Haces reflexivos sobre espacios proyectivos

Rosa María Miró Roig

HACES REFLEXIVOS SOBRE ESPACIOS PROYECTIVOS.

Rosa María Miró Roig.

CAPITULO IV.

CAPITULO IV

LOS ESPACIOS DE MODULI ${}^{2}M^{s}_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ y ${}^{2}M^{s}_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$.

En lenguaje informal un problema de moduli consiste en encontrar, dada una cierta clase de objetos, una variedad que los parametrice adecuadamente. Para haces libres de torsión y estables el problema ha sido resuelto por Maruyama (Véase |M 1| y |M2|), quien prueba que si X es una variedad proyectiva no singular y Σ el conjunto de clases de isomorfía de haces libres de torsión, estables, de rango r sobre X, con polinomio de Hilbert-Samuel fijo H, entonces Σ tiene un esquema de moduli grueso M que es separado y localmente de tipo finito sobre k. Esto significa que:

(i) Los puntos cerrados de M están en correspondencia biyectiva con los elementos de Σ ;

(ii) Para todo esquema T y para todo haz coherente $\mathcal{F}$ sobre XxT, plano sobre T y con fibras en Σ , existe un morfismo φ: T $\longrightarrow$ M tal que para todo punto cerrado $t \in T$, $\varphi(t)$ es el punto de M correspondiente a la clase de isomorfía del haz $\mathcal{F}_t$;

(iii) El morfismo φ puede ser asignado funtorialmente;

(iv) M es universal con respecto a las propiedades (ii) y (iii); y

(v) M es separado y localmente de tipo finito sobre k.

Si además r=2, entonces M es de tipo finito sobre k.

En nuestro caso tomamos $X=\mathbb{P}^3$ y consideramos haces reflexivos estables E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Puesto que, especificar el polinomio de Hilbert-Samuel de E es equivalente a dar las clases de Chern de E, del Teorema de Maruyama, se concluye que el conjunto de las clases de isomorfía de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1,c_2,c_3 tiene un esquema de moduli $M^s_{\mathbb{P}^3}(c_1,c_2,c_3)$ que es separado y de tipo finito sobre k. Sin embargo en muy pocos casos se conoce una descripción explícita de $^2M^2_{\mathbb{P}^3}(c_1,c_2,c_3)$. En |H5| ,R.Hartsborne estudia $^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2)$; en |C2| ,Chang estudia $^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-c_2+2)$, $^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2{}^2-c_2)$ y $^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-3c_2+8)$; y en |C3| ,Chang estudia los espacios de moduli ${}^{2}M^{s}_{\mathbb{P}^3}(c_1,c_2,c_3)$ con $1 \leq c_2 \leq 3$.

En este capítulo describimos los espacios de moduli de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$, $0 \leq r \leq \frac{-1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$ (Resp. $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$, $c_2 \geq 6$, $1 \leq r \leq \sqrt{c_2-2}$).

Nótese que estos valores de las clases de Chern corresponden a los extremos inferiores de los intervalos de inexistencia de c_3 (cáp. I; Teorema 3.2). En el capítulo V estudiamos los espacios de moduli de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ cuyas clases de Chern corresponden a los extremos superiores de los intervalos de inexistencia de c_3. Así pues, quedan clasificados los haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ que podemos llamar c_3-extremales.

1. Propiedades de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ y $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$.

En lo que sigue pondremos $b(-1,c_2)=\frac{-1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$ y $b(0,c_2)=\sqrt{c_2-2}$.

En esta sección se estudian las principales propiedades de los haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$,

$o \leq r \leq b(-1,c_2)$ (Rep. $(0,c_2,c_2^2 - (2r-1)c_2+2r^2)$, $c_2 \geq 6$, $1 \leq r \leq b(0,c_2)$ tales como la determinación de su espectro (Corolarios 1.4 y 1.6), la existencia de planos inestables de orden c_2-r (Corolarios 1.4 y 1.6), la determinación de resoluciones localmente libres de los mismos (Teoremas 1.7 y 1.8) y consecuencias de la existencia de tales resoluciones.

En el Teorema 2.5 del capítulo I quedó garantizada la existencia de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2 -2rc_2+2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$, $o \leq r \leq b(-1,c_2)$ (Resp. $(0,c_2,c_2^2 -(2r-1)c_2+2r^2$, $c_2 \geq 6$, $1 \leq r \leq b(0,c_2)$). Empezaremos esta sección con una construcción alternativa de tales haces:

<u>1.1 Construcción</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $o \leq r \leq b(-1,c_2)$, consideramos el par (Y,e) donde si $r=o$, Y es una curva plana de grado c_2, y si $r \geq 1$, $Y= =Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-r y una curva plana Y_2 de grado r que corta a Y_1 en r puntos, y donde $o \neq e \in H^\circ \omega_Y(3)$. Sea $E(1)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2 -2rc_2+2r\cdot(r+1))$.

Denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de clases de isomorfía de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ construidos en 1.1. Uno de los objetivos de este capítulo es demostrar que $\mathcal{F}$ es un abierto denso de ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ (Véase el Teorema 2.5).

<u>1.2 Construcción</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq b(0,c_2)$, consideramos el par (Y,e) donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-r+1 con una curva plana de grado r que corta a Y_2 en r puntos, y donde $o\neq e \in H^{o}\omega_Y(2)$. Sea $E(1)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow o.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$.

Denotemos por $\mathcal{L}$ el conjunto de clases de isomorfía de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ construidos en 1.2. Uno de los objetivos de este capítulo es demostrar que $\mathcal{L}$ es un abierto denso de ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$ (Véase el Teorema 2.7).

<u>1.3 Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$, $o \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2d)$, $o \leq d \leq r(r+1)$. Entonces E posee un plano inestable de orden c_2-r.

Demostración. Obsérvese que para todo c_2,r y d en las hipótesis del enunciado se verifica que $c_3=c_2^2-2rc_2+2d > \frac{c_2^2}{2} + +c_2$. Luego estamos en condiciones de aplicar |H6; Proposition 5.2 |y concluir que E posee un plano inestable de orden c_2-q, para cierto q, $o \le q \le \frac{1}{2}(c_2-3)$, y que $c_2^2-2qc_2 \le \le c_3=c_2^2-2rc_2+2d \le c_2^2-2qc_2+2q(q+1)$. De donde deducimos que necesariamente q=r.

1.4 Corolario. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \ge 4$, $o \le r \le b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+ +2r(r+1))$. Se verifica:

(a) E posee un plano inestable de orden c_2-r.

(b) El espectro de E es $\{-1,-2,-2,-3,-3,\ldots,-r-1, -r-1,-r-2,-r-3,\ldots,-c_2+r\}$.

Demostración. (a) Es una consecuencia inmediata de la proposición 1.3.

(b) Sea $k_1 \le \ldots \le k_{c_2}$ el espectro de E. Las relaciones $c_3=-2\sum_i k_i-c_2$ y $k_1 \le -c_2+r$ junto con las propiedades de conexión del espectro |H5; §7 | y |H6; Proposition 5.1| implican que $\{k_1,\ldots,k_{c_2}\} = \{-1,-2,-2,-3,-3,\ldots,-r-1,-r-1, -r-2,-r-3,\ldots,-c_2+r\}$.

1.5 Proposición.(*) Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \ge 6$ y $1 \le r \le b(0,c_2)$ sea E un haz reflexivo esta ble de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2d)$, $o \leq d \leq r^2$. Entonces E posee un plano inestable de orden c_2-r.

<u>1.6 Corolario</u> (*) Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)\cdot c_2+2r^2)$. Se verifica:

(a) E posee un plano inestable de orden c_2-r.

(b) El espectro de E es $\{-1,-1,-2,-2,\ldots,-r,-r,-r-1,-r-2,\ldots,-(c_2-r)\}$.

<u>1.7 Teorema</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$, $o \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r\cdot(r+1))$. Entonces E admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow E \longrightarrow o \quad \text{si } r=o, \text{ y}$$

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow E \longrightarrow o \quad \text{si } r \geq 1$$

<u>Demostración</u>. Dado que el caso r=o fue probado por Okonek |O1;Theorem 2.7| , podemos suponer que $r \geq 1$. Gracias al corolario 1.4 sabemos que E posee un plano inestable H de orden c_2-r. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 11):

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H. Sea s=long $\mathcal{O}_Z$, entonces E' es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ cuyas clases de Chern c_i' vienen dadas por $c_1''= -2$, $c_2' = r+1$ y $c_3' = r^2+r+2s$. Las clases de Chern c_i'' del haz normalizado E'(1) vienen dadas por $c_1''=0$, $c_2''=r$ y $c_3''=r^2+r+2s$. Puesto que $H^\circ E'=0$, vemos que E'(1) es semiestable. Por lo tanto, $r^2+r+2s= c_3'' \leq$ $\leq c_2''^2 + c_2'' = r^2+r$ |H5; Proposition 8.2| y concluimos que s=o y que la sucesión de reducción es:

(1) $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_H(r-c_2) \longrightarrow 0$

La sucesión exacta (1) junto con la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(r-c_2) \xrightarrow{g'} \mathcal{O}_H(r-c_2) \longrightarrow 0$$

y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-r-1) \xrightarrow{q} E' \longrightarrow 0$$

|$\mathcal{O}$1; Theorem 2.3| , nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-r-2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(-1-c_2+r) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(r-c_2-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-r-1) \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(-c_2+r) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{O}(-c_2+r) \arrow[r] \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(-c_2+r) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(r-c_2),E')=0$, la aplicación $g':\mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(r-c_2)$ se eleva a una aplicación $g:\mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow E$. Por lo tanto, si para todo $(a,b)\in (\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus$

$\oplus\mathcal{O}(-r-1))\oplus\mathcal{O}(r-c_2)$ definimos $h(a,b):=iq(a)+g(b)$ obtenemos la resolución localmente libre de E establecida en el enunciado.

<u>1.8 Teorema</u>. (*) Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$, $1 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+$ $+2r^2)$. Entonces E posee una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\overset{2}{\oplus}\mathcal{O}(-r)\oplus\mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow E \longrightarrow 0 .$$

<u>1.9 Corolario</u>. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$ y $o \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+$ $+2r(r+1))$. Se verifica:

(i) $H^1E(t)=o$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

(ii) $E(t)$ está generado por secciones globales para todo $t \geq c_2-r+1$.

(iii) $\min\{t/H^{\circ}E(t)\neq o\}=1$ y $h^{\circ}E(1)=\begin{cases} 1 & \text{si } r>0 \\ 2 & \text{si } r=0 \end{cases}$

<u>Demostración</u>. Es una consecuencia inmediata de la resolución localmente libre de E dada en el Teorema 1.7.

<u>1.10 Corolario</u> (*) Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo esta

ble de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$. Se verifica:

(i) $H^1E(t)=o$ para todo $t\in\mathbb{Z}$.

(ii) $E(t)$ está generado por secciones globales para todo $t\geq c_2-r+1$.

(iii) $\min\{t/H^\circ E(t)\neq o\}=1$ y $h^\circ E(1)=\begin{cases}2 & \text{si } r>1\\ 3 & \text{si } r=1\end{cases}$.

<u>1.11 Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2\geq 4$ y $o\leq r\leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ y sea $o\neq\sigma\in H^\circ E(1)$. Sea $Y=(\sigma)_o$.

(a) Si r=o, entonces Y es una curva plana de grado c_2.

(b) Si r=1, entonces Y es una de las siguientes curvas:

b1- La unión de una curva plana C de grado c_2-1 con una recta L que la corta en un punto.

b2- Una curva plana C de grado c_2-1 con una estructura doble a lo largo de una subrecta L, relacionadas por una sucesión exacta del tipo: $o\longrightarrow I_Y\longrightarrow I_C\longrightarrow\mathcal{O}_L(-1)\longrightarrow o$.

(c) Si r > 1, entonces Y es una de las siguientes curvas:

c1- La unión de dos curvas planas de grados c_2-r y r que se cortan en r puntos.

c2- Una curva plana C de grado c_2-r con una estructura doble a lo largo de una subcurva Y' de grado r, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$o \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \longrightarrow o.$$

c3- La unión de dos curvas planas, C de grado c_2-r e Y' de grado r, con una multiplicidad doble a lo largo de una recta común, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$o \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \longrightarrow o.$$

Demostración. Sabemos |H5;Theorem 4.1| que $\deg Y = c_2 E(1) = c_2$ y $p_a(Y) = \frac{c_3 + 2 - 3c_2}{2} = \frac{c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1) + 2 - 3c_2}{2}$. Distinguimos 3 casos:

(a) r=o. Entonces $\deg Y = c_2$ y $p_a(Y) = \binom{c_2-1}{2}$, por lo tanto Y es una curva plana de grado c_2.

(b) r=1. Entonces $\deg Y = c_2$ y $p_a(Y) = \binom{c_2-2}{2}$. Aplicando |S;Corollory 7.4| se obtiene el resultado enunciado.

(c) $r > 1$. Aplicando |S;Corollary 7.10|, sustituyendo en dicho corolario a y d por c_2-r y c_2 respectivamente, se obtiene el resultado enunciado.

1.12 Proposición. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0, c_2, c_2^2 - (2r-1)\cdot c_2 + 2r^2)$ y $o \neq \sigma \in H^o E(1)$. Sea $Y = (\sigma)_o$.

(a) Si $r=1$, entonces Y es una de las siguientes curvas:

a1- La unión de una curva plana C de grado c_2 con una recta que la corta en un punto.

a2- Una curva plana C de grado c_2 con una estructura doble a lo largo de una subrecta L, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$o \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \longrightarrow o \ .$$

(b) Si $r > 1$, entonces Y es una de las siguientes curvas:

b1- La unión de dos curvas planas de grados c_2-r+1 y r que se cortan en r puntos.

b2- Una curva plana C de grado c_2-r+1 con una estructura doble a lo largo de una subcurva Y' de grado r, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$o \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \longrightarrow o.$$

b3- La unión de dos curvas planas, C de grado c_2-r+1 e Y' de grado r, con una multiplicidad doble a lo largo de una recta común, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$o \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \longrightarrow o.$$

Demostración. Sabemos |H5;Theorem 4.1| que $\deg Y= c_2E(1)= c_2+1$ y $p_a(Y)=\dfrac{c_3+2-2(c_2+1)}{2}=\dfrac{c_2^2-(2r+1)c_2+2r^2}{2}$. Distinguimos dos casos:

(a) $r=1$. Entonces $\deg Y=c_2+1$ y $p_a(Y)=\binom{c_2-1}{2}$. Apli cando |S;Corollary 7.4| obtenemos el resultado establecido.

(b) $r > 1$. Aplicando |S;Corollary 7.10| , sustituyendo en dicho corolario a y d por c_2-r+1 y c_2+1 respectivamente, se obtiene el enunciado establecido.

Observación. En lo que sigue supondremos $1 \leq r$ (Rep $2 \leq r$) ya que el caso $o=r$ (Resp $1=r$) corresponden al espacio de moduli ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2)$ (Resp. ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-c_2+2)$) estudiado por Hartshorne en |H5;Theorem 9.2| (Resp. Chang en | C2;Theorem 5|).

1.13 Teorema. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, la familia de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ construido en 1.1 es irreducible, no singular y racional con

$$\dim \mathcal{F} = \begin{cases} c_2^2+c_2+6 & \text{si } r=1 \\ c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r > 1\ . \end{cases}$$

Demostración. Puesto que para todo haz E de $\mathcal{F}$ $h^oE(1)=1$, se tiene que las clases de isomorfía de haces E de $\mathcal{F}$ están en correspondencia biyectiva con los pares (Y,e), donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-r con una curva plana Y_2 de grado r que corta a Y_1 en r puntos, y $o \neq e \in H^\circ \omega_Y(3)$. Por lo tanto, es suficiente probar que tales pares están parametrizados por una variedad irreducible, no singular y racional de dimensión $c_2^2+c_2+6$ si $r=1$ y $c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5$ si $r>1$. Para ello, sea V la variedad quasi-proyectiva, irreducible, no singular y racional que parametriza las curvas $Y= Y_1 \cup Y_2$ de grado c_2 que son unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-r y una curva plana Y_2 de grado r que corta a Y_1 en r puntos.

Consideremos la correspondencia $\mathcal{Y}= \{(y,x) \in V\times \mathbb{P}^3/x \in \in Y\} \subset V\times \mathbb{P}^3$, donde denotamos por y el punto de V que corresponde a la curva Y. Sean $q: \mathcal{Y} \longrightarrow V$ y $p: \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{P}^3$ las restricciones a $\mathcal{Y}$ de las proyecciones naturales. Pongamos $\omega_{\mathcal{Y}}(3):= p^*\omega_{\mathbb{P}^3}(3)$. Aplicando el Teorema de semicontinuidad |H; Cap III,Corollary 12.9| obtenemos que $q_* \omega_{\mathcal{Y}}(3)$ es localmente libre de rango $\frac{c_2^2+(3-2r)c_2}{2}+r^2+r$. En efecto, para todo $y\in V$ $h^\circ(q^{-1}(y), \omega_{\mathcal{Y}}(3)\mid_{q^{-1}(y)}) = h^\circ(Y, \omega_Y(3))= =\frac{c_2^2+(3-2r)c_2}{2}+r^2+r$. Por lo tanto, el conjunto de pares (Y,e) está parametrizado por un abierto de $\mathbb{P}(q_* \omega_{\mathcal{Y}}(3))$ que es una variedad irreducible, no singular y racional.

Calculemos la dimensión de $\mathcal{F}$.

Si $r=1$, el plano H que contiene a Y_1 depende de 3 parámetros, Y_1 de $\binom{c_2+1}{2}-1$ parámetros, Y_2 de 3 parámetros y e de $\frac{c_2^2+c_2}{2}+1$ parámetros, obteniéndose que dim $\mathcal{F}$ =

$= c_2^2 + c_2 + 6$.

Si $r > 1$, el plano H' que contiene a Y_2 depende de 3 parámetros, Y_2 de $\binom{r+2}{2}-1$ parámetros, el plano H que contiene a Y_1 depende de 3 parámetros, Y_1 de $\binom{c_2-r+2}{2}-1$ parámetros y e de $\dfrac{c_2^2+(3-2r)c_2}{2}+r^2+r-1$ parámetros, obteniéndose que $\dim \mathcal{F} = c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5$.

2.14 Teorema. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(o,c_2)$, la familia $\mathcal{L}$ de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0, c_2, c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$ construido en 1.2 es irreducible de dimensión $c_2^2-2(r-2)c_2+2r^2-2r+7$.

Observación. El resultado que obtenemos en este teorema es más débil que el establecido en el teorema anterior debido a que $h^\circ E(1)=2$ para todo haz E de $\mathcal{L}$, por lo que en este caso no es biyectiva la correspondencia que existe entre clases de isomorfía de haces E de $\mathcal{L}$ y pares (Y,e), donde $Y= Y_1 \cup Y_2$ es una curva de grado c_2+1, unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-r+1 con una curva plana Y_2 de grado r que corta a Y_1 en r puntos y $o \neq e \in H^\circ \omega_Y(2)$.

Demostración. Cualquier haz E de $\mathcal{L}$ está determinado por la elección de una curva plana Y_2 de grado r, una curva plana Y_1 de grado c_2-r+1 que corte a Y_2 en r puntos, y

$0 \neq e \in H^\circ\omega_Y(2)$. Por ser todas estas elecciones irreducibles se tiene que $\mathcal{L}$ es irreducible.

Calculemos la dimensión de $\mathcal{L}$.

El plano H' que contiene a Y_2 depende de 3 parámetros, Y_2 de $\binom{r+2}{2}-1$ parámetros, el plano H que contiene a Y_1 de 3 parámetros, Y_1 de $\binom{c_2-r+3}{2}-1$ parámetros, y e de $\frac{(c_2-r)^2+3c_2+r^2}{2}$ parámetros; además, hay que restar dim $\mathbb{P}\, H^\circ E(1)=1$, con lo cual obtenemos que dim $\mathcal{L}=c_2^2-2(r-2)c_2+$ $+2r^2-2r+7$.

2. Los espacios de moduli ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ y ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$.

En lo que sigue, para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, pondremos $M:={}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,$ $c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$, y para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, pondremos $N:={}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-$ $-(2r-1)c_2+2r^2)$.

En esta sección se dan los principales resultados de este capítulo. Entre ellos destacamos el cálculo de la dimensión del espacio tangente de Zariski a M (resp. N) en cada punto de M (Resp. N) (Véase los Teoremas 2.1 y 2.2) y la demostración de que M (resp.N) es no singular, irreducible y racional. Para la obtención de estos resultados se utiliza como técnica principal la sucesión de reducción (Preliminares; Teorema 11).

Sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, entonces $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ es isomorfo al espacio tangente de Zariski de M en el punto correspondiente a E, y si $\mathrm{Ext}^2(E,E)= =o$, entonces M es no singular en el punto correspondiente a E y su dimensión es igual a la dimensión de $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ | H2;Theorem 4.1| .

Además, puesto que si E es normalizado, entonces:

$$\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)-\dim \mathrm{Ext}^2(E,E)=\begin{cases} 8c_2-3 & \text{si } c_1=o \\ \\ 8c_2-5 & \text{si } c_1=-1 \end{cases}$$

| H2; Proposition 4.2|,

se tiene que la dimensión de cada componente irreducible del espacio de moduli es mayor o igual que $8c_2-3$ (resp. $8c_2-5$).

<u>2.1 Teorema</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+ +2r(r+1))$. Entonces:

$$\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)=\begin{cases} c_2^2+c_2+6 & \text{si } r=1 \\ \\ c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r>1\,. \end{cases}$$

Demostración. Sea H un plano inestable de orden c_2-r de E (Corolario 1.4) y consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Teorema 1.7):

(1) $\quad 0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_H(r-c_2) \longrightarrow 0$

donde $E'(1)$ es un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,r,r^2+r)$ que admite una resolución localmente libre |01;Theorem 2.3| del tipo:

(2) $\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1) \longrightarrow \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-r) \longrightarrow E'(1) \longrightarrow 0\,.$

Al aplicar el funtor $Hom(\cdot,E)$ a la sucesión exacta (1) obtenemos:

$$0 \longrightarrow Hom(E,E) \longrightarrow Hom(E',E) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{O}_H(r-c_2),E) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Ext^1(E,E) \longrightarrow Ext^1(E',E) \longrightarrow Ext^2(\mathcal{O}_H(r-c_2),E).$$

Y al aplicar el funtor $Hom(\cdot,E)$ a la sucesión exacta (2) tensorializada con $\mathcal{O}(-1)$ obtenemos que $\dim Ext^1(E',E)-$ $-\dim Hom(E',E)= h^\circ E(r+2)-h^\circ E(r+1)-h^\circ E(1)-h^\circ E(2)=h^\circ E'(r+2)-$ $-h^\circ E'(r+1)-h^\circ E'(1)-h^\circ E'(2)=\begin{cases}4 & \text{si } r=1\\ (r+2)^2-4 & \text{si } r\geq 2.\end{cases}$

Calculemos ahora $\dim Ext^1(\mathcal{O}_H(r-c_2),E)$ y $\dim Ext^2(\mathcal{O}_H(r-c_2),E)$. Para ello consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(r-c_2) \longrightarrow 0,$$

y apliquémosle el funtor $Hom(\cdot,E)$, obtenemos las sucesiones exactas:

(3) $\quad 0 \longrightarrow Hom(\mathcal{O}(r-c_2),E) \longrightarrow Hom(\mathcal{O}(r-c_2-1),E) \longrightarrow$

$Ext^1(\mathcal{O}_H(r-c_2),E) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{O}(r-c_2),E)\quad$, y

(4) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(r-c_2-1),E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_H(r-c_2),E) \longrightarrow$
$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(r-c_2),E)$.

De la sucesión exacta (4) deducimos que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_H(r-c_2),E)=o$, ya que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(r-c_2-1),E)=H^1E(c_2+1-r)=o$ (Corolario 1.9) y $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(r-c_2),E)= h^2E(c_2-r)= \bigoplus_i h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i+1+c_2-r))=0$ (Corolario 1.4 y |H5; Theorem 7.1|).

Por otro lado, el último término de la sucesión exacta (3) se anula ($\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(c_2-r),E)=H^1E(c_2-r)=o$), de donde se concluye que $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_H(r-c_2),E)= \chi E(c_2-r+1)- \chi E(c_2-r)= c_2^2 +(3-2r)c_2+4+r^2-4r$. Esta última igualdad se obtiene aplicando Riemann-Roch (En efecto: $\chi E(p)- \chi E(p-1)=(p+1)^2-c_2$)

Además, E es simple |H5; Proposition 3.4| y por lo tanto $\dim \mathrm{Hom}(E,E)=1$.

Finalmente tenemos que $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)=\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_H(r-c_2),E)+\dim \mathrm{Ext}^1(E',E)-\dim \mathrm{Hom}(E',E)-\dim \mathrm{Hom}(E,E)=$

$$=\begin{cases} c_2^2 +c_2+6 & \text{si } r=1 \\ c_2^2 +(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

<u>Observación 2.1.1</u> En el corolario 1.4, hemos probado que todo haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$, $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, posee un plano inestable de orden c_2-r. Este plano es de hecho único. En efecto:

Sea $H_1 \subset \mathbb{P}^3$ un plano inestable cualquiera distinto de H.

La sucesión exacta (2) del Teorema anterior nos da $H^2E'(c_2-r-3)=H^3E'(c_2-r-4)=o$. Por lo tanto, de la sucesión exacta de cohomología:

$$H^2E'(c_2-r-3) \longrightarrow H^2E'_{H_1}(c_2-r-3) \longrightarrow H^3E'(c_2-r-4)$$

deducimos que $H^2E'_{H_1}(c_2-r-3)=o$. Por otro lado, si restringimos a H_1 la sucesión exacta (1) del Teorema anterior y tomamos cohomología obtenemos que $H^2E_{H_1}(c_2-r-3)=o$, de donde se concluye que H_1 no es un plano inestable de orden c_2-r para E.

<u>2.2 Teorema</u> (*) Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+$ $+2r^2)$. Entonces $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)=c_2^2-2(r-2)c_2+2r^2-2r+7$.

<u>Observación 2.2.1</u> Todo haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$ posee un único plano inestable de orden c_2-r.

<u>2.3 Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, el esquema $M_{red}=({}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,$ $c_2^2-2rc_2+2(r+1)r))_{red}$ es irreducible de dimensión $c_2^2+c_2+$ $+6$ si r=1, y $c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5$ si $r > 1$.

Demostración. Gracias al Teorema 1.7 tenemos que cualquier haz E de M admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow E \longrightarrow o.$$

Luego el conjunto de clases de isomorfía de haces reflexivos estables de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, c_2^2 -2rc_2+2r(r+1))$ es un abierto de N, siendo N el conjunto de clases de isomorfía de haces coherentes E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ que son el conúcleo de un monomorfismo $\mathcal{O}(-r-2)\oplus \mathcal{O}(r-1-c_2)\hookrightarrow\mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(-1)\oplus \mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(r-c_2)$.

Por lo tanto, la demostración estará terminada si vemos que N es irreducible y que:

$$\dim N=\begin{cases} c_2^2 +c_2+6 & \text{si } r=1 \\ \\ c_2^2 +(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Para la irreducibilidad de N véase por ejemplo |$\mathcal{O}$-Sp 1;Theorem 5.1| . Calculemos ahora la dimensión de N. Para ello, sea $\Delta_1=\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1-c_2))$, $\Delta_2=\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-r-1)\oplus \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(r-c_2))$ y $S=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1-c_2), \mathcal{O}(-r-1)\oplus \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(r-c_2))$ y consideremos la acción:

$$(\Delta_1 x \Delta_2) x\ S \longrightarrow S$$
$$((\varphi_1,\varphi_2),\ f) \longmapsto \varphi_2\ f\varphi_1^{-1}$$

se tiene que $\dim N=\dim S-\dim\Delta_1-\dim\Delta_2+\dim I_f$, siendo $I_f= \{(\varphi_1,\varphi_2)\in \Delta_1 x\Delta_2/\varphi_2 f\varphi_1^{-1}=f\}$ para cualquier $f\in S$. Por otro lado, tenemos que:

$$\dim \Delta_1 = 2+\binom{c_2-2r+2}{2},$$

$$\dim \Delta_2 = \begin{cases} 8+\binom{r+3}{3}+\binom{r+2}{3}+\binom{c_2-2r+2}{3}+\binom{c_2-r+2}{3}+\binom{c_2-r+1}{3} & \text{si } r>1 \\ 14+2\binom{c_2}{3}+\binom{c_2+1}{3} & \text{si } r=1 \end{cases}$$

y $\dim I_f = 1+\binom{c_2-2r+1}{3}$, esta última igualdad es independiente de f y puede verse tomando por f la aplicación cuya matriz es:

$$A=\begin{bmatrix} X_0 & h \\ X_1^{r+1} & X_0^r\, h \\ X_2 & X_0^{r-1}\, h \\ 0 & X_3 \end{bmatrix}$$

donde X_0, X_1, X_2, X_3 son coordenados homogéneos de $\mathbb{P}^3$ y h es una forma irreducible de grado c_2-2r, y resolviendo la ecuación A= CAB siendo $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ las matrices correspondientes a φ_1^{-1} y φ_2 respectivamente. En definitiva tenemos que:

$$\dim N = \begin{cases} c_2^2+c_2+6 & \text{si } r=1 \\ c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r>1. \end{cases}$$

2.4 Proposición (*) Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, el esquema $N_{red}=({}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0, c_2, c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2))_{red}$ es irreducible y de dimensión c_2^2- $-2(r-2)c_2+2r^2-2r+7$.

2.5 Teorema. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq$ ≥ 4 y $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, el espacio de moduli $M={}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1, c_2, c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ es irreducible, no singular y racional de dimensión $c_2^2+c_2+6$ si $r=1$ y $c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+$ $+5$ si $r > 1$.

Demostración Puesto que para todo haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+$ $+2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$, $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$ se verifica que dim $T_{|E|}M=\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)=$

$$\dim M_{red} = \begin{cases} c_2^2+c_2+6 & \text{si } r=1 \\ c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

(Teoremas 2.1 y 2.3),

tenemos que $M_{red}=M$, M es irreducible y no singular.

Por otro lado, la dimensión de la familia $\mathcal{F}$ construida en 2.1 verifica que $\dim \mathcal{F}=\dim M_{red}=\dim M$ de donde se deduce que $\mathcal{F}$ es un abierto denso de M y por lo tanto M es racional.

<u>2.6 Teorema</u>. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, con $c_1=-1$ y $c_3= c_2^2 -2rc_2+2r(r+1)$. Se verifica:

(i) $dhE \leq 1$.

(ii) E admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus \mathcal{O}(-1)\oplus \mathcal{O}(-2)\oplus \mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow E \longrightarrow o.$$

(iii) $C_t(E)= \dfrac{(1-(r+1)t)(1-t)(1-2t)(1+(r-c_2)t)}{(1-(r+2)t)(1+(r-1-c_2)t}$, lo cual implica que $c_4,\ldots,c_n$ también quedan determinadas en función de c_2 y r.

Además $M={}^2M^s_{\mathbb{P}^n}(-1,c_2,c_2^2 -2rc_2+2r(r+1),\ldots)$ es irreducible y

$$\dim M=\begin{cases} n-4+K & \text{si } r > 1 \\ n-5+K & \text{si } r=1 \end{cases}$$

siendo $K= \binom{r+n+1}{n}+\binom{c_2-2r+n}{n}+\binom{c_2-r+n}{n}+\binom{c_2-2r+n-2}{n} -$

$$-2\binom{c_2-2r+n-1}{n}-\binom{r+n-1}{n}-\binom{c_2-r+n-2}{n}.$$

<u>Demostración</u>. (i) Usando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(t-1) \longrightarrow E(t) \longrightarrow E_{\mathbb{P}^{n-1}}(t) \longrightarrow o$$

e inducción sobre n obtenemos que $h^1E(t)=h^2E(t)=\ldots=h^{n-2}E(t)=o$ para todo entero t, lo cual implica que $dh\,E \leq 1$

|$\mathcal{O}$-Spl; Lemma 1.3| .

(ii) Utilizando de nuevo inducción sobre n obtenemos que $h^{n-1}(\mathbb{P}^n, E(c_2-r-n))=1$ y $h^{n-1}(\mathbb{P}^n,E(c_2-r-n-1))=n$, luego existe una forma lineal $f\in H^\circ(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ tal que la aplicación $H^{n-1}(E(c_2-r-n-1)) \xrightarrow{\cdot f} H^{n-1}(E(c_2-r-n))$ inducida por f es nula. Sea $H \simeq \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ el hiperplano de ecuación $f=o$, $H^{n-1}\ E_H(c_2-r-n)\neq o$, por lo tanto H es un hiperplano inestable de orden c_2-r de E. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H

(1) $\quad o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2) \longrightarrow o$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H y E' un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$.

Un argumento análogo al utilizado en la demostración del Teorema 1.7 prueba que $Z=\emptyset$. Por lo tanto, la sucesión exacta (1) junto con las sucesiones exactas:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(r-c_2) \longrightarrow o, \text{ y}$$

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-r) \longrightarrow E'(1) \longrightarrow o$$ |$\mathcal{O}$1; Theorem 2.3| nos da la resolución de E establecida en (ii).

(iii) Es una consecuencia inmediata de (ii).

El resto de la demostración es análogo al de la proposición 2.3 y por lo tanto la omitimos.

<u>2.7 Teorema</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2\geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, el espacio de moduli $N={}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,$

$c_2, c_2^2 - (2r-1)c_2+2r^2)$ es irreducible, racional y no singular de dimensión $c_2^2 -2(r-2)c_2+2r^2-2r+7$.

Demostración. Puesto que para todo haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0, c_2, c_2^2 -(2r-1)\cdot c_2+2r^2)$, $c_2 \geq 6$, $2 \leq r \leq b(0,c_2)$:

$$\dim T_{|E|} = \dim \operatorname{Ext}^1(E,E) = \dim N_{red} = c_2^2 -2(r-2)+2r^2-2r+7,$$

(Teorema 2.2 y Proposición 2.4) tenemos que $N_{red}=N$ y que N es irreducible, no singular y de dimensión $c_2^2-2(r-2)c_2+2r^2-2r+7$.

La racionalidad, a diferencia del caso $c_1=-1$, no se deduce del hecho de que la familia $\mathcal{L}$ construida en 1.2 sea un abierto denso de N ya que a priori no conocemos que $\mathcal{L}$ sea racional. La demostración de que N es racional es consecuencia de las proposiciones 2.8 y 2.9.

2.8 Proposición. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, dar un haz reflexivo E estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0, c_2, c_2^2 -(2r-1)\cdot c_2+2r^2)$ equivale a dar los siguientes datos:

(a) Un plano $H \subset \mathbb{P}^3$.

(b) Un haz reflexivo estable E' de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, r, r^2)$.

(c) Una sección general s de $E'_H(c_2-r+1)$ determinada salvo un múltiple escalar.

Demostración. Dado E, sea H su único plano inestable de orden c_2-r (Observación 2.2.1). Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 11):

$$(1) \quad 0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_H(r-c_2) \longrightarrow 0$$

donde E' es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,r,r^2)$. Dualizando la sucesión exacta (1) obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E'(1) \longrightarrow I_{WH}(c_2+1-r) \longrightarrow 0$$

donde W es un subesquema de dimensión o de H y de longitud $c_2^2+r^2-(2r-1)c_2$. El epimorfismo $E'(1) \twoheadrightarrow I_{WH}(c_2-r+1)$ factoriza a través de $E'_H(1)$

$$\begin{tikzcd} E'(1) \arrow[r] \arrow[d] & I_{WH}(c_2-r+1) \arrow[r] & 0 \\ E'_H(1) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Sea $N=\ker(E'_H(1) \twoheadrightarrow I_{WH}(c_2-r+1))$, N es un haz reflexivo de rango 1 sobre H, luego inversible, y $c_1(N)=c_1(E'(1))-c_1(I_{WH}(c_2+1-r))=r-c_2$, de donde se deduce que $N \simeq \mathcal{O}_H(r-c_2)$. Por último, basta observar que las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow E'_H(c_2-r+1) \longrightarrow I_{WH}(2c_2-2r+1) \longrightarrow 0$$

están en correspondencia biyectiva con los elementos de $H^oE'_H(c_2-r+1) \,/\, k^*$.

Recíprocamente, dados H,E' y $0 \neq s \in H^oE'_H(c_2-r+1) /k^*$

es inmediato comprobar que el núcleo de la composición

$$\begin{tikzcd} E'(1) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & E'_H(1) \arrow[r] & I_{WH}(c_2-r+1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$.

<u>2.9 Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, $N_{red}=({}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+ +2r^2))_{red}$ es irreducible, no singular y racional de dimensión $c_2^2-2(r-2)c_2+2r^2-2r+7$.

<u>Demostración</u>. Gracias a la proposición 2.8 tenemos que todo haz reflexivo estable E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$ viene determinado por los datos (a),(b) y (c) de la proposición 2.8, de donde se deduce que N_{red} es un subconjunto abierto de la Grassmanniana de subhaces de rango uno de $q_*p^*\mathcal{E}(c_2-r+1)$ donde $p=p_o\mathrm{xId}: X\mathrm{x}M' \longrightarrow \mathbb{P}^3\mathrm{x}M'$ y $q=q_o \mathrm{x} \mathrm{Id}: X\mathrm{x}M' \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}\mathrm{x}M'$, siendo $p_o: X \longrightarrow \mathbb{P}^3$ y $q_o: X \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}$ las aplicaciones asociadas con la correspondencia de incidencia entre $\mathbb{P}^3$ y $\mathbb{P}^{3*}$, M' el espacio de moduli de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,r,r^2)$ y $\mathcal{E}$ el haz universal sobre $\mathbb{P}^3 \mathrm{x}M'$ |M2;Theorem 6.11.1| . Por lo tanto, N_{red} es irreducible, no singular y racional. Además se

tiene que $\dim N_{red} = \dim \mathbb{P}^{3*} + \dim M' + \dim H^\circ E'_H(c_2-r+1)/k^* =$
$= 3+(r^2+3r+1) + (c_2^2 -(2r-3)c_2+r^2-3r+2+c_2-2r+1) = c_2^2 -2(r-$
$-2)c_2 + 2r^2-2r+7$.

<u>2.10 Teorema</u>. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq$
≥ 6 y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$ con $c_1=o$ y $c_3=c_2^2 -(2r-1)c_2+2r^2$. Se verifica:

(i) $dh\, E \leq 1$.

(ii) E admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(r-1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2\oplus\mathcal{O}(-r)\oplus\mathcal{O}(r-c_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow E \longrightarrow o.$$

(iii) $$C_t(E) = \frac{(1-t)^2(1-rt)(1+(r-c_2)t)}{(1-(r+1)t)(1+(r-1-c_2)t)}$$, lo que implica que $c_4,\ldots,c_n$ están también determinados en función de c_2 y r

Además $N={}^2M^s_{\mathbb{P}^n}(0,c_2,c_2^2 -(2r-1)c_2+2r^2,\ldots)$ es irreducible y de dimensión

$$2n-5+2\binom{r+n}{n}+2\binom{c_2-r+n}{n}+\binom{c_2-2r+n}{n}+\binom{c_2-2r+n-1}{n}-\binom{c_2-2r+n}{n}-$$
$$-2\binom{r+n-1}{n}+2\binom{c_2-r-1+n}{n}+\binom{c_2-2r+n}{n}.$$

<u>Demostración</u>. Es análoga a la del Teorema 2.6 y por lo tanto la omitimos.

3. Rectas de salto de un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ (Resp. $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$).

El objetivo de esta sección es caracterizar las rectas de salto de un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$, $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$ (Resp. $(o,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$, $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$).

Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Para toda recta $L \subset \mathbb{P}^3$ denotaremos por a_L el entero positivo tal que E_L sea isomorfo a $\mathcal{O}_L(a_L) \oplus \mathcal{O}_L(-a_L+c_1)$.
En |G-M| Grauert-Mülich prueban que si E es un haz reflexivo semiestable entonces $a_L=o$ para toda recta general L de $\mathbb{P}^3$. A las rectas L de $\mathbb{P}^3$ tales que $a_L > o$ se les llama rectas de salto y al entero a_L orden de salto de L. Denotemos por S(E) el conjunto de rectas de salto de E, S(E) es un subconjunto cerrado de G(1,n) |$\mathcal{O}$-S-S;Cap I, Lemma 3.2.2|.

3.1 Proposición. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-2rc_2+$ $+2r(r+1))$, sea $o \neq s \in H^oE(1)$ y sea $Y=(s)_o \subset \mathbb{P}^3$. Dada $L \in G(1,3)$ se verifica:

$L \in \underline{S(E)}$ si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:

(a) $L \subset Y$.

(b) L interseca a Y en un número finito de puntos y $\partial = \operatorname{long} \mathcal{O}_{Y \cap L} \geq 2$.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta determinada por la sección s:

(1) $0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o.$

Supongamos que $L \cap Y = \emptyset$. Al tensorializar la sucesión exacta (1) por $\mathcal{O}_L$ obtenemos la sucesión exacta:

(2) $0 \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow E_L(1) \longrightarrow \mathcal{O}_L(1) \longrightarrow o.$

Como $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L(-1)) = o$, la sucesión exacta (2) escinde y obtenemos que $E_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1)$, lo cual implica que L no es una recta de salto de E.

Supongamos que L interseca a Y en un número de puntos y sea $\partial = \operatorname{long} \mathcal{O}_{Y \cap L}$, vamos a ver que L es una recta de salto de E si y sólo si $\partial \geq 2$. En efecto: Al tensorializar por $\mathcal{O}_L$ la sucesión exacta (1) obtenemos:

$$E_L(1) \longrightarrow \mathcal{O}_L(1-\partial) \longrightarrow o.$$

Sea $N = \ker(E_L(1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_L(1-\partial))$, es inmediato comprobar que $N = \mathcal{O}_L(\partial)$ y que $E_L \approx \mathcal{O}_L(-\partial) \oplus \mathcal{O}_L(\partial - 1)$. Por lo tanto, $L \in \underline{S(E)}$ si y sólo si $\partial \geq 2$, en cuyo caso el orden de salto de L es $\partial - 1$.

Por último, supongamos que $L \subset Y$. Elijamos un punto

$x \in L$ y un plano $\pi \subset \mathbb{P}^3$ tal que $x \in \pi$. Consideremos el haz $\mathcal{G}$ de las rectas de π que pasan por x. Una recta general L' de $\mathcal{G}$ no está contenida en Y y corta a Y en un número finito de puntos Z. De hecho en virtud de la proposición 1.11 π puede elegirse de manera que long $\mathcal{O}_Z \geq 2$. Luego L' es una recta de salto. Como el conjunto de rectas de salto es un cerrado, deducimos que $L \in \underline{S\ (E)}$.

3.2 Proposición. (*) Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o, c_2, c_2^2 - (2r-1)c_2 + 2r^2)$, sea $o \neq S \in H^o E(1)$ y sea $Y = (S)_o$. Entonces una recta L de $\mathbb{P}^3$ es recta de salto de E si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:

(i) $L \subset Y$.

(ii) L interseca a Y en un número finito de puntos y $\partial = \text{Long}\, \mathcal{O}_{Y \cap L} \geq 2$.

En el resto de esta sección denotaremos por X la correspondencia de incidencia entre $\mathbb{P}^3$ y G(1,3) y por p: $X \longrightarrow \mathbb{P}^3$, q: $X \longrightarrow G(1,3)$ la restricción a X de las proyecciones.

Sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1))$, $c_2 \geq 4$ y

$1 \leq r \leq b(-1,c_2)$ (Resp.$(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$, $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$). Sabemos que una recta $L \subset \mathbb{P}^3$ es recta de salto de E si y sólo si $H^1(L,E_{|L}) \neq o$ (Resp.$H^1(L,E_{|L}(-1)) \neq o$), de donde deducimos que S(E) es el soporte del haz $R^1q_*p^*E$ (resp. $R^1q_*p^*E(-1)$).

Para haces localmente libres E estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con c_1=o W.Barth demuestra en |B1; § 6| que S(E) o bien es vacio o bien es de codimensión pura 1, y que S(E) es el soporte de un divisor de grado $c_2(E)$ de G(1,3). Vamos a ver que gracias a la resolución localmente libre que conocemos de $E(o,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$, el método desarrollado por Barth generaliza a tales haces y señalaremos de donde proviene la obstrucción a generalizar dicha ténica a haces $E(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$.

3.3 Teorema. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)\cdot c_2+2r^2)$. Se verifica:

(i) S(E) $\neq \emptyset$.

(ii) Existe un divisor D_E en G(1,3) de grado c_2 y con soporte S(E).

Demostración. (i) Si $S(E)=\emptyset$, entonces para toda recta L de $\mathbb{P}^3$ $E_L \simeq \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$ de donde deducimos que $E \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, lo cual contradice la estabilidad de E.

(ii) Consideremos una resolución localmente libre de $E(-1)$ (Véase el Teorema 1.8)

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-1)$$
$$\longrightarrow E(-1) \longrightarrow o$$

y proyectemos sobre $G(1,3)$ la sucesión:

$$o \longrightarrow p^* \; [\mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-2)] \longrightarrow p^* [\mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-r-$$
$$-c_2-1)] \longrightarrow p^* \; E(-1) \longrightarrow o$$

obtenemos la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow R^1 q_* p^* [\mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-2)] \xrightarrow{g} R^1 q_* p^* [\mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-r-1) \oplus$$
$$\oplus \mathcal{O}(r-c_2-1)] \longrightarrow R^1 q_* p^* E(-1) \longrightarrow o.$$

Nótese que por ser las fibras de p y q de dimensión uno se tiene:

$$R^2 q_* p^* \; [\mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-2)] = o,$$

y por ser $q_* p^* E(-1)$ libre de torsión y nulo fuera de S_E se tiene que

$$q_* p^* E(-1) = o.$$

La aplicación g es un monomorfismo entre haces localmente libres del mismo rango, definimos:

D_E:=divisor de ceros de $\Lambda^s g$, siendo $s = \mathrm{rg}\, R^1 q_* p^* [\mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-2)]$

D_E es un divisor en $G(1,3)$ con soporte $S(E)$ y $\deg(D_E) =$

$-c_1(R^1 q_* p^* \; [\mathcal{O}(-r-2) \oplus \mathcal{O}(r-c_2-2)] \;) + c_1(R^1 q_* p^* [\mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-r-1) \oplus$

$\otimes \mathcal{O}(r-c_2-1)]\ ) = \frac{1}{2}\ [(r+2)^2-(r+2)+(r-c_2-2)^2+(r-c_2-2)-4+(r+1)^2-(r+1)+(r-c_2-1)^2+(r-c_2-1)] = c_2$, donde hemos utilizado que :

$c_1 R^1 q_* p^* \mathcal{O}(t) = -\frac{t(t+1)}{2}$.

Observación. En el caso $c_1=-1$, la obstrucción proviene de que $q_* p^* E \neq o$.

4. Aplicaciones

En esta sección utilizamos los principales resultados de este capítulo y la correspondencia entre haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y curvas de $\mathbb{P}^3$ para construir ciertas familias de curvas proyectivamente normales, de las que además se da una resolución localmente libre de su haz de ideales.

Sea $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva y I_C su haz de ideales. Recordemos que C es proyectivamente normal si y sólo si $H^1(\mathbb{P}^3, I_C(\nu))=o$ para todo entero ν ; y que C se llama de rango máximo si para todo entero $\nu \in \mathbb{Z}$ el morfismo $H^o(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(\nu)) \longrightarrow H^o(C, \mathcal{O}_C(\nu))$ es de rango máximo, i.e., inyectivo o exhaustivo. Las curvas que son intersección completa son proyectivamente normales y está claro que toda curva proyectivamente normal es de rango máximo.

En |S;Corollary 7.8| Sauer demuestra que si $X \subseteq \mathbb{P}^3$ es una curva con $d:=\deg(X) \geq 2$ y $p_a(X) > \binom{d-2}{2}$ entonces

$p_a(X)=\binom{d-1}{2}$, lo que implica que X es una curva plana, y en particular proyectivamente normal. También prueba que para todo entero $p_a \leq \binom{d-2}{2}$ existe una curva de grado d y género aritmético p_a. Nuestro primer resultado será probar que toda curva reducida de grado d y género aritmético $\binom{d-2}{2}$ es proyectivamente normal, y que existen curvas X reducidas de grado d y género aritmético $\binom{d-2}{2}-1$ que no son proyectivamente normales.

<u>4.1 Proposición</u>. Sea Y una curva reducida de grado $d \geq 4$ y género aritmético $p_a=\binom{d-2}{2}$. Se verifica:

(a) Y es proyectivamente normal.

(b) El haz de ideales I_Y de Y admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-3)\oplus\mathcal{O}(-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2)^2\oplus\mathcal{O}(1-c_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow I_Y \longrightarrow o .$$

<u>Demostración</u>. (a). Elijamos una sección $o \neq e \in H^\circ\omega_Y(3)$ y sea E(1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,d,d^2-2d+4)$. Gracias al corolario 1.9 sabemos que $H^1E(t)=o$ para todo $t\in\mathbb{Z}$, lo cual implica que $H^1I_Y(t)=o$ para todo $t\in\mathbb{Z}$, o equivalentemente que Y es proyectivamente normal.

(b) Para hallar una resolución del haz I_Y consideremos las sucesiones exactas:

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o$$

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-2)\oplus \mathcal{O}(1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)\oplus \mathcal{O}(1-c_2)\oplus\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow o$$

y la resolución localmente libre de E(1):

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-2)\oplus \mathcal{O}(1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}\oplus \mathcal{O}(-1)^2\oplus \mathcal{O}(-c_2+2) \longrightarrow E(1) \longrightarrow o$$

(Teorema 1.7) con los que obtenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
o \arrow[r] & \mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(1-c_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(1-c_2)\oplus\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & o \\
o \arrow[r] & \mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(1-c_2) \arrow[r] & \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)^2\oplus\mathcal{O}(-c_2+2) \arrow[r] \arrow[d] & E(1) \arrow[r] \arrow[d] & o \\
 & & I_Y(1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_Y(1) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2)\oplus \mathcal{O}(1-c_2))=o$, la aplicación $g':\mathcal{O} \longrightarrow E(1)$ se eleva a una aplicación $g:\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)^2\oplus \mathcal{O}(-c_2+2)$, de donde se deduce la resolución localmente libre de I_Y establecida en el enunciado.

<u>Observación</u>. Existen curvas Y de grado d y género aritmético $p_a(Y) = \binom{d-2}{2} -1$ que no son proyectivamente normales.

Ejemplos: $Y=Y_1 \cup L$ la unión disjunta de una curva plana de grado d-1 y una recta L.

El siguiente resultado es una generalización de la Proposición 4.1.

4.2 Proposición. Para todo par de enteros d,r tales que $d \geq 4$ y $o \leq r \leq \frac{-1+\sqrt{4d-7}}{2}$, sea Y una curva reducida de grado d y género aritmético $p_a(Y)=\binom{d-r-1}{2}+\binom{r-1}{2}+r-1$

Se verifica:

(a) Y es proyectivamente normal.

(b) $\mathcal{O}_Y$ admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-1)\oplus$$

$$\mathcal{O}(r-c_2-2) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow o.$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 4.1. Se toma una sección $0 \neq e \in H^{\circ}\omega_Y(3)$, sea E(1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,d,d^2-2rd+2r(r+1))$. Se finaliza la demostración teniendo en cuenta que $H^1E(t)=o$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ y que conocemos una resolución localmente libre de E (Corolario 1.9).

Ejemplos Sea Y una curva reducida, $d=\deg Y$ y $p_a=p_a(Y)$. Si $(d,p_a) \in \{(5,3),(6,6),(7,10),(8,15),(8,11)\} \Rightarrow$ Y es proyectivamente normal.

4.2 Proposición. Para toda terna de enteros c_2,r,t tales que $c_2 \geq 4$, $1 \leq r \leq \frac{-1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$ y $t \geq c_2+1$, existe una familia irreducible de curvas lisas y conexas Y, de grado c_2+t^2-t y género $g= \frac{c_2^2-2rc_2}{2} + r(r+1)+1+ \frac{1}{2}(t^2+c_2-t)(2t-5)$ que verifica:

(a) Y es proyectivamente normal.

(b) Y no está contenida en ninguna superficie de grado $\leq t-1$.

(c) Su haz de ideales admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r-1)\oplus\mathcal{O}(-t+r-c_2)\oplus\mathcal{O}(-2t+1) \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r)\oplus\mathcal{O}(-t+r-c_2+1)\oplus\mathcal{O}(-t)\oplus\mathcal{O}(-t-1) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0.$$ Además:

$$\dim F= \begin{cases} 2c_2^2+2c_2+6+\dfrac{2c_2^3-8c_2}{2} & \text{si } r=1 \text{ y } t=c_2 \\ c_2^2+7+t(t+2-c_2)+\dfrac{c_2^2-3c_2}{2}+\dfrac{2t^3+3t^2+t}{6} & \text{si } r=1 \text{ y } t>c_2 \\ c_2^2+(3-2r-t)c_2+3r^2+r+t^2+2t+\dfrac{c_2^2-3c_2}{2}+\dfrac{2t^3+3t^2+t}{6}+3 & \text{si } r>1 \text{ y } t=c_2+1-r \\ c_2^2+(3-2r-t)c_2+3r^2+r+t^2+2t+\dfrac{c_2^2-3c_2}{2}+\dfrac{2t^3+3t^2+t}{6}+4 & \text{si } r>1 \text{ y } t>c_2+1-r \end{cases}$$

Demostración. Sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$.

Recordemos que $E(t)$ está generado por secciones globales para todo $t \geq c_2+1-r$ y que $H^1E(t)=o$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ (Corolario 1.9). Bajo estas condiciones el conjunto de ceros de una sección general s de $E(t)$, $t \geq c_2+1-r$, es no singular |C3; §4 Proposition H| . Por otro lado de la sucesión exacta

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(t) \longrightarrow I_Y(2t-1) \longrightarrow o$$

deducimos que $H^1I_Y = H^1E(-t+1)=o$, i.e. Y es conexa. Por lo tanto, hemos construido una curva Y no singular, irreducible, de grado $c_2E(t)=c_2+t^2-t$ y género aritmético $p_a(Y)=$

$$= \frac{c_3(E) + 2-(5-2t)(\deg Y)}{2} = \frac{c_2^2 -2rc_2}{2} + r(r+1)+1+ \frac{1}{2}(2t-5)\cdot$$

$\cdot(t^2+c_2-t)$.

Puesto que $H^1I_Y(m)= H^1E(m-t+1)=o$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, Y es proyectivamente normal, lo cual prueba (a).

Por ser E estable, Y no está contenida en ninguna superficie de grado menor o igual que t-1.

Para determinar una resolución localmente libre de I_Y consideremos las sucesiones exactas:

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(t) \longrightarrow I_Y(2t-1) \longrightarrow o$$

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2)\oplus \mathcal{O}(r-1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2)\oplus(r-1-c_2)\oplus\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow o$$

y la resolución de E (Corolario 1.9)

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-r-2)\oplus \mathcal{O}(r-1-c_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus \mathcal{O}(r-c_2)\oplus\mathcal{O}(-1)\oplus \mathcal{O}(-2)$$

$$\longrightarrow E \longrightarrow o.$$

Y construyamos con ellas el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t+r-1-c_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t+r-1-c_2)\oplus\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t+r-1-c_2) \arrow[r] & \mathcal{O}(t-r-1)\oplus\mathcal{O}(t+r-c_2)\oplus\mathcal{O}(t-1)\oplus\mathcal{O}(t-2) \arrow[r] \arrow[d] & E(t) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & I_Y(2t-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_Y(2t-1) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}(t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t+r-1-c_2))=0$, la aplicación $g':\mathcal{O} \longrightarrow E(t)$ se eleva a una aplicación $g: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(t-r-1)\oplus\mathcal{O}(t+r-c_2)\oplus\mathcal{O}(t-1)\oplus\mathcal{O}(t-2)$, de donde se deduce la resolución localmente libre de I_Y del enunciado.

Cualquier curva Y de F está determinada por la elección de un haz E de $M={}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2, c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ y una sección $0\neq S \in H^\circ E(t)$. Como estas elecciones son todas irreducibles se tiene que F es irreducible. Para calcular su dimensión basta tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$\dim M=\begin{cases} c_2^2+c_2+6 & \text{si } r=1 \\ c_2^2+(3-2r)c_2+2r^2+5 & \text{si } r>1 \end{cases} \qquad \text{(Teorema 2.5)}$$

$$\dim H^\circ E(t)= t^2+r^2+2t-2c_2t+rc_2+r+\frac{c_2^2-3c_2}{2}+\frac{2t^3+3t^2+t}{6},$$

$$\dim \mathrm{Ext}^1(I_Y(2t-1),\mathcal{O})= \dim H^\circ\omega_Y(5-2t)= \dim H^1\mathcal{O}_Y(2t-5)=$$

$$= \dim H^2 I_Y(2t-5)=\begin{cases} 1 & \text{si } t>c_2+1-r \\ 2 & \text{si } t=c_2+1-r \end{cases}.$$

y dim F= dim M+dim $H^\circ E(t)$-dim $Ext^1(I_Y(2t-1),\mathcal{O})$.

4.4 Proposición (*) Para toda terna de enteros c_2,r y t tales que $c_2 \geq 6$, $2 \leq r \leq \sqrt{c_2-2}$ y $t \geq c_2-r+1$, existe una familia irreducible F de curvas lisas y conexas Y de grado c_2+t^2 y género $g= \frac{c_2^2-(2r-1)c_2}{2}+r^2+1+(t-2)(c_2+t^2)$ que verifican:

(a) Y es proyectivamente normal.

(b) Y no está contenida en ninguna superficie de grado $\leq$ t.

(c) Su haz de ideales I_Y admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-2t)\oplus\mathcal{O}(-t-r-1)\oplus\mathcal{O}(-t+r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1-t)^2\oplus\mathcal{O}(r-t)\oplus \mathcal{O}(r-c_2-t) \longrightarrow I_Y \longrightarrow o .$$

Además:

$$\text{im } F = \begin{cases} c_2^2-2(r-2)c_2+2r^2-2r+5+\frac{t^3+3t^2+2t}{3}+\binom{t+r-c_2+2}{2}+\binom{t-r+2}{2}, & \text{si } t=c_2+1-r. \\ c_2^2-2(r-2)c_2+2r^2-2r+6+\frac{t^3+3t^2+2t}{3}+\binom{t+r-c_2+2}{2}+\binom{t-r+2}{2}, & \text{si } t > c_2+1-r. \end{cases}$$

4.5 Proposición. Para toda terna de enteros c_2,r,t tales que $c_2 \geq 4$, $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$ y $t \geq c_2+1-r$, sea Y una curva no singular de grado $d=c_2+t^2-t$ y género $g= \frac{c_2^2-2rc_2}{2}+r(r+1)+1+\frac{1}{2}(t^2+c_2-t)(2t-5)$. Si Y no está contenida en ninguna superficie de grado $\leq$ t-1 y $H^\circ\omega_Y(5-2t)\neq o$, entonces Y es proyectivamente normal e I_Y admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r-1)\oplus\mathcal{O}(-t+r-c_2)\oplus\mathcal{O}(-2t+1) \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r)\oplus\mathcal{O}(-t+r-c_2+1)\oplus\mathcal{O}(-t)\oplus\mathcal{O}(-t-1) \longrightarrow I_Y \longrightarrow o.$$

Demostración. Sea $o\neq e \in H^\circ\omega_Y(5-2t)$. Consideremos el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(t) \longrightarrow I_Y(2t-1) \longrightarrow o.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$. Por lo tanto, $H^1E(m)=o$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ (Corolario 1.9), de donde se deduce que $H^1I_Y(m)=o$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ o equivalentemente que Y es proyectivamente normal. Finalmente, el argumento hecho en la proposición 4.3 prueba que I_Y tiene una resolución localmente libre del tipo enunciado.

4.6 Proposición (*) Para toda terna de enteros c_2,r,t tales que $c_2 \geq 6$, $2 \leq r \leq b(0,c_2)$ y $t \geq c_2+1-r$, sea Y una curva no singular de grado $d=c_2+t^2$ y género $g=\frac{c_2^2-(2r-1)c_2}{2}+r^2+1+(t-2)(c_2+t^2)$. Si Y no está contenido en ninguna superficie de grado $\leq$ t y $H^\circ\omega_Y(5-2t)\neq o$, entonces Y es proyectivamente normal e I_Y admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-2t)\oplus\mathcal{O}(-t-r-1)\oplus\mathcal{O}(-t+r-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1-t)^2\oplus\mathcal{O}(r-t)\oplus$$
$$\mathcal{O}(r-c_2-t) \longrightarrow I_Y \longrightarrow o.$$

<u>4.7 Corolario</u>. Toda curva irreducible, no singular $C\subset\mathbb{P}^3$ de grado 25 y género 73 no contenida en ninguna superficie de grado 4 es proyectivamente normal y su haz de ideales admite una resolución localmente libre del tipo:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-7)\oplus\mathcal{O}(-9)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-8)\oplus\mathcal{O}(-6)^2\oplus\mathcal{O}(-5) \longrightarrow I_C \longrightarrow o$$

<u>Demostración</u>. Basta probar que $H^\circ\omega_C(-5)\neq o$ y aplicar la proposición 4.5 al caso $c_2=5$, $r=1$ y $t=5$.

Puesto que $g=73$, C está contenida a lo sumo en una superficie de grado 5 (Si $h^\circ\mathcal{O}_C(2) \geq 2$, las correspondientes quínticas deben ser irreducibles, por lo tanto C estaría contenida en la intersección de dos quinticas irreducibles y por ser deg C=25 se tendría que C es intersección completa de estas dos quínticas, lo cual es una contradicción ya que entonces $g(C)=76$). Por lo tanto, la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow I_C(5) \longrightarrow \mathcal{O}(5) \longrightarrow \mathcal{O}_C(5) \longrightarrow o$$

nos da $h^\circ\mathcal{O}_C(5) \geq h^\circ\mathcal{O}(5)-h^\circ I_C(5) \geq 55$, que junto con el Teorema de Riemann-Roch para curvas permite concluir que $h^\circ\omega_C(5)=h^1\mathcal{O}_C(5)=h^\circ\mathcal{O}_C(5)-1+73-5\text{x}25 \geq 2\neq o$.

CAPITULO V.

CAPITULO V

LOS ESPACIOS DE MODULI ${}^{2}M^{s}_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$ y ${}^{2}M^{s}_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$.

En este capítulo describimos los espacios de moduli de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clase de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$, $c_2 \geq 4$, $2 \leq r \leq \frac{1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$ (Respectivamente $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$, $c_2 \geq 6$, $2 \leq r \leq \sqrt{c_2-2}$).

1. Haces reflexivos semiestables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$.

Recordemos que si E es un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=0$, entonces $c_2 \geq 0$ |H5; Corollary 3.3| y $c_3 \leq c_2^2+c_2$ |H5; Theorem 8.2|. Además $c_2=0$ si y sólo si $E \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, en cuyo caso $c_3=0$ |H5; Lemma 9.7|. Recordemos también que si E es un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=0$ y $c_2>0$, entonces dim End(E)=2 (Cap.II; Proposición 1.1).

El objetivo de esta sección es estudiar los haces reflexivos semiestables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=0$, $c_2 \geq 1$ y c_3 máxima (i. e. $c_3=c_2^2+c_2$).

<u>1.1. Proposición</u>. Para todo entero $c_2 \geq 1$, existe una variedad irreducible, no singular y racional $V=V^{ss}_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2+c_2)$ cuyos puntos cerrados están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfía de haces reflexivos semiestables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$. Además:

$$\dim V = \begin{cases} 6 & \text{si } c_2 = -1 \\ c_2^2+4c_2+2 & \text{si } c_2 > 1 \end{cases} .$$

<u>Demostración</u>. Sea E un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$, sea $0 \neq \tau \in H^0 E$ y sea $Y=(\tau)_0$. Se tiene la sucesión exacta:

$$\xi : \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

donde $Y \subset \mathbb{P}^3$ es una curva de grado c_2 y género aritmético

$$p_a(Y) = \frac{c_3E + 2-4c_2}{2} = \binom{c_2 -1}{2} .$$

Por lo tanto, Y es una curva plana de grado c_2. Recíprocamente, toda curva plana Y de grado c_2 y toda sección $0 \neq \xi \in H^0 \omega_Y(4)$ determinan un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$.

Por otro lado, $h^oE=1$, luego de clases de isomorfía de haces reflexivos semiestables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$ están en correspondencia biyectiva con los pares (Y,ξ) donde Y es una curva plana de grado c_2 y $0\neq \xi \in H^o\omega_Y(4)$. Por lo tanto, para demostrar la proposición basta ver que tales pares están parametrizados por una variedad irreducible no singular y racional de dimensión $c_2^2+4c_2+2$ si $c_2 \geq 2$ y 6 si $c_2=1$.

Para ello, sea $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}$ el 3-fibrado tautológico y sea $H= \mathbb{P}(S^{c_2}(\mathbb{E}^*)) \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}$ el fibrado proyectivo que parametriza las curvas planas de grado $c_2 \geq 2$ (si $c_2=1$, $H = Gr(1,3)$). Consideremos la correspondencia $\mathcal{Y} =\{(y,x)\in H\times\mathbb{P}^3/x \in Y\}$, donde denotamos por y el punto de H que corresponde a la curva Y. Sean $q: \mathcal{Y} \longrightarrow H$ y $p: \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{P}^3$ las restricciones a $\mathcal{Y}$ de las proyecciones naturales. Sea $\omega_{\mathcal{Y}}(4):= p^* \omega_{\mathbb{P}^3}(4)$. Por el Teorema de semicontinuidad $q_* \omega_{\mathcal{Y}}(4)$ es un haz localmente libre de rango $\dfrac{c_2^2+5+c_2}{2}$. En efecto, $h^o(q^{-1}(y),\omega_{\mathcal{Y}}(4)|_{q^{-1}(y)})= h^o(Y,\omega_Y(4))=h^o(Y,\mathcal{O}_Y(c_2+1)) = \dfrac{c_2^2+5+c_2}{2}$. Por lo tanto, los pares (Y,ξ) están parametrizados por un abierto de $\mathbb{P}(q_*\omega_{\mathcal{Y}}(4))$ que es una variedad irreducible no singular y racional de dimensión $c_2^2+4c_2+2$ si $c_2 \geq 2$ y 6 si $c_2=1$.

<u>1.2. Definición</u>. Para todo entero $c_2 \geq 1$, sea E un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$ y sea $0 \neq\tau \in H^o E$. Al subesquema de $\mathbb{P}^3$, $Y:=(\tau)_o$ le llamaremos la curva asociada a Y. Obsérvese que la defini-

ción es correcta ya que $h^\circ E=1$.

<u>1.3 Proposición</u>. Para todo entero $c_2 \geq 1$, sea E un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2 + c_2)$. Entonces E admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2)\oplus \mathcal{O}(-1)\oplus \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow 0 .$$

<u>Demostración</u>. Sea Y la curva plana de grado c_2 asociado a E. Las sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2)\oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

determinan el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{O}(-1-c_2) \arrow[d] \arrow[r, equal] & \mathcal{O}(-1-c_2) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}\oplus \mathcal{O}(-1)\oplus \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-1)\oplus \mathcal{O}(-c_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & I_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce la resolución E del enunciado.

1.4. Corolario. Para todo entero $c_2 \geq 1$, sea E un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$. Entonces:

(i) $H^1 E(m) = 0$ para todo entero m.

(ii) E(m) está generado por secciones globales para todo $m \geq c_2+1$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la resolución localmente libre de E establecida en la proposición 1.3.

1.5. Proposición. Para todo entero $c_2 \geq 1$, sea E un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$, sea Y su curva asociada y sea L una recta de $\mathbb{P}^3$. Entonces L es una recta de salto si y sólo si $L \cap Y \neq \emptyset$.

Demostración. Por definición de una curva asociada a E, existe una sección $0 \neq s \in H^0 E$ tal que $Y = (s)_0$. Consideremos la sucesión exacta determinada por s:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Si $L \cap Y = \emptyset$, tensorializado la sucesión exacta (1) por $\mathcal{O}_L$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow E_L \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow 0, \qquad (2)$$

por ser $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_L,\mathcal{O}_L)=0$, la sucesión exacta (2) escinde y obtenemos $E_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$, lo cual implica que L no es recta de salto de E.

Recíprocamente, supongamos que $L \cap Y \neq \emptyset$ vamos a distinguir dos casos:

1er. caso. L interesa a Y en un número finito de puntos. Sea $\partial = h^o(\mathcal{O}_{Y\cap L})$, tensorializando por $\mathcal{O}_L$ la sucesión exacta (1) obtenemos:

$$E_L \longrightarrow \mathcal{O}_L(-\partial) \longrightarrow 0,$$

Sea $K = \operatorname{Ker}(E_L \longrightarrow \mathcal{O}_L(-\partial))$, es inmediato comprobar que $K = \mathcal{O}_L(\partial)$ y que $E_L \simeq \mathcal{O}_L(\partial) \oplus \mathcal{O}_L(-\partial)$, por lo tanto L es una recta de salto de E de orden ∂.

2º caso. $L \subset Y$. Elijamos un punto $x \in L$ y un plano $M \subset \mathbb{P}^3$ tal que $L \subset M$. Consideremos la familia unidimensional $\mathcal{F}$ de rectas de M que pasan por x. Una recta general L' de $\mathcal{F}$ no está contenida en Y y corta a Y en un número finito de puntos ($x \in L' \cap Y$), luego L' es una recta de salto de E. Como el conjunto de rectas de salto de un haz reflexivo semiestable es un cerrado, deducimos que L es una recta de salto de E.

<u>1.6. Proposición</u>. Para todo entero $c_2 \geq 1$, sea E un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0, c_2, c_2^2 + c_2)$, sea Y su curva asociada y sea H un plano de $\mathbb{P}^3$. Entonces H es un plano inestable para E de orden c_2 si y sólo si $H \supset Y$ (y por lo tanto a las singularidades de E), en cuyo caso $E_H \simeq \mathcal{O}_H(-c_2) \oplus I_{ZH}(c_2)$ donde $Z = \operatorname{sing}(E)$.

<u>Demostración</u>. Por definición de curva asociada a E, existe una sección $o \neq s \in H^o E$ tal que $Y = (s)_o$. Consideremos la su

cesión exacta determinada por s:

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0\ ,$$

de la que se deduce que Y es una curva plana de grado c_2.

Si $Y \subset H$, entonces al restringir a H la sucesión exacta (1) obtenemos la sucesión exacta:

(2) $$0 \longrightarrow I_{ZH}(c_2) \longrightarrow E_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(-c_2) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de H de dimensión cero y longitud $c_2^{\,2}+c_2$. Además

$$\mathcal{E}xt^1(E_H,\mathcal{O}_H) \twoheadrightarrow \mathcal{E}xt^1(I_{ZH}(c_2),\mathcal{O}_H)$$

y $c_3=c_2^{\,2}+c_2= h^0\ \mathcal{E}xt^1(E_H,\mathcal{O}_H)$ de donde se deduce que Z=sing(E), y $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_H(-c_2),\ I_{ZH}(c_2)) = H^1\ I_{ZH}(c_2)=0$, por lo tanto la sucesión (2) escinde.

Recíprocamente, si $H \not\supset Y$, sea $W= H\cap Y$, entonces al restringir a H la sucesión (1) obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow E_H \longrightarrow I_W \longrightarrow 0$$

por lo tanto, $H^2\ E_H(c_2-3)=0$, y H no es inestable para E.

2. Los espacios de moduli ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^{\,2}-2(r-1)c_2)$ y ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^{\,2}-(2r-1)c_2)$.

En lo que sigue pondremos $b(-1,c_2)= \dfrac{+1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$ y $b(0,c_2)=\sqrt{c_2-2}$.

Los objetivos de esta sección son demostrar la irreducibilidad y calcular la dimensión de $M:={}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^{\,2}-2(r-1)c_2)$ con $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$ (Respectivamente

$N := {}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$ con $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2))$.

En el Teorema 2.5 del capítulo I quedó garantizada la existencia de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)\cdot c_2)$ con $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$ (Resp $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$ con $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$)). Recordemos brevemente como iba dicha construcción:

<u>2.1. Construcción</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, consideremos el par (Y,e) donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión disjunta de una curva plana Y_1 de grado c_2 y una curva Y_2 de grado r^2-r intersección completa de una superficie de grado r y una superficie de grado r-1, y donde $0 \neq e \in H^o\ \omega_Y(5-r2)$. Sea $E(r)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y(2r-1) \longrightarrow 0.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E=-1$, $c_2E = c_2$ y $c_3E = 2p_a(Y)-2+(5-2r)\deg Y = c_2^2 - 2(r-1)c_2$.

Denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de clases de isomorfía de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ construidos en 2.1. Como consecuencia de la proposición 2.3 y del Teorema 2.8 obtendremos que $\mathcal{F}$ es un abierto denso de M_{red}.

<u>2.2. Construcción</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que

$c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, consideremos el par (Y,e) donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión disjunta de una curva plana Y_1 de grado c_2 con una curva Y_2 de grado r^2 intersección completa de dos superficies de grados r, y donde $0 \neq e \varepsilon H^o\omega_Y(4-2r)$. Sea $E(r)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y(2r) \longrightarrow 0 .$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E=0$, $c_2E=c_2$ y $c_3E=c_2{}^2-(2r-1)c_2$.

Denotemos por $\mathcal{L}$ el conjunto de clases de isomofía de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ construidos en 2.2. Como consecuencia de la proposición 2.4 y del Teorema 2.10 obtenemos que $\mathcal{L}$ es un abierto denso de N_{red}.

<u>2.3. Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$, la familia $\mathcal{F}$ de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2{}^2-2(r-1)c_2)$ contruido en 2.1 es irreducible y de dimensión $c_2{}^2-2(r-2)c_2+c_2+4+3r^2-5r$.

<u>Demostración</u>. Cualquier haz E de $\mathcal{F}$ está determinado por la elección de una curva plana Y_1 de grado c_2, una curva Y_2 de grado r^2-r intersección completa de una superficie de grado r y una superficie de grado $r-1$, y $0 \neq e \varepsilon H^o\omega_{Y_1 \cap Y_2}(5-2r)$, por ser todas estas elecciones irreducibles se tiene que

$\mathcal{F}$ es irreducible. Calculemos su dimensión. El plano H que contiene a Y_1 depende de 3 parámetros, Y_1 de $\binom{c_2+2}{2}-1$ parámetros, Y_2 de $\frac{2r^3+9r^2+13r+6}{6}$ - 6 parámetros y e de $\frac{c_2^2+7c_2}{2}$ - $- 2rc_2+6-7r+2r^2$ parámetros. Debemos restar $\dim \mathbb{P}(H°E(r))=$ $= h°I_Y(2r-1) = h°I_{Y_2}(2r-2) = \frac{2r^3+3r^2+5}{6}$ con lo cual obtenemos que $\dim \mathcal{F}=c_2^2 -2(r-2)c_2+c_2+4+3r^2-5r$.

<u>2.4 Proposición</u>$^{(*)}$ Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, la familia $\mathcal{L}$ de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2 - -(2r-1)c_2)$ construida en 2.2 es irreducible y de dimensión $c_2^2 -2(r-2)c_2+3r^2-2r+4$.

<u>2.5 Lema</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2 -2(r-1)c_2)$. Se verifica:

(a) E posee un plano inestable de orden $c_2-(r-1)$.

(b) El espectro de E es $\{-(c_2-r+1),\dots,-1,0,1,\dots,r-2\}$.

<u>Demostración</u>. (a) Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.3 del Capítulo IV.

(b) Sea $k_1 \leq \dots \leq k_{c_2}$ el espectro de E y sea H un plano inestable para E de orden c_2-r+1. Se verifica que $H^2E_H(c_2-r-2)\neq 0$, de donde se deduce que $\bigoplus_i h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i+c_2-r-1))=$ $h^2E(c_2-r-2)\neq 0$, luego $k_1 \leq -(c_2-r+1)$. Esta desigualdad junto con la fórmula $c_3 = -2\sum k_i - c_2$ y las propiedades de conexión del espectro |H5; § 7| y |H6; Proposition 5.1| nos da que $\{k_1,\ldots,k_{c_2}\} = \{(c_2-r+1),\ldots,-1,0,1,\ldots,r-2\}$, lo cual prueba (b).

<u>2.6 Lema</u>(*) Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$. Se verifica.

(a) E posee un plano inestable de orden c_2-r.

(b) El espectro de E es $\{-(c_2-r),\ldots,-1,0,1,\ldots,r-1\}$.

Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$ y sea H un plano inestable para E de orden $c_2-(r-1)$ (Lema 2.5). Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 11):

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-1-c_2) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de dimensión 0 de H $s=h^0(\mathcal{O}_Z)$, entonces E' es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ cuyas clases de Chern c_i' vienen dadas por $c_1'=-2$, $c_2'=r$, $c_3'=r-r^2+2s$. Las clases de Chern c_i'' del haz normalizado E'(1) vienen dados por $c_1''=0$, $c_2''=r-1$ y $c_3''=r-r^2+2s$. Puesto que $H^0E'=0$, se tiene que E'(1) es semiestable. Por lo tanto, $0 \leq c_3'' = r-r^2+2s \leq c_2''^2+c_2'' = r^2-r$ |H1; Proposition 8.2| y $s \leq c_3' = r-r^2+2s$ (Preliminares; Teorema 11), lo cual implica que $s=r^2-r$ y que la sucesión de reducción es:

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-1-c_2) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de dimensión 0 de H y de longitud r^2-r y $E'(+1)$ es un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,r-1,r^2-r)$, por lo tanto $E'(1)$ admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-r+1) \longrightarrow E'(1) \longrightarrow 0 .$$

Observación 1. En las condiciones anteriores se tiene que la inclusión $\mathcal{O}_Z \hookrightarrow \mathcal{E}xt^1\ (E'^{\vee},\mathcal{O})$ es un isomorfismo, ya que $h^0\ (\mathcal{E}xt^1(E'^{\vee},\mathcal{O})) = c_3' = r^2-r = s = h^0\ (\mathcal{O}_Z)$.

Observación 2. Para todo haz reflexivo estable de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$ con $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$ se tiene que $h^0E(1)=1$. Al subesquema Y de $\mathbb{P}^3$ definido por $Y:=(\sigma)_0$, siendo $0 \neq \sigma \in H^0E(1)$, le llamaremos la curva asociada a E. Es inmediato comprobar que $\deg Y=c_2$ y que $p_a(Y)= \dfrac{c_2^2-c_2}{2} - rc_2+1$.

2.7 Proposición. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$.

Entonces E determina:

a) Un plano H de $\mathbb{P}^3$,

b) Un haz reflexivo semiestable $E'(1)$ de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,r-1,r^2-1)$ cuyos puntos singulares están contenidos en H, y

(c) Un morfismo $\psi \varepsilon$ Hom$(E'_H(2),\mathcal{O}_H(c_2-r+2))$ / k^*

Recíprocamente, los siguientes datos:

(a) Un plano H de $\mathbb{P}^3$,

(b) Un haz reflexivo semiestable $E'(1)$ de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,r-1,r^2-r)$ cuyos puntos singulares están contenidos en H, y

(c) Un morfismo "general" $\psi \varepsilon$ Hom$(E'_H(2),\mathcal{O}_H(c_2-r+2))$/$k^*$

(Véase la demostración para saber el sentido dado a la palabra "general" en este caso).

determinan un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$.

Demostración. En virtud del lema 2.5 sabemos que E posee un plano inestable de orden c_2-r-1 que nos determina la sucesión de reducción:

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2-1) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de dimensión 0 de H y de longitud r^2-r, y $E'(1)$ es un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,r-1,r^2-r)$ y cuyas singularidades están contenidas en H.

Dualizando la sucesión exacta (1) obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow E(1) \longrightarrow E'(2) \longrightarrow I_{WH}(c_2-r+2) \longrightarrow 0$$

donde W es un subesquema de dimensión 0 de H y de longitud $c_2^2-2(r-1)c_2$. El epimorfismo $E'(2) \twoheadrightarrow I_{WH}(c_2-r+2)$ factoriza a través de $E'_H(2)$

$$\begin{tikzcd}
E'(2) \arrow[r] \arrow[d] & I_{WH}(c_2-r+2) \arrow[r] & 0 \\
E'_H(2) \arrow[ur, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

dando lugar a un morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}(E'_H(2), \mathcal{O}_H(c_2-r+2))/k^*$.

Recíprocamente, supongamos que tenemos H, $E'(1)$ y ψ en las condiciones establecidas en el enunciado. Se tiene que $E'_H(2) = I_{ZH}(r) \oplus \mathcal{O}_H(2-r)$ donde $Z=\mathrm{sing}\ (E')$ (Proposición 1.6). Por lo tanto, dar $\psi \in \mathrm{Hom}\ (E'_H(2), \mathcal{O}_H(c_2-r+2))$ es equivalente a dar dos formas f_1 y f_2 sobre H de grados c_2-2r+2 y c_2 respectivamente. Supongamos que f_2 y f_1 no tienen factores comunes, en cuyo caso diremos que ψ es general. Entonces $\mathrm{Im}\ \psi \simeq I_{WH}(c_2-r+2)$ donde W es un subesquema de H de dimensión 0 y longitud $c_2^2-2(r-1)c_2$.

Sea $E(1)$ el nucleo de la composición:

$$\begin{tikzcd}
E'(2) \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[rr, bend right, twoheadrightarrow] & E'_H(2) \arrow[r, twoheadrightarrow] & I_{WH}(c_2-r+2)
\end{tikzcd}$$

es inmediato comprobar que E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$.

<u>2.8 Teorema</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 4$ y $2 \leq r \leq b(-1,c_2)$, el espacio de moduli $M = {}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$ es irreducible y de dimensión $c_2^2-2(r-2)c_2+c_2+4+3r^2-5r$.

<u>Demostración</u>. En virtud de la proposición 2.7 todo haz reflexivo estable E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$ está determinado por la elección de

$E'(1) \in V={}^2V_{\mathbb{P}^3}(0,r-1,r^2-r)$, $H \in G(2,3)$ y $\psi \varepsilon \mathrm{Hom}(E'_H(2),$ $\mathcal{O}_H(c_2-r+2))_{/k^*}$. Todas estas elecciones son irreducibles, por lo tanto, M es irreducible. Calculemos su dimensión. Si $r \geq 3$, entonces $E'(1)$ depende de $(r-1)^2+4(r-1)+2=r^2+2r-1$ parámetros (Proposición 1.1), H no contribuye al computo de parámetros ya que si $r \geq 3$ entonces H está determinado por los r^2-r puntos singulares de E', y ψ depende de $c_2^2-2(r-2)c_2+c_2+2r^2-7r+6$ parámetros. Debemos restar $\dim \mathbb{P}(\mathrm{End}(E'))=1$ (Cap.II, Proposición 1.1) ya que los automorfismos de E' actúan sobre los morfismos ψ dando lugar al mismo núcleo. Si r=2, entonces E'(1) depende de 6 parámetros, H depende de un parámetro y ψ de $c_2^2+c_2$, debemos restar $\dim \mathbb{P}\,\mathrm{End}(E')=1$.

En definitiva, hemos obtenido que M es irreducible y de dimensión $c_2^2-2(r-2)c_2+c_2+4+3r^2-5r$.

2.8.1 Observación. Hemos probado que M es irreducible y hemos calculado su dimensión, sin embargo no hemos podido calcular $h^1(\mathrm{End}(E))$, por lo tanto, no sabemos si M es reducido o no singular.

Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 0$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$ y sea H un plano inestable para E de orden c_2-r (Lema 2.6). Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 11):

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2) \longrightarrow 0$$

Un razonamiento análogo al del caso $c_1=-1$ prueba que Z es un subesquema de dimensión 0 de H y de longitud r^2, y que E' es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,r,r^2)$ que admite una reducción localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-r) \oplus \mathcal{O}(-1)^2 \longrightarrow E' \longrightarrow 0 .$$

<u>Observación (i)</u> En las condiciones anteriores se tiene que la inclusión $\mathcal{O}_Z \hookrightarrow \mathcal{E}xt^1(E'^v,\mathcal{O})$ es un isomorfismo ya que $h^o\ (\mathcal{E}xt^1(E'^v,\mathcal{O}))= c_3'=r^2=h^o(\mathcal{O}_Z)$.

<u>Observación (ii)</u>. Para todo haz reflexivo estable E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$ con $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$ se tiene que $h^oE(1)=2$.

<u>2.9 Proposición</u>.(*) Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$. Entonces E determina:

(a) Un plano H.

(b) Un haz reflexivo estable E' de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,r,r^2)$ cuyos puntos singulares están contenidos en H,y

(c) Un morfismo $\psi \varepsilon\ \mathrm{Hom}(E'_H(1),\mathcal{O}_H(c_2-r\ 1))_{/k^*}$

Recíprocamente, los siguientes datos:

(a) Un plano H de $\mathbb{P}^3$.

(b) Un haz reflexivo estable E' de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,r,r^2)$ cuyos puntos singulares están contenidos en H.

(c) Un morfismo "general" $\psi\in \mathrm{Hom}(E'_H(1),\mathcal{O}_H(c_2-r+1))$.

determinan un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$.

2.10 Teorema(*) Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $2 \leq r \leq b(0,c_2)$, el espacio de moduli $N={}^2M^2_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$ es irreducible y de dimensión $c_2^2-2(r-2)c_2+3r^2-2r+4$.

2.10.1 Observación. Hemos probado que es irreducible y hemos calculado su dimensión, sin embargo no hemos podido calcular $h^1(\mathrm{End}(E)) = \dim T_{|E|}N$, por lo tanto, no sabemos si N es reducido o no singular.

3. Un ejemplo de espacio de moduli con dos componentes que se cortan.

En esta sección se dan ejemplos de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (0,9,40) que pertenecen a dos componentes distintos del espacio de modulo ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,0,40)$. Este ejemplo es una traducción de un ejemplo análogo dado por Sernesi de una curva lisa que pertenece a dos componentes distintas del esquema de Hilbert. Este resultado se enmarca dentro de un contexto más amplio el de estudiar espacios de moduli ${}^{2}M^{s}_{\mathbb{P}^3}(c_1,c_2,c_3)$ y su motivación está en el reciente interés en conocer ejemplos de tales espacios de moduli presentando alguna patología. Por ejemplo Kleppe en |k| da ejemplos de espacios de moduli no reducidos: M (0,13,74), M(-1,14,84); en |EL| Ellia da un ejemplo de espacio de Moduli con un punto singular: M(0,9,40), el mismo espacio de moduli ilustra un ejemplo de espacio de moduli con espectro no constante. Vamos a ver que a través de los puntos singulares da M(0,9,40) hallados por Ellia pasa otra componente.

Denotemos por H(d,g) el esquema de Hilbert de curvas de $\mathbb{P}^3$ de grado d y género aritmético g, y por ${}_gX^d$ un demento cualquiera de H(d,g).

<u>3.1 Proposición</u> |SER| Existe una curva lisa ${}_{39}X^{18}$ que pertenece a dos componentes $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ de H(18,39). Además, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son genéricamente lisas y de dimensión 72.

Recordemos brevemente como iba la demostración.

Sea Q una cuádrica lisa y $C={}_3C^6 \subset Q$ una curva lisa de tipo (2,4). Tomemos dos secciones suficientemente generales $F^4 \varepsilon H^o I_C(4)$ y $F^6 \varepsilon H^o I_C(6)$, $F^4 \cap F^6 = C \cup {}_{39}X^{18}$ y se tiene que:

(i) $h^o \mathcal{O}_X(4) = 35$, $h^1 \mathcal{O}_X(4) = h^o I_X(4) = 1$.

(ii) Si denotamos por $\mathcal{F}_o$ la familia de tales X's, entonces dim $\mathcal{F}_o = 71(<4x18=72)$, luego F_o está contenida en una familia mayor.

Sea $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) la familia de curvas de grado 18 y género aritmético 39 formada genéricamente por curvas proyectivamente normales cuya matriz asociada es del tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{resp.} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \right)$$

Se verifica:

(1) $\dim \mathcal{F}_1 = \dim \mathcal{F}_2 = 72$,

(2) $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ definen dos componentes distintos de $H(18,39)$, y

(3) $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Sea $\widetilde{\mathcal{F}}_i = \{X \in \mathcal{F}_i \,/\, X \text{ es reducido}\}$, $i=0,1,2$.

<u>3.2 Construcción</u>. Sea $E_{i_s}(3)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (X_{i_s}, η_{i_s}) donde $X_{i_s} \in \widetilde{\mathcal{F}}_i$ y $0 \neq \eta_{i_s} \in H^0\, \omega_{X_{i_s}}(-2)$; $i=0,1,2$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E_{i_s}(3) \longrightarrow I_{X_{i_s}}(6) \longrightarrow 0.$$

Por construcción E_{i_s} es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,9,40)$. Llamemos $\mathcal{L}_i$, $i=0,1,2$ al conjunto de clases de isomofía de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,9,40)$ así construidos.

Es fácil comprobar que:

(a) $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

(b) $\dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2 = 69$.

(c) Para todo $E_{1_s} \in \mathcal{L}_1$ y $E_{2_s} \in \mathcal{L}_2$ generales, se tiene:

- $\dim \mathrm{Ext}^1(E_{1_s}, E_{2_s}) = \dim \mathrm{Ext}^1(E_{2_s}, E_{2_s}) = 69$,
- $h^o E_{1_s}(1) = h^2 E_{2_s}(1) = 1$, y
- $h^2 E_{1_s}(1) = h^o E_{2_s}(1) = 0$.

De donde se deduce el siguiente teorema:

3.3 Teorema Existen dos componentes $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de ${}^2M^s_{\mathbb{P}^3}(0,9,40)$ genéricamente lisas de dimensión 69, tales que $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

A la vista de estos resultados, cabe preguntarse:

1.- ¿Existen ejemplos de espacios de moduli $M(c_1,c_2,c_3)$ con 3 o más componentes que se corten en un punto?

2.- ¿Existen ejemplos de espacios de moduli $M(c_1,c_2,c_3)$ con un punto singular que pertenezca a una única componente de $M(c_1,c_2,c_3)$?

CAPITULO VI.

CAPITULO VI

LAS VARIEDADES ${}^{2}V^{r}_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-t-r-1))$ Y ${}^{2}V^{r}_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+r^2+c_2-2t(c_2+r^2-t-1))$.

En |H2; Theorem 2.5| Hartshorne demuestra que para toda terna de enteros c_1, c_2, c_3 que verifique la relación de Schwarzenberger $c_1c_2 \equiv c_3$ (mod. 2) |H5; Corollary 2.4| y para todo $N>0$, existe una familia $\{|E_t|\}_{t\in T}$ de clases de isomorfía de haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, c_3 parametrizada por una variedad de dimensión $> N$. Sin embargo, si además fijamos el orden de inestabilidad del haz, i. e. , el mayor entero r tal que $H^0E^{\vee}_{norm}(-r)\neq 0$, entonces el conjunto de clases de isomorfía de tales haces forma una familia parametrizada por una variedad de dimensión finita. En efecto, supongamos $c_1=0$ ó -1, si E descompone, entonces $E\simeq\mathcal{O}(-r)\oplus\mathcal{O}(r+c_1)$, y si E no descompone, por definición de orden de inestabilidad, existe una sección no nula

$s\in H^oE^v(-r)\simeq k$ cuyo esquema de ceros es una curva Y de $\mathbb{P}^3$, y recíprocamente E está determinado por la curva Y y una sección no nula e de $H^o\omega_Y(2r+4+c_1)$. Nótese que el grado d y el género aritmético p_a de Y están determinados por c_1, c_2, c_3, y r; por lo tanto estas curvas Y forman una familia parametrizada por una parte del esquema de Hilbert $H^d_{p_a}$. Si además tenemos en cuenta que la elección de e depende también de un número finito de parámetros, se tiene que el conjunto de haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, y con clases de Chern c_1, c_2, c_3 está parametrizado por una variedad de dimensión finita. A esta variedad la denotaremos por ${}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(c_1,c_2,c_3)$.

En este capítulo demostramos la irreducibilidad y calculamos la dimensión de $V:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$ con $r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$ y

$$0\leq t\leq \frac{-(2r+1)+\sqrt{-7+4(c_2+2r^2+2r)}}{2}; \text{ y}$$

$W:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$ con $r\geq 0$, $c_2+r^4>4$ y $0\leq t\leq -(r+1)+\sqrt{c_2+2r^2+4r}$. Asi mismo daremos resoluciones localmente libres de cualquier haz E de V (Resp. W) (Teoremas 1.3, 1.5, 1.7, 1.9). La importancia de la existencia de tales resoluciones queda reflejada en las proposiciones 3.1, 3.3 y 3.5 en donde damos ejemplos de pares (d,g) tales que cualquier curva lisa, conexa de $\mathbb{P}^3$ de grado d y género g es proyectivamente normal y en algunos casos incluso demostraremos que es intersección completa.

1. Propiedades de los haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$ y $(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$.

En lo que sigue pondremos:

$$b(-1,c_2,r)=\frac{-(2r+1)+\sqrt{-7+4(c_2+2r^2+2r)}}{2} \quad ;y$$

$$b(0,c_2,r)=-(r+1)+\sqrt{c_2+2r^2+4r} \ .$$

En esta sección se estudian las principales propiedades de los haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$ con $r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$ y $0\leq b(-1,c_2,r)$ (Resp. $(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2r^3+c_2+2c_2r+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$ con $r\geq 0$, $c_2+r^2>4$ y $0\leq t\leq b(0,c_2,r)$) tales como la existencia de planos inestables de orden c_2+r^2-t (Resp. c_2+r^2+r-t) (Véase las proposiciones 1.1 y 1.2), la determinación de resoluciones localmente libres de los mismos (Teoremas 1.3, 1.5, 1.7, y 1.9) y consecuencias de la existencia de tales resoluciones.

Empezaremos estudiando el caso $c_1=-1$ y $t=0$ (Resp. $c_1=0$, $t=0$). Para ello utilizamos la correspondencia que existe entre estos haces y las curvas planas de grado c_2+r^2-r (Resp. c_2+r^2). El caso general se reducirá al caso t=0 mediante la sucesión de reducción.

1.1 Proposición. Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que

$r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$ y $0\leq t\leq b(-1,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$. Entonces E posee un plano inestable de orden c_2+r^2-t.

Demostración. Obsérvese que para toda terna de enteros c_2, r, y t en las condiciones del enunciado se verifica :

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1) >$$

$$> \frac{(c_2+r^2-r)(c_2+r^2+r)}{2}+(r+1)(c_2+r^2-r) \ .$$

Luego estamos en condiciones de aplicar el lemma 3.1 del capítulo II y concluir que E posee un plano inestable de orden c_2+r^2-q para cierto q, $0\leq q\leq (c_2+r^2-r-3)/2$, y que $c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2q(c_2+r^2+r)\leq c_3=c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1)\leq c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2q(c_2+r^2-r-q-1)$. De donde se obtiene que necesariamente t=q.

1.2 Proposición. Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r\geq 0$, $c_2+r^2>4$ y $0\leq t\leq b(0,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$. Entonces E posee un plano inestable de orden c_2+r^2+r-t.

Demostración. La demostración a la demostración de la Proposición 1.2 y por lo tanto la omitimos.

1.3 Teorema. Para toda par de enteros c_2, r tales que $r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,(c_2+r^2-r)(c_2+$

$r^2+r)$). Entonces E posee una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-r^2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(r-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2-r^2) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

<u>Demostración.</u> Gracias a |S; Proposition 5.4| sabemos que la curva Y asociada a E es una curva plana de grado c_2+r^2-r, i.e., E puede ser construido a través de una extensión:

$$e: \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(-r+1) \longrightarrow I_Y(-2r+1) \longrightarrow 0 \qquad 0 \neq e \in H^0 \omega_Y(3+2r)$$

donde Y es una curva plana de grado c_2+r^2-r.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{O}(-c_2-r^2-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}(-c_2-r^2-1) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(r-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(r-1) \oplus \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2-r^2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2-r^2) \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(r-1) \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & I_Y(-r) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2-r^2), \mathcal{O}(r-1))=0$, la aplicación $g: \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2-r^2) \longrightarrow I_Y(-r)$ se eleva a una aplicación $h: \mathcal{O}(-r-1) \oplus \mathcal{O}(-c_2-r^2) \longrightarrow E$, con lo cual se obtiene la resolución localmente libre de E establecida en el enúnciado.

<u>1.4 Corolario.</u> Para todo par de enteros c_2, r tales que $r \geq 1$, y $c_2+r^2-r > 4$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1, c_2, (c_2+r^2-r)(c_2+r^2+r))$. Se verifica:

i. $H^1E(m)=0$ para todo entero m.

ii. E(m) está generado por secciones globales para todo $m \geq c_2+r^2+1$.

iii. $\mathrm{Min}\{m\in\mathbb{Z}/H^oE(m)\neq 0\}=1-r$ y $h^oE(1-r)=1$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 1.3.

1.5 Teorema. Para todo par de enteros c_2, r tales que $r\geq 0$ y $c_2+r^2\geq 1$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,(c_2+r^2+2r+1)\cdot(c_2+r^2))$. Entonces E posee una resolución localmente libre del tipo:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(-c_2-r^2-r-1)\longrightarrow\mathcal{O}(-c_2-r^2-r)\oplus\mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(r)\longrightarrow E\longrightarrow 0.$$

Demostración. Es análoga a la del Teorema 1.3 y por lo tanto la omitimos.

1.6 Corolario. Para todo par de enteros c_2, r tales que $r\geq 0$ y $c_2+r^2\geq 1$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,(c_2+r^2+2r+1)(c_2+r^2))$. Se verifica:

i. $H^1E(m)=0$ para todo entero m.

ii. E(m) está generado por secciones globales para todo $m\geq c_2+r^2+r+1$.

iii. $\mathrm{Min}\{m\in\mathbb{Z}/H^oE(m)\neq 0\}=-r$ y $h^oE(-r)=1$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 1.5.

1.7 Teorema. Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$ y $1\leq t\leq b(-1,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$. Entonces E admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(-t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2-1)\longrightarrow\mathcal{O}(-t-r-1)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2)\longrightarrow E\longrightarrow 0.$$

<u>Demostración.</u> En virtud de la Proposición 1.1 sabemos que E posee un plano inestable H de orden c_2+r^2-t. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 11):

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(t-c_2-r^2) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de dimensión 0 de H. Sea $s=h^o\mathcal{O}_Z$, entonces $E'(1)$ es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,t-r^2,2tr+t^2+t+2s)$. Por lo tanto, $0 \leq c_3E'(1)=t^2+2tr+t+2s \leq 2rt+t^2+t$ |S, Theorem 3.8| y concluimos que s=0 y que la sucesión de reducción es:

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_H(t-c_2-r^2) \longrightarrow 0$$

La sucesión exacta (1) junto con la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(t-c_2-r^2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(t-c_2-r^2) \longrightarrow \mathcal{O}_H(t-c_2-r^2) \longrightarrow 0,$$

y la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r-1)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1) \longrightarrow E \longrightarrow 0 \quad \text{(Teor. 1.5)},$$

nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-t-2-r) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(t-c_2-r^2-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-t-1-r)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-t-1-r)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(t-c_2-r^2) \arrow[r] \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(t-c_2-r^2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser $Ext^1(\mathcal{O}(t-c_2-r^2),E')=0$, la aplicación $g':\mathcal{O}(t-c_2-r^2)\longrightarrow \mathcal{O}_H(t-c_2-r^2)$ se eleva a una aplicación $g:\mathcal{O}(t-c_2-r^2)\longrightarrow E$, con lo cual se obtiene la resolución localmente libre de E establecida en el enunciado.

<u>1.8 Corolario.</u> Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$ y $1\leq t\leq b(-1,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$. Se verifica:

i. $H^1E(m)=0$ para todo entero m.

ii. E(m) está generado por secciones globales para todo $m\geq c_2-t+r^2+1$.

iii. $Min\{m\in\mathbb{Z}/H^0E(m)\neq 0\}=1-r$ y $h^0E(1-r)=1$.

<u>Demostración.</u> Es una consecuencia inmediata del Teorema 1.7.

<u>1.9 Teorema (*).</u> Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r\geq 0$, $c_2+r^2>4$ y $1\leq t\leq b(0,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$. Entonces E admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0\longrightarrow \mathcal{O}(t-c_2-r^2-r-1)\oplus \mathcal{O}(-t-r-2)\longrightarrow\mathcal{O}(t-c_2-r^2-r)\oplus\mathcal{O}(-t-1-r)\oplus \mathcal{O}(r)\oplus \mathcal{O}(-r-2)\longrightarrow E\longrightarrow 0.$$

<u>1.10 Corolario (*).</u> Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r\geq 0$, $c_2+r^2>4$ y $0\leq t\leq b(0,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$. se verifica:

i. $H^1E(m)=0$ para todo entero m.

ii. $E(m)$ está generado por seciones globales para todo entero $m \geq c_2+r^2+r-t-1$.

iii. $\operatorname{Min}\{m \in \mathbb{Z} / H^0E(m) \neq 0\} = -r$ y $h^0E(-r)=1$.

<u>1.11 Proposición.</u> Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r > 4$ y $1 \leq t \leq b(-1,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1, c_2, c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$ y sea Y la curva asociada a E. Entonces Y es una de las siguientes curvas:

i. La unión de 2 curvas planas de grados c_2+r^2-r-t y t, respectivamente, que se cortan en t puntos.

ii. Una curva plana C de grado c_2+r^2-r-t con una estructura doble a lo largo de una subcurva Y' de grado t, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \longrightarrow 0.$

iii. La unión de 2 curvas planas, C de grado c_2+r^2-t-1 e Y' de grado t, con una multiplicidad doble a lo largo de una recta común, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \longrightarrow 0.$

<u>Demostración.</u> La curva Y asociada a E está definida como el esquema de ceros de una sección $0 \neq s$ $H^0E(1-r)$. Por lo tanto, $\deg Y = c_2+r^2-r$ y $p_aY = \frac{1}{2}(c_2^2+r^4+2c_2r^2-2r^2-2t(c_2+r^2-1-t-r)-2r(c_2+r^2)-3(c_2-r))$. Aplicando |S; Corollary 7.10|, sustituyendo en dicho corolario a y, d por c_2+r^2-r-t y c_2+r^2-r respectivamente, obte-

nemos el resultado del enunciado.

1.12 Proposición.(*) Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r\geq 0$, $c_2+r^2>4$ y $0\leq t\leq b(0,c_2,r)$, sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+r^2+c_2-2t(c_2+r^2-t-1))$, y sea Y su curva asociada. Entonces Y es una de las siguientes curvas:

i. La unión de 2 curvas planas de grados c_2+r^2-t y t que se cortan en t puntos.

ii. Una curva plana C de grado c_2+r^2-t con una estructura doble a lo largo de una subcurva Y' de grado t, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$0\longrightarrow I_Y\longrightarrow I_C\longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1)\longrightarrow 0.$$

iii. La unión de 2 curvas planas C de grado c_2+r^2-t e Y' de grado t, con una multiplicidad doble a lo largo de una recta común, relacionadas por una sucesión exacta del tipo:

$$0\longrightarrow I_Y\longrightarrow I_C\longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1)\longrightarrow 0.$$

2. Las variedades ${}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-1-t))$ y ${}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-1-t))$.

En lo que sigue pondremos $V:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-1-t-r))$ con $r\geq 1$, $c_2+r^2-r>4$ y $0\leq t\leq b(-1,c_2,r)$ y $W:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-1-t))$ con

$r \geq 0$, $c_2+r^2 > 4$ y $0 \leq t \leq b(0,c_2,r)$.

En esta sección demostraremos primero que V (Resp. W) es irreducible y después calcularemos su dimensión. La demostración de la irreducibilidad se hará vía las resoluciones localmente libres de haces E de V (Resp. W) dadas en la sección anterior.

<u>2.1 Teorema.</u> Para todo par de enteros c_2, r tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r > 1$, $V := {}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,(c_2+r^2+r)(c_2+r^2-r))$ es irreducible y de dimensión $2+\binom{c_2+2+r^2-r}{2}+\binom{c_2+r^2+r+2}{2}-\binom{2r+2}{2}$.

<u>Demostración.</u> Gracias al Teorema 1.3 tenemos que cualquier haz E de V admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_2-r^2-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(-c_2-r^2) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Luego V es un abierto de N, siendo N el conjunto de haces coherentes de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ que son el conúcleo de un monomorfismo de haces $\mathcal{O}(-c_2-r^2-1) \hookrightarrow \mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus$ $\oplus\mathcal{O}(-c_2-r^2)$. Por lo tanto la demostración quedará probada si vemos que N es irreducible y de dimensión:

$$2+\binom{c_2+2+r^2-r}{2}+\binom{c_2+r^2+r+2}{2}-\binom{2r+2}{2}.$$

Para la irreducibilidad de N véase por ejemplo |O-Spl; Proposition 5.1|. Calcularemos ahora su dimensión. Para ello sea $G_1=\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-c_2-1-r^2))$, $G_2=\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-r-1)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(-c_2-r^2))$ y $S=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-c_2-1-r^2),\mathcal{O}(-1-r)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(-c_2-r^2))$ y consideremos la acción:

$$\begin{array}{ccc} (G_1 x G_2) x S & \longrightarrow & S \\ ((f_1,f_2),g) & \longmapsto & f_2 g f_1^{-1} \end{array}$$

se tiene que $\dim N=\dim S-\dim G_1-\dim G_2+\dim I_g$, siendo $I_g=\{(f_1,f_2)\in \in G_1 x G_2/\ f_2 g f_1^{-1}=g\}$ para cualquier $g\in S$. Por otro lado tenemos que:

$$\dim G_1=1,$$

$$\dim G_2=\binom{2r+3}{3}+\binom{c_2+r^2-r+2}{3}+\binom{c_2+r^2+r+2}{3}+3,$$

$$\dim S=\binom{c_2+r^2-r+3}{3}+\binom{c_2+r^2+r+3}{3}+4\ ,$$

$$\dim I_g=\binom{2r+2}{3}+2\ .$$

Esta última igualdad es independiente de g y puede verse tomando por g la aplicación cuya matriz es:

$$A=\begin{bmatrix} h \\ x_o^{2r}h \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde x_o, x_1, x_2, x_3 son coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$ y h es una forma irreducible de grado c_2+r^2-r, y resolviendo la ecuación A=CAB donde B=(a) con $a\in k^*$ y

$$C=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & g_2 \\ g_1 & b_2 & g_3 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

con b_1, b_2, $b_3\in k^*$ y g_1, g_2, g_3 formas homogéneas de grado 2r, c_2+r^2-r-1 y c_2+r^2+r-1 respectivamente, las matrices correspondientes a f_1 y f_2 respectivamente. En definitiva tenemos que

$$\dim S = \binom{c_2+r^2-r+2}{2} + \binom{c_2+r^2+r+2}{2} - \binom{2r+2}{2} + 2.$$

<u>2,2 Teorema.</u>(*)Para todo par de enteros c_2, r tales que $r \geq 0$ y $c_2+r^2 > 1$, $W:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,(c_2+r^2+2r+1)(c_2+r^2))$ es irreducible y de dimensión

$$2+\binom{c_2+r^2+2}{2} + \binom{c_2+r^2+2r+3}{2} + \binom{2r+3}{2}$$

<u>2.3 Teorema.</u> Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r > 4$ y $0 < t \leq b(-1,c_2,r)$, $V:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2+r^4+$ $+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-1-t))$ es irreducible y de dimensión

$$\binom{c_2+r^2-t+r+2}{2} + \binom{c_2+r^2-r-t+2}{2} + \binom{t+2}{2} + \binom{2r+t+2}{2} + 3-(2r+2)(2r+1),$$

si $t > 1$; y

$$\binom{c_2+r^2+r+1}{2} + \binom{c_2+r^2-r+1}{2} + \binom{2r+3}{2} + 5-(2r+2)(2r+1), \text{ si } t=1.$$

<u>Demostración.</u> Gracias al Teorema 1.7 tenemos que cualquier haz E de V tiene una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-1-c_2-r^2) \longrightarrow \mathcal{O}(-t-1-r)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus$$
$$\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Luego V es un abierto de N, siendo N el conjunto de haces coherentes de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ que son conúcleo de un monomorfismo $\mathcal{O}(-t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-1-c_2-r^2) \hookrightarrow \mathcal{O}(-t-1-r)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus$ $\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2)$. Por lo tanto, el Teorema quedará demostrado si vemos que N es irreducible y que $\dim N =$

$$=\binom{c_2+r^2-t+r+2}{2}+\binom{c_2+r^2-r-t+2}{2}+\binom{t+2}{2}+\binom{2r+t+2}{2}+3-(2r+1)(2r+2)$$

si $t>1$; y

$$=\binom{c_2+r^2+r+1}{2}+\binom{c_2+r^2-r+1}{2}+\binom{2r+3}{2}+5-(2r+2)(2r+1) \text{ si } t=1.$$

Para la irreducibilidad de N véase por ejemplo |O-Spl; Proposition 5.1|. Calculemos ahora la dimensión de N. Para ello sea $G_1=\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-1-c_2-r^2))$, $G_2=\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-t-1-r)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2))$ y $S=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-t-r-2)\oplus\mathcal{O}(t-1-c_2-r^2),\ \mathcal{O}(-t-1-r)\oplus\mathcal{O}(-r-2)\oplus\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(t-c_2-r^2))$ y consideremos la acción:

$$(G_1xG_2)xS \longrightarrow S,$$
$$((f_1,f_2),g)\longmapsto f_2gf_1^{-1}$$

se tiene que $\dim N=\dim S-\dim G_1-\dim G_2+\dim I_g$, siendo $I_g=\{(f_1,f_2)/ f_2gf_1^{-1}=g\}$ para cualquier $g\in S$. Por otro lado tenemos que:

$$\dim G_1=2+\binom{c_2+r^2-r-2t+2}{3}$$

$$\dim G_2=\begin{cases} 6+2\binom{2r+4}{3}+2\binom{c_2+r^2-r}{3}+\binom{c_2+r^2+r+1}{3} & \text{si } t=1\\ 4+\binom{t+2}{3}+\binom{t+2r+3}{3}+\binom{2r+4}{3}+\binom{c_2+r^2-2t-r+2}{3}+\binom{c_2+r^2-t-r-1}{3}+ & \\ +\binom{c_2+r^2-t+r+1}{3} & \text{si } t>1\end{cases}$$

$$\dim S=8+\binom{t+3}{3}+\binom{t+2r+4}{3}+\binom{c_2+r^2-r-2t+3}{3}+\binom{c_2+r^2-r-t+2}{3}+\binom{c_2+r^2-t+r+3}{3}$$

$$\dim I_g=1+\binom{2r+2}{3}+\binom{c_2+r^2-r-2t+1}{3}$$

Este última igualdad es independiente de g y puede verse tomando como g la aplicación cuya matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} x_o & h \\ x_1^t & x_o^{t-1}h \\ x_2^{t+2r+1} & x_o^{t+2r}h \\ 0 & x_3 \end{bmatrix},$$

donde x_0, x_1, x_2, x_3 son coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$ y h una forma irreducible de grado c_2+r^2-r-2t, y resolviendo la ecuación $A=CAB$, siendo B y C las matrices correspondientes a f_1 y f_2 respectivamente. De las anteriores igualdades se concluye inmediatamente que N tiene la dimensión establecida.

2.4 Teorema. Para toda terna de enteros c_2, r, t tales que $r \geq 0$, $c_2+r^2>4$ y $1 \leq t \leq b(0,c_2,r)$, $W:={}^2V^r_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+$ $+r^2+c_2-2t(c_2+r^2-1-t))$ es irreducible y de dimensión:

$$3+\binom{t+2}{2}+\binom{c_2+r^2-t+2}{2}+\binom{t+2r+3}{2}+\binom{c_2+r^2-t+2r+3}{2}-(2r+3)(2r+2) \quad \text{si } t>1$$

$$5+\binom{c_2+r^2+1}{2}+\binom{t+4}{2}+\binom{c_2+r^2+2r+2}{2}-(2r+3)(2r+2) \quad \text{si } t=1.$$

Demostración. Es análoga a la del Teorema 2.3 y por lo tanto la omitimos.

3. Aplicaciones.

En esta última sección, aplicando resultados de este capítulo damos ejemplos de pares $(d,g)\in \mathbb{Z}^2$ tales que toda curva lisa conexa de $\mathbb{P}^3$ de grado d y género g es proyectivamente normal. Como consecuencia obtenemos pares $(d,g)\in \mathbb{Z}^2$ tales que el abierto de curvas lisas y conexas de grado d y género g del esquema de Hilbert es liso e irreducible. Estos mismos ejemplos proporcionan casos de esquemas de Hilbert con una componente regular y ninguna superabundante, y con una componente superabundante y ninguna regular.

Como es habitual en la literatura denotaremos por $H(d,g)$ el esquema de Hilbert de curvas de $\mathbb{P}^3$ de grado d y género aritmético g, y por $H_o(d,g)$ el abierto de $H(d,g)$ formado por las curvas lisas y conexas de grado d y género g. En general, este abierto no es denso.

Recordemos que para toda curva $C\in H(d,g)$ se verifica:

$$4d=\chi(N)\leq \dim_C H(d,g)\leq h^o(N)=4d+h^1(N)$$

donde N denota el fibrado normal de C en $\mathbb{P}^3$. Recordemos tambien que una componente irreducible Z de $H(d,g)$ se llama regular si existe un punto $z\in Z$ que parametriza una curva lisa y conexa con $h^1N=0$, y que una componente irreducible Z de $H(d,g)$ se llama superabundante si no es regular y está contenida en la clausura de $H_o(d,g)$.

3.1 Proposición. Toda curva $Y\subset\mathbb{P}^3$ lisa, conexa de grado 11 y género 15 es proyectivamente normal. Además, su haz de ideales

I_Y admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \oplus \mathcal{O}(-4) \oplus \mathcal{O}(-5) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0.$$

Demostración. Observemos primero que Y no está contenida en ninguna cuádrica lisa ya que no existen enteros a y b que verifiquen $11=a+b$ y $15=(a-1)(b-1)$, y que Y no está contenida en ningún cono cuadrático ya que no existe un entero a que verifique $11=2a+1$ y $15=a^2-a$.

Afirmamos que Y está contenida en una superficie cúbica. En efecto, si Y no estuviera contenida en ninguna cúbica, entonces $15=g(Y) \leq \operatorname{Sup}\{g(C)/C\subset\mathbb{P}^3$ curva lisa, conexa de grado 11 y no contenida en ninguna superficie de grado $<4\} \leq$ ≤ 14 |G-P; Théorème A|, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, $H^0\omega_Y(-2)\neq 0$. En efecto: $h^0\omega_Y(-2)=h^1\mathcal{O}_Y(2)=$ $h^0\mathcal{O}_Y(+2)-2d-1+g \geq 10-22-1+15=2\neq 0$. Sea $0\neq e\in H^0\omega_Y(-2)$, consideremos el haz E(3) determinado por el par (Y,e):

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(3) \longrightarrow I_Y(6) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden 0 (ó equivalentemente semiestable) ya que $h^0E=h^0I_Y(3)\neq 0$ y $h^0E(-1)=h^0I_Y(2)=0$, con clases de Chern (0,2,6). Luego en virtud del corolario 1.6 tenemos que $h^1I_Y(m)=$ $h^1E(m-3)=0$ para todo entero m, de donde se deduce que Y es proyectivamente normal.

Para hallar una resolución localmente libre del haz de ideales I_Y, consideremos la sucesión exacta (1) junto con la resolución de E(3):

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(3)\oplus\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(1) \to E(3) \to 0 \qquad \text{(Teorema 1.5)}$$

y el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] & \mathcal{O}(3)\oplus\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d] & E(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & I_Y(6) \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_Y(6) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que por ser $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{O})=0$, la aplicación $\mathcal{O} \xrightarrow{g'} E(3)$ se eleva a una aplicación $g:\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(3)\oplus\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(1)$, de lo cual se deduce la resolución localmente libre de I_Y establecida en el enunciado.

<u>3.2 Corolario.</u> $H_o(11,15)$ es irreducible, liso y de dimensión 44. En particular, $H(11,15)$ posee una única componente regular y ninguna componente superabundante.

<u>Demostración.</u> En virtud de la Proposición 3.1 sabemos que cualquier curva $C\in H_o(11,15)$ es proyectivamente normal, luego corresponde a un punto liso del esquema de Hilbert |ELL|. Sabemos, además, que todas las curvas $C\in H_o(11,15)$ tienen el mismo carácter numérico, de donde se deduce que $H_o(11,15)$ es irreducible |G-P1; Proposition 2.10|. Por último, que la dimensión de $H_o(11,15)$ es 44, es una consecuencia inmediata de |ELL; Théoreme 2|.

3.3 Proposición. Toda curva $Y\subset \mathbb{P}^3$ lisa, conexa de grado 10 y género 16 es intersección completa de una superficie de grado 5 con una superficie de grado 2. En particular, su haz de ideales I_Y admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)\oplus \mathcal{O}(-5) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0.$$

Demostración. Obsérvese que Y está contenida en una cuádrica. En efecto: si Y no estuviera contenida en ninguna cuádrica, entonces $16=g(Y) \leq \mathrm{Sup}\{g(C)/C\subset \mathbb{P}^3$ es una curva lisa, conexa de grado 10 y no contenida en ninguna superficie de grado $<$ $< 3\} \leq 12$ |G-P; Théorème A|, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, $H^o\omega_Y(-2)\neq 0$. En efecto: $h^o\omega_Y(-2)=h^1\mathcal{O}_Y(2)=h^o\mathcal{O}_Y(2)-2d-1+g=h^o\mathcal{O}_Y(2)-5>0$. Sea $0\neq e\in H^o\omega_Y(-2)$ y sea $E(3)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(3) \longrightarrow I_Y(6) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden 1, con clases de Chern (0,1,10). Aplicando el Teorema 1.5 obtenemos:

$$h^oI_Y(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m<2 \\ \binom{m+1}{3} & \text{si } 2\leq m<5 \\ \binom{m+1}{3}+\binom{m-2}{3} & \text{si } 5\leq m<7 \\ \binom{m+1}{3}+\binom{m-2}{3}-\binom{m-4}{3} & \text{si } 7\leq m \end{cases}$$

$h^1I_Y(m) = 0$ para todo entero m.

$$h^2 I_Y(m) = \begin{cases} \binom{m+1}{3} + \binom{m-2}{3} - \binom{m+3}{3} - \binom{m-4}{3} & \text{si } m < 0 \\ \binom{m+1}{3} + \binom{m-2}{3} - \binom{m-4}{3} & \text{si } 0 \le m < 2 \\ \binom{m-2}{3} - \binom{m-4}{3} & \text{si } 2 \le m < 5 \\ -\binom{m-4}{3} & \text{si } 5 \le m < 7 \\ 0 & \text{si } 7 \le m \end{cases}$$

$$h^3 I_Y(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \geq 0 \\ -\binom{m+3}{3} & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

donde para todo entero m $\binom{m}{n} := \dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$, i.e. Y tiene la cohomología de una intersección completa de una superficie de grado 5 con una superficie de grado 2, lo cual implica que Y es intersección completa de una superficie de grado 5 con una superficie de grado 2 |S1; Corollary 2,1|.

<u>3.4 Corolario.</u> $H_o(10,16)$ es irreducible, liso y de dimensión 44. En particular, H(10,16) posee una única componente superabundante y ninguna componente regular.

<u>Demostración.</u> Es análoga a la del corolario 3.2 y por lo tanto la omitimos.

<u>3.5 Proposición.</u> Toda curva $Y \subset \mathbb{P}^3$ lisa, conexa de grado 14 y

género 26 es proyectivamente normal. Además, su haz de ideales admite una resolución localmente libre del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-5)\oplus\mathcal{O}(-6)\oplus\mathcal{O}(-3) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

<u>Demostración.</u> Obsérvese que Y no está contenida en ninguna cuádrica ya que no existen enteros a y b tales que 14=a+b y 26=(a-1)(b-1). Afirmamos que Y está contenida en una superficie cúbica. En efecto, si Y no estuviera contenida en ninguna superficie cúbica, entonces $26=g(Y)\leq \operatorname{Sup}\{g(C)/C\subset\mathbb{P}^3$ es una curva lisa, conexa de grado 14 y no contenida en ninguna superficie de grado $<4\}=24$ |G-P; Théorème A|, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, $H^0\omega_Y(-3)\neq 0$. En efecto, $h^0\omega_Y(-3)=h^1\mathcal{O}_Y(3)=h^0\mathcal{O}_Y(3)-42-1+26>0$. Sea $0\neq e\in H^0\omega_Y(-3)$ y sea E(4) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$0\longrightarrow \mathcal{O}\longrightarrow E(4)\longrightarrow I_Y(7)\longrightarrow 0 .$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden 1, con clases de Chern (-1,2,8). Del corolario 1.4 deducimos que $H^1I_Y(m)=0$ para todo entero m ó equivalentemente que Y es proyectivamente normal.

Por último, un razonamiento análogo al realizado en la proposición 2.5, prueba que I_Y tiene una resolución localmente libre del tipo enunciado.

<u>3.6 Corolario.</u> $H_0(14,26)$ es irreducible, liso y de dimensión 58. En particular, H(14,26) posee una única componente superabundante y ninguna componente regular.

<u>Demostración.</u> Es análoga a la del Corolario 3.2 y la omitimos.

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA.

A-R Atiyah-Rees. Vector bundles on projective 3-space. Inv. Math. 35, 1976, 131-153.

B Barth. Some properties of stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^n$. Math. Ann. 226, 1977, 125-150.

B-E Barth-Elencwajg. Concernant la cohomologie des fibrés algebriques estables sur $\mathbb{P}^n$. Lect. Notes in Math. 683, 1978, 1-24.

BA Banica. Sur fes fibrés inestables de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$. Arch. Math. 43, 1984, 251-257.

B-M Banica-Manolache. Moduli space M(-1,4): minimal spectrum. Preprint n. 19, 1983, Bucarest.

C1 Chang. A bound on the order of jumping lines. Math. Ann. 262, 1983, 511-516.

C2 ----. Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with large c_3. Crelle J. 343, 1983, 99-107.

C3 ----. Stable rank 2 reflexive sheaves with small c_2 on $\mathbb{P}^3$ and applications. Trans AMS 590, 1984, 57-84.

E Ein. Stable vector bundles on projective spaces in Char. p 0. Math. Ann. 254, 1980, 53-72.

E-F Elencwajg-Forster. Bounding cohomology groups of vector bundles on $\mathbb{P}^n$. Math. Ann. 246, 1980, 251-270.

EL Ellia. Stable reflexive sheaves: The spectrum is not always constant. CRAS 296 (1983) 55-58.

ELL Ellingsrud. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbb{P}^e$ a cône Cohen-Macaulay. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 8 (1975)423-432.

EGA Grothendieck-Dieudonné. Elements de Géométrie Algébrique I. Springer-Verlag 1971.

E-H-V Ein-Hartshorne-Vogelaar. Restriction Theorems for stable rank 3 vector bundles on $\mathbb{P}^n$. Math. Ann. 259 (1982) 541-569.

F Ferrand. Construction des fibrés de rang 2. CRAS 281 (1975) 345-347.

G Grothendieck. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphére de Riemann. Amer. J. Math. 79 (1956) 121-138.

G1 ----. Sur la theory des classes de Chern. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 137-154.

G-M Grauert-Mulich. Vektorbundel vom Ramg 2 über dem n-dimensionalen Komplex-projektiven Raum. Manusc. Math. 16 (1975) 75-100.

G-P Gruson-Peskine. Postulation des courbes Gauches. Lec. Not. in Math. 997 (1983) 218-227 Springer-Verlag.

G-P1 ----. Genre des courbes de l'espace projective. Lec. Not. in Math. 687 (1978) Springer-Verlag.

H Hartshorne. Algebraic Geometry (1977) Brelin-Heilderberg-N.York.

H1 ----. Ample subvarieties of algebraic varieties. Lec. Not. in Math 156 (1970) Springer-Verlag.

H2 ----. Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. Math. Ann. 238 (1978) 229-280.

H3 ----. Algebraic vector bundles on projective spaces: A problem list. Topology 18 (1979).117-128.

H4 ---- . On the classification of algebraic space curves. In ; Vector bundles and differential equations (Nice, 1979) 83-112 Birkhauser.

H5 ----. Stable reflexive sheaves. Math. Ann. 254 (1980) 121-176.

H6 ----. Stable reflexive sheaves II. Inv. Math. 66 (1982) 165-190.

H7 ----. Residues and duality. Lec. Not. in Math. 2 (1966) Springer-Verlag.

HO Horrocks. A construction for locally free sheaves. Topology 7 (1958) 117-120.

K Kleppe. Deformations of reflexive sheaves of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. Preprint 1982, Oslo.

M1 Maruyama. Moduli of stable sheaves I. J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977) 91-126.

M2 ----. Moduli of stable sheaves II. J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978) 557-614.

M3 ----. Boundedness of semistable sheaves of small rank. Nagoya Math. J. 78 (1980) 65-94.

M4 ----. The Theorem of Grauert-Mülich-Spindler. Math. Ann. 255 (1981) 317-333.

MI1 Miró. Gaps in Chern classes of rank 2 stable reflexive sheaves. Math. Ann. 270 (1985) 317-323.

MI2 ----. The moduli space $M^s_{\mathbb{P}^3}(-1.c_2,c_2^2-2c_2+4)$. To appear in: Proceedings of the second conference, Algebraic Geometry. La Rábida, Huelva, 1984.

MI3 ----. Some moduli spaces. Preprint 1984.

MI4 ----. Chern classes of rank 3 stable reflexive sheaves. Preprint 1985.

N Newstead. Introduction to moduli problems and orbit spaces. Tata Institute, Bombay (1978).

O1 Okonek. Moduli extremer Garben auf $\mathbb{P}^n$. Crelle J. 338 (1983) 183-194.

O2 ----. Reflexive Garben auf $\mathbb{P}^4$. Math Ann. 260 (1982) 211-237.

O-Sp1 Okonek-Spindler. Reflexive Garben vomm Ramg $r > 2$ auf $\mathbb{P}^n$. Crelle J. 344 (1983) 38-64.

O-Sp2 ----. Das Spectrum torsionsfreier Garben I. Manusc. Math. 47 (1984) 187-228.

O-Sp3 ----. Das Spectrum torsiosfreier Garben II. Preprint.

O-Sp4 ----. Stabile reflexive Garben vom Ramg 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit kleinen Chernklassen. Math. Ann. 264 (1983) 91-118.

O-Sp5 ----. Die Modulraume $M^s_{\mathbb{P}^3}(-2,3,c_3)$. Preprint 1984.

O-S-S Okonek-Schneider-Spindler. Vector bundles on complex projective spaces. Progress in Math. 3, Boston 1980.

P-S Peskine-Szpiro. Liaison des variétés algebriques I. Inv. Math. 26 (1979) 205-217.

S Sauer. Nonstable reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$. Thesis Univ. California, Berkeley, 1982.

S1 ----. Codimension-two subvarieties of $\mathbb{P}^n$ with the cohomology of a complete intersection. Preprint Michigan State Univ., 1983.

SC Schneider. Chernklassen semistabiler Vektorraumbündel vom Ramg 3 auf dem Komplex projectiven Raum. Crelle J. 315 (1980) 211-220,

SC1 ----. Einschrankung stabiler Vektorraumbündel vom Ramg 3 auf Hyperebenen des projektiven Raum. Crelle J. 323 (1981) 177-192.

SE Serre. Faisceaux algébrique cohérents. Ann. of Math. 61 (1955) 197-278.

SER Sernesi. An example of a smooth curve $X \subset \mathbb{P}^3$ which belongs to 2 components of the Hilbert scheme. Preprint.

T Takemoto. Stable vector bundles on algebraic surfaces. Nagoya Math. J. 47 (1972) 29-48.

V Vogelaar. Constructing vector bundles from codimension 2 subvarietes. Ph. D. Thesis, Leiden, 1979.