D no es pas un morfisme respecte de les reunions arbitraries que tota consequencia debil de S es tambe una consequencia forta (prop II 5 1) que tot sistema pre-ordenador fort D defineix un operador consequencia K_D que és un operador consequencia en el sentit de Tarski [1930]

És possible caracteritzar l absorcio per la dreta i el M P per mitja de l operador K_D? Veiem que el M P es pot caracteritzar per mitja de K_D i el resultat es analeg al obtingut en el cas debil pero no així l absorcio per la dreta, puix la caracteritzacio valida en el cas debil es redueix a una condicio suficient (props II 6 1 2 i 3)

El resultat mes important de II 7 estableix que si D és un <u>sistema deductiu fort</u> (def II 7 1), aleshores per tot $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$ $C_{K_D(S)}(S) = K_D(S)$ que ens diu que tot

conjunt de consequencies fortes de S es pot mirar com un conjunt de consequències dèbils de S respecte d un sistema deductiu debil que <u>depen de S</u> Aquest resultat te sentit puix que Sales [1974] demostra que per tot $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ $K_D(S)$ es un sistema deductiu debil En la prop II 7 4 es demostra que si D és un sistema deductiu fort, absorbent per la dreta aleshores D es la intersecció de tots els sub-conjunts de consequencies fortes d un sol element (Aquest resultat es diferent del obtingut en el cas dèbil : allà veiem que D és absorbent per la dreta si i només si D esta contingut en la intersecció de tots els sub-conjunts de consequencies debils d un sol element i si a més D satisfà M P aleshores es dona la igualtat)

El capítol II s acaba en el paragraf II 8 on s estudia la relació d equivalència forta $\sim_D$ (def II 8 1) es una relació d equivalencia intimament vinculada amb el sistema pre-ordenador fort La finalitat del paragraf es d analitzar quines diferències i quines analogies existeixen entre aquesta nova relacio d equivalencia i la relacio d equivalencia induïda pel pre-ordre $\leqq_D$ El primer resultat prova que la relacio d equivalencia forta conte la relacio d equivalència debil Es demostra que aquestes dues relacions son precisament les relacions d equivalencia induïdes en A pels operadors C_D i K_D S obte una condició necessaria i suficient per tal que les dues relacions coincideixin D ella s en dedueix una condició suficient - que s expressa en termes de l operacio (prop pag 5) Aquesta darrera condició es molt interessant puix les algebres de Hilbert les pre-algebres de Hilbert les estructures autodistributives per l esquerra etc la verifican i per altra banda ens insinua ja les anomalies que presentarà - respecte de la logica clàssica - l estudi lògic realitzat en el tercer capítol amb sistemes deductius complets

També en el cas dels grups hi ha igualtat entre les dues relacions d'equivalència però per motius totalment diferents: en els grups intervé la normalitat de D i l'existència d'element invers.

En el cas dels sistemes deductius clàssics D la relació d'equivalència dèbil $\equiv_D$ és una congruència. Aquest resultat no és vàlid si D és només un sistema deductiu dèbil. Una condició suficient per tal que $\equiv_D$ sigui una congruència és que D verifiqui les *lleis del sil·logisme* (Sales [1974]); això dona lloc a introduir els *sistemes deductius semi-complets* (def III 1 6). Hem comparat els sistemes deductius semi-complets amb els sistemes deductius clàssics i hem vist que si bé tot sistema deductiu clàssic és semi-complet, un semi-complet està lluny d'un clàssic. Però si a un sistema deductiu semi-complet li imposem que compleixi la *commutació de premisses* obtenim un *sistema deductiu complet* (def III 1 7) que si bé és diferent d'un sistema deductiu clàssic n'és bastant anàleg.

En el paràgraf III 2 donem un sistema *independent* d'axiomes per a caracteritzar els sistemes deductius complets.

Un resultat veritablement interessant consisteix en haver pogut *caracteritzar la diferència* existent entre els conceptes de sistema deductiu clàssic i sistema deductiu complet: hi ha *tres* propietats usuals dels sistemes clàssics que no són satisfetes pels sistemes complets; aquestes tres propietats són *equivalents*: si un sistema complet *en verifica una és clàssic* i per tant satisfà les altres dues (Prop III 3 3 i pàgs següents).

Una d'aquestes propietats és la que justifica el fet que encara que en el cas clàssic les relacions $\equiv_D$ i $\sim_D$ coincideixin, no sigui així en el cas complet.

El paragraf III 3 acaba donant una caracterització dels sistemes deductius complets en termes de l operador consequencia forta K_D - aixo te sentit puix Sales [1974] estableix que tot sistema deductiu complet es fort

L analogia existent entre els sistemes deductius classics i els sistemes deductius complets ens ha portat a fer logica positiva amb ells - en el sentit de Monteiro [1971] Els cinc darrers paragrafs del capitol III estan dedicats a aquesta tasca

En el paragraf III 4 obtenim una generalització del teorema classic de compacitat i del teorema de la deduccio de Tarski En el cas del sistema classic engendrat per S $D(S)$ el teorema de compacitat ens diu que $x \in D(S)$ si i nomes si existeix un subconjunt finit S_o de S i $x \in D(S_o)$ o equivalentment $S_o\ x \in T$ (on T es el conjunt de les tesis classiques) en el cas complet si $\langle S \rangle$ es el sistema deductiu complet engendrat per S aleshores $x \in \langle S \rangle$ si i nomes si existeix una succesio finita d elements de S s_o tal que $s_o\ x \in T_c$ (on T_c es el conjunt de les tesis completes) La diferencia es essencial puix en el cas classic les premisses que intervenen en la deduccio de x (a partir de S) no es poden repetir (o millor encara no te sentit de repeticio) i en canvi en el cas complet si es poden repetir (Teor III 4 1)

El teorema de la deduccio de Tarski diu que $x \in D(D \cup \{z\})$ si i nomes si $z\ x$ es deduex de D (o equivalentment si i nomes si $z\ x \in D$) No te cap mena de sentit imposar a la premissa z que intervingui, en la deduccio, un nombre de vegades mes gran que 1 Ara be en el cas dels sistemes deductius complets si te sentit És a dir $x \in \langle D \cup \{z\} \rangle$ si i nomes si existeix un nombre natural $n \geq 1$ tal que $z^{(n)}\ x = z\ (z\ (\quad (z\ x) \quad)) \in D$ Aquest teorema generalitza el classic puix en el cas classic $z\ x$ i $z^{(n)}\ x$ són equivalents (Teor III 4 2 nota 1)

Un altre resultat que s obte i que fa q e els sistemes ded cti s corplets millorin els sistemes deductius clàssics es oue n estrictura algebraica mirada com un sistema lògic classic pot esser inconsist nt (això es el conjunt de les tesis cla siques es tot A) i en canvi mirada com in sistema logic complet pot e ser consistent

In el paragraf segient le donat una cara terització dels s stemes d ductius complets i maximals la caracteritzacio general tza l que es dona n el cas l s ic i consteix puix e es recolza en el teo e a de la deducc o en no poder a eg rar q e n 1 (Teor III 5 1)
Un resultat ue al les acar en relacio a b els sistemes ed ct us a imals es q e M es un sist ma l luctiu m x mal clas ic si i nomes si $A/\equiv_M$ te exacta ent dues cl ses es ener litza e el cas complet utilitzant la r lació d equivalencia forta (cor 2) S observa finalm t qie la condicio que car cteritza la maximalitat a partir l un sistema ded ctiu classic es tant forta que, si un s ste a dedu tiu compl t la verifica es maximal i cla sic(Notes 1 i 2)

El par raf III 6 n per et de generalitzar el concepte de sister le cti complet lligat a un el ment (def III 6 1) i l s c e c acter tz c on r s itats s n nalegs als bt gut en el cas cl ssic le gener litzacions són del n te x ti s a la obtingudes en el par graf anterior puix provenen del teore a de la deducc o

En l penultim para raf hem pretes generalitzar el teorema classic D(P) - R(A) on R(A) e el r d c l làssic de A i D(P) es el sistema deductiu clàssic engendrat pels eleme ts de Pierce ns hem vist obligats a generalitzar el concepte d element de Pierce i hem introduït els elements de Pierce en sentit ampli (def III 7 1) Hem demostrat que si ⟨P⟩ es el sistema deductiu complet engendrat pel conjunt P dels elements de lierce en sentit ampli, aleshores

$$R_c(A) \subsetneq \langle P \rangle$$

on $R_c(A)$ es el radical complet No sabem quines relacions existeixen entre $R_c(A)$ i $\langle P \rangle$

El darrer paragraf generalitza, al cas dels sistemes deductius complets els conceptes de sistema irreductible i totalment irreductible i hem demostrat que amb les modificacions pertinents que provindran del teorema de la deducció són valids els resultats que generalitzan els obtinguts en el cas classic

Crec sincerament que no existeix el treball individual i per aixo he volgut redactar aquesta memoria en plural i vull agrair d'una manera expressa l'ajuda, la formació i els consells que d'una manera directa o indirecta han permes la realitzacio del present estudi.

Em cal expressar la meva gratitut a tots i cada un dels meus mestres i d'una manera especial al Dr. Enric Lines i Escardo que fou el primer en encoratjar-me vers l'investigacio.

Els doctors Joaquim Cascante i Davila i Nadal Batle i Nicolau, en desvetllar-me l'interes per les questions de la lògica matematica, han contribuït en certa manera en la realitzacio d'aquest treball.

Els companys i amics del Departament de Calcul de Probabilitats i Estadistica Matematica de la Universitat de Barcelona han enriquit amb la seva ajuda i interes i discussio la present memoria i d'una manera especial Enric Trillas i Ruiz i Francesc Esteva i Masseguer.

Eduard Bonet i Guinó i Francesc Miserachs i Sola en jutjar l'us i l'estil del llenguatge han col·laborat a la claredat de les idees; no hi pot haver ideas clares si el propi llenguatge es fosc.

La Fundacio Juan March en concedirme una beca d'estudis ha possibilitat economicament la realització del present treball.

I d'una manera molt especial al meu mestre Dr. Francesc d'Assis Sales i Vallès; ell ha sigut sens dubte per mitja dels seus suggeriments, de les seves intuïcions, dels seus estimuls l'anima d'aquest treball.

Els errors son meus i a ningu mes cal fer-ne responsable.

Barcelona, Abril 1975

CAPÍTOL I

CONJUNTS PRE-ORDENADORS DÈBILS

I SISTEMES DEDUCTIUS DÈBILS

I 1 Deducció immediata i operadors clausura

Definició I 1 1

Sigui (A) una estructura algebraica. Per cada $D \subseteq A$ no buit definim l operador

$$\Delta_D \quad P(A)^{*} \longrightarrow P(A)$$

per mitjà de

$$\Delta_D(S) = \{x \in A \quad (\exists z)(z \in S \quad i \quad z\ x \in D)\}$$

Un tal operador Δ_D l anomenarem l operador de deducció immediata o dèbil relatiu a D

Direm també que x es una consequencia immediata o dèbil de S respecte de l operador Δ_D si i nomes si $x \in \Delta_D(S)$ o equivalentment que $\Delta_D(S)$ es el conjunt de totes les consequencies immediates o dèbils de S respecte de D

Nota
En la definicio de Δ_D s exclou la possibilitat de que $S = \emptyset$ això queda reflexat en el terme $P(A)^{*}$ que per conveni significa $P(A) - \{\emptyset\}$

Mes endavant veurem si es o no possible d estendre la definició de Δ_D a tot P(A)

Definició I 1 2

Donat un conjunt A una aplicació

$$C \quad P(A) \longrightarrow P(A)$$

tal que

C1 $S \subseteq C(S)$ per tot $S \subseteq A$,

C2 $S_1 \subseteq S_2$ implica $C(S_1) \subseteq C(S_2)$ per tot parell S_1 S_2 de sub-conjunts de A

C3 $C(C(S)) - C(S)$ per tot $S \subseteq A$

l anomenarem un <u>operador consequencia en A</u>

C(S) es <u>el conjunt de les consequencies de S per mitja de l operador C</u> (Tarski [1930], Rasiowa-Sikorski [1957])

Definició I 1 3

Donat un conjunt ordenat (A $\leqslant$) tota aplicacio

$$\delta \quad A \longrightarrow A$$

que verifiqui

c1 $x \leqslant \delta x$ per tot x de A

c2 $x \leqslant y$ implica $\delta x \leqslant \delta y$ per tot parell d elements x y de A

c3 $\delta(\delta x) = \delta x$ per to x de A

s anomena un <u>operador clausura en (A, $\leqslant$)</u> (Birkhoff [1948])

En el cas que A poseeixi element minim 0 aleshores es diu que δ es una <u>clau ura topologica</u> si a mes de c1 c2 c3 es verifica

c4 $\delta 0 = 0$

(Kuratowski [1961])

Per tant, tot operador consequència en A és un operador clausura en (P(A) $\subseteq$) però no hi ha cap rao per a que sigui una clausura topologica

Aixo fa que el seguent abus de llenguatge sigui admissible $\not t$eta aplicacio

$$C \quad P(A)^{*} \longrightarrow P(A)$$

que verifiqui C1 C2 i C3 s anomenarà també un operador conseqüència en A

Definicio I 1 4

Donada una estructura algebraica (A)
i un cert sub-conjunt D de A direm
que D és un <u>sistema pre-ordenador respecte de l operació</u> si i nomes si
verifica

PO1 $x\ x \in D$ per tot x de A

PO2 si $x\ y \in D$ i $y\ z \in D$ aleshores $x\ z \in D$ per tota terna x y z d elements de A

(Sales [1973])

Per questions de claredat sobretot en el capítol II els sistemes pre-ordenadors introduïts en la definició I 1 4 els anomenarem <u>sistemes pre-ordenadors debils</u>

És obvi que si $A \neq \emptyset$ fet que des d ara admetrem $D \neq \emptyset$ ja que $\{z \quad z = x\ x \quad \text{per tot } x \text{ de } A\} \subseteq D$

És clar tambe que la relació definida en A per mitja de

$$x \leqslant_D y \qquad \text{si i nomes si} \qquad x\ y \in D$$

es un pre-ordre si i nomes si D es un sistema pre-ordenador respecte de l operacio

Tambe es sabut que la relacio definida en A per

$$x \equiv_D y \qquad \text{si i nomes si} \qquad x\ y \in D \text{ i } y\ x \in D$$

(o equivalentment si i només si $x \leqslant_D y$ i $y \leqslant_D x$) és una relació d'equivalència si i només si D és pre-ordenador. El conjunt quocient $A/_{\leqslant_D}$ o $A/_{\equiv_D}$ està ordenat per mitja de la relació d'ordre

$$[x]_D \leqslant_D [y]_D \text{ si i només si } x \leqslant_D y$$

on $[x]_D$, $[y]_D$ designen les classes de $A/_{\leqslant_D}$ de representants x i y respectivament (Fuchs [1963]).

Més endavant analitzarem en quines condicions el conjunt pre-ordenador D és classe d'equivalència respecte de la relació d'equivalència per ell induïda (veure I.8).

El teorema que segueix ens diu que una condició necessària i suficient per a que Δ_D sigui un operador consequència en A es que D sigui un sistema pre-ordenador. Abans d'enunciar-lo i de demostrar-lo convenim d'escriure

$$\Delta_D(x) \quad \text{en lloc de} \quad \Delta_D(\{x\})$$

i en general, per tot conjunt finit $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$

$$\Delta_D(x_1, \ldots, x_k) \quad \text{en lloc de} \quad \Delta_D(\{x_1, \ldots, x_k\})$$

Teorema I.1.1. (Sale [1971])

Δ_D es una clausura en $(P(A)^*, \subseteq)$ si i només si D es un sistema pre-ordenador respecte de l'operació.

En efecte:

C2. $S_1 \subseteq S_2$ implica $\Delta_D(S_1) \subseteq \Delta_D(S_2)$ ja que $y \in \Delta_D(S_1)$ si i només si $(\exists z)(z \in S_1 \text{ i } z\,y \in D)$ d'on per hipòtesi $(\exists z)(z \in S_2 \text{ i } z\,y \in D)$ i per tant $y \in \Delta_D(S_2)$

C1 $\Delta_D(S) \supseteq S$ per tot S de $P(A)^*$ si i només si per tot x de A $x\,x \in D$ ja que

- si fem $S=\{x\}$ aleshores $\{x\} \subseteq \Delta_D(x)$ i per definició tenim que $x\,x \in D$. Això val per qualsevol x de A
- si $x\,x \in D$ per tot x de A i $y \in S$ com que $S \subseteq A$ tenim que $y\,y \in D$ d'on $y \in \Delta_D(S)$ i això val per tot y de S. Així doncs $S \subseteq \Delta_D(S)$

C3 $\Delta_D(\Delta_D(S)) = \Delta_D(S)$ per tot S de $P(A)^*$ si i només si per tota terna $x\ y\ z$ d'elements de A, tenim que

$$x\,y \in D \text{ i } y\,z \in D \text{ impliquen } x\,z \in D$$

ja que

- si $x\,y \in D$ i $y\,z \in D$ tenim que $y \in \Delta_D(x)$ i $y\,z \in D$ d'on $z \in \Delta_D(\Delta_D(x)) = \Delta_D(x)$ i per tant $x\,z \in D$
- si $z \in \Delta_D(\Delta_D(S))$ aleshores tenim que $y\,z \in D$ per un cert y de $\Delta_D(S)$. Existeix doncs un cert x de S tal que $x\,y \in D$ i $y\,z \in D$. Per hipòtesi $x\,z \in D$. Això ens diu que $z \in \Delta_D(S)$. Aquest resultat val per tot z de $\Delta_D(\Delta_D(S))$ i per C1 tenim que $\Delta_D(\Delta_D(S)) = \Delta_D(S)$

I 2 L'aplicació Φ

En aquest apartat analitzarem l'aplicació Φ definida sobre el conjunt PO(A) dels conjunts pre-ordenadors de A i amb valors en $\Delta(P(A)^*)$ que designa el conjunt de totes les clausures que es poden definir sobre $P(A)^*$

És a dir tenim que

$$\Phi \quad PO(A) \longrightarrow \Delta(P(A)^{*})$$

definida per mitjà de

$$\text{per cada } D \in PO(A) \qquad \Phi(D) = \Delta_D$$

Proposició I 2 1

> La imatge $\Phi\langle PO(A)\rangle$ esta inclosa en el sub-conjunt de $\Delta(P(A)^{*})$ format per les clausures que son morfismes respecte de les reunions arbitraries

En efecte

A $\quad \Delta_D(S) = \bigcup_{x \in S} \Delta_D(x)$ ja que

$z \in \Delta_D(S)$ si i nomes si $(\exists x)(x \in S \text{ i } x\ z \in D)$

si i nomes si, $(\exists x)(x \in S \text{ i } z \in \Delta_D(x))$

si i nomes si, $z \in \bigcup_{x \in S} \Delta_D(x)$

B $\quad \Delta_D(\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in I} S_i} \Delta_D(x) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in S_i} \Delta_D(x) =$

$= \bigcup_{i \in I} \Delta_D(S_i)$

ja que $z \in \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in I} S_i} \Delta_D(x)$

si i nomes si $(\exists x)(x \in \bigcup_{i \in I} S_i \text{ i } z \in \Delta_D(x))$

si i nomes si $(\exists x)((\exists i)(i \in I \text{ i } x \in S_i) \text{ i } z \in \Delta_D(x))$

si i nomes si $(\exists x)(\exists i)(i \in I \text{ i } x \in S_i \text{ i } z \in \Delta_D(x))$

si i nomes si $(\exists i)(i \in I \text{ i } (\exists x)(x \in S_i \text{ i } z \in \Delta_D(x)))$

si i nomes si $(\exists i)(i \in I \text{ i } z \in \Delta_D(S_i))$

si i nomes si $z \in \bigcup_{i \in I} \Delta_D(S_i)$

Aixi doncs l aplicació Φ en general no es pas exhaustiva puix que $P(A)^{*}$ admet operadors clausura que no són pas morfismes respecte de les reunions arbitraries

Exemple Fem $A = \mathbb{R}$ i considerem la clausura topològica

$$\mathrm{Cl} \quad P(A)^{*} \longrightarrow P(A)$$

definida per

$$P(A)^{*} \ni X \qquad \mathrm{Cl}\ X = \bar{X}$$

Sigui ara $B = (0\ 1)$ Tindrem que

$$\bigcup_{x \in B} \{x\} = \bigcup_{x \in B} \overline{\{x\}} = B$$

En canvi

$$\overline{\bigcup_{x \in B} \{x\}} = \bar{B} = [0\ 1]$$

Aquest resultat ens porta d ura manera natural a considerar si donada una estructura algebraica (A) i una clausura δ en $(P(A)^{*} \subseteq)$ que sigui morfisme respecte de les reunions arbitraries es possible trobar un conjunt pre-ordenador D (respecte de l operacio) tal que

$$\Phi(D) = \Delta_D = \delta$$

Si analitzem el sequent exemple veiem que en general no existeix cap conjunt pre-ordenador $D \subsetneq A$ tal que $\Phi(D) = \Delta_D = \delta$

L'estructura (A) on A es el conjunt $A = \{x\ y\ z\}$ i l operació ve donada per la taula

	x	y	z
x	y	x	z
y	z	y	y
z	x	z	y

contế com a unics sistemes pre-ordenadors (respecte de l operacio de A) els sub-conjunts $D_1 = \{y\}$ i $D_2 = A$ Considerem ara en $P(A)^*$ l operador clausura δ definit per

$$\delta(x) = \{x\ y\}$$
$$\delta(y) = \{y\}$$
$$\delta(z) = \{y, z\}$$
$$\delta(X) = \bigcup_{x \in X} \delta(x) \quad \text{per tot } X \text{ de } P(A)^*$$

Cal veure que l operador clausura δ es di^erent dels operadors clausura Δ_{D_1} i Δ_{D_2} (que son els unics operadors clausura de $P(A)^*$ que provenen de sistemes pre-ordenadors de A) Però tenim que

$$\Delta_{D_1}(x) = \{x\} \neq \delta(x)$$

i

$$\Delta_{D_2}(x) = A \neq \delta(x)$$

Aixo acaba la demostració

Nota

Donada una clausura en $P(A)^*$ que sigui morfisme respecte de les reunions arbitraries es possible de definir una operació en A de manera que existeixi un conjunt pre-ordenador D tal que la clausura sigui precisament Δ_D?

A fi de respondre a aquesta pregunta considerem $A = \{x\ y, z\}$ i $\delta(x) = \{x\ y\}$ $\delta(y) = \{y\}$ $\delta(z) = \{x\ y\ z\}$ i per tot X de $P(A)^*$ $\delta(X) = \bigcup_{x \in X} \delta(x)$

Desitgem definir l operacio i el sistema pre-ordenador D de manera que

$$x\,x \quad x\,y, \; y\,y \quad z\,x \quad z\,y \quad z\,z \in D$$

i

$$x\ z\quad y\ x\quad y\ z \notin D$$

Podem fer D igual a un conjunt unitari per exemple $D = \{x\}$ i, aleshores definir t t = x si, i només si t t ha de pertànyer a D i t t $\neq$ x en els casos restants (t i t són variables que designen els objectes de A)

D aquesta manera hem definit una operació i un sistema pre-ordenador D tals que

$$\delta = \Delta_D$$

Ara be la <u>no unicitat</u> de i de D ens diu que plantejar aquest problema amb tanta generalitat no condueix a cap resultat interessant

Nota

La nostra definició I 1 2 d operador consequència es mes dèbil que la definició donada per Tarski [1930] ell defineix un operador consequència com un operador que verifiqui C1 i C3 però dona una condició que implica la nostra condició C2 Ara bé els nostres operadors de deducció immediata en verificar la proposició I 2 1 verifiquen la condició de Tarski i per tant, són operadors consequència en el sentit de Tarski
La prop I 2 1 es més forta que la condició de Tarski

Un cop analitzada l exhaustivitat de Φ, cal estudiar si Φ es o no injectiva És a dir cal veure si

$$D_1 \neq D_2 \quad \text{implica} \quad \Delta_{D_1} \neq \Delta_{D_2}$$

Abans de respondre a aquesta qüestió donarem la seguent definició

Definició I 2 1

En una estructura algebraica (A) un element z de A és <u>factoritzable</u> i i només si existeix un parell d elements de A, x i y tals que

$$z = x\ y$$

Ara veurem en primer lloc que si (A) admet un element no factoritzable aleshores Φ no és pas injectiva

En efecte

Sigui D_1 un sistema pre-ordenador de (A) i sigui z un dels elements no factoritzables de (A) Aleshores poden donar-se dues possibilitats (a) $z \in D_1$, (b) $z \notin D_1$

(a) Si $z \in D_1$ sigui $D_2 = D_1 - \{z\}$

A D_2 és un sistema pre-ordenador ja que

PO1 $x\ x \in D_1$, però $x\ x \neq z$ d on $x\ x \in D_2$

PO2 si $x\ y \in D_2$ i $y\ t \in D_2$ aleshores $x\ y \in D_1$ i $y\ t \in D_1$ i per tant $x\ t \in D_1$ però $x\ t \neq z$ d on $x\ t \in D_2$

B $\Delta_{D_1} = \Delta_{D_2}$ ja que

$y \in \Delta_{D_1}(x)$ si i només si $x\ y \in D_1$ (però $x\ y \neq z$) d on $x\ y \in D_2$ per tant $y \in \Delta_{D_2}(x)$

D altra banda $y \in \Delta_{D_2}(x)$ si i només si $x\ y \in D_2 \subsetneq D_1$ d on $y \in \Delta_{D_1}(x)$

Això val per tot x de A i per tant per tot $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ (cal aplicar la part A de la prop I 2 1)

(b) Si $z \notin D_1$ fem $D_2 = D_1 \cup \{z\}$

El raonament que serveix per a demostrar que D_2 és pre-ordenador i que $\Delta_{D_1} = \Delta_{D_2}$ es analeg al seguit en (a)

Suposem ara que tot z de A és factoritzable aleshores la aplicació Φ es injectiva

En efecte

A $y \in \Delta_D(x)$ si i només si $z \in D$ on $z = x\ y$

B Si $D_1 \neq D_2$ aleshores existeix un $z \in D_1$ i $z \notin D_2$ (o al revés) Però z es factoritzable per tant $z = x\ y$ $x \in A$ i $y \in A$ i si $z \in D_1$ tenim que

$$y \in \Delta_{D_1}(x)$$

i com que $y \notin \Delta_{D_2}(x)$ (ja que $z \notin D_2$) $\Delta_{D_1} \neq \Delta_{D_2}$

Hem demostrat, doncs la seguent proposició

Proposicio I 2 2

L aplicació Φ és injectiva si i nomes si per tot z de A existeixen dos elements x y de A tals que $x\ y = z$

Això comporta el seg ent resultat L aplicació

$$\Phi \quad PO(A) \longrightarrow Im\ \Phi \subseteq \Delta(P(A)^{*})$$

és una bijecció si i nomes si (A) es tal que tot element z de A es factoritzable

Proposició I 2 3

L aplicació Φ $PO(A) \longrightarrow Im\ \Phi$ es un isomorfisme reticular si dotem a la Im Φ d una estructura convenient de reticle

Nota Cap de les dues operacions que cal introduir en la Im Φ es la induïda per les ja existents en $\Delta(P(A)^*)$

A fi de demostrar aquesta proposició recordarem els seguents lemes

Lema I 2 1

(a) La intersecció de sistemes pre-ordenadors de A (respecte de l operació) és un sistema pre-orderador de A (respecte de l operacio)

(b) Si $B \subseteq A$ en virtut de (a) e possible parlar de siste a pre-orderador engendrat per B Ês la intersecció de tots els sistemes pre-ordenadors de A que contenen a B (La col lecció no es pas buida ja que A n es un)

(c) $(PO(A) \wedge, \vee)$ es un reticle si

$$D_1 \wedge D_2 = D_1 \cap D_2$$

i

$$D_1 \vee D_2 = \bigwedge\{D \quad D \in PO(A) \text{ i } D_i \subseteq D \quad i=1\ 2\}$$

(Ward [1940])

Lema I 2 2

L aplicació Φ $PO(A) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\Phi$ és un isomorfisme d ordre

En efecte

Si $D_1 \subseteq D_2$ aleshores per tot $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ tenim que $z \in \Delta_{D_1}(S)$ si i nomes si $(\exists x)(x \in S \text{ i } x\ z \in D_1)$ d on $(\exists x)(x \in S \text{ i } x\ z \in D_2)$ Per tant $z \in \Delta_{D_2}(S)$

Hem demostrat, doncs, que $D_1 \subseteq D_2$ implica $\Delta_{D_1} \leq \Delta_{D_2}$

Lema I 2 3

Tot isomorfisme d ordre entre reticles és un isomorfisme reticular

La demostracio es pot veure per exemple en Dubreil Dubreil-Jacotin [1964]

Tot això ens porta a definir en Im Φ les operacions $\wedge$ i $\vee$ per mitja de

$$\Delta_{D_1} \wedge \Delta_{D_2} = \Phi(D_1 \wedge D_2) = \Delta_{D_1 \wedge D_2}$$

i

$$\Delta_{D_1} \vee \Delta_{D_2} = \Phi(D_1 \vee D_2) = \Delta_{D_1 \vee D_2}$$

Això demostra la proposicio I 2 3

Ens cal pero justificar la nota de la proposicio I 2 3

Lema I 2 4

Sigui $(A \wedge, \vee)$ un reticle

(a) La interseccio de clausures, definida puntualment, és una clausura

(b) La reunió de clausures, definida puntualment en general no es pas una clausura

En efecte :

(a) C1 $(\delta_1 \wedge \delta_2)(x) = \delta_1(x) \wedge \delta_2(x) \geq x \wedge x = x$

C2 $x \leq y$ implica $\delta_1(x) \leq \delta_1(y)$ i $\delta_2(x) \leq \delta_2(y)$ i, per tant, $(\delta_1 \wedge \delta_2)(x) \leq (\delta_1 \wedge \delta_2)(y)$

C3 Per C1 sabem que

$$(\delta_1 \wedge \delta_2)^2(x) \geq (\delta_1 \wedge \delta_2)(x)$$

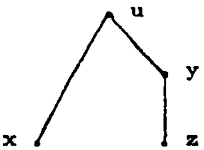
Cal veure doncs que es verifica la desigualtat en sentit contrari

$$(\delta_1 \wedge \delta_2)(\delta_1 \wedge \delta_2)(x) \leq \delta_i(\delta_i(x)) = \delta_i(x) \quad i = 1,2$$

D on

$$(\delta_1 \wedge \delta_2)^2(x) \leq \delta_1(x) \wedge \delta_2(x) = (\delta_1 \wedge \delta_2)(x)$$

(b) Per a veure que la reunio de dues clausures no és, en general una clausura n'hi ha prou amb considerar l'exemple seguent



$\delta_1(x) = x \qquad \delta_2(x) = x$
$\delta_1(z) = y \qquad \delta_2(z) = z$
$\delta_1(y) = y \qquad \delta_2(y) = u$
$\delta_1(u) = u, \qquad \delta_2(u) = u$

És obvi que $(\delta_1 \vee \delta_2)^2 \neq \delta_1 \vee \delta_2$ ja que

$$(\delta_1 \vee \delta_2)(z) = y \vee z = y$$
$$(\delta_1 \vee \delta_2)^2(z) = (\delta_1 \vee \delta_2)(y) = y \vee u = u$$

Aquest lema ens diu que $\Delta_{D_1} \vee \Delta_{D_2}$ no pot pas esser igual a $\Delta_{D_1} \cup \Delta_{D_2}$ (on $(\Delta_{D_1} \cup \Delta_{D_2})(S) = \Delta_{D_1}(S) \cup \Delta_{D_2}(S)$) (Veure nota 3 pag 16)

Ara bé, $\Delta_{D_1} \cap \Delta_{D_2}$ si es una clausura per tant pot ocorrer que

$$\Delta_{D_1} \cap \Delta_{D_2} = \Delta_{D_1} \wedge \Delta_{D_2} = \Phi(D_1 \wedge D_2)$$

La dificultat rau en el fet de que és exigir molt que la intersecció de dues clausures associades a sistemes pre-ordenadors de (A) sigui tambe una clausura associada a un sistema pre-ordenador El seguent exemple ens mostra que aquesta presumpcio és falsa

Considerem el conjunt $A = \{x, y, z, t\}$ amb l operació donada per la taula

	x	y	z	t
x	x	y	y	t
y	z	x	y	t
z	z	z	x	t
t	t	t	t	x

Els conjunts $D_1 = \{x\ y\}$ i $D_2 = \{x, z\}$ són evidentment, sistemes pre-ordenadors de (A)

És obvi que si $S = \{x\ z\}$ aleshores

$$y \in \Delta_{D_1}(S) \cap \Delta_{D_2}(S)$$

ja que $x\ y = y \in D_1$ i $z\ y = z \in D_2$ però en canvi $D_1 \cap D_2 = \{x\}$, i

$$y \notin \Delta_{D_1 \cap D_2}(S)$$

ja que $v\ y = x$ si, i només si, $v = y$ però $y \notin S$

Aixo acaba la demostració de la proposició I 2 3

Notes

1 És obvi que $\Delta_{D_1} \wedge \Delta_{D_2} = \Phi(D_1 \wedge D_2) = \Delta_{D_1 \wedge D_2}$ $\subseteq \Delta_{D_1} \cap \Delta_{D_2}$

ja que

$z \in \Delta_{D_1 \cap D_2}(S)$ si, i només si $(\exists x)(x \in S$ i $x\ z \in D_1 \cap D_2$

si i nomes si $(\exists x)(x \in S$ i $x\ z \in D_1$ i $x\ z \in D_2)$

D on $(\exists x)(x \in S$ i $x\ z \in D_1)$ i $(\exists x)(x \in S$ i $x\ z \in D_2)$

2 Malgrat la nota 1 $\Delta_{D_1 \cap D_2}(x) = \Delta_{D_1}(x) \cap \Delta_{D_2}(x)$,

ja que $z \in \Delta_{D_1}(x) \cap \Delta_{D_2}(x)$ implica $x\ z \in D_1$ i $x\ z \in D_2$, d on $x\ z \in D_1 \cap D_2$ i per tant $z \in \Delta_{D_1 \cap D_2}(x)$

3 En general, ni $\Delta_{D_1} \cup \Delta_{D_2}$, ni $\Delta_{D_1 \cup D_2}$ són clausures,

però en canvi

$$(\Delta_{D_1} \cup \Delta_{D_2})(S) = \Delta_{D_1 \cup D_2}(S),$$

ja que

$z \in (\Delta_{D_1} \cup \Delta_{D_2})(S)$ si, i només si $z \in \Delta_{D_1}(S)$ ó $z \in \Delta_{D_2}(S)$

si i només si $(\exists x)(x \in S$ i $x\, z \in D_1)$ ó $(\exists x)(x \in S$ i $x\, z \in D_2)$

si, i només si $(\exists x)(x \in S$ i $x\, z \in D_1 \cup D_2)$

si, i només si $z \in \Delta_{D_1 \cup D_2}(S)$

4 Tampoc la reunió de clausures definida en la Im Φ no es la restricció de la reunió de clausures existent en el reticle $\Delta(P(A)^*)$

Segons Ward [1940] si tenim un inf-semi-reticle complet que conte el màxim aleshores la reunió de dos objectes del inf-semi-reticle es defineix per mitjà de la seguent expressió

$$x \vee y = \bigwedge_{z \in B} z \quad \text{on } B = \{t \quad t \geqslant x \text{ i } t \geqslant y\}$$

Aleshores s obte un reticle (És obvi que aquesta definició és vàlida per reunions arbitràries i el reticle que s obte és complet)

En el nostre cas tenim l inf-semi-reticle complet $(\Delta(P(A)^*), \cap)$ que conté el màxim, que es precisament, Δ_A i per tant resulta esser una clausura associada a un sistema pre-ordenador de $(A \quad)$

L operació que fa d aquest inf-semi-reticle complet un reticle complet és, com ja hem indicat, la seguent :

$$\bigvee_{i \in I} \delta_i = \bigwedge_{\delta \in B} \delta, \quad \text{on } B = \{\delta \in \Delta(P(A)^*) \quad \delta > \delta_i \quad i \in I\}$$

En la Im Φ tenim definida l operació

$$\bigvee_{i \in I} \Delta_{D_i} = \Phi(\bigvee_{i \in I} D_i)$$

En general aquestes dues operacions no coincideixen pas, i això no es rar si tenim en compte l explicitació de la nota de la prop I 2 3 És a dir la intersecció de clausures associades a sistemes pre-ordenadors no ha d esser forçosament una clausura associada a un sistema pre-ordenador mentre que la reunio de clausures de la Im Φ sí que ha d esser una clausura associada a un sistema pre-ordenador

L exemple que segueix tanca la discussió es considera el conjunt $A = \{x\ y, z\ t\}$ proveït de l operació donada per la taula

	x	y	z	t
x	x	z	t	t
y	t	x	y	t
z	t	t	x	t
t	t	t	t	x

i aleshores els conjunts $D_1 = \{x,y\}$ i $D_2 = \{x,z\}$ són sistemes pre-ordenadors de (A,)

Les clausures associades a D_1 i a D_2 que anomenem, respectivament Δ_1 i Δ_2, verifiquen :

$$\Delta_1(x) = \{x\} \quad \Delta_1(y) = \{y\ z\}, \quad \Delta_1(z) = \{z\}, \quad \Delta_1(t) = \{t\},$$
$$\Delta_2(x) = \{x,y\}, \quad \Delta_2(y) = \{y\}, \quad \Delta_2(z) = \{z\}, \quad \Delta_2(t) = \{t\}$$

i, com que són morfismes respecte de les reunions arbitràries, queden definides per tot arreu

Considerem ara la clausura mes petita d entre les més grans que Δ_1 i Δ_2 ; l anomenarem δ

A fí de construir-la considerem l aplicacio f reunió de Δ_1 i de Δ_2 , es a dir, considerem l aplicació

$$f \quad P(A)^{*} \longrightarrow P(A),$$

definida per mitjà de

$$\begin{array}{lll}
f(\{x\}) = \{x\ y\}, & f(\{x,y\}) = \{x,y,z\} & f(\{x,v,z\}) = \{x\ y,z\}, \\
f(\{y\}) = \{y,z\}, & f(\{x\ z\}) = \{x\ y\ z\}, & f(\{x,y,t\}) = A \\
f(\{z\}) = \{z\}\ , & f(\{x\ t\}) = \{x\ y\ t\}, & f(\{x\ z\ t\}) = A, \\
f(\{t\}) = \{t\}\ , & f(\{y\ z\}) = \{y\ z\}\ , & f(\{y\ z\ t\}) = \{y,z\ t\}, \\
 & f(\{y\ t\}) = \{y,z\ t\} & f(A) = A \\
 & f(\{z\ t\}) = \{z\ t\} &
\end{array}$$

És facil de comprovar que $f \geq \Delta_1$ i $f \geq \Delta_2$ però en canvi no és pas una clausura, ja que

$$f^2(\{x\}) \neq f(\{x\}) \quad \text{i} \quad f^2(\{x\ t\}) \neq f(\{x\ t\})$$

Definim doncs, $\delta = f$, per tot $X \in P(A)^* - \{\{x\}, \{x,t\}\}$ i $\delta(\{x\}) = \{x\ y\ z\}$ i $\delta(\{x\ t\}) = A$

D aquesta manera hem construït la més petita de les clausures que contenen a Δ_1 i a Δ_2

És obvi que no existeix cap sistema pre-ordenador D de (A,) tal que $\delta = \Delta_D$ puix que si existís tindriem que $\Delta_D(x) = \{x\ y\ z\}$ i per tant, $x\ z = t \in D$ i $x\ y = z \in D$ i $x\ x = x \in D$ d on $D \supseteq \{x\ z\ t\}$ D altra banda, $\Delta_D(y) = \{y\ z\}$ i per tant, $y\ z = y \in D$ Tenim, doncs que $D = A$ però aleshores $\delta = \Delta_A$ i com que $\Delta_A(z) = A \neq \{z\} = \delta(\{z\})$ el sistema pre-ordenador D no existeix

Proposició I 2 4

> El reticle $(PO(A), \wedge, \vee)$, en general, no és modular i, per tant, tampoc no és associatiu

En efecte

Considerem el conjunt $A = \{x,y\ z,t\}$, proveït de l operacio

	x	y	z	t
x	x	z	z	z
y	y	x	z	z
z	t	t	x	z
t	t	t	t	x

Els conjunts $D_1=\{x\}$ $D_2=\{x\ y\}$, $D_3=\{x,z\}$, $D_4=\{x,t\}$ són pre-ordenadors respecte de l operació

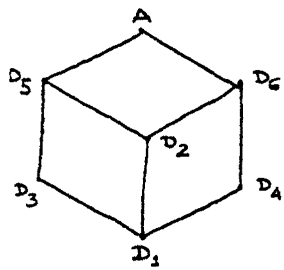
Construim ara $D_2 \vee D_3$ $D_2 \vee D_4$ i $D_3 \vee D_4$

i) $D_3 \vee D_4$ conte a D_3 i a D_4 i per tant, a y z i a z x i com que desitgem que $D_3 \vee D_4$ sigui un sistema pre-ordenador cal que y $x = y \in D_3 \vee D_4$ D on $D_3 \vee D_4 = A$

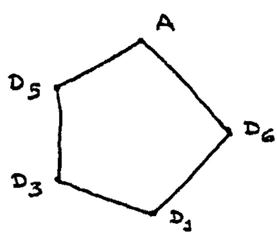
ii) $D_2 \vee D_3 = D_2 \cup D_3$, ja que $D_2 \cup D_3$ és un sistema pre-ordenador

iii) $D_2 \vee D_4 = D_2 \cup D_4$ ja que $D_2 \cup D_4$ és un sistema pre-ordenador

Si anomenem D_5 a $D_2 \vee D_3$ i D_6 a $D_2 \vee D_4$ obtenim el següent reticle



Aquest reticle no és pas modular ja que conté un pentàgon



Aixo acaba la demostració (Szász [1971])

En la prop I 2 1 hem vist que $\Phi\langle PO(A)\rangle$ està format per clausures que són morfismes respecte de les reunions arbitraries Què passa amb les interseccions?

Proposició I 2 5

Si D es un sistema pre-ordenador respecte de l operació tenim que

$$\Delta_D\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) \subsetneq \bigcap_{i\in I} \Delta_D(S_i)$$

i en general no es dona pas la igualtat

En efecte

A $z \in \Delta_D\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right)$ si i nomes si $(\exists x)(x \in \bigcap_{i\in I} S_i$ i $x\ z \in D)$ si i nomes si $(\exists x)(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in S_i$ i $x\ z \in D)$ D on $(\forall i)(i \in I \Rightarrow (\exists x)(x \in S_i$ i $x\ z \in D))$ que significa que $(\forall i)(i \in I \Rightarrow z \in \Delta_D(S_i))$ d on resulta que $z \in \bigcap_{i\in I} \Delta_D(S_i)$

B Considerem ara el conjunt $A = \{x, y\ z\}$ proveït de l operacio

	x	y	z
x	y	x	z
y	z	y	y
z	x	z	y

El conjunt $D = \{y\}$ es un sistema pre-ordenador de $(A, \ )$ Tenim que

$$\Delta_D(x, y) = \{x, y, z\},$$
$$\Delta_D(x\ z) = \{x, z\},$$

i per tant

$$\Delta_D(x\ y) \cap \Delta_D(x\ z) = \{x\ z\}$$

i, d altra banda,

$$\Delta_D(x) = \Delta_D(\{x\ y\} \cap \{x, z\}) = \{x\}$$

I 3 Extensió de Δ_D a P(A)

Si volem estendre Δ_D a P(A) hem de fer-ho de manera que, si $S_1 \subseteq S_2$, aleshores $\Delta_D(S_1) \subseteq \Delta_D(S_2)$

Per tant cal que

$$\Delta_D(\emptyset) \subseteq \Delta_D(x),$$

per tot x de A

Una possibilitat immediata es

$$_D(\emptyset) = \emptyset,$$

i si $\bigcap_{x \in A} \Delta_D(x) = \emptyset$ en virtut de la prop I 2 5, és l unica extensió possible (si volem que la citada proposicio es conservi un cop s hagi estes l operador Δ_D)

Suposem ara que $\bigcap_{x \in A} \Delta_D(x) \neq \emptyset$ És clar que podem definir $\Delta_D(\emptyset) = T$ sempre que es verifiqui

$$\text{(i)} \qquad T \subseteq \bigcap_{x \in A} \Delta_D(x)$$

i

$$\text{(ii)} \qquad \Delta_D(T) = T$$

Pot semblar que aquestes condicions són molt restrictives (i potser ho són), però més endavant veurem que, si D es un sistema pre-ordenador absorbent per la dreta i verifica el 'modus ponens , aleshores se ns obren noves possibilitats

A fi que l extensió de Δ_D a P(A) sigui vàlida per tot sistema pre-ordenador D definim

$$\Delta_D(\emptyset) = \emptyset \ ;$$

obtenim així una clausura topològica (Kuratowski [1966])

Això ens permet de definir una topologia en A, intimament vinculada a D i a l operacio definida en A

Un tancat de A es un sub-conjunt $T \subseteq A$ tal que

$$\Delta_D(T) = T$$

Aquest problema s aparta de l interès immediat d aquest treball i no l aprofundirem

Nótes

1 Si bé de moment, hem donat l extensio que permet d introduir una topologia, mes lluny veurem que això s aparta dels interessos de la lògica

2 En la definició I 1 3 hem definit com a clausura topològica tot operador δ sobre un conjunt ordenat $(A, \leq)$ que cumpleixi C1, C2 C3 i C4 quan generalment, el concepte de clausura topològica es defineix en reticles $(A, \wedge, \vee)$ i aleshores es substitueix la condició C2 per la condició (Kuratowski [1966] i Rasiowa-Sikorski [1957])

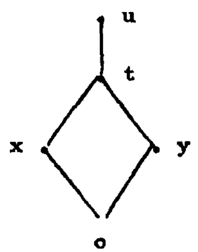
C2 $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y$, per tot parell $x\ y \in A$

És clar que

C1, C2 , C3 i C4 impliquen C1, C2, C3 i C4

però, en general, el recíproc no és pas cert

Considerem el reticle definit per la figura adjunta



En ell es considera l operador clausura

$$\delta 0 = 0 \qquad \delta x = x, \qquad \delta y = y \qquad \delta t = u, \qquad \delta u = u$$

És clar que δ es una clausura topològica en el sentit de la definició I 1 3 pero en canvi no ho es en el sentit de Kuratowski En efecte

$$x \vee y = t \quad \text{i} \quad \delta(x \vee y) = \delta t = u$$

i

$$\delta x \vee \delta y = x \vee y = t$$

Aixi resulta que la definició introduïda en I 1 no és un reflex massa exacte del concepte usual de clausura topologica (si be es el mes òptim que es pot donar en un conjunt ordenat que no sigui reticle)

Malgrat tot aixo els operadors Δ_D que hem introduït són operadors clausura en $(P(A), \cap, \cup)$ que és un reticle - pero en virtut de la prop I 2 1 verifiquen C2 i molt mes

Per tant resumint tot el que ha estat exposat podem afirmar que Δ_D defineix una topologia en (A ,D) en el sentit de Kuratowski

I 4 Consideracions de tipus algebraic sobre la naturalesa dels sistemes pre-ordenadors

Donada una estructura algebraica (A,) designarem per A^2 el conjunt

$$A^2 = \{ z \quad z \in A \text{ i } (\exists x)(x \in A \text{ i } z = x^2)\}$$

Si D és un sistema pre-ordenador de (A) $A^2 \subseteq D$ (per PO1)

Proposicio I 4 1

> En un grup $(A, \ )$, $H \subseteq A$ es un sistema pre-ordenador respecte de l operacio si, i només si $(H \ \ )$ és un sub-grup tal que $A^2 \subseteq H$

En efecte

A Si H es un sistema pre-ordenador $A^2 \subseteq H$, per tant $e \in H$ (ja que $e = e \ e \in A^2$)

Suposem que $x \in H$, aleshores, aplicant PO2 a

$$x \ x^{-1} = e \in H,$$
$$e \ x \ \ = x \in H$$

s obté que $e \ x^{-1} = x^{-1} \in H$

B Recíprocament suposem que $H \subseteq A$ es un sub-grup de $(A, \ )$ tal que $A^2 \subseteq H$ Aleshores

PO1 $x \ x \in H$, per tot x de A

PO2 si $x \ y \in H$ i $y \ z \in H$ aleshores

$$x = h_1 \ y^{-1} \quad z = y^{-1} \ h_2 \quad \text{on } h_1 \ h_2 \in H$$

i per tant, $x \ z = h_1 \ y^{-1} \ y^{-1} \ h_2 \in H$
(ja que $(H \ \ )$ es tancat i $A^2 \subseteq H$)

Proposició I 4 2

> Tot sub-grup H d un grup $(A \ \ )$ tal que $A^2 \subseteq H$ és normal

En efecte :

És un resultat conegut d algebra que si un sub-grup H d un grup $(A, \ )$ conté el commutador $C(A)$ aleshores H és normal (Veure Dubreil Dubreil-Jacotin [1964]) Per tant ens cal veure que si un subgrup H de $(A \ \ )$ conte A^2 aleshores conte $C(A)$

Per tot x, y de A, l element $xyx^{-1}y^{-1}$ es pot escriure

$$xyx^{-1}y^{-1} = x(xx^{-1})y(x^{-1}yy^{-1}x)(y^{-1}xx^{-1}y)x^{-1}(x^{-1}yx^{-1}xy^{-1}x)y^{-1} =$$
$$= x^2 \ (x^{-1}y)^2 \ (y^{-1}x)^2 \ (x^{-1}yx^{-1})^2 \ (xv^{-1})^2,$$

que es un producte d elements de H Per tant $C(A) \subseteq H$ (*)

La proposició recíproca de la prop I 4 2 es falsa, puix $3Z \subseteq Z$ és un sub-grup normal de Z que no conte pas el conjunt dels quadrats dels elements de $(Z +)$ que és $2Z$

Exemples

1 En $(Z +)$ els unics sistemes pre-ordenadors respecte de $+$ son $2Z$ i Z

2 En un grup en el que tot element és auto-oposat (per exemple, els grups dels anells de Boole) resulta que tot sub-grup es un sistema pre-ordenador puix $A^2 = \{e\}$, i no n hi ha mes

La prop I 4 2 ens planteja el seguent problema donat un sistema pre-ordenador D d un grup (A) tenim dues relacions d equivalencia les dues induïdes per D una es la que D indueix com a sub-grup normal l altra es la que D indueix com a sistema pre-ordenador Disposem doncs de dos conjunts quocients, que son

$$^{A}/_{D} \qquad \text{i} \qquad ^{A}/_{\equiv_D}$$

El primer esta dotat d una estructura de grup el segon està ordenat Demostrarem que

$$A/D = A/\equiv_D$$

Proposició I 4 3

Si (A,) es un grup i D es un sistema pre-ordenador de (A,) aleshores, per cada x de A

$$x D = [x]_D$$

(*) La demostració de la prop I 4 2 ens fou facilitada per la nostra amiga Pilar Bàyer i Isant i aprofitem per agraïr-li

En efecte

A $y \in x D$ si, i només si, $x^{-1} y \in D$ i $y x^{-1} \in D$
i com que $x x^{-1} = e = x^{-1} x \in D$ resulta (per PO2) que

$$x y \in D \qquad i \qquad y x \in D$$

d on $y \in [x]_D$

B $y \in [x]_D$ si, i nomes si $x y \in D$ i $y x \in D$ i, com que $x^{-1} x = x x^{-1} = e \in D$ resulta que (per PO2)

$$x^{-1} y \in D,$$

d on $y \in x D$

D aquesta proposició s'en dedueix que si $x \leq_D y$ aleshores $x \equiv_D y$

En efecte

$x \leq_D y$ implica $x y \in D$ i, per B, prop I 4 3 $x^{-1} y \in D$

Això comporta que per cada x de A,

$$C_D(x) = x D = [x]_D$$

ja que

$y \in C_D(x)$ si, i nomes si $x y \in D$
si, i només si, $y x \in D$ (en virtut de l observacio anterior) si i nomes si $y \in [x]_D$

Hem demostrat doncs la seguent proposició

Proposició I 4 4

Tot grup quocient modul un sub-grup normal que contingui els quadrats esta totalment desordenat respecte de la relacio d ordre induïda per el propi sub-grup
Tot conjunt quocient ordenat per mitja de la relació d ordre induïda per el sistema pre-ordenador D es un grup quocient modul D totalment desordenat per $\leq_D$

En la primera part de la demostració de la prop I 4 1 no interve cap altre fet que l'existència de l element neutre Això ens permet d establir el següent corol lari

Definició I 4 1

Anomenarem <u>sub-estructura</u> de (A,) tot sub-conjunt de A tancat per l operació de A i si A te elements distingits imposarem que el sub-conjunt també els posseixi

Corol lari 1

Si (A) es una estructura algebraica amb element neutre e, aleshores tot sistema pre-ordenador de (A,) es una sub-estructura de (A) que contingui A^2

El reciproc però, no es pot pas garantir

En (N) considerem l estructura engendrada pels productes de quadrats per cubs és a dir

$$D = \{ n^2 \ m^3 \quad n, \ m \in N \}$$

El conjunt D així definit es tancat respecte de l operació i conte els quadrats i, malgrat tot, no es pas un sistema pre-ordenador de (N,), ja que

$$n^2 \ m^2 \ m \in D \quad i \quad 1 \ n^2 \ m^2 \in D$$

i, en canvi existeixen m $\in$ N tals que m $\notin$ D

Exemples

1 Si (A,) es idempotent' i te neutre, com per exemple $(P(A), \cap)$ i $(P(A), \cup)$, resulta que l únic sistema pre-ordenador de (A,) es A (ja que $A^2 = A$)

2 En (N,+) els unics pre-ordenadors possibles són 2N i N

3 En (N,) els unics sistemes pre-ordenadors possibles són els sub-conjunts de N tancats per que contenen N^2 (i ja hem vist que no tots ho son)

Corol lari 2

Si (A) és una estructura algebraica amb element u neutre per l esquerra i absorbent per la dreta aleshores tot sistema pre-ordenador respecte de l operació es una sub-estructura de (A) que conté A^2

En efecte :
És obvi que $u \in D$ i que, si x i y pertanyen a D, $x\ y \in D$

Exemples

1 En una àlgebra de Boole definim la implicació

$x \rightarrow y$, per mitjà de $\neg x \vee y$

Aleshores l element màxim de l algebra satisfà les condicions imposades en el cor 2

És clar que $D = \{u\}$ es pre-ordenador en $(A \rightarrow)$ (en realitat és ordenador)

Els altres sistemes pre-ordenadors haurand ésser tancats per la implicació $\rightarrow$ i hauran de contenir u aixo ens proveeix d un reflex del calcul de proposicions clàssic.

2 En una algebra de Hilbert (H) l element maxim u és neutre per l esquerra i absorbent per la dreta (Monteiro [1971]) Per tant, tot sistema pre-ordenador D de (H,) serà tancat per l operació de l àlgebra i contindrà u això ens aporta un reflex del càlcul de proposicions clàssic i positiu

Malgrat tot, les condicions anteriors son molt restrictives ja que hi ha moltes operacions sense neutre i sense elements com els descrits en el cor 2 que, en canvi admeten sistemes pre-ordenadors i, en general no podem pas assegurar que aquests sistemes pre-ordenadors siguin sub-estructures

Exemple

En Z definim 1 operació $(x,y) \longrightarrow x - y$

Si $a \in Z$ i D es un sistema pre-ordenador que conté <u>a</u>, aleshores

(i) $a \in D$

(ii) $o = z - z$ per tant, $o \in D$,

(iii) si $x - y = a$ i $y - z = a$, aleshores $x - z = 2a \in D$,

(iv) si $na \in D$ amb $n \geqslant 0$ aleshores $(n+1)a \in D$ ja que existeixen elements x,y,z de Z tals que

$$x - y = na \quad i \quad y - z = a$$

d on

$$x - z = (n + 1)a \in D$$

Tenim doncs que $D \supseteq aN$ pero aN es pre-ordenador i conte <u>a</u> Per tant $D = aN$

Aquest sistema pre-ordenador no es pas una sub-estructura de (Z,-) ja que

$$a\,n - a\,m = a\,(n-m) \notin aN, \text{ si } n < m$$

I 5 L absorció per la dreta

Des d ara, com que tota clausura Δ_D és un operador conseqüència utilitzarem la notació C_D per designar-la

Definició I 5 1

Un sistema pre-ordenador D respecte de l operació de (A) es <u>absorbent per la dreta</u> si i nomes si,

$$x\,D \subseteq D, \quad \text{per tot } x \text{ de } A$$

Proposició I 5 1 (Sales [1974])

Un sistema pre-ordenador D és absorbent per la dreta si i només si,

$$D \subseteq C_D(S),$$

per tot $S \subseteq A$

En efecte :

A Si $z \in D$, aleshores $z \in C_D(S)$ per tot $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$ En particular, per cada x de A, $z \in C_D(x)$ i, per tant,

$$x\,z \in D$$

i D es absorbent per la dreta

B Si D és absorbent per la dreta i $x \in D$, aleshores $x \in C_D(S)$, ja que $y\,x \in D$, per tot $y \in S$

Corol lari

D verifica l absorció per la dreta si i nomes si,

$$D \subseteq \bigcap_{S \in P(A)^{*}} C_D(S) = \bigcap_{x \in A} C_D(x)$$

Notes

1 En general, $x\,D \neq D$ És suficient comprovar el següent exemple $A = \{x,y\}$ i $x\,x = y$ $y = x$ $y = y$ $x = x$ i A és pre-ordenador i $x\,A = \{x\} \subsetneq A$

2 En el cas que D sigui absorbent per la dreta, si estenem C_D a $P(A)$, tot sencer fent

$$C_D(\emptyset) = \emptyset$$

haurem de rectificar la proposicio I 5 1

La questió es la següent És possible de definir

$$C_D(\emptyset) = D$$

Aquesta definició estaria íntimament vinculada amb les definicions donades usualment en lògica (Porte [1965])

No podem precipitar-nos Ens cal estar segurs de que

$$C_D(C_D(\emptyset)) = C_D(D) = D$$

i això, en general no és cert

I 6 El modus ponens

Definició I 6 1

Un sistema pre-ordenador D verifica el <u>modus ponens</u> si, i només si,

$$x\,y \in D \text{ i } x \in D \text{ impliquen } y \in D$$

Proposició I 6 1 (Sales [1974])

Un conjunt pre-ordenador D verifica el modus ponens (M P) si, i només si

$$D = C_D(D)$$

En efecte

A Si $x\ y \in D$ i $x \in D$, aleshores $y \in C_D(D) = D$ i D verifica M P

B Si $x \in C_D(D)$, aleshores, per un cert y de D, $y\ x \in D$; per M P , $x \in D$ i, per C1 resulta que $C_D(D) = D$

Proposició I 6 2

Una condició necessària i suficient per a que un sistema pre-ordenador D verifiqui M P es que existeixi un sistema pre-ordenador D tal que

$$C_D(D\ ) = D$$

És clar que $D \supsetneq D$

En efecte

A Si D verifica M P , fem $D' = D$

B Suposem ara que per un determinat conjunt pre-ordenador D', tenim $C_D(D') = D$ però, en canvi, $C_D(D) \neq D$ Aleshores $C_D(D) \supsetneq D$ i, per tant, existirà un $x \in C_D(D)$ tal que $x \notin D$

Existeix un $z \in D$ tal que $z\ x \in D$, però $x \notin D$ Ara bé, per hipòtesi, $z \in C_D(D\ )$ i, per tant, existeix un $y \in D$ tal que $y\ z \in D$

Aplicant PO2 a D tenim que $y\ x \in D$, per un cert y de D' , d on $x \in C_D(D\ ) = D$ Contradicció

Proposició I 6 3

Un sub-conjunt D de A és un filtre respecte del pre-ordre $\leq_D$ si, i nomes si, D verifica M P

En efecte :

A $x \leq_D y$ i $x \in D$ i D verifica M P , aleshores $y \in D$

B   x y $\in$ D i x $\in$ D i D és filtre d ordre, aleshores y $\in$ D

Notes

1   Si D és absorbent per la dreta i verifica M P   aleshores podem estendre C_D a P(A), definint

$$C_D(\emptyset) = D$$

Això ens diu intuïtivament' que, si el conjunt de premisses és $\emptyset$, les deduccions immediates respecte d un sistema pre-ordenador absorbent per la dreta i que verifiqui el M P - que podem interpretar com a tesis - són precisament, les tesis

2   Suposem ara que $D \neq D$ si D i D son absorbents per la dreta i verifiquen M P   aleshores segons la nota 1, $C_D(\emptyset) = D$ i $C_D\ (\emptyset) = D$ i per tant, $C_D \neq C_D$, però no per aixo cal deduir que tot element de A es factoritzable   En efecte, considerem $A = \{x,y\}$ i l operació
$x\ x = y\ \ y = x\ \ y = y\ \ x = x$
Per tant a l estendre l operador C_A a P(A), tot sencer tal com s indica en la nota 1 resulta que no és possible estendre la prop I 2 2

3   La prop I 6 2 es pot debilitar, puix no cal suposar que D es un sistema pre-ordenador (en la demostració aquest fet no intervé en absolut)   Per tant, la podem enunciar : 'D verifica M P si, i només si, existeix un subconjunt $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$ tal que $C_D(S) = D$

4   $C_D(D\ ) = D$ significa que <u>D verifica el M P respecte de D</u> , això és, z x $\in$ D i z $\subset$ D impliquen x $\in$ D

5   Un sistema pre-ordenador pot verificar M P i no ésser absorbent per la dreta

Considerem (Z,-) i sigui $D = aZ$, on $a \in Z$
D verifica M P , però no és pas absorbent per la dreta,

ja que

A $x - y = na$ i $x = ma$ impliquen $y = ma - na = (m - n)a \in aZ$

B Si $z \in Z$ i $na \in D$, aleshores $z - na \in aZ$ si, i només si, $z \in aZ$

En un grup (A) tot sistema pre-ordenador verifica M P , però només A és absorbent per la dreta

6 Si D és absorbent per la dreta i verifica M P i $x \in D$, aleshores $C_D(x) = D$
Ja hem vist, prop I 5 1, que $C_D(x) \supseteq D$ Cal veure que $C_D(x) \subseteq D$ Sigui $y \in C_D(x)$, aleshores $x\,y \in D$ i $x \in D$, d on $y \in D$

Per tant si D_1 i D_2 són dos sistemes pre-ordenadors que verifiquen M P i són absorbents per la dreta i $D_1 \subsetneq D_2$, aleshores $C_{D_2} \neq C_{D_1}$, puix

$$C_{D_2}(D_1) = D_2 \qquad \text{i} \qquad C_{D_1}(D_1) = D_1$$

Definició I 6 2

Un sistema pre-ordenador que verifiqui M P s anomena un <u>sistema deductiu dèbil</u>

I 7 Absorció per la dreta i M P i elements distingits.

Proposició I 7 1

Si (A,) admet un element neutre per l esquerra e, aleshores tot sistema pre-ordenador verifica M P

En efecte
Si $x\,y \in D$ i $x \in D$, aleshores, per hipòtesi i per PO2, $e\,y = y \in D$

Nota
En un grup (A,) tot sistema pre-ordenador dèbil és un sistema deductiu dèbil

Proposició I 7 2

> Si (A) admet un element neutre per l esquerra i absorbent per la dreta, u, aleshores tot sistema pre-ordenador D és absorbent per la dreta

En efecte
Si $y \in D$ i $x \in A$, aleshores $u\ y = y \in D$ i $x\ u = u \in D$ i per PO2, resulta que $x\ y \in D$

Corol lari

> Si (A,) admet un element neutre per l esquerra u, que és absorbent per la dreta, aleshores tot sistema pre-ordenador és una sub-estructura que verifica M P i és absorbent per la dreta

En efecte
Cal aplicar la prop I 4 1,cor 2, i les props I 7 1 i I 7 2

Nota
Es possible de debilitar la hipòtesi de la proposició I 7 2 imposant que u sigui absorbent per la dreta sobre D (això vol dir que, per tot x de A, $x\ u \in D$)

I 8 El conjunt quocient $A/_{\equiv_D}$ Sistemes pre-ordenadors maximalment tancats

Considerem ara el conjunt quocient $A/_{\equiv_D}$ tal com fou introduït en la pàg 5 Notem en primer lloc, que C_D indueix una aplicació, que seguim anomenant C_D,

$$C_D \quad A \longrightarrow P(A)$$

definida per

$$C_D(x) = C_D(\{x\})$$

(Recordem que $C_D(\{x\})$ el designavem $C_D(x)$ per conveni Pàg 5)

Aquesta aplicació indueix una relació d equivalència en A, definida per

$$x, y \in A, \quad x \equiv_D y \quad \text{si i nomes si,} \quad C_D(x) = C_D(y)$$

És fàcil de constatar que aquesta relació d equivalència és la mateixa que la definida en la pàg 4 i 5, induïda pel pre-ordre $\leq_D$

Observem a continuació, que el sistema pre-ordenador D, en general, no és classe d equivalència, per veure-ho, considerem el conjunt $A = \{x\ y, z\}$, proveït de 1 operació :

	x	y	z
x	y	x	z
y	z	y	y
z	x	y	y

i el sistema pre-ordenador de (A,) $D = \{y\}$ Resulta que

$$[y]_D = \{y, z\} \neq D$$

És per això que designem el conjunt quocient per mitjà de $A/_{\equiv_D}$ i no per mitjà de $A/_D$ que fóra el usual

Proposició I 8 1

> Una condició necessària i suficient perque D estigui contingut en $[x]_D$, on $x \in D$, és que
>
> $$D\ D \subseteq D$$

En efecte

A Si $x,\ y \in D$ i $D\ D \subseteq D$ aleshores $x\ y \in D$ i $y\ x \in D$, d on

$$y \in [x]_D$$

B Si $D \subseteq [x]_D$ on $x \in D$ alaeshores, si y $z \in D$ $x\ y \in D$ i $z\ x \in D$ i, per P02, $z\ y \in D$

En particular, si D és absorbent per la dreta ($A\ D \subseteq D$), aleshores, per cada $x \in D$, $D \subseteq [x]_D$ (Sales [1973])

Proposicio I 8 2

> Si $D \subseteq [x]_D$, on $x \in D$, aleshores la classe $[x]_D$ és màxima en $A_{/\equiv_D}$ si, i només si, D és absorbent per la dreta

En efecte

A D es absorbent per la dreta i, per tant, per tot $x \in D$, i tot y de A, s obté $y\ x \in D$ D on

$$[y]_D \leqslant_D [x]_D, \qquad \text{si } x \in D$$

B Si $[y]_D \leqslant_D [x]_D$, on $x \in D$, aleshores com que aquesta desigualtat es vàlida per qualsevol element y de A, tenim que, si $z \in A$ i $t \in D$, aleshores

$$[z]_D \leqslant_D [t]_D$$

que per definicio, és equivalent a $z\ t \in D$

Notes

1 La prop I 8 2, en donar la condició suficient, completa un resultat de Sales [1973]

2 En les hipòtesis de la prop I 8 2 resulta que $[x]_D$ on $x \in D$, és absorbent per la dreta pero, en general, no és possible d assegurar que sigui un sistema pre-ordenador Es suficient de considerar el seguent exemple $A = \{x\ y, z, t\}$ i $D = \{x\}$ i l operació

	x	y	z	t
x	x	x	y	z
y	x	x	t	z
z	x	x	x	z
t	x	x	t	x

Veiem que D és un sistema pre-ordenador de (A,), absorbent per la dreta i que la classe d'equivalència

$$[x]_D = \{x, y\}$$

verifica $[x]_D \supseteq D$ i és absorbent per la dreta, però no és pas un sistema pre-ordenador de (A,), ja que, si be

$$x\ z \in [x]_D \qquad i \qquad t\ x \in [x]_D,$$

en canvi, $t\ z \notin [x]_D$

De considerar els subconjunts de A que contenen a $[x]_D$ i són pre-ordenadors de (A,) en trobarem dos, que són $\{x, y, t\}$ i A Resulta doncs, que el sistema pre-ordenador engendrat per $[x]_D$, que és $\{x, y\ t\}$, no és absorbent per la dreta

3 Sigui B un sub-conjunt de A Direm que B és un <u>conjunt absorbent per la dreta sobre D</u> si, i només si $A\ B \subseteq D$

En les hipòtesis de la prop I 8 2 resulta que $[x]_D$, on $x \in D$, és el màxim sub-conjunt de A que és absorbent per la dreta sobre D En efecte

A Si $y \in [x]_D$ i $z \in A$ i $t \in D$, aleshores $z\, t \in D$ i $t\, y \in D$, d on $z\, y \in D$

B Si $y \notin [x]_D$ i verifica A $y \subseteq D$, aleshores $x\, y \in D$
Per altre banda tindrem, per tot $z \in D$,

$$z\, x \in D \quad x\, z \in D \text{ i } y\, z \in D,$$

d on $y\, x \in D$ i finalment, $y \in [x]_D$ Contradicció

4 En les hipòtesis de la prop I 8 2, $[x]_D = D$ si, i nomes si, D verifica M P (Sales [1973]) En efecte :

A $z \in D$ i $z\, y \in D$ implica $[z]_D = D = [x]_D \leqslant_D [y]_D$
Per la prop I 8 2, $[x]_D = [y]_D$ i, per tant, $y \in D$

B Si $y \in [x]_D$ i $z \in D$, aleshores $z\, y \in D$ i, per M P , $y \in D$

D aquest resultat se n segueix el seguent
$[x]_D = D$, on $x \in D$, si i nomes si, D és el màxim sub-conjunt de A absorbent per la dreta sobre D

Definicio I 8 1

Un conjunt pre-ordenador D és <u>maximalment tancat</u> respecte de l operació de (A,) si, i nomes si,

M T 1 $D\, D \subseteq D$,
M T 2 d existir un conjunt $T \subseteq A$ tal que $T \supsetneq D$ aleshores

$$D\, T \nsubseteq D \quad \text{ó} \quad T\, D \nsubseteq D$$

És clar que A és maximalment tancat respecte de (A,)

Proposicio I 8 3

Una condició necessària i suficient per tal que D sigui classe d equivalència en $A/_{\equiv_D}$ es que D sigui maximalment tancat respecte de l operació de (A,)

En efecte

A En virtut de la prop I 8 1, $[x]_D = D$ implica MT 1 Suposem ara que existeix un conjunt T tal que $T \subsetneq A$ i $T \supsetneq D$ aleshores $(\exists z)(z \in T$ i $z \notin D)$ Si $T D \subseteq D$ i $D T \subseteq D$, tindrem que, si $x \in D$,

$$x z \in D \quad \text{i} \quad z x \in D,$$

d on $z \in [x]_D$ Contradicció

B Per MT 1 i la prop I 8 1 tenim que $D \subseteq [x]_D$, on $x \in D$ Si $y \in [x]_D$ i $y \notin D$ aleshores $T = D \cup \{y\} \supsetneq D$ És clar que

$$D T = D D \cup D y \subseteq D,$$
$$T D = D D \cup y D \subseteq D,$$

ja que $D D \subseteq D$, $D y \subseteq D$ i $y D \subseteq D$ (puix $D \subseteq [x]_D$ i $y \in [x]_D$) Contradicció amb MT 2

Proposició I 8 4

> Si D és maximalment tancat i absorbent per la dreta, aleshores D verifica M P

En efecte

Si $x y \in D$ i $x \in D$, aleshores $x y \in D$ i a més per tot z de A, $z x \in D$; per tant si fem $z = y$ tenim que $y \in [x]_D = D$

Proposició I 8 5

> Si D és absorbent per la dreta i verifica M P , aleshores D és maximalment tancat

En efecte

Per tot $T \subseteq A$, es verifica $T D \subseteq D$; d on $D D \subseteq D$ Si $T \supsetneq D$, aleshores $T D \subseteq D$ per tant hem de demostrar que $D T \nsubseteq D$ Si no fos així tindriem que per tot $y \in T$, $x y \in D$ i $x \in D$ i, per M P , $y \in D$, d on $T = D$ Contradicció

Hem arribat, utilitzant un altre camí a un resultat que es troba en Sales [1973]

> Si D és un sistema pre-ordenador absorbent per la dreta $D \in A/_{\equiv_D}$ si, i només si, D verifica M P

Ara l enunciaríem

> En presència de l absorció per la dreta, M P i M T (maximalitat tancada) són equivalents"

Les proposicions I 8 4 i I 8 5 ens diuen:

$$\text{Ab p d i M T} \Longrightarrow \text{M P}$$
$$\text{Ab p d i M P} \Longrightarrow \text{M T}$$

Ens preguntem ara si el M P i la M T de D impliquen l absorcio per la dreta de D

Disposem ja de dos exemples que responen negativament aquesta pregunta

- En un grup (A,), tot sistema pre-ordenador D és maximalment tancat (puix és classe, pàg 25-26) i verifica M P però no és absorbent per la dreta, a menys que $D = A$

- L exemple de la nota 5 de I 6 ens permet de calcular $[x]_D$, on $x = na$

  $y \in [x]_D$ si i només si, $y - x = pa$ i $x - y = qa$,

  d'on $y = (p + n)a$ i, per tant, $y \notin D$

  D verifica $D\,D \subsetneq D$ i per la prop I 8 1, tenim que

  $$[x]_D = D$$

  Per tant, D és maximalment tancat i verifica M P i no és pas absorbent per la dreta La prop I 8 2 ens diu que D no es classe màxima

Acabarem aquest capítol veient que, a partir d un sistema pre-ordenador D, és possible de construir-ne un altre D_o tal que $D \subseteq D_o$ i, a més D_o sigui maximalment tancat Aquesta construcció és inductiva i es pot fer des de dalt i des de baix (en el sentit d Enderton [1972])

Proposició I 8 6

> Sigui D^* un sistema pre-ordenador i sigui $\mathcal{D}$ la família de tots els sistemes pre-ordenadors maximalment tancats que contenen a D^* El conjunt
>
> $$D_o = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D$$
>
> és un sistema pre-ordenador maximalment tancat

En efecte :

A D_o és un sistema pre-ordenador, en virtut del lema I 2 1 i del fet que A sigui maximalment tancat

B Ara cal veure que per cada $x \in D_o$, $[x]_{D_o} = D_o$

Suposem que $x \in D_o$, aleshores $x \in D$, per cada sistema pre-ordenador D de $\mathcal{D}$

És clar que $y \in [x]_{D_o}$ si, i només si $x\ y \in D_o$ i

$y\ x \in D_o$ si, i només si per tot $D \in \mathcal{D}$ $x\ y \in D$ i $y\ x \in D$

si, i només si, per tot $D \in \mathcal{D}$, $y \in [x]_D = D$ (ja que $x \in D$)

si, i només si, $y \in D_o$

Corol lari

(a) Tot sistema pre-ordenador D^* engendra un sistema pre-ordenador maximalment tancat

(b) Si A admet un sistema pre-ordenador absorbent per la dreta, propi, que verifiqui M P , aleshores D_o és propi

En efecte

(a) $A \in \mathcal{D}$, ja que A és maximalment tancat

(b) Prop I 8 5 i prop I 8 3

Aquesta proposició ens dóna una construcció de D_o des de baix A continuació donarem una construcció des de dalt

Sigui D un sistema pre-ordenador que verifiqui MT 1 (això és $D\ D \subseteq D$) Sigui ara C_o la classe engendrada per D, mòdul D Per la prop I 8 1, C_o està definida, ja que $D \subseteq C_o$ Sigui ara D_1 el més petit sistema pre-ordenador que conté a C_o i que verifica $D_1\ D_1 \subseteq D_1$ (existeix puix $A\ A \subseteq A$) Tenim

$$D \subseteq C_o \subseteq D_1$$

Reiterem el procés agafant com sistema pre-ordenador base D_1 i obtenim

$$D \subseteq C_o \subseteq D_1 \subseteq C_1 \subseteq D_2,$$

etc

D aquesta manera obtindrem una successió

$$D \subseteq C_o \subseteq D_1 \subseteq C_1 \subseteq D_2 \subseteq C_2 \subseteq$$

(que naturalment pot devenir estacionària ; és a dir, pot existir un nombre natural k tal que $D_k = C_j = D_j$, per tot $j \geqslant k$)

Considerem ara

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$$

A C és pre-ordenador :

PO1. Per tot x de A i tot $k \in N$, $x\ x \in D_k \subseteq C$

PO2 Si $x\ y \in C$ i $y\ z \in C$, aleshores $x\ y \in D_r$ i $y\ z \in D_s$ i, per tant, $x\ y \in D_t$ i $y\ z \in D_t$, on $t = \text{màx}\,\{r, s\}$ Però D_t és pre-ordenador, d on $x\ z \in D_t \subseteq C$

B C és classe d equivalència mòdul C

Suposem que $x \in C$ i que $y \equiv_C x$ Aleshores, per un cert nombre natural k, $x \in D_k$ i, per tant, $x \in D_r$, si $r \geq k$

D altra banda, $x\,y \in C$ i $y\,x \in C$ implica que $x\,y \in D_m$ i $y\,x \in D_p$ per uns certs nombres naturals m i p

Si fem $s = \max\{r,n,m\}$, aleshores x, $x\,y$ i $y\,x \in D_s$, d on $x \in D_s$ i $y \in [x]_{D_s} = D_s$

Tot aixo ens diu que $[x]_C \subseteq C$

Per a veure l altra desigualtat aplicarem la prop I 8 1; és a dir, cal demostrar que $C\,C \subseteq C$ Però això és immediat, ja que si $x,y \in C$, aleshores $x \in D_r$ i $y \in D_s$ i, si fem $t = \max\{s,r\}$, aleshores tenim

$$x \in D_t, \quad y \in D_t \quad \text{i} \quad x\,y \in D_t$$

D on $x\,y \in C$ i la demostració està acabada

Hem demostrat, doncs el seguent teorema

Proposició I 8 7

> A partir d un sistema pre-ordenador D tancat (és a dir que verifiqui MT 1), l expressió
>
> $$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k,$$
>
> on cada D_k es defineix com anteriorment, és un sistema pre-ordenador, maximalment tancat, i conte a D

Disposem doncs, de dos mètodes per a construir un sistema pre-ordenador maximalment tancat a partir d un sistema pre-ordenador D que verifiqui MT 1 les props

I 8 6 i I 8 7 ens els proporcionen La pregunta a la que cal respondre ara és la seguent És possible d assegurar que $C = D_o$? La resposta és afirmativa

Proposició I 8 8

> Si D és un sistema pre-ordenador tancat i, a partir d ell construim els sistemes pre-ordenadors maximalment tancats C i D_o, seguint els metodes donats en les props I 8 7 i I 8 6, respectivament aleshores
>
> $$C = D_o$$

En efecte

A $D_o \subseteq C$, ja que D_o es el més petit pre-ordenador maximalment tancat que conté D, i C es un dels sistemes pre-ordenadors maximalment tancats que contenen D

B Per veure que $C \subseteq D_o$ es procedeix per inducció

(i) $C_o \subseteq D_o$, ja que

$y \in C_o$ si i només si, per un cert $x \in D$, $x\ y \in D$ i $y\ x \in D$ Això implica que $x\ y \in D_o$ i $y\ x \in D_o$ i $x \in D_o$ per tant, $y \in [x]_{D_o} = D_o$

$D_1 \subseteq D_o$ ja que D_1 és el mes petit sistema pre-ordenador que conté C_o i que verifica $D_1\ D_1 \subseteq D_1$

(ii) Suposem ara demostrat, ja, que $D_k \subseteq D_o$, per $k = 1, \ldots, n$ Aleshores $D_{n+1} \subseteq D_o$ (És obvi repetint (i), si fem $D_n = D$)

(iii) De tot l exposat anteriorment resulta que $D_k \subseteq D_o$ per tot $k \in N$ Per tant,

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \subseteq D_o$$

Ara bé, en les hipòtesis de la prop I 8 7, hi ha una condició (MT 1) que no intervé en les hipòtesis de la prop I 8 6 Això ens planteja el seguent problema :
Suposem que D^* és un sistema pre-ordenador qualsevol (és a dir, no cal que verifiqui MT 1) i considerem el sistema pre-ordenador D engendrat per D^* a b la condició que D verifiqui MT 1 A partir de D^* construïm D_o i, a partir de D construïm C ¿Podem assegurar que $D_o = C$? La resposta a aquesta pregunta es afirmativa

En efecte
És clar que $D_o \supseteq D$, puix $D_o \supseteq D^*$ i D_o, per ser maximalment tancat, verifica MT 1, però D es el mínim sistema pre-ordenador amb aquestes condicions

Aleshores tenim

$$D^* \subseteq D \subseteq D_o \qquad i \qquad D^* \subseteq D \subseteq C$$

Hem vist que D_o és el mínim sistema pre-ordenador maximalment tancat que conté D^*, però C és maximalment tancat i conté D^* Per tant,

$$D_o \subseteq C$$

Cal veure, doncs, que $C \subseteq D_o$
Tenim que

$$D \subseteq D_o \qquad i \qquad D\,D \subseteq D,$$

per tant D_o és el més petit sistema pre-ordenador m t que conté D i C es el sistema pre-ordenador m t engendrat per D
Estem en les condicions de la prop I 8 8 i, per tant,
$D_o = C$

Aquests darrers teoremes generalitzen un resultats analegs obtinguts per Sales (Sales [1973]) allí hom suposa que els sistemes pre-ordenadors D de partida són absorbents per la dreta (i, per tant, verifiquen automàticament MT 1) Això fa que, allí, les construccions de dalt i des de baix coincideixin sense necessitat d aquesta darrera precisió

CAPÍTOL II

CONJUNTS PRE-ORDENADORS FORTS

I SISTEMES DEDUCTIUS FORTS

II 1 Sistemes pre-ordenadors forts

Abans de donar la definició de sistema pre-ordenador fort respecte de l operació d una estructura algebraica (A), conve recordar la indicació que segueix la definició I 1 4 en la que s ens diu que a fi d evitar confusions, els sistemes pre-ordenadors introduïts per aquella definicio s anomenaran <u>sistemes pre-ordenadors dèbils</u>

Definició II 1 1 (Sales [1974])

Donada una estructura algebraica (A) i un cert conjunt $D \subsetneq A$ direm que D és un <u>sistema pre-ordenador fort</u> respecte de l operació si i nomes si verifica

POF1 $x\ x \in D$, per tot x de A,

POF2 si per un cert x de A, existeixen n elements $y_1,\quad y_n$ tals que

$$y_1\ (y_2\ (\qquad (y_n\ x)\qquad)) \in D$$

i, per cada $i \in \{1,2\quad ,n\}$ existeixen m_i elements de A $z_1^i\qquad z_{m_i}^i$, tals que

$$z_1^i\ (z_2^i\ (\qquad (z_{m_i}^i\ y_i)\qquad)) \in D$$

aleshores

$$z_1^1\ (z_2^1\ (\qquad (z_{m_n-1}^n\ (z_{m_n}^n\ x))\qquad)) \in D$$

Notes

1 Els elements y_i, $i = 1,2,\quad ,n$ que intervenen en la definició II 1 1, així com els elements z_k^i, $k = 1$ m_i, $i = 1,\quad ,n$, poden esser iguals o diferents

2 Adoptarem un conveni respecte dels parèntesi En una expressió sense parèntesi associarem per la dreta

Així,

$$y_1\ y_2 \qquad y_n\ x$$

significa

$$y_1\ (y_2\ (\qquad (y_n\ x) \qquad))$$

Quan $y_1 = y_2 = \qquad = y_n = y$ escriurem $y^{(n)}\ x$ en lloc de

$$y\ (y\ (\qquad (y\ x) \qquad))$$

Cal adonar-se que $y^{(n)}$ és un operador i no un element de A

3 La idea de l operador ens permet de considerar

$$y_1 \qquad y_n$$

com un operador de A en A i, com que l ordre és essencial podem indicar-ho també de la seguent manera

Designem per mitjà de $S_F(A)$ el conjunt de les successions finites d elements de A i per cada successio $s \in S_F(A)$ definim l aplicació

$$f_s : A \longrightarrow A$$

per mitja de

$$f_s(x) = s\ x = y_1 \qquad y_n\ x$$

sempre que $s = (y_1 \qquad y_n)$

Si s_1 i s_2 són dues successions finites d elements de A designarem per $s_1\ s_2$ la successió que s obté per juxtaposicio de s_1 i s_2, així, si $s_1 = (y_1, \qquad ,y_n)$ i $s_2 = (z_1, \qquad z_m)$ definim

$$s_1\ s_2 = (t_1\ t_2, \qquad ,t_n, t_{n+1} \qquad t_{n+m}),$$

on $t_i = y_i$ per $i \in \{1, \qquad n\}$ i $t_i = z_{i-n}$, per $i \in \{n+1 \qquad n+m\}$

És clar que la successió $s_1\ s_2$ va associada a l aplicació $f_{s_1} \circ f_{s_2}$ En efecte

$$(f_{s_1} \circ f_{s_2})(x) = f_{s_1}(s_2\ x) = s_1\ (s_2\ x) =$$

$$= y_1 \qquad y_n\ s_2\ x =$$

$$= y_1 \qquad y_n\ z_1 \qquad z_m\ x =$$

$$= (s_1\ s_2)\ x = f_{s_1\ s_2}(x)$$

Quan la successio $s \in S_F(A)$ es redueixi a un element de A la identificarem amb ell Aixi si $s = (y)$ escriurem $s = y$

Amb la notacio de la nota 3 la condicio POF2 es pot escriure

POF2 si per un cert x de A existeix una successio finita $s = (y_1 \quad , y_n) \in S_F(A)$ tal que $s\ x \in D$ i per cada $i \in \{1 \quad n\}$ existeix una successio $s^i \in S_F(A)$ tal que $s^i\ y_i \in D$ aleshores

$$t\ x \in D$$

on $t = s_1 \qquad s_n$

Proposició II 1 1

Si D és un sistema pre-ordenador fort i existeix una successió $s = (y_1 \quad , y_n)$ de $S_F(A)$ d ordre n i per un cert i de $\{1, \quad , n\}$, existeix una successió s_i de $S_F(A)$ tal que, per un cert x de A es verifiquen

$$s\ x \in D \qquad i \qquad s_i\ y_i \in D,$$

aleshores la successió

$t = y_1 \qquad y_{i-1}\ s_i\ y_{i+1} \qquad y_n$

verifica

$$t\ x \in D$$

En efecte

Per hipòtesi, disposem de la successió $s = (y_1, \quad , y_n)$ i de la successió s_i que verifiquen

$$s\,x \in D \quad \text{i} \quad s_i\,y_i \in D$$

Ara construim les n successions $s^k \in S_F(A)$ $k \in \{1, \quad , n\}$, per mitja de

$$s^k = \begin{cases} y_k & \text{si } k \neq i \\ s_i & \text{si } k = i \end{cases}$$

Aleshores es clar que $s^k\,y_k \in D$ per tot $k \in \{1, \quad n\}$
(El cas $k = i$ es segueix de la hipòtesi i els casos $k \neq i$ es segueixen de POF1)

Per tant

$$s\,x \in D \quad \text{on } s = (y_1, \quad y_n)$$

i

$$s^k\,y_k \in D \quad \text{per tot } k \in \{1\ 2, \quad , n\},$$

d on per hipòtesi

$$t\,x \in D,$$

on $t = s^1 \qquad s^{i-1}\,s^i\,s^{i+1} \qquad s^n = y_1 \qquad y_{i-1}\,s_i\,y_{i+1} \qquad y$

Proposicio II 1 2

> Sigui D un sub-conjunt de A Si, per cada successió $s = (y_1 \quad , y_n)$ tal que $s\,x \in D$ per un cert x de A i, per cada s^i $(1 \leq i \leq n)$ tal que $s^i\,y_i \in D$, es verifica que $t\,x \in D$ on t designa la successió
>
> $$t = y_1 \qquad y_{i-1}\,s^i\,y_{i+1} \qquad y_n,$$
>
> aleshores D és un sistema pre-ordenador fort

En efecte
Suposem que tenim una successió $s = (y_1 \quad , y_n)$ tal que per un cert x de A verifica $s\,x \in D$ i també n successions s^i tals que

$$s^i\, y_i \in D \quad i = 1, \qquad n,$$

aleshores en particular es verificarà

$$s\,x \in D \qquad i \qquad s^1\, y_1 \in D$$

i per hipòtesi podem assegurar que

$$t\,x \in D \quad \text{on } t = s^1\, y_2 \qquad y_n$$

Suposem ara que $t^k\, x \in D$ on $t^k = s^1 \qquad s^k\, y_{k+1} \qquad y_n$ $(k < n)$ Com que $s^{k+1}\, y_{k+1} \in D$ aleshores

$$t^{k+1}\, x \in D, \quad \text{on } t^{k+1} = s^1 \qquad s^k\, s^{k+1}\, y_{k+2} \qquad y_n$$

Ara bé el nombre d elements de s es finit i per tant la proposició queda demostrada

Hem demostrat doncs una definicio alternativa de sistema pre-ordenador fort es la definicio seguent

Definició II 1 1

Un sub-conjunt D d una estructura algebraica (A) es un sistema pre-ordenador fort respecte de l operacio si i només si, verifica :

POF1 $x\,x \in D$ per cada x de A

POF2* l existencia d una successió $s = (y_1 \quad , y_n)$ tal que per un cert x de A verifica $s\,x \in D$ i d una successio s^i per un cert $i \in \{1, 2 \quad n\}$ tal que $s^i\, y_i \in D$ impliquen

$$t\,x \in D,$$

on $t = y_1 \quad y_{i-1}\, s^i\, y_{i+1} \quad y_n$

Proposició II 1 3

Tot sistema pre-ordenador fort és un sistema pre-ordenador dèbil

En efecte

POF1 es identic a PO1

POF2 implica PO2 ja que si $x\, y \in D$ i $y\, z \in D$ aleshores $x\, z \in D$ (Cal fer $s = y$ i $s^1 = x$)

El reciproc en canvi és fals com ho prova l exemple de la prop I 2 4 En efecte considerem el sistema pre-ordenador debil $D_2 = \{x\ y\}$ aleshores

$$y\ x = y \in D_2$$

i

$$z\ (x\ y) = x \in D_2,$$

per tant si D_2 fos un sistema pre-ordenador fort tindriem que

$$z\ (x\ x) \in D_2,$$

però resulta que $z\ (x\ x) = z\ t = t \notin D_2$

Nota

Les condicions POF1 i POF 2 són independents :

- Acabem de veure que un conjunt D pot verificar POF 1 (que és PO1) i no verificar POF2
- Ara cal veure que un conjunt $D \subseteq A$ pot verificar POF2 i en canvi, no verificar POF1 Fem $A = \{x,y\}$; dotem-lo de la llei de composició $x\ x = x\ y = y\ x = y\ y = y$ i considerem $D = \{x\}$ És clar que D verifica POF2 i no verifica pas POF1

II 2 Sistemes pre-ordenadors forts i operadors clausura

Teorema II 2 1 (Sales [1974])

Si D es un sistema pre-ordenador fort aleshores l aplicacio

$$K_D \quad P(A)^{*} \longrightarrow P(A)$$

definida per

$K_D(S) = \{x \in A \ (\exists s)(s \in S_F(S) \text{ i } s\ x \in D)\}$,

és un operador clausura en $(P(A)^{*}, \subseteq)$

En efecte :

C2 $S_1 \subseteq S_2$ implica $K_D(S_1) \subseteq K_D(S_2)$, ja que $y \in K_D(S_1)$ si i només si $(\exists s)(s \in S_F(S_1)$ i $s\ x \in D)$, d on per hipòtesi $(\exists s)(s \in S_F(S_2)$ i $s\ x \in D)$ i per tant $y \in K_D(S_2)$

C1 $K_D(S) \supseteq S$ per tot $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ ja que si $y \in S$, aleshores per POF1 $y\ y \in D$ i per tant, existeix una successio $s = (y) \in S_F(S)$ tal que

$$s\ y \in D$$

d on $y \in K_D(S)$

C3 $K_D(K_D(S)) = K_D(S)$, per tot $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$ ja que, per C1, $K_D(K_D(S)) \supseteq K_D(S)$ i, d altra banda si $y \in K_D(K_D(S))$, existeix una successió $s \in S_F(K_D(S))$ tal que $s\ y \in D$

Ara bé, $s = (y_1 \quad , y_n)$ on per cada $i \in \{1\ 2, \quad n\}$, $y_i \in K_D(S)$

Per tant per cada $i \in \{1\ 2, \quad , n\}$, existeix una successió $s^i \in S_F(S)$ tal que

$$s^i\ y_i \in D$$

i aplicant POF2 resulta que

$$t\ x \in D$$

on $t = s^1 \qquad s^n$ i és obvi que $t \in S_F(S)$ Per tant $y \in K_D(S)$

Nota

En el cas dels sistemes pre-ordenadors dèbils teniem el teorema I 1 1 que donava una condicio necessària i suficient per tal que C_D fós una clausura

En el cas dels sistemes pre-ordenadors forts, el teorema II 2 1 dóna una condicio suficient per tal que K_D sigui una clausura

Anem a veure si es possible millorar el teorema II 2 1

C1 La condicio C1, $K_D(S) \supseteq S$ per tot $S \in P(A)^*$ no ens assegura pas que D verifiqui $x\ x \in D$, per tot x de A

En efecte Fem $S = \{x\}$, aleshores

$$K_D(x) \supseteq \{x\},$$

d on en podem deduir l existencia d una successió finita $s = (x \quad {}^{n_x} \quad x) \in S_F(S)$ tal que $s\ x \in D$ Per tant, resulta que

> $K_D(S) \supseteq S$ per tot $S \in P(A)^*$ si i només si per cada x de A existeix un nombre natural $n_x \geq 1$, tal que
>
> $$x^{(n_x)}\ x \in D \text{ "}$$

Aquesta condicio l anomenarem POF1 i tindrem

$$K_D(S) \supseteq S \text{ si i només si POF1 '}$$

Podria ocórrer que POF1 i POF2 impliquessin POF1 i aleshores la condicio C1 juntament amb POF2 ens asseguraria que D és un sistema pre-ordenador fort però això no passa segons ho prova el seguent exemple

El conjunt $A = \{x\ y\ z\}$ proveït de l'operació

	x	y	z
x	x	x	y
y	z	x	y
z	x	x	y

És clar que $\{y\}$ verifica POF1 i POF2 i malgrat tot, no verifica pas POF1

C3 De manera semblant $K_D(K_D(S)) = K_D(S)$ per tot $S \in P(A)^*$ no ens assegura pas que D verifiqui la condició POF2

Suposem que $s\ x \in D$ on $s = (y_1 \quad ,y_n) \in S_F(S)$ i que per cada $i \in \{1\ 2 \quad n\}$ existeix una successió $s^i = (z^i_1 \quad ,z^i_{m_i}) \in S_F(S)$ tal que $s^i\ y_i \in D$, aleshores la definició de K_D ens diu que per cada $i \in \{1\ 2 \quad n\}$

$$y_i \in K_D(z^i_1 \quad ,z^i_{m_i})$$

i, per tant, per tot $i \in \{1\ 2 \quad n\}$, tenim que

$$y_i \in K_D(z^1_1 \quad z^1_{m_1} \quad z^n_1 \quad z^n_{m_n}),$$

d on resulta que

$$s \in S_F(K_D(z^1_1, \quad ,z^n_{m_n}))$$

i per la definició de K_D, s obté que

$$x \in K_D(K_D(z^1_1, \quad ,z^n_{m_n})) = K_D(z^1_1, \quad z^n_{m_n})$$

(en virtut de la hipòtesi)

Això ens diu que existeix una successió $t \in S_F(z^1_1, \quad ,z^n_{m_n})$ tal que $t\ x \in D$, però no podem pas assegurar que la successió t sigui precisament $t = s^1 \ldots s^n$

Si anomenem POF2 la condició que hem deduït de l hipòtesi $K_D(K_D(S)) = K_D(S)$ per tot $S \in P(A)^*$, que es

> si $y_1 \ldots y_n\, x \in D$ i per cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
> ex steixen m_i elements de A $z_1^i \ldots z_{m_i}^i$, tals que
>
> $$z_1^i \ldots z_{m_i}^i\, y_i \in D$$
>
> aleshores existeix una successio s de
> $S_F(z_1^1 \ldots z_{m_n}^n)$ tal que
>
> $$s\, x \in D$$

obtenim la seguent proposicio

> $K_D(K_D(S)) = K_D(S)$ per tot $S \in P(A)^*$, si, i només si D verifica POF2

Ja hem vist que C3 implica POF2 Cal veure que, si D verifica POF2 (i POF1 o POF1) aleshores tenim que $K_D(K_D(S)) = K_D(S)$ per tot S de $P(A)^*$ Ara bé si D verifica POF1 o POF1 aleshores $K_D(K_D(S)) \supseteq K_D(S)$ Per tant cal veure que si $x \in K_D(K_D(S))$ aleshores $x \in K_D(S)$ (qualsevol que sigui $S \in P(A)^*$)

$$x \in K_D(K_D(S)) \text{ si i nomes si } (\exists s)(s \in S_F(K_D(S)) \text{ i } s\, x \in D)$$

d on

$$(\exists s)(s = (y_1, \ldots, y_n) \text{ i } y_i \in K_D(S) \text{ i } s\, x \in D)$$

i per tant per cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existeix una successio finita $s^i \in S_F(S)$ tal que

$$s^i\, y_i \in D$$

on $s^i = (z_1^i, \ldots, z_{m_i}^i)$

Per tant per tot $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$y_i \in K_D(z_1^1, \quad , z_{m_n}^n)$$

i

$$x \in K_D(y_1 \quad y_n)$$

d'on per POF2 , resulta que

$$x \in K_D(z_1^1, \quad z_{m_n}^n)$$

Ara bé els elements z_j^i $j = 1\ 2, \quad m_i$ $i = 1\ 2, \quad , n$ són elements de S i per tant per C2,

$$\{z_1^1, \quad z_{m_n}^n\} \subseteq S$$

implica

$$x \in K_D(S)$$

Com abans és possible comprovar que POF1 i POF2 no impliquen pas POF2 Considerem el seguent exemple el conjunt $A = \{x\ y\}$, proveït de l operacio $x\ x = y . y = y$, $y\ x = x\ y = x$ En ell considerem el conjunt $D = \{x\}$, aleshores

$$K_D(x) = A, \quad K_D(y) = A, \quad K_D(A) = A,$$

ja que

$$x^{(2)}\ x = x\ (x\ x) = x\ y = x,$$
$$x\ y = x$$
$$y\ x = x$$
$$y^{(2)}\ y = y\ (y\ y) = y\ x = x,$$

per tant $K_D(S) \supseteq S$ (POF1') i $K_D(K_D(S)) = K_D(S)$ (POF2) (per tot $S \in P(A)^*$) i, en canvi si bé

$$x^{(2)}\ x \in D \quad i \quad x\ y \in D,$$

resulta que

$$x^{(2)}\ y = x\ (x\ y) = x\ x = y \notin D$$

Tampoc no és veritat que, si D satisfa POF1 i POF2 , satisfaci POF2 Considerem el seguent exemple el conjunt

$A = \{x,y\}$ i l operació $x\,x = x\,y = y\,y = x$, $y\,x = y$ i el sub-conjunt de A, $D = \{x\}$, aleshores

$$K_D(x) = A,$$
$$K_D(y) = A$$
$$K_D(A) = A$$

ja que

$$x\,x \in D$$
$$x\,y \in D,$$
$$y\,y \in D,$$
$$y^{(2)}\,x \in D,$$

i en canvi D no satisfà pas POF2, puix si bé

$$y^{(2)}\,x \in D \qquad \text{i} \qquad x\,y \in D,$$

$y^{(2)}\,y \notin D$

Tot el que s ha exposat ens porta a la següent conclusió si volem definir el concepte de sistema pre-ordenador fort de manera que es generalitzi el teorema I 1 1 cal definirlo com aquell sub-conjunt D de A que verifica POF1 i POF2 però aleshores ens trobem amb un greu inconvenient i es que falla la proposicio II 1 3 es a dir que aquest nou concepte de sistema pre-ordenador fort no generalitza pas el concepte de sistema pre-ordenador dèbil (def I 1 4) que es el que nosaltres desitgem realment (ja que en el concepte de <u>sistema deductiu classic</u> (Monteiro [1971], Diego [1966]) el pre-ordre induït juga un paper important i en lògica, la terminologia $\models (A \Rightarrow B)$ tambe ens dona un pre-ordre)

És per això que hem donat la definició tal com es troba en la def II 1 1

II 3 Notes sobre l'aplicació $\bar{\Phi}$

Definim l'aplicació $\bar{\Phi}$ $POF(A) \longrightarrow \Delta(P(A)^{*})$ per mitjà de

$$D \in POF(A), \qquad \bar{\Phi}(D) = K_D$$

Aquesta aplicació en general no es pas exhaustiva ja que l anterior discussió ens permet de con truir conjunts $B \neq \emptyset$, $B \subsetneq A$ que verifiquin POF1 i POF2 i que per tant, l operador K_B a ells associat sigui un operador clausura Ara be si B verifica POF1 en <u>sentit estricte</u> (es a dir si existeix un x de A tal que $\min\{n \in N;\ n \neq 0$ i $x^{(n)}$ $x \in B\}$ es més gran que 1), es molt possible que no existeixi cap sistema pre-ordenador fort D tal que $K_D = K_B$

Considerem el seguent exemple el conjunt $A = \{x, y\ z\}$, proveït de l'operació

	x	y	z
x	x	z	z
y	z	x	z
z	x	x	y

,

Considerem el sub-conjunt $B = \{x\}$ no es pas un sistema pre-ordenador fort pero en canvi l operador

$$K_B : P(A)^{*} \longrightarrow P(A),$$

definit per

$$K_B(S) = \{x \in A : (\exists\, s)(s \in S_F(S) \text{ i } s\ x \in D)\},$$

és un operador clausura, ja que

$$K_B(x) = \{x\}, \qquad K_B(x,y) = \{x\ y\},$$
$$K_B(y) = \{y\}, \qquad K_B(x,z) = A,$$
$$K_B(z) = \{x,y,z\}, \qquad K_B(y,z) = A,$$
$$K_B(A) = A$$

Cal veure que no existeix cap sistema pre-ordenador fort tal que l operador conseqüència forta a ell associat coincideixi amb K_B Considerem els possibles sistemes pre-ordenadors forts de (A,) $B_1 = \{x,y\}$ i A Però B_1 no ho es ja que

$$y\ (z\ z) \in B_1 \qquad i \qquad z\ x \in B_1,$$

pero en canvi

$$y\ (z\ x) = y\ x = z \notin B_1$$

Per tant l unic sistema pre-ordenador fort és A, però es clar que

$$K_A \neq K_B$$

ja que $K_A(x) = A \neq K_B(x)$

Pel que fa referencia a la injectivitat de $\overline{\Phi}$ hem trobat una condició necessària es la mateixa que la donada en la prop I 2 2 i la demostracio tambe és semblant

Proposicio II 3 1

Si $\overline{\Phi}$ és injectiva aleshores tot element de A és factoritzable en (A)

En efecte

Suposem que no fós així disposariem d un cert element x de A que no fóra pas factoritzable i, per tant, si considerem un sistema pre-ordenador fort D_1 resulta que també ho seran els sub-conjunts

$$D_2 = D_1 - \{x\} \qquad i \qquad D_2 = D_1 \cup \{x\}$$

És clar que $D_2 \neq D_2$ i que $D\ _2 - D_2 = \{x\}$ i que $K_{D_2}(S) = K_{D_2^1}(S)$, per qualsevol $S \in P(A)^*$, ja que

i) si $x \in D_1$, aleshores $D_2 = D_1$ i $D_2 \neq D_1$

ii) si $x \notin D_1$, aleshores $D_2 = D_1$ i $D_2 \neq D_1$,

iii) $x \in D_2$ en tots dos casos i en cap d'ells $x \in D_2$,

iv) $y \in K_{D_2}(S)$ si i només si $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\,y \in D_2)$ d'on $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\,y \in D_2)$ (ja que $D_2 \subseteq D_2$) i per tant, $y \in K_{D_2}(S)$

v) $y \in K_{D_2}(S)$ si i només si $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\,y \in D_2)$ però $s\,y \neq x$ (ja que x no és factoritzable i $s\,y$ si que ho és suposem $s = (z_1 \ldots, z_n)$, aleshores $s\,y = z_1 (z_2 (\ldots (z_n\,y) \ldots))$ i, fent $z = z_2 \ldots z_n\,y$, resulta que $s\,y = z_1\,z)$, per tant tenim que

$$(\exists s)(s \in S_F(S) \text{ i } s\,y \in D_2)$$

que equival a

$$y \in K_{D_2}(S),$$

i això acaba la demostració

Respecte del recíproc no hem estat capaços de trobar-ne ni una demostració ni tampoc un contra-exemple. Mes endavant tornarem sobre aquest punt.

Això fà que no poguem donar cap proposició anàloga a la prop I.2.3, malgrat que Φ és un morfisme d'ordre ja que si D_1 i D_2 son dos sistemes pre-ordenadors forts i $D_1 \subseteq D_2$, aleshores

$$K_{D_1} \leqslant K_{D_2}$$

puix, si $S \in P(A)^{*}$ i $y \in K_{D_1}(S)$ aleshores existeix una successio s de $S_F(S)$ tal que $s\,y \in D_1$ i, per tant, $s\,y$ pertany a D_2, d'on resulta que $y \in K_{D_2}(S)$

És fàcil de veure que la intersecció de sistemes pre-ordenadors forts es tambe un sistema pre-ordenador fort i, per tant és possible parlar del sistema pre-ordenador fort engendrat per $B \subseteq A$ (ja que A n'és un)

Una conseqüència immediata de les definicions i de la prop II 1 3 és que tot sistema pre-ordenador dèbil engendrat per B es un sub-conjunt del sistema pre-ordenador fort engendrat per B

En l apartat II 4 veurem que, en un grup els unics sistemes pre-ordenadors forts son els sub-grups que contenen els quadrats dels elements de A Això ens permet demostrar que en general el reticle dels sistemes pre-ordenadors forts de (A)

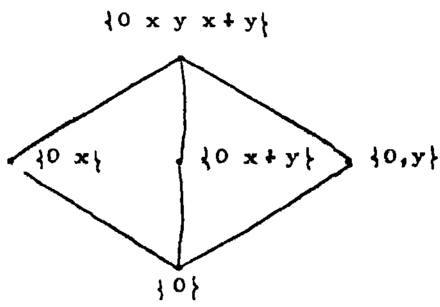
$$(POF(A)\ \wedge, \vee)$$

no és pas distributiu

Considerem un grup auto-oposat que contingui, al menys tres elements diferents x, y i 0 i considerem els sub-grups

$$\{0,x\} \quad \{0,y\} \quad \{0\ x+y\}, \quad \{0\ x\ y\ x+y\},$$

aquests sub-grups contenen tots els quadrats dels elements del grup i per tant son sistemes pre-ordenadors forts Construim el reticle que formen



Resulta doncs, que el reticle dels sistemes pre-ordenadors forts d un grup auto-oposat amb tres elements, al menys no es pas distributiu (Birkhoff [1948])

Pel que fa referència a l extensió de K_D a $P(A)$ tot sencer ens trobem igual que en l apartat I 3 Definim $K_D(\emptyset) = \emptyset$

II 4 Consideracions de tipus algebraic sobre la naturalesa dels sistemes pre-ordenadors forts

Tot sistema pre-ordenador fort és un sistema pre-ordenador dèbil (prop II 1 3) i per tant en les hipòtesis de la prop I 4 1 i dels seus corol laris resulta que tot sistema pre-ordenador fort és una sub-estructura que conté *els* quadrats *dels elements* de A

En el cas particular dels grups (prop I 4 1) tenim que tot sub-grup que conté els quadrats de A és un sistema pre-ordenador dèbil La pregunta que ara ens fem és : què passa amb els sistemes pre-ordenadors forts d un grup? La resposta com veurem, generalitza la prop I 4 1 gràcies a que tot sub-grup que conte els quadrats dels elements de A és normal (prop I 4 2)

En efecte :
Suposem que $D \subseteq A$ és un sub-grup de (A,) tal que $A^2 \subseteq D$
Aleshores D és un sub-grup normal (prop I 4 2)
Si, per un cert x de A es verifica

$$y_1 \quad y_{i-1}\, y_i\, y_{i+1} \quad y_n\, x \in D$$

i, per un dels índex $i \in \{1\ 2 \quad n\}$, es verifica

$$z_1 \quad z_m\, y_i \in D,$$

aleshores

$$y_1 \quad y_{i-1}\, z_1 \quad z_m\, z_1 \quad z_m\, y_i\, y_{i+1} \quad y_n\, x \in D,$$

ja que, per l associativitat del grup,

$$y_1 \quad y_{i-1}\, z_1 \quad z_m\, z_1 \quad z_m\, y_i\, y_{i+1} \quad y_n\, x =$$
$$= y_1 \quad y_{i-1}\, (z_1 \quad z_m)\, (z_1 \quad z_m)\, y_i\, y_{i+1} \quad y_n\, x$$

i, com que $(z_1 \quad z_m)^2 \in D$ (per hipòtesi), resulta que, en virtut de la normalitat del sub-grup D, existeix un element $d \in D$ tal que

$$y_1 \qquad y_{i-1} (z_1 \qquad z_m)^2 = d\, y_1 \qquad y_{i-1}$$

i, per tant,

$$y_1 \qquad y_{i-1} (z_1 \qquad z_m)^2 y_i\, y_{i+1} \qquad y_n\, x =$$

$$= d\, y_1 \qquad y_{i-1}\, y_i\, y_{i+1} \qquad y_n\, x \in D,$$

ja que $d \in D$ i $y_1 \qquad y_{i-1}\, y_i\, y_{i+1} \qquad y_n\, x \in D$

D altra banda tenim que

$$y_1 \qquad y_{i-1} (z_1 \qquad z_m) (z_1 \qquad z_m)\, y_i\, y_{i+1} \qquad y_n\, x =$$

$$= y_1 \qquad y_{i-1} (z_1 \qquad z_m) (z_1 \qquad z_m\, y_i)\, y_{i+1} \qquad y_n\, x =$$

$$= d \quad y_1 \qquad y_{i-1}\, z_1 \qquad z_m\, y_{i+1} \qquad y_n\, x,$$

on $d \in D$ i, per tant,

$$d \quad y_1 \qquad y_{i-1}\, z_1 \qquad z_m\, y_{i+1}\, y_{i+2} \qquad y_n\, x \in D$$

que, en un grup, comporta que

$$y_1 \qquad y_{i-1}\, z_1 \qquad z_m\, y_{i+1} \qquad y_n\, x \in D$$

i tenint en compte la prop II 1 2, queda demostrat que D és un sistema pre-ordenador fort

Notes

1 La demostració donada es pot estendre a qualsevol estructura associativa (A,) i a qualsevol sub-conjunt D de A tal que

(i) $D\, D \subseteq D$,
(ii) $A^2 \subseteq D$,
(iii) D verifica M P ,

si, a mes verifica

per cada y de A i cada x de D, existeix un x $\in$ D tal que

$$y\, x = x \quad y$$

Això es molt restrictiu i mes quan que l associativitat més aviat ens molesta de cara a les nostres pretensions es a dir, els sistemes pre-ordenadors, si be es poden definir en qualsevol estructura (A,) des d el punt de vista logic conve mes aviat que l operació no sigui associativa i aixo es degut al fet de que el que realment importa des d el punt de vista lògic són el M P i l absorció per la dreta (que ens informen respectivament de que si un teorema expressat en forma implicativa te l antecedent verdader, també és verdader el seu conseguent i que de qualsevol expressió s en segueix un teorema) i en aquesta línea, Sales ha demostrat (en Sales [1973])

> Si D es un sub-conjunt de (A) absorbent per la dreta i que verifica M P , i l operacio es associativa, aleshores D = A
>
> En efecte
>
> Si $x \in A - D$, tenim que $(x\ x)\ (x\ x) \in D$ si D verifica P01, però per l associativitat
>
> $$(x\ x)\ (x\ x) = (x\ (x\ x))\ x$$
>
> i, com que $x\ x \in D$, l absorció per la dreta ens diu que $x\ (x\ x) \in D$ i, per M P , resulta que $x \in D$ Contradicció

En el cas dels grups hem vist que tot sub-grup que conté els quadrats és un sistema pre-ordenador però cal observar que en general un sub-grup no és pas absorbent per la dreta (si es diferent de A), si bé verifica el M.P

2 Al marge de la qüestió de l associativitat, les condicions anteriors són molt fortes i per tant, no tots els sistemes pre-ordenadors forts les verifiquen

Així el conjunt $A = \{x, y\}$, proveït de l operacio constant $x\,x = y\,y = x\,y = y\,x = x$ admet un sub-conjunt $D = \{x\}$, que és un sistema pre-ordenador fort però no verifica pas M P

Així el conjunt $A = \{x\, y, z\}$, proveït de l operació

	x	y	z
x	x	z	z
y	z	x	z
z	z	z	x

admet el sistema pre-ordenador fort $D = \{x, y\}$ i, en canvi no es pas tancat

3 En el cas dels grups tenim que

$$K_D(x) = \bigcup_{n \in N} x^{(n)}\, D = \bigcup_{n \in N} x^n\, D = x\, D \cup D,$$

ja que $x^{2p}\, D \subseteq D$ (puix D conte els quadrats del elements de A) i $x^{2p+1}\, D \subseteq x\, D$

En l apartat I 4,pag 27 veiem que $C_D(x) = x\, D$

Aquests dos fets ens suministren un contra-exemple de la prop recíproca de la prop II 6 1 com veurem mes endavant

II 5 Comparacions entre C_D i K_D

Ja hem repetit moltes vegades que tot sistema pre-ordenador fort es un sistema pre-ordenador debil (prop II 1 3); per tant si D es un sistema pre-ordenador fort, podem considerar simultaneament els operadors clausura C_D i K_D Pretenim comparar-los

Proposició II 5 1

Per tot $S \in P(A)^{*}$ $C_D(S) \subseteq K_D(S)$ i en general no es verifica pas la igualtat

En efecto

A Si $y \in C_D(S)$ aleshores $(\exists x)(x \in S \quad x\ y \in D)$ Fem ara $s = (x) \in S_F(S)$ i tindrem que $y \in K_D(S)$

B Per veure que, en general no es verifica pas la igualtat disposem de dos tipus de contra-exemples

(i) <u>els grups</u> Hem vist en la nota 3 pag 68 que $C_D(x) = x\ D \neq K_D(x) = x\ D \cup D$

(ii) <u>les algebres de Hilbert</u> Sigui (A) una algebra de Hilbert i sigui $D = \{u\}$ i $S = \{x\ x\ y\}$

Aleshores

$$C_D(S) = \{z \in A \quad x\ z = u \text{ ó } (x\ y)\ z = u\} =$$

$$= \{z \in A \quad x \leq z \text{ o } x\ y \leq z\}$$

en canvi si $y < x$ o y no es comparable amb x i $y < x\ y$ aleshores tenim que

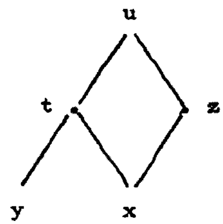
$$x\ (x\ y)\ y = x\ ((x\ y)\ y) = (x\ y)\ (x\ y) = u$$

i, per tant, $y \in K_D(S)$ i $y \notin C_D(S)$

Concretament si $A = \{x, y, z, t\ u\}$ és un conjunt proveït de l estructura de Hilbert

	x	y	z	t	u
x	u	y	u	u	u
y	z	u	z	u	u
z	t	y	u	t	u
t	z	y	z	u	u
u	x	y	z	t	u

obtindrem el conjunt ordenat :



Ara fem $S = \{y\ z\}$ puix $z = y\ x$ i $x < z$ i y no és comparable amb z i obtenim

$$C_D(S) = \{y, z\ t, u\}$$

i, en canvi,

$$K_D(S) = A$$

(puix que $y\ z\ x = y\ (z\ x) = y\ t = u$)

Proposició II 5 2

Els operadors clausura K_D no són pas en general, morfismes respecte de la reunio si bé

$$K_D(S \cup S\ ) \subseteq K_D(S) \cup K_D(S\ )$$

En efecte

A $x \in K_D(S) \cup K_D(S\ )$ si, i nomes si $x \in K_D(S)$ ó $x \in K_D(S\ )$ si, i només si, $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\ x \in D)$ o $(\exists s\ )(s \in S_F(S\ )$ i $s\ \ x \in D)$,

per tant,

$$(\exists t)(t \in S_F(S \cup S\ ) \text{ i } t\ x \in D)$$

que, per definició significa que $x \in K_D(S \cup S\ )$

B Per veure que en general no es verifica pas el signe de igualtat, serveixen els contra-exemples anteriors

(i) pel que fà referència a grups $K_D(x) = x\ D \cup D$, $K_D(y) = y\ D \cup D$ i, en canvi,

$$K_D(x,y) = x\ D \cup y\ D \cup x\ y\ D \cup y\ x\ D \cup D$$

(ii) pel que fà referència a les àlgebres de Hilbert

$$K_D(y) = \{y\ t,u\}$$
$$K_D(z) = \{z,u\}$$
$$K_D(y,z) = A$$

Notes

1 K_D no és naturalment morfisme respecte de les interseccions puix, si definim $K_D(\emptyset) = \emptyset$, pot molt be ocórrer que

$$K_D(S) \cap K_D(S\ \ )$$

sigui diferent del buit

En particular si en l exemple anterior d àlgebra de Hilbert fem

$$K_D(\{y\} \cap \{z\}) = K_D(\emptyset) = \emptyset$$

tenim que

$$K_D(\{y\} \cap \{z\}) \neq K_D(y) \cap K_D(z) = \{u\}$$

2 Malgrat no verificarse que K_D sigui morfisme respecte de les reunions arbitràries, K_D és un operador consequència en el sentit de Tarski (Tarski [1930]) Tarski anomena operador consequencia a tot operador Cn,

$$Cn\quad P(A) \longrightarrow P(A)$$

tal que verifiqui C1,C3 i T on T diu:

$$\text{per tot } S \subseteq A,\ Cn(S) = \bigcup_{F \subseteq S} Cn(F),\ \text{on } F \text{ és finit}$$

Tarski demostra que C1,C3 i T impliquen C2 Ara bé en el cas dels operadors consequencia K_D, associats a sistemes pre-ordenadors forts resulta que C1 C2 i C3 impliquen T, puix

(i) $x \in K_D(S)$ si, i només si, existeix un sub-conjunt finit F, $F \subseteq S$ tal que $x \in K_D(F)$

En efecte

$x \in K_D(S)$ si, i nomes si, $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\ x \in D)$;

suposem que $s = (y_1, \quad , y_n)$ i considerem el sub-conjunt finit de S,

$$F = \{y_1, \quad , y_n\}$$

(pot esser unitari) És clar que $s \in S_F(F)$;

per tant, $(\exists s)(s \in S_F(F)$ i F finit $\subseteq S$ i $s\ x \in D)$

Per veure la inclusió en sentit contrari, és suficient adonar-se que, si $F \subseteq S$ aleshores $S_F(F) \subseteq S_F(S)$

(ii) Per demostrar la condició T $K_D(S) = \bigcup_{F \subseteq S} K_D(F)$,

F finit considerem un element x de A;

$x \in K_D(S)$ si i nomes si existeix un sub-conjunt F de S, finit, tal que $x \in K_D(F)$

(Veure nota pàg 10)

3 Per tot $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$, es verifica

$$K_D(C_D(S)) = K_D(S) \quad \text{i} \quad C_D(K_D(S)) = K_D(S)$$

En efecte :

$z \in K_D(C_D(S))$ si, i només si, $y_1 \quad y_m\ z \in D$ i $y_i \in C_D(S)$, $i = 1 \quad m$, si, i només si,

$$y_1 \quad y_m\ z \in D \text{ i } z_i\ y_i \in D \text{ i } z_i \in S,\ i = 1, \quad , m$$

d on, com que D és un sistema pre-ordenador fort,

$$z_1 \quad z_m\ z \in D \text{ i } z_i \in S \quad i = 1 \quad , m$$

i aixo significa que $z \in K_D(S)$

La desigualtat en l altre sentit s obte aplicant C2 a $C_D(S) \supseteq S$

L altra igualtat es demostra analogament

II 6 Absorció per la dreta i M P

Pel que fà referència a la prop I 5 1 veiem que en el cas dels sistemes pre-ordenadors forts i dels operadors consequència associats K_D, el resultat es mes dèbil

Proposició II 6 1

> Sigui D un sistema pre-ordenador fort respecte de l operació de (A) Si D es absorbent per la dreta alesho-res
>
> $$D \subseteq K_D(S)$$
>
> per tot $S \in P(A)^*$

En efecte :
Per la prop II 5 1 tenim que, per cada $S \in P(A)^*$,

$$C_D(S) \subseteq K_D(S)$$

i, per la prop I 5 1, tenim que, si D és absorbent per la dreta (l absorcio per la dreta no té res a veure amb que D sigui fort o dèbil), per cada $S \in P(A)^*$,

$$D \subseteq C_D(S)$$

Per tant, per cada $S \in P(A)^*$,

$$D \subseteq K_D(S)$$

El recíproc, que era vàlid en el cas dels sistemes pre-ordenadors dèbils, ara no ho és

Hem vist que en el cas dels grups, $K_D(x) = x\,\dot{D} \cup D$ i, per la prop II 5 2, $K_D(S) \supseteq D$, per tot $S \in P(A)^*$ Mal-grat això, D no es pas absorbent per la dreta si $D \neq A$

Pel que fà referència al M P , veiem que pel contrari, els teoremes que s obtenen són anàlegs als obtinguts en I 6 En efecte :

Proposició II 6 2

Un conjunt pre-ordenador fort D verifica M P si, i només si,

$$K_D(D) = D$$

En efecte

A $D \subseteq K_D(D)$ en virtut de C1

Suposem ara que $K_D(D) \subseteq D$ Aleshores $C_D(D) \subseteq D$, d on $C_D(D) = D$ i aplicant la prop I 6 1, resulta que D verifica el M P

B Si D verifica M P aleshores, per tot $z \in K_D(D)$, tenim que

$$y_1 \qquad y_n \; z \in D,$$

on cada $y_i \in D$ $(i = 1,2 \quad ,n)$ i aplicant reiteradament M P , la demostració queda establerta

Proposició II 6 3

Una condicio necessària i suficient per tal que un sistema pre-ordenador D verifiqui M P és que existeixi un sub-conjunt S de A tal que

$$K_D(S) = D$$

És clar que $D \supseteq S$

En efecte

A Si D verifica M P aleshores, en virtut de la prop II 6 2, fem $S = D$

B Si $K_D(S) = D$ aleshores, d una banda, $S \subseteq C_D(S) \subseteq D$;

suposem ara d altra banda que $K_D(S) = D$ però que $K_D(D) \neq D$ Aleshores existeix un $x \in K_D(D)$ tal que $x \notin D$ i, per tant, per certs $y_i \in D$ $(i = 1,2, \quad ,n)$, tindrem

$$y_1 \quad y_n\ x \in D,$$

però per hipòtesi, $y_i \in K_D(S)$, per tot $i \in \{1,2, \quad ,n\}$, i, per tant, existeixen m_i elements de S $z_1^i, \quad ,z_{m_i}^i$ tals que

$$z_1^i \quad z_{m_i}^i\ y_i \in D,$$

d on, donat que D és un sistema pre-ordenador fort, resulta que

$$z_1^1 \quad z_{m_n}^n\ x \in D$$

i, finalment tenim que

$$x \in K_D(S) = D$$

Contradicció

Corol lari

Una condició necessària i suficient per tal que un sistema pre-ordenador fort D verifiqui M P es que existeixi un sistema pre-ordenador fort D tal que

$$K_D(D') = D$$

És clar que D $\supseteq$ D

(Vegis I 6, sobretot nota 3)

Definició II 6 1

Un sistema pre-ordenador fort D que verifiqui M P 1 anomenarem un <u>sistema deductiu fort</u>

II 7 Els sistemes deductius forts

Una propietat realment important trobada per Sales (Sales [1974]) es que, si D és un sistema deductiu fort, absorbent per la dreta aleshores $K_D(S)$ es un sistema deductiu dèbil, per qualsevol $S \in P(A)^*$

Amb precisió :

Lema II 7 1

> Si D és un sistema deductiu fort en (A,), aleshores $K_D(S)$ verifica M P , qualsevol que sigui $S \in P(A)^*$

En efecte

Si $x \in K_D(S)$ i $x\ y \in K_D(S)$, aleshores existeixen dues successions s_1, s_2 de $S_F(S)$ tals que

$$s_1\ x \in D,$$

$$s_2\ x\ y \in D,$$

i, per POF2 resulta que

$$s_2\ s_1\ y \in D,$$

on $s_2\ s_1 \in S_F(S)$ Per tant,

$$y \in K_D(S)$$

Lema II 7 2

> Si D es un sistema deductiu fort en (A,), aleshores, qualsevol que sigui S de $P(A)^*$ $K_D(S)$ verifica PO2

En efecte :

Si $x\ y \in K_D(S)$ i $y\ z \in K_D(S)$, aleshores existeixen dues successions s_1, s_2 de $S_F(S)$ tals que

$$s_1 \; x \; y \in D,$$

$$s_2 \; y \; z \in D,$$

d on, per POF2

$$s_2 \; s_1 \; x \; z \in D,$$

on s_1 i s_2 pertànyen a $S_F(S)$ Per tant,

$$x \; z \in K_D(S)$$

A fi de poder assegurar POF1 cal que per cada $x \in A$, $x \; x \in K_D(S)$ És clar que, si $D \subseteq K_D(S)$, el problema estarà resolt per tant,

Lema II 7 3

> Si D és un sistema deductiu fort de (A) absorbent per la dreta, aleshores qualsevol que sigui S de $P(A)^{*}$, $K_D(S)$ verifica PO1

En efecte

És conseqüència immediata de l'observació anterior i de la prop II 6 1

Tot això demostra la proposició

Proposició II 7 1 (Sales [1974])

> Si D es un sistema deductiu fort de (A,) absorbent per la dreta aleshores, per qualsevol S de $P(A)^{*}$, tenim que $K_D(S)$ es un sistema deductiu dèbil

Proposició II 7 2

> Si D(S) designa el sistema deductiu dèbil engendrat per S i D es un sistema deductiu fort, absorbent per la dreta, aleshores
>
> $$K_D(S) = D(S \cup D)$$

En efecte

$K_D(S) \supseteq D(S \cup D)$ puix $K_D(S) \supseteq S$ i $K_D(S) \supseteq D$

Si $D \supseteq D(S \cup D)$, aleshores si $y \in K_D(S)$,

$(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\ y \in D)$, però cada un dels termes de la successió s pertany a D (puix $D \supseteq S$) i, per M P, $y \in D$ (puix $D \supseteq D$)

Proposició II 7 3

> Sigui D un sistema deductiu fort, absorbent per la dreta, de $(A, \ )$ i sigui $S \in P(A)^{*}$, aleshores
>
> $$C_{K_D(S)}(S\ ) \subseteq K_D(S \cup S\ ),$$
>
> per tot S de $P(A)^{*}$

En efecte:

$x \in C_{K_D(S)}(S\ )$ si, i només si, $(\exists y)(y \in S$ i $y\ x \in K_D(S))$

si, i nomes si, $(\exists y)(y \in S$ i $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\ y\ x \in D))$

d on $(\exists y)(\exists s)(y \in S$ i $s \in S_F(S)$ i $s\ y\ x \in D)$,

d on $(\exists t)(t \in S_F(S \cup S\ )$ i $t\ x \in D)$

La successio t es precisament $t = s\ y$

Corol lari

> Si D és un sistema deductiu fort, absorbent per la dreta, de $(A\ \ )$, aleshores
>
> (i) si $S \subseteq S'$, tenim $C_{K_D(S)}(S\ ) \subseteq K_D(S')$;
>
> (ii) per tot S de $P(A)^{*}$, $C_{K_D(S)}(S) \subseteq K_D(S)$

En efecte

(i) Aplicant la prop II 7 3;

(ii) Cal fer $S' = S$ en la prop II 7 3

Proposició II 7 4

> Si D és un sistema deductiu fort, absorbent per la dreta, de $(A, \ )$ i S i

S pertanyen a $P(A)^{*}$ i $S \subseteq S$,
aleshores

$$K_D(S) \subseteq C_{K_D(S)}(S)$$

En efecte :
$x \in K_D(S)$ si, i només si, $(\exists s)(s \in S_F(S)$ i $s\ x \in D)$
d on, per la prop II 6 1, en resulta que

$$s\ x \in K_D(S)$$

Ara bé, si fem $s = (y_1, \quad ,y_n)$, on cada $y_i \in S$ $(i = 1, \quad ,n)$, per C1 i C2 resulta que

$$y_i \in K_D(S) \subseteq K_D(S), \quad i = 1,2 \quad ,n$$

Si apliquem reiteradament M P (prop II 7 1) resulta que

$$y_n\ x \in K_D(S),$$

on $y_n \in S$ i, per tant,

$$x \in C_{K_D(S)}(S)$$

Corol lari

Per cada $S \in P(A)^{*}$, tenim que

$$C_{K_D(S)}(S) = K_D(S)$$

En efecte :
Fem $S = S$ en la prop II 7 4 i, tenint en compte el corol-lari anterior, està demostrat

Això ens diu que donat un sistema pre-ordenador fort D, absorbente per la dreta, de (A), el conjunt de les conseqüències fortes de $S \in P(A)^{*}$ respecte de D coincideix amb el conjunt de consequencies debils de S respecte del sistema pre-ordenador dèbil $K_D(S)$

Corol lari

Per tot $S \in P(A)^{*}$ tal que $S \subseteq S \subseteq K_D(S)$, es verifica

$$C_{K_D(S)}(S\ ) = K_D(S)$$

En efecte :

$$C_{K_D(S)}(S) \subseteq C_{K_D(S)}(S\ ) \subseteq C_{K_D(S)}(K_D(S)) = K_D(S)$$

en virtut de C2 i de la prop I 6 1 Aplicant el cor de la prop II 7 4 resulta que

$$C_{K_D(S)}(S\ ) = K_D(S)$$

Proposicio II 7 4

Si D es un sistema deductiu fort i absorbent per la dreta de (A,), aleshores

$$\bigcap_{S \in P(A)^{*}} K_D(S) = \bigcap_{x \in A} K_D(x) = D$$

En efecte :

A Ês obvi que

$$\bigcap_{S \in P(A)^{*}} K_D(S) \subseteq \bigcap_{x \in A} K_D(x)$$

puix, per cada x de A, $\{x\} \in P(A)^{*}$

B Per la prop II 6 1 resulta que per tot S de $P(A)^{*}$ $D \subseteq K_D(S)$ per tant

$$D \subseteq \bigcap_{S \in P(A)^{*}} K_D(S)$$

C Cal veure doncs que

$$\bigcap_{x \in A} K_D(x) \subseteq D$$

Però això és immediat si tenim en compte les props II 6 1 i II 6 2 En efecte : sigui $\{x\} \subseteq D$ aleshores

$$D \subseteq K_D(x)$$

i, com que $\{x\} \subseteq D$ tenim per C2, que

$$K_D(x) \subseteq K_D(D) = D$$

Així resulta que existeix un x de A tal que $K_D(x) \subseteq D$ i això acaba la demostracio

Notes

1 Si tots els sistemes pre-ordenadors forts de (A) són sistemes deductius forts i absorbents per la dreta aleshores l aplicació $\bar{\Phi}$ definida en l apartat §II 3 és injectiva ja que com hem vist en la part C de la demostració de la prop II 7 4 si $x \in D$ $K_D(x) = D$ Agafem doncs $x \in D \cap D$ aleshores $K_D(x) = D$ i $K_D(x) =$ $= D$ i, com que $D \neq D$ resulta que $K_D \neq K_D$

2 Si D és un sistema deductiu, absorbent per la dreta de (A) (dèbil o fort), aleshores, en general, $C_D(S)$ no verifica pas M P

En efecte

A Si és dèbil es clar considerant B(ii) de la prop II 5 1, puix $y\ x = z \in C_D(S)$ i $y \in C_D(S)$ però $x \notin C_D(S)$

B Si es fort aleshores $C_D(S) = K_D(S)$ i això, com hem vist (prop II 5 1) en general és fals Justifiquem-ho $x \in K_D(S)$ si i només si $s\ x \in D$ (on $s \in S_F(S)$) d on $y_1 \quad y_n\ x \in D$ (on $y_i \in S$)
Així doncs

$$y_1 \qquad y_n\ x \in C_D(S)$$

i, per tot $i = 1, 2, \quad , n$,

$$y_i \in C_D(S)$$

Si apliquem reiteradament M P en $C_D(S)$ tindrem que

$$x \in C_D(S)$$

3 És obvi que, si D és un sistema deductiu de (A), fort i absorbent per la dreta, aleshores $K_D(S) = C_D(S)$ implica que $C_D(S)$ verifica M P

II 8 La relació d equivalència forta

Sigui D un sistema pre-ordenador fort en (A,) i definim en (A) la relació següent

$x \sim_D y$ si i nomes si existeixen dos nombres naturals n m ≥ 1 tals que

$$x^{(n)} y \in D \quad i \quad y^{(m)} x \in D$$

Proposició II 8 1

La relació $\sim_D$ és una relacio d equivalència en (A)

En efecte

(i) $x \sim_D x$ ja que per POF1 $x\, x \in D$

(ii) si $x \sim_D y$ aleshores, per definició $y \sim_D x$;

(iii) si $x \sim_D y$ i $y \sim_D z$ aleshores per hipòtesi, tenim que

$$x^{(n)} y \in D \quad i \quad y^{(m)} x \in D$$

i

$$y^{(n\ )} z \in D \quad i \quad z^{(m\ )} y \in D$$

i com que D es fort resulta que

$$x^{(n\ m)} z \in D \quad i \quad z^{(n\ \ m\ )} x \in D$$

Proposició II 8 2

Si $x \equiv_D y$, aleshores $x \sim_D y$;

en d altres paraules, si $\bar{x}_D$ designa la classe d equivalencia de representant x mòdul $\sim_D$ aleshores

$$[x]_D \subseteq \bar{x}_D$$

En general, no es verifica pas la igualtat

En efecte :

A De la definició de $\equiv_D$ i de la definició de $\sim_D$ es segueix la inclusio $[x]_D \subseteq \bar{x}_D$

B En (0 1] definim la seguent operació

$$x\ y = \begin{cases} 1 & \text{si i només si } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{si i només si } x \nleq y \end{cases}$$

És possible de demostrar (Sales [1974]) que $D = \{1\}$ es un sistema pre-ordenador fort Ara be

$$x \equiv_D y \quad \text{si i només si} \quad x = y$$

i en canvi

$$\frac{1}{2} \sim_D \frac{1}{4},$$

ja que

$$\frac{1}{4}\ \frac{1}{2} = 1 \in D \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\ (\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\ \frac{1/4}{1/2} = 1 \in D$$

Aquesta relació d equivalencia definida en (A,) l anomenarem <u>relació d equivalencia forta</u> i la relació que D defineix considerat com a sistema pre-ordenador dèbil l anomenarem <u>relacio d equivalencia dèbil</u>

Nota

És clar que si D verifica POF1 en lloc de POF1, la relació $\sim_D$ fóra la mateixa (puix per cada x de A, $x \sim_D x$, ja que per cada x de A, existeix un n natural ≥ 1 tal que $x^{(n)}\ x \in D$ i, en la simètrica i en la transitiva POF 1 no interve)

Proposició II 8 3

La relacio $\sim_D$ es precisament, la relació d equivalència induïda per l aplicació

$$K_D \quad A \longrightarrow P(A),$$

definida en virtut de

$$K_D(x) = K_D(\{x\})$$

Nota

En la pag 5 es precisava el seguent conveni de notació : $K_D(x) = K_D(\{x\})$ ara be en la proposicio anterior hi ha un abus de llenguatge per quant $K_D(x)$ és la imatge de l element x de A per mitjà de l aplicacio $K_D \; A \longrightarrow P(A)$, l abus consisteix en haver donat el mateix nom a dues aplicacions diferents com son $K_D \quad P(A)^* \longrightarrow P(A)$ i $K_D \quad A \longrightarrow P(A)$, malgrat que la definicio justifiqui aquest abus (veure I 8 pàg 37)

En efecte

A $\quad x \sim_D y$ equival a $x^{(n)} \; y \in D$ i $y^{(m)} \; x \in D$, per certs nombres naturals n, m $\geqslant 1$ Suposem ara que $z \in K_D(x)$, aleshores existeix un nombre natural $p \geqslant 1$ tal que

$$x^{(p)} \; z \in D$$

i per POF2,

$$y^{(m \; p)} \; z \in D,$$

per tant

$$z \in K_D(y)$$

i per simetria $K_D(x) = K_D(y)$

B $\quad$ Si $K_D(x) = K_D(y)$, aleshores, per C1 $x \in K_D(y)$ i, per tant,

$$y^{(m)} \; x \in D$$

i per simetria

$$x \sim_D y$$

D on resulta que per cada x de A,

$$\bar{x}_D = \{ y \in A \quad K_D(y) = K_D(x) \}$$

El problema que s ens planteja, un cop analitzada la relacio d equivalència forta consisteix en veure en quines condicions coincideixen la relacio d equivalència forta induïda per un sistema pre-ordenador fort amb la relacio d equivalencia dèbil que aquest sistema pre-ordenador indueix si s el considera com sistema pre-ordenador dèbil

En virtut de les props II 8 3 i la donada en I 8, pag 37 és facil comprovar que

$\bar{x}_D = [x]_D$ si, i nomes si, per tot y de A

$K_D(y) = K_D(x)$ si i nomes si $C_D(x) = C_D(y)$

Aquesta condicio es pot enunciar tambe :

$\bar{x}_D = [x]_D$ si i nomes si cada y de A pel que existeixen dos nombres naturals n m ≥ 1 que verifiquen

$$x^{(n)}\, y \in D \quad \text{i} \quad y^{(m)}\, x \in D$$

satisfà la relació

$$x\, y \in D \quad \text{i} \quad y\, x \in D$$

(És clar que si $x\, y \in D$ i $y\, x \in D$ aleshores existeixen dos nombres naturals n m ≥ 1 tals que $x^{(n)}\, y \in D$ i $y^{(m)}\, x \in D$)

La condició que acabem de trobar ens mena cap una condicio suficient en general no necessaria, de la qual en treurem moltes consequències interessants per a nosaltres

És la seguent :

Una condicio suficient per tal que $\bar{x}_D = [x]_D$ es que, per tot parall x, y d elements de A,

$$x^{(n)}\, y \in D \text{ impliqui } x\, y \in D \quad (\text{on } n \geq 1)$$

Aquesta condició ens diu que si per tot x de A,

$$C_D(x) = K_D(x),$$

aleshores $\bar{x}_D = [x]_D$
(Cal observar que $x^{(n)}$ y $\in D$ implica x y $\in D$ i $C_D(x) = K_D(x)$ són equivalents)

L anterior condicio no es pas necessària puix com és sabut, (A $\Rightarrow$B) i (C $\Rightarrow$D) implica (A i C $\Rightarrow$B i D), però, en canvi al reves no es pas cert (Bourbaki [1970])

L estructura $(Z +)$ fent $D = 2Z$ ens proporciona un exemple concret ja que d una banda

$$C_D(n) = 2Z + 1, \quad \text{si } n \notin 2Z,$$

$$C_D(n) = 2Z \quad \text{si } n \in 2Z$$

i en canvi,

$$K_D(n) = Z \quad , \quad \text{si } n \notin 2Z,$$

$$K_D(n) = 2Z \quad , \quad \text{si } n \in 2Z$$

i d altra banda,

$$[n]_D = \bar{n}_D = 2Z + 1, \quad \text{si } n \notin 2Z$$

$$[n]_D = \bar{n}_D = 2Z \quad \text{si } n \in 2Z$$

Per tant $[x]_D = \bar{x}_D$, per tot x de A no implica pas en general, $C_D(x) = K_D(x)$, per tot x de A

Nota
Si bé en II 7, nota 2 i també en la prop II 5 1 hem observat que, en general, $C_D(S)$ i $K_D(S)$ no coincideixen quan S es un conjunt unitari la situacio es un xic diferent :

Recordem que en una àlgebra de Hilbert (A,) per tot x, y de A, es verifica

$$x^{(n)} \; y = x \; y$$

(qualsevol que sigui l enter $n \geq 1$) Aixi doncs, $x^{(n)}$ y $\in$ D si, i nomes si, x y $\in$ D i, per tant, en una algebra de Hilbert, tot sistema pre-ordenador fort D verifica

$$C_D(x) = K_D(x),$$

per tot x de A, i, per tant,

$$\equiv_D = \sim_D$$

En el capítol III veurem que tot sistema deductiu d una àlgebra de Hilbert es un sistema deductiu classic (puix conté u)

Si D és un sistema deductiu fort tal que, per tota terna x,y,z d elements de A verifica

$$(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D,$$

aleshores, si existeix un nombre natural $n \geq 1$ tal que

$$x^{(n)}\ y \in D,$$

es verifica que

$$x\ y \in D$$

En efecte : si $n \geq 2$ podem escriure

$$x^{(n)}\ y = x\ (x\ (x^{(n-2)}\ y)) \qquad (\text{on } x^{o}\ y = y)$$

i, per hipòtesi,

$$(x^{(n)}\ y)\ ((x\ x)\ (x\ (x^{(m-2)}\ y))) \in D$$

i, per M P

$$x^{(n-1)}\ y \in D$$

Si repetim aquest procés tindrem

$$x\ y \in D$$

Si $n = 1$, no hi ha res a demostrar

Per tant, tot sistema deductiu clàssic verifica aquesta propietat (veure II)

Les anteriors consideracions ens permeten d enunciar els seguents fets

I En tota estructura (A,) auto-distributiva per l esquerra (això es que verifiqui $x\ (y\ z) = (x\ y)\ (x\ z)$ per tota terna x y z), tot sistema deductiu fort verifica, per tot x de A $C_D(x) = K_D(x)$

II Tot sistema deductiu clàssic (veure cap III) de (A) verifica $C_D(x) = K_D(x)$, qualsevol que sigui l element x de A

III En el capitolo III definirem els sistemes deductius complets i veurem que $C_D(x) = K_D(x)$ si, i nomes si D es un sistema deductiu classic (III 3) Els sistemes deductius complets propis es caracteritzan per la distinció existent entre les dues relacions d equivalencia que defineixen

En la prop II 8 2 hem vist un sistema deductiu complet no clàssic (puix $C_D(\frac{1}{2}) \neq K_D(\frac{1}{2})$)

En el capitol III veurem també que un sistema deductiu complet D es maximal si, i nomes si per tot x, y de A tals que $x \notin D$ i $y \notin D$ resulta que $x \sim_D y$ i per tant si i nomes si, $A/\sim_D$ te nomes dues classes d equivalència (Aixo generalitza un teorema de A Monteiro)

IV En el cas dels grups les dues relacions d equivalència, $\equiv_D$ i $\sim_D$ tampoc no es distingeixen, si be $C_D(x)$ i $K_D(x)$ poden ésser diferents (pag 85)

El motiu és ben be un altre la normalitat de D i l existència d element invers

$$x \sim_D y \text{ si, i nomes si, } x^{(n)}\ y \in D \text{ i } y^{(m)}\ x \in D$$

$$\begin{aligned} &\text{si, i nomes si } && x\ y \in D \text{ i } y\ x \in D \text{ ó} \\ & && x\ y \in D \text{ i } \quad x \in D \text{ o} \\ & && \quad y \in D \text{ i } y\ x \in D \text{ o} \\ & && \quad x \in D \text{ i } \quad y \in D \end{aligned}$$

si, i nomes si $xy \in D$ ó $yx \in D$

puix

1 si $xy \in D$ i $yx \in D$ aleshores $xy \in D$ i $yx \in D$
ó $xy \in D$ i $x \in D$ ó $yx \in D$ i $y \in D$ ó $x \in D$ i $y \in D$

2 per la disjuncio de casos (Bourbaki [1970]) ja que cada un dels antecedents, ell tot sol implica el conseguent

$xy \in D$ i $yx \in D$ implica $xy \in D$ i $yx \in D$

$xy \in D$ i $x \in D$ implica $y \in D$ i $x \in D$ implica $yx \in D$

per tant,

$xy \in D$ i $x \in D$ implica $xy \in D$ i $yx \in D$

$yx \in D$ i $y \in D$ es fà anàlogament a l anterior

$x \in D$ i $y \in D$ implica $xy \in D$ i $yx \in D$

CAPÍTOL III

SISTEMES DEDUCTIUS COMPLETS

I LÒGICA POSITIVA

III 1 Els sistemes deductius clàssics i els sistemes pre-ordenadors

En aquest apartat recollim les definicions i primeres propietats dels sistemes deductius clàssics Hom les pot retrobar en Diego [1966] Monteiro [1971] Sales [1973] Rasiowa [1974]

Definició III 1 1

Un *sistema deductiu classic* d una estructura algebraica (A,) es tot sub-conjunt D de A que verifiqui

DC1 $x\ (y\ x) \in D$ per tot x, y de A

DC2 $(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$ per tota terna x y z de elements de A

M P si $x \in D$ i $x\ y \in D$ aleshores $y \in D$

Definició III 1 2

Un sistema deductiu clàssic és *propi* si, i nomes si $D \neq A$

És obvi que tot sistema deductiu classic és $\neq \emptyset$ sempre que $A \neq \emptyset$ (i això ho suposem en tot moment)

Definició III 1 3

Un sistema deductiu classic D de (A,) es *maximal* si i nomes si,

DCM1 D és propi

DCM2 si existeix un sistema deductiu clàssic D de (A,) tal que

$$D \supseteq D,$$

aleshores

$$D = D \text{ ó } D = A$$

Definició III 1 4

La intersecció T de tots els sistemes deductius classics de (A) s anomena el <u>conjunt de les tesis</u> de (A)

És facil de veure que la familia $\mathcal{S}$ de tots els sistemes deductius classics de (A) és un reticle complet

La tesi doctoral d en Diego (Diego [1966]) prova que aquest reticle es distributiu

Definició III 1 5

L estructura algebraica (A,) es <u>deductivament consistent</u> si i només si, $T \neq A$ En cas contrari, es diu que és <u>deductivament inconsistent</u>

Proposicio III 1 1

Tot sistema deductiu classic D de (A) verifica

I L absorció per la dreta $A\ D \subseteq D$

II la reflexivitat (PO1) $x\ x \in D$ per tot x de A

III la transitivitat (PO2) si $x\ y \in D$ i $y\ z \in D$ aleshores $x\ z \in D$

En d altres paraules tot sistema deductiu classic és un sistema deductiu dèbil, absorbent per la dreta el reciproc però és fals

En efecte

I $y\ (x\ y) \in D$ en virtut de DC1 i, com que, per hipòtesi, $y \in D$, resulta que

$$x\ y \in D,$$

qualsevol que sigui $y \in D$ i $x \in A$

II Per tot x y de A tenim que, per DC2

$$(x\ (y\ x))\ ((x\ y)\ (x\ x)) \in D$$

però, per DC1 $x\ (y\ x) \in D$ i per M P s obté que

$$(x\ y)\ (x\ x) \in D$$

Aixo val insistim per tot x, y de A Agafem doncs y en D Per I tindrem que $x\ y \in D$ i novament per M P

$$x\ x \in D,$$

per tot x de A

III Si $y\ z \in D$, aleshores per I $x\ (y\ z) \in D$ i, per DC2,

$$(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$$

aplicant, doncs, M P tenim que

$$(x\ y)\ (x\ z) \in D$$

Per hipòtesi tenim que $x\ y \in D$ per tant aplicant novament M P , s obte el resultat desitjat, que és

$$x\ z \in D$$

Considerem ara el conjunt $A = \{x\ y\ z\}$ proveït de l ope-acio

	x	y	z
x	x	y	z
y	x	x	y
z	x	z	x

És clar que $D = \{x\}$ és un sistema deductiu debil absorbent per la dreta, però en canvi no és pas un sistema deductiu clàssic, puix

$$y\ (z\ y) = y\ z = y \notin D$$

Aquesta proposicio es superflua puix mes endavant demostrarem que tot sistema deductiu complet és un sistema deductiu fort (prop III 3 2 veure Sales [1974]), bsorbent per la dreta i aquest resultat implicarà, en particular la prop III 1 1, ja que demostrarem (prop III 3 1 veure Sales [1974]) que tot sistema deductiu clàssic és complet Si l hem enunciat i demostrat es per una banda per justificar l anàlisi dels sistemes deductius dèbils realitzat en la primera part del treball i per altra banda per justificar la defincio de sistema deductiu complet que donarem mes endavant (def III 1 7)

Abans d analitzar els sistemes deductius complets denem les propietats immediates dels sistemes deductius clàssics

Proposicio III 1 2

Tot sistema deductiu clàssic D de (A) indueix un pre-ordre $\leq_D$ i una relacio d equivalencia $\equiv_D$ i per tota terna x, y, z d elements de A es verifica

1 $x \leq_D y\ x$

2 $z \leq_D x\ y$ implica $z\ x \leq_D z\ y$

3 $z \leq_D x\ y$ implica $x \leq_D z\ y$
(l anomenarem commutacio de premisses C P)

4 $x \leq_D y$ implica $z\ x \leq_D z\ y$
(l anomenarem isotonia per la dreta)

5 $x \leq_D y$ implica $y\ z \leq_D x\ z$
(l anomenarem anti-isotonia per l'esquerra)

6 $x\ y \leq_D (z\ x)\ (z\ y)$ i $x\ y \leq_D (y\ z)\ (x\ z)$
(les anomenarem lleis del sil logisme),

7 $x\ (y\ z) \equiv_D (x\ y)\ (x\ z)$
(es l auto-distributivitat per l esquerra de l operació induïda en $A_{/\equiv_D}$)

8 $x\ y \equiv_D y$ per tot y de A si, i només si, $x \in D$ (D és neutre per l esquerra en $A_{/\equiv_D}$)

$$9 \quad x\ (x\ y) \equiv_D x\ y$$
$$10 \quad x \leqslant_D (x\ y)\ y$$

En efecte

Les demostracions es troben en Diego [1966], Sales [1973], Rasiowa [1974] Nosaltres nomes demostrarem 8 i 9 La propietat 8 la demostrem puix en les obres citades es dona tan sols la condicio suficient, i no es dona la condició necessaria i la 9 la demostrem per la importancia que es endavant adquirirà

8

A Si $x \in D$ aleshores com que per 1, $y \leqslant_D x\ y$ cal veure que $(x\ y)\ y \in D$ Aixo es una consequencia immediata de 10 i del fet que D sigui un filtre (prop I 6 3)

B Si $x\ y \equiv_D y$, per tot y de A, aleshores si fem $y = x$ tindrem que

$$x\ x \equiv_D x$$

i com que per II, $x\ x \in D$, resulta que $x \in D$

9 Apliquem 7 i tenim que

$$x\ (x\ y) \equiv_D (x\ x)\ (x\ y)$$

i, per 8 com que $x\ x \in D$ (segons II) resulta que

$$x\ (x\ y) \equiv_D x\ y$$

És clar que, si D es un sistema deductiu classic, la relació d'equivalència $\equiv_D$ es una congruència Ara bé donat un sistema deductiu debil i absorbent per la dreta en general, l'equivalència $\equiv_D$ no ho es pas una congruència En Sales [1974] s ens diu una condicio suficient per tal que $\equiv_D$ sigui una congruencia, si D és un sistema deductiu dèbil i absorbent per la dreta, es que verifiqui les lleis del sil logisme' Un resultat bastant semblant, salvant les diferències essencials es troba en Rasiowa [1974]

La demostració si bé és simple, la reproduïm aquí per l interès que té aquesta condició en la definició de sistema deductiu semi-complet

Si $x \equiv_D x$ i $y \equiv_D y$ aleshores $x\ x \in D$ $x\ \ x \in D$ $y\ y \in D$ i $y\ \ y \in D$ Si ara apliquem les regles del sil·logisme i el M P obtenim les relacions seguents

$$y\ y \in D \text{ implica } (x\ y)\ (x\ y\ ) \in D,$$
$$x\ x \in D \text{ implica } (x\ \ y)\ (x\ y) \in D$$
$$y\ \ y \in D \text{ implica } (x\ \ y\ )\ (x\ \ y) \in D,$$
$$x\ \ x \in D \text{ implica } (x\ y\ )\ (x\ \ y\ ) \in D$$

Però D és un sistema pre-ordenador, d on, per PO2,

$$x\ y \equiv_D x\ \ y$$

És lícit de preguntar-nos si la condició és necessària La resposta és negativa considerem el conjunt $A = \{x\ y\ z\}$, dotat de l operació

	x	y	z
x	x	y	z
y	x	x	y
z	x	y	x

És clar que $D = \{x\}$ és un sistema deductiu dèbil i absorbent per la dreta que no verifica pas les lleis del sillogisme, puix

$$(x\ z)\ ((y\ x)\ (y\ z)) = z\ (x\ y) = z\ y = y \notin D$$

però, malgrat això,

$$[x]_D = \{x\}, \quad \text{puix } x\ y \notin D \text{ i } x\ z \notin D,$$
$$[y]_D = \{y\}, \quad \text{puix } x\ y \notin D \text{ i } z\ y \notin D,$$
$$[z]_D = \{z\}, \quad \text{puix } x\ z \notin D \text{ i } z\ y \notin D,$$

i per tant, la relació $\equiv_D$ és una congruència

Nota

Per tal que $\equiv_D$ sigui una relacio d equivalència és suficient que D sigui un sistema pre-ordenador dèbil i prou En l anterior demostració nomes hem necessitat les lleis del sil logisme el M P i PO2 ler tant el resultat precedent es valid encara que D no sigui absorbent per la dreta

Tot aixo ens permet d enunciar la proposicio segu ent

Proposicio III 1 3

> En tota estructura algebraica (A)
> la relació $\equiv_D$ induïda per un sistema deductiu classic D és una congruència
> El recíproc però, no és pas cert es a dir, un sistema deductiu que verifiqui les regles del sil logisme no es necessariament clàssic

En efecte

A La primera part ha quedat demostrada en les consideracions precedents i en la prop III 1 2(6)

B Per veure la segona part considerem el conjunt $A = \{x\ y\ z\}$, proveït de la llei

	x	y	z
x	x	z	z
y	x	x	z
z	x	x	x

El sub-conjunt $D = \{x\}$ és un sistema deductiu dèbil i absorbent per la dreta en el que no es verifica pas C P puix

$$x\ (y\ y) = x\ y = x$$

i

$$y\ (x\ y) = y\ z = z,$$

que ens assegura que $x\ (y\ z) \not\leq_D y\ (x\ z)$ Per tant, prop III 1 2, D no és pas un sistema deductiu clàssic Malgrat tot D verifica les lleis del sillogisme ja que per tota terna u v, w d elements de A es verifica

$$(u\ v)\ ((w\ u)\ (w\ v)) \in D$$

ja que si $w\ v = x$ l absorció per la dreta ens garanteix la validesa d aquesta llei del sil logisme Si $(w\ u)\ (w\ v) = x$ s aplica el mateix raonament

Cal, doncs analitzar només el casos restants

$$(x\ y)\ ((x\ x)\ (x\ y)) = (x\ y)\ (x\ z) = z\ z \in D$$
$$(x\ z)\ ((x\ x)\ (x\ z)) = (x\ z)\ (x\ z) = z\ z \in D,$$
$$(x\ z)\ ((y\ x)\ (y\ z)) = (x\ z)\ (x\ z) = z\ z \in D,$$
$$(y\ z)\ ((y\ y)\ (y\ z)) = (y\ z)\ (x\ z) = z\ z \in D$$

De forma anàloga es demostra l altre llei del sil logisme

Proposicio III 1 4

Tot sub-conjunt $D \subseteq A$ que verifiqui

1 M P ,
2 les lleis del sil logisme,

verifica tambe PO2

En efecte
Si, per tota terna x y, z d elements de A, es verifica

$$(y\ z)\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$$

i, si $y\ z \in D$ i $x\ y \in D$ aleshores aplicant reiteradament M P resulta que

$$x\ z \in D$$

Notes
1 En la prop III 1 4 només ens cal una llei del sil lo-

gisme

2 Parlar de sistemes deductius dèbils, absorbents per la dreta que verifiquin les lleis del sil logisme és sobre-abundant

Definició III 1 6

> Un sistema deductiu debil absorbent per la dreta, que verifiqui les lleis del sil logisme s anomenarà <u>sistema deductiu semi-complet</u>

Hem vist que un sistema deductiu semi-complet no té perque verificar la commutacio de premisses(C Γ)

Ara desitgem cercar quines de les propietats dels sistemes deductius clàssics (enumerades en les props III 1 1 i III 1 2) son satisfetes pels sistemes deductius semi-complets

Per definicio, tot sistema deductiu semi-complet satisfà M P , I, II i III (prop III 1 1) i 6 (prop III 1 2) És clar que verifica també 4 i 5 (prop III 1 2) puix

$x \leq_D y$ implica $x\ y \in D$ i per les lleis del sil logisme i el M P resulta que

$$z\ x \leq_D z\ y \qquad \text{i} \qquad y\ z \leq_D x\ z$$

Ara bé les restants propietats (això és DC1 DC2, i 1, 2 3, 7 8 9 i 10 de la prop.III 1 2) en general, no les verifica pas

A fí de concretar aquesta darrera afirmació introduïm dues estructures algebraiques E = (A) i C = (A,∗), definides per A = {x,y z} i per

	x	y	z
x	x	z	z
y	x	x	z
z	x	x	x

∗	x	y	z
x	x	y	y
y	x	x	y
z	x	x	x

És facil de comprovar que $D=\{x\}$ es un sistema deductiu semi-complet tant per l una com per l altra

En (E D) no es verifica pas DC1 puix

$$y\ (x\ y) = y\ z = z \notin D$$

i, per tant tampoc no es verifica 1 (prop III 1 2)

Segons hem vist en la prop III 1 3 tampoc no es verifica C P (aixo es 3 prop III 1 3)

En (E D) no es verifica 2 (prop III 1 3), puix que

$$y \leqslant_D y\ z$$

i, en canvi

$$y\ y \not\leqslant_D y\ z,$$

ja que

$$x\ y = y \notin D$$

Tampoc no es verifica DC2 puix

$$(y\ (x\ z))\ ((y\ x)\ (y\ z)) = (y\ y)\ (x\ y) = x\ (x\ y) =$$
$$= x\ y = y \notin D$$

i, per tant no es pot pas verificar 7

No val tampoc la desigualtat de 7 en sentit contrari, puix

$$((x\ y)\ (x\ z))\ (x\ (y\ z)) = x\ y = y \notin D$$

Pel que fa referència a 8 és immediat que la desigualtat

$$y \leqslant_D x\ y$$

és, precisament, 1 En quant a l altra desigualtat tenim que

$$(z\ y)\ y = x\ y \notin D$$

que no val ni en (E,D), ni en (E D)

La relació 10 tampoc no es cumpleix, ja que

$$x\ ((x\ z)\ z) = x\ (y\ z) = x\ y = y \notin D$$

Considerem ara l estructura algebraica $F = (A\quad)$ definida per $A = \{x, y, z\}$ i per

	x	y	z
x	x	y	z
y	x	x	y
z	x	x	x

És facil comprovar que $D = \{x\}$ és un sistema deductiu semicomplet però no satisfà la relacio 9 (prop III 1 2)

$$y\ (y\ z) = y\ y = x,$$

i

$$y\ z = y$$

i per tant,

$$y\ (y\ z) \not\equiv_D y\ z$$

Hem demostrat, doncs, el seguent resultat

Proposició III 1 5

Si D és un sistema deductiu semi-complet de (A) aleshores satisfà les dues isotonies i en general, cap altra de les anteriors propietats indicades pels sistemes deductius classics (llevat de les incloses en la definició de sistema deductiu semi-complet)

Definició III 1 7

Un <u>sistema deductiu complet</u> es tot sistema deductiu semi-complet que verifiqui la commutacio de premisses(C P)

Proposició III 1 6

En tot sistema deductiu complet D de (A,) es verifiquen

(i) DC1 i M P

(ii) I, II i III (prop III 1 1)

(iii) 1,3 4 5 6,8 i 10 (prop III 1 2)

En efecte

A Les propietats M P I II III 3 i 6 es verifiquen en virtut de la definicio de sistema deductiu complet

B DC1 es obvi puix

$$y\ (x\ y) \equiv_D x\ (y\ y)$$

i, com que $y\ y \in D$ i D es absorbent per la dreta, resulta que

$$y\ (x\ y) \in D,$$

per tot x, y de A

1 es consequència immediata de DC1

4 i 5, puix que D es un sistema deductiu semi-complet

10 es verifica a que

$$x\ ((x\ y)\ y) \equiv_D (x\ y)\ (x\ y)$$

i per tant, $x \leqslant_D (x\ y)\ y$ per tot x y de A

8 es demostra tal com s ha fet en la prop III 1 2

Encara mes en tot sistema deductiu complet es verifica la part de 7 que no és DC2, és a dir, per tot x, y, z de A

$$(z\ x)\ (z\ y) \leqslant_D x\ y$$

ja que

$$y \leqslant_D x\ y \quad \text{implica} \quad (x\ y)\ z \leqslant_D y\ z \quad (\text{por } 5)$$

i aleshores

$$x\ ((x\ y)\ z) \equiv_D (x\ y)\ (x\ z) \leqslant_D x\ (y\ z) \quad (\text{por } 4 \text{ i C P})$$

Si considerem ara el sistema (F,D) introduït en la pàg 101 veiem que D es un sistema deductiu complet que no verifica pas 9 (pag 101) i tampoc no verifica ni DC2 ni 2

En efecte

DC2

$$y\ (y\ z) = x$$

$$(y\ y)\ (y\ z) = x\ y = y$$

per tant

$$(y\ (y\ z))\ ((y\ y)\ (y\ z)) \notin D$$

2

$$y \leq_D y\ z \quad \text{però en canvi} \quad y\ y \not\leq_D y\ z$$

Fixem-nos en el fet que DC2, 2 i 9 estan intimament relacionats El que és clar, al menys (prop III 1 2) es que DC2 implica 2 i 9 (si es verifiquen les propietats de sistema deductiu complet)

Si no es verifica DC2 tampoc no es pot verificar 7

Amb això queda completament exhaurit l anàlisi del sistemes deductius semi-complets i complets pel que fa referència a les propietats immediates dels sistemes deductius classics

Nota

En presència de C P i de M P la propietat DC1 és equivalent a la reflexivitat (I 01)

- si $x\ x \in D$, aleshores $y\ (x\ x) \in D$ i per C 1 $x\ (y\ x) \in D$
- si $x\ (y\ x) \in D$, aleshores $y\ (x\ x) \in D$ i fent que $y \in D$ s obte $x\ x \in D$

(En la primera part de la demostració cal que D sigui absorbent per la dreta)

III 2 Independència dels axiomes dels sistemes deductius complets

Abans de seguir endavant i forjar un teoria lògica amb sistemes deductius complets volem analitzar les mínimes condicions que cal donar per tal que D sigui un sistema deductiu complet

Si tenim en compte la prop III 1 4, un sistema deductiu complet D de (A,) és tot sub-conjunt D de A que verifiqui

SDC1 $\quad x\ x \in D$ per tot x de A

SDC2 $\quad x\ y \in D$ i $x \in D$ impliquen $y \in D$ (M P)

SDC3 $\quad A\ D \subseteq D$

SDC4 $\quad (x\ y)\ ((z\ x)\ (z\ y)) \in D$ per tot x y z de A

SDC5 $\quad x\ (y\ z) \leq_D y\ (x\ z)$ per tot x,y z de A

Les condicions SDC4 i SDC5 impliquen l altre llei del sil-logisme, ja que

$$(y\ z)\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D \qquad \text{(en virtut de SDC4)}$$

i aleshores

$$(x\ y)\ ((y\ z)\ (x\ z)) \in D \qquad \text{(en virtut de SDC5 i SDC2)}$$

i obtenim el que preteniem

Si es verifica SDC5 es verifica C P , per simetria

Teorema III 2 1

Les condicions SDC1, SDC2, SDC3, SDC4 i SDC5 són independents

En efecte

<u>Independència de SDC1</u> En l estructura $A = \{x\ y\ z\}$ amb l operacio

	x	y	z
x	x	y	y
y	x	x	x
z	x	y	y ,

el conjunt $D = \{x\}$ verifica clarament SDC2 i SDC3 i en canvi no verifica pas SDC1 Cal comprovar que (A D) verifica SDC4 i SDC5 Només cal analitzar els casos en els que el darrer parèntesi no val x

$$\begin{matrix}(x\ y)\\(z\ y)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}(x\ x)\\(x\ z)\end{matrix}\ (x\ y)\right] = x \qquad \begin{matrix}(x\ z)\\(y\ z)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}(x\ x,\\(x\ y)\end{matrix}\ (x\ z)\right] = x\,;$$

$$\begin{matrix}(x\ y)\\(z\ y)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}(z\ x)\\(z\ z)\end{matrix}\ (z\ y)\right] = x \qquad \begin{matrix}(x\ z)\\(y\ z)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}(z\ x)\\(z\ y)\end{matrix}\ (z\ z)\right] = x$$

proven que SDC4 es verifica

$$\begin{matrix}x\ (y\ y)\\x\ (z\ y)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}x\\z\end{matrix}\ (x\ y)\right] = \begin{bmatrix}y & y = x\\y & y = x\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}x\ (y\ z)\\x\ (z\ z)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\ (x\ z)\right] = \begin{bmatrix}x & x = x\\y & y = x\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}z\ (x\ y)\\z\ (y\ y)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\ (z\ y)\right] = \begin{bmatrix}y & y = x\\y & y = x\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}z\ (x\ z)\\z\ (y\ z)\end{matrix}\ \left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\ (z\ z)\right] = \begin{bmatrix}y & y = x\\x & x = x\end{bmatrix}$$

que proven que SDC5 es verifica

Nota
Si (A,) admet un element neutre per l esquerra SDC5 implica SDC1, puix si u és l element neutre per l esquerra de (A) aleshores

$$D \ni (u\ (u\ x))\ (u\ (u\ x)) = x\ x$$

<u>Independència de SDC2</u>

Considerem $A = \{x\ y\}$ proveït de l operació constant $x\ x = = y\ y = x\ y = y\ x = x$ aleshores $D = \{x\}$ verifica totes les condicions SDC menys SDC2 (es a dir, M P) puix

$$x\ y \in D \text{ i } x \in D \text{ i } y \notin D$$

Independència de SDC3

Sigui $(Z\ +)$ el grup aditiu dels nombres enters i $2Z$ el sub-grup dels nombres parells Veiem que $2Z$ verifica SDC1 i SDC2 Tambe verifica SDC4 i SDC5 puix

$$(x+y)+((z+x)+(z+y)) = 2(x+y+z) \in 2Z$$

$x+(y+z) = y+(x+z)$ i per tant $x+(y+z) \equiv_{2Z} y+(x+z)$

Però $2Z$ no verifica pas SDC3 puix si x és senas, $x+2z \notin 2Z$

Independència de SDC4

Considerem $(\{x\ y, z\ t\}\ \ )$ on l operació está definida per

	x	y	z	t
x	x	y	z	t
y	x	x	z	x
z	x	y	x	x
t	x	x	x	x

admet un sub-conjunt $D = \{x\}$ que satisfà SDC1, SDC2 i SDC3 Tambe satisfa SDC5 puix

$y\ (x\ y)=x=x\ (y\ y)$ $\quad z\ (x\ y)=y=x\ (z\ y)$ $\quad t\ (x\ y)=x=x\ (t\ y)$,
$y\ (x\ t)=x=x\ (y\ t)$ $\quad z\ (x\ t)=x=x\ (z\ t)$ $\quad t\ (x\ t)=x=x\ (t\ t)$;
$y\ (x\ z)=z=x\ (y\ z)$, $\quad z\ (x\ z)=x=x\ (z\ z)$ $\quad t\ (x\ z)=x=x\ (t\ z)$
$x\ (y\ z)=z=y\ (x\ z)$; $\quad z\ (y\ z)=x=y\ (z\ z)$, $\quad t\ (y\ z)=x=y\ (t\ z)$,
$x\ (z\ y)=y=z\ (x\ y)$, $\quad y\ (z\ y)=x=z\ (y\ y)$ $\quad t\ (z\ y)=x=z\ (t\ y)$

Per tant per tot u, v, w de A $\ u\ (v\ w) \equiv_D v\ (u\ w)$
(els casos que falten son obvis)

Ara be D no verifica pas PO2 ja que, si be tenim

$$y\ t = x \in D,$$
$$t\ z = x \in D$$

no es pas cert que $y\ z \notin D$ (puix $y\ z = z$) Aleshores, en virtut de la prop III 1 4, les lleis del sil logisme no es satisfan pas

Independència de SDC5

En la prop III 1 3 es dóna un exemple en el que si bé es cumpleixen SDC1 SDC2 SDC3 i SDC4 no es cumpleix pas SDC5

Això acaba la demostració

Malgrat tot fent un abús de llenguatge quan es referim a un sistema deductiu co plet, entendrem sempre un sistema d ductiu dèbil absorbent per la dreta que verifica les lleis del sil logisme i C P o en d altres paraules, un sistema deductiu semi-complet tal que per tota terna x y z d elements de A

$$x\ (y\ z) \equiv_D y\ (x\ z)$$

Hem vist també que en general un sistema deductiu complet no és pas un sistema deductiu clàssic (vegis (F D) pág 101) Aquest resultat es troba ja en Sales [1974] si bé l exemple donat es diferent (vegis II 8 pag 83)

III 3 Sistemes deductius complets, sistemes deductius forts i sistemes deductius clàssics

Proposició III 3 1

Tot sistema deductiu classic és complet (Al revés però és fals)

En efecte
Ha estat provat en l'apartat III 1

Un resultat trobat per Sales (Sales [1974]) que enunciem i demostrem aquí per l interés que presenta i per la unitat que dóna als tres capítols del present treball, és el seguent

Proposició III 3 2

Tot sistema deductiu complet és un sistema deductiu fort

Corol lari

Tot sistema deductiu classic és un sistema deductiu fort

En efecte

I Si D es un sistema deductiu complet aleshores si

$s_{ij}=(h_1 \quad h_i, \quad h_j \quad h_n)$ i $s_{ji}=(h_1, \quad h_j, \quad ,h_i, \dots ,h_n)$

resulta que

$$s_{ij}\ x \in D \text{ si i només si } s_{ji}\ x \in D$$

Suposem en primer lloc que $j = i+1$ Tindrem

$$h_i\ h_{i+1}\ h_{i+2} \quad h_n\ x \equiv_D h_{i+1}\ h_i\ h_{i+2} \quad h_n\ x$$

i com que $\equiv_D$ és una congruencia resulta que

$$h_1 \quad h_i\ h_{i+1} \quad h_n\ x \equiv_D h_1 \quad h_{i+1}\ h_i \quad h_n\ x$$

Si $j = i + k \quad k > 1$, aleshores

$$\begin{aligned} & h_1 \quad h_i\ h_{i+1}\ h_{i+2} \quad h_{j-2}\ h_{j-1}\ h_j \quad h_n\ x \\ \equiv_D\ & h_1 \quad h_{i+1}\ h_i\ h_{i+2} \quad h_{j-2}\ h_{j-1}\ h_j \quad h_n\ x \\ \equiv_D\ & \\ \equiv_D\ & h_1 \quad h_{i+1}\ h_{i+2} \quad h_{j-2}\ h_{j-1}\ h_j\ h_i \quad h_n\ x \\ \equiv_D\ & \\ \equiv_D\ & h_1 \quad h_j\ h_{i+1}\ h_{i+2} \quad h_{j-2}\ h_{j-1}\ h_i \quad h_n\ x \end{aligned}$$

II Suposem ara que $s\ x \in D$, on $s = (h_1 \quad ,h_i, \quad ,h_n)$ i que existeix una successió finita $s^i = (k_1, \quad ,k_j)$ tal que $s^i\ h_i \in D$

Cal demostrar que

$$h_1 \quad h_{i-1}\ k_1 \quad k_j\ h_{i+1} \quad h_n\ x \in D$$

Per I tenim que

$$h_i\ h_1 \quad h_{i-1}\ h_{i+1} \quad h_n\ x \in D$$

i per la llei del sil logisme

$$(k_j\ h_i)\ (k_j\ h_1 \quad h_{i-1}\ h_{i+1} \quad h_n\ x) \in D$$

i reiterant la llei del sil logisme

$$(k_1 \quad k_j\ h_i)\ (k_1 \quad k_j\ h_1 \quad h_{i-1}\ h_{i+1} \quad h_n\ x) \in D$$

i per hipòtesi i per M I resulta que

$$k_1 \quad k_j\ h_1 \quad h_{i-1}\ h_{i+1} \quad h_n\ x \in D$$

i aplicant I reiteradament s obté finalment

$$h_1 \quad h_{i-1}\ k_1 \quad k_j\ h_{i+1} \quad h_n\ x \in D$$

i en virtut de la prop II 1 2 D és un sistema deductiu fort

En la pag 101 hi ha un exemple de sistema deductiu corplet no classic Ln la prop III 1 2 donem les propietats més immediates dels sistemes deductius classic En les pàgs 102 i 103 veiem que un sistema deductiu complet no té perque satisfer les propietats 2 i 9 de la prop III 1 2 i tampoc no té perque satisfer DC2

Naturalment, si un sistema deductiu complet D verifica DC2 (com que també verifica DC1 i M P (prop III 1 6)) és un sistema deductiu classic (def III 1 1)

Ara be si un sistema deductiu complet verifica 9 es classic És a dir, tenim

Proposició III 3 3

Tot sistema deductiu complet D tal que

per tot x, y de A verifiqui

$$x\,(x\,y) \leqslant_D x\,y$$

es clàssic

En efecte

Volem demostrar que per tota terna x, y z d elements de A es verifica

$$(x\,(y\,z))\,((x\,y)\,(x\,z)) \in D$$

Considerem el sub-conjunt $S = \{x\,y\ y\,(x\,z)\}$ Com que D és un sistema deductiu fort (prop III 3 2) podem considerar $K_D(S)$ Per definicio $K_D(S) \supseteq S$ i, per la prop II 7 1 $K_D(S)$ és un sistema deductiu dèbil Per tant, com que

$$x\,y \in S \subseteq K_D(S) \quad \text{i} \quad y\,(x\,z) \in S \subseteq K_D(S)$$

aplicant PO2 resulta que

$$x\,(x\,z) \in K_D(S)$$

En virtut de la hipotesi $x\,(x\,y) \leqslant_D x\,y$ per tot x y de A d on resulta que per tot $n \geqslant 1$ $x^{(n)}\,y \equiv_D x\,y$, per tot x y de A (ja que es verifica DC1)

Per tant, del fet que $x\,(x\,z) \in K_D(S)$ s en segueixen tres possibilitats

(a) $(x\,y)\,(x\,(x\,z)) \in D$;

(b) $(y\,(x\,z))\,(x\,(x\,z)) \in D$

(c) $(y\,(x\,z))\,((x\,y)\,(x\,(x\,z))) \in D$

(la quarta possibilitat simètrica de (c) és equivalent a (c) en virtut de C P)

Ara bé per hipòtesi, $x\,(x\,z) \leqslant_D x\,z$ i com que $\equiv_D$ es una congruencia per tot v de A

$$v\,(x\,(x\,z)) \equiv_D v\,(x\,z)$$

qualsevols que siguin x i z de A Per tant,

(a) $(x\ y)\ (x\ z) \in D$

(b) $(y\ (x\ z))\ (x\ z) \in D$

(c) $(y\ (x\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$

Si apliquem C P i tenim en compte l absorció per la dreta del sistema deductiu complet D tindrem

(a) $(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$

(b) $(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$

(c) $(x\ (y\ z))\ (x\ z) \in D$ i per tant

$(x\ y)\ ((x\ (y\ z))\ (x\ z)) \in D$ i per tant

$(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$

Això acaba la demostració

Corol lari

Tot sistema deductiu complet que verifiqui la condició 2 de la prop III 1 2, és un sistema deductiu clàssic

En efecte

Com que tot sistema deductiu complet verifica per cada x, y de A,

$$x \leqslant_D (x\ y)\ y$$

en virtut de C P i de la reflexivitat resulta que si es verifica la condició 2 de la prop III 1 2 tenim que

$$x\ (x\ y) \leqslant_D x\ y$$

i per tant el sistema deductiu complet D es clàssic (prop III 3 3)

De tot el que precedeix resulta que en un sistema deductiu complet qualsevol les relacions

$$x\ (y\ z) \leqslant_D (x\ y)\ (x\ z),$$

$$z \leqslant_D x\ y \quad \text{implica} \quad z\ x \leqslant_D z\ y,$$

$$x\ (x\ y) \leqslant_D x\ y$$

son equivalents

Aquest resultat ens diu que la diferència entre un sistema deductiu complet (no classic) i un sistema deductiu classic es pot considerar des d el punt de vista algebraic i des d el punt de vista logic

Des d el punt de vista algebraic tenim que si D és un sistema deductiu complet (no classic) l operació $_D$ induïda en el conjunt quocient $A/\equiv_D$ no es pas autodistributiva per l esquerra és a dir no s obte pas una algebra de Hilbert

Des d el punt de vista lògic tenim que si D és un sistema deductiu complet (no clàssic) pot ocorrer que un element y de A sigui consequencia forta d un element x de A i, en canvi, no en sigui consequencia dèbil Altrament dit

$$y \in K_D(x) \quad \text{no implica pas} \quad y \in C_D(x)$$

Així doncs en un sistema deductiu complet (no clàssic) es pot parlar del grau d una premissa si $n_{x\ y} \geqslant 0$ $n_{x\ y} \in N$ i $x^{(n_{x\ y})}\ y \in D$ i per tot m $m \in N$ $m < n_{x,y}$ $x^{(m)}\ y \notin D$, direm que $n_{x,y}$ és el grau de la premissa x en la deduccio de y

Aquest resultat no es troba en lògica clàssica, puix tota premissa x te grau 1 en virtut de 9 (prop III 1 2)

Finalment tenim que si be en un sistema deductiu clàssic la relacio d equivalència forta $\sim_D$ (II 8) i la relacio d equivalència dèbil $\equiv_D$ (I 1) coincideixen (II 8 pag 87) en canvi en un sistema deductiu complet (no classic) la situacio es totalment un altra (veure prop II 8 2(B)) L estructura (F,D) (pàg 101) reafirma aquest fet

$[x]_D = \{x\}, \quad [y]_D = \{y\} \quad [z]_D = \{z\}$

$\bar{x}_D = \{x\} \qquad \bar{y}_D = \{v\ z\} \qquad \bar{z}_D = \bar{y}_D$

Aquesta condició 9 de la prop III 1 2 es tan característica que tot sistema deductiu fort que la verifiqui si a mes verifica C P es un sistema leductiu co plet i per tant un sistema deductiu classic Amb precisió

Proposicio III 3 4

> Tot sistema deductiu fort absorbent per la dre a D que verifiqui
>
> $x\ (y\ z) \leq_D y\ (x\ z)$
>
> $x\ (x\ y) \leq_D x\ v$
>
> er tota te na x y z d elements de A és complet i, per tant classic

En efecte

Fem $S = \{x\ y\ z\ x\}$ Aleshores $z\ y \in K_D(S)$ puix $K_D(S)$ és un sistema de luctiu debil absorbent per la dreta i conté a S (per demostrar que $K_D(S)$ es absorbent per la dreta és necessaria la commutació de premisses) Per hipòtesi només és possible un dels tres casos seguents

$$(z\ x)\ (z\ y) \in D\,;$$

$$(x\ y)\ (z\ y) \in D$$

$$(x\ y)\ ((z\ x)\ (z\ y)) \in D$$

Per l absorció de D i per C P la demostració està acabada Aplicant la prop III 3 3 s obte la segona part

Hem vist ja (prop II 7 1) que, si D es un sistema deductiu fort i absorbent per la dreta aleshores (per tot $S \in P(A)^{*}$) $I_D(S)$ es un sistema deductiu dèbil

Ara veurem seguint Sales [1974] que si D es un sistema deductiu complet $K_D(S)$ també ho es (qualsevol que sigui S de $P(A)^*$) (En el cas dels sistemes deductius complets K_D es pot e tendre a tot P(A) en el sentit de la nota 1 de I 6 i el teorema que hem enunciat és vàlid per tot S de P(A))

Com que per tot S de $P(A)^*$ $D \subseteq K_D(S)$ es immediat que $K_D(S)$ verifica les lleis del sil logisme i C P Només cal veure doncs que $K_D(S)$ es absorbent per la dreta això es consequencia de la propietat C P de D En efecte si $x \in A$ i $y \in K_D(S)$ aleshores $s\ y \in D$ on $s \in S_F(S)$ Ara be com que D es absorbent per la dreta

$$x\ s\ y \in D$$

d on aplicant reiteradament C P , resulta que

$$s\ x\ y \in D \subseteq K_D(S)$$

i com que $S \subseteq K_D(S)$ i $K_D(S)$ verifica M P tenim que

$$x\ y \in K_D(S)$$

Hem demostrat la seguent proposició

Proposició III 3 5 (Sales [1974])

Si D es un sistema deductiu complet $K_D(S)$ tambe es un sistema deductiu complet per tot S de P(A)

Proposicio III 3 6

Si per tot S de P(A) $K_D(S)$ és un sistema deductiu complet aleshores D també ho és

En efecte

Fem S = D i aleshores tenim que $K_D(D) = D$

Hem obtingut doncs una condicio necessaria i suficient per tal que D sigui un sistema deductiu complet i és que per tot S de P(A), $K_D(S)$ sigui un sistema deductiu complet

III 4 Teoremes de compacitat i de la deducció en sistemes deductius complets

L analogia existent entre els sistemes deductius complets i els sistemes deductius classics ens mena a intentar d analitzar quines variacions presenten en l àmbit dels sistemes deductius complets certs resultats importants vàlids en el cas dels sistemes deductius clàssics

Ens cal indicar que la inspiracio dels capitols restants la debem fonamentalment a A Monteiro [1971]

És un fet que la interseccio de sistemes deductius complets es un sistema deductiu complet i que A tot sencer és un sistema deductiu complet Aixo fa que sigui licit parlar del sistema deductiu complet engendrat per $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ Però com que A es un sistema deductiu classic també és licit parlar del sistema deductiu classic engendrat per $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ (Veure Monteiro [1971])

Per aquest motiu donem el seguent criteri de notacio

$D(S)$ designara el sistema deductiu classic engendrat per S

$\langle S \rangle$ designara el sistema deductiu complet engendrat per S

De la def de $D(S)$ de la def de $\langle S \rangle$ i de la prop III 3 1 es dedueix que

$$\langle S \rangle \subseteq D(S)$$

i en general no coincideixen (En l estructura algebraica F, pàg 101, $D = \{x\}$ és un sistema deductiu complet, no clàssic i com que tot sistema deductiu es pre-ordenador l unic sistema deductiu distint de D es A que és classic i per tant, complet Així doncs en F tenim que

$$\{x\} = \langle x \rangle \subsetneq D(x) = A$$

Hem demostrat doncs que és certa la seguent proposició

Proposició III 4 1

(a) La intersecció d una família arbitrària de sistemes deductius complets és un sistema deductiu complet

(b) Si S és un sub-conjunt no buit, de A aleshores existeix el sistema deductiu complet engendrat per S que designem $\langle S \rangle$ i verifica

$$\langle S \rangle \subseteq D(S)$$

La igualtat en general no es dona

Proposicio III 4 2 (Sales [1974])

Si D és un sistema deductiu complet i $S \subseteq A$ $S \neq \emptyset$ aleshores

$$K_D(S) = \langle S \cup D \rangle$$

En efecte

Per un costat tenim que $K_D(S)$ es el sistema deductiu dèbil engendrat per $S \cup D$ (prop II 7 2) per tant $K_D(S) \subseteq \langle S \cup D \rangle$ (puix tot sistema deductiu complet que conte a $S \cup D$ es un sistema deductiu dèbil (props III 3 2 i II 1 3) però al revés en general no és cert)

D altra banda (prop III 3 5) $K_D(S)$ es un sistema deductiu complet i conte a $S \cup D$ d on $K_D(S) \supseteq \langle S \cup D \rangle$

Un resultat analeg val pels sistemes deductius classics Si D es un sistema deductiu classic $K_D(S)$ tambe ho es i aleshores

$$K_D(S) = D(S \cup D) \supseteq \langle S \cup D \rangle$$

però realment, $\langle S \cup D \rangle$ es classic i, per tant $D(S \cup D) = \langle D \cup S \rangle$ (veure prop III 4 3)-

Definició III 4 1

El conjunt $T_c = \bigcap_{D \in \mathcal{D}_c} D$ on $\mathcal{D}_c$ és el conjunt de tots els sistemes deductius complets s anomena <u>el sistema complet de les tesis</u>

Per contraposició el conjunt T definit en III 1 4 1 anomenarem <u>el sistema clàssic de le tesis de A</u>

És facil de veure que

$$T_c \subseteq T$$

(i en general no es verifica pas el signe de igualtat)

Definició III 4 2

L estructura algebraica (A) es <u>completament inconsistent</u> si i només si $T_c = A$

Proposició III 4 3

Tota estructura algebraica completament inconsistent és deductivament inconsistent (def III 1 5)
Al revés pero, no es cert

En efecte

A Si $T_c = A$ com que $T_c \subseteq T \subseteq A$ resulta que $T = A$

B En 1 exemple donat per (F D) (Pag 101) tenim

$$T_c = \{x\} \text{ i en canvi } T = A$$

Aquest resultat tan simple es important puix ens diu que, sı be un sistema algebraıc (A) considerat com un sistema lògıc classıc no és consıstent (aıxò és tot x de A és tesı ı per tant no aporta cap ınformació respecte dels objectes que son vers respecte de tot sıstema deductıu) pot molt be ocorrer que consıderat com un sıstema lògıc complet encara ens facılıti certa ınformacio respecte dels objectes vers (sı be el concepte ésser ver ha estat modıfıcat)

Proposıcio III 4 4

El sıstema complet de tesis és un sistema deductiu classic sı ı nomes sı tot sıstema deductıu complet de (A) és classıc Aleshores es clar que aıxò equıval a $T_c = T$

En efecte

Sı T_c és un sıstema deductıu classıc aleshores per tot x y z de A

$$(x\ (y\ z))\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in T_c$$

però com que tot sıstema deductıu complet D de (A,) conte a T_c resulta que tot sıstema deductiu complet de (A) verıfıca DC2 ı, per tant es classıc

Recíprocament puix T_c és un sistema deductıu complet de (A)

Aleshores es cumpleix la igualtat $T_c = T$

Sı $T_c = T$ aleshores T_c es un sıstema deductıu clàssic ı per la prımera part tot sıstema deductıu complet de (A) ho és

Aquesta proposıcıo ens dıu que tot sistema deductıu complet no classic no pot contenır cap sıstema deductıu classıc Un sıstema deductıu complet no classıc es heredıtàrıament complet Malgrat tot, un sistema deductiu clàssic pot contenir sistemes deductius complets propis (no classics) L estructura (F = (A)) tantes vegades mentada ens proporciona un exemple d aquest fet

El conjunt de les tesis completes T_c verifica la seguent propietat

$$\langle S \cup T_c \rangle = \langle S \rangle$$

En efecte

$$\langle S \cup T_c \rangle \supseteq \langle S \rangle \supseteq T_c \cup S$$

i per tant

$$\langle S \cup T_c \rangle = \langle S \rangle$$

Això juntament amb la prop III 4 1 ens permet d enunciar la seguent proposicio :

Proposició III 4 4

> Tot sistema deductiu comp et coincideix amb el conjunt de les consequencies fortes d un cert conjunt S respecte del sistema deductiu complet T_c

En efecte :
Si D és un sistema deductiu complet, aleshores

$$D = \langle D \rangle = \langle D \cup T_c \rangle = K_{T_c}(D)$$

Així doncs, hem establert que tot sistema deductiu complet és igual al conjunt de consequencies fortes d un cert conjunt respecte d un cert sistema deductiu complet i, recíprocament tot conjunt de consequencies fortes d un cert conjunt respecte d un sistema deductiu complet és un sistema deductiu complet

Aquest resultat es analeg al resultat que s obté en el cas dels sistemes deductius classics

Teorema III 4 1 (de compacitat)

Ier tot $S \subsetneq A$ es verifica que

$$\langle S \rangle = K_{T_c}(S)$$

La demostració d aquest teorema s ha establert més amunt

En notacio usual aquest teorema s enuncia d una altra manera es defineix la relacio

$$S \vdash x$$

si i nomes si existeix una successió finita $s \in S_F(S)$ tal que

$$s\, x \in T_c$$

Aleshores resulta que $S \vdash x$ equival a $x \in K_{T_c}(S)$ i, per tant el teorema de compacitat es pot enunciar

$$x \in \langle S \rangle \text{ si i nomes si } S \vdash x$$

Nota

La diferencia esencial entre el teorema classic de compacitat (això és el teorema de compacitat relatiu a sistemes deductius classics A Monteiro op cit) i l anterior radica en el fet seguent en el cas classic la notacio

$$S \vdash x$$

indica la existencia d un <u>sub-conjunt finit</u> $S_o \subsetneq S$ tal que

$$S_o \vdash x$$

(o equivalentment $S_o\, x \in T$ en el ben entés de que l ordre amb que intervenen els elements de S_o en la notació $S_o\, x \in T$ no importa en absolut, puix T verifica C P ja que es un sistema deductiu classic) mentres que en el cas complet la notacio

$$S \vdash x$$

indica l existència d una successió finita $s \in S_1(S)$ tal que

$$s\ x \in T_c$$

(L ordre dels termes de la successió no és important puix T_c verifica C P   el que sí és realment important es que els elements s_i de s poden estar repetits i en canvi en S_o no podien pas estar-ho)

És gracies a la propietat 9 de la prop III 1 2 que en el cas clàssic l existència del sub-conjunt S_o es equivalent a l existència de la successió s_o en canvi, en el cas complet si be l existència d un sub-conjunt implica l existència d una successio no és pas cert que l existencia d una successió impliqui l existencia d un sub-conjunt

En l exemple donat en la part B de la demostració de la prop II 8 2 $D = \{1\}$ es un sistema deductiu complet (no clàssic) (Sales [1974]) En ell

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \vdash \frac{1}{4}$$

puix si considerem la successió finita $s = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$ obtenim

$$\frac{1}{2}\ (\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\ \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = 1$$

Ara bé no existeix cap sub-conjunt S_o de S tal que

$$S_o \vdash \frac{1}{4}$$

Nota

Amb aquesta nomenclatura $D = K_D(\emptyset)$ significa que $\emptyset \vdash x$ si i nomes si $x \in D$

Teorema III 4 2 (de la deducció)

Si D és un sistema deductiu complet de (A,) aleshores

$$x \in \langle D \cup \{z\}\rangle = K_{T_c}(D \cup \{z\})$$

si i nomes si existeix un nombre natural $n_x \geqslant 1$ tal que

$$z^{(n_x)} x \in D$$

En efecte

A $z \in D \cup \{z\} \subseteq \langle D \cup \{z\}\rangle$ i $z^{(n_x)} x \in D \subseteq D \cup \{z\} \subseteq \langle D \cup \{z\}\rangle$ impliquen, per M 1 que

$$x \in \langle D \cup \{z\}\rangle = K_{T_c}(D \cup \{z\})$$

B $x \in K_{T_c}(D \cup \{z\})$ si i nomes si

z_1 z_n $x \in T_c$ on $z_i = z$ o $z_i \in D$

si i només si y_1 y_{n-k} z $k)$ z $x \in T_c$ on $y_j \in D$

(per C P) d on per M P

$$z \quad k) \quad z\ x \in D$$

Si $k \geqslant 1$ aleshores k és n_x si $k = 0$ aleshores $x \in D$ i per l absorció de D $z\ x \in D$

Notes

1 Aquest teorema que hem anomenat teorema de la deduccio generalitza el teorema de la deducció classic o de Tarski que diu

si D es un sistema deductiu classic de (A,)
aleshores

$$x \in D(D \cup \{z\}) = K_T(D \cup \{z\})$$

si i nomes si

$$z\ x \in D \qquad \text{(A Monteiro, op cit)}$$

Si D es un sistema deductiu classic afirmar l existència d un nonbre natural $n_x \geqslant 1$ tal que

$$z^{(n_x)} x \in D$$

o be afirmar que $z\ x \in D$ es excatament el mateix puix tot sistema deductiu clàssic satisfa la condició 9 prop III 1 2 Mes encara si D és un sistema deductiu clàssic el sistema deductiu complet engendrat per $\langle D \cup \{z\}\rangle$ és classic puix conte un sistema deductiu classic(prop III 4 4 conclusions) i per tant el teorema de la deducció complet és, precisament el teorema de la deducció de Tarski si D es un sistema deductiu classic

2 El sistema deductiu complet engendrat per un sistema deductiu complet D i un element z de A es $\langle D \cup \{z\}\rangle$ segons hem convingut, però tambe és per definició $\langle D\rangle \vee \langle z\rangle$ i es cumpleix la seguent igualtat

$$\langle D \cup \{z\}\rangle = \langle D\rangle \vee \langle z\rangle =$$
$$= \{x \quad x \in A \text{ i } (\exists n_x)(n_x \in N^* \text{ i } z \leqslant_D z^{(n_x-1)} \ x)\}$$

i, per tant,

$$\langle z\rangle = \{x \quad x \in A \text{ i } (\exists n_x)(n_x \in N^* \text{ i } z \leqslant_{T_c} z^{(n_x-1)} \ x)\}$$

III 5 Sistemes deductius complets maximals Radical complet

Definició III 5 1

Un sistema dedudctiu complet M és maximal (o complet-maximal) si i nomes si,

1 és propi ($M \neq A$)

2 si existeix un sistema deductiu complet D tal que $M \subsetneq D$ aleshores

$$D = M \quad ó \quad D = A$$

Teorema III 5 1

Un sistema deductiu complet M de A és maximal si i només si,

1 $M \neq A$

2 si $x\ y \in M$ aleshores existeix un nombre natural $n_{x\ y} \geqslant 1$ tal que

$$x^{(n_x\ y)}\ y \in M$$

En efecte

A M es maximal, per tant $M \neq A$ i, si $x \notin M$ i $y \notin M$ aleshores

$$\langle M \cup \{x\} \rangle \supsetneq M$$

i per tant $\langle M \cup \{x\} \rangle = A$ D on $y \in \langle M \cup \{x\} \rangle$ i, pel teor III 4 2 existeix un $n_{x\ y} \geqslant 1$ tal que

$$x^{(n_x, y)}\ y \in M$$

B Suposem ara que si $x\ \ y \notin M$ aleshores $x^{(n_x\ y)}\ y \in M$ per un cert $n_{x\ y} \geqslant 1$

Si $D \supsetneq M$ existira un $x \in D$ tal que $x \notin M$ Ara bé si $y \in A$ poden donar-se dues possibilitats :

(a) $y \in M$ i per tant $y \in D$

(b) $y \notin M$ i per tant existeix $n_{x\ y} \geqslant 1$ tal que

$$x^{(n_x\ y)}\ y \in M \subsetneq D \text{ i per M P } y \in D$$

Per tant per tot y de A, $y \in D$ d on $D = A$ i M és maximal

En el cas classic tenim un teorema analeg (A Monteiro op cit) i d ell s en segueixen dos corol laris que diuen

M es un sistema deductiu $\overbrace{\text{classic de}}^{\text{max mal}}$ (A) si i només si per tot $x \notin M$ i tot $y \in A$ es verifica $x\ y \in M$

M es un sistema deductiu clàssic maximal de (A)
si i només si $A/\equiv_M$ te exactament dues classes
que són M i A-M (Sales [1974])

El primer corol lari és valid (amb les modificacions pertinents) en el cas dels sistemes deductius complets maximals de (A) es a dir es verifica

Corol lari 1

M es un sistema deductiu complet maximal de (A) si i nomes si per tot $x \notin M$ i tot $y \in A$ es verifica

$$x^{(n_{x\,y})}\ y \in M$$

per un cert $n_{x\,y} \geqslant 1$

En efecte
Si $y \notin M$ és obvi (teor III , 1) si $y \in M$ per l absorció de M

D aci es dedueix que M es un sistema deductiu complet maximal de (A) si i nomes si per tot $n \in N^*$
$x^{(n)}\ y \notin M$ implica $x \in M$

- Si $x \notin M$ contradiccio amb el corol lari 1
- Si $x^{(n)}\ y \notin M$ implica $x \in M$, aleshores M és maximal puix si no ho fós existirien $x \notin M$ i $y \notin M$ tals que $x^{(n)}\ y \in M$ qualsevol que fós $n \in N^*$ Contradiccio

El segon corol lari en canvi és fals
Considerem ((0 1], $\{1\}$) on $x\ y = \frac{y}{x}$ si i només si $y < x$ i $x\ y = 1$ en els altres casos

A $\{1\}$ és un sistema deductiu complet (Sales [1974]) maximal
En efecte

Si $x \notin \{1\}$ i $y \notin \{1\}$, aleshores existeix un $n_{x,y} \geq 1$ tal que $x^{(n_x\, y)}\, y = 1$

Suposem que $x \leq y$ aleshores $n_{x\,y} = 1$

Suposem que $y < x$ aleshores $x\, y = \frac{y}{x}$ (que és $> y$)

- si $x \leq \frac{y}{x}$ aleshores $x\,\frac{y}{x} = x\, x\, y = 1$ i $n_{x,y} = 2$
- si no $\frac{y}{x} < x$ i aleshores $x\,\frac{y}{x} = \frac{y}{x^2}$, (que és $> \frac{y}{x}$)

  És impossible que

  $$y < \frac{y}{x} < \frac{y}{x^2} < \qquad < \frac{y}{x^n} < \qquad < x \quad \text{per tot } n$$

  puix si fos així $y < x^n$ per tot $n \in N$, pero $0 < x < 1$ i $(x^n) \longrightarrow 0$ i $y > 0$ Contradicció

B Ara bé,

$$x \equiv_{\{1\}} y \qquad \text{si i només si, } x\, y = 1 \text{ i } y\, x = 1$$

Això és, si, i només si $x \leq y$ i $y \leq x$ Per tant $A/_{\equiv_{\{1\}}} \cong A$ que contradiu l enunciat analeg al cor clàssic segon

El problema radica en el fet que la relació d equivalència no es la adequada per a formular el corol lari La relacio d equivalència adequada es la relació forta $\sim_D$ introduïda en l apartat II 8

Corol lari 2

> D és un sistema deductiu complet maximal de (A,) si i només si $A/_{\sim_D}$ té dues classes d equivalència que són D i A - D

En efecte

A Si D es un sistema deductiu complet maximal de (A) i $x, y \in D$ aleshores $x\, y \in D$ i $y\, x \in D$ i $x \sim_D y$ si $x \notin D$ i $y \notin D$, aleshores pel teor III 5 1 exiteixen dos nombre naturals n $m \geqslant 1$ tals que

$$x^{(n)} y \in D \quad \text{i} \quad y^{(m)} x \in D$$

i per tant $x \sim_D y$

si $x \in D$ i $y \notin D$ aleshores $y\ x \in D$ però en canvi no existeix cap nombre natural n tal que $x^{(n)} y \in D$ (puix si existís aplicant reiteradament M P , obtindriem una contradiccio)

Per tant $A/\sim_D$ te exactament dues classes que son D i $A - D$

B Si $A/\sim_D$ té dues classes és clar que una d elles és D, puix si $x \in D$ i $y \in D$ aleshores $x\ y \in D$ i $y\ x \in D$ i per tant

$$D \subseteq \bar{x}_D \quad \text{on } x \in D$$

Suposem ara que $D \subsetneq \bar{x}_D$ on $x \in D$ Aleshores existeix un $y \in \bar{x}_D$ tal que $y \notin D$ pero això no es pas possible puix

$$y \in \bar{x}_D \quad \text{implica} \quad x^{(n)} y \in D$$

i per M P $y \in D$

Per tant $A/\sim_D = \{D\ A - D\}$ i aleshores si $x \notin D$ i $y \notin D$ $x \sim_D y$ i en virtut de la definició de $\sim_D$ i del teor III 5 1 D és maximal

Notes

1 Un sistema deductiu complet D tal que si $x \notin D$ i $y \notin D$, cumpleixi

$$x\ y \in D$$

és clàssic i per tant maximal clàssic

Cal demostrar que per tot x y de A es verifica

$$x^{(2)} y \leqslant_D x\ y \qquad \text{(prop III 3 2)}$$

En efecte

Si $x \notin D$ i $y \notin D$ per hipotesi puix $x\ y \in D$;

si $y \in D$ per l absorcio, $x\ y \in D$

si $y \notin D$ i $x \in D$ aleshores no existeix cap n natural tal que $x^{(n)}\ y \in D$ (puix en cas contrari per M P $y \in D$)

Per tant $x^{(2)}\ y \notin D$ i $x\ y \notin D$ i, per l hipotesi

$$(x^{(2)}\ y)\ (x\ y) \in D$$

Així doncs D es clàssic i per les propietats dels sistemes deductius clàssics maximals (Monteiro op cit) D és classic maximal

2 La condicio $x \notin D$, $y \notin D$ implica $x\ y \in D$ es tan forta que, si un <u>sub-conjunt</u> D de A que verifiqui M P i l absorcio per la dreta la verifica aleshores D es un sistema deductiu classic i maximal

En efecte

En virtut de la nota 1 nomes cal demostrar que D és un sistema deductiu complet es a dir que D satisfà

SDC1, SDC4 i SDC5

(puix SDC2 i SDC3 s han imposat d avant ma)

<u>SDC1</u> Si $x \in D$, per l absorció $x\ x \in D$ si $x \notin D$, per hipòtesi $x\ x \in D$

<u>SDC4</u> Volem demostrar que, per tota terna x, y, z

$$(y\ z)\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$$

Si $z \in D$ per l absorció està demostrat

si $z \notin D$ i $x \in D$ i $y \in D$ aleshores $x\ z \notin D$ (M P) i $x\ y \in D$ d on per M P , $(x\ y)\ (x\ z) \notin D$ i (tambe per M P) $y\ z \notin D$ Finalment (per hipòtesi), $(y\ z)\ ((x\ y)\ (x\ z)) \in D$

si $z \notin D$ i $x \notin D$ aleshores (per hipòtesi) $x\ z \in D$ i per l absorció està acabat,

si $z \notin D$ i $x \in D$ i $y \notin D$ aleshores (per M P)
$x\ z \notin D$ i $x\ y \notin D$ i (per hipotesi)
$(x\ y)\ (x\ z) \in D$ i (per l absorcio) esta acabat

<u>SDC5</u> Semblantment per tota terna x y z de A

$$(x\ (y\ z))\ (y\ (x\ z)) \in D$$

Si $z \in D$ aplicant l absorcio fet
si $z \notin D$ i $x \in D$ i $y \in D$ aleshores (per M P)
$y\ (x\ z) \notin D$ i $x\ (y\ z) \notin D$ i (per hipòtesi) fet
si $z \notin D$ i $x \notin D$ aleshores (per l hipotesi)
$x\ z \in D$ i (per l absorcio) fet
si $z \notin D$ i $x \in D$ i $y \notin D$ aleshores (per M l)
$x\ z \notin D$ i (per l hipòtesi) $y\ (x\ z) \in D$ i (per l absorcio) fet

3 Tot sistema deductiu classic maximal M és un sistema complet maximal però (per la nota 1) veiem que, al reves, no es pas veritat

Definicio III 5 2

Anomenarem <u>radical deductiu complet</u> de (A) i el designarem $R_c(A)$ a la interseccio de tots els sistemes deductius complets maximals de A

És obvi que si R(A) es el radical deductiu classic de (A) aleshores

$$R_c(A) \subseteq R(A)$$

i, en general no coincideixen
Si (A) no admet sistemes deductius maximals complets aleshores $R_c(A) = R(A) = A$

III 6 Sistemes deductius complets lligats a un element

En aquest apartat analitzarem els sistemes deductius complets maximals amb la condició de no contenir un cert element x de A que naturalment cal que no sigui un element de T_c (puix $T_c \subseteq D$ per tot sistema deductiu complet) Així doncs cal suposar d entrada que A es completament consistent ($T_c \neq A$) i que $x \in A$ però $x \notin T_c$

Proposició III 6 1

> El conjunt de sistemes deductius complets que no contenen a x és inductiu superiorment

En efecte

Si $(D_i)_{i \in I}$ es una cadena de sistemes deductius complets que no contenen a x aleshores $\bigcup_{i \in I} D_i$ es un sistema deductiu complet que no conté pas a x

(Que no conte a x és obvi que verifica SDC4 i SDC5 és consequencia del fet que $T_c \subseteq \bigcup_{i \in I} D_i$ Que $\bigcup_{i \in I} D_i$ es un sistema deductiu debil absorbent per la dreta es troba en Sales [1973])

Nota

En una cadena de sistemes deductius debils $(D_i)_{i \in I}$ absorbents per la dreta si un membre de la cadena és complet aleshores $\bigcup_{i \in I} D_i$ és un sistema deductiu complet, si un dels membres es un sistema deductiu clàssic aleshores $\bigcup_{i \in I} D_i$ es un sistema deductiu classic

El lema de Zorn ens permet d afirmar l existència de sistemes deductius complets maximals entre els que no contenen a x En efecte la família de sistemes deductius completes que no contenen a x és inductiva superiorment i per tant existeix un sistema deductiu complet maximal entre els que no contenen a x

Definició III 6 1

> Els sistemes deductius complets maximals entre els que no contenen a x s anomenen <u>sistemes deductius complets lligats a x</u>

El teorema que segueix ens proporciona una caracterització dels sistemes deductius complets lligats a x en termes de la llei de compo icio de (A)

Teorema III 6 1

> Un sistema deductiu complet D està lligat a x de A ($x \notin T_c$) si, i nomes si, satisfà
>
> 1 $x \notin D$
>
> 2 si $y \notin D$ aleshores existeix un $n_{x\ y} \geqslant 1$ tal que
> $$y^{(n_x\ y)}\ x \in D$$

En efecte

A Si D està lligat a x cal que $x \notin D$ i per tant es satisfà 1

Suposem que $y \notin D$ aleshores

$$\langle D \cup \{y\} \rangle \supsetneq D$$

i, com que D és maximal entre els que no contenen a x $x \in \langle D \cup \{y\} \rangle$ i segons el teorema de la deduccio, existeix un $n_{x\ y} \geqslant 1$ tal que

$$y^{(n_x\ y)}\ x \in D$$

B Reciprocament si $x \notin D$ i D és un sistema deductiu complet tal que $D \subsetneq D$ considerem un element $y \in D$ tal que $y \notin D$ Per (2) existeix un nombre natural

$n_{x\,y} \geq 1$ tal que

$$y^{(n_{x},y)}\ x \in D \subsetneq D$$

i per M P reiterat

$$x \in D$$

resulta doncs que D es maximal entre els sistemes deductius complets que no contenen a x

Nota

Tot sistem deductiu clàssic lligat a x es un sistema deductiu complet lligat a x puix si D és un sistema clàssic lligat a x i existeix un sistema deductiu complet D , no classic tal que $D \subseteq D$ i $x \notin D'$ obtenim una contradicció puix si D conte un sistema deductiu classic, és classic (prop III 4 3 consideracions)

Al reves pero es fals Existeixen sistemes deductius complets lligats a x que no son pas classics En $((0\ 1],\ \{1\})$ $\{1\}$ es un sistema deductiu complet lligat a tot $x \neq 1$ però en canvi com que $T = (0\ 1]$ no té sentit pensar en sistemes deductius classics lligats a $x \neq 1$

Proposició III 6 2

Donat un sistema deductiu complet D i un element $x \notin D$ existeix un sistema deductiu complet D' lligat a x tal que

$$D \subsetneq D$$

En efecte

La família dels sistemes deductius complets que no contenen a x i contenen a D és inductiva superiorment Segons el lema de Zorn existeix un element maximal de la familia diguem-li D Suposem que existeix un sistema de uctiu complet D tal que

$$D \subsetneq D$$

com que $D \subseteq D$ no és pas possible que $x \notin D''$ (puix D és maximal amb aquestes condicions) Per tant D està lligat a x

III 7   Els elements de Pierce en el cas dels sistemes deductius complets

En el cas dels sistemes deductius classics d una estructura algebraica (A) sabem (A Monteiro, op cit) que el conjunt P dels elements piercians genera un sistema deductiu clàssic que coincideix amb el radical classic Concretament si anomenem element piercia classic a tot element de A de la forma

$$((x\ y)\ x)\ x$$

on x i y pertanyen a A i anomenem P el conjunt

$$P = \{z \quad z \in A \text{ i } z = ((x\ y)\ x)\ x \quad \text{per } x \quad y \text{ de } A\}$$

tenim que el seguent teorema

$$D(P) = R(A)$$

A fi de poder donar un resultat paral lel encara que més dèbil ens cal intriduir els elements piercians complets

Definició III 7 1

Anomenarem element piercià complet (o també element piercià en sentit ampli) a tot element z de A de la forma

$$z = ((x\ y)^{(n)}\ x)\ x$$

on x i y pertanyen a A i $n \geq 1$

Anomenarem P el conjunt de tots els elements piercians complets Així

$$P = \{((x\ y)^{(n)}\ x)\ x \quad x \in A \text{ i } y \in A \text{ i } n \in N^*\}$$

És clar que $P \subseteq P$ i per tant $\langle P \rangle \subseteq \langle P \rangle$

Tot sistema deductiu classic que conte P conté P i naturalment tot sistema deductiu classic que conté P conte P

La primera afirmació es consequència del seguent fet si D és un sistema deductiu classic aleshores

$$(x\ y)^{(n)}\ x \equiv_D (x\ y)\ x$$

i com que $\equiv_D$ és una congruencia resulta que

$$((x\ y)^{(n)} x)\ x \equiv_D ((x\ y)\ x)\ x$$

per tant un sistema deductiu classic conté els elements piercians classics si i nomes si conté els elements piercians complets

Aixo ens permet d establir que

$$D(P) = D(P\ )$$

i finalment, obtenim

$$\langle P \rangle \subseteq \langle P\ \rangle \subsetneq D(P) = D(P\ )$$

D altra banda sabem que $R_c(A) \subseteq R(A)$ i que $R(A) = D(P) = D(P\ )$

El que no sabem però son les relacions d'inclusió que verifiquen

$$\langle P \rangle \subseteq \langle P\ \rangle$$

i

$$R_c(A)$$

A continuació demostrarem que es satisfa la seguent relacio

Proposició III 7 1

$$R_c(A) \subseteq \langle P \rangle$$

En efecte

Suposem que $x \notin \langle P \rangle$ Aleshores existeix un sistema deductiu complet S_x lligat a x, tal que

$$\langle P \rangle \subsetneq S_x$$

Per tot z de A tenim que

$$((x\ z)^{(n)}\ x)\ x \in S_x$$

qualsevol que sigui $n \in N^*$ per tant

$$(x\ z)^{(n)}\ x \notin S_x$$

per cap n de N^* (per M P)

Això implica (teor III 6 1) que $x\ z \in S_x$ i, per tant,

$$z \in \langle S_x \cup \{x\} \rangle$$

L arbitrarietat de z fa que

$$\langle S_x \cup \{z\} \rangle = A$$

Això ens assegura que S_x és maximal en A puix si D és un sistema deductiu complet $\supsetneq S_x$ aleshores

$$x \in D$$

i per tant $D \supseteq \langle S_x \cup \{x\} \rangle = A$

Per tant existeix un sistema deductiu complet maximal que no conte x i aleshores $R_c(A)$ tampoc no conte x D on resulta que

$$R_c(A) \subseteq \langle P \rangle$$

Ens queda per fer la seguent pregunta coincideixen els sistemes deductius complets $R_c(A)$ i $\langle P \rangle$?

La resposta en general és negativa En el cas $((0,1]\ ,\{1\})$ hem vist que $R_c(A) = \{1\} = \Gamma_c$ mentres que $\langle P \rangle \neq \{1\}$, puix hi ha percians diferents de 1 Per exemple sı fem $y = \frac{1}{2}$ i $x = \frac{2}{3}$ tenim

$$x\ y = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4} \qquad (x\ y)\ x = \frac{3}{4}\ \frac{2}{3} = \frac{2/3}{3/4} = \frac{8}{9}$$

$$((x\ y)\ x)\ x = \frac{8}{9}\ \frac{2}{3} = \frac{2/3}{8/9} = \frac{3}{4} \neq 1$$

ı, com que $\langle P \rangle \subseteq \langle P\ \rangle$ es clar que $\langle P\ \rangle \neq \{1\}$

Hem obtingut doncs la seguent cadena

$$R_c(A) \subseteq \langle P\ \rangle \subsetneq D(P) = D(P\ ) = R(A)$$

L exemple precedent ens dıu que en general, $\langle P \rangle \nsubseteq R_c(A)$

Per tant en general dısposem de la sıtuacıo seguent :

$$\begin{matrix} R_c(A) \\ \langle P \rangle \end{matrix} \subseteq \langle P\ \rangle \subsetneq D(I\ ) = D(I\ \ ) = R(A)$$

Ara be el sıstema deductıu complet $\langle I\ \rangle$ és <u>clàssic</u>

En efecte

Hem vıst en la demostracıo de la prop III 7 1 que, sı $x \notin \langle P\ \rangle$ exısteıx un sıstema deductıu complet llıgat a x, S_x que es <u>maxımal</u> Ara aplıquem a S_x la nota 1 del apartat III 5 per tal de demostrar que S_x és un sistema deductıu maxımal classıc

En la cıtada demostracıó hem vıst també que, per tot $z \in A$

$$x\ z \in S_x$$

Suposem que $z \notin S_x$ i $y \notin S_x$ Si $y \notin S_x$ existeix un sıstema deductıu complet lligat a y S_y, tal que

$$S_x \subsetneq S_y$$

(prop III 6 2) Ara be $y \notin S_y$ i per tant $S_y \neq A$

Pero S_x es maximal i per tant $S_y = S_x$ Aıxí, doncs, $y \notin \langle P\ \rangle \subsetneq S_y$ ı $y\ z \in S_y = S_x$

Aıxo ens dıu que $x \notin R(A)$

Per tant, si $x \in R(A)$ aleshores $x \in \langle P\ \rangle$, és a dir,

$$R(A) \subsetneq \langle P \rangle$$

i per la prop III 4 3 $\langle P \rangle$ es un sistema deductiu classic

Hem obtingut finalment la següent configuracio

$$R_c(A) \atop \langle P \rangle \subsetneq \langle P \rangle = D(P) = D(I\ ) = R(A)$$

Notes

1 Si definim $P = \{(((x^{(m)}\ z)^{(n)}\ x)\ x \quad x \quad z \in A \text{ i } n \quad m \in N^{*}\}$ resulta que $\langle P \rangle = \langle P \rangle$ puix

a) $P \subseteq P$ i, per tant $\langle P \rangle \subseteq \langle P \rangle$

b) $x\ z \leqslant x^{(n)}\ z$ implica $(x^{(n)}\ z)\ x \leqslant (x\ z)\ x$ que a la seva vegada implica

$$(x\ z)\ ((x^{(n)}\ z)\ x) \leqslant (x\ z)^{(\_)}\ x$$

però

$$x\ z \leqslant x^{(n)}\ z \text{ implica } (x^{(n)}\ z)\ ((x^{(n)}\ z)\ x) \leqslant$$
$$\leqslant (x\ z)\ ((x^{(n)}\ z)\ x)$$

Per tant

$$(x^{(n)}\ z)^{(2)}\ x \leqslant (x\ z)^{(2)}\ x$$

Suposem ara que

$$(x^{(n)}\ z)^{(m)}\ x \leqslant (x\ z)^{(m)}\ x$$

aleshores

$$(x\ z)\ ((x^{(n)}\ z)^{(m)}\ x) \leqslant (x\ z)^{(m+1)}\ x$$

però com que

$$(x^{(n)}\ z)\ ((x^{(n)}\ z)^{(m)}\ x \leqslant (x\ z)\ ((x^{(n)}\ z)^{(m)}\ x)$$

resulta que

$$(x^{(n)}\ z)^{(m+1)}\ x \leqslant (x\ z)^{(m+1)}\ x$$

Per tant, per tot n m de N^{*} s obte

$$((x\ z)^{(m)}\ x)\ x \leqslant ((x^{(n)}\ z)^{(m)}\ x)\ x,$$

d on

$$P \subseteq \langle P \rangle$$

puix que $\langle P \rangle$ es un filtre (Tots els simbols de pre-ordre que intervenen son relatius al sistema T_c) Així $\langle P \rangle \subseteq \langle P \rangle$ i aixo acaba la demostració

2 Si existeix un sistema deductiu maximal no classic aleshores

$$R_c(A) \neq R(A)$$

puix si no fós així tot sistema deductiu complet i maximal contindria el conjunt R(A) que es clàssic i fora classic Contradiccio

3 Una condicio necessaria i suficient per tal que $\langle P \rangle = \langle P \rangle$ es que P sigui classic (això es $\langle P \rangle = D(I)$)

4 Si $\langle P \rangle = A$ aleshores no existeixen sistemes deductius maximals classics pero poden existir sistemes deductius complets i maximals

5 Si no existeix <u>cap</u> sistema deductiu maximal aleshores $R_c(A) = A$ i $R(A) = A$

6 Si $R_c(A) = T_c$ direm que A és <u>deductivament semi-simple</u> (des d el punt de vista complet)

Si $((x\ y)^{(n)}\ x)\ x \in T_c$ per tot x y de A aleshores $\langle P \rangle = T_c$ i, per tant $R_c(A) = T_c$ i $\langle P \rangle = T_c$ D on T_c és un sistema deductiu classic i tots els sistemes deductius de (A,) seran classics

Reciprocament si tots els sistemes deductius són classics aleshores $T_c = T$, $\langle P \rangle = D(P)$, $R_c(A) = R(A)$ i val el teorema de semi-simplicitat classic (Monteiro op ci

Ara bé si $R_c(A) = T_c$ no podem pas assegurar que tots els sistemes deductius són classics i per tant tampoc podem donar per segur el teorema de la semi-simplicitat com una condicio necessaria i suficient

<u>Alguns exemples</u>

I $((0,1] \quad \{1\})$ Ja hem vist que $R_c(A) = \{1\}$ i $R(A) = A$ Tambe hem vist que $\langle P\rangle \neq \{1\}$ que $\{1\}$ és maximal per tant $\langle P\rangle = A$ Aixi,

$$\{1\} \subsetneq \langle P\rangle = \langle P \quad \rangle = D(P) = D(P \quad) = R(A) = A$$

II Considerem ara $([0\ 1] \quad \{1\})$ on $0 \ x = 1$ per tot x $x\ 0 = 0$, per tot $x \neq 0$ $x\ y$ es defineix com en I, si $x \neq 0$ $y \neq 0$ Cal comprovar que $\{1\}$ es encara un sistema deductiu complet

SDC1 $0\ 0 = 1$

SDC2 $x\ 1 = 1$ per tot $x \in [0\ 1]$

SDC3 $x\ y = 1$ i $x = 1$ aleshores $y \neq 0$ i, per tant $y = 1$

SDC4

$$(x\ y)\ \ ((z\ x)\ \ (z\ y)) = \begin{cases} y = 0,\ x\ y = 0 \text{ i fet} \\ y \neq 0 \text{ i } x = 0 \quad x\ y = 1 \text{ i } z\ x = 0 \text{ i fet,} \\ y \neq 0 \text{ i } x \neq 0 \text{ i } z = 0 \quad z\ y = 1 \text{ i fet} \\ y \neq 0 \text{ i } x \neq 0 \text{ i } z \neq 0 \quad \text{fet} \end{cases}$$

SDC5

$$(x\ (y\ z))\ \ (y\ \ x\ z)) = \begin{cases} x = 0 \quad x\ z = 1 \text{ i fet} \\ x \neq 0 \text{ i } y = 0,\ y\ (x\ z) = 1 \text{ i fet,} \\ x \neq 0 \text{ i } y \neq 0 \text{ i } z = 0 \quad y\ (x\ z) = 0 \\ \qquad \text{i } x\ (y\ z) = 0 \text{ i fet} \\ x \neq 0 \text{ i } y \neq 0 \text{ i } z \neq 0 \text{ i fet} \end{cases}$$

Sistemes deductius complets : $\{1\}$ $(0\ 1]$, $[0\ 1]$

Sistemes deductius maximals $(0\ 1]$ que és clàssic puix per tot x y diferents de zero

$$(x\ (x\ y))\ \ (x\ y) \in (0,1]$$

cal analitzar què passa per
$x = 0$ ó $y = 0$

- si $x = 0$, $x\ y = 1$ i fet
- si $x \neq 0$ $y = 0$ aleshores
  $x\ (x\ y) = 0$ i $x\ y = 0$ i fet

Per tant, $R(A) = R_c(A) = D(P) = (0\ 1] = \langle P \rangle$, puix no hi ha cap percia $= 0$ Si $x\ \ y \in (0,1]$, veure I si $x = 0$ o $y = 0$ aleshores

- $x = 0$ implica $0\ y = 1$ i $1\ 0 = 0$ i $0\ 0 = 1$ d on
  $((x\ y)\ x)\ x = 1 \neq 0$
- $x \neq 0$ i $y = 0$ implica $x\ 0 = 0$ i $0\ x = 1$ i $1\ x = x \neq 0$
  d on
  $((x\ y)\ x)\ x = x \neq 0$

III Considerem l estructura producte $A = (0\ 1] \times (0\ 1]$ i l operacio producte induïda per l operació de I

Sistemes deductius complets $\{(1,1)\}$,
$M = \{(x\ 1),\ 0 < x \leq 1\}$
$M = \{(1\ y),\ 0 < y \leq 1\}$
A

Sistemes deductius maximals M i M¹, puix si
$(z_1\ z_2)$ i $(v_1\ v_2)$ son elements de $A - M$
(per exemple) existeix un $n \geq 1$ tal que
$$(z_1, z_2)^{(n)}\ (v_1\ v_2) =$$
$$= (z_1^{(n)}\ v_1\ z_2^{(n)}\ v_2) = (1\ 1)$$
(veure A pags 125 i 1?6) però no son pas classics puix en general, $n \neq 1$

Per tant $R(A) = A = D(P)$ i $R_c(A) = T_c = \{(1\ 1)\}$
Es facil de comprovar que $\langle P \rangle = A$ puix hi ha percians tan petits com volguem n hi ha prou en veure que hi ha percians que no estan ni en M no en M
$$(((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\ (\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}))\ (\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}))\ (\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{2}{3}\ \tfrac{2}{3})$$

III 8 Sistemes deductius complets irreductibles

Definició III 8 1

Un sistema deductiu complet $D \neq A$ es <u>irreductible</u> si i només si $D = D_1 \cap D_2$ implica $D_1 = D$ ó $D_2 = D$

Definició III 8 2

Un sistema deductiu complet $D \neq A$ es <u>completament irreductible</u> si i nomes si

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i$$

implica l existencia d un índex $i \in I$ tal que $D_i = D$

Proposició III 8 3

Tot sistema deductiu complet i maximal es completament irreductible

En efecte
Si $D = \bigcap_{i \in I} D_i$ aleshores $D_i \supseteq D$ per tot $i \in I$
Ara bé $D \neq A$ per tant existeix un x de A tal que $x \notin D$ existeix doncs, un índex $i_o \in I$ tal que $x \notin D_{i_o}$ Però D és maximal, per tant, per tot $i \in I$ o $D_i = A$ ó $D_i = D$
És clar que $D_{i_o} = D$

Proposicio III 8 4

Un sistema deductiu complet es completament irreductible si i nomes si, existeix un $x \notin D$ tal que $D = S_x$

En efecte
A Si $D = S_x$ i $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, aleshores existeix un $D_i \supsetneq D$

tal que $x \notin D_1$ per tant $D_1 = D$

B Si D no està associat a cap $x \in A - D$ considerem

$$D = \bigcap_{x \in A-D} S_x$$

on cada $S_x \supsetneq D$

Aleshores $D \subseteq D = \bigcap_{x \in A-D} S_x$

Si $t \in \bigcap_{x \in A-D} S_x$ aleshores, per tot $x \in A-D$, $t \in S_x$

D on es dedueix que $t \in D$ (puix si $t \notin D$ tindriem un S_t tal que $t \notin S_t$ i per tant, $t \notin \bigcap_{x \in A-D} S_x$)

Per tant $D = \bigcap_{x \in A-D} S_x$ i $S_x \supsetneq D$ per tot $x \in A-D$

Aixo ens diu que en aquestes condicions D no és completament irreductible

Corol lari 1

Tot sistema deductiu complet propi està contingut en un sistema deductiu complet completament irreductible

En efecte

És una consequencia immediata de les props III 6 2 i III 8 2

Corol lari 2

Si $x \notin T_c$ i per tot $n \in N^*$, $y \notin_{T_c} y^{(n-1)} x$ (on $y^{(o)} x = x$) aleshores existeix un sistema completament irreductible D tal que $x \notin D$ i $y \in D$ (això es D els separa)

En efecte

$x \notin \langle y \rangle$ (nota2 teor III 4 2) Sigui S_x un sistema deductiu complet, lligat a x i que contingui $\langle y \rangle$ (prop III 6 2) Ara be $x \notin S_x$ i $y \in S_x$ i S_x es completament irreductible (prop III 8 2)

Proposició III 8 3

> Tot sistema deductiu propi es intersecció de sistemes deductius completament irreductibles

En efecte

Com que $D \subsetneq A$ el conjunt $B = \{x \in A \quad x \notin D\} \neq \emptyset$

Per cada $x \in B$ considerem un sistema deductiu complet lligat a x S_x tal que $\supseteq D$ (prop III 6 2) Aleshores

$$D = \bigcap_{x \in B} S_x$$

Però també es obvi que si $x \notin D$ aleshores $x \notin \bigcap_{x \in B} S_x$ puix $x \in B$

Corol lari 1

> La intersecció de tots els sistemes deductius completament irreductibles és T_c

Corol lari 2

> Si tot sistema deductiu completament irreductible es maximal aleshores
>
> $$R_c(A) = T_c$$
>
> i per tant
>
> $$T_c \subseteq \langle P \rangle = D(I) = R(A) = T$$

Nota

Si D és un sistema deductiu complet clàssic, aleshores

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i$$

si i només si, tots els sistemes deductius D_i son clàssics

Per tant, si tot sistema deductiu completament irreductible és maximal, aleshores (A) és semi-simple (en el sentit clàssic $R(A) = D(P) = T$)

Bibliografia

BIRKHOFF (Garrett)

(1948) Lattice Theory American Mathematical Society Colloquium Publications Volume XXV New York (1948)

BOURBAKI (Nicolas)

(1970) Theorie des ensembles Description de la mathématique formelle Hermann Paris (1970)

CURRY (Haskell B)

(1952) Leçons de Logique Algebrique Collection de logique mathematique Serie A nº2 Paris (1952)

DIEGO (Antonio)

(1965) Sobre Algebras de Hilbert Notas de logica Matematica Nº12 (1965) Instituto de Matematica Universidad Nacional del Sur Bahia Blanca

(1966) Sur les algebres de Hilbert Collection de logique mathematique Serie A nº21 Paris (1966)

DUBREIL (Paul) DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise)

(1964) Leçons d algebre moderne Collection Universitaire de Mathematiques Paris (1964)

DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise) CROISOT (R) LESIEUR (L)

(1953) Leçons sur la theorie des treillis Cahiers scientifiques fasc XXI Paris (1953)

ENDERTON (Herbert B)

(1972) A mathematical introduction to logic Academic Press New York and London (1972)

FUCHS (L)

(1963) Partially ordered algebraic systems Pergamon Press Oxford London New York Paris (1963)

HALMOS (Paul R)

(1955) Algebraic Logic I (Monadic Boolean Algebras) Compositio Mathematica, 12 (1955), 217-249

HILBERT (David)

(1923) Die Logischen Grundlagen der Mathematik Mathematischen Annalen 88 Band (1923) 151-165

HILBERT (David) ACKERMANN (Wilhelm)

(1928) Grundzuge der theoretischen Logik Berlin (1928) Trad castellana de Victor Sanchez de Zabala Ed Tecnos Madrid (1962)

KURATOWSKI (Casimir)

(1922) Sur l operation $\bar{A}$ de l Analysis Situs Fundamenta Mathematicae, 3 (1922) 181-189

(1958) Topologie Vol 1 Monografie Matematyczne Polish Scientific Publishers (1958)

MENDELSON (Elliott)

(1963) Introduction to Mathematical Logic D Van Nostrand Company Inc Princeton (1963)

MONETIRO (Antonio)

(1960) Sur le calcul propositionnel implicatif positif Cours donné a la Universidad Nacional del Sur Argentina (1960)

(1971) La semi-simplicite des algebres de Boole topologiques el les sistemes deductifs Revista de la Unión Matematica Argentina (U M A) Vol 25 (1971)

PORTE (Jean)

(1965) Recherches sur la théorie generale des systèmes formels el sur les systèmes connectifs Collection de Logique Mathematique Serie A, nº18 Paris (1965)

RASIOWA (Helena)

(1974) An algebraic approach to non-classical logics Studies in logic and the foundations of mathematics North-Holland (1974)

RASIOWA (Helena) SIKORSKI (Roman)

(1970) The Mathematics of Metamathematics Monografie Matematyczne Warszawa (1970)

SALES (Francisco de Asis)

(1971) Operaciones ordenadoras y algebras de Hilbert Publicado en Actas de la Undecima Reunión Anual de Matematicas Espanola Murcia (1971)

(1973) Algebras de Hilbert Curso monografico de doctorado Departamento de Calculo de Probabilidades y Estadistica Matemática Universidad de Barcelona (1973)

(1974) Sistemas deductivos Curso monografico de doctorado Ibid (1974)

(1975) Consecuencia y deducción en sistemas lógicos Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona En curso de publicación

SZÁSZ (G)

(1971) Théorie des treillis Monographies Universitaires de mathematiques Paris (1971)

TARSKI (Alfred)

(1930) Uber einige fundamentale Begriffe der Metamathematik Comptes rendues des seances de la Societe de Sciences et des Lettres de Varsovie, vol 23 (1930) 22-29

(1930) Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften Monatshefte fur Mathematik und Physik vol 37 (1930) 361-404

(1930') Untersuchungen uber der Aussagenkalkul Coıptes rendues des seances de la Socıeté d s Scıences et des Lettres de Varsovıe vol 23 (19>0) 30-50

(1935) Grundzuge des Systemenkalkul, Lrster Teıl Fundamenta Mathematıcae vol 25 (1935) 503-526

(1936) Grundzuge des Systemenkalkul, Z eıter Teıl Ibid vol 26 (1936) 283-301

(1940) Introduccıon a la lógıca y a la metodología de las cıencıas deductıvas Espasa-Calpe S A Madrıd (1951)

(1972) Logıque, sémantıque, metamathematıque, tome 1 1923-1944 Philosophıes pour l âge de la scıence Parıs (1972)

(1974) Logıque, semantıque, metamathematıque, tome 2 1923-1944 Ibıd (1974)

WARD (Morgan)

(1942) The closure operators of a lattıces Annals of Mathematıcs, vol 43 nº2 Aprıl 1942 191-196

Nomenclàtor

R-15069