

DISEÑO DE ANILLOS DE COMPRESIÓN NO CIRCULARES Y DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE FUERZAS EN EL PLANO

Rodrigo Martín Sáiz

Director: Ramon Sastre i Sastre, Dr. Arquitecto
Catedrático de la Universitat Politècnica de Catalunya

Programa de Doctorado:
Construcción, Restauración y Rehabilitación Arquitectónica

Departament de Tecnologia de l'Arquitectura
Escola Tècnica Superior d'Arquitectura del Vallès
Universitat Politècnica de Catalunya

Sant Cugat del Vallès, octubre de 2015

Tesis presentada para obtener el título de Doctor por la Universitat Politècnica de Catalunya

V0_15_09_2015

V1_23_09_2015: Versión para primera comisión académica y revisores.

V2_30_10_2015: Versión para segunda comisión académica y tribunal.

El diseño de anillos de compresión de planta no circular con distribución óptima de fuerzas en el plano, exceptuando los de forma súper elíptica, es original y ha sido ideado y desarrollado íntegramente por el autor de esta tesis.

A mi familia

ABSTRACT

At the beginning of times, technique was used to reduce the physical stress of any work undertaken by the mankind; this was done without taking into consideration any saving of the resources used. Indeed, it was the other way around, as more energy was required to develop more ambitious projects. In addition to this, as the physical stress was not any more an issue, the amount of resources being mobilised was increased. From some time now, we have understood that the resources are not infinite, and that their consumption could cause irreversible damage to the system. For this reason, anything that can reduce the consumption of material and energy is now welcomed.

In the construction industry, material resources become the final product: a building, a bridge, a dam, etc. To build means to extract, to transform and to assemble these materials on site. Energy is required to develop each one of these processes. Generally, this energy is directly related the amount of each specific material used. There are two exceptions to this rule: when the material is extracted and transformed in the same site (as it does not require transport). When the material is recycled from another site (as it implies less transformation or it does not require it at all). In addition to this, each material has different performance properties an requires different quantity of energy for its transformation.

Therefore, if the aim is to save material, and therefore energy, the focus should be put on replacing the conventional construction techniques and technologies by those ones that allow building lighter structures. The tensile structures are the lighter structural solution currently available, with a design challenge: the internal loads balance. If this problem is properly taken into consideration and solved, then the efficiency, which is the relation between the structural performance (span and capacity) versus the resources used (material and energy), can be increased considerably. This is especially relevant on long-span roofs. By doing this, a good design can be achieved, and therefore, on the use of proper use of technology to save material and energy.

On long-span and tensile roof systems it is better to provide the equilibrium of the inner loads by a self-balancing system based on rigid elements, rather than the use of external structural elements. The rigid element provides a closed loads path that converts the internally statically indeterminate structure on an externally statically determinate structure. In the case of a spatial structure, these elements are compression rings or polygons. The most efficient ones are those that under permanent loading conditions do not need to resist bending forces. This is because their geometry matches the funicular of the in-plane loads transferred by the cables or membranes, together with the fact that they are being restrained against buckling by the same tensile elements.

Compression rings with circular shape under the reactions produced by membranes with uniform tension forces have to resist axial compression forces only. In addition to this, the membrane provides total bucking restraint (at least in-plane). On the other hand, in circular compression rings with isotensioned and equidistant spokes, the same forces diagrams and buckling conditions apply to the each of the ring sections.

This research is focused on the design of non-circular compression rings and how to achieve an optimum distribution of in-plane loads, so that they can get closer, or even match, those design conditions that apply to circular compression rings. In order to do so, three general cases have been analysed: rings with uniform loads, rigid polygons and rings with punctual loads. For each case, a design method is defined, as well as the optimum or ideal distribution of the in-plane loads.

Keywords: *Self-balanced tensile structures, non-circular compression rings, efficiency and optimization.*

RESUMEN

Al principio la técnica servía para ahorrar esfuerzo físico en cualquier trabajo realizado por el hombre, pero no se ocupaba demasiado de ahorrar recursos, sino más bien lo contrario, cada vez consumía más porque cada vez requería más energía para desarrollar trabajos más ambiciosos. Además, como el esfuerzo físico ya no suponía un problema, la cantidad de recursos materiales movilizados fue aumentando. Pero hace tiempo que nos hemos dado cuenta de que los recursos no son inagotables y de que su consumo excesivo causa daños irreversibles. Así que, todo aquello que permita reducir el consumo de material y energía es bienvenido.

En la construcción, los recursos materiales son los que configuran físicamente algo: un edificio, un puente, una presa, etc. El acto de construir implica extraer, transformar, transportar y colocar estos materiales en obra. Para cada uno de estos procesos se requiere energía. En general, esta energía es proporcional a la cantidad de un mismo material utilizado, pero hay al menos dos excepciones: si el material se extrae y se transforma en el mismo lugar de la obra, no requiere transporte; y si el material es reaprovechado de otra obra, requiere una transformación menor o incluso nula. Además, cada material tiene unas prestaciones específicas y requiere una cantidad de energía distinta para su transformación.

Entonces, si se trata de ahorrar material y consecuentemente energía, se necesita substituir las técnicas y las tecnologías de la construcción convencional por aquellas que permiten construir más ligero. Las estructuras de cables y membranas tensadas son las construcciones menos pesadas que existen hoy en día, aunque presentan siempre el problema del equilibrio de sus fuerzas internas. Si este problema se resuelve bien, la eficiencia, es decir, la relación entre prestaciones (luz y capacidad de carga) y recursos consumidos (material y energía) resulta muy elevada, especialmente en cubiertas de grandes luces. Esto implica un buen diseño, es decir, una buena técnica para ahorrar.

En estas cubiertas (tensadas y de grandes luces) resulta más ventajoso absorber las fuerzas internas de manera autónoma, mediante elementos rígidos equilibrantes, que utilizando elementos o recursos de fuera de la estructura. Los elementos rígidos equilibrantes forman un circuito cerrado de fuerzas y convierten la estructura (internamente hiperestática) en externamente isostática. Si la estructura es espacial, estos elementos tienen forma de anillo o polígono rígido de compresión. Los más eficientes son los que, en situación de acciones permanentes, apenas tienen que soportar esfuerzos de flexión, porque su geometría coincide con la del funicular de las fuerzas en el plano transmitidas por los cables o membranas, y además tienen impedido el pandeo por el arriostramiento que le confieren los propios elementos tensados.

Los anillos de compresión de planta circular sometidos a la acción de membranas tensadas uniformemente sólo tienen que soportar un esfuerzo axial de compresión y además, al menos en su propio plano, el pandeo está totalmente impedido por el efecto de arriostramiento de la propia membrana. Los que también son circulares y están sometidos a la acción de radios isotensos y equidistantes tienen los mismos diagramas de esfuerzos y condiciones de pandeo en todos los tramos entre radios.

Esta investigación trata sobre el diseño de anillos de compresión no circulares y de la distribución óptima de fuerzas en el plano, de manera que se aproximen o incluso se igualen sus condiciones de dimensionado con respecto a las que tienen los anillos circulares. Se estudian tres casos generales: anillos con fuerza distribuida, polígonos rígidos y anillos con fuerzas puntuales. En cada caso se enuncia un método para el diseño y se formula la distribución óptima o ideal de fuerzas en el plano.

Palabras clave: Estructuras tensadas autónomas, anillos de compresión no circulares, eficiencia, optimización.

PRÓLOGO

Soy arquitecto y me interesa la arquitectura en todas sus vertientes. Me interesan las estructuras porque me dedico a ellas profesionalmente desde hace quince años. Me interesan las estructuras tensadas en particular porque me parecen tecnológicamente avanzadas. Creo que la tecnología bienintencionada permite que las cosas puedan ser cada vez mejores. ¿Y qué es una estructura mejor? Más ligero no siempre es mejor. Pero, gastar menos de todo, eso sí que es mejor. Pienso ahora en el medioambiente. Espero que esta investigación sirva para eso, para gastar menos.

La redacción de una tesis requiere iniciativa, empeño y esfuerzo personal, pero se necesita también el apoyo de otras personas. Al menos así ha sido en mi caso. Aprovecho este prólogo para darles las gracias: A mi director de tesis, Ramon Sastre, por haber sabido guiarme sutilmente para que la investigación fuese acotada, precisa, original y, espero que también, interesante. También por prestarme algunos de sus programas y de sus libros. A los miembros del tribunal, titulares y suplentes, a los revisores y a los miembros de la comisión académica del programa de doctorado, por el interés mostrado y por el tiempo que hayan podido dedicar a la lectura, revisión y evaluación de mi trabajo. Después, a mi padre, a mis hermanos Diego y Guillermo, y a Jaume Gomà, por las pequeñas ayudas prestadas en forma de consejos, lecturas, revisiones, obtención de fuentes bibliográficas y traducción. A mis compañeros en la Escuela de Arquitectura de Reus, en especial a su director, Josep Bertran, por sus ánimos constantes. A los amigos, mentores y compañeros de profesión que también me han transmitido sus ánimos durante este tiempo. Por último, a mi familia: mi padre, mi madre, mis hermanos y hermana, y demás parientes cercanos; muy especialmente, a mi mujer y a mi hija, además de por el apoyo y los ánimos que me han dado, por haberme permitido tener parte del tiempo que les hubiera correspondido. Gracias.

Sant Cugat del Vallès, 22 de octubre de 2015.

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Figuras:

Capítulo 1:

Figura 1.1: “*La leggerezza in Architettura*” de Vincenzo Pinto (CAPASSO 1993: 31).

Figura 1.2: Absorción de reacciones de tensado mediante soportes empotrados en la base (en línea gruesa las acciones sobre el cimiento). Dibujo realizado por el autor.

Figura 1.3: Absorción de reacciones de tensado mediante soportes atirantados (en línea gruesa las acciones sobre el cimiento). Dibujo realizado por el autor.

Figura 1.4: Absorción de reacciones de tensado mediante elementos rígidos equilibrantes (en línea gruesa de puntos). Dibujo realizado por el autor.

Figuras 1.5a; 1.5b y 1.5c: Diagramas de esfuerzos axiales, momentos flectores y cortantes en el plano del anillo rígido de una rueda circular de radios isotensos y equidistantes. Dibujos realizados por el autor a partir de los resultados de un modelo de cálculo propio.

Capítulo 2:

Figuras 2.1a y 2.1b: Carpas con conoides tensados equilibrados en el perímetro mediante anillos rígidos (en línea gruesa de puntos). Dibujos realizados por el autor.

Figuras 2.2a 2.2b y 2.2c: Paraguas con conoides tensados equilibrados en el perímetro mediante anillos rígidos (en línea gruesa de puntos). Dibujos realizados por el autor.

Figuras 2.3a, 2.3b y 2.3c: Ruedas de radios tensados equilibrados en el perímetro mediante anillos rígidos (en línea gruesa de puntos). Dibujos realizados por el autor.

Figura 2.4: Cúpula tensada de cables triangulados (izquierda) y de cables radiales y membrana tensada (derecha) equilibradas mediante un anillo rígido (en línea gruesa de puntos). Dibujo realizado por el autor.

Figuras 2.5a, 2.5b y 2.5c: Cubiertas neumáticas equilibradas en el perímetro mediante un anillo rígido (en línea gruesa de puntos). Dibujos realizados por el autor.

Figura 2.6. Sección del Pabellón Rotonda en Nizhny-Novgorod. Imagen disponible *online* en: <https://en.wikipedia.org/wiki/Shukhov_Rotunda>.

Figura 2.7: Elevadores de grano con forma de conoide construidos por Cargill Inc. en Minot, Dakota del Norte. Fotografía disponible *online* en: <http://www.minotmemories.com/2013_06_01_archive.html>.

Figura 2.8: Sección del atrio cubierto del *SONY Center* en Berlín. Dibujo disponible *online* en: <<http://www10.aecafe.com/blogs/arch-showcase/>>.

Figura 2.9: Sección del Anfiteatro Flavio con el sistema de postes, cuerdas y velas de la cubierta según la interpretación del arquitecto alemán Josef Durm (Montilla 1969: 82).

Figura 2.10: Sección del Pabellón *El Cilindro* en Montevideo (SANTOS-GUERRAS 1990: 9).

Figura 2.11: Sección del Pabellón de EEUU para la Exposición Universal de 1958 en Bruselas. Imagen disponible *online* en: <<http://www.conlab.org/acl/thereallybigmap/exhibit/designprecedent.html>>.

Figura 2.12: Sección del *Memorial Auditorium* en Utica, Nueva York. Imagen disponible *online* en: <http://www.thorntontomasetti.com/projects/utica_memorial_auditorium/>.

Figura 2.13: Sección del *New York State Pavilion* en Flushing Meadows, Nueva York. Imagen disponible *online* en: <<http://www.conlab.org/acl/thereallybigmap/exhibit/designprecedent.html>>.

Figura 2.14: Maqueta de la cúpula *Aspension*, basada en la patente de Fuller. Imagen disponible *online* en:

<<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/GEORGIA/img-gal.html>>.

Figura 2.15: Secuencia de montaje descrita por Geiger para las cúpulas tensadas. Dibujo original de la patente *Roof Structure*, U. S. n.º. 4,736,553 de David Geiger.

Figura 2.16: Planta y sección de la cúpula tensada con cables triangulados descrita por Levy. Dibujo original de la patente *Triangulated Roof Structure*, U. S. n.º. 5,259,158 de Matthyns Levy.

Figura 2.17: Planta y sección longitudinal de la cubierta soportada por aire del Pabellón de EEUU de la Exposición Universal de Osaka de 1970. Dibujo disponible *online* en: <<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/OSAKA/cable.html>>.

Figura 2.18: Sección del cojín lenticular instalado sobre el patio del Castillo de Bellver. Por cortesía de Ramon Sastre.

Figura 2.19: Función de fuerza distribuida cuyo funicular coincide con la geometría de un anillo súper elíptico semiejes (ESCRIG 1999b: 30-31).

Figura 2.20: Diagrama de momentos flectores en el plano del anillo del *Georgia Dome* debido a las fuerzas de pretensado y cargas permanentes. Dibujo disponible *online* en: <<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/GEORGIA/g-anal.html>>.

Capítulo 4:

Figura 4.1: Latitud de un punto M de la elipse según los sistemas geocéntrico (ω), geodésico (φ) y reducido (ψ). Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.2: Evoluta de la elipse y radio de curvatura en un punto M . Dibujo realizado por el autor.

Figuras 4.3a y 4.3b: Representación de una misma fuerza distribuida ideal (línea fina) con dos factores de escala diferentes. Dibujo realizado por el autor.

Figuras 4.4a y 4.4b: Representación de la misma fuerza distribuida ideal (línea fina) con diferentes factores de escala negativos. Dibujos realizados por el autor.

Figura 4.5: Tangencia entre una elipse y su circunferencia oscultriz en un punto M de ángulo geodésico φ , y fuerza distribuida ideal. Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.6: Tangencia de dos elipses iguales en un punto M con el mismo radio de curvatura y ángulo geodésico φ , y fuerza distribuida ideal. Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.7: Tangencia de dos elipses distintas en un punto M con el mismo radio de curvatura según ángulos geodésicos φ_1 y φ_2 respectivamente, y fuerza distribuida ideal. Dibujo realizado por el autor.

Figuras 4.8: Anillo compuesto por dos arcos de la misma elipse y dos arcos de la misma circunferencia oscultriz, y fuerza distribuida ideal. Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.9: Anillo compuesto a por dos arcos de la misma circunferencia oscultriz y dos arcos de elipses distintas. Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.10: Anillo compuesto por dos arcos de la misma elipse y dos arcos de circunferencias oscultrices distintas. Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.11: Anillo compuesto por cuatro arcos de dos circunferencias oscultrices y dos elipses distintas. Dibujo realizado por el autor.

Figura 4.12: Anillo regular compuesto alrededor de un triángulo equilátero. Dibujo realizado por el autor.

Figuras 4.13a; 4.13b y 4.13c: Tres anillos regulares compuestos a partir de elipses iguales con diferentes ángulos φ en el punto de tangencia. Dibujos realizados por el autor.

- Figura 4.14:** Anillos regulares compuestos alrededor de polígonos regulares de tres, cuatro, cinco y seis lados. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 4.15:** Anillo compuesto con arcos de elipses distintas y circunferencias iguales alrededor de un triángulo equilátero. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 4.16:** Anillos compuestos alrededor de polígonos regulares mediante combinaciones de elipses distintas y radios de curvatura iguales en los puntos de tangencia. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 4.17:** Anillo compuesto con arcos de elipses iguales y dos circunferencias osculatrices distintas alrededor de un cuadrado. Dibujo realizado por el autor.
- Figuras 4.18a y 4.18b:** Anillo irregular compuesto alrededor de un triángulo equilátero. Dibujos realizados por el autor.
- Figuras 4.19a y 4.19b:** Caso general de anillo compuesto alrededor de un polígono irregular. Dibujos realizados por el autor.
- Figuras 4.20a y 4.20b:** Anillo compuesto por arcos de elipses distintas, de circunferencias osculatrices iguales y la misma distancia máxima D entre el anillo y el polígono en cada lado. Dibujos realizados por el autor.

Capítulo 5:

- Figura 5.1:** Equilibrio de fuerzas en el vértice de un ángulo γ . Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.2a y 5.2b:** Distribución ideal de fuerzas puntuales sobre los vértices de polígonos regulares (izquierda) e irregulares (derecha) para el mismo esfuerzo axial de compresión en todo el perímetro. Dibujos realizados por el autor.
- Figura 5.3:** Cuadrante de un polígono de ángulos γ iguales y lados desiguales inscrito en una elipse y distribución ideal de fuerzas sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.4:** Polígonos de ángulos γ iguales de cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte y veinticuatro lados distintos, inscritos en elipses, y distribución ideal de fuerzas sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.5:** Cuadrante de polígono de lados iguales y ángulos γ desiguales inscrito en una elipse y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.6:** Polígonos de cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte y veinticuatro lados iguales, inscritos en elipses, y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figuras 5.7a, 5.7b, 5.7c y 5.7c:** Polígonos de cuatro y ocho lados iguales inscritos en elipses con diferente excentricidad ε según dos criterios distintos. Dibujos realizados por el autor.
- Figura 5.8:** Polígono de lados iguales inscrito en un anillo compuesto por tres arcos de la misma elipse alrededor de un triángulo equilátero y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.9:** Polígonos de lados iguales y inscritos en anillos compuestos alrededor de un triángulo equilátero y un cuadrado, y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.10:** Cuerda de un arco compuesto por dos curvas tangentes de dos funciones distintas. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.11:** Anillo compuesto por arcos de dos elipses distintas y una misma circunferencia osculatriz alrededor de un rectángulo con la misma distancia máxima D en los cuatro lados. Dibujo realizado por el autor.

- Figura 5.12:** Cuadrante de un polígono de lados iguales, inscrito en un anillo compuesto por arcos de elipses distintas y una misma circunferencia osculatriz alrededor de un rectángulo, y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.13:** Polígonos de lados iguales inscritos en diversos anillos compuestos alrededor de rectángulos y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 5.14:** Posición de un punto cualquiera de una elipse girada un ángulo β y con centro distinto al origen de coordenadas. Dibujo realizado por el autor.
- Figuras 5.15a y 5.15b:** Anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas (arriba), y polígono inscrito de lados iguales con distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices (abajo). Dibujos realizados por el autor.
- Figura 5.16:** Polígonos de cuatro lados inscritos en un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas. Dibujo realizado por el autor.

Capítulo 6:

- Figura 6.1:** Diagrama de esfuerzos axiales en un anillo circular con ocho fuerzas radiales iguales y equidistantes. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.2:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo circular con ocho fuerzas radiales iguales y equidistantes. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.3:** Diagrama de esfuerzos cortantes en el plano de un anillo circular con ocho fuerzas radiales iguales y equidistantes. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figuras 6.4a; 6.4b y 6.4c:** Modos de pandeo de un arco biarticulado (arriba), de un arco doblemente empotrado (en medio) y deformada de un tramo anillo circular sometido a fuerzas radiales, iguales y equidistantes (abajo). Dibujos realizados por el autor.
- Figura 6.5:** Anillo elíptico con fuerzas F iguales distribuidas según incrementos regulares de ángulos geodésicos $\Delta\varphi$ y fuerza distribuida ideal $q(\varphi)$ de las que resulta el mismo esfuerzo axial de compresión. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.6:** Comparación de la diferencia entre los ángulos γ en los vértices de dos polígonos virtuales de n lados inscritos en una misma elipse, planteados según un incremento regular del ángulo geodésico $\Delta\varphi=360/n$. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.7:** Comparación de la orientación de un radio según un ángulo geodésico φ (en línea de puntos) de la elipse y según la bisectriz (en línea continua) del ángulo γ entre dos lados del polígono virtual. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.8:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un polígono rígido inscrito en un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales distribuidas según ángulos geodésicos regulares. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.9:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales distribuidas según ángulos geodésicos regulares. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.10:** Diagrama de esfuerzos axiales en un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales, distribuidas en los vértices de un polígono inscrito virtual de ángulos iguales, y orientadas según su bisectriz. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.

- Figura 6.11:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales, distribuidas en los vértices de un polígono inscrito virtual de ángulos iguales, y orientadas según su bisectriz. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.12:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con ocho fuerzas F_i distribuidas según longitudes de arco iguales, de las que resulta un mismo esfuerzo axial máximo de compresión en todos los tramos. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.13:** Excentricidad máxima de un cuadrante de elipse y de su circunferencia principal. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.14:** Excentricidad máxima de un arco elíptico cualquiera. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.15a y 6.15b:** Dos posibilidades distintas de división de una elipse en cuatro y ocho tramos equiexcéntricos respectivamente. Dibujos realizados por el autor.
- Figura 6.16:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.17:** Superposición de los diagramas de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico de semiejes $a/b=2$, resultantes de cuatro distribuciones distintas de fuerzas, de las que siempre resulta un mismo esfuerzo axial máximo de compresión. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en modelos de cálculo propios.
- Figura 6.18:** Superposición de los diagramas de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico de semiejes $a/b=4$, resultantes de una distribución de fuerzas iguales según ángulos geodésicos regulares y de una óptima según tramos equiexcéntricos, ambas con un mismo esfuerzo axial máximo de compresión. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en modelos de cálculo propios.
- Figura 6.19:** Comparación entre un cuadrante de elipse y uno de circunferencia con momentos flectores iguales en los extremos y un mismo esfuerzo axial máximo de compresión en ambos. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.20:** Comparación entre el diagrama de momentos flectores en el plano de un cuadrante de elipse y de una circunferencia, y distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.21:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por tres arcos elípticos iguales con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.22** Excentricidad máxima de un arco compuesto por dos curvas tangentes con funciones distintas. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.23:** Cuadrante de anillo compuesto por dos arcos de elipses distintas y una circunferencia osculatriz. Dibujo realizado por el autor.
- Figura 6.24:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas alrededor de un rectángulo con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.
- Figura 6.25:** Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.

Figura 6.26a y 6.26b: División de un anillo compuesto según tramos equiexcéntricos con resultado distinto: excentricidad máxima mayor (arriba) y menor de todas las posibles (abajo). Dibujo realizado por el autor.

Figura 6.27: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto sólo por arcos de circunferencias distintas alrededor de un rectángulo con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos. Dibujo realizado por el autor a partir de los resultados obtenidos en un modelo de cálculo propio.

Figura 6.28: Comparación de la distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos en un anillo compuesto sólo por arcos de circunferencia (en línea continua) y en uno compuesto por dos arcos de elipses distintas y cuatro arcos de una misma circunferencia osculatriz (en línea de puntos). Dibujo realizado por el autor.

Anejo:

Figura A1: Representación de un anillo elíptico con su evoluta y una fuerza distribuida ideal.

Figura A2: Fuerza distribuida ideal en el plano de un cuadrante de elipse.

Figura A3: Deformada de un cuadrante de elipse con fuerza distribuida ideal aplicada.

Figura A4: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo circular con cuatro fuerzas iguales y equidistantes.

Figura A5: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo circular con ocho fuerzas iguales y equidistantes.

Figura A6: Diagrama de esfuerzos cortantes en el plano del cuadrante de un anillo circular con ocho fuerzas iguales y equidistante.

Figura A7: Deformada en el plano del cuadrante de un anillo circular con ocho fuerzas iguales y equidistantes.

Figura A8: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=2$ con distribución óptima de ocho fuerzas según tramos equiexcéntricos.

Figura A9: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=2$ con distribución óptima de doce fuerzas según tramos equiexcéntricos.

Figura A10: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=2$ con distribución óptima de dieciséis fuerzas según tramos equiexcéntricos.

Figura A11: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=4$ con distribución óptima de dieciséis fuerzas según tramos equiexcéntricos.

Figura A12: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por tres arcos de elipses iguales alrededor de un triángulo equilátero aplicando una distribución óptima de dieciocho fuerzas según tramos equiexcéntricos (no se representan radios sino barras auxiliares).

Figura A13: Representación de un cuadrante de anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias alrededor de un rectángulo.

Figura A14: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias alrededor de un rectángulo aplicando una distribución óptima de veinticuatro fuerzas según tramos equiexcéntricos.

Figura A15: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un compuesto por circunferencias distintas alrededor de un rectángulo aplicando una distribución óptima de veinticuatro fuerzas según tramos equiexcéntricos.

Figura A16: Representación de un anillo compuesto por arcos de dos elipses y dos circunferencias distintas alrededor de un segmento.

Figura A17: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por arcos de dos elipses y dos circunferencias distintas alrededor de un segmento aplicando una

distribución óptima de doce fuerzas según tramos equiexcéntricos (no se representan radios sino barras auxiliares).

Tablas:

Capítulo 2:

Tabla 2.1: Cronología de inventos, proyectos y obras con conoides tensados equilibrados con anillos rígidos. Realizada por el autor a partir de fuentes bibliográficas.

Tabla 2.2: Cronología de inventos proyectos y obras con ruedas tensadas equilibradas con anillos rígidos. Realizada por el autor a partir de fuentes bibliográficas.

Tabla 2.3: Cronología de inventos, proyectos y obras con cúpulas tensadas equilibradas con anillos rígidos. Realizada por el autor a partir de fuentes bibliográficas.

Tabla 2.4: Cronología de inventos, proyectos y obras con cubiertas neumáticas equilibradas con anillos rígidos. Realizada por el autor a partir de fuentes bibliográficas.

Tabla 2.5: Comparación de la esbeltez del anillo rígido de hormigón armado en el plano del anillo. Realizada por el autor a partir de fuentes bibliográficas.

Capítulo 5:

Tabla 5.1: Distribución ideal de fuerzas F en los vértices de un cuadrante de un polígono regular. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 5.2: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=1,33$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 5.3: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=1,50$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 5.4: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=2,00$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 5.5: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=3$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 5.6: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=4$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Capítulo 6:

Tabla 6.1: Coeficientes de distribución k_p y k_n para el cálculo de los momentos flectores máximos en el plano de un anillo circular en función del número de radios equidistantes. Realizada por el autor a partir de resultados de modelos propios.

Tabla 6.2: Razones de $L_{eq}/(\pi r/\sqrt{3})$ para un anillo sometido a la coacción de radios equidistantes de rigidez limitada. Adaptación de la tabla para una barra apoyada en un lecho elástico propuesta por Timoshenko para un anillo circular con coacción radial.

Tabla 6.3: Valores de k para el cálculo de la carga crítica de un arco circular doblemente empotrado de abertura φ . Realizada por el autor a partir de la ecuación de Timoshenko.

Tabla 6.4: Distribución óptima de fuerzas F en tramos equiexcéntricos de un cuadrante circular. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 6.5: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=1,33$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 6.6: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=1,5$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 6.7: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=2$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 6.8: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=3$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Tabla 6.9: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=4$. Realizada por el autor a partir de formulación propia.

Capítulo 7:

Tabla 7.1: Cuadro-resumen de resultados y objetivos alcanzados. Realizada por el autor.

NOTACIÓN

x, y	coordenadas cartesianas en el plano
l	longitud de lado
s	longitud de arco
P	perímetro, punto sobre una curva
a, b	semiejes mayor y menor de una elipse
k	relación entre semiejes de una elipse (a/b)
ε	excentricidad de una elipse
b_s	ancho de la sección resistente del anillo en el plano
θ, ω	ángulo o latitud polar o geocéntrica de un punto en una curva
ψ	ángulo o latitud reducida de un punto en una elipse
φ	ángulo o latitud geodésica de un punto en una curva
α	ángulo entre dos lados contiguos de un polígono
β	ángulo de inclinación de una recta respecto a la dirección horizontal
γ	ángulo entre radios de curvatura en los punto de tangencia
ζ	ángulo de orientación de una fuerza respecto a la dirección horizontal
A, B, D	dimensiones máximas de un anillo compuesto
m, n	pendiente y ordenada en el origen de una recta.
e_{max}	excentricidad máxima de un arco respecto a su cuerda
c	Curvatura
$c(x), c(\psi), c(\varphi)$	curvatura variable en función de x, ψ ó φ
r	radio de curvatura
$r(x), r(\psi), r(\varphi)$	radio de curvatura variable en función de x, ψ ó φ
F	carga o fuerza puntual en el plano del anillo
q	carga o fuerza distribuida en el plano del anillo
$q(x), q(\psi), q(\varphi)$	carga o fuerza distribuida variable en función de x, ψ ó φ
q_{cr}	carga o fuerza distribuida crítica de pandeo en el plano
N	esfuerzo axil, punto sobre una curva
N_{cr}	esfuerzo axil crítico de pandeo en el plano
M	momento flector en el plano, punto sobre una curva
k_p, k_n	coeficientes de distribución del momentos máximos positivo y negativo
V	esfuerzo cortante en el plano, vértice sobre la elipse
I	momento de inercia alrededor del eje transversal al plano del anillo
E	módulo de elasticidad longitudinal del anillo
A_r	área de la sección transversal del radio
E_r	módulo de elasticidad longitudinal del radio
l_{eq}	longitud equivalente de un arco elíptico
L_{eq}	longitud equivalente reducida de un arco elíptico
k_r	rigidez axil de un radio
β_r	módulo de coacción radial en un anillo
m, n	número de lados, vértices, ángulos o elementos repetidos en general

ÍNDICE GENERAL

Parte I: Planteamiento	21
Capítulo 1: Introducción.....	23
Apartado 1.1: Ecología.....	23
Apartado 1.2: Optimización a través del diseño	26
Apartado 1.3: Estructuras tensadas autónomas	28
Apartado 1.4: Objetivos, alcance y limitaciones de esta investigación	32
Capítulo 2: Estado de la Cuestión	33
Apartado 2.1: Cubiertas tensadas equilibradas con anillos rígidos.....	33
Apartado 2.2: Inventos, proyectos y obras	39
Apartado 2.3: El problema olvidado	59
Capítulo 3: Metodología.....	65
Apartado 3.1: Estrategias	65
Apartado 3.2: Procedimientos	66
Apartado 3.3: Fuentes	68
Parte II: Desarrollo	71
Capítulo 4: Anillos rígidos con membrana tensada	73
Apartado 4.1: Apuntes previos.....	73
Apartado 4.2: Fuerza distribuida ideal	76
Apartado 4.3: Condiciones de combinación de arcos	81
Apartado 4.4: Composición alrededor de un segmento	83
Apartado 4.5: Composición alrededor de polígonos regulares	93
Apartado 4.6: Composición alrededor de polígonos irregulares.....	101
Capítulo 5: Polígonos rígidos con radios tensados.....	107
Apartado 5.1: Distribución ideal de fuerzas sobre los vértices	107
Apartado 5.2: Polígonos rígidos de base elíptica	109
Apartado 5.3: Polígonos rígidos de base compuesta.....	121
Capítulo 6: Anillos rígidos con radios tensados.....	133
Apartado 6.1: Anillos circulares con radios isotensos y equidistantes	133
Apartado 6.2: Distribución óptima de radios tensados en anillos elípticos	140
Apartado 6.3: Distribución óptima de radios tensados en anillos compuestos	161
Parte III: Conclusión	171
Capítulo 7: Conclusiones	173
Apartado 7.1: Resultados y objetivos alcanzados	173
Apartado 7.2: Aplicaciones	179
Apartado 7.3: Líneas de continuidad para investigaciones futuras.....	180
Anejos.....	183
Bibliografía.....	185
Modelos de cálculo.....	189

PARTE I: PLANTEAMIENTO

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Donde se explican las razones que motivan esta investigación, además de los objetivos, alcances y limitaciones.

Apartado 1.1: Ecología

i) Cultura de lo efímero

Un año después del maremoto que el 11 de marzo de 2011 arrasó una parte importante de la costa nororiental de Honshu, la principal isla del archipiélago de Japón, Toyo Ito decía en una entrevista: “*Ustedes vienen de la piedra, nosotros de la madera*” (MILLÁS 2012). Hablaba sobre la cultura de lo efímero, en este caso, referida a la arquitectura y a las tareas de reconstrucción después de la catástrofe, pero también aplicable a otros ámbitos de la vida. Esa cultura parece estar más arraigada en Japón que en la mayoría de los países, al menos de los desarrollados¹.

Algunos de los templos más famosos de Japón son estructuras de madera reconstruidas total o parcialmente, a veces en más de una ocasión, después de haber sufrido terremotos, incendios o bombardeos. Eso no les quita valor histórico. Simplemente es un hecho más de la historia. Está asumido que no se construyeron para durar eternamente. Por lo menos, no la construcción original. Tanto es así, que de los edificios que forman el complejo del Gran Santuario de Ise, el de más importancia del sintoísmo, situado en la península del mismo nombre, en la costa central del oeste de Honshu, cada veinte años se construye una copia casi idéntica² en un terreno contiguo y después se desmantelan los que hasta entonces estaban en pie, según una tradición que empezó hace trece siglos. Según una creencia sintoísta, la naturaleza se renueva siguiendo ciclos que se repiten cada veinte años, así que la reconstrucción del santuario según el mismo ritmo permite mantenerlo siempre renovado y en buen estado, porque el concepto de nuevo se asocia al de pureza. La madera utilizada en cada reconstrucción se ha de extraer, según la tradición, de los bosques de cipreses que crecen en la misma zona, haciendo de éstos una explotación sostenible. La madera resultante de desmantelar los “viejos” edificios adquiere un carácter sagrado y se utiliza para reparar o renovar elementos dañados de otras construcciones sintoístas del país. De esta manera se reutilizan piezas de segunda y hasta tercera puesta (VEGAS 2003: 24), alargando su vida útil según lo que ahora se entiende como reciclado.

Sin entrar en los argumentos religiosos que puedan motivar esta renovación cíclica de las construcciones de este santuario, está claro que también existe una conciencia ecológica que ha permitido respetar y mantener el entorno natural y sus beneficios asociados, haciéndolo compatible con las intervenciones humanas.

Se tiende a creer que la madera es perecedera porque es un material orgánico, mientras que los materiales pétreos son eternos porque son inorgánicos. Según este argumento, si se quisiese levantar una construcción que durase eternamente, se tendría que hacer con piedra y

¹ Se hace esta distinción porque en muchos países, especialmente y por desgracia en los menos desarrollados, existe la cultura de lo precario, que también reconoce que las cosas no son eternas, pero que además tiene todas las connotaciones negativas que se puedan imaginar: provisionalidad, inseguridad, inestabilidad, pobreza, etc. La cultura de lo efímero no tiene nada que ver con éstas.

² La copia no es idéntica ya que, por ejemplo, en las últimas reconstrucciones se han introducido algunos clavos de hierro, mientras que en las construcciones anteriores sólo se utilizaban tacos y pasadores de madera (VEGAS 2003: 23).

no con madera. Sin embargo, se conservan construcciones originales de madera muy antiguas, algunas de ellas en Japón, que no han sufrido apenas deterioro y, en cambio, algunas construcciones pétreas más recientes tienen graves problemas de conservación.

Basta oír el cuento de *Los tres cerditos* para ver que las construcciones de piedra siempre han tenido fama de ser más seguras que las de cualquier otro material, como si de refugiarse del lobo se tratara. Ahora se sabe que, frente a amenazas análogas pero reales como el viento, los terremotos o el fuego, las construcciones de materiales no pétreos pueden ser tan seguras como las de piedra, o incluso más en algunos aspectos. No se trata sólo de que las construcciones sobrevivan a la catástrofe, sino de que lo hagan especialmente sus ocupantes.

Construir algo para que dure eternamente es una aspiración, pero no se basa en una necesidad real, porque, ¿cómo se puede predecir que una necesidad seguirá existiendo en un futuro lejano? ¿Durante cuánto tiempo? Una necesidad puede evolucionar o incluso desaparecer con el paso del tiempo, así que sería suficiente que una construcción fuera tan duradera como la necesidad que la hubiera justificado. Si la necesidad acaba, la construcción podría desaparecer. Si la necesidad evoluciona, se podría transformar la construcción para adaptarse a ella.

Cuando el coste de los recursos consumidos para levantar una construcción es muy alto, se necesita mucho tiempo de amortización, así que la misma construcción no debería estar ligada a necesidades de menos duración. Sin embargo muchas veces lo está. Es posible que esto sea debido a la aspiración de construir cosas que duren eternamente, puesta por delante de la necesidad real, muy humano por otra parte. Aunque, como se ha visto en el caso del Gran Santuario de Ise, no es necesario que la construcción original dure eternamente para que su esencia se conserve renovada a lo largo de los siglos.

ii) Técnica para ahorrar

Probablemente, en el caso del Santuario de Ise, el coste de los recursos consumidos haya ido reduciéndose en las sucesivas reconstrucciones realizadas a lo largo de los siglos porque, cuando un proceso se repite a lo largo del tiempo, se somete a sucesivos análisis con objeto de poder reducir el trabajo necesario para las sucesivas repeticiones. A partir del esfuerzo intelectual realizado en el análisis y en la posterior planificación de los trabajos de reconstrucción surge la técnica³, definida como el esfuerzo para ahorrar esfuerzo (ORTEGA Y GASSET 1933: 42).

Antiguamente, el problema de la construcción era el trabajo (fuerza bruta) necesario para obtener, transformar, transportar y colocar el material en la obra; no la cantidad de material en sí misma, ya que la naturaleza parecía proporcionar recursos inagotables. La ambición de los trabajos fue aumentando progresivamente a medida que el esfuerzo físico iba dejando de ser un problema.

Actualmente, la técnica se ocupa básicamente de reducir el trabajo de obtención, transformación, transporte y puesta en obra para que suponga un esfuerzo físico mínimo para el hombre, pero esa reducción ha incrementado el coste energético en proporción inversa. Como, desde que se inició la revolución industrial hace tres siglos, la producción de energía

³ También se refiere a la tecnología, que es la ciencia aplicada a la técnica.

se realiza principalmente mediante la quema de combustibles fósiles, de la que resulta una gran cantidad de gases contaminantes, y no existe por ahora una fuente alternativa capaz de igualar la producción necesaria para alimentar toda la técnica puesta en marcha para ahorrar esfuerzo, sin considerar los efectos negativos que tiene la obtención de la mayoría de los recursos materiales utilizados en la construcción y la propia obtención de energía, se ha iniciado hace ya tiempo un proceso insostenible, es decir, que los daños causados durante la obtención del material y la energía utilizados en la construcción, en general, no son reparados ni repuestos por otros procesos, sino que se acumulan con el paso del tiempo. En esto, como en otros procesos realizados por el hombre que consumen material y energía, hay excepciones. La construcción con madera obtenida de explotaciones forestales renovables es un ejemplo claro, porque su producción consigue eliminar más CO₂ de la atmósfera del que resulta de su transporte, manipulación y puesta en obra, y el recurso material es renovado mediante reforestaciones cíclicas.

Ahora bien, en general, los materiales utilizados en la construcción no se obtienen de fuentes renovables y el balance de generación de gases contaminantes como el CO₂, resultantes de la producción de energía necesaria para la obtención, transformación, transporte y puesta en obra del material, es positivo, es decir, se genera mucho más CO₂ del que se elimina, porque en muchos casos no se consigue eliminar nada⁴. Entonces, como hoy en día no es posible atender toda la demanda de construcción mediante materiales procedentes de fuentes renovables como la madera, es necesario reducir el consumo de material y de energía mediante la eliminación de necesidades superfluas, la optimización de los procesos de obtención, transporte, transformación y puesta en obra del material, y la optimización del diseño.

Cuando se optimiza un proceso o un diseño se dice que se vuelve eficiente, pero, al contrario que la eficacia, que mide la cantidad de objetivos alcanzados sin importar la cantidad de recursos consumidos, la medida de la eficiencia no es absoluta, sino relativa a otros procesos o diseños de los que se obtengan las mismas prestaciones, en función de los recursos que se hayan consumido.

$$Eficiencia = \frac{prestaciones}{recursos}$$

Si las prestaciones son los resultados positivos obtenidos de un proceso, en este caso, la construcción, y los recursos son el conjunto de materiales y energía consumidos durante el proceso, cuanto menor sea este consumo respecto a las prestaciones, mayor será la eficiencia. Si en cambio se considera sólo el material consumido, se obtiene la eficiencia material. Si en el denominador se contemplan sólo la energía consumida, se obtiene la eficiencia energética⁵. Si se sustituyen los recursos energéticos por los residuos resultantes de la producción de esa energía, es decir, el CO₂, se obtiene una suerte de eficiencia medioambiental.

Esta misma relación ha sido utilizada para considerar la ligereza de la estructura, colocando en el numerador su capacidad de carga, como una prestación, y en el denominador su peso propio, como un recurso (CAPASSO 1993: 31). Si el resultado es mayor que la unidad, la estructura se puede considerar ligera, y si es mayor, pesada (figura 1.1).

⁴ Por ejemplo: 31,45 KgCO₂/Kg de Aluminio, 2,80000 KgCO₂/Kg de Acero laminado, 0,41122 KgCO₂/Kg de cemento, 0,21851 KgCO₂/Kg de hormigón o 0,21619 KgCO₂/Kg de terrazo, según el criterio de Componente Básico Material (MERCADER 2012: 411).

⁵ Referida al propio proceso de construcción, no al de explotación.

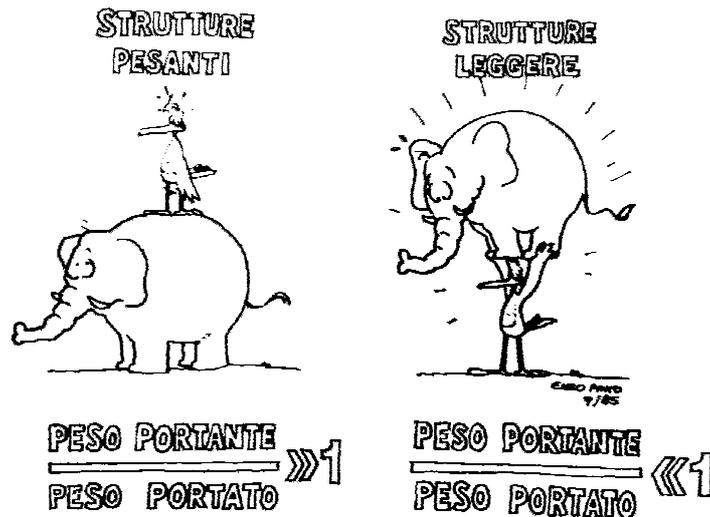


Figura 1.1: “La leggerezza in Architettura” de Vincenzo Pinto⁶.

La técnica, que antes se ha definido como el esfuerzo (intelectual) para ahorrar esfuerzo (físico), puede definirse también como el esfuerzo para ahorrar energía y material. De hecho, el ahorro de material casi siempre supone ahorro de energía para obtenerlo, manipularlo, transportarlo y colocarlo en obra. En general, este ahorro de energía es proporcional al de material, aunque como en todo hay excepciones: si el material se extrae y se transforma en el mismo lugar de la obra, no requiere ser transportado; si es reaprovechado de otra obra, requiere una transformación menor o incluso nula, dependiendo de si lo que se reaprovecha es el material en sí mismo o un elemento constructivo íntegro. Además, no todos los materiales necesitan la misma energía para su transformación, como tampoco tienen las mismas prestaciones⁷.

Esta investigación trata, entre otras cosas, sobre la búsqueda de técnicas para el ahorro de material en la construcción de estructuras con objeto de hacerlas más eficientes, seguro al menos desde el punto de vista material.

Apartado 1.2: Optimización a través del diseño

El dimensionado de las estructuras depende de la cantidad y de la calidad de los esfuerzos que tienen que resistir. La cantidad depende a su vez del valor de las cargas y de las dimensiones de la estructura, *a priori* factores predeterminados, ajenos al control de proyectista de la estructura. En cambio, la calidad depende directamente del diseño, y se refiere a la incidencia relativa que tienen estos esfuerzos en el dimensionado de los elementos estructurales. En otras palabras, la calidad de los esfuerzos es inversamente proporcional a los requisitos implícitos en el dimensionado de los elementos de una estructura sometida a un determinado estado de cargas.

⁶ En las fórmulas que aparecen en esta caricatura se ha invertido la relación, es decir, el peso propio aparece en el numerador y la capacidad de carga en el denominador.

⁷ En este caso las prestaciones se refieren a propiedades físicas positivas de un determinado material, como por ejemplo la resistencia o la isotropía, que se pueden utilizar en beneficio de la construcción.

Así, para resistir un esfuerzo de tracción, como es estabilizante, es decir, que tiende a alinear la directriz de un elemento estructural con la dirección del esfuerzo, sólo se necesita una sección con una cantidad determinada de material (área); mientras que para resistir flexión, compresión, o una combinación de ambos esfuerzos a la vez, como directa o indirectamente tienden a desviar la directriz del elemento de su posición original, es necesario que además la cantidad de material (área) se organice de una determinada manera en la sección (inercia) para que se oponga a esa desviación, y se reduzca la esbeltez del elemento referida a su dimensión entre dos puntos fijos o de desplazamiento limitado. Entonces, como la inercia de una sección se incrementa a media que se aleja el área de su centro de gravedad, si se aleja demasiado, la propia sección se vuelve esbelta y, por tanto, inestable, así que se necesita también incrementar su área. Por eso, más inercia suele suponer también más cantidad de material.

Para demostrar este argumento, se compara un cable tendido entre dos puntos con un arco sometido a las mismas cargas, con la misma luz y flecha, pero de trazado inverso. El dimensionado de la sección del cable sólo depende del valor del esfuerzo axial y de la resistencia del material, mientras que el dimensionado de la sección del arco depende también de los fenómenos de inestabilidad derivados de su esbeltez, dependiente a su vez de la relación entre su longitud y la geometría de su sección resistente. Además, como el cable no tiene ninguna rigidez a flexión, cualquier variación de la distribución de las cargas modifica su trazado, adaptándolo al del recorrido de las fuerzas hasta los anclajes, mientras que la misma variación de cargas sobre el arco, como es un elemento rígido que no puede adaptar su trazado, provoca momentos flectores, lo cual empeora aún más sus condiciones iniciales de dimensionado.

A través del diseño se pueden mejorar las condiciones de dimensionado de una estructura, mejorando la calidad de sus esfuerzos y permitiendo así que la estructura pueda ser optimizada. Las condiciones del cable siempre serán mejores, pero si se consigue arriostrar suficientemente el arco para reducir su esbeltez sin tener que aumentar su inercia, se evitará que los fenómenos de inestabilidad gobiernen su dimensionado. También, si se define su trazado para que coincida con el recorrido de las cargas dominantes hasta los apoyos, los esfuerzos de flexión se reducirán sólo a los debidos a las variaciones de las sobrecargas. Esto haría que el dimensionado de la sección resistente del arco se aproximase al del cable.

Además, para optimizar cualquier estructura formada por elementos o tramos repetidos, se intenta que las condiciones de un tramo no sean muy diferentes a las del resto, o lo que es lo mismo, que las condiciones de todos sean iguales. Un ejemplo típico de esto es el de la viga continua, en la que se intenta disponer los apoyos de tal manera que se igualen los valores de los momentos flectores en cada tramo. Incluso a veces se considera la redistribución plástica para igualar momentos negativos con los positivos. De este modo se puede dimensionar la viga para que una sola sección tenga el mismo ratio de aprovechamiento en todos los tramos.

Así entendido, el diseño tiene que servirse del cálculo para controlar los parámetros que definen las condiciones óptimas en el dimensionado. El “diseño calculado” anticipa la eficiencia de la estructura. En definitiva, se trata de encontrar aquel diseño que más se aproxime a uno ideal para una determinada distribución de cargas, en el que el volumen de la estructura sea mínimo⁸ porque todas sus barras sólo han de resistir esfuerzos axiales de tracción o de compresión, y ninguna de las que están comprimidas está penalizada en su dimensionado por el pandeo (QUINTAS-RIPOLL 1988: 59).

⁸ El volumen mínimo se refiere a la menor cantidad de material posible.

Apartado 1.3: Estructuras tensadas autónomas

i) Equilibrio de fuerzas internas

Para obtener la máxima eficiencia, las técnicas para ahorrar material a través del “diseño calculado” se deberían aplicar a las estructuras que *a priori* se consideran las más ligeras de todos los tipos que existen en la actualidad: las de cables y membranas tensadas⁹.

Muchas de estas estructuras no equilibran internamente las reacciones de tracción generadas por el estado de tensión que necesitan para mantener una geometría estable, sino que requieren enlaces externos para absorberlas. Si estos enlaces se sitúan en un plano distinto de donde se generan las propias reacciones, además aparecen unos momentos en la base proporcionales a la altura de los soportes.

Si las reacciones de la tensión interna son absorbidas mediante unos soportes empotrados en la base (figura 1.2), éstos suelen necesitar unas secciones resistentes considerables. Como los momentos flectores se transmiten directamente al terreno, para evitar el vuelco se precisan también grandes cimentaciones. Además, como la reacción vertical suele ser bastante más pequeña que la horizontal, para evitar el deslizamiento se necesita que el peso del cemento sea superior al cociente de la reacción horizontal entre el coeficiente de rozamiento cemento-terreno o, incluso a veces, acuñar la cara inferior del cemento. Todo esto hace aumentar el peso global de la estructura y, por tanto, descender su eficiencia material.

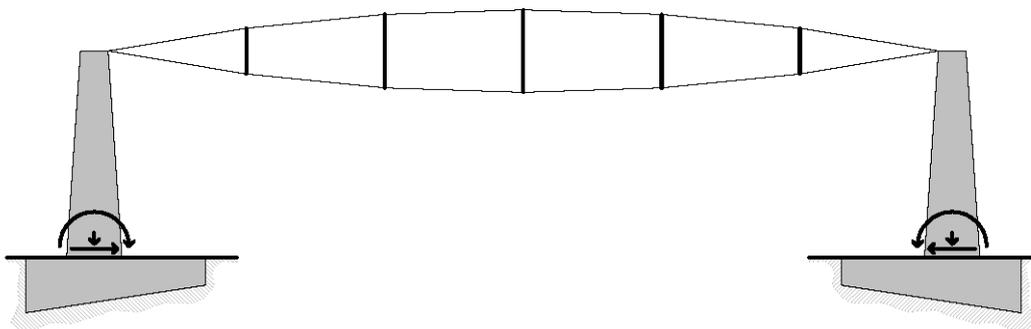


Figura 1.2: Absorción de reacciones de tensado mediante soportes empotrados en la base (en línea gruesa las acciones sobre el cemento).

Si esas mismas reacciones son absorbidas mediante un atirantado de los soportes desde el plano de cubierta hasta el suelo (figura 1.3), el momento que aparecía antes en la base se descompone ahora en un par de fuerzas de tracción-compresión, cuyo valor está en función de la separación entre ellas en el plano del suelo. Cuanto mayor es esta separación entre la base del soporte y la del tirante, menor son las reacciones resultantes de la descomposición del momento, pero mayor es el espacio que queda afectado alrededor de la estructura. Además, cuando el terreno no tiene una resistencia suficiente para absorber directamente la reacción del par de tracción por rozamiento, se necesitan contrapesos en su cimentación para conseguir equilibrarla, lo que también hace aumentar el peso global y descender su eficiencia.

⁹ Dentro de este tipo de estructuras también se incluyen las neumáticas o hinchadas, ya que su elemento principal no deja de ser una membrana tensada por el efecto de la presión del aire que encierra.

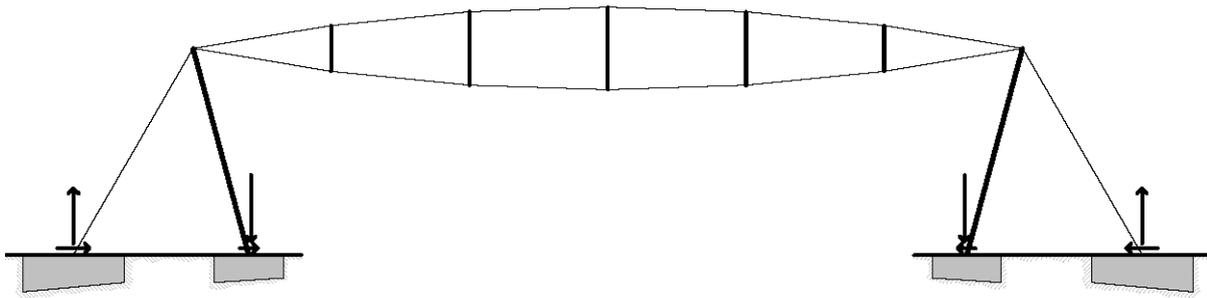


Figura 1.3: Absorción de reacciones de tensado mediante soportes atirantados (en línea gruesa las acciones sobre el cimentado).

Por el contrario, las estructuras tensadas autónomas son las que absorben las reacciones debidas a la tensión interna mediante elementos rígidos equilibrantes que, en la mayoría de los casos, se sitúan en el mismo plano donde se producen esas reacciones (figura 1.4). Son las más eficientes desde el punto de vista material porque son las más ligeras, ya que están formadas sobre todo por elementos tensados, o sea, a tracción pura, combinados con un mínimo número de elementos rígidos a compresión y/o flexión, que garantizan su estabilidad y autonomía mediante la absorción de las reacciones resultantes de su estado tensional interno.

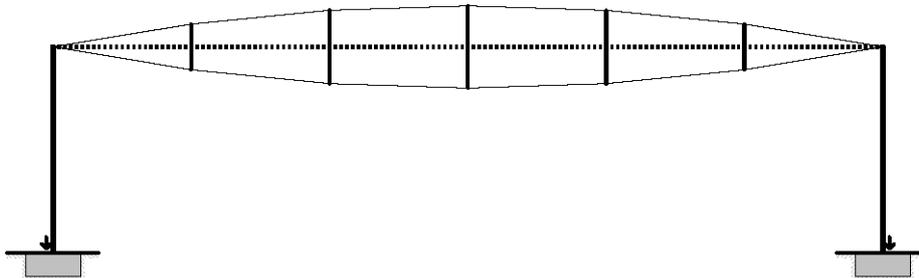


Figura 1.4: Absorción de reacciones de tensado mediante un elemento rígido equilibrante (en línea gruesa de puntos).

Estas estructuras son internamente hiperestáticas, pero externamente isostáticas, mientras que las anteriores trasladan fuera su hiperestatismo a través de los enlaces con el exterior. Por eso también se dice que las estructuras tensadas autónomas podrían ser estables en un espacio sin gravedad, mientras que las otras no.

Entonces, según los criterios expuestos en el apartado anterior, el diseño y optimización de las estructuras tensadas autónomas con objeto de ser más eficientes, es decir, más ligeras, depende sobre todo de sus elementos rígidos, por ser donde se concentra la mayor parte del gasto de material¹⁰, ya que están afectados por la compresión y la flexión provocada por la interacción con los elementos tensados, y la que deriva de los fenómenos de inestabilidad en

¹⁰ Sin embargo, como se explica en el siguiente capítulo, la mayoría de las investigaciones acerca del diseño y optimización de estas estructuras se centra en el trazado de los elementos tensados, lo que es llamado *form finding*, dejando en un segundo término el problema de la optimización del comportamiento de sus elementos rígidos.

segundo orden, típicos de los elementos esbeltos comprimidos; por el contrario, el dimensionado de los tensados es función directa del valor de la tracción que tienen que soportar.

Los elementos rígidos más eficientes son los que están afectados principalmente por la compresión y no por la flexión, ya que, si no son lo suficientemente esbeltos como para sufrir fenómenos de pandeo, el mayor condicionante de su dimensionado es la resistencia del material.

Los elementos rígidos equilibrantes reciben directamente las reacciones de los elementos tensados en todo el perímetro de la estructura y las anulan formando un circuito cerrado de fuerzas. Estos elementos normalmente forman contornos lineales cerrados tales como marcos o anillos rígidos. Los marcos rígidos trabajan principalmente a flexión, pero también a compresión. Los anillos trabajan a compresión, pero, si su geometría no coincide con la del funicular de cargas resultante de una determinada distribución de fuerzas provenientes de los elementos tensados, además tienen que soportar las flexiones resultantes del producto del esfuerzo axial de compresión por la distancia entre el funicular de cargas y el eje del anillo en cada punto. Muchas veces este problema se resuelve incrementando exageradamente su sección en la dirección paralela al plano del anillo, de manera que dentro del anillo se pueda inscribir casi cualquier funicular de cargas, igual que sucede en los arcos diafragmáticos.

ii) Anillos circulares

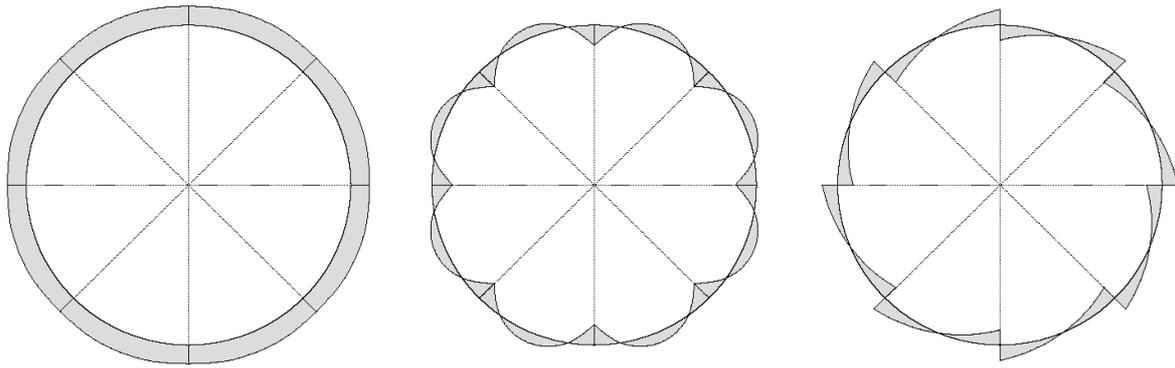
La mayoría de las estructuras tensadas autónomas que se sirven de anillos rígidos de compresión como elementos equilibrantes tienen una distribución radial o centrípeta de sus fuerzas internas. *A priori*, la geometría del anillo más adecuada para esta distribución parece que es la circular.

En este caso, si el elemento tensado es una membrana, basta con que la reacción sobre el anillo sea constante para que éste tenga unas condiciones óptimas de dimensionado¹¹, considerándose de hecho un diseño ideal, ya que su único elemento rígido está solicitado sólo por un esfuerzo axial de compresión constante en todo el perímetro y, por efecto de la coacción radial de la membrana¹², tiene limitado, si no completamente impedido, el pandeo en su propio plano.

Los ruedas circulares con radios tensados, conocidas como ruedas de bicicleta, le siguen en eficiencia a las anteriores, porque, en su estado ideal de cargas, el anillo rígido exterior está sometido a los mismos esfuerzos de compresión, de flexión y de cortante en cada tramo, y, como todos tienen la misma longitud, también tienen las mismas condiciones de pandeo su propio plano.

¹¹ Atendiendo sólo a los efectos de la carga en su propio plano.

¹² El efecto de la coacción radial de los elementos tensados sobre el anillo se explica en el capítulo 5 de esta tesis.



Figuras 1.5a; 1.5b y 1.5c: Diagramas de esfuerzos axiales, momentos flectores y cortantes en el plano del anillo rígido de una rueda circular de radios isotensos¹³ y equidistantes.

El diseño de estas ruedas está controlado por tres parámetros: la disposición de los radios (orientación y separación), su fuerza relativa, y la curvatura del anillo. Cuando los radios son equidistantes e isotensos, en el anillo se puede inscribir un polígono regular de fuerzas en el que el axil de compresión sería constante en todos sus lados. El valor de esta compresión sería igual al que se produce en el punto medio de cada tramo de circunferencia, donde la recta tangente es paralela a la cuerda del arco (figura 1.5a).

Como la curvatura es constante, la variación de excentricidad entre los puntos de este polígono y el anillo circular se repite igual en cada tramo entre radios. Esta excentricidad es cero en los vértices del polígono y máxima en el centro de los lados. Como el recorrido lógico de las cargas sería el polígono y el trazado del anillo es circular, aparecen momentos flectores, producto del esfuerzo axil y la excentricidad en cada punto, es decir, entre la cuerda y el arco de cada tramo (figura 1.5b). Cada fuerza radial genera un esfuerzo cortante máximo igual a la mitad de su valor (figura 1.5c). Así es como los diagramas de esfuerzos axiales, momentos flectores y cortantes se repiten idénticos en todos los tramos.

Los esfuerzos asociados a las tensiones normales (axiales y momentos flectores) son los que, en general, más condicionan el dimensionado del anillo.

iii) El problema de la elipse y de los anillos no circulares en general

Lo que es relativamente sencillo de intuir de una rueda formada por una membrana o por unos radios tensados sobre un anillo rígido de planta circular se vuelve un problema más complejo si el anillo es elíptico, porque su curvatura es variable, es decir, que el radio de curvatura y la posición de su centro son diferentes en cada punto del anillo¹⁴. Así, para tener las mismas condiciones de dimensionado en todo el perímetro no es suficiente con que la tensión de la membrana sea constante, que los radios sean equidistantes o que tengan el mismo valor de tracción.

¹³ Del mismo modo que en las estructuras formadas mayoritariamente por elementos traccionados está comúnmente admitido el término “tensadas”, en esta investigación se admite que los radios que tengan el mismo esfuerzo de tracción sean llamados “isotensos” en vez de “isotraccionados”.

¹⁴ Los centros de radios de curvatura de todos los puntos de la elipse se encuentran en su curva evoluta, que tiene forma de astroide.

Entonces, ¿cómo obtener la ley de fuerzas distribuidas en el plano de la que resulte un esfuerzo axial constante en todo el perímetro cuando se trata de ruedas de membrana tensada? ¿Cómo encontrar la disposición ideal de fuerzas sobre la elipse de la que resulten las mejores condiciones de dimensionado cuando la rueda está hecha de radios tensados? Es decir, ¿cómo hacer para que el comportamiento del anillo elíptico se parezca al del anillo circular?

Está claro que los parámetros que permiten deducir fácilmente el diseño óptimo de una rueda de elementos tensados sobre un anillo circular no son suficientes cuando es elíptico, ya que la curvatura variable añade un grado de complejidad que lo impide.

En el caso de las ruedas de membrana tensada, si se consiguiese variar el valor de la reacción continua de la membrana para que la relación entre carga y curvatura se mantuviese constante a lo largo de todo el perímetro, las condiciones de dimensionado de un anillo rígido de planta elíptica, teniendo en cuenta sólo los efectos en el plano, serían idénticas a las de un anillo de planta circular.

En el caso de las ruedas de radios tensados, un anillo rígido de planta elíptica también tendría un comportamiento similar al circular si en él se pudiese inscribir un polígono tal que de la descomposición de las fuerzas radiales en sus vértices resultaran esfuerzos axiales iguales en todos los lados, siempre que estos lados además tuvieran una longitud parecida y dividiesen el anillo en tramos con la misma excentricidad máxima cuerda-arco. Entonces los diagramas de esfuerzos axiales y flectores de cada tramo del anillo entre radios serían idénticos y sus condiciones de dimensionado se aproximarían a las de un anillo de planta circular.

Si además se consiguiera combinar arcos de circunferencia y de elipse hasta componer un anillo cerrado de tal manera que hubiese continuidad de la curvatura en los puntos de tangencia, sería suficiente con sincronizar la distribución de fuerzas radiales sobre dos arcos contiguos para que todos los arcos que formasen el anillo tuvieran las mismas condiciones de dimensionado.

Apartado 1.4: Objetivos, alcance y limitaciones de esta investigación

Esta investigación trata sobre la búsqueda de un sistema de diseño de anillos de compresión no circulares y de la distribución de fuerzas en el plano, procedentes de membranas o radios tensados, para que las condiciones de dimensionado de su sección resistente sean óptimas.

No son objeto de esta investigación los fenómenos ocurridos fuera del plano del anillo, tales como el alabeo, el cortante o la torsión, provocadas por las fuerzas no contenidas en el plano, ya que éstos dependen de otros factores, como son la disposición de los apoyos en planta o el ángulo de incidencia de los elementos tensados, que no han sido contemplados ahora. Así, la consideración únicamente de los efectos en el plano, no pretende ser una simplificación, sino el punto de partida para la resolución de un problema más amplio. Por esa misma razón, tampoco son objeto de investigación en esta tesis los efectos de las acciones variables, dentro y fuera del plano anillo, porque, además de depender en buena parte de la forma de la estructura en sección, ajena al propio anillo, no son factores que definan *a priori* el comportamiento mecánico de la estructura, como sí lo es el equilibrio de las fuerzas internas debidas al pretensado¹⁵.

¹⁵ Esta consideración afirma que las fuerzas de pretensado y su equilibrio forman parte intrínseca de la misma definición de una estructura tensada, antes incluso de que actúen sobre ella fuerzas externas.

CAPÍTULO 2: ESTADO DE LA CUESTIÓN

Donde se definen los tipos de cubiertas de cables y membranas tensadas equilibradas con anillos rígidos, se revisan los principales inventos, proyectos y obras realizadas referentes a esos tipos, y se exponen los puntos de partida con respecto a los trabajos y líneas de investigación más recientes.

Apartado 2.1: Cubiertas tensadas equilibradas con anillos rígidos

Para situar el objeto de investigación, los anillos de compresión, en su contexto físico, las cubiertas tensadas autónomas, se recurre a una clasificación de las múltiples existentes cuyo criterio se refiere a la forma que adoptan los elementos tensados (cables y membranas) dentro del anillo. Este criterio es aplicable a las estructuras de “forma activa” en general, es decir, aquellas en las que la resistencia y estabilidad depende de que su geometría coincida con el recorrido de las cargas, que son capaces de transmitir sin recurrir a la flexión ni al cortante (ENGEL 2001:57).

Se ha elaborado una definición propia de cada tipo a partir de la descripción del proceso de generación de la forma.

i) Conoides

Se puede formar una carpa tendiendo una membrana alrededor de un poste alto. Si la membrana está compuesta por gajos de tres caras, dos de ellas convexas respecto al interior, resulta una superficie llamada conoide o paraboloides de revolución. Se trata de una superficie de doble curvatura inversa que permite ser tensada sin perder su geometría. Para mantener la membrana en tensión es necesario que esté anclada en el perímetro. Las fuerzas que reciben estos anclajes perimetrales son de tracción y tienen una componente vertical, hacia arriba, y otra horizontal, hacia el centro.

Alrededor de dos o más postes altos alineados sobre un eje se puede tender una membrana formada por dos mitades de conoide y dos tramos de curvatura simple. Disponiendo un anillo de tracción sobre tres o más postes altos colocados en círculo se puede tensar una membrana con forma de tronco de conoide.

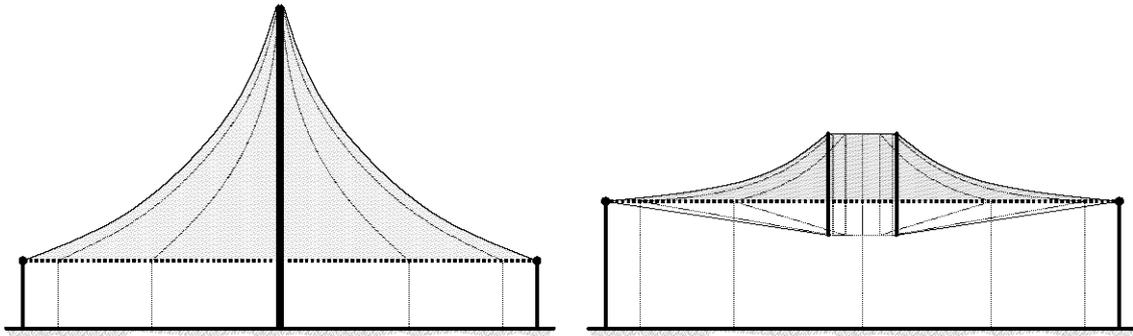
Si el perímetro del conoide se sitúa en un plano por encima del suelo, pueden disponerse unos vientos que trasladen las reacciones de la membrana hasta el suelo. Las resultantes de estos vientos tienen que estar orientadas según el ángulo que forma la membrana en el perímetro el plano horizontal, es decir, hacia abajo y hacia fuera.

Para liberar el espacio ocupado por los vientos oblicuos y simplificar los anclajes al suelo, dejándolos sólo con una componente vertical, se puede disponer un elemento en forma de anillo rígido que absorba la componente horizontal de la reacción de la membrana en el mismo plano donde se genera (figura 2.1a). Con suerte, el peso del anillo rígido también consigue anular la reacción vertical debida a la tensión interna de la membrana¹⁶.

¹⁶ Aun así, para mantener la estabilidad de la carpa frente a cualquier acción horizontal externa, si los soportes del anillo rígido no están empotrados en la base, se suelen disponer vientos en “V”, aunque de mucha menor entidad que los que se necesitarían para equilibrar el tensado de la membrana, que fijan la posición del anillo con respecto a la de los postes que soportan el conoide.

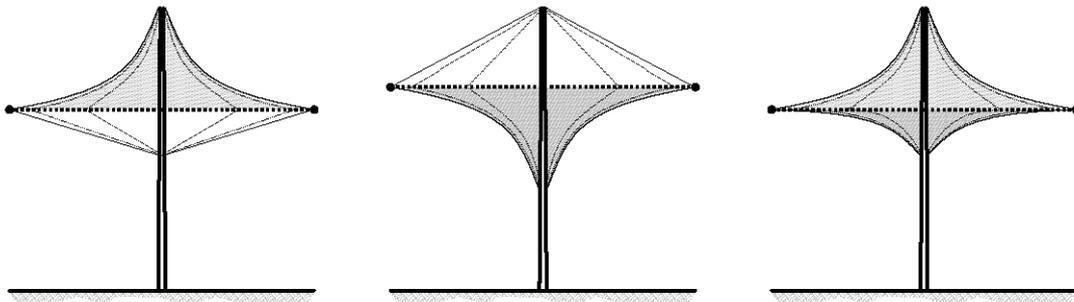
A veces, incluso en conoides tensados que tengan su base en el plano del suelo, también se dispone un anillo rígido para evitar la componente horizontal de la fuerza de los anclajes y así poder simplificar notablemente la cimentación.

Se puede liberar apoyo de los postes altos interiores sustituyéndolos por una serie de tensores de suspensión que se entreguen contra un anillo tracción por debajo del conoide (figura 2.1b).



Figuras 2.1a y 2.1b: Carpas con conoides tensados equilibrados en el perímetro mediante anillos rígidos (en línea gruesa de puntos).

Se puede construir un paraguas con conoides tensados soportados mediante un poste central empotrado en la base. En este caso, el anillo que equilibra las reacciones queda suspendido del propio conoide y estabilizado horizontalmente mediante vientos radiales (figura 2.2a) o a la inversa, o sea, suspendido mediante vientos y estabilizado mediante un conoide tensado en posición invertida (figura 2.2b). También es posible componer un paraguas con dos conoides, uno de suspensión y otro de estabilización (figura 2.2c).



Figuras 2.2a 2.2b y 2.2c: Paraguas con conoides tensados equilibrados en el perímetro mediante anillos rígidos (en línea gruesa de puntos).

Cuando un conoide de revolución tiene el eje inclinado, su base es no circular sino elíptica, y el diseño y dimensionamiento del anillo se vuelven complejos, ya que, para evitar que tenga que soportar esfuerzos de flexión, se necesita que la relación entre la reacción horizontal del pretensado de la membrana y la curvatura del anillo se mantenga constante en todo el perímetro.

Cuando el eje del conoide está descentrado respecto borde, aunque éste sea circular, las reacciones debidas al pretensado ya no son uniformes y aparecen flexiones en el anillo.

Sustituyendo el apoyo puntual en el interior de la membrana por uno lineal en forma de arco, resulta una variante similar al conoide formada por la intersección de dos paraboloides. Incluso si la planta es circular, se presenta una dificultad añadida, ya que, al sustituir la distribución radial de las tensiones de la membrana por una con dos direcciones principales diferenciadas, una paralela y otra perpendicular al plano del arco, las reacciones sobre el anillo dejan de ser uniformes. Además, el mismo anillo está sometido también al empuje del arco, nada despreciable comparado con las reacciones de la membrana. Por estos motivos, los anillos de este tipo de cubierta están excluidos de esta investigación.

ii) Ruedas de radios tensados

La rueda de radios tensados consiste en un anillo rígido sometido a la acción del tensado de unos radios delgados¹⁷ equidistantes que convergen en un eje. Para deformar el anillo en su propio plano, no sólo es necesario vencer la rigidez a flexión que le confiere su sección resistente, sino que también se tiene que vencer la rigidez del sistema de radios delgados, por la sobretensión de unos y distensión de otros¹⁸. Esto permite obtener un conjunto de gran rigidez en el plano sin que esto sólo dependa de la sección resistente del anillo.

Para evitar la deformación fuera de su plano, los radios se dividen en dos capas que van desde el plano del anillo hasta dos puntos opuestos en el eje. Así, una fuerza externa aplicada en la dirección perpendicular al plano del anillo se descompone en un par de tracción-compresión en los radios, es decir, en una sobretensión y una distensión de los radios de ambas capas respectivamente.

Entonces, para que los radios delgados puedan colaborar en la rigidez de la rueda, tienen que estar pretensados con suficiente fuerza como para que la disminución de tracción debida a cualquier carga externa, en el plano o en cualquier dirección fuera de él, no logre comprimirlos. Además, la sección del anillo rígido ha de ser suficiente como para poder soportar los esfuerzos de compresión y de flexión que se producen en cada uno de los tramos entre radios, debida a las cargas externas y a la propia tensión de los radios.

El concepto de rueda de radios tensados se puede aplicar en las estructuras de cubierta. Así, en un edificio de planta sensiblemente curva y cerrada, se dispone un anillo rígido en la coronación de la fachada y sobre él se tensa una serie de cables radiales distribuidos en dos capas separadas por postes flotantes, formando un perfil lenticular (2.3a), o por tensores de suspensión, si las dos capas arrancaban en el perímetro de dos anillos situados a diferente cota. En este segundo caso, a veces se sustituyen estos tensores de suspensión por una membrana en "V", formando una rueda dentada (figura 2.3b). El trazado de los cables forma una poligonal, si hay postes flotantes o tensores, o una curva, si entre ellos se tensa una membrana, que se corresponde con el funicular de cargas gravitatorias de la cubierta.

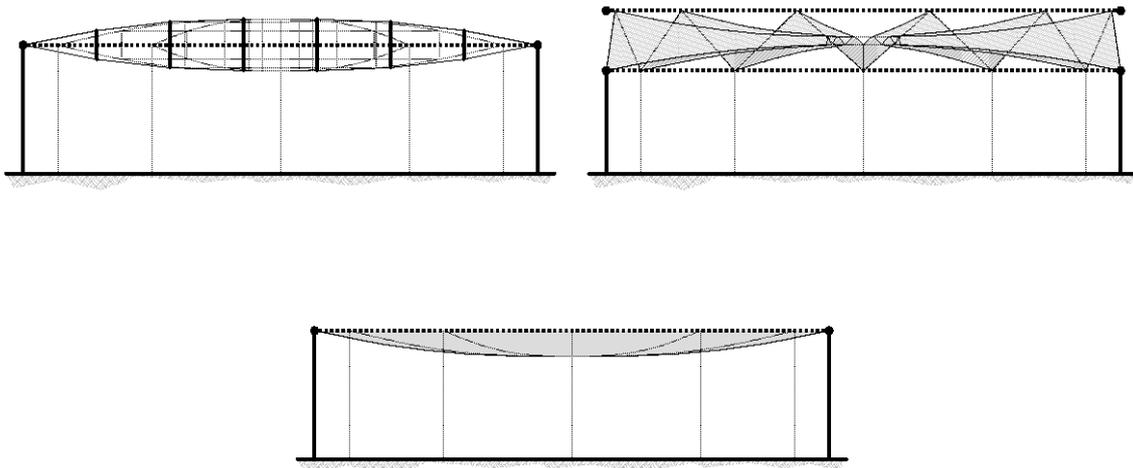
Si se elimina la capa superior de cables tensados y se deja que los de la inferior deformen tendidos desde el anillo rígido, desaparece el doble trazado inverso que permite tensar la estructura sobre sí misma y se obtiene una suerte de cúpula hiperbólica invertida. Entonces, para mantener la geometría de los cables y dotarles de tensión, más allá de la que adquieren por su peso propio, se construye una lámina delgada pero pesada, formada por un material

¹⁷ Se consideran delgados los que son incapaces de soportar ningún esfuerzo axial de compresión si pandear, por ser demasiado esbeltos.

¹⁸ Este concepto se denomina coacción radial en el capítulo 6 de esta tesis.

que, aunque suele ser rígido como el hormigón, no se necesita que aporte rigidez en la dirección perpendicular a la superficie, sino estabilidad por la tensión que supone su peso propio sobre los cables (figura 2.3c). En cambio, en el propio plano de la superficie, esta lámina es capaz de transmitir fuerzas de compresión, incrementando la capacidad resistente de la estructura frente a cargas externas asimétricas.

Igual que en el caso del conoide, si cualquiera de estas ruedas no es circular, el diseño y el dimensionado del anillo rígido se vuelven complejos.



Figuras 2.3a, 2.3b y 2.3c: Ruedas de radios tensados equilibrados en el perímetro mediante anillos rígidos (en línea gruesa de puntos).

iii) Cúpulas tensadas

Las formas cóncavas se asocian normalmente con las estructuras de compresión, tales como arcos, bóvedas y cúpulas, pero si se consigue pretensar un cable o una membrana con ese trazado, se puede mantener su forma estable.

Así que imagínese que sobre un cable tendido entre dos puntos fijos se suspenden dos montantes rígidos próximos a los extremos, de forma que el trazado adopta una forma de polígono. Luego, desde cada extremo, se tensa otro cable que recoja el pie de los montantes y lo eleve de cota. Entonces, se tiende otro cable pasando por el extremo superior de los montantes y se vuelven a suspender otros dos montantes próximos a los anteriores, repitiendo el proceso hasta configurar una suerte de arco de cables tensados.

Ahora imagínese que esta estructura plana se dispone de forma radial y se substituyen los tramos de cable entre el extremo inferior de las sucesivas parejas de montantes por anillos de tracción concéntricos que unen los extremos inferiores de los montantes situados a la misma cota en cada uno de los radios. Como resultado de la tensión interna de los sucesivos cables que suspenden los montantes, aparecen unas reacciones horizontales que normalmente se equilibran con un anillo rígido en el perímetro (figura 2.4). Para que la estructura tenga rigidez torsional existen tres opciones: disponer los cables de la capa superior formando triangulaciones en planta (a izquierda en la figura), como si se tratara de una cúpula geodésica; tensar una membrana sobre los radios de la capa superior (a la derecha en la figura); o una combinación de ambas.

Igual que en los casos anteriores, el diseño y dimensionamiento del anillo rígido de las cúpulas tensadas de planta no circular resulta más complejo que el de las circulares.

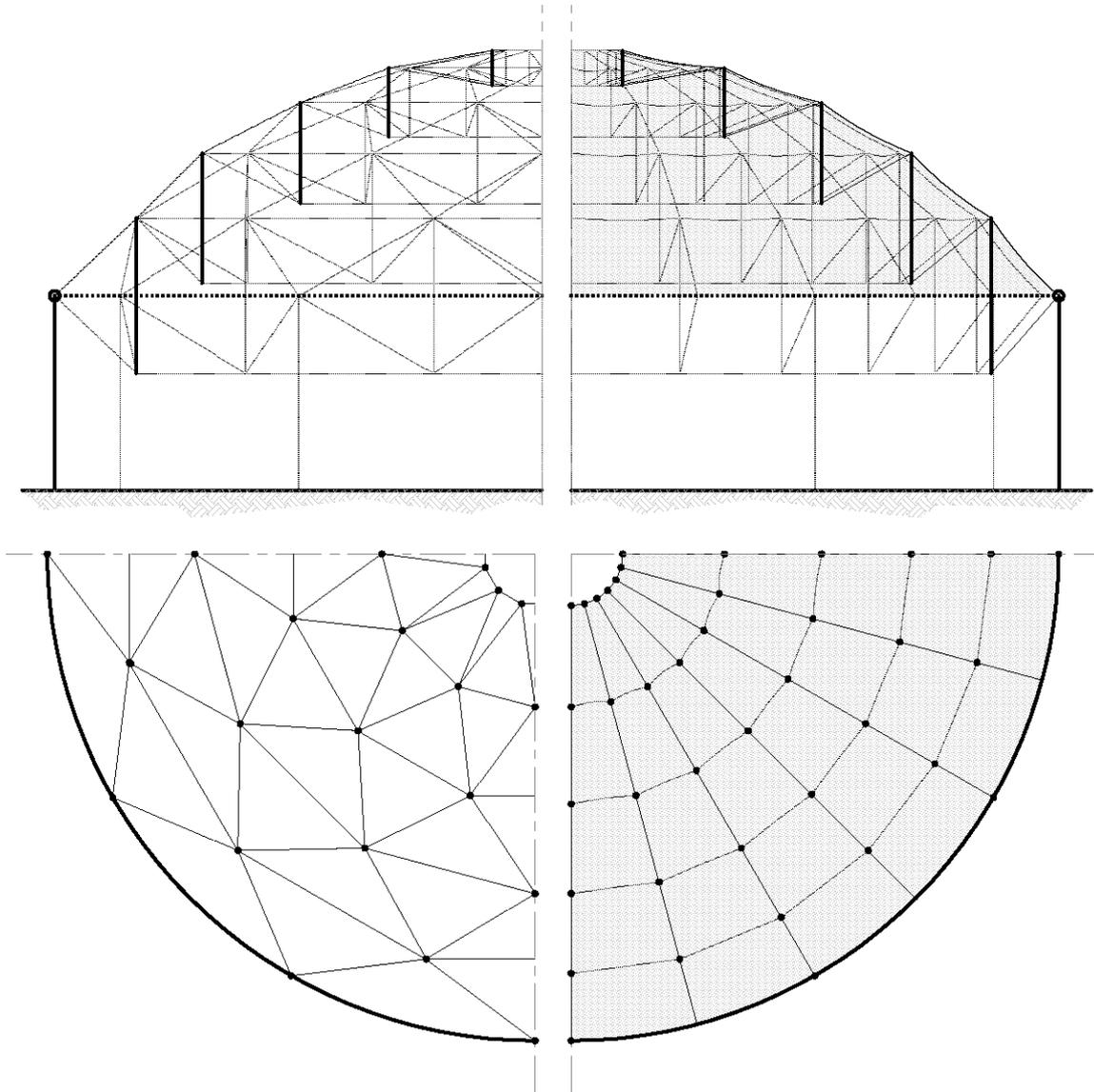


Figura 2.4: Cúpula tensada de cables triangulados (izquierda) y de cables radiales y membrana tensada (derecha) equilibradas mediante un anillo rígido (en línea gruesa de puntos).

iv) Cubiertas neumáticas

En un globo esférico, la curvatura y la presión del aire son uniformes, así que la tensión de la membrana también¹⁹. Si se divide el globo en dos partes con un plano horizontal y se considera el equilibrio de la más grande, se necesita que la membrana esté anclada en el perímetro. Las fuerzas que reciben estos anclajes perimetrales son de tracción y tienen una componente vertical, hacia arriba, y otra horizontal, hacia fuera. Con un cable que forme un anillo circular de tracción se logra equilibrar la componente horizontal.

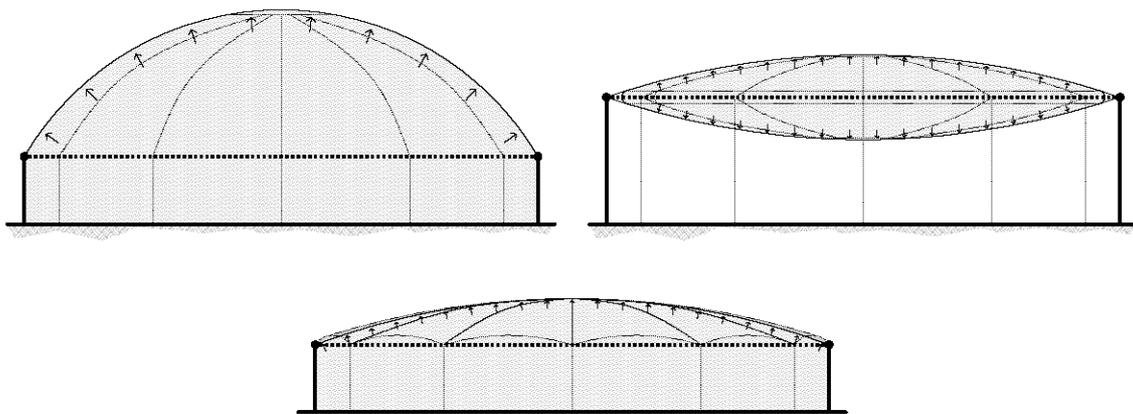
¹⁹ La tensión es la relación entre la presión del aire, que es siempre constante dentro de cualquier volumen, y la curvatura de la membrana. Así, cuanto mayor es la curvatura, más presión de aire se necesita para mantener la membrana en tensión, o sea, estable.

Si se considera el equilibrio de la más pequeña, las fuerzas que reciben los anclajes perimetrales son de tracción y tienen una componente vertical, hacia arriba, y otra horizontal, hacia dentro. Con un anillo rígido de compresión se consigue equilibrar esta componente horizontal, restando sólo la vertical para los anclajes. Así se puede plantear una cúpula de este tipo para cubrir un espacio cilíndrico, de planta circular, sin necesidad de disponer soportes empotrados en la base o vientos inclinados (figura 2.5a).

Si se juntan dos membranas resultantes de una sección inferior a la mitad de la esfera en un anillo rígido encerrando aire con presión constante, se obtiene un cojín lenticular (figura 2.5b). De no existir este anillo rígido, el cojín lenticular tendería a adoptar una forma esférica, formando arrugas radiales que nacerían de la intersección de las dos membranas por la pérdida de tensión en la dirección anular. Esto supondría una pérdida de capacidad de carga de la cubierta.

Así, existen dos tipos de cubiertas neumáticas, las que encierran aire con presión constante dentro de un espacio habitable, limitado por una membrana, en forma de cúpula más o menos rebajada y las paredes y el suelo de un cuerpo rígido; y las que encierran el aire a presión únicamente entre membranas, formando un cojín por encima del espacio habitable.

Para rebajar la altura de una cúpula soportada por aire sin que eso suponga incrementar la tensión en la membrana por la disminución de curvatura²⁰, se puede confeccionar una cubierta mediante la intersección de varias superficies de doble curvatura, colocando cables de refuerzo en las aristas curvas. En los bordes, los cables transmiten reacciones puntuales de tracción al anillo rígido (figura 2.5c).



Figuras 2.5a, 2.5b y 2.5c: Cubiertas neumáticas equilibradas en el perímetro mediante un anillo rígido (en línea gruesa de puntos).

Si la cubierta no describe una superficie de curvatura constante como la esfera, la tensión en la membrana no es constante. Así, el anillo rígido tampoco resulta circular, y, como en los casos anteriores, su diseño y dimensionamiento también resultan complejos.

Para cuantificar la eficiencia de estas construcciones hay que tener en cuenta, además del consumo energético para su fabricación, transporte y montaje, el que se necesita para mantener la presión constante en su interior, especialmente en las que la membrana encierra el espacio habitable, imposible de mantenerse totalmente hermético.

²⁰ A las cúpulas rebajadas también se les llama cubiertas de bajo perfil.

Apartado 2.2: Inventos, proyectos y obras

Para situar el objeto de investigación en un contexto histórico, se relata el origen y desarrollo de cada uno de los tipos de estructuras tensadas definidos en el apartado anterior, desde la introducción de los anillos de compresión en cada tipo hasta la actualidad.

i) Conoides

Existen múltiples ejemplos de tiendas de campaña, circos y otras construcciones itinerantes basadas en el esquema de carpa tendida alrededor de uno o varios postes altos. Muchos de ellos provienen a su vez de modelos primitivos de vivienda de diversas culturas nómadas de la antigüedad, de los que aún algunos se conservan en uso.

Seguramente, en el momento de la introducción de los anillos rígidos equilibrantes se produjo el salto de las estructuras de tienda a los edificios de carácter permanente.

En la Exposición Nizhny-Novgorod de 1896, se construyeron tres pabellones con cubierta tensada diseñada por Vladimir Shukhov, uno de planta rectangular, otro de planta ovalada y otro circular, conocido como *Rotonda* (figura 2.2). Los tres pabellones estaban cubiertos por una malla metálica tendida entre una estructura metálica central alta y la fachada, más baja.

Para equilibrar las reacciones horizontales de la cubierta en el perímetro se dispusieron vientos y arriostramientos a lo largo de todas las fachadas del *Pabellón Rectangular* y en las fachadas rectas del *Pabellón Ovalado*. En cambio, el *Pabellón Rotonda*, que tenía una cubierta en forma de tronco de conoide de 68,3m de diámetro exterior y 25m interior, equilibraba las reacciones horizontales mediante un anillo de compresión situado en la coronación de la fachada (figura 2.6). Seguramente es el primer ejemplo documentado de una cubierta tensada de este tipo que incorpora un anillo de compresión.



Figura 2.6. Sección del Pabellón Rotonda en Nizhny-Novgorod.

En la década de 1930, la compañía agrícola Cargill Inc. empezó a construir en el norte de EEUU elevadores de grano de grandes dimensiones con forma de conoide. Estaban hechos de cables y chapas tendidas entre un gran mástil central en celosía y un cilindro de chapa de poca altura pero gran diámetro (figura 2,7). En la mayoría de ellos, los cables tendidos se anclaban también al suelo, así que es difícil saber si el cilindro de chapa colaboraba en el equilibrio las reacciones horizontales de los cables.

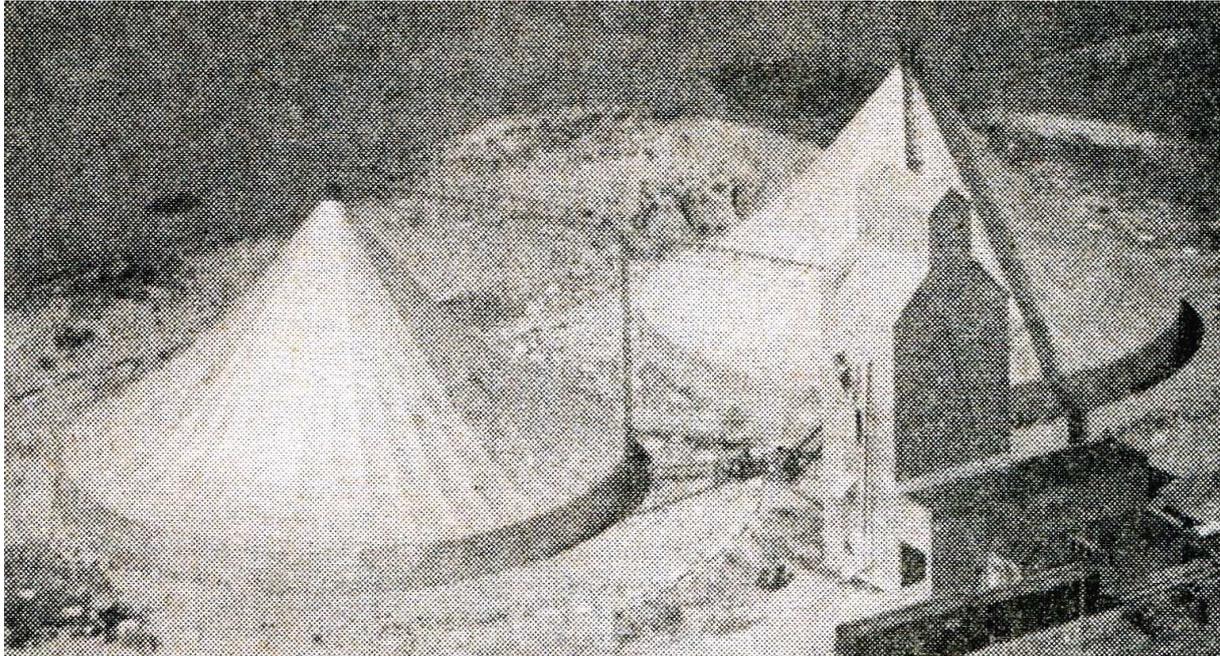


Figura 2.7: Elevadores de grano con forma de conoide contruidos por Cargill Inc. en Minot, Dakota del Norte.

A partir de la década de 1950, sobre todo gracias a las investigaciones de Frei Otto acerca de la búsqueda de la forma de las estructuras tensadas, se empiezan a construir estructuras tensadas con forma de conoide, aunque casi siempre equilibradas en el perímetro mediante vientos en diagonal anclados en el suelo. No son muchas las construcciones de este tipo que incorporen anillos rígidos, seguramente porque los conoides se siguen utilizando sobre todo para cubiertas temporales de poca entidad, en los que la magnitud de las reacciones y su distancia al suelo no suelen ser excesivas.

Aparte de los mencionados, uno de los pocos ejemplos contruidos donde se utilizan anillos rígidos para equilibrar las reacciones de unos conoides de grandes dimensiones es el pabellón para el *Campus Center* de Universidad de La Verne en California, contruido en 1973 según el diseño de Robert Campbell. En este caso, se combinan cuatro conoides de membrana tensada dentro de un mismo anillo con forma lobulada, resultante de la intersección de cuatro circunferencias secantes en planta.

Desde la popularización de las estructuras tensadas en la década de 1980, se han desarrollado multitud de variantes geométricas de las cubiertas tensadas con forma de conoide, de las cuales, seguramente, las más interesantes son las que permiten liberar el apoyo del poste central sustituyéndolo por una serie de tensores de suspensión por debajo de la membrana. Uno de los ejemplos recientes más difundidos que utilizan este sistema es la cubierta del atrio del *SONY Center* en Berlín, contruida en el año 2000 según un proyecto de Murphy/Jahn y Arup, consistente en un conoide de cables y mástil suspendido desde un anillo rígido en celosía de acero, apoyado en lo alto de la fachada de varios edificios (figura 2.8).

En cualquier caso, todavía hoy se siguen presentando los mismos problemas para equilibrar las reacciones horizontales procedentes de la tensión interna de la membrana, sobre todo cuando la base del conoide se sitúa por encima del plano del suelo y, muy especialmente, cuando la planta no es circular.

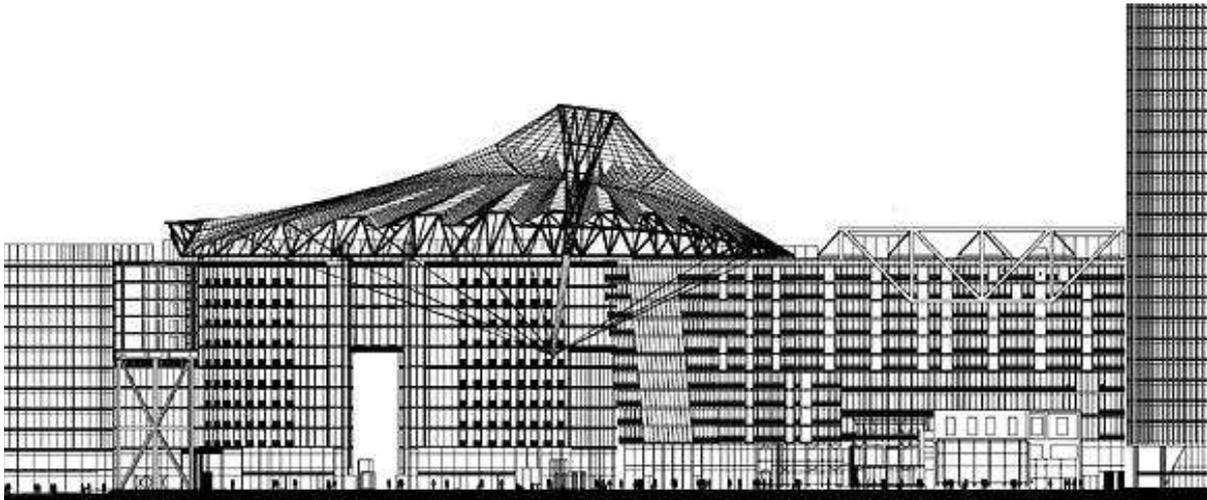


Figura 2.8: Sección del atrio cubierto del *SONY Center* en Berlín.

A continuación se muestra una tabla con algunos inventos, proyectos y obras referentes a cubiertas con conoides tensados equilibrados con anillos rígidos, ordenados cronológicamente.

Año	Datos	Descripción
1896	<p>Referencia Obra</p> <p>Nombre Pabellón Rotonda</p> <p>Autor Vladimir Shukhov</p> <p>Lugar Nizjn-Novgorod, Rusia</p> <p>Forma Circular</p> <p>Dimensión 68,3m</p>	Conoide de cables tendidos entre anillo de tracción en el interior sobre pilares y anillo de compresión en fachada.
1955	<p>Referencia Obra</p> <p>Nombre <i>Federal Garden Exhibition</i></p> <p>Autor Frei Otto</p> <p>Lugar Kassel, Alemania</p> <p>Forma Circular</p> <p>Dimensión 6,5m</p>	Paraguas con doble conoide de membrana tensada sobre mástil central y anillo tubular de acero.
1956	<p>Referencia Obra</p> <p>Nombre Elevador de grano</p> <p>Autor Cargill Inc.</p> <p>Lugar Minot, Dakota del Norte, EEUU</p> <p>Forma Circular</p> <p>Dimensión -</p>	Conoide de cables y chapas tendidos entre mástil central y cilindro de chapa de acero.
1959	<p>Referencia Patente</p> <p>Nombre <i>Geodesic Tent</i></p> <p>Autor Richard Buckminster Fuller</p> <p>Forma Circular</p>	Conoides de membrana tensada suspendidos desde cúpula geodésica rígida y anillos de compresión.

1970	Referencia	Obra	Conoide de cables suspendido desde mástil inclinado de hormigón armado.
	Nombre	Pabellón Australia Expo Universal	
	Autor	James Maccormick	
	Lugar	Osaka, Japón	
	Forma	Circular	
	Dimensión	-	
	Referencia	Obra	Dos troncos de conoides de cables en retícula y membrana tensada entre óculo interior descentrado y anillo rígido de acero.
	Nombre	Pabellón del Automóvil	
	Autor	Kunio Mayekawa	
	Lugar	Osaka, Japón	
	Forma	Circular	
	Dimensión	39,4 y 45,4m	
1975	Referencia	Obra	Intersección de cuatro conoides de membrana tensada soportados por mástiles y equilibrados con un anillo rígido con forma lobular de cuatro circunferencias secantes.
	Nombre	<i>La Verne College Campus Center</i>	
	Autor	Robert Campbell	
	Lugar	La Verne, California, EEUU	
	Forma	Cuatro círculos secantes	
	Dimensión	-	
1995	Referencia	Obra	Conoide de membrana tensada desde mástil suspendido y anillo rígido de tubo de cartón.
	Nombre	<i>Paper Church</i>	
	Autor	Shigeru Ban	
	Lugar	Kobe, Japón	
	Forma	Eliptica	
	Dimensión	15x10m	
1997	Referencia	Obra	Conoide de membrana tensada desde mástil central y anillo rígido en celosía de acero.
	Nombre	Cubierta para casa de vacaciones	
	Autor	Ramon Sastre	
	Lugar	Argentera, España	
	Forma	Circular	
	Dimensión	22m	
2000	Referencia	Obra	Conoide descentrado de cables y membrana tensada desde mástil suspendido y anillo rígido en celosía de acero.
	Nombre	Atrio del Sony Center	
	Autor	Murphy/Jahn y Arup	
	Lugar	Berlín, Alemania	
	Forma	Elíptico	
	Dimensión	102x77m	
	Referencia	Obra	Conoide de membrana tensada desde mástil de madera y anillo rígido tubular de acero.
	Nombre	Cubierta circular	
	Autor	Frei Otto y Bradastsch	
	Lugar	Leonberg, Alemania	

Forma	Circular	
Dimensión	24m	
Referencia	Obra	Conoide de cables y membrana
Nombre	Cubierta balsa depuración aguas	tensado desde un trípode exterior de
Autor	Félix Escrig y José Sánchez	mástiles en celosía y un anillo rígido
Lugar	Butarque, Madrid, España	tubular de acero.
Forma	Circular	
Dimensión	38m	
2010	Referencia	Obra
	Nombre	<i>Khan Shatyr Entertainment Center</i>
	Autor	Foster & Partners
	Lugar	Astana, Kazakhstan
	Forma	Elíptico
	Dimensión	150m

Tabla 2.1: Cronología de inventos, proyectos y obras con conoides tensados equilibrados con anillos rígidos.

ii) Ruedas de radios tensados

El *velario* que se colocaba para dar sombra sobre algunos teatros y anfiteatros de la arquitectura romana es el primer ejemplo de cubierta textil de gran tamaño del que se tiene constancia. Pese a que no se conocen con precisión todos los detalles del funcionamiento de esta estructura, especialmente de su montaje, además de menciones en textos antiguos²¹ y de alguna imagen original²², hay indicios constructivos de los que se deduce que pudo componerse de una serie de postes verticales de madera empotrados sobre unas ménsulas agujereadas situadas en la coronación del muro exterior de piedra, desde las que se tendían unas cuerdas que soportaban unas velas de lino desplegadas a modo de toldos (ROMANA 2014: 100-103).

Suponiendo que las cuerdas se hubieran dispuesto de forma radial desde los postes empotrados en la fachada y no hubiera existido ningún otro apoyo en el interior, hubiese sido necesario un anillo de tracción. En ese caso, también es de suponer que los postes de madera por sí solos no fueran capaces de soportar los empujes debidos a la tracción centrípeta y que las cuerdas se anclasen más abajo, a modo de vientos colocados por el exterior de la fachada o que se aprovechara el efecto de anillo rígido que hubiese podido formarse en el muro de fachada, normalmente de planta elíptica.

²¹ Suetonio, biógrafo de los primeros emperadores romanos, menciona entre las crueldades del emperador Calígula que “*a veces, durante los combates de gladiadores, cuando el sol era más sofocante, prohibía que se echasen los toldos*” (SÜETONIO: *Calígula* 26.5), de lo que se puede deducir que, al menos el anfiteatro de Roma (no el Anfiteatro Flavio que conocemos ahora, sino uno anterior), podía cubrirse mediante un entoldado suficientemente grande como para proyectar sombra sobre la arena donde luchaban los gladiadores.

²² En el Museo Arqueológico Nacional de Nápoles, se conserva un fresco del Anfiteatro de Pompeya con el graderío cubierto por una suerte de entoldado sobre cuerdas más o menos radiales.

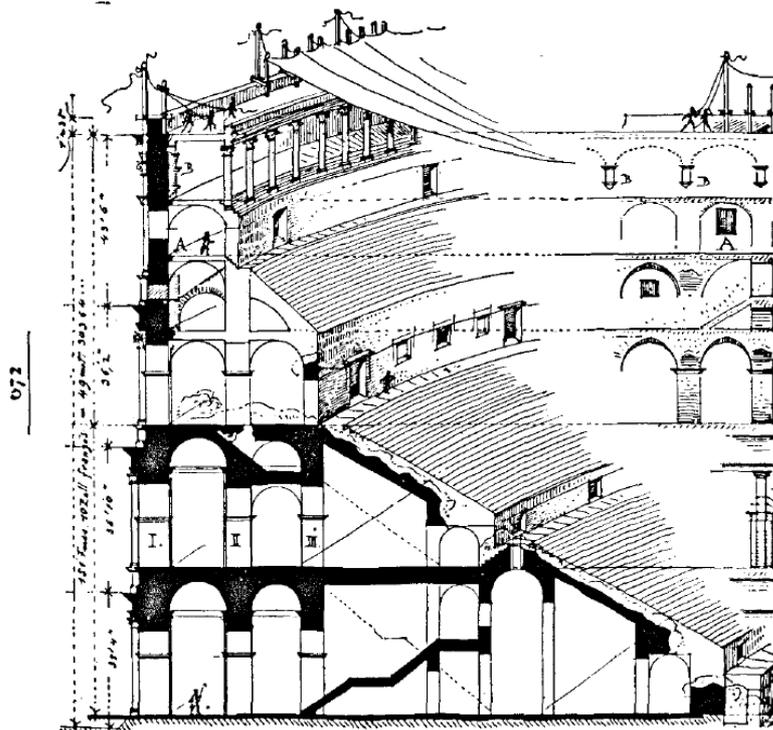


Figura 2.9: Sección del Anfiteatro Flavio con el sistema de postes, cuerdas y velas de la cubierta según la interpretación del arquitecto alemán Josef Durm.

El invento de la rueda de radios tensados se atribuye al ingeniero aeronáutico George Cayley, que en 1808 ya dibujó lo que denominó como la rueda más ligera para los coches voladores (ACKROYD 2011: 152). En 1893 se construyó la primera rueda de radios tensados de gran tamaño. Consistía en una noria de 83m de altura diseñada por el ingeniero George Washington Ferris para la Exposición Universal que se celebró en Chicago en ese mismo año²³ (RYDELL 2003: 1386).

En 1956 se construyó la cubierta del Estadio Dr. Héctor A. Grauert, conocido como *El Cilindro de Montevideo*, según un diseño del ingeniero Leonel Vieira, consistente en una red de cables radiales tendidos desde un anillo de compresión de hormigón y un anillo de tracción interior (figura 2.10). Como se trataba de una rueda de una sola capa de radios, para mantenerlos en tensión y conservar su geometría de catenaria se colocaron unas placas de hormigón que formaban una lámina continua a modo de carpa pesada (SANTOS-GUERRAS 1990: 9).

Doce años más tarde se construyó la cubierta del *Madison Square Garden* en Nueva York, basada en el mismo modelo de carpa pesada sobre una rueda de cables tendidos, aunque en este caso, se aprovechó el peso de unas plataformas rígidas situadas sobre los cables para mantener la estructura en tensión.

²³ Por este motivo a las norias de feria también se las conoce como *Ferris Wheels*.

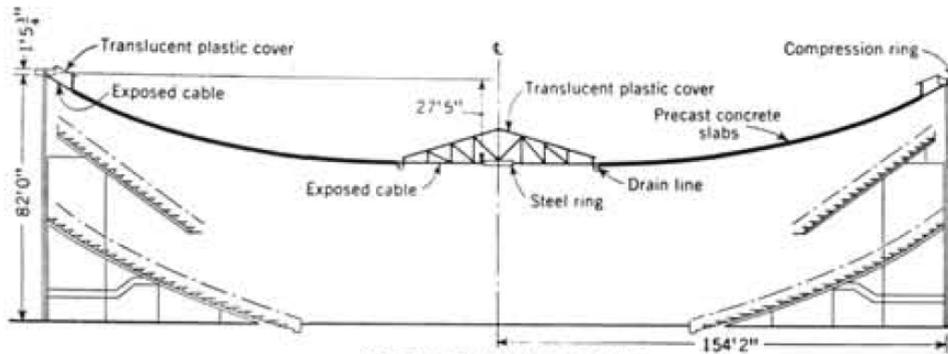


Figura 2.10: Sección del Pabellón *El Cilindro* en Montevideo.

En 1958 se construyó la cubierta del Pabellón de EEUU en la Exposición Universal celebrada en Bruselas, según el diseño del arquitecto Eduard Durrell Stone y del ingeniero Lev Zetlin. Se trataba, esta vez sí, de una estructura de rueda de bicicleta con dos capas de cables unidos por tensores de suspensión y distribuidos radialmente, tensadas entre un anillo rígido de 116m de diámetro y un tambor suspendido en el interior (figura 2.11).

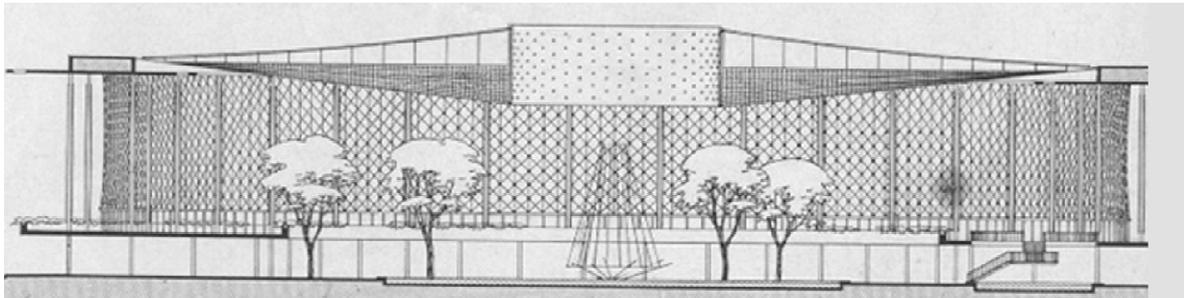


Figura 2.11: Sección del Pabellón de EEUU para la Exposición Universal de 1958 en Bruselas.

Un año después se acabó de construir la cubierta del *Memorial Auditorium* de la ciudad de Utica, al norte de Nueva York, también según un diseño de Lev Zetlin, consistente en una rueda lenticular de cables organizados en dos capas unidas mediante montantes rígidos, tensadas desde un anillo de hormigón de 83,3m de diámetro (figura 2.12).

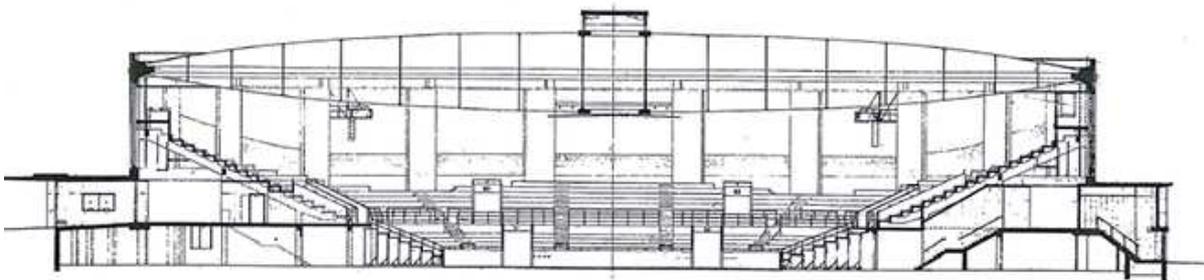


Figura 2.12: Sección del *Memorial Auditorium* en Utica, Nueva York.

En la Feria Mundial celebrada en Nueva York en 1964, en los terrenos situados en Flushing Meadows- Corona Park, se construyó un pabellón representativo del Estado de Nueva York (*New York State Pavilion*), diseñado por el arquitecto Philip Johnson y otra vez Lev Zetlin. La

feria estaba dedicada a la carrera espacial, así que la mayoría de las edificaciones tenían un aire futurista. El complejo del Pabellón contenía tres edificios conocidos como *Observation Towers*, *Theaterama* y *Tent of Tomorrow*. Este último consistía en una gran rueda elíptica de 96x72m en planta, formada por dos capas de cables unidos por tensores de suspensión y distribuidos radialmente, tensados desde un anillo rígido formado por una celosía metálica de sección triangular. Sobre la capa superior se dispusieron unos paneles de fibra de vidrio en forma de cúpula invertida rebajada. El anillo estaba soportado por dieciséis columnas de hormigón armado con forma de cilindro hueco de 30m de altura (SINGH 2004: 14).

Como la planta es elíptica y todos los cables están fugados a un solo centro, las reacciones horizontales procedentes de la tensión interna, no sólo provocan un esfuerzo de compresión en el anillo, sino que además aparecen esfuerzos de flexión en su propio plano que requieren de una gran rigidez para mantener su geometría. Se sabe, por el tipo unión entre el anillo y las columnas, un apoyo simple, que éstas no colaboran en la absorción de las reacciones horizontales. Por este motivo se planteó una sección en celosía de grandes dimensiones (figura 2.13).

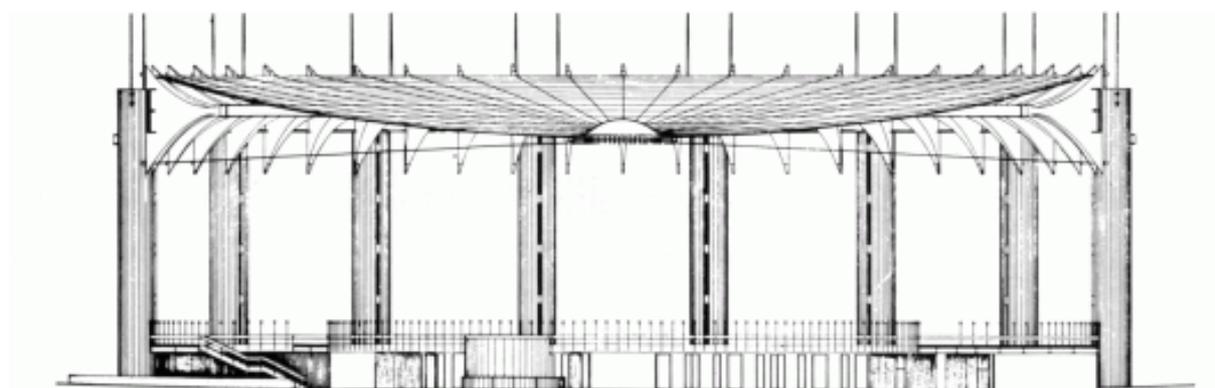


Figura 2.13: Sección del *New York State Pavilion* en Flushing Meadows, Nueva York.

A partir de la década de 1980 se empiezan a construir cubiertas en forma de rueda añadiendo una membrana tensada entre los cables. La forma más recurrente, que dio lugar a una patente, consiste en decalar los radios de la capa inferior con respecto a los de la superior y disponer la membrana en “V”, de manera que al tensar los cables con trazados hiperbólicos inversos, tienden a separarse y la membrana también queda tensada (ISHLER 1986: 1-4).

Según este sistema se han construido numerosas cubiertas de grandes recintos como la de la Plaza de Toros de Zaragoza, en 1988, la del Estadio de la Cartuja en Sevilla, en 1999, o más recientemente las del *Stadium Foshan* en China, en 2006, o del *Jawaharlal Nehru Athletics Stadium* en India, en 2010, la mayoría según proyectos de la ingeniería Schlaich, Bergemann und Partner. La misma ingeniería ha diseñado otros tipos de cubiertas similares para estadios, muchos de ellos de planta cuadronda²⁴. Las más recientes conforman un tambor en celosía metálica desde los que se tensan dos capas de cables alineados unidos por tensores de suspensión. Para ahorrar superficie de membrana, ésta se coloca sólo en el plano inferior, formando pequeños paraboloides tensados entre unos arcos rígidos que se apoyan sobre los cables.

²⁴ “Cuadrondo” pretende ser un neologismo creado por el autor para referirse a geometrías similares a un rectángulo con los lados y los vértices redondeados. Este término se ha aplicado a las geometrías de los anillos que coinciden con esta descripción y que no han sido identificadas como súper elipses o falsas súper elipses.

A continuación se muestra una tabla de algunos inventos, proyectos y obras referentes a cubiertas con radios tensados equilibrados con anillos rígidos, ordenados cronológicamente.

Año	Datos	Descripción
1956	Referencia Obra Nombre Estadio "El Cilindro" Autor Leonel Vieira Lugar Montevideo, Uruguay Forma Circular Dimensión 95m	Carpa pesada de cables radiales tendidos desde anillo rígido de compresión y anillo de tracción, y lámina de hormigón.
1958	Referencia Obra Nombre Pabellón de EEUU Expo Universal Autor Lev Zetlin Lugar Bruselas, Bélgica Forma Circular Dimensión 116m	Rueda de bicicleta de cables radiales en doble capa tensados desde anillo rígido en celosía plana de acero y tambor de tracción en el centro.
1959	Referencia Obra Nombre <i>Utica Memorial Auditorium</i> Autor Lev Zetlin Lugar Utica, Nueva York, EEUU. Forma Circular Dimensión 83,3m	Rueda lenticular de cables y montantes tensados desde anillo rígido de hormigón.
1963	Referencia Obra Nombre <i>Rotunda Building Airport</i> Autor Gertrude Lemp Kerbis/Murphy-Jahn Lugar Chicago, Illinois, EEUU Forma Circular Dimensión -	Carpa pesada de cables radiales tendidos desde anillo rígido de compresión y anillo de tracción, y lámina de hormigón.
1964	Referencia Obra Nombre <i>New York State Pavilion</i> Autor Lev Zetlin Lugar Queens, Nueva York, EEUU Forma Elíptica Dimensión 96x72m	Rueda de cables radiales en doble capa tensados desde anillo rígido en celosía tridimensional de acero y anillo de tracción.
1966	Referencia Obra Nombre <i>Oakland Alameda Country Coliseum</i> Autor SOM Lugar Oakland, California, EEUU Forma Circular Dimensión -	Vigas rígidas tendidas entre anillo de compresión de hormigón armado y anillo interior de tracción.
1968	Referencia Obra Nombre <i>Madison Square Garden</i>	Carpa pesada de cables radiales tendidos desde anillo rígido de

	Autor	Fred Severud	compresión y anillo de tracción, y plataformas rígidas pesadas.
	Lugar	Nueva York, EEUU	
	Forma	Circular	
	Dimensión	127,5m	
1971	Referencia	Obra	Rueda de bicicleta de cables radiales distribuidos en dos capas tensados desde anillo rígido en celosía de acero y tambor de tracción en el centro.
	Nombre	<i>Spodek Arena</i>	
	Autor	Krasinski, Zorawski y Zalewski	
	Lugar	Katowice, Polonia	
	Forma	Circular	
	Dimensión	-	
1986	Referencia	Patente	Rueda dentada de cables decalados en dos capas y membrana tensada en “V” desde dos anillos rígidos a diferente cota y anillo interior de tracción.
	Nombre	<i>Fabric Roof Structure</i>	
	Autor	Michael W. Ishler	
	Forma	Circular	
1988	Referencia	Obra	Rueda dentada de cables decalados en dos capas y membrana tensada en “V” desde dos anillos rígidos a diferente cota y anillo interior de tracción. Interior de membrana desplegable sobre cables radiales tendidos desde mástiles flotantes.
	Nombre	Cubierta de Plaza de Toros	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Zaragoza, España	
	Forma	Circular	
	Dimensión	100m interior	
1997	Referencia	Obra	Rueda de bicicleta de cables radiales en dos capas, tensados desde anillo rígido de acero y tambor de tracción interior, cubierta con membrana tensada entre arcos rígidos.
	Nombre	<i>NSC Roof Outdoor Stadium</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Kuala Lumpur, Malasia	
	Forma	Elíptico	
	Dimensión	-	
1998	Referencia	Obra	Rueda cables tensados en dos capas desde anillo rígido de acero y mástiles en el exterior y anillo de tracción interior, cubierta con membrana tensada entre arcos rígidos apoyados sobre los cables.
	Nombre	<i>Imtech Arena (Volksparkstadion)</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Hamburgo, Alemania	
	Forma	Cuadronda	
	Dimensión	-	
1999	Referencia	Obra	Rueda dentada de membrana en “V” tensada entre cables radiales decalados en dos capas tensados entre tambor rígido en celosía de acero y anillo interior de tracción.
	Nombre	Estadio de la Cartuja	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Sevilla, España	
	Forma	Ovalado	
	Dimensión	-	
2002	Referencia	Obra	Rueda de bicicleta de cables tensados en dos capas desde anillo rígido de hormigón y doble anillo
	Nombre	<i>National Athletics Stadium</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	

	Lugar	Abuja, Nigeria	interior de tracción separado por montantes rígidos flotantes; cubierta con membrana tensada entre arcos rígidos apoyados sobre los cables.
	Forma	Elíptico	
	Dimensión	265x207m	
2005	Referencia	Obra	Rueda de cables tendidos desde anillo rígido en celosía plana y anillo interior de tracción, cubierta con membrana tensada entre arcos rígidos apoyados sobre los cables.
	Nombre	<i>Commerzbank Arena</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Frankfurt, Alemania	
	Forma	Cuadronda	
	Dimensión	200,15x238,5m	
2006	Referencia	Obra	Rueda dentada de membrana en "V" tensada entre cables radiales decalados en dos capas tensados entre tambor rígido en celosía metálica y anillo interior de tracción.
	Nombre	<i>Stadium Foshan</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Foshan, China	
	Forma	Circular	
	Dimensión	66,5m de vuelo	
2009	Referencia	Obra	Rueda de cables radiales en dos capas tensados entre un tambor en celosía metálica y un anillo interior de tracción.
	Nombre	<i>Roofing Bay Arena</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Leverkusen, Alemania	
	Forma	Circular	
	Dimensión	215m	
2010	Referencia	Obra	Rueda dentada de membrana en "V" entre cables radiales decalados en dos capas tensados entre tambor rígido en celosía metálica y anillo interior de tracción.
	Nombre	<i>Jawaharlal Nehru Athletics Stadium</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Nueva Dehli, India	
	Forma	Elíptico	
	Dimensión	350x290m	
2011	Referencia	Obra	Rueda de cables tensados en dos capas desde anillo rígido de acero y mástiles en el exterior y anillo interior de tracción, cubierta con membrana tensada entre arcos rígidos apoyados sobre los cables.
	Nombre	Rehabilitación <i>Stadium BC Place</i>	
	Autor	Geiger Engineers y SBP	
	Lugar	Vancouver, Canadá	
	Forma	Elíptica	
	Dimensión	261x220m	
	Referencia	Obra	Rueda de cables tensados en dos capas desde anillo rígido de acero y mástiles en el exterior y anillo interior de tracción, cubierta con membrana tensada entre arcos rígidos apoyados sobre los cables.
	Nombre	<i>National Sports Complex Olimpiysk</i>	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Kiev, Ucrania	
	Forma	Elíptica	
	Dimensión	306x236m	
2014	Referencia	Obra	Rueda lenticular de montantes y

Nombre	<i>Tauron Arena</i>	cables radiales en dos capas
Autor	Perbo Projekt	tensados desde anillo rígido de
Lugar	Cracovia, Polonia	hormigón armado y tambor
Forma	Circular	suspendido en el interior.
Dimensión	146m	

Tabla 2.2: Cronología de inventos proyectos y obras con ruedas tensadas equilibradas con anillos rígidos.

iii) Cúpulas tensadas

En 1964 Richard Buckminster Fuller, a partir de la idea de tensegridad, ideó y patentó un sistema de cúpulas tensadas llamado *Suspension Building*. En el mismo texto de la patente, se describe el invento de la siguiente manera: “*En sustitución de la curva catenaria, al descomponer el trazado de los cables suspendidos en incrementos de suspensión y ascensión, se puede elevar una serie de marcos circulares o poligonales concéntricos, ganando altura hacia el centro mediante un sistema de suspensión de arco ascendente*” (FULLER 1964: 1).

Pese al poder mediático de Fuller y a la gran cantidad de inventos que logró construir, en este caso, no consiguió ir más allá de una maqueta de la *Aspension Dome*, basada en los principios de su patente (figura 2.14).

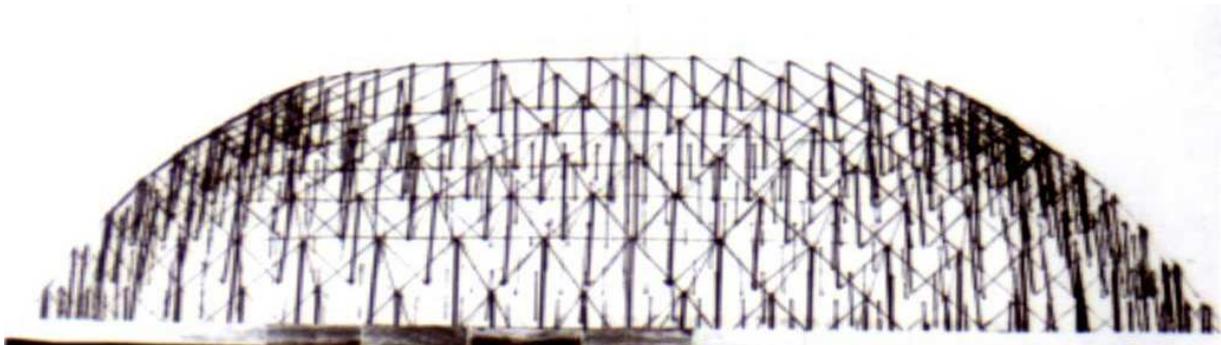


Figura 2.14: Maqueta de la cúpula *Aspension*, basada en la patente de Fuller.

Más o menos en la misma época, el ingeniero francés Robert Le Ricolais trabajaba en su laboratorio de la Universidad de Pensilvania con maquetas de estructuras con “columnas suspendidas en el aire” que tenían configuraciones muy similares a la propuesta de Fuller (LE RICOLAIS 1997: 111-121).

En 1983, el ingeniero Horst Berger, que estaba asociado por aquel entonces con David Geiger, recupera la idea de Fuller y desarrolla un sistema de cúpula de cables tensados para el cubrir el *Sun-Dome* en St. Petersburg, Florida. Tras la ruptura de Geiger-Berger Associates ese mismo año, David Geiger altera el diseño (NENADOVIC 2010: 58) y patenta un sistema llamado *Roof Structue*. Según él mismo escribe, se trata una solución para construir cubiertas ligeras sin los inconvenientes que presentan las formas anticlásicas de las estructuras de membrana tensada respecto a la percepción visual del espacio interior, ni tampoco los problemas de dependencia de los sistemas mecánicos necesarios en las estructuras neumáticas que, por el contrario, sí que permiten amplitud de visual interior. (GEIGER 1988: 1-2).

Las principales diferencias de este sistema con la cúpula de Fuller son dos: que no se suspenden marcos o anillos rígidos, sino postes dispuestos en círculos concéntricos, y que la disposición de los cables de suspensión es radial, no triangulado. También define detalladamente la secuencia de montaje y entrada en carga de la cubierta (figura 2.15). Según este sistema, en 1986 se construyeron dos cubiertas diseñadas por el mismo Geiger para los pabellones de gimnasia y de esgrima de las Olimpiadas de Seúl 1988. Ambas se equilibraban en el perímetro con un robusto anillo circular de hormigón armado.

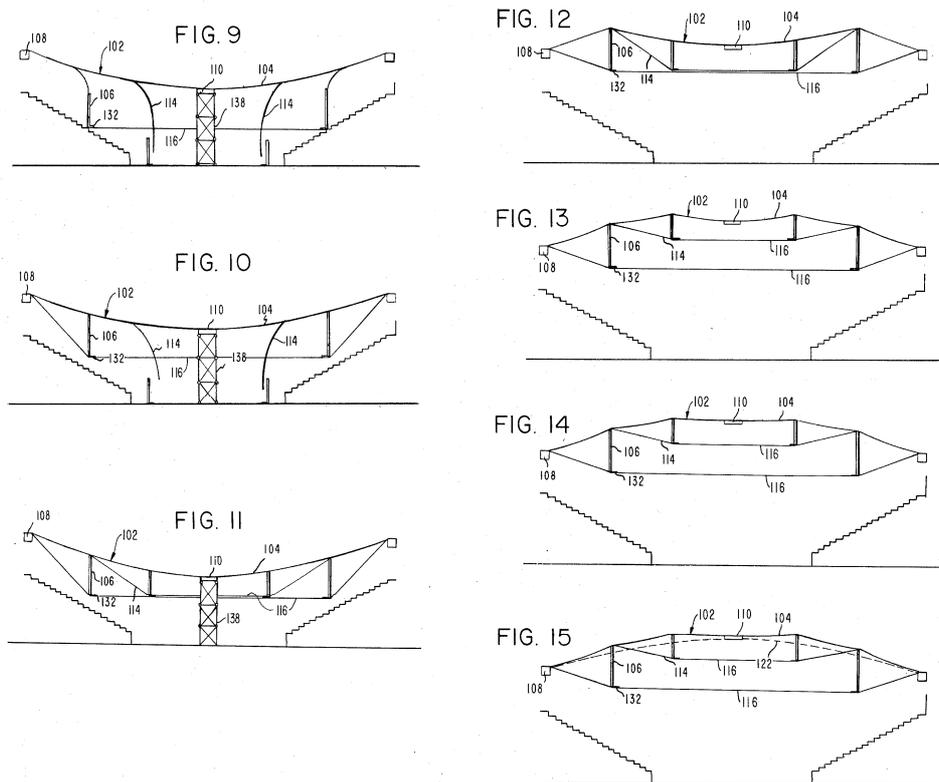


Figura 2.15: Secuencia de montaje descrita por Geiger para las cúpulas tensadas.

Posteriormente se han desarrollado multitud de variantes, sobre todo con distribuciones de cables triangulados, para poder adaptarse mejor a geometrías no circulares y conseguir estabilidad torsional sin necesidad de una membrana tensada en la capa superior. Los ejemplos más relevantes, seguramente, son la cubierta para el *Georgia Dome*, construida en 1992 según el diseño de Weidlinger Associates y Matthyns Levy, basado en su propia patente (figura 2.16), y, más recientemente, la cubierta del Estadio “Único” de la Plata, con un sistema de cúpula tensada similar, pero equilibrada por un anillo con forma de dos círculos secantes construidos como una gran celosía metálica, también según un diseño de Weidlinger Associates.

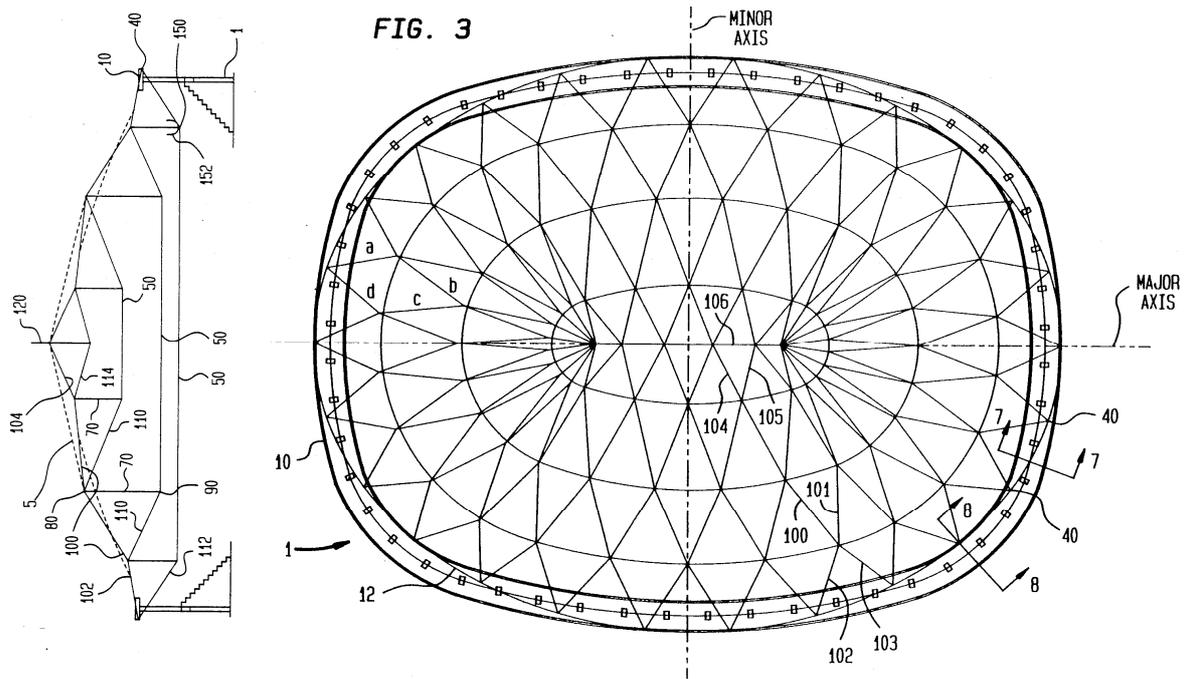


Figura 2.16: Planta y sección de la cúpula tensada con cables triangulados descrita por Levy.

A continuación se muestra una tabla de algunos inventos, proyectos y obras referentes a cubiertas con cúpulas tensadas equilibrados con anillos rígidos, ordenados cronológicamente.

Año	Datos	Descripción
1964	<p>Referencia Patente</p> <p>Nombre <i>Suspension Building</i></p> <p>Autor Richard Buckminster Fuller</p> <p>Forma Circular/Poligonal/Irregular</p>	<p>Armazones rígidos concéntricos suspendidos de dos familias de cables formando una cúpula con anillo rígido perimetral.</p>
1986	<p>Referencia Obra</p> <p>Nombre Pabellón Olímpico de Esgrima</p> <p>Autor David Geiger</p> <p>Lugar Seúl, Corea</p> <p>Forma Circular</p> <p>Dimensión 98,3m</p>	<p>Cúpula de montantes, cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido de hormigón armado de sección rectangular.</p>
	<p>Referencia Obra</p> <p>Nombre Pabellón Olímpico de Gimnasia</p> <p>Autor David Geiger</p> <p>Lugar Seúl, Corea</p> <p>Forma Circular</p> <p>Dimensión 131m</p>	<p>Cúpula de montantes, cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido de hormigón armado de sección rectangular.</p>
1988	<p>Referencia Patente</p> <p>Nombre <i>Roof Structure</i></p> <p>Autor David Geiger</p> <p>Forma Circular/Poligonal</p>	<p>Cúpula de montantes, cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido.</p>

	Referencia Patente	Cúpula de montantes, cables triangulados y membrana tensada desde anillo rígido.
	Nombre <i>Cable Dome System with Main Cables Oriented Along Chords</i>	
	Autor Horst Berger	
	Forma Circular/Poligonal	
1989	Referencia Obra	Cúpula de montantes, cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido prefabricado de hormigón armado de sección rectangular.
	Nombre <i>Florida Suncoast Dome (Tropicana Field)</i>	
	Autor KKBNA y Geiger Engineers	
	Lugar St. Petersburg, Florida, EEUU	
	Forma Circular	
	Dimensión 206,4m	
	Referencia Obra	Cúpula de montantes, cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido prefabricado de hormigón armado de sección rectangular.
	Nombre <i>Redbird Arena</i>	
	Autor Geiger Engineers	
	Lugar Normal, Illinois, EEUU	
	Forma Dodecágono	
	Dimensión -	
1991	Referencia Obra	Cúpula de montantes, cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido prefabricado de hormigón armado de sección rectangular.
	Nombre Centro Polideportivo Amagi	
	Autor Masao Saitoh y Structural Design Group Corp.	
	Lugar Amaji Yugashima, Japón	
	Forma Circular inscrito en cuadrado	
	Dimensión 48m	
1992	Referencia Obra	Cúpula de montantes y cables tensados triangulados desde anillo rígido de hormigón armado de sección rectangular.
	Nombre <i>Georgia Dome</i>	
	Autor Matthyns Levy y Weidlinger Associates	
	Lugar Atlanta	
	Forma Falsa súper elipse	
	Dimensión 233,5x186m	
1993	Referencia Patente	Cúpula de montantes y cables tensados triangulados desde anillo rígido.
	Nombre <i>Triangulated Roof Structure</i>	
	Autor Matthyns Levy	
	Forma Falsa súper elipse	
	Tipo Obra	Cúpula de montantes y cables radiales y membrana tensada desde anillo rígido.
	Nombre <i>Tayouan Areana</i>	
	Autor Geiger Engineers	
	Lugar Taiwán	
	Forma Circular	
	Dimensión -	
	Referencia Patente	Cúpula de montantes y cables

	Nombre	<i>Dome Shaped Roof Structure</i>	tensados triangulados.
	Autor	Mamoru Kawaguchi	
	Forma	Circular	
1994	Referencia	Patente	Cúpula de montantes y cables tensados triangulados desde anillo rígido y paneles retractables.
	Nombre	<i>Triangulated Cable Dome with Retractable Roof</i>	
	Autor	Matthyns Levy	
	Forma	Ovalada	
1998	Referencia	Obra	Cúpula de montantes y cables radiales tensados desde doble anillo rígido de acero y paneles de cubierta rígidos.
	Nombre	<i>Crown Coliseum</i>	
	Autor	Geiger Engineers	
	Lugar	La Fayetteville, Carolina del Norte, EEUU	
	Forma	Circular	
	Dimensión	98,1m	
1999	Referencia	Patente	Cúpula de montantes y cables tensados en diagonal sobre dos ejes principales desde anillo rígido.
	Nombre	<i>Dome Roof Structure and Method</i>	
	Autor	Gerardo Castro	
	Forma	Ovalada	
2004	Referencia	Obra	Cúpula de montantes y cables y membrana tensada con anillo rígido de acero.
	Nombre	Cúpula del Foro de las Culturas	
	Autor	Llorens & Soldevila	
	Lugar	Barcelona	
	Forma	Circular	
	Dimensión	-	
2011	Referencia	Obra	Doble cúpula de cables tensados triangulados desde dos anillos rígidos secantes en celosía tridimensional de acero.
	Nombre	Estadio "Único" de La Plata	
	Autor	Weidlinger Associates	
	Lugar	La Plata, Argentina	
	Forma	Doble círculo secante	
	Dimensión	238x190m	

Tabla 2.3: Cronología de inventos, proyectos y obras con cúpulas tensadas equilibradas con anillos rígidos.

iv) Cubiertas neumáticas

Los primeros globos aerostáticos se construyeron a principios del S. XVIII, cuando se comprobó que determinados gases, incluido el aire caliente, pesaban menos que el aire y que, por tanto, al elevarse, podían arrastrar objetos y personas consigo. Estos artefactos voladores estaban formados por un cesto suspendido por un globo esférico de tela lleno de aire calentado por un quemador. Dependían de las corrientes de aire para desplazarse, no para elevarse, así que los viajes tenían una fuerte componente de aventura e incertidumbre.

A partir de la segunda mitad del S. XIX se desarrollaron los primeros globos autopropulsados o dirigibles, primero mediante motores de vapor y luego eléctricos. Quizás para adaptarse a una forma más aerodinámica, se diseñaron nuevos tipos de globos más estilizados que los esféricos, combinando elementos rígidos y membranas.

En 1918, el ingeniero inglés Frederick W. Lanchester patentó un sistema de cúpulas y bóvedas de membrana soportada por la presión del aire en el interior de un espacio habitable. Esta presión se controlaba con ayuda mecánica.

En 1942, el ingeniero Herbert H. Stevens Jr. inventó un sistema similar de cúpula de membrana soportada por la presión de aire para utilizarla como refugio en épocas de guerra, y lo patentó dos años más tarde. Ese mismo año, un empresario de Baltimore le encargó un estadio con capacidad para 100.000 espectadores y Steven realizó un diseño con una cubierta basada en ese invento. Sin embargo, problemas burocráticos y el escepticismo de los promotores impidieron que el estadio se llegara a construir (KARGON 2013: 195-201).

Después de la II Guerra Mundial, el ejército de EEUU encargó a Walter Bird y su equipo del *Cornel Aeronautical Lab* el desarrollo de estructuras de cubrición de sus radares mediante materiales no metálicos, para evitar interferencias en las transmisiones. En 1948 se construyó el primer prototipo de *Radome*, en Ithaca, Nueva York, que consistía en un globo esférico de 15m de diámetro cortado por el plano del suelo por debajo del ecuador, así que disponía de un anillo de tracción para equilibrar las reacciones horizontales en el borde.

El pabellón de EEUU construido para la Exposición Universal celebrada en Osaka en 1970, según un diseño del ingeniero David Geiger, consistía en una gran cúpula rebajada de planta súper elíptica compuesta por una red romboidal de cables y membrana soportada por aire a presión dentro. La red de cables y la membrana estaban ancladas en el perímetro a un anillo de hormigón armado simplemente apoyado que equilibraba las reacciones horizontales (figura 2.17).

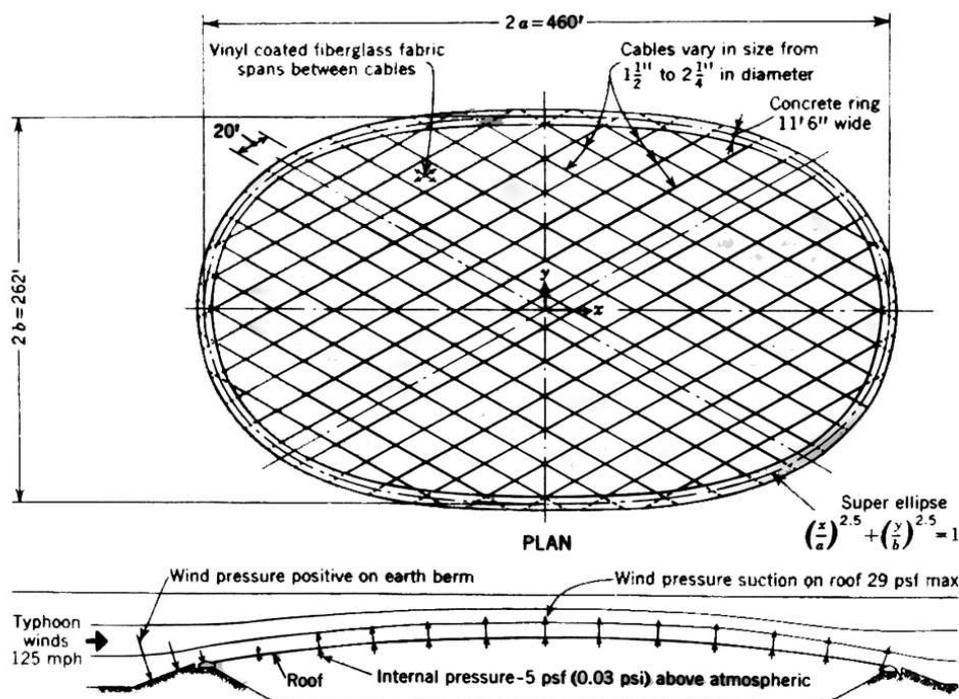


Figura 2.17: Planta y sección longitudinal de la cubierta soportada por aire del Pabellón de EEUU de la Exposición Universal de Osaka de 1970.

Desde 1970, se construyeron numerosas cubiertas de este tipo sobre grandes estadios de EEUU, la mayoría de ellas según el diseño de la ingeniería Geiger-Berger. Pero, a mediados de la década de 1980, cayeron en desuso, seguramente por el coste energético que suponía mantener la presión de aire constante dentro del recinto, y muchas fueron desmontadas y substituidas por otras nuevas.

A partir de la década de 1950, se empezaron a construir, tanto en EEUU como en Europa, algunas cubiertas en forma de cojín lenticular con aire a presión dentro, como por ejemplo el *Arts Theatre Center*, construido en Boston en 1959, o el Pabellón Móvil de la RAI, en 1967 (HERZOG 1977: 47).

No son habituales las cubiertas de gran luz resueltas con este tipo de estructura, seguramente porque, para poder reducir el espacio ocupado por la cubierta, se precisa que la curvatura sea pequeña y, entonces, las tensiones en la membrana resultan demasiado elevadas. Aun así, en 1988 se instaló un gran cojín lenticular de membrana tensada con aire a presión dentro sobre la arena del Anfiteatro Romano de Nimes, soportado con cables desde un anillo rígido en celosía apoyado sobre la estructura de piedra original.

En el 2007, se instaló temporalmente una cubierta de este tipo en el patio del Castillo de Bellver, en Palma de Mallorca, según el proyecto de Ramón Sastre. Para el equilibrio de las fuerzas horizontales en el perímetro de la membrana también se utilizó un anillo en celosía simplemente apoyado sobre el muro existente de piedra (figura 2.18).

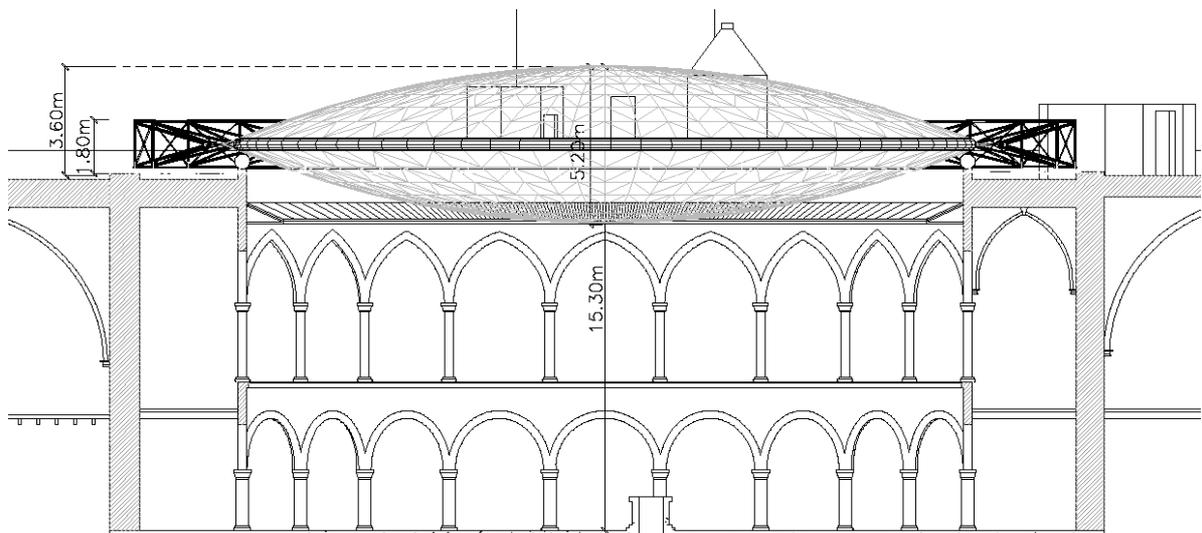


Figura 2.18: Sección del cojín lenticular instalado sobre el patio del Castillo de Bellver en Mallorca.

A continuación se muestra una tabla de algunos inventos, proyectos y obras referentes a cubiertas neumáticas equilibradas con anillos rígidos, ordenados cronológicamente.

Año	Datos	Descripción
1922	Referencia Patente	Cúpula esférica soportada por aire y anillo de compresión.
	Nombre <i>Construction and Roofing of Building</i>	
	Autor Feredrick W. Lanchester	
	Forma Circular	

1942	Referencia	Proyecto	Cúpula esférica soportada por aire y anillo rígido de compresión de hormigón armado.
	Nombre	Estadio cubierto para 100.000 espectad.	
	Autor	Herbert H. Stevens Jr.	
	Lugar	Baltimore, Maryland, EEUU	
	Forma	Circular	
	Dimensión	300m	
1944	Referencia	Patente	Cúpula esférica soportada por aire y anillo de compresión de hormigón armado.
	Nombre	<i>Building with air supported roof</i>	
	Autor	Herbert H. Stevens Jr.	
	Forma	Circular	
1959	Referencia	Obra	Cojín lenticular de membrana tensada con aire a presión dentro y anillo rígido de acero.
	Nombre	<i>Arts Theatre</i>	
	Autor	Carl Koch, Margaret Ross, Paul Weidlinger	
	Lugar	Boston, Massachusetts, EEUU	
	Forma	Circular	
	Dimensión	44m	
1962	Referencia	Patente	Cúpula de gajos de esfera de cables y membrana tensada soportada por aire, y anillo rígido.
	Nombre	<i>Air Supported Structure</i>	
	Autor	Edward N. Helmers	
	Forma	Circular	
1967	Tipo	Obra	Cojín lenticular asimétrico de membrana tensada con aire a presión dentro y anillo rígido de acero.
	Nombre	Pabellón Móvil para la RAI	
	Autor	Archile y Pier Giacomo Castiglioni	
	Lugar	Milán, Italia	
	Forma	Circular	
	Dimensión	-	
1970	Referencia	Obra	Cubierta ovalada de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado con sección trapezoidal.
	Nombre	Pabellón EEUU Exposición Universal	
	Autor	David Geiger	
	Lugar	Osaka, Japón	
	Forma	Súper elipse	
	Dimensión	138x78,6m	
1973	Referencia	Patente	Cubierta ovalada de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado.
	Nombre	<i>Roof Constuction</i>	
	Autor	David Geiger	
	Forma	Súper elipse	
1975	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado con sección en cajón.
	Nombre	<i>Unidome</i>	
	Autor	Geiger-Berger	
	Lugar	Cedar Falls, Iowa, EEUU	

	Forma	Cuadrondo	
	Dimensión	127x127m	
	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado con sección en "T" apaisada.
	Nombre	<i>Pontiac Silverdome</i>	
	Autor	David Geiger	
	Lugar	Pontiac, Michigan, EEUU	
	Forma	Octogonal	
	Dimensión	216,6x165,6m	
	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado con sección en "C".
	Nombre	<i>Milligan College</i>	
	Autor	David Geiger	
	Lugar	Johnson City, Tennessee	
	Forma	Circular	
	Dimensión	64,6m	
1981	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde de hormigón armado.
	Nombre	<i>Hubert H. Humphrey Metrodome</i>	
	Autor	Geiger-Berger	
	Lugar	Minneapolis, Minnesota, EEUU	
	Forma	Cuadrondo	
	Dimensión	223,5x189,6m	
1984	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado.
	Nombre	<i>B. C. Place Covered Stadium</i>	
	Autor	Geiger-Berger	
	Lugar	Vancouver, British Columbia, Canadá	
	Forma	Cuadrondo	
	Dimensión	236x195m	
1985	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado.
	Nombre	<i>RCA Dome (Hoosier Dome)</i>	
	Autor	Geiger-Berger	
	Lugar	Indianápolis, Indiana, EEUU	
	Forma	Cuadrondo	
	Dimensión	-	
1988	Referencia	Obra	Cojín lenticular de membrana tensada con aire a presión soportado por cables desde anillo rígido de acero.
	Nombre	Cubierta del Nimes Arena	
	Autor	Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Nimes, Francia	
	Forma	Circular	
	Dimensión	88x57m	
	Referencia	Obra	Cubierta de red de cables y membrana soportada por aire desde anillo rígido de hormigón armado.
	Nombre	<i>Tokyo Dome "Big Egg"</i>	
	Autor	Nikken Sekkei, Ltd y Takenaka Corp.	
	Lugar	Tokio, Japón	

	Forma	Ovalado	
	Dimensión	201x121m	
2000	Referencia	Obra	Cojín lenticular de membrana tensada con aire a presión soportado desde anillo rígido de acero.
	Nombre	Plaza de toros de Vista Alegre	
	Autor	Fhecor y Schlaich, Bergermann und Partner	
	Lugar	Madrid, España	
	Forma	Circular	
	Dimensión	50m	
2001	Referencia	Patente	Cojín lenticular de membrana con aire a presión soportado desde anillo rígido y otros elementos de soporte.
	Nombre	<i>Inflatable Roof Supports Systems</i>	
	Autor	Robert R. Simens	
	Forma	Circular	
2002	Referencia	Obra	Cojín lenticular de membrana tensada con aire a presión soportado por cables desde anillo rígido de celosía de acero.
	Nombre	Velódromo de Aigle	
	Autor	Passera & Pedretti	
	Lugar	Aigle, Suiza	
	Forma	Elíptico	
	Dimensión	95x71m	
2007	Referencia	Obra	Cojín lenticular de membrana tensada con aire a presión soportado por cables desde anillo rígido de celosía de acero.
	Nombre	Cubierta del patio del Castillo de Bellver	
	Autor	Ramon Sastre	
	Lugar	Palma de Mallorca, España	
	Forma	Circular	
	Dimensión	25m	

Tabla 2.4: Cronología de inventos, proyectos y obras con cubiertas neumáticas equilibradas con anillos rígidos.

Apartado 2.3: El problema olvidado

i) Panorama arquitectónico actual

Actualmente, las estructuras tensadas son el tipo dominante para cubrir grandes espacios. Casi nadie plantea ya cubrir un estadio mediante una estructura que no sea de cables tensados, combinados normalmente con membranas, porque cualquier otra solución parece ser menos eficiente, por ser más pesada. De hecho, la tendencia actual es la de incorporar como un valor añadido cualitativo, y no sólo cuantitativo, el hecho de que la cubierta se componga de cables o membranas tensadas²⁵.

²⁵ Ver por ejemplo las bases del reciente concurso para la reforma del estadio *Camp Nou*, que el F. C. Barcelona ha convocado, donde se requiere explícitamente una cubierta de cables.

Si se contasen los grandes estadios y arenas multiusos construidos en los últimos diez años, resultaría que un porcentaje elevado tiene una cubierta con estructura de cables con membranas tensadas, y otros tantos incorporan estructuras de membrana tensada o cojines inflados sobre estructuras metálicas rígidas convencionales, con tal de reducir las sollicitaciones gravitatorias²⁶.

El ejemplo reciente más desafortunado, por ir en sentido contrario, seguramente es el estadio para las Olimpiadas de Pekín 2008, construido según el diseño de Herzog & de Meuron y conocido popularmente como *nido de pájaro*, ya que su cubierta está formada de un enjambre de grandes vigas de acero dispuestas según un desorden cuidadosamente estudiado, aunque nada racional desde el punto de vista de la eficiencia estructural.

Aún así, no basta con que la cubierta sea tensada para que se convierta automáticamente en una estructura eficiente, ya que también existen ejemplos en el pasado de cubiertas tensadas que, por un planteamiento erróneo, acabaron resultando aparentemente mucho menos eficientes que muchas estructuras rígidas más convencionales²⁷.

Con este tipo de cubiertas sucede algo similar a lo que ocurrió con las catedrales góticas, que una vez dominada la técnica, el reto era construir más alto y más delgado. En este caso, por supuesto, cada vez se pretende cubrir espacios más grandes, pero sobre todo con geometrías más planas, es decir, de menor curvatura, lo cual supone una tendencia a incrementar los esfuerzos en la membrana y los cables, y, en consecuencia, las reacciones debidas a las fuerzas de pretensado.

ii) Anillos no circulares

Así, de todas las estructuras tensadas, las que equilibran sus fuerzas internas de forma autónoma son las más recurrentes para cubrir espacios cerrados, porque sólo precisan de un anillo rígido perimetral donde anclar cables y membranas. Es precisamente este elemento el que concentra el mayor gasto de material, por eso es el más susceptible de ser optimizado. Sin embargo, muchas de las discusiones acerca de la optimización de estas estructuras se centran en el trazado de los cables tensados, obviando el comportamiento del anillo²⁸.

El anillo rígido de la cubierta neumática de planta súper elíptica del pabellón de EEUU para la exposición de Osaka de 1970, tal y como se describe en la patente a la que dio lugar poco después, es uno de los pocos ejemplos documentados en el que un anillo rígido no circular se define según una geometría que coincide con el funicular de cargas resultante de la descomposición de reacciones horizontales de los cables y membranas, para así poder eliminar sustancialmente los momentos flectores en su propio plano (GEIGER 1973:1-10). Así, si una súper elipse se formula según:

²⁶ Ver por ejemplo el estadio *Alianz Arena*, construido en Munich en 2005 según el diseño de los arquitectos Jaques Herzog y Pier De Meuron, o el estadio *Nuevo San Mamés*, construido en Bilbao en 2014 según el proyecto de ACXT-IDOM.

²⁷ Ver por ejemplo el pabellón de Australia para la Exposición Universal de Osaka de 1970, de James Maccormick, y también el Estadio de las Olimpiadas de Montreal de 1976, del arquitecto Roger Taillibert.

²⁸ Sirva como ejemplo la gran cantidad de patentes de nuevos sistemas de cúpulas tensadas, en los que apenas se hace referencia a los anillos rígidos de su contorno.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1 \tag{2.1}$$

...donde el exponente $m > 2$ y a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente; entonces, la función de fuerza distribuida en el plano, cuyo polígono funicular coincide con la súper elipse (figura 2.19), se formula según:

$$q_y(x) = q_y \left| \left(\frac{x}{a}\right)^{m-2} \right| \quad \text{y} \quad q_x(y) = q_x \left| \left(\frac{y}{b}\right)^{m-2} \right| \tag{2.2a y 2.2b}$$

...donde $q_y(x)$ y $q_x(y)$ son las componentes X, Y de la fuerza distribuida en el plano en un punto x , y cualquiera de la súper elipse, y los factores q_y y q_x guardan la misma relación que la división de cuadrados de los semiejes (ESCRIG 1999b: 30-31), es decir:

$$\frac{q_x}{q_y} = \frac{a^2}{b^2} \tag{2.3}$$

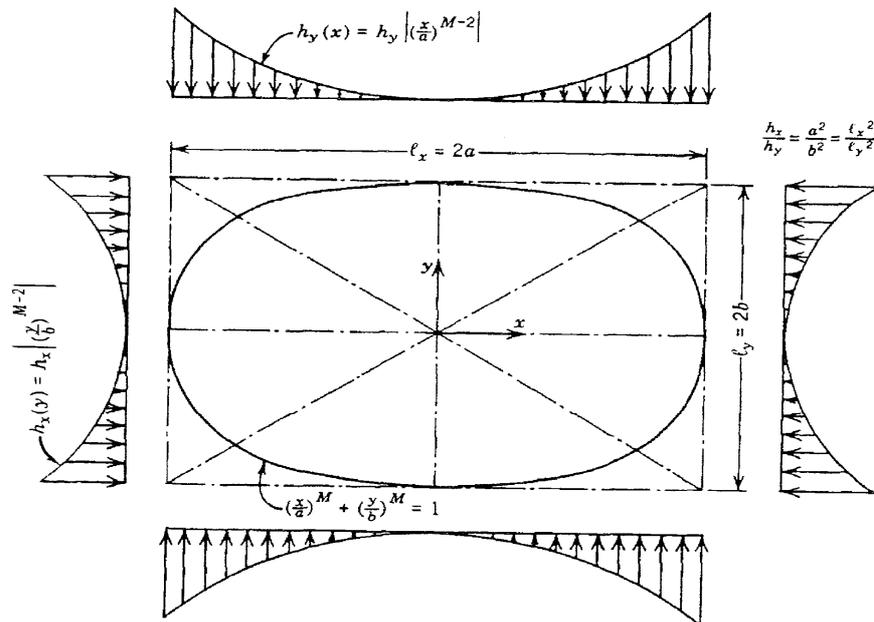


Figura 2.19: Función de fuerza distribuida cuyo funicular coincide con la geometría de un anillo súper elíptico.

El problema de la planta no circular también se menciona en el análisis que realizaron los propios autores del diseño estructural del *Georgia Dome*, refiriéndose a la dificultad de plantear los cables con disposición radial en estructuras de planta no circular frente a las ventajas que supone la disposición triangular. Es más, en el mismo texto los autores asumen como algo inevitable el problema de concentración de esfuerzo en las “esquinas” del anillo, es decir, en las partes de mayor curvatura, y de la aparición de flexiones en el plano del anillo (figura 2.20), y se explica que este problema se reduciría o desaparecería, obviamente, si el anillo fuese ovalado o circular (CASTRO 1992: 566-573).

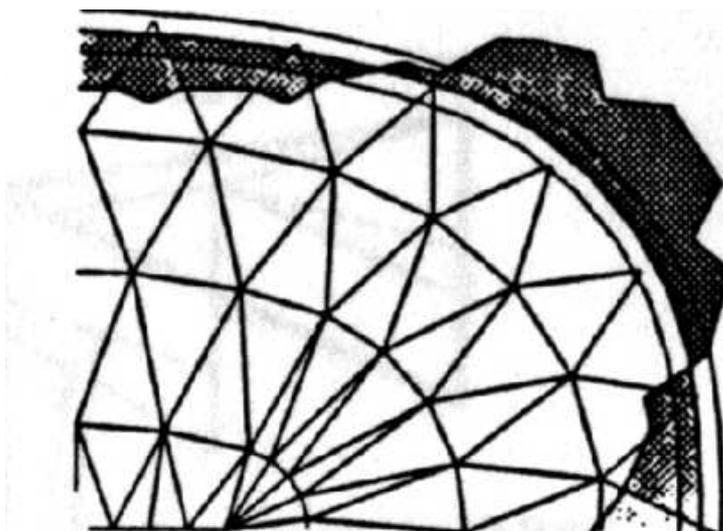


Figura 2.20: Diagrama de momentos flectores en el plano del anillo del *Georgia Dome* debido a las fuerzas de pretensado y cargas permanentes.

Si se compara el dimensionado del anillo rígido de hormigón armado de algunas cubiertas tensadas en función de la esbeltez λ en su propio plano, calculada según la relación entre el perímetro P de la planta y la base b_s de su sección resistente (tabla 2.5), se observa que las cubiertas neumáticas han permitido una esbeltez mayor, seguramente porque la tensión interna de la estructura es menor que el de las cúpulas tensadas. Parecería lógico que, dentro de un mismo tipo, las geometrías de planta circular también hubiesen permitido una esbeltez mayor que la de otros tipos de geometrías, debido a la ausencia de flexiones significativas en el anillo en situaciones de carga simétrica, pero no sucede así con las tres cúpulas tensadas que aparecen en la tabla, sino más bien lo contrario.

De todas formas, no es posible sacar conclusiones de esta comparación, porque no se trata de una muestra suficientemente representativa ni incluye otras variables que podrían afectar al dimensionado, como son los requisitos de cargas externas de viento y nieve, la resistencia del hormigón del anillo, las limitaciones de deformación de la cubierta tensada en los bordes, etc.

Obra	Año	Tipo	Forma	P (m)	b_s (m)	$\lambda=P/b_s$
Pabellón EEUU Expo. Osaka	1970	Neumática	Súper elipse	360	3,50	103
<i>Milligan College</i>	1975	Neumática	Circular	203	1,37	148
<i>UniDome Iowa</i>	1975	Neumática	Cuadronda	416	4,06	102
<i>Hubert Humphrey Metrodome</i>	1981	Neumática	Cuadronda	677	6,00	113
Pabellón Esgrima Seúl	1986	Cúpula tensada	Circular	309	4,53	68
Pabellón Gimnasia Seúl	1986	Cúpula tensada	Circular	412	6,43	64
<i>Georgia Dome</i>	1992	Cúpula tensada	falsa súper elipse	688	7,80	88

Tabla 2.5: Comparación de la esbeltez del anillo rígido de hormigón armado en el plano del anillo.

iii) Investigaciones recientes

Las últimas investigaciones acerca de las estructuras tensadas se concentran principalmente en tres frentes: los métodos numéricos para la búsqueda de la forma de superficies de tracción pura²⁹, las estructuras desplegadas y la parametrización de las formas, este último aplicado también otros tipos de estructuras y de elementos arquitectónicos en general.

El primero trata sobre la búsqueda de la forma mediante métodos numéricos como el de la “densidad de fuerza” o, el más reciente, de la “relajación dinámica de cables”. Estos métodos permiten definir geometrías de superficies y líneas de tracción pura y sustituyen al método tradicional para trazar estructuras tensadas mediante maquetas de hilos o mallas de tela dispuestas sobre contornos rígidos. Gracias a la geometría analítica y a los progresos en la resolución por ordenador de sistemas de ecuaciones mediante algoritmos matemáticos complejos, hoy día es posible definir casi cualquier forma de superficie de tracción pura. Las últimas investigaciones tratan de simplificar y optimizar el tiempo de cálculo.

El segundo es el las estructuras tensadas desplegadas, donde, igual que en el caso anterior, tradicionalmente se diseñaba y comprobaba la estabilidad de los diferentes estadios intermedios de desplegado con la ayuda de maquetas. Ahora es posible la modelización de estos estadios intermedios o, incluso, la comprobación de la estructura en movimiento de desplegado, como si se tratara de un mecanismo cinético, mediante el cálculo por ordenador. Son destacables los trabajos de investigación en este campo realizados por Félix Escrig, Juan Pérez Valcárcel y José Sánchez. También hay estudios sobre estructuras desplegadas de planos de membrana basados en técnicas similares al *origami*, como por ejemplo los que realiza Sergio Pellegrino en el *Space Structures Laboratory* del Instituto Tecnológico de California.

El tercero, el de la parametrización, no es un campo de investigación específico de las estructuras tensadas, aunque sí tiene relación en cuanto a que sirve para el diseño de formas complejas mediante parámetros objetivables que, si se definen según criterios estructurales de optimización, pueden dar lugar formas estructurales eficientes. El tema tratado en esta investigación, el del diseño de anillos rígidos no circulares sometidos a fuerzas de pretensado en su propio plano, podría ser objeto de parametrización.

En cualquier caso, aparte de excepciones puntuales, algunas citadas en el punto anterior, el problema de los anillos rígidos no circulares no ha sido hasta ahora el objeto de estudios específicos, más allá de los proyectos y obras en los se ha tenido que resolver su diseño y dimensionado, y no existe hasta la fecha un método general para la composición de estos anillos bajo el criterio de reducción o eliminación de los momentos flectores debidos a las fuerzas internas del tensado de cables y membranas.

Si se compara con la cantidad de bibliografía existente relativa al trazado de arcos, el de los anillos rígidos, por lo menos, en lo que se refiere a su aplicación en las estructuras tensadas, parece un mundo por explorar.

²⁹ *Form finding* en inglés.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Donde se planifican las estrategias a seguir para alcanzar los objetivos de la investigación, se definen los procedimientos utilizados en la resolución de los problemas planteados en el desarrollo y se enumeran las fuentes de información consultadas.

Apartado 3.1: Estrategias

Se pretende crear un sistema diseño de anillos de compresión no circulares y de distribución óptima de fuerzas en el plano que permita obtener unas condiciones de dimensionado similares a las que tienen los anillos circulares.

Se parte de un modelo de la rueda circular plana formada por un anillo rígido exterior sobre el que se tensa una membrana o unos radios distribuidos uniformemente. Se analiza su comportamiento mecánico, o sea, la calidad de los esfuerzos que se generan en el anillo por efecto de las reacciones de los elementos tensados, membrana o radios, así como de los fenómenos de inestabilidad asociados a estos esfuerzos, en concreto los que se producen en su propio plano. Se descubren cuáles son los factores que hacen que las condiciones de dimensionado de estos anillos sean óptimas, es decir, los que permiten que su sección resistente sea menor que las de otros elementos rígidos equilibrantes de estructuras tensadas de tamaño y capacidad de carga similares, atendiendo principalmente a la relación entre la distribución de las reacciones de los elementos tensados sobre el anillo y su curvatura.

Luego se comprueba la incidencia de esos factores en los anillos elípticos y se deducen las reglas que permiten igualar o aproximar sus condiciones de dimensionado a las de los anillos circulares, atendiendo también y sobre todo a la distribución de las reacciones procedentes de los elementos tensados sobre el anillo en función de su curvatura variable.

En el caso de los anillos con membranas tensadas, se trata definir la función de fuerza distribuida ideal de la que resulte un esfuerzo axial de compresión uniforme en una elipse. Después, mediante determinadas condiciones de combinación, se pretende diseñar anillos compuestos de arcos elípticos en los que se pueda aplicar una fuerza distribuida ideal.

En el caso de los anillos con radios tensados, se trata de igualar las condiciones de dimensionado en todos los tramos en los que queda dividido un anillo no circular, elíptico o compuesto, para que el ratio de aprovechamiento de una misma sección resistente sea igual en cada uno de ellos. Estas condiciones de dimensionado son principalmente los esfuerzos axiales, las condiciones de pandeo y los momentos flectores en el plano. Para igualar el esfuerzo axial de compresión, primero se estudia la distribución de fuerzas en un vértice de un polígono. Luego se pretende diseñar polígonos de lados iguales inscritos en anillos no circulares en los que el esfuerzo axial sea igual en todos los lados. Por último se pretende dividir anillos no circulares en tramos con la misma excentricidad máxima cuerda-arco, de manera que se repita el mismo diagrama de momentos en el plano a lo largo de todo el anillo.

Apartado 3.2: Procedimientos

i) Formulación

Se utilizan ecuaciones referidas a la geometría de la circunferencia y de la elipse. Estas son: las que definen estas curvas, según sus diferentes formas (cartesiana, polar o paramétrica), su primera y segunda derivada, la curvatura y el ángulo del radio en un punto, y la evoluta. También se utilizan los sistemas de referencia angular de la elipse y las relaciones que permiten pasar de uno a otro.

A partir de la formulación que prevé el comportamiento mecánico de los anillos circulares sometidos a diferentes tipos de cargas, se deducen nuevas fórmulas que permiten prever también el de los anillos elípticos y el de los compuestos por la combinación de arcos circulares y elípticos.

Se utilizan algunas herramientas *on-line* de formulación y operaciones con funciones en general de *Wolfram Alpha*, disponibles en <<http://www.wolframalpha.com/>>.

ii) Modelización de los anillos

Se realizan modelos de cálculo para estudiar los comportamientos mecánicos de los distintos tipos de anillos que aparecen en esta investigación. Como sólo se consideran los comportamientos en el plano, todos los modelos son en dos dimensiones. Se parte de una geometría dibujada en CAD, correspondiente a la geometría exacta de la curva en cuestión. Como la mayoría de los programas de cálculo que existen actualmente en el mercado no permiten calcular elementos curvos, los anillos se discretizan en pequeños segmentos rectos formando un polígono inscrito en el anillo.

La precisión del cálculo depende del número de elementos discretos en que se haya dividido el anillo. Cuantos más elementos tenga, menor será el error de aproximación a la curvatura y viceversa. Esto significa que, en las zonas de mayor curvatura, el número de elementos por unidad de longitud del anillo tendría que ser mayor que el de las de menor curvatura. En los anillos circulares esta cuestión no tiene incidencia, porque la curvatura es constante y, si la discretización es regular, todos los tramos tienen el mismo error de aproximación, pero en el caso de la elipse, como la curvatura es variable, se necesita incrementar la longitud de los elementos rectos a medida que disminuye la curvatura y aumentarla a medida que se hace más pequeña, de tal modo que el error de aproximación, que no es otra cosa que la distancia o excentricidad máxima entre el anillo y cada lado del polígono inscrito en el que se convierte al discretizarlo, se mantenga constante en todos los tramos. Así, la discretización con error uniforme de un anillo de curvatura variable se convierte en un problema en sí mismo.

Asumiendo una resolución inexacta de este problema, los anillos se han discretizado según sectores de ángulos geodésicos iguales³⁰, porque de esta discretización resulta un número de segmentos más elevado en las zonas de mayor curvatura y menos en las de menor; aunque como se comprobará en el desarrollo de la tesis, esto no garantiza que el error sea igual en todos los tramos. En cualquier caso, si el número de elementos rectos en los que queda

³⁰ Los ángulos geodésicos son los que se pueden medir entre los radios de curvatura de una función (ver el primer apartado del Capítulo 4).

discretizado el anillo es suficientemente grande como para reproducir los cambios en la curvatura del anillo dentro de un mismo tramo, este método es aceptable.

En los modelos de anillos simples, circulares o elípticos, sólo se considera un cuadrante, ya que la doble simetría garantiza que, si se mantiene también en las cargas, los resultados son extrapolables a los otros tres cuadrantes. Para simular la continuidad del anillo en los extremos, se han considerado empotramientos desplazables en la dirección radial, porque los estados de cargas considerados son siempre simétricos y los nudos de los extremos de los cuadrantes tienden a desplazarse sólo hacia el interior del anillo, en la dirección coincidente con uno de los ejes principales, pero no a girar ni a desplazarse en la dirección tangencial.

En los modelos de anillos compuestos se consideran conjuntos de arcos en los que existe simetría de geometría y de carga respecto a alguno de los ejes globales, X o Y . Si no existe ninguno, se considera el anillo completo en el modelo, fijando su posición mediante unas barras sin apenas rigidez.

iii) Análisis

Sobre los modelos discretizados de los anillos, se realizan análisis de dos tipos: de deducción y de comprobación.

En los de deducción, se somete una geometría elemental a una disposición de fuerzas igualmente elemental y se obtienen unos resultados de esfuerzos y de deformaciones, a partir de los cuales se deduce una formulación. A veces, se tienen que realizar varios cálculos de un mismo modelo para converger en un resultado, es decir, la imprecisión debida a la discretización impide sacar conclusiones de un solo modelo, porque puede desvirtuar el resultado tanto como para que de él se pueda deducir una formulación errónea. En esos casos se necesita repetir el cálculo aumentando el número de elementos discretos hasta observarse una tendencia concreta.

En los de comprobación, se somete una geometría compleja a una distribución de fuerzas también compleja y se comprueba que los resultados obtenidos coinciden con los calculados a partir de la formulación deducida de los modelos sencillos.

Los modelos elementales corresponden a geometrías circulares con fuerzas uniformemente distribuidas o concentradas en los extremos de los cuadrantes, mientras que los modelos complejos corresponden a geometrías elípticas o compuestas con fuerzas distribuidas no uniformes o fuerzas puntuales dispuestas según lo calculado en alguna ecuación de nueva deducción.

Para el análisis de todos los modelos se ha utilizado el programa *wineva* de cálculo matricial de estructuras de barras en dos dimensiones. Este programa no realiza cálculos en segundo orden ni tampoco se han considerado intencionadamente imperfecciones en la geometría, más allá de las que genera la misma discretización o el redondeo automático de las unidades³¹.

³¹ El programa *wineva* considera por defecto tres decimales, o sea, una precisión de milímetros en las dimensiones de los elementos. Esto hace que las coordenadas de los nodos se modifiquen levemente respecto a las obtenidas en el dibujo en CAD.

iv) Representación gráfica

También existen dos tipos de representaciones gráficas, las que permiten ilustrar el resultado de un análisis y las que permiten abordar la resolución de un problema geométrico mediante métodos gráficos propios del dibujo técnico.

En las primeras simplemente se reproduce un resultado de un cálculo en forma de diagrama de esfuerzos, normalmente de momentos flectores, aunque a veces también de axiles o cortante, o de una deformada ampliada³². En los diagramas de esfuerzos, se ha ajustado el valor de los resultados máximos y mínimos, según el resultado de la aplicación directa de las fórmulas matemáticas que se hayan deducido, siempre que esto sea posible. Es decir, se han corregido las imprecisiones del análisis de los modelos debidas a la discretización y a las imperfecciones involuntarias. Cuando se comparan varias distribuciones de cargas sobre anillos iguales, los diagramas de esfuerzos se representan a la misma escala. El valor absoluto de los resultados no es importante.

En las segundas se ilustran algunos problemas geométricos. En algún caso se ha llegado a la resolución de estos problemas mediante métodos gráficos, pero en la mayoría sólo se representan algunos conceptos geométricos del planteamiento que luego se utilizan en la resolución matemática.

v) Resolución de problemas

Se plantean algunos problemas matemáticos cuya resolución resulta ciertamente compleja. La mayoría de estos problemas tratan acerca de la división de arcos elípticos según criterios de eficiencia en la disposición de fuerzas radiales. En los casos más complejos, se pretende igualar estas divisiones simultáneamente en todos los arcos elípticos y de circunferencia que forman un anillo compuesto.

Estos problemas se plantean como sistemas de ecuaciones no lineales, en los que las incógnitas son cada una de las posiciones intermedias de la división, además de la variable que se pretende igualar en todos los tramos, es decir, que el número de ecuaciones es directamente proporcional al número de divisiones. Para su resolución se utilizan métodos iterativos del comando *solver* del programa *Microsoft Excel*. También se recurre a las herramientas de operaciones con funciones de *Wolfram Alpha* ya citadas.

Apartado 3.3: Fuentes

i) Patentes, proyectos y obras construidas

Se consultan las patentes relacionadas con los sistemas autónomos de estructuras tensadas, algunos considerados como inventos y otros concebidos directamente como sistemas de cubierta, en particular los que se corresponden a tipos que necesitan un anillo rígido exterior para equilibrar sus fuerzas internas.

³² Al ampliar la deformada para que sea perceptible, se invierte la curvatura del anillo en el dibujo. Esta inversión de curvatura difícilmente se produciría en la realidad.

Se analizan algunas obras, construidas o en proyecto, en las que se han utilizado estructuras de cubierta de cables y membranas tensadas sobre anillos rígidos de diversas geometrías y escalas. Su dispersión geográfica y su excepcionalidad³³, además del hecho de que algunas de ellas ya no se conserven, ha dificultado visitarlas *in situ*, así que su análisis se realiza a partir de imágenes y escritos de fuentes bibliográficas o de paseos virtuales a través de INTERNET.

ii) Bibliografía

Se consultan libros y artículos sobre geometría, matemáticas, mecánica, estructuras tensadas e historia de la arquitectura. A veces se inicia una búsqueda de información a través de *Wikipedia*, aunque una vez encontrada la pista para continuar el hilo de la investigación, se consultan fuentes originales.

Para formulación matemática se recurre casi siempre a la enciclopedia virtual *Wolfram MathWorld* disponible *on-line* en <<http://mathworld.wolfram.com/>>, aunque se completa con otras fuentes bibliográficas.

iii) Otras fuentes de inspiración

Aparte de las fuentes de información objetiva, se recurre a la observación de algunos objetos tensados tales como lámparas de papel, cojines hinchados, ruedas de bicicleta o esculturas que sirven de inspiración para esta investigación. La información aportada a través de esta observación no es medible objetivamente, así que en las referencias no se hace mención explícita de ellas.

³³ Aunque este tipo de estructuras se está extendiendo cada vez más, no es ni mucho menos habitual en la arquitectura convencional.

PARTE II: DESARROLLO

CAPÍTULO 4: ANILLOS RÍGIDOS CON MEMBRANA TENSADA

Donde se revisan algunos conceptos y ecuaciones relativas a las elipses, se formula la función de fuerza distribuida ideal en el plano de un anillo elíptico de la que resulta un esfuerzo axial de compresión uniforme en todo el perímetro y ausencia total de flexiones, se enuncian las condiciones de combinación entre arcos de elipses y circunferencias, y se formulan los sistemas de ecuaciones necesarios para diseñar anillos no circulares, compuestos alrededor de segmentos y polígonos, y definir su fuerza distribuida ideal.

Apartado 4.1: Apuntes previos

i) Sistemas de referencia

A continuación se describen los tres sistemas de referencia angular o de latitud para situar un punto cualquiera de una elipse (figura 4.1).

La latitud geocéntrica es el ángulo ω formado entre el eje mayor de la elipse y el segmento MO que une el centro O de la elipse con un punto M cualquiera de ésta. También se corresponde con el ángulo θ de la fórmula de la elipse expresada en coordenadas polares (ecuación 4.2c).

La latitud geodésica es el ángulo φ formado entre el eje mayor y la recta normal a la elipse un punto M cualquiera. También es el ángulo que tiene el radio de curvatura en ese punto. La gran normal es el segmento MI que une el punto de intersección I entre la recta normal y el eje menor de la elipse con un punto M de la elipse.

La latitud reducida es el ángulo ψ formado entre el eje mayor de la elipse y la recta que une el centro de la elipse con el punto M' , correspondiente a la imagen proyectada del punto M sobre cualquiera de sus dos circunferencias principales, que son las que tienen centro en O y radio igual a cada uno de los semiejes a y b de la elipse.

Los tres sistemas de referencia tienen el cero en la horizontal y giran en sentido contrario a las agujas del reloj. Los sistemas geocéntrico y reducido tienen un punto de origen único situado en el cruce de los ejes principales de la elipse, que es en realidad el del sistema de coordenadas polares; en cambio, el sistema geodésico no tiene un único punto de referencia, sino que varía en cada rotación de ángulo. En una circunferencia, los tres sistemas de referencia angular son coincidentes.

Para cambiar de un sistema de referencia a otro, se han definido las siguientes relaciones (HERNÁNDEZ-LÓPEZ 1997: 45-46):

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

[4.1a; 4.1b y 4.1c]

En este trabajo, la dirección radial se refiere normalmente a la que adoptan los radios de curvatura del anillo en cada punto, es decir, la que se indica según el ángulo φ ³⁴. Los términos

³⁴ A veces también se refiere a la dirección que adoptan los radios tensados, que como se demuestra en el siguiente capítulo, no siempre es coincidente con la de los radios de curvatura.

centrípeto y centrífugo no se refieren a un solo centro, sino al sentido de las fuerzas radiales, de fuera hacia dentro y de dentro hacia fuera del anillo respectivamente.

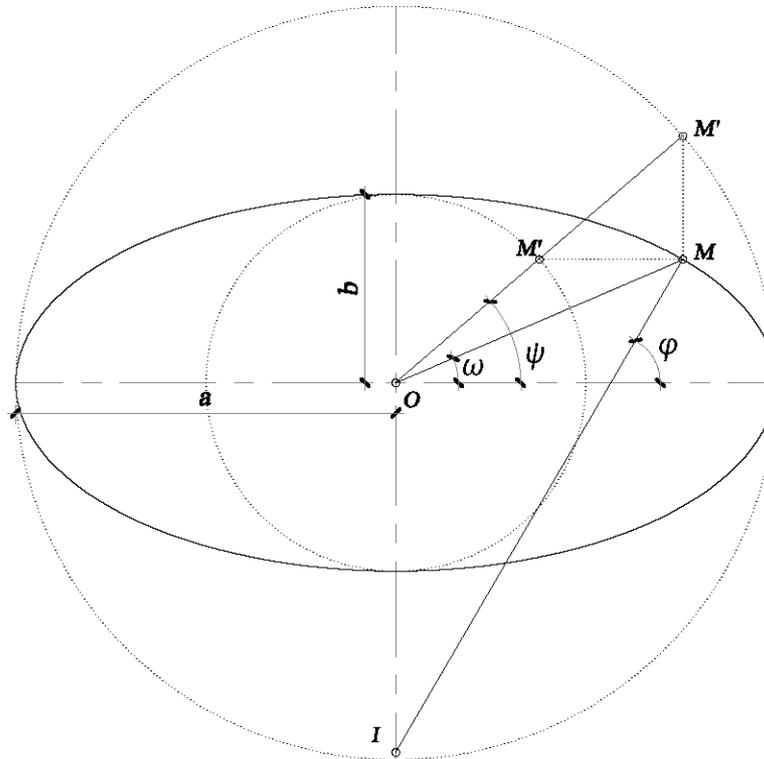


Figura 4.1: Latitud de un punto M de la elipse según los sistemas geocéntrico (ω), geodésico (ϕ) y reducido (ψ).

ii) Ecuaciones de la elipse

La elipse es una curva cerrada que se define a partir de sus semiejes a y b y una ecuación que puede expresarse de forma cartesiana, paramétrica o polar (ecuaciones 4.2a; 4.2b y 4.2c).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} x = a \cdot \cos \psi \\ y = b \cdot \text{sen} \psi \end{cases} \quad \rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)^2}{a^2} + \frac{\text{sen}(\theta)^2}{b^2}}}$$

[4.2a; 4.2b y 4.2c]

La forma paramétrica se expresa en función del ángulo reducido. Recurriendo a las transformaciones de las ecuaciones 4.1a; 4.1b y 4.1c también se puede expresar en función del ángulo geodésico o geocéntrico.

La excentricidad ε de la elipse es la relación entre la diagonal del rectángulo que inscribe un cuadrante y su semieje mayor, y se calcula según:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad [4.3]$$

Una excentricidad próxima a cero corresponde a una elipse de ejes prácticamente iguales, es decir, casi una circunferencia, mientras que una excentricidad próxima a la unidad indica que sus ejes son muy diferentes. Alternativamente, la relación entre los semiejes de la elipse puede calcularse de forma más sencilla según $k=a/b$.

iii) Evoluta

La evoluta es el lugar geométrico de todos los centros de radios de curvatura de una función. En el caso de la elipse tiene forma de astroide de cuatro puntas situadas sobre los ejes principales (figura 4.2).

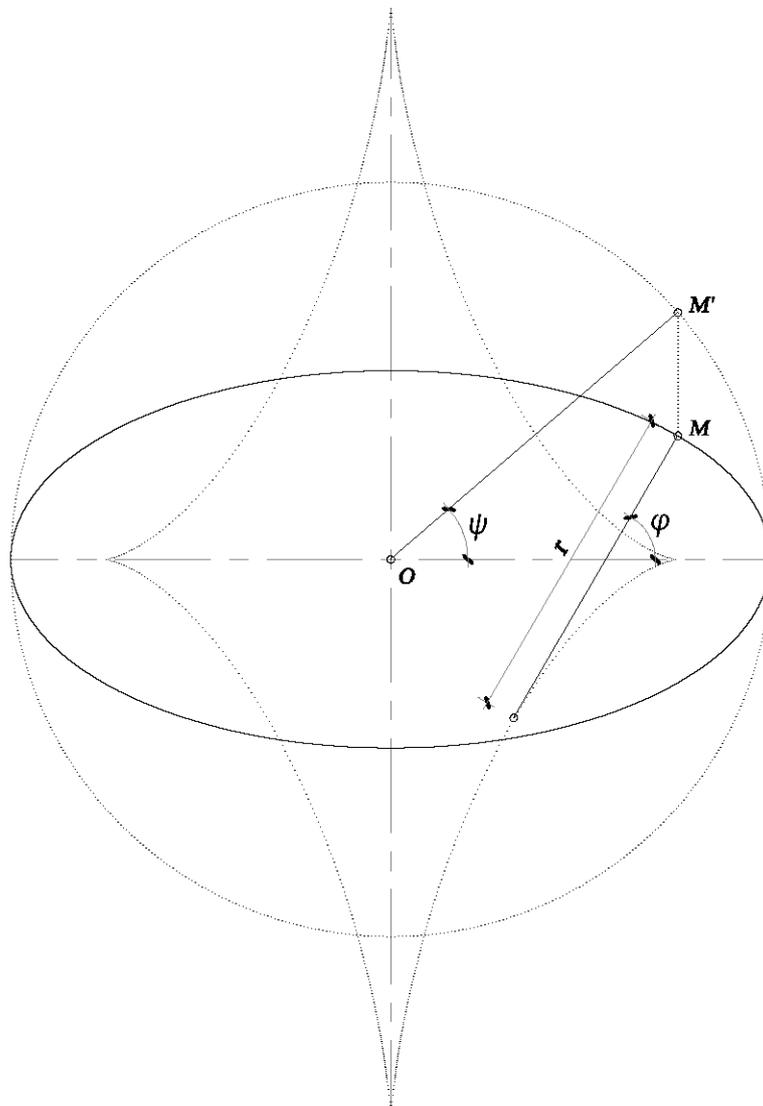


Figura 4.2: Evoluta de la elipse y radio de curvatura en un punto M .

Normalmente se formula según:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \psi \\ y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \psi \end{cases}$$

[4.4a ó 4.4b]

Cuando la diferencia entre a y b es muy grande, la evoluta se estira sobre el eje Y , porque los radios de curvatura son más grandes cuanto más se aproximan al eje menor. En cambio, si la diferencia es pequeña, la evoluta disminuye de tamaño, porque la diferencia entre sus radios de se vuelve también más pequeña.

Apartado 4.2: Fuerza distribuida ideal

i) Carga y curvatura

Los anillos rígidos de compresión forman el contorno exterior de las ruedas tensadas. La fuerza radial centrípeta sobre ellos procede de las reacciones en el plano que le transmiten los elementos tensados, membrana o radios. Como la membrana tiene contacto continuo con el anillo, la reacción sobre éste equivale a una carga o fuerza linealmente distribuida. En cambio, en una rueda de radios tensados, las reacciones son fuerzas puntuales. Si se desprecia la flexión local surgida por la incidencia del radio tensado sobre el anillo y los cables están dispuestos con suficiente densidad, el efecto de estas fuerzas puntuales se asemeja mucho al de una fuerza distribuida. Este capítulo sólo trata del diseño de los anillos rígidos sometidos a los efectos de fuerzas linealmente distribuidas en su propio plano.

Entonces, existe una carga o fuerza ideal, linealmente distribuida y aplicada en el plano del anillo, de la que resulta un esfuerzo axil N de compresión de valor uniforme en todos los puntos del anillo y ausencia total de otros esfuerzos, definida según el principio de relación entre la carga q y la curvatura c , o su inverso, el radio r (TIMOSHENKO 1957a: 29):

$$N = \frac{q}{c} \quad \text{ó} \quad N = q \cdot r$$

[4.5a ó 4.5b]

Según esta relación, para que el esfuerzo axil se mantenga constante, el valor de la carga o fuerza distribuida tiene que variar en cada punto del anillo igual que lo hace la curvatura, o sea, que en una circunferencia, como tiene una curvatura constante y un solo centro para todos sus radios, en su estado ideal, la fuerza distribuida debería ser radial, centrípeta y de valor uniforme, mientras que en una elipse, como su curvatura es variable y tiene centros distintos en cada punto, la carga también tendría que ser radial y centrípeta (que no con un solo centro), pero de valor variable.

Entonces, la ecuación para calcular la curvatura c de una función cualquiera f en su forma paramétrica:

$$c = \frac{y'' \cdot x' - x'' \cdot y'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)^3}} \quad [4.6]$$

...donde (x', y') y (x'', y'') se corresponden con su primera y segunda derivada respectivamente, se multiplica por un valor de axil N constante y se obtiene la función de carga o fuerza distribuida ideal:

$$q = N \cdot c \quad [4.7]$$

Así, en el caso particular de la función de una elipse expresada de forma paramétrica, se obtienen su primera y su segunda derivada:

$$\begin{cases} x' = -a \cdot \operatorname{sen} \psi \\ y' = b \cdot \operatorname{cos} \psi \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x'' = -a \cdot \operatorname{cos} \psi \\ y'' = -b \cdot \operatorname{sen} \psi \end{cases} \quad [4.8a \text{ y } 4.8b]$$

...se substituyen en la ecuación 4.6, y resulta la función curvatura $c(\psi)$ ó $c(\varphi)$ de la elipse:

$$c(\psi) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{cos}^2 \psi)^3}}$$

ó

$$c(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{\left\{ a^2 \operatorname{sen}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] + b^2 \operatorname{cos}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right\}^3}} \quad [4.9a \text{ ó } 4.9b]$$

Por tanto, aplicando el principio de relación entre carga y curvatura, también se obtiene su función de fuerza distribuida ideal $q(\psi)$, de la que resulta un valor del esfuerzo axil N constante en todo el perímetro (MARTÍN-SÁIZ 2014: 44):

$$q(\psi) = \frac{Nab}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{cos}^2 \psi)^3}}$$

ó

$$q(\varphi) = \frac{Nab}{\sqrt{\left\{ a^2 \operatorname{sen}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] + b^2 \operatorname{cos}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right\}^3}} \quad [4.10a \text{ ó } 4.10b]$$

Para calcular los valores mínimo y máximo de la fuerza distribuida ideal de un anillo elíptico, situados en los extremos de los ejes mayor y menor respectivamente, se substituye el ángulo por 90° y 0° en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores:

$$q(90^\circ) = \frac{Fb}{a^2} \quad \text{y} \quad q(0^\circ) = \frac{Fa}{b^2} \quad [4.11a \text{ y } 4.11b]$$

Esta fuerza distribuida no uniforme está formada por un número infinito de vectores cuyo valor escalar se puede expresar como:

$$q(\psi) \cdot d\psi \quad \text{ó} \quad q(\varphi) \cdot d\varphi \quad [4.12a \text{ ó } 4.12b]$$

...según el sistema de referencia angular que se utilice.

El valor del ángulo φ se calcula a partir de la fórmula de la elipse en su forma cartesiana³⁵ (ecuación 4.13a). Primero es necesario encontrar la pendiente de la recta tangente y luego de la normal en un punto (x, y) , es decir, su derivada en un punto y luego la inversa (ecuaciones 4.13b y 4.13c):

$$f(x) = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad f'(x) = \pm \frac{bx}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \quad \frac{-1}{f'(x)} = \frac{-a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\pm bx} \quad [4.13a, 4.13b \text{ y } 4.13c]$$

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma con la horizontal, o sea:

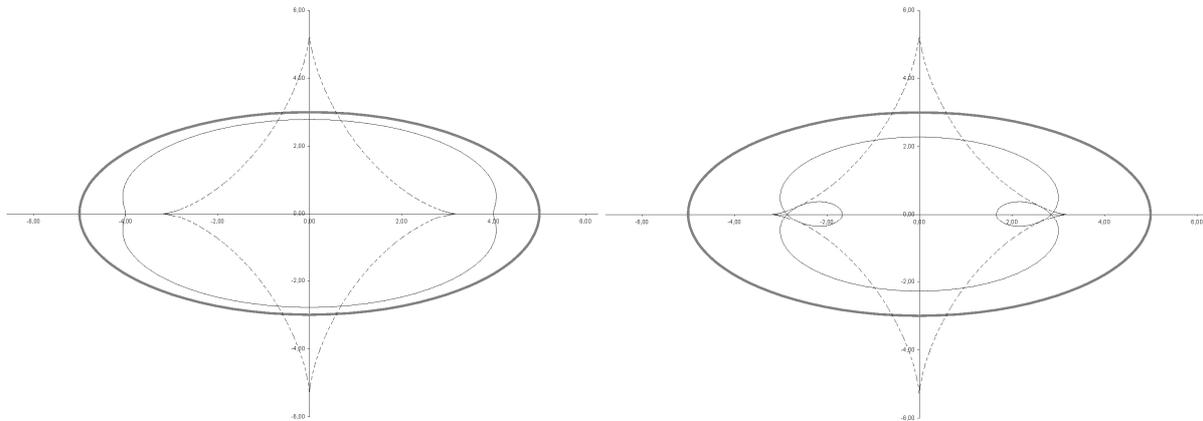
$$\varphi = \arctg \left(\frac{-a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\pm bx} \right) \quad [4.14]$$

ii) Representación de la fuerza distribuida ideal

De ese conjunto infinito de vectores, se dibuja su contorno exterior, o sea, la línea que une todos los extremos de las flechas, y se obtiene una representación gráfica de la función de carga o fuerza distribuida ideal en el plano del anillo. Para encontrar las coordenadas de los puntos que forman esta gráfica, se resta el valor escalar de la fuerza (ecuaciones 4.10a o 4.10b) en la dirección del vector (ecuación 4.14) a la coordenada (x, y) de cada punto de la elipse (MARTÍN-SÁIZ 2014: 45).

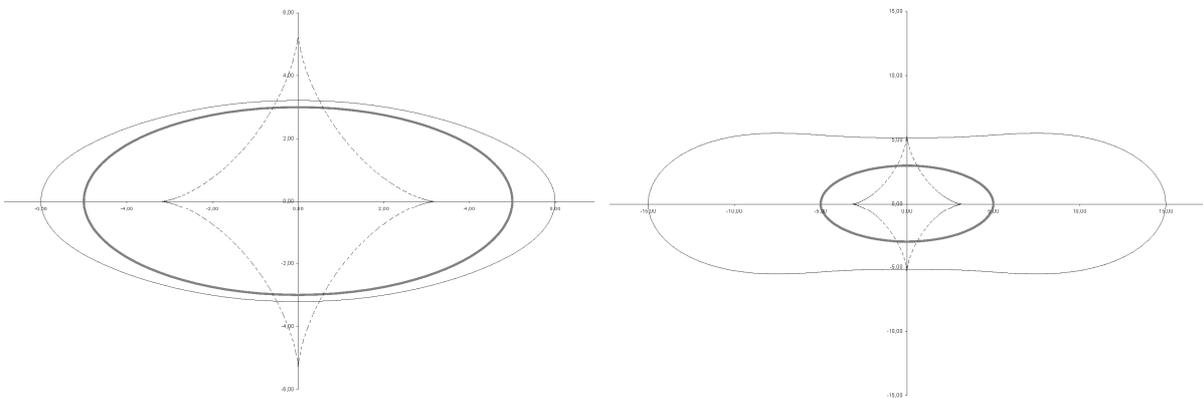
³⁵ Habitualmente la ecuación de la elipse en su forma cartesiana se escribe según $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Si se representa esta fuerza distribuida ideal sobre la propia elipse, hay que tener en cuenta que la forma de su contorno puede variar en función del factor de escala que se utilice.



Figuras 4.3a y 4.3b: Representación de una misma fuerza distribuida ideal (línea fina) con dos factores de escala diferentes.

Así, si se multiplica la función de carga por un factor de escala negativo, es decir, imaginando los vectores aplicados sobre la elipse, pero con el extremo fuera de ella, se obtiene una representación diferente de la misma función de fuerza distribuida ideal (figura 4.4a). Si se incrementa el factor de escala negativo se observa como la función de fuerza distribuida ideal adopta una forma parecida a la de un cacahuete (figura 4.4b). En cualquier caso, está claro que el valor de fuerza distribuida es menor cuando la curvatura es pequeña y aumenta cuando ésta crece.



Figuras 4.4a y 4.4b: Representación de la misma fuerza distribuida ideal (línea fina) con diferentes factores de escala negativos.

Atendiendo a cómo se dibujan normalmente las fuerzas distribuidas en las estructuras, con la punta de los vectores sobre el elemento que la recibe, este tipo de gráfico sería el más adecuado. En cualquier caso, esto sólo es un criterio de representación de la fuerza distribuida ideal y no tiene ninguna incidencia en el cálculo.

iii) Acortamiento axil

Un anillo elíptico sometido a tal fuerza distribuida sufre sólo una deformación en forma de acortamiento axil uniforme en todo el perímetro. Este acortamiento es directamente proporcional a la tensión normal σ , que es la relación entre el valor del axil N y el área de su sección resistente.

Entonces, si el acortamiento en un anillo circular de perímetro $P = 2 \cdot \pi \cdot r$, se calcula según:

$$\Delta P = \frac{\sigma \cdot P}{E} \quad \text{ó} \quad \Delta r = \frac{\sigma \cdot r}{E} \quad [4.15a \text{ ó } 4.15b]$$

...donde σ es la tensión normal en la sección del anillo debida al esfuerzo axil, en los anillos elípticos sometidos a una carga distribuida ideal, de la que también resulte un esfuerzo axil N constante, primero se calcula el perímetro de forma aproximada según la fórmula de Ramanujan³⁶:

$$P = \pi \cdot \left[3 \cdot (a+b) - \sqrt{(3a+b) \cdot (a+3b)} \right] \quad [4.16]$$

...se substituye P en la ecuación 4.15a.

Una vez calculado el acortamiento axil ΔP del anillo elíptico, se encuentra el acortamiento de sus semiejes Δa y Δb , substituyendo P por $(P - \Delta P)$ en la ecuación 4.16.

$$b - \Delta b = \frac{P - \Delta P}{\pi \left(3n + 3 - \sqrt{3k^2 + 10k + 3} \right)} \quad \text{y} \quad a - \Delta a = k(b - \Delta b) \quad [4.17a \text{ y } 4.17b]$$

...donde $k = a/b$.

Después de calcular los acortamientos de los semiejes se puede calcular el acortamiento de todos los radios geocéntricos ρ que describen la función de la elipse en forma polar si se substituye a y b por $(a - \Delta a)$ y $(b - \Delta b)$ dentro de la función que describe los puntos de la elipse, encontrando $(\rho - \Delta \rho)$ según:

$$(\rho - \Delta \rho)(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)^2}{(a - \Delta a)^2} + \frac{\text{sen}(\theta)^2}{(b - \Delta b)^2}}} \quad [4.18]$$

³⁶ Para calcular el perímetro exacto se puede aplicar la fórmula general de la longitud de un arco S de una función $f(x)$ cualquiera:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx \quad \text{ó} \quad S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \cdot d\theta$$

Apartado 4.3: Condiciones de combinación de arcos

Después de definir la función de fuerza distribuida ideal sobre una elipse en su propio plano, se combinan arcos de elipse y de circunferencia hasta formar un anillo. Siempre que exista continuidad en la curvatura en los puntos de unión entre los diferentes arcos, se puede definir una fuerza ideal linealmente distribuida, combinando aquella que es ideal para cada arco con las de sus arcos contiguos, de la que resulte un esfuerzo axial de compresión constante en todo el anillo y ausencia de otros esfuerzos. Para que exista continuidad en la curvatura, dos arcos contiguos, no sólo tienen que ser tangentes, sino que además tienen que tener el mismo centro y radio de curvatura en el punto de tangencia.

Entonces, en un punto M cualquiera de una elipse, del que se puedan calcular el ángulo geodésico φ , el radio de curvatura r y la posición de su centro sobre la evoluta, se dibuja una circunferencia oscultriz³⁷ que tenga un valor de fuerza distribuida coincidente con el que tiene el punto M , según la ley de fuerza distribuida ideal de la elipse $q(\varphi)$.

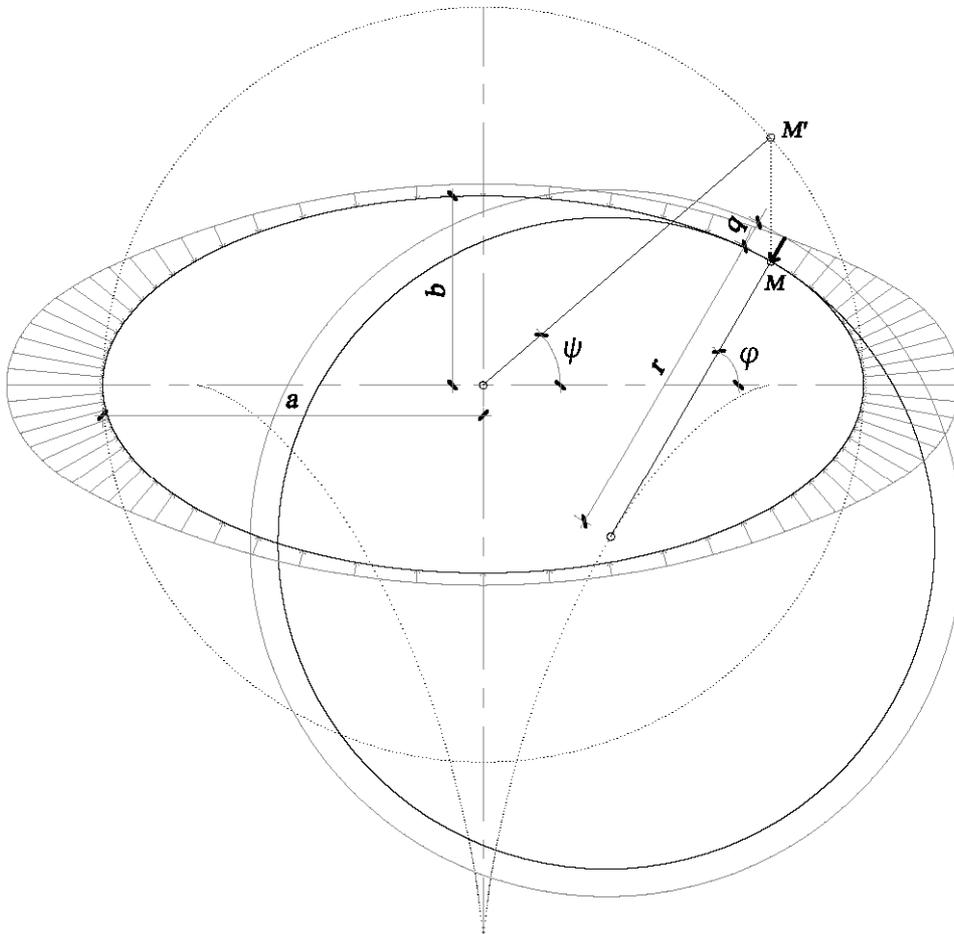


Figura 4.5: Tangencia entre una elipse y su circunferencia oscultriz en un punto M de ángulo geodésico φ , y fuerza distribuida ideal.

³⁷ El círculo osculador o circunferencia oscultriz es aquella que es tangente a la elipse en un punto y además tiene la misma curvatura. Sólo hay una circunferencia oscultriz por cada punto de la elipse. El conjunto de centros de todas las circunferencias oscultrices de una elipse se encuentra en su evoluta.

Para calcular el radio de curvatura de la elipse en el punto M , correspondiente al de la circunferencia osculatriz tangente en ese punto, se realiza el inverso de las ecuaciones 4.9a y 4.9b, que definen la curvatura:

$$r(\psi) = \frac{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{cos}^2 \psi)^3}}{ab}$$

6

$$r(\varphi) = \frac{\sqrt{\left\{ a^2 \operatorname{sen}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] + b^2 \operatorname{cos}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right\}^3}}{ab}$$

[4.19a ó 4.19b]

En las mismas condiciones de igualdad de radio y centro de curvatura, también pueden combinarse dos elipses idénticas (figura 4.6), y dos elipses distintas (figura 4.7). En el primer caso, la tangencia se produce en puntos con el mismo ángulo φ , mientras que en el segundo, para igualar el radio, la elipse menor normalmente necesita tener un ángulo φ mayor y viceversa. En ambos casos, el centro del radio de curvatura en el punto de tangencia se encuentra en la intersección entre las evolutas de sendas elipses.

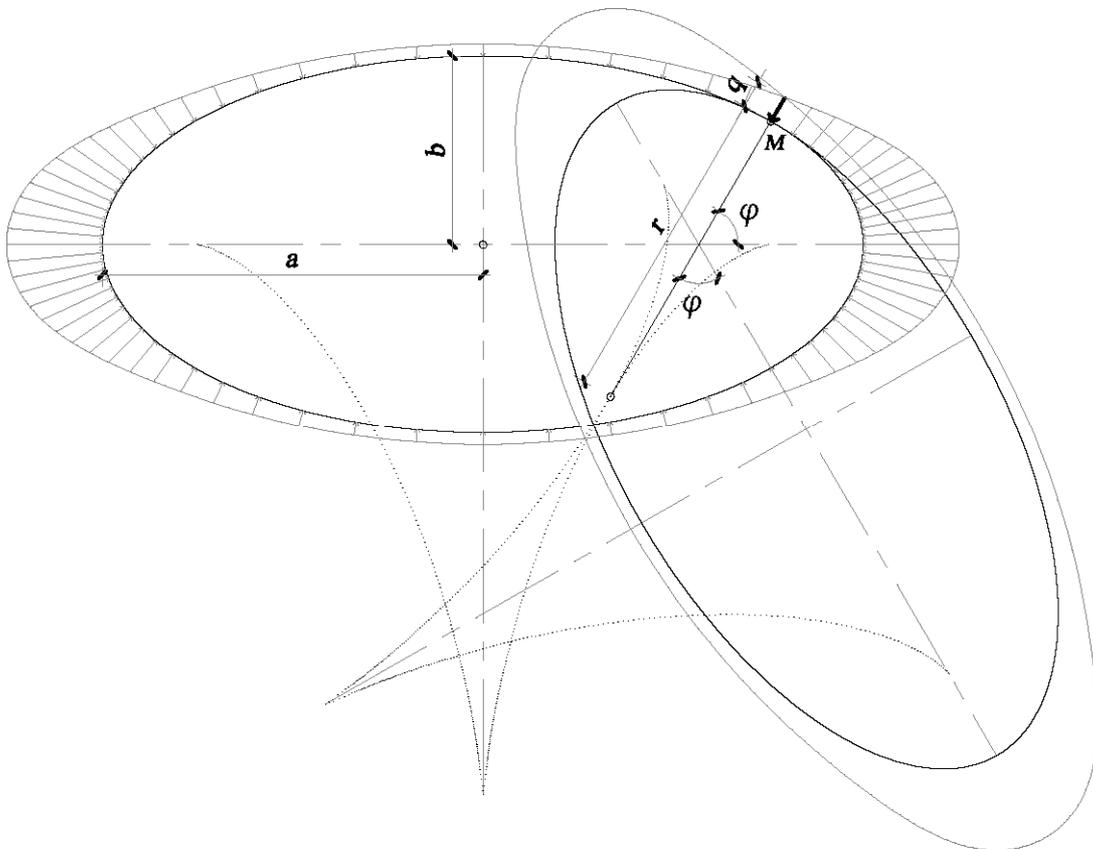


Figura 4.6: Tangencia de dos elipses iguales en un punto M con el mismo radio de curvatura y ángulo geodésico φ , y fuerza distribuida ideal.

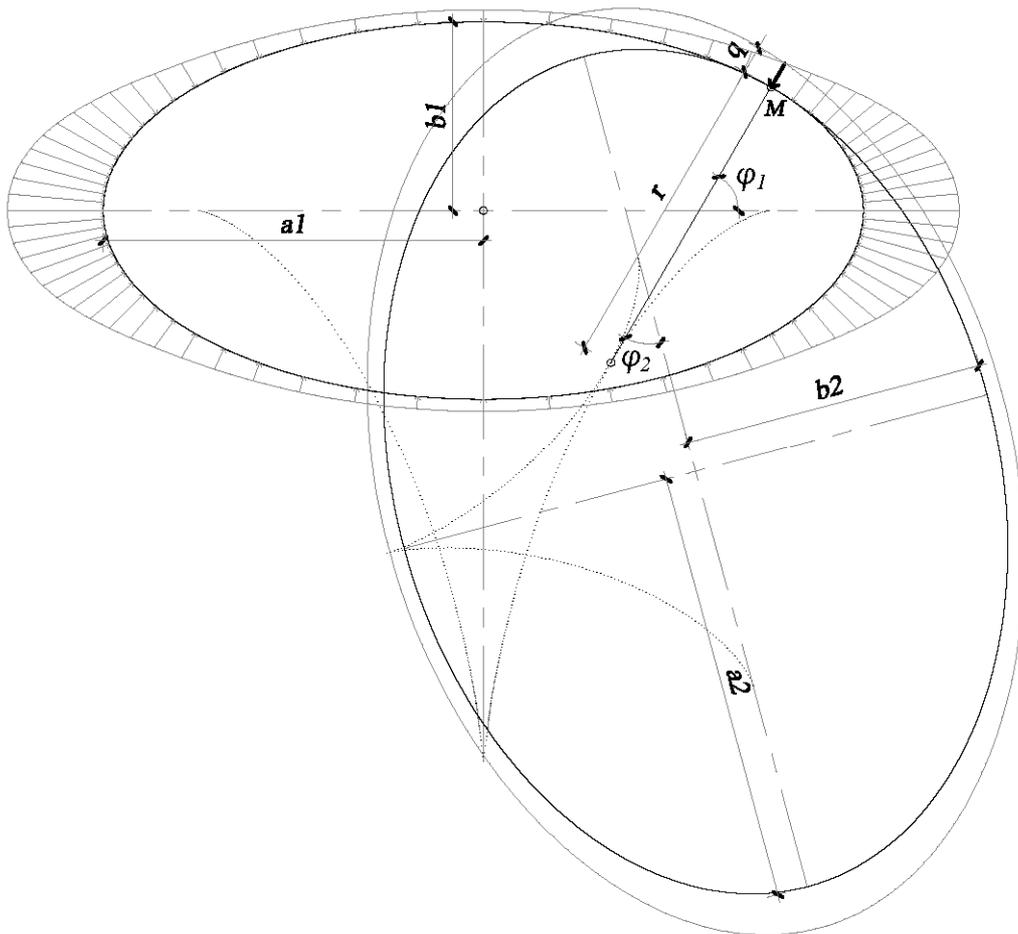


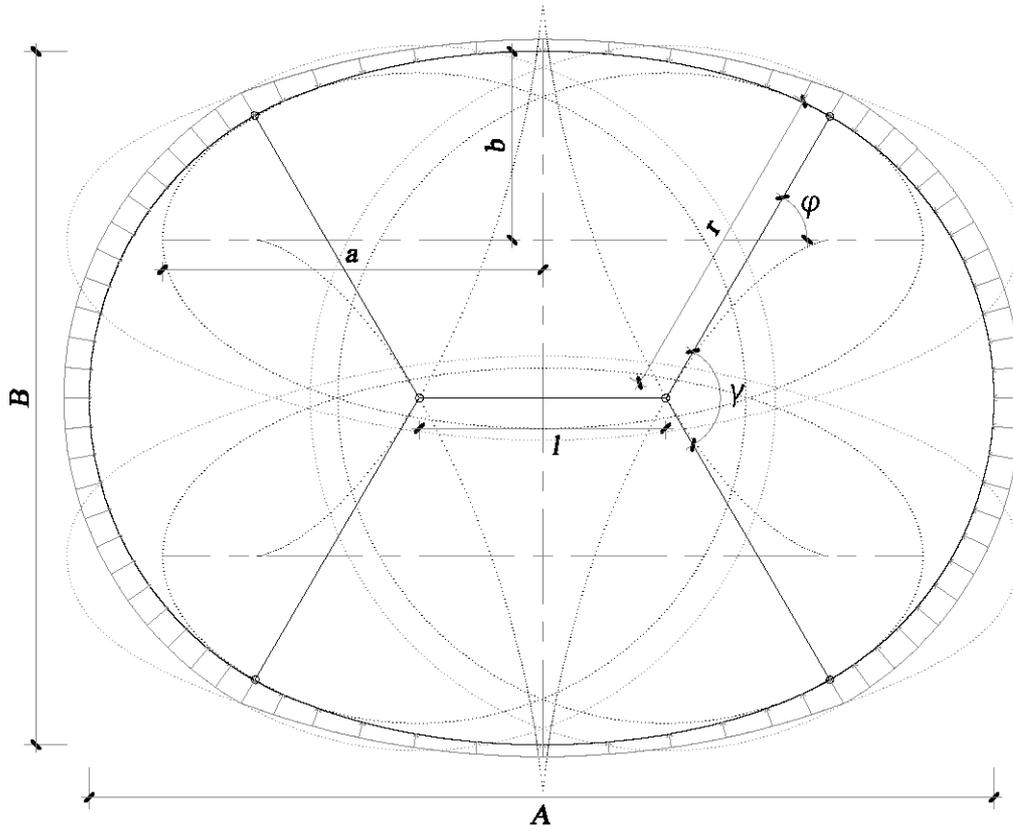
Figura 4.7: Tangencia de dos elipses distintas en un punto M con el mismo radio de curvatura según ángulos geodésicos φ_1 y φ_2 respectivamente, y fuerza distribuida ideal.

Apartado 4.4: Composición alrededor de un segmento

i) Doble simetría

El más sencillo de todos los anillos compuestos que cumplen las condiciones del apartado anterior está formado por dos arcos de una misma elipse combinados con dos arcos de su misma circunferencia osculatriz (figura 4.8). El anillo tiene simetría respecto a dos ejes perpendiculares.

En esta composición hay cinco variables: la longitud l del segmento alrededor del cual se compone el anillo, el radio de curvatura r de la elipse en el punto de tangencia, el ángulo reducido ψ o geodésico φ en ese mismo punto, dependiendo del sistema de referencia angular que se utilice, y los semiejes a y b .



Figuras 4.8: Anillo compuesto por dos arcos de la misma elipse y dos arcos de la misma circunferencia oscultriz, y fuerza distribuida ideal³⁸.

Si el segmento tiene una longitud conocida, sus dos extremos se sitúan sobre la evoluta en coordenadas x simétricas, así que l se puede formular substituyendo la x por $l/2$ en de las ecuaciones 4.4a o 4.4b:

$$l(\psi) = \frac{2(a^2 - b^2)}{a} \cdot \cos^3 \psi \quad \text{ó} \quad l(\varphi) = \frac{2(a^2 - b^2)}{a} \cdot \cos^3 \left[\arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \quad [4.20a \text{ ó } 4.20b]$$

Para que el problema tenga solución, la longitud del segmento tiene que ser inferior a la distancia máxima entre dos puntos de la evoluta con la misma ordenada y superior a la mínima. Esta distancia es máxima cuando el ángulo ψ o φ es igual a cero, y mínima cuando el ángulo es recto. Así que, substituyendo estos dos valores de ángulo en las ecuaciones 4.20a y 4.20b respectivamente, se encuentran los extremos del dominio de esta ecuación:

$$0 < l < \frac{2(a^2 - b^2)}{a} \quad [4.21]$$

³⁸ Para no saturar de información los dibujos y que se muestren con claridad, de aquí en adelante ya no se dibujará la fuerza distribuida ideal sobre los anillos compuestos que se planteen en este capítulo.

Hay un número infinito de elipses que satisfacen esa condición, ya que sólo hay una ecuación y tres incógnitas. Si r también es conocido, se plantea un sistema de dos ecuaciones [4.19 y 4.20] y tres incógnitas, con lo que el sistema sigue siendo indeterminado. Si además el ángulo en el punto de tangencia, ψ o φ , también es conocido, se obtiene un sistema determinado formado por las dos ecuaciones anteriores donde las incógnitas son a y b . Alternativamente al ángulo o al radio de curvatura, puede fijarse uno de los dos semiejes.

Este sistema es compatible siempre que el radio de curvatura en el punto de tangencia esté comprendido entre el máximo y el mínimo de la elipse, que se producen cuando el ángulo es recto y cero respectivamente. Si en cualquiera de las dos ecuaciones se substituye el ángulo por cada uno de estos dos valores se obtienen los extremos del dominio:

$$\frac{b^2}{a} < \psi < \frac{a^2}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{b^2}{a} < \varphi < \frac{a^2}{b} \quad [4.22a \text{ y } 4.22b]$$

La abertura del ángulo γ del arco de la circunferencia osculatriz situada entre los dos arcos elípticos es igual a al doble del ángulo geodésico del punto de tangencia en la elipse. Así, si $\varphi=0^\circ$, la abertura del arco circular sería nula y el anillo estaría formado por una elipse simple. En cambio, si $\varphi=90^\circ$, la abertura del arco elíptico sería nula y el anillo estaría formado por una sola circunferencia. O sea, el dominio del ángulo en el punto de tangencia se define según $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

En resumen, se puede componer un anillo de este tipo resolviendo un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} l(\psi, a, b) \\ r(\psi, a, b) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} l(\varphi, a, b) \\ r(\varphi, a, b) \end{cases}$$

...donde tres de las cinco variables del sistema (l , r , ψ ó φ , a y b) son conocidas, normalmente al menos l y r .

Alternativamente, si en vez del radio se supone una determinada relación $k=a/b$, además del ángulo, se substituye en las ecuaciones 4.20a y 4.20b y se encuentra primero el valor del semieje b , y luego de a :

$$b = \frac{l \cdot k}{2 \cdot (k^2 - 1) \cdot \cos^3 \psi} \quad \text{ó} \quad b = \frac{l \cdot k}{2 \cdot (k^2 - 1) \cdot \cos^3 \left[\arctg \left(\frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right) \right]}$$

[4.23a y 4.23b]

Las dimensiones máximas de este anillo se pueden medir sobre dos ejes perpendiculares, uno con la dirección del segmento y otro con la perpendicular. En la dirección del segmento, la dimensión A es la suma de la longitud l más los radios de curvatura en cada extremo del segmento (ecuación 4.24a). En la dirección perpendicular, la dimensión B es el doble de la suma del semieje b de la elipse más la ordenada de la evoluta sobre el extremo del segmento (ecuación 4.24b).

$$A = 2r + l \quad \text{y} \quad B = 2 \left\{ b - \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot \text{sen}^3 \left[\text{arctg} \left(\frac{b}{a} \cdot \text{tg} \varphi \right) \right] \right\}$$

[4.24a y 4.24b]

Si se pretenden controlar las dimensiones máximas del anillo, se puede añadir esta última ecuación al sistema antes planteado:

$$\begin{cases} l(\varphi, a, b) \\ r(\varphi, a, b) \\ B(\varphi, a, b) \end{cases}$$

...donde l , r y B son conocidos y φ , a y b son incógnitas.

ii) Con simetría respecto al eje perpendicular al segmento

Si alrededor de un segmento de longitud conocida se compone un anillo que sólo mantiene la simetría respecto al eje perpendicular al propio segmento, éste está formado por dos arcos de una misma circunferencia osculatriz y dos arcos de elipses distintas (figura 4.9).

Entonces, para componer un anillo de este tipo alrededor de un segmento hay que resolver un sistema formado por cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} l(\psi_1, a_1, b_1) \\ l(\psi_2, a_2, b_2) \\ r(\psi_1, a_1, b_1) \\ r(\psi_2, a_2, b_2) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} l(\varphi_1, a_1, b_1) \\ l(\varphi_2, a_2, b_2) \\ r(\varphi_1, a_1, b_1) \\ r(\varphi_2, a_2, b_2) \end{cases}$$

...donde se conocen cuatro de las siete variables del sistema (l , r , ψ_1 y ψ_2 ó φ_1 y φ_2 , a_1 , b_1 , a_2 y b_2), normalmente al menos l y r .

La abertura del ángulo γ del arco circular entre los dos arcos elípticos es igual la suma de los ángulos geodésicos en el punto de tangencia de cada elipse.

La dimensión máxima de estos anillos en la dirección del segmento se calcula igual que en los anillos doblemente simétricos (ecuación 4.24a), pero en la dirección perpendicular, se necesita modificar la ecuación 4.24b para tener en cuenta que hay dos elipses distintas.

$$B = b_1 - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_1} \cdot \text{sen}^3 \left[\text{arctg} \left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \text{tg} \varphi_1 \right) \right] + b_2 - \frac{b_2^2 - a_2^2}{b_2} \cdot \text{sen}^3 \left[\text{arctg} \left(\frac{b_2}{a_2} \cdot \text{tg} \varphi_2 \right) \right]$$

[4.25]

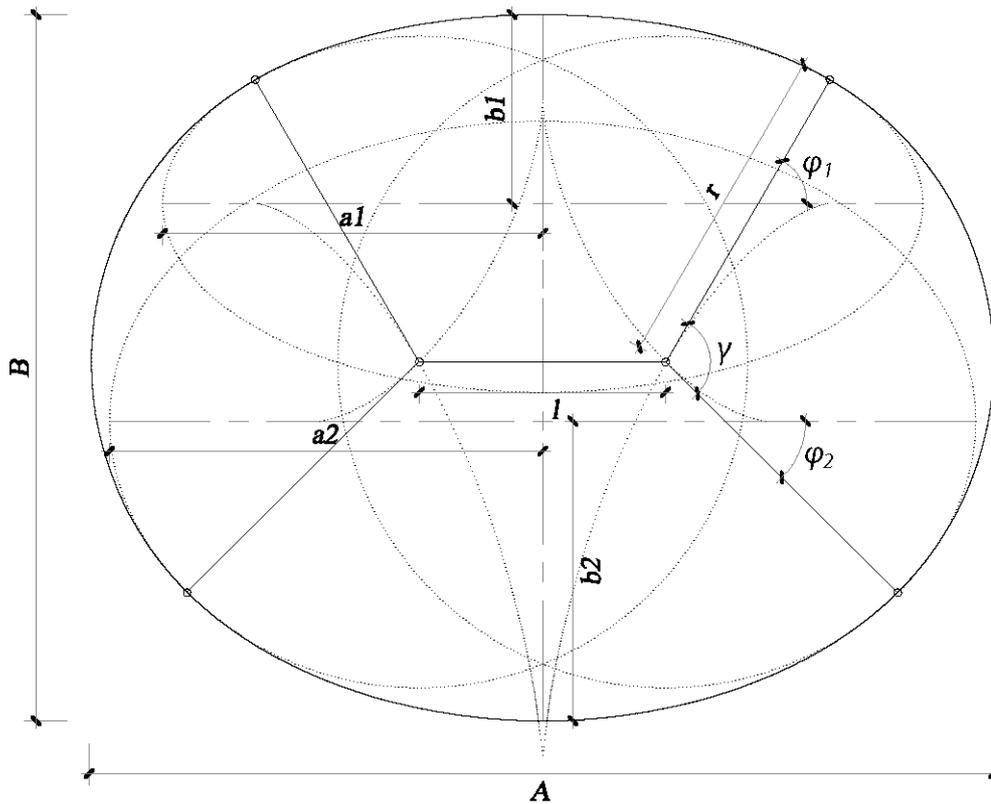


Figura 4.9: Anillo compuesto por dos arcos de la misma circunferencia oscultriz y dos arcos de elipses distintas.

Si se pretende controlar las dimensiones máximas del anillo, también se puede añadir esta ecuación al sistema antes planteado:

$$\begin{cases} l(\varphi_1, a_1, b_1) \\ l(\varphi_2, a_2, b_2) \\ r(\varphi_1, a_1, b_1) \\ r(\varphi_2, a_2, b_2) \\ B(\varphi_1, \varphi_2, a_1, b_1, a_2, b_2) \end{cases}$$

...donde l , r y B son conocidos y φ_1 , φ_2 , a_1 , b_1 , a_2 y b_2 son incógnitas.

iii) Con simetría respecto al eje del segmento

Cuando sólo se mantiene la simetría de la composición sobre el eje del segmento, el anillo está formado por dos elipses iguales y dos arcos de circunferencia distintos, cuyo radio es igual al de curvatura de las elipses en cada extremo del arco (figura 4.10).

En este caso, para plantear la ecuación que define la longitud del segmento, es necesario calcular la distancia entre los puntos (x, y) de la evoluta de la elipse en cada extremo del segmento:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad [4.26]$$

...y substituir en la fórmula anterior los valores x , y por los calculados en la ecuación 4.4b para dos ángulos ψ o φ distintos:

$$l(\psi, a, b) = \sqrt{\left[\frac{a^2 - b^2}{a} (\cos^3(180 - \psi_1) - \cos^3 \psi_2) \right]^2 + \left[\frac{b^2 - a^2}{b} (\sen^3 \psi_1 - \sen^3 \psi_2) \right]^2}$$

ó

$$l(\varphi, a, b) = \sqrt{\left[\frac{a^2 - b^2}{a} \left(\cos^3 \left[180 - \arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1 \right) \right] - \cos^3 \left[\arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_2 \right) \right] \right) \right]^2 + \left[\frac{b^2 - a^2}{b} \left(\sen^3 \left[\arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1 \right) \right] - \sen^3 \left[\arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_2 \right) \right] \right) \right]^2}$$

[4.27a ó 4.27b]

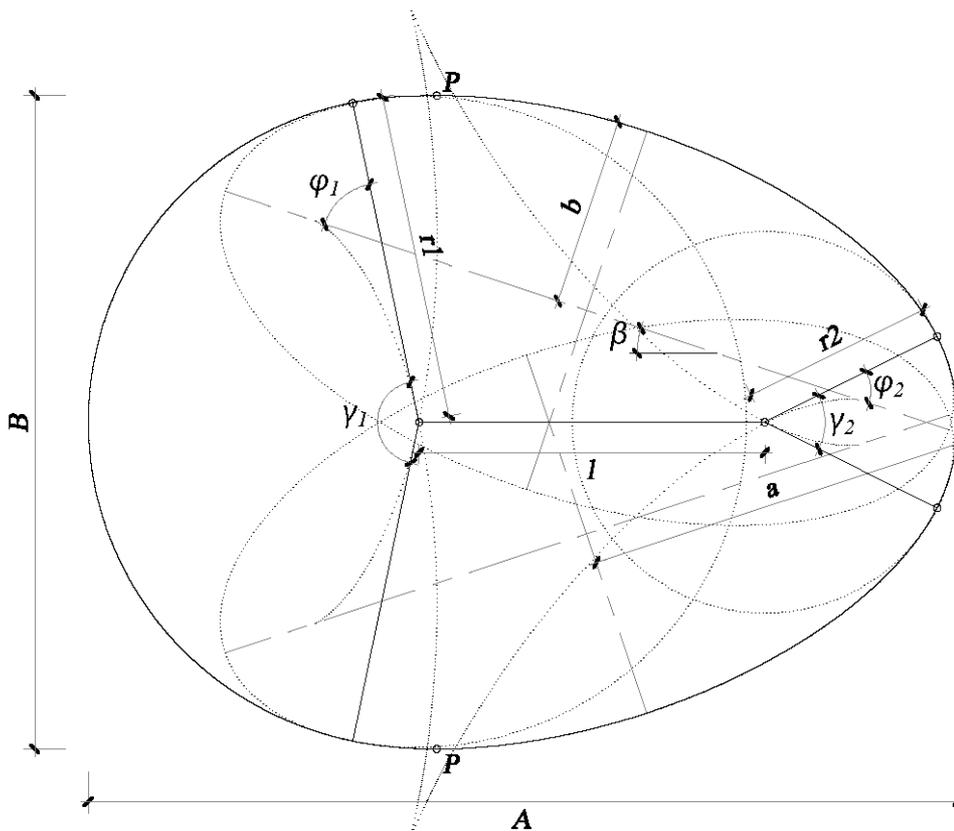


Figura 4.10: Anillo compuesto por dos arcos de la misma elipse y dos arcos de circunferencias osculantes distintas.

Entonces, para componer un anillo alrededor de un segmento con simetría respecto a éste, hay que resolver un sistema formado por tres ecuaciones:

$$\begin{cases} l(\psi_1, \psi_2, a, b) \\ r_1(\psi_1, a, b) \\ r_2(\psi_2, a, b) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} l(\varphi_1, \varphi_2, a, b) \\ r_1(\varphi_1, a, b) \\ r_2(\varphi_2, a, b) \end{cases}$$

...donde cuatro de las siete variables del sistema (l , r_1 y r_2 , ψ_1 y ψ_2 ó φ_1 y φ_2 , a y b) son conocidas, normalmente al menos l , r_1 y r_2 .

Se observa que el eje X de la elipse no es paralelo al segmento, sino que se inclina según un ángulo β , que se calcula a partir de las coordenadas de los puntos de la evoluta situados en los extremos del segmento:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) \quad [4.28]$$

...y substituyendo en la fórmula anterior los valores x , y por los calculados en la ecuación 4.4b:

$$\beta(\psi, a, b) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{b^2 - a^2}{b} (\operatorname{sen}^3 \psi_1 - \operatorname{sen}^3 \psi_2)}{\frac{a^2 - b^2}{a} (\cos^3 (180 - \psi_1) - \cos^3 \psi_2)} \right]$$

ó

$$\beta(\varphi, a, b) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{b^2 - a^2}{b} \left(\operatorname{sen}^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1 \right) \right] - \operatorname{sen}^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_2 \right) \right] \right)}{\frac{a^2 - b^2}{a} \left(\cos^3 \left[180 - \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1 \right) \right] - \cos^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_2 \right) \right] \right)} \right]$$

[4.29a ó 4.29b]

Así, la abertura del ángulo γ de cada arco circular entre los dos arcos elípticos es distinto en cada extremo, y se calcula según:

$$\gamma_1 = 2 \cdot \beta + \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - 2 \cdot \beta \quad [4.30a \text{ y } 4.30b]$$

...donde γ_1 corresponde al ángulo del arco de circunferencia de radio mayor.

Para calcular la dimensión máxima del anillo en la dirección del eje X , hay que modificar la ecuación 4.24a para tener en cuenta un radio de curvatura distinto en cada extremo:

$$A = r_1 + r_2 + l \quad [4.31]$$

La dimensión máxima B del anillo en la dirección del eje Y es igual a la distancia entre los puntos de la elipse donde el radio de curvatura es perpendicular a la dirección del segmento. Teniendo en cuenta que la elipse está girada un ángulo γ respecto al segmento, el ángulo geodésico del punto del anillo más alejado de éste es igual a $90 - \beta$. Así, mediante la transformación de la ecuación 4.1b, se substituye este ángulo en la ecuación 4.2b y se encuentran las coordenadas del punto P del anillo más alejado del segmento respecto a los ejes principales de la elipse:

$$\begin{cases} x_p = a \cdot \cos \left[180 - \arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} (90 - \beta) \right) \right] \\ y_p = b \cdot \operatorname{sen} \left[\arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} (90 - \beta) \right) \right] \end{cases} \quad [4.32]$$

Luego se define la recta $y=mx+n$ que contiene el segmento l según la pendiente m (ecuación 4.33a) y la ordenada en el origen n (ecuación 4.33b) respecto al sistema de coordenadas de los ejes principales de la elipse. La pendiente de esta recta es la tangente del ángulo γ , mientras que la ordenada en el origen es la coordenada “ y ” de la intersección del segmento con el eje vertical de la elipse.

$$m = \operatorname{tg} \beta$$

y

$$n = \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot \operatorname{sen}^3 \left[\arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1 \right) \right] - \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \cos^3 \left[180 - \arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1 \right) \right] \cdot \operatorname{tg} \beta \quad [4.33a \text{ y } 4.33b]$$

Por último, se substituye m y n en la ecuación que permite calcular la distancia más corta entre un punto P y una recta y se multiplica por dos para encontrar la dimensión máxima B del anillo en la dirección perpendicular al segmento³⁹.

$$B = \frac{2 \cdot (m \cdot x_p - y_p + n)}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad [4.34]$$

...donde x_p, y_p son las coordenadas del punto P calculado en la ecuación 4.32.

Si se pretende controlar las dimensiones máximas del anillo, también se puede añadir esta ecuación al sistema antes planteado:

³⁹ Aunque en la ecuación 4.34 B se ha formulado en función de x_p, y_p, m y n , substituyendo éstas por los valores calculados en las ecuaciones 4.32, 4.33a y 4.33b respectivamente también se puede formular en función de las variables φ_1, φ_2, a , y b .

$$\begin{cases} l(\varphi_1, \varphi_2, a, b) \\ r_1(\varphi_1, a, b) \\ r_2(\varphi_2, a, b) \\ B(\varphi_1, \varphi_2, a, b) \end{cases}$$

...donde l, r_1, r_2 y B son conocidos y $\varphi_1, \varphi_2, a,$ y b son incógnitas.

iv) Asimétrico

El anillo más complejo de los que se pueden componer alrededor de un segmento conocido no guarda simetría respecto a ningún eje. Este anillo está formado por cuatro arcos, de dos elipses y dos circunferencias osculatrices distintas.

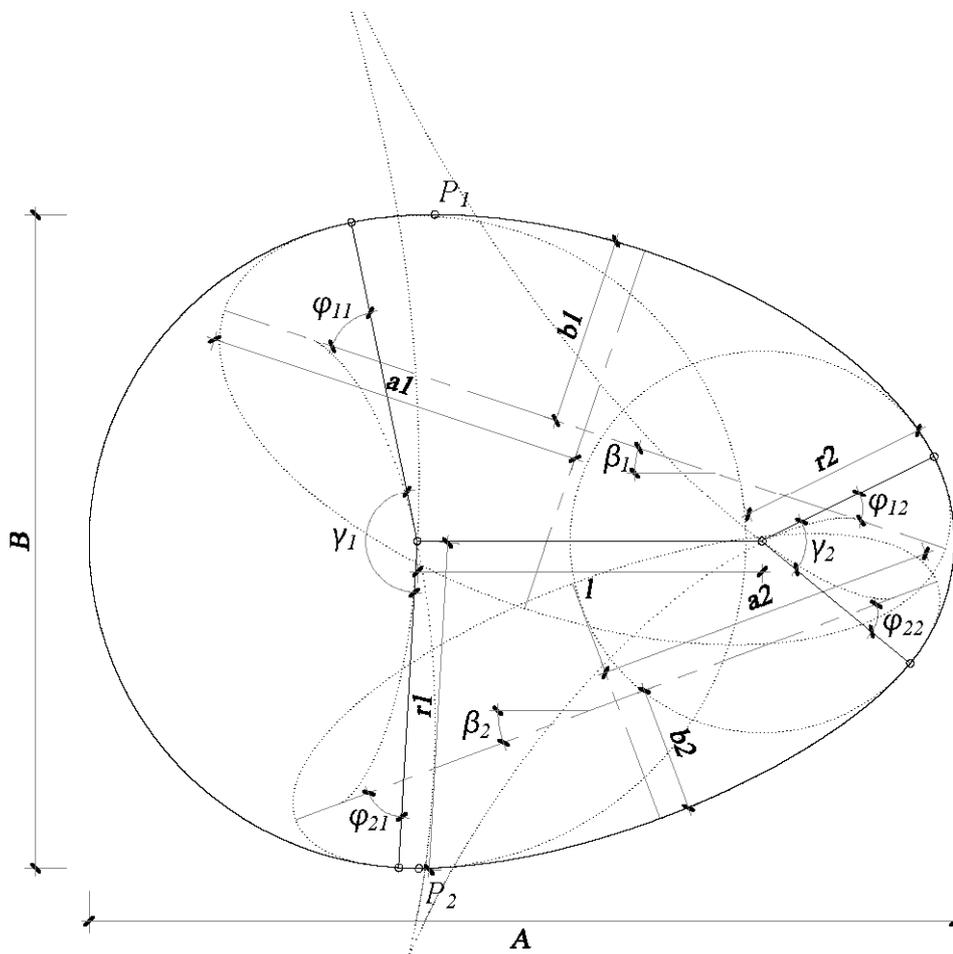


Figura 4.11: Anillo compuesto por cuatro arcos de dos circunferencias osculatrices y dos elipses distintas.

Entonces, para componer un anillo alrededor de un segmento que no guarde ningún tipo de simetría, hay que resolver el sistema formado por seis ecuaciones, las dos que definen la longitud del segmento respecto a cada una de las elipses y las cuatro que definen el radio de curvatura en el punto de tangencia en los extremos de los arcos de elipses:

$$\left\{ \begin{array}{l} l(\psi_{11}, \psi_{12}, a_1, b_1) \\ l(\psi_{21}, \psi_{22}, a_2, b_2) \\ r_1(\psi_{11}, a_1, b_1) \\ r_1(\psi_{12}, a_1, b_1) \\ r_2(\psi_{21}, a_2, b_2) \\ r_2(\psi_{22}, a_2, b_2) \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} l(\varphi_{11}, \varphi_{12}, a_1, b_1) \\ l(\varphi_{21}, \varphi_{22}, a_2, b_2) \\ r_1(\varphi_{11}, a_1, b_1) \\ r_1(\varphi_{12}, a_1, b_1) \\ r_2(\varphi_{21}, a_2, b_2) \\ r_2(\varphi_{22}, a_2, b_2) \end{array} \right.$$

...donde cinco de las once variables del sistema ($l, r_1, r_2, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}$ y ψ_{22} , ó $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}$, y $\varphi_{22}, a_1, b_1, a_2$ y b_2) son conocidas, normalmente al menos l, r_1, r_2 .

Igual que en el tipo anterior, el eje X de las dos elipses no es paralelo al segmento, sino que se inclina según un ángulo β distinto para cada una. Este ángulo se puede calcular substituyendo los ángulos geodésicos de los puntos de tangencia de cada elipse en la ecuación 4.29b, es decir, $\beta_1(a_1, b_1, \varphi_{11}, \varphi_{12})$ y $\beta_2(a_2, b_2, \varphi_{21}, \varphi_{22})$.

Luego se puede calcular la abertura del ángulo γ de cada arco circular entre los dos arcos elípticos según:

$$\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2 + \varphi_{11} + \varphi_{21} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} - \beta_1 - \beta_2 \quad [4.35a \text{ y } 4.35b]$$

...donde γ_1 corresponde al ángulo del arco de circunferencia de radio mayor.

La dimensión máxima A del anillo en la dirección del segmento se puede calcular mediante la ecuación 4.31. Pero, como hay dos elipses distintas, para calcular la dimensión máxima B del anillo en la dirección del eje Y se tiene que sumar la distancia desde el segmento hasta el punto P de cada elipse, donde el radio de curvatura es perpendicular a la dirección del segmento. Así, el ángulo geodésico del punto P de cada elipse más alejado del segmento es igual a $90 - \beta_1$ y $90 - \beta_2$ respectivamente. Entonces, a partir de la ecuación 4.32 se calculan las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 respecto a los ejes principales de cada elipse.

Después, mediante las ecuaciones 4.33a y 4.33b encontramos la pendiente m y la ordenada en el origen n de la recta que contiene el segmento respecto a los ejes principales de cada elipse.

Por último, se calcula la distancia más corta desde el punto P de cada elipse hasta la recta que contiene el segmento l y se suman para obtener la dimensión máxima del anillo en la dirección perpendicular a l :

$$B = \frac{(m_1 \cdot x_{P1} - y_{P1} + n_1)}{\sqrt{m_1^2 + 1}} + \frac{(m_2 \cdot x_{P2} - y_{P2} + n_2)}{\sqrt{m_2^2 + 1}} \quad [4.36]$$

Nuevamente, si se pretende controlar las dimensiones máximas del anillo, también se añade esta última ecuación al sistema antes planteado:

$$\begin{cases} l(\varphi_{11}, \varphi_{12}, a_1, b_1) \\ l(\varphi_{21}, \varphi_{22}, a_2, b_2) \\ r_1(\varphi_{11}, a_1, b_1) \\ r_1(\varphi_{12}, a_1, b_1) \\ r_2(\varphi_{21}, a_2, b_2) \\ r_2(\varphi_{22}, a_2, b_2) \\ B(\varphi_{11}, \varphi_{12}, a_1, b_1, \varphi_{21}, \varphi_{22}, a_2, b_2) \end{cases}$$

...donde al menos l , r_1 , r_2 y B son conocidos.

Apartado 4.5: Composición alrededor de polígonos regulares

i) Con arcos de elipses y circunferencias iguales

Los polígonos regulares tienen todos sus ángulos y sus lados iguales. Los ángulos α entre sus lados se calculan según el número n de lados:

$$\alpha = 180 - \frac{360}{n} \quad [4.37]$$

Si todos los arcos de elipse y de circunferencia osculatriz, si los hay, son iguales, el anillo compuesto alrededor de estos polígonos también es regular (figura 4.12). Para componerlo, se resuelve el mismo sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas planteado para los anillos compuestos con doble simetría alrededor de un segmento:

$$\begin{cases} l(\psi, a, b) \\ r(\psi, a, b) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} l(\varphi, a, b) \\ r(\varphi, a, b) \end{cases}$$

...donde tres de las cinco variables del sistema (l , r , ψ , φ , a y b) son conocidas, normalmente al menos l , y r .

El ángulo γ de abertura de un arco circular con centro en el vértice del polígono y situado entre dos arcos elípticos se calcula según:

$$\gamma = 2\cdot\varphi - \alpha \quad [4.38]$$

...y puede estar comprendido entre la bisectriz del ángulo α y las rectas de prolongación de los lados del polígono, siempre que no sean perpendiculares. Entonces, el dominio del ángulo φ en el punto de tangencia queda definido según:

$$\frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \alpha < 90^\circ \quad [4.39]$$

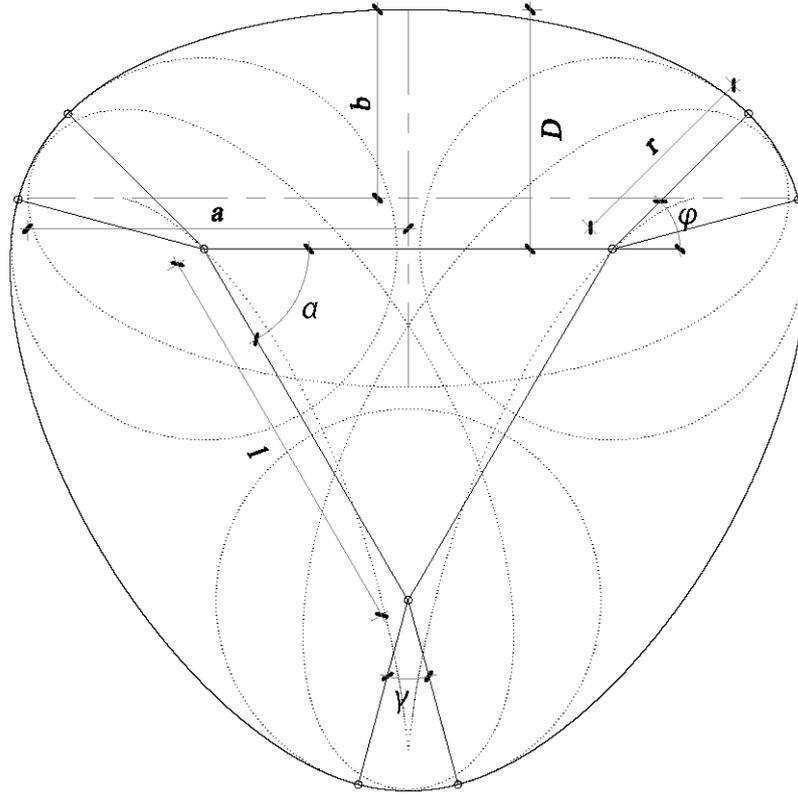
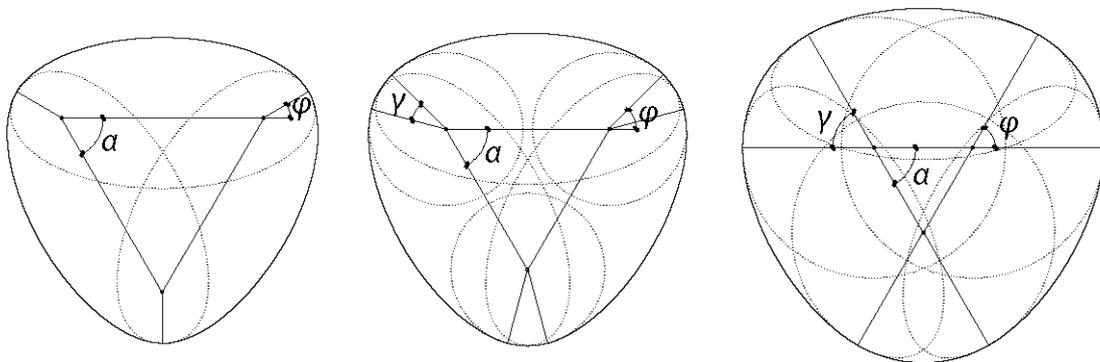


Figura 4.12: Anillo regular compuesto alrededor de un triángulo equilátero.

Si $\varphi = \alpha/2$, la tangencia se realiza directamente entre arcos de elipse y la composición del anillo carece de arcos de circunferencia (figura 4.13a). Si $\alpha/2 < \varphi < \alpha$, entre las dos elipses se encadena un arco de circunferencia cuya abertura γ es igual al doble de la diferencia entre α y φ (figura 4.13b). Si $\varphi = \alpha$, el arco de circunferencia alcanza el mayor ángulo γ de abertura de todos los posibles, siempre que no se trate de un ángulo recto (figura 4.13c).



Figuras 4.13a; 4.13b y 4.13c: Tres anillos regulares compuestos a partir de elipses iguales con diferentes ángulos φ en el punto de tangencia.

Es evidente que, para poder resolver el problema de composición de un anillo, resulta más útil, aunque no menos complicado, operar con el ángulo geodésico φ en vez de con el ángulo reducido ψ .

Desde el punto de vista del comportamiento mecánico, cuanto mayor es la abertura del ángulo del arco circular situado entre dos arcos elípticos, menor variación tiene que tener el valor de la fuerza distribuida ideal para que resulte un esfuerzo axial de compresión constante en todo el anillo.

Para poder calcular la distancia máxima D entre el anillo y el punto medio del lado del polígono (figuras 4.12a y 4.12b), se modifica la ecuación 4.24b según:

$$D = b - \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot \text{sen}^3 \left[\text{arctg} \left(\frac{b}{a} \cdot \text{tg} \varphi \right) \right] \quad [4.40]$$

Si se añade esta ecuación al sistema anterior, se puede diseñar un anillo controlando las distancias máxima y mínima a cada lado del polígono:

$$\begin{cases} l(\varphi, a, b) \\ r(\varphi, a, b) \\ D(\varphi, a, b) \end{cases}$$

...donde l , r y D son conocidas y φ , a y b las incógnitas.

Según se observa en la secuencia de la siguiente figura, a medida que se incrementa el número de lados del polígono regular, el anillo compuesto tiende a parecerse más a un anillo circular. Así, parece que no tiene sentido componer anillos sobre polígonos regulares de muchos lados.

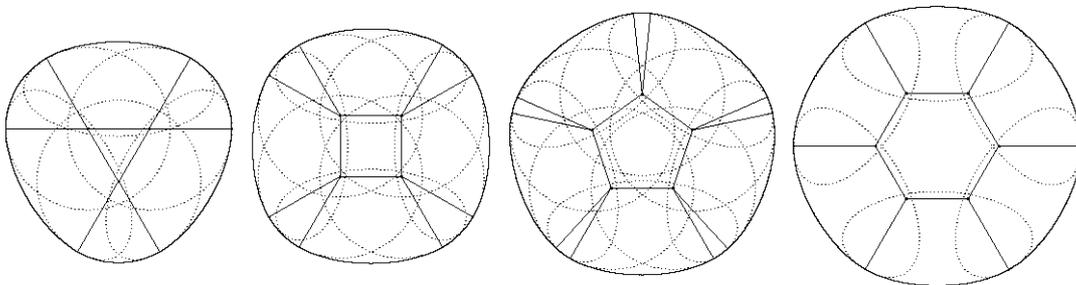


Figura 4.14: Anillos regulares compuestos alrededor de polígonos regulares de tres, cuatro, cinco y seis lados.

ii) Con arcos de elipses distintas y circunferencias iguales

Sobre un polígono regular también se puede componer un anillo de arcos de elipses distintas, pero que mantengan el mismo radio de curvatura en los puntos de tangencia, es decir, la misma distancia al anillo desde cada vértice (figura 4.15).

Si, como en el caso anterior, se pretende controlar las distancias máxima y mínima del anillo a cada lado del polígono, es necesario que r y D_i , además de l , sean conocidas. Entonces, para componer estos anillos, hay que resolver el sistema formado por un número de ecuaciones igual al triple del número de elipses distintas que componen el anillo, es decir:

$$\begin{cases} l(\varphi_i, a_i, b_i) \\ r(\varphi_i, a_i, b_i) \\ D_i(\varphi_i, a_i, b_i) \end{cases}$$

...donde l , r y D_i son conocidas y φ_i , a_i y b_i son incógnitas.

La abertura del ángulo γ_i del arco circular entre los dos arcos elípticos es igual la suma de los ángulos geodésicos en el punto de tangencia de cada elipse menos el ángulo α en un vértice.

$$\gamma_i = \varphi_n + \varphi_i - \alpha$$

[4.41]

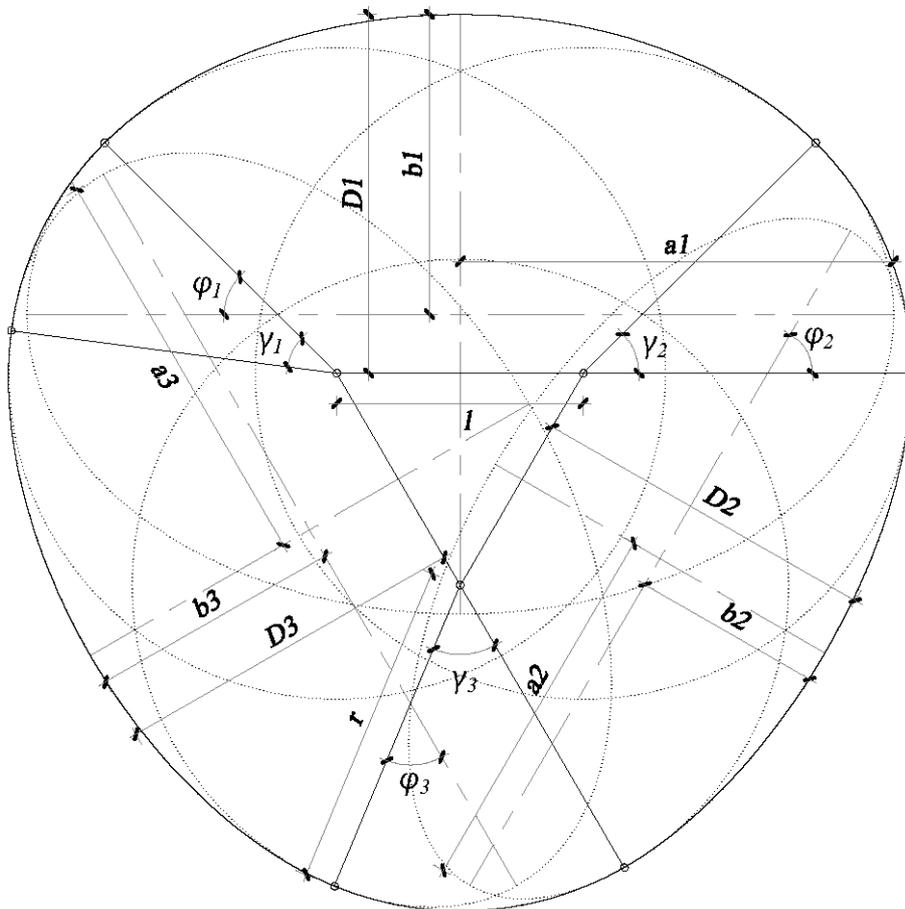


Figura 4.15: Anillo compuesto con arcos de elipses distintas y circunferencias iguales alrededor de un triángulo equilátero.

El grado de irregularidad de estos anillos depende de la cantidad de elipses distintas que se utilicen en su composición.

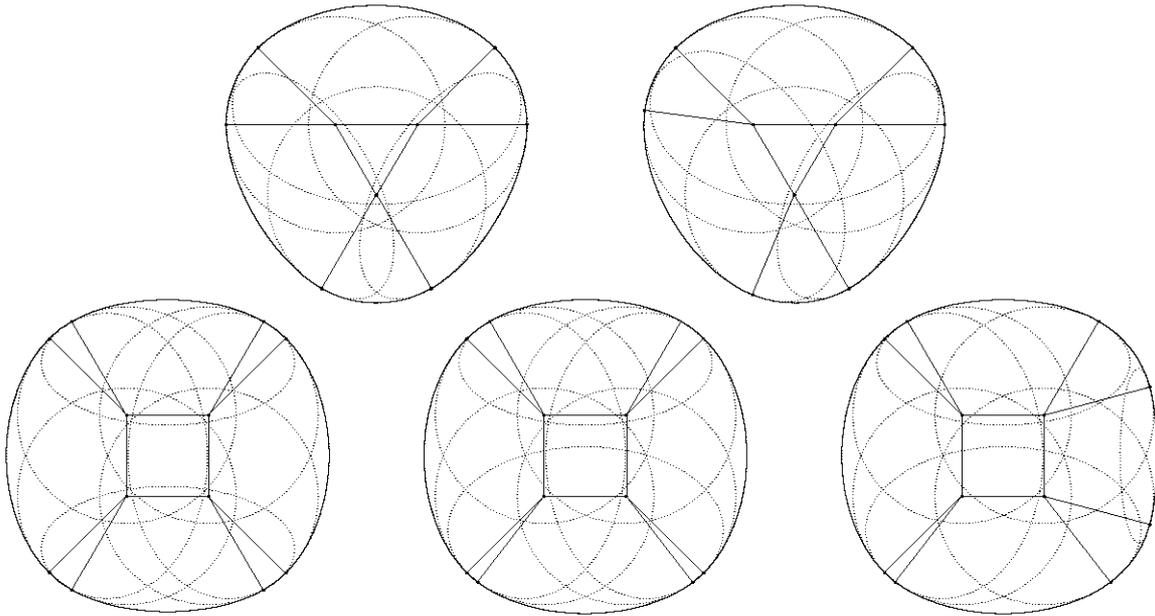


Figura 4.16: Anillos compuestos alrededor de polígonos regulares mediante combinaciones de elipses distintas y radios de curvatura iguales en los puntos de tangencia.

iii) Con arcos de elipses iguales y circunferencias distintas

Modificando el radio de curvatura en los puntos de tangencia, se compone un anillo irregular con arcos de elipses iguales que guarda distancias distintas con cada vértice del polígono. Hay que tener en cuenta que sobre una misma longitud de lado existen infinitas combinaciones de arcos de una misma elipse y distintas circunferencias oscultrices. Como estos arcos de circunferencia son comunes a dos lados contiguos y sólo existe una combinación de arcos que, fijando el tamaño de la elipse y una de las circunferencias oscultrices, se pueda componer sobre una misma longitud de lado, no es posible componer este tipo de anillos alrededor de polígonos con número de lados impar, como tampoco es posible hacerlo sobre polígonos de lados pares combinando más de dos circunferencias oscultrices distintas.

Así, alrededor de un cuadrado se puede componer un anillo con cuatro arcos de elipses iguales y cuatro arcos de dos circunferencias oscultrices distintas, situadas en vértices opuestos (figura 4.17); alrededor de un hexágono, uno con seis arcos de elipses iguales y seis de dos circunferencias oscultrices distintas, y así sucesivamente.

Igual que en los anillos con simetría alrededor de un segmento se observa que el eje X de la elipse no es paralelo al lado del polígono, sino que se inclina según un ángulo β , que se puede calcular según la ecuación 4.29b. La abertura del ángulo γ en cada vértice se puede calcular según:

$$\gamma_1 = 2 \cdot (\beta + \varphi_1) - \alpha \quad \text{y} \quad \gamma_2 = 2 \cdot (\varphi_2 - \beta) - \alpha \quad [4.42a \text{ y } 4.42b]$$

...donde γ_1 corresponde a la circunferencia oscultriz de radio mayor.

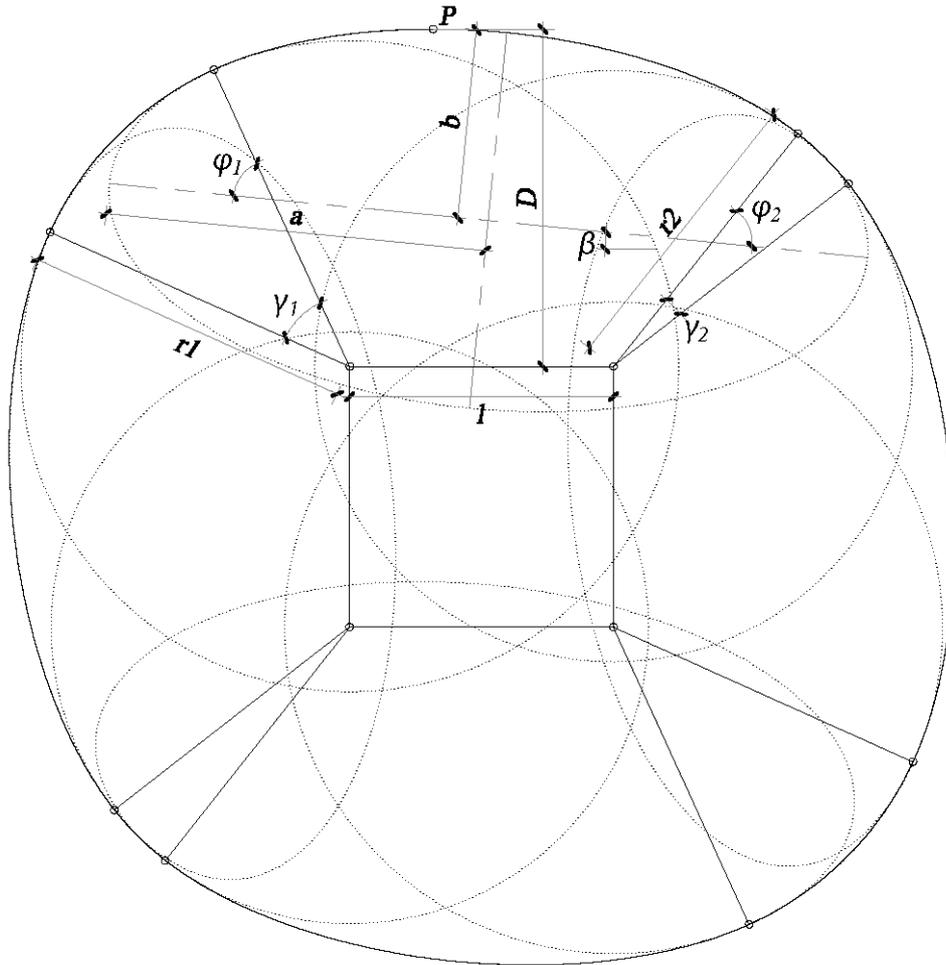


Figura 4.17: Anillo compuesto con arcos de elipses iguales y dos circunferencias oscultrices distintas alrededor de un cuadrado.

La distancia máxima D entre el anillo y el polígono es igual en todos los lados y se produce en un punto P de la elipse con un ángulo geodésico igual a $90 - \beta$. Entonces mediante las ecuaciones 4.33a y 4.33b se calcula la pendiente m y la ordenada en el origen n de la recta que contiene el lado del polígono respecto a los ejes principales del arco de la elipse más cercana.

Por último, se modifica la ecuación 4.34 y se substituye m y n para encontrar la distancia más corta entre un punto P y la recta que contiene el lado del polígono.

$$D = \frac{(m \cdot x_P - y_P + n)}{\sqrt{m^2 + 1}} \tag{4.43}$$

...donde x_P, y_P son las coordenadas del punto P calculado en la ecuación 4.32.

Así, para componer un anillo de este tipo, en el que se controle la distancia mínima y máxima entre el polígono y el anillo, también se puede añadir esta ecuación al sistema antes planteado:

$$\begin{cases} l(\varphi_1, \varphi_2, a, b) \\ r_1(\varphi_1, a, b) \\ r_2(\varphi_2, a, b) \\ D(\varphi_1, \varphi_2, a, b) \end{cases}$$

...donde l , r_1 , r_2 y D son conocidos y φ_1 , φ_2 , a , y b son incógnitas.

iv) Con arcos de elipses y circunferencias distintas

El anillo más irregular que se puede componer alrededor de un polígono regular es el que tiene todos sus arcos de elipses y circunferencias osculatrizes distintas (figura 4.18a).

Se puede calcular β_i mediante la ecuación 4.29b. Para calcular la abertura del ángulo γ_i , se modifican las ecuaciones 4.42a y 4.42b para tener en cuenta que hay dos elipses distintas que confluyen sobre un vértice:

$$\gamma_i = \beta_h + \beta_i + \varphi_{hi} + \varphi_{ii} - \alpha \quad \text{y} \quad \gamma_j = \varphi_{ij} + \varphi_{jj} - \beta_i - \beta_j - \alpha$$

[4.44a y 4.44b]

...donde γ_i corresponde a la circunferencia osculatriz de radio mayor.

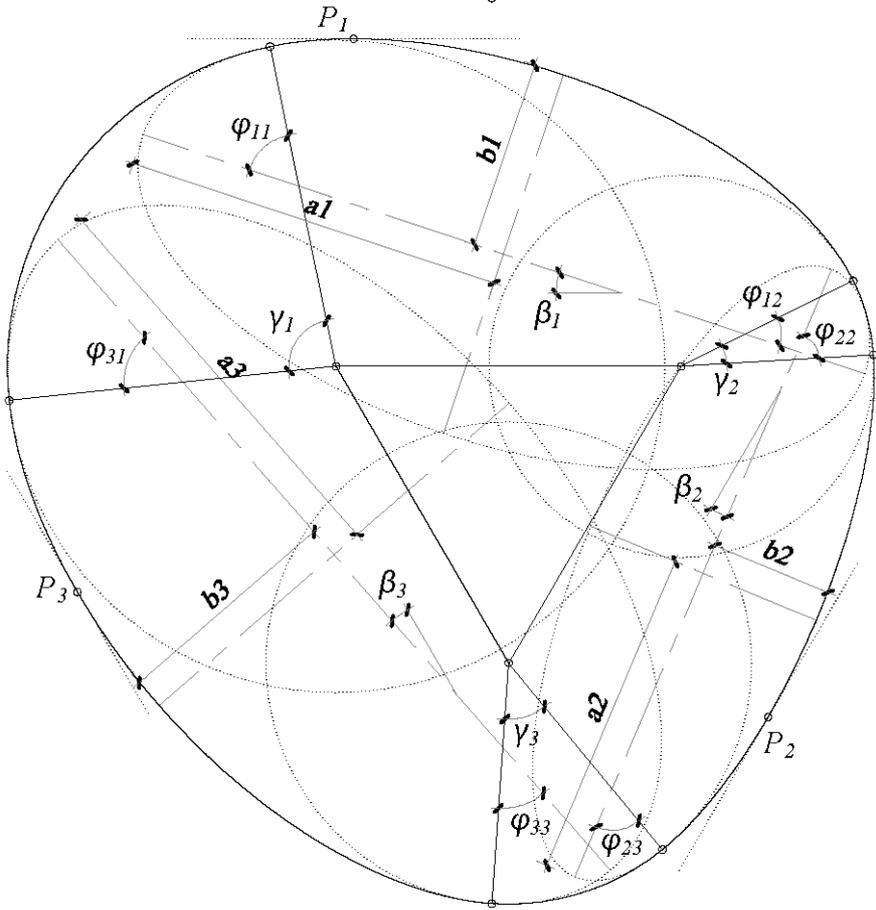
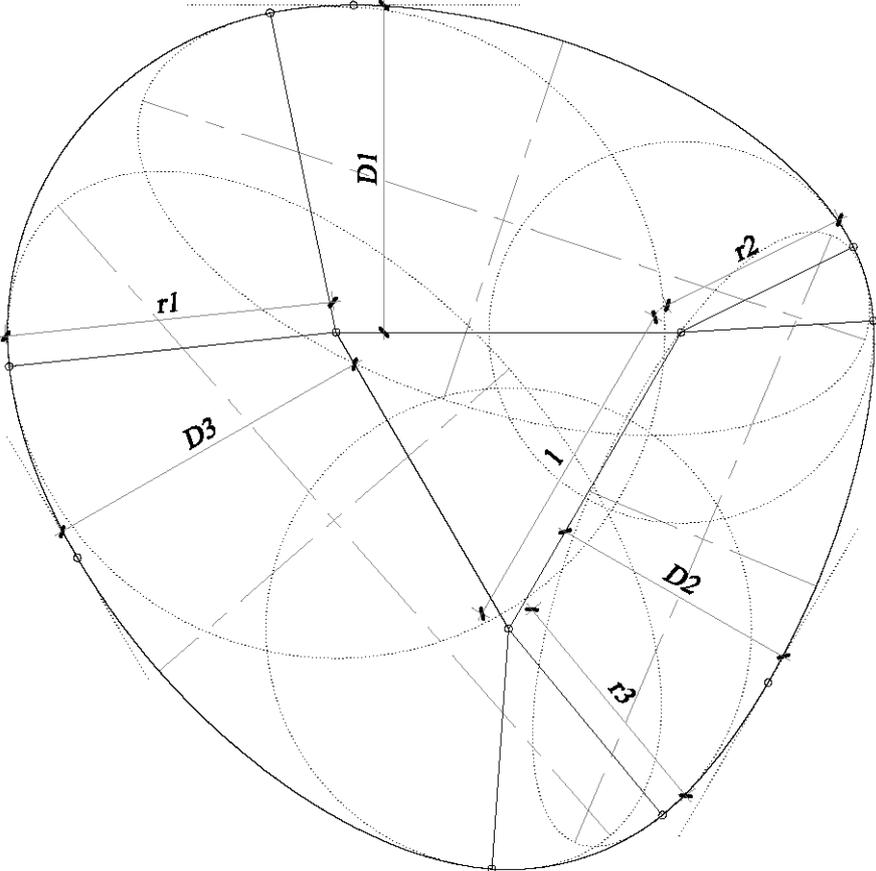
Como todas las elipses son diferentes, la distancia máxima D_i entre el anillo y cada lado del polígono es distinta, y se produce en un punto P_i con un ángulo geodésico igual a $90 - \beta_i$ (figura 4.18b).

Entonces, a partir de la ecuación 4.32 se calculan las coordenadas de los puntos P_i respecto a los ejes principales de cada elipse. Después, m_i y n_i mediante las ecuaciones 4.33a y 4.33b de la recta de cada lado, también según los ejes principales de la elipse más próxima, y se substituyen en la ecuación 4.43 para encontrar la distancia máxima D_i entre el anillo y cada lado del polígono.

Para componer un anillo de este tipo, en el que se controlen las dimensiones máximas, hay que resolver un sistema formado un número de ecuaciones igual a cuatro veces el número de lados del polígono:

$$\begin{cases} l(\varphi_{ii}, \varphi_{ij}, a_i, b_i) \\ r_i(\varphi_{ii}, a_i, b_i) \\ r_j(\varphi_{ij}, a_i, b_i) \\ D_i(\varphi_{ii}, \varphi_{ij}, a_i, b_i) \end{cases}$$

...donde l , r_i , r_j y D_i son conocidas (figura 4.18a), y φ_{ii} , φ_{ij} , a_i y b_i son incógnitas (figura 4.18b).



Figuras 4.18a y 4.18b: Anillo irregular compuesto alrededor de un triángulo equilátero.

Apartado 4.6: Composición alrededor de polígonos irregulares

i) Caso general

La única condición que requiere un polígono irregular para que a su alrededor se pueda componer un anillo es que sus ángulos α entre dos lados contiguos sean cóncavos, es decir, menores de 180° . Así, sobre cada uno de sus lados se compone un arco elíptico que en los extremos tiene el mismo radio de curvatura que los extremos de los arcos elípticos de los lados contiguos (figuras 4.19a y 4.19b).

Recopilando todas las ecuaciones que controlan las variables que definen un arco elíptico sobre un lado del polígono, se puede plantear un sistema para resolver un caso general de composición de un anillo alrededor de un polígono cualquiera, que pueda estar sometido a una fuerza distribuida ideal de la que resulte un esfuerzo axial de compresión de valor constante y ausencia total flexiones. El número de ecuaciones del sistema es igual a cuatro veces el número de lados del polígono.

$$\begin{cases} l_i(\varphi_{ii}, \varphi_{ij}, a_i, b_i) \\ r_i(\varphi_{ii}, a_i, b_i) \\ r_j(\varphi_{ij}, a_i, b_i) \\ D_i(\varphi_{ii}, \varphi_{ij}, a_i, b_i) \end{cases}$$

...donde l_i , r_i , r_j y D_i son conocidas (figura 4.19a), y φ_{ii} , φ_{ij} , a_i y b_i son incógnitas en cada uno de los lados (figura 4.19b).

La longitud del lado es la distancia entre los centros de curvatura en los extremos del arco elíptico y se calcula según:

$$l_i(\varphi_{ii}, \varphi_{ij}, a_i, b_i) = \sqrt{\left[\frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i} \left(\cos^3 \left[180 - \arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ii} \right) \right] - \cos^3 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ij} \right) \right] \right) \right]^2 + \left[\frac{b_i^2 - a_i^2}{b_i} \left(\operatorname{sen}^3 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ii} \right) \right] - \operatorname{sen}^3 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ij} \right) \right] \right) \right]^2} \quad [4.45]^{40}$$

El radio de curvatura en cada extremo del arco es el que resulta para el ángulo geodésico de la elipse en el punto de tangencia de cada extremo de arco elíptico:

$$r_i(\varphi_{ii}, a_i, b_i) = \frac{\sqrt{\left\{ a_i^2 \operatorname{sen}^2 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ii} \right) \right] + b_i^2 \cos^2 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ii} \right) \right] \right\}^3}{a_i b_i}$$

y

⁴⁰ De la ecuación 4.27b.

$$r_j(\varphi_{ij}, a_i, b_i) = \frac{\sqrt{\left\{ a_i^2 \operatorname{sen}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_{ij} \right) \right] + b_i^2 \cos^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_{ij} \right) \right] \right\}^3}{a_j b_j} \quad [4.46a \text{ y } 4.46b]^{41}$$

El ángulo β_i que forma el eje X de cada elipse con el lado correspondiente se calcula según:

$$\beta_i = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{b_i^2 - a_i^2}{b} \left(\operatorname{sen}^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_{ii} \right) \right] - \operatorname{sen}^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_{ij} \right) \right] \right)}{\frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i} \left(\cos^3 \left[180 - \operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_{ii} \right) \right] - \cos^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_{ij} \right) \right] \right)} \right] \quad [4.47]^{42}$$

La abertura del ángulo γ_i del arco de la circunferencia osculatriz en cada vértice del polígono se obtiene a partir del ángulo geodésico del punto en el que se produce la tangencia en dos arcos elípticos y del ángulo de inclinación de los ejes de los arcos elípticos respecto a los lados que forman el vértice:

$$\gamma_i = \beta_h + \beta_i + \varphi_{hi} + \varphi_{ii} - \alpha_i \quad \text{y} \quad \gamma_j = \varphi_{ij} + \varphi_{jj} - \beta_i - \beta_j - \alpha_j \quad [4.48a \text{ y } 4.48b]^{43}$$

...donde γ_i corresponde al arco con radio mayor.

La ecuación de la recta que contiene un lado del polígono respecto a los ejes principales del arco elíptico más próximo se escribe en forma $y=mx+n$, y m y n se formulan según:

$$m_i = \operatorname{tg} \beta_i$$

y

$$n = \frac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_i \right) \right] - \frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i} \cos^3 \left[180 - \operatorname{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_i \right) \right] \operatorname{tg} \beta_i \quad [4.49a \text{ y } 4.49b]^{44}$$

Entonces, sabiendo que el punto P_i de la elipse que se encuentra más alejado de esa recta tiene un ángulo geodésico $\varphi_P = \beta_i - 90$, se calcula D_i según la fórmula de distancia más corta entre un punto y una recta:

$$D_i = \frac{(m_i \cdot x_P - y_P + n_i)}{\sqrt{m_i^2 + 1}} \quad [4.50]^{45}$$

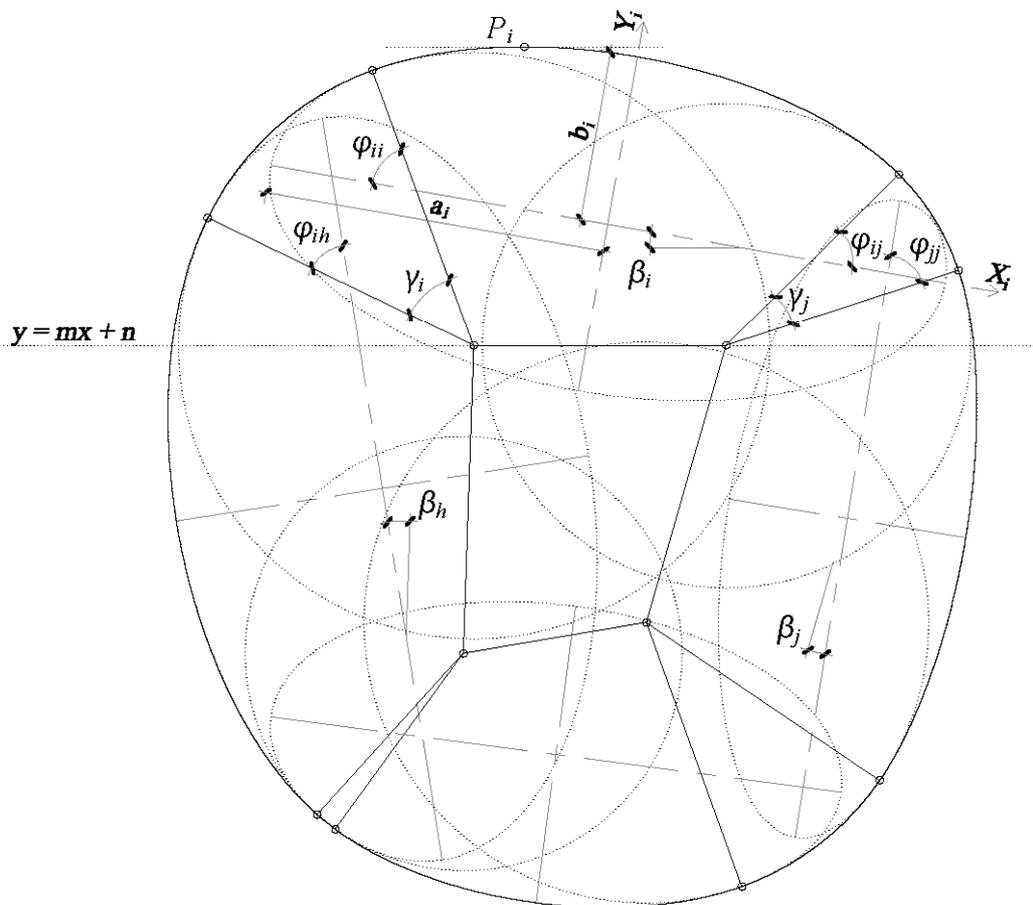
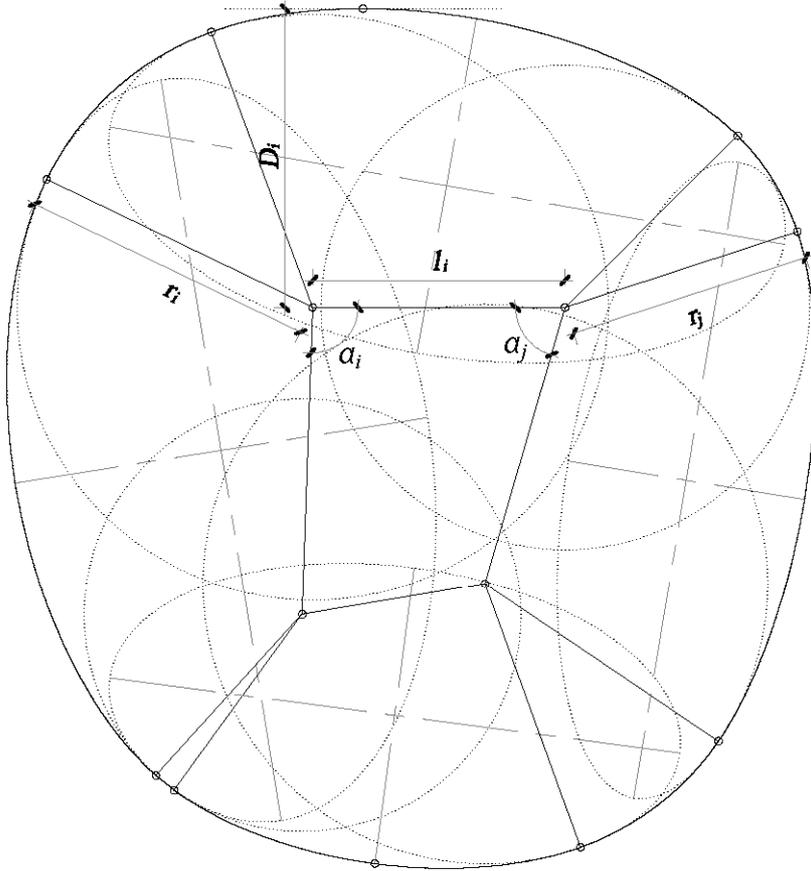
⁴¹ De la ecuación 4.19b.

⁴² De la ecuación 4.29b.

⁴³ De las ecuaciones 4.44a y 4.44b.

⁴⁴ De las ecuaciones 4.33a y 4.33b.

⁴⁵ De la ecuación 4.43.



Figuras 4.19a y 4.19b: Caso general de anillo compuesto alrededor de un polígono irregular.

ii) Anillos de distancias regulares

Sin embargo, parece más interesante componer alrededor de un polígono irregular un anillo que tenga regularidad en algunos de sus parámetros, especialmente aquellos que controlan sus dimensiones o separación máxima entre ambos (polígono y anillo), estos son, r_i y D_i , por ejemplo, igualándolos en todos sus vértices y sus lados (figuras 4.20a y 4.20b).

Recopilando de nuevo todas las ecuaciones que controlan las variables de composición del anillo sobre un lado del polígono limitado por dos vértices, se puede plantear un sistema para resolver este caso particular de composición de un anillo sobre un polígono cualquiera, que pueda estar sometido a una fuerza distribuida ideal de la que resulte un esfuerzo axial de compresión y ausencia total de otros esfuerzos. El número de ecuaciones del sistema es igual al triple del número de lados del polígono.

$$\begin{cases} l_i(\varphi_i, a_i, b_i) \\ r(\varphi_i, a_i, b_i) \\ D(\varphi_i, a_i, b_i) \end{cases}$$

...donde l_i , r y D son conocidas (figura 4.20a), y φ_i , a_i y b_i son incógnitas en cada uno de los lados (figura 4.20b).

La longitud l_i de cada lado es el doble de la distancia entre el eje Y de la elipse y el centro de curvatura en el punto de tangencia, y se calcula según:

$$l_i(\varphi_i, a_i, b_i) = \frac{2 \cdot (a_i^2 - b_i^2)}{a_i} \cdot \cos^3 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \operatorname{tg} \varphi_i \right) \right] \quad [4.51]^{46}$$

El radio de curvatura en todos los puntos de tangencia entre arcos del anillo es el mismo y se produce en un ángulo geodésico diferente en cada elipse:

$$r(\varphi_i, a_i, b_i) = \frac{\sqrt{\left\{ a_i^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_i \right) \right] + b_i^2 \cdot \cos^2 \left[\arctg \left(\frac{b_i}{a_i} \operatorname{tg} \varphi_i \right) \right] \right\}^3}{a_i \cdot b_i} \quad [4.52]^{47}$$

La abertura del ángulo γ_i del arco circular entre dos arcos elípticos es igual la suma de los ángulos geodésicos en el punto de tangencia de cada elipse menos el ángulo α_i en un vértice.

$$\gamma_i = \varphi_h + \varphi_i - \alpha_i \quad [4.53]^{48}$$

⁴⁶ De la ecuación 4.20b.

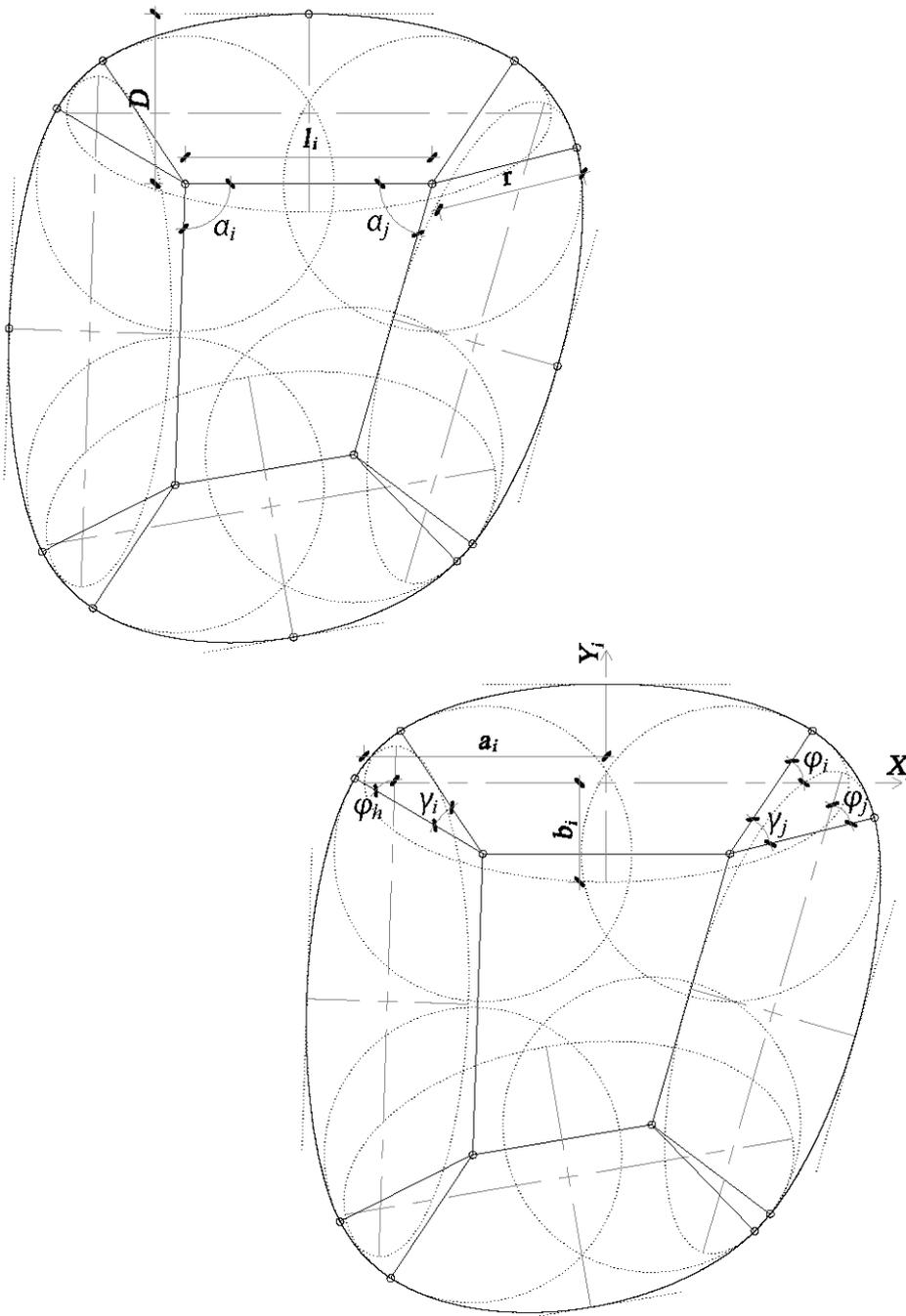
⁴⁷ De la ecuación 4.19b.

⁴⁸ De la ecuación 4.41.

Como los radios de curvatura en los puntos de tangencia son iguales en todos los vértices, los arcos de cada tramo son simétricos y la distancia máxima D entre el anillo y el polígono, la misma en todos los lados, se produce en la intersección de cada elipse con su eje Y :

$$D(\varphi_i, a_i, b_i) = b_i - \frac{b_i^2 - a_i^2}{b_i} \cdot \text{sen}^3 \left[\text{arctg} \left(\frac{b_i}{a_i} \cdot \text{tg} \varphi_i \right) \right]$$

[4.54]⁴⁹



Figuras 4.20a y 4.20b: Anillo compuesto por arcos de elipses distintas, de circunferencias osculatrices iguales y la misma distancia máxima D entre el anillo y el polígono en cada lado.

⁴⁹ De la ecuación 4.40.

Para que se pueda trazar una elipse alrededor de un lado del polígono, la distancia máxima D tiene que ser superior a r . Siendo así, si D es próxima a r , la elipse que resulta tiene una excentricidad ε próxima a la unidad y su curvatura tendería a ser nula en los puntos próximos al semieje menor. En este caso, como el esfuerzo axial es inversamente proporcional a la curvatura en cada punto, un pequeño valor de fuerza distribuida ideal provocaría compresiones muy elevadas en el anillo

Además, cualquier diseño del anillo, simple o compuesto, que permita que la diferencia entre la curvatura máxima y mínima no sea excesiva, facilita el planteamiento del interior de membrana tensada de donde proviene la fuerza distribuida ideal.

CAPÍTULO 5: POLÍGONOS RÍGIDOS CON RADIOS TENSADOS

Donde se explica cómo se distribuyen las fuerzas en un vértice de un ángulo, se enuncian métodos para plantear polígonos de ángulos o lados iguales inscritos en elipses, y en anillos compuestos por arcos elípticos y de circunferencia, y se calculan las disposiciones de fuerzas de las que resulta un mismo esfuerzo axial de compresión en todo el perímetro y ausencia de flexiones.

Apartado 5.1: Distribución ideal de fuerzas sobre los vértices

Una fuerza F aplicada en el vértice de un ángulo γ con una dirección coincidente con su bisectriz se puede descomponer en dos fuerzas gemelas que la compensan. Si este ángulo está formado por dos barras resistentes, estas fuerzas compensatorias se transforman en un esfuerzo axial N idéntico en cada una de ellas (figura 5.1).

$$N = \frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

[5.1]

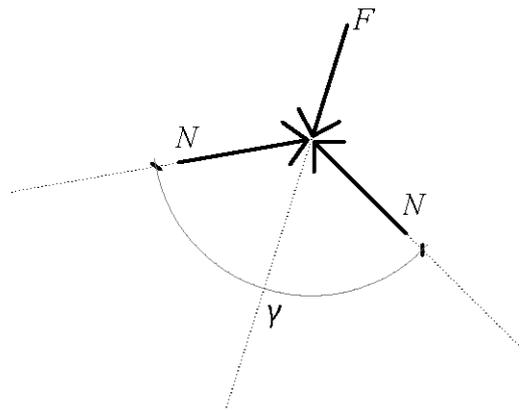


Figura 5.1: Equilibrio de fuerzas en el vértice de un ángulo γ .

Los polígonos regulares se definen por el número de lados (m) y el radio de la circunferencia en la que se inscriben, es decir, la que pasa por sus vértices; por eso también se les llama polígonos inscritos. A partir de m y r se puede calcular el ángulo φ entre radios situados en los vértices y el ángulo γ entre los lados (figura 4.1).

$$\varphi = \frac{360}{m} \quad \text{y} \quad \gamma = 180 - \frac{360}{m}$$

[5.2a y 5.2b]

En estos polígonos todos los ángulos γ entre los lados son iguales. Así, si se disponen fuerzas radiales situadas sobre la bisectriz de cada uno de sus vértices, de las que resultan esfuerzos axiales N iguales en todo el perímetro (figura 5.2a).

En un polígono irregular, los ángulos entre los lados pueden no ser iguales, así que, para que el esfuerzo axial N sea constante en todo el perímetro, es necesario que las fuerzas F_i que actúan en la dirección de la bisectriz del ángulo γ_i de cada vértice sean diferentes (figura 5.2b).

$$F_i = 2 \cdot N \cdot \cos\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)$$

[5.3]

Cabe decir que, para que un polígono sea irregular, es condición suficiente que la longitud de sus lados o los ángulos entre ellos sean desiguales, pero no es necesario que ambas condiciones se den a la vez, es decir, puede haber polígonos de ángulos regulares y lados irregulares y viceversa.

Se considera ideal cualquier distribución de fuerzas aplicadas según la dirección de la bisectriz del ángulo en cada vértice del polígono de la que resulte el mismo esfuerzo axial en todos los lados y ausencia total de otros esfuerzos en el plano.

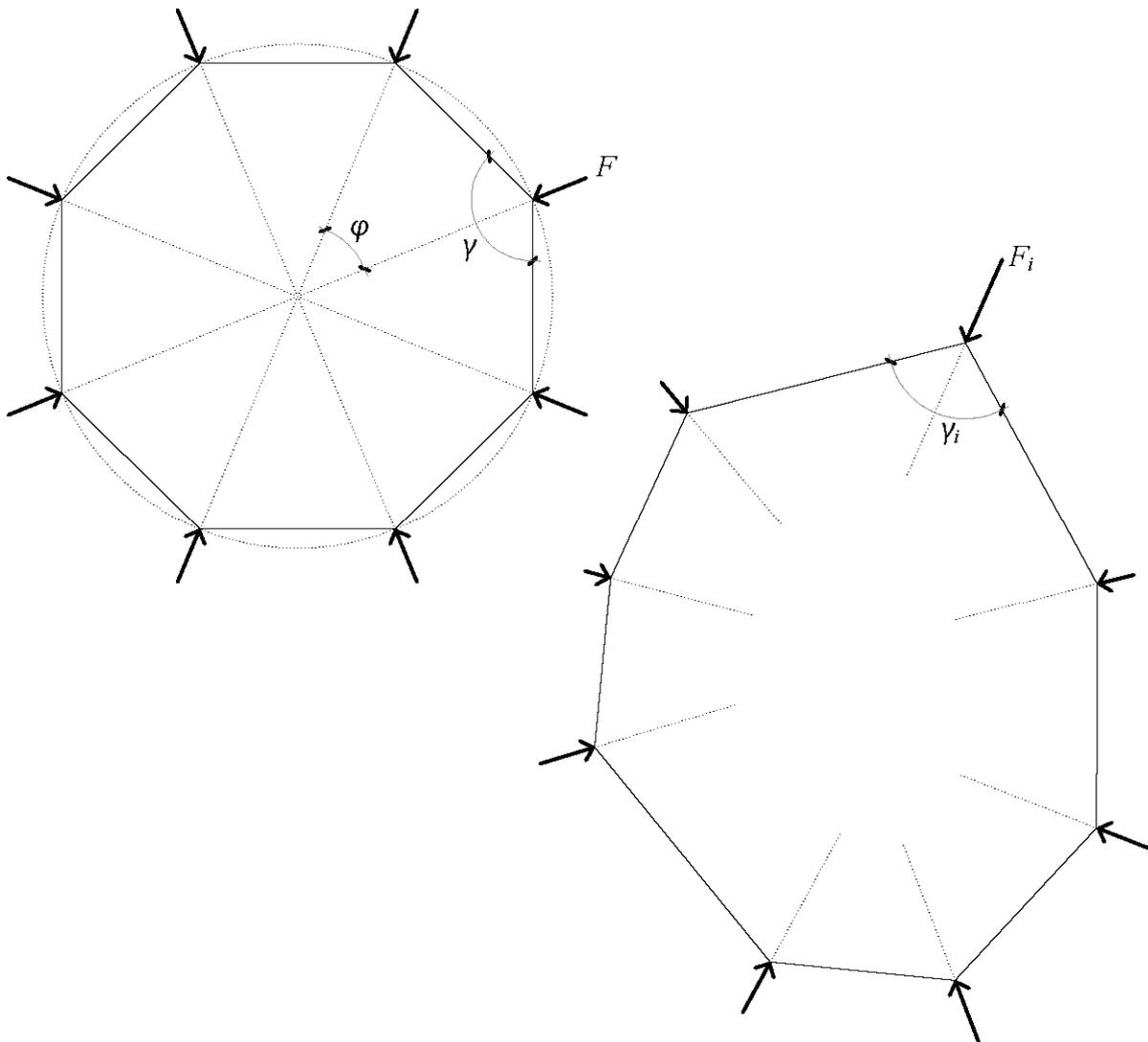


Figura 5.2a y 5.2b: Distribución ideal de fuerzas puntuales sobre los vértices de polígonos regulares (izquierda) e irregulares (derecha) para el mismo esfuerzo axial de compresión en todo el perímetro.

Apartado 5.2: Polígonos rígidos de base elíptica

i) Ángulos iguales y radios isotensos.

En polígonos rígidos de ángulos regulares, aunque tengan sus lados desiguales, se pueden disponer fuerzas F del mismo valor, es decir, radios isotensos, que generen un esfuerzo axial N uniforme en todo el perímetro, siempre y cuando estas fuerzas estén orientadas en la bisectriz del ángulo γ de cada vértice. Como los ángulos γ entre lados son iguales, también lo son los ángulos entre radios φ .

Primero se empieza por calcular el ángulo β que forma uno de sus lados con la horizontal, medido en sentido antihorario, según:

$$\beta_{ij} = \arctg\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right) \quad [5.4]$$

Luego, si se calcula el ángulo β de un lado contiguo, se puede obtener el ángulo γ que forman ambos lados en el vértice V_i según:

$$\gamma_i = \arctg\left(\frac{y_i - y_h}{x_i - x_h}\right) + 180 - \arctg\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right) \quad [5.5]$$

Entonces, una fuerza F aplicada sobre ese mismo vértice V_i según una orientación ζ_i coincidente con la bisectriz del ángulo γ , provoca un esfuerzo axial N igual en ambos lados del vértice. Esta orientación ζ_i se calcula según:

$$\zeta_i = 180 + \beta_{hi} - \frac{\gamma_i}{2} \quad [5.6]$$

Así, para inscribir un polígono de ángulos iguales en una elipse de semiejes a y b , en la ecuación 5.5, se sustituye la coordenada “y” por la calculada en la fórmula de la elipse en su forma cartesiana y se obtiene el ángulo γ que forman dos segmentos contiguos con el vértice sobre un arco elíptico:

$$\gamma(x) = \arctg\left(\frac{b\left(\sqrt{1-\frac{x_i^2}{a^2}} - \sqrt{1-\frac{x_h^2}{a^2}}\right)}{x_i - x_h}\right) + 180 - \arctg\left(\frac{b\left(\sqrt{1-\frac{x_j^2}{a^2}} - \sqrt{1-\frac{x_i^2}{a^2}}\right)}{x_j - x_i}\right) \quad [5.7]$$

Luego, como existe simetría respecto a los ejes principales X, Y ; en un cuadrante de elipse, se fija la posición del primer vértice (x_l, y_l) , el más cercano al eje X , de tal manera que el ángulo geodésico φ_l de la elipse en ese punto sea menor que el ángulo geodésico del punto donde se

produce la máxima excentricidad entre el lado del polígono y el arco. Esto es así porque la cuerda del arco elíptico que se corresponde con el lado del polígono siempre es paralela a la recta tangente en el punto de máxima excentricidad del arco, es decir, que $\varphi_1 < \beta_{12} - 90$.

Entonces, se plantea un sistema de n ecuaciones $\gamma(x)$ donde γ es conocido, porque se puede calcular directamente a partir de la ecuación 5.2b en función de m , y n es un número entero igual a $m/4$. Así, las coordenadas del resto de vértices sobre el cuadrante de elipse son las “ n ” incógnitas del sistema.

Aunque este método es perfectamente válido, en la práctica resulta más rápido resolver el problema gráficamente, especialmente cuando el número de lados del polígono, es decir, el número de incógnitas, es elevado.

Una vez resuelto el problema geométrico, sobre los vértices de un polígono de ángulos iguales inscrito en una elipse, se aplica una distribución ideal de fuerzas F idénticas de las que resultan esfuerzos axiales iguales en todos los lados (ecuación 5.3), teniendo en cuenta que la orientación de estas fuerzas no se corresponde con el ángulo geodésico φ del punto de la elipse coincidente con el vértice del polígono, sino con la bisectriz del ángulo γ entre los lados del polígono, es decir, ζ_i .

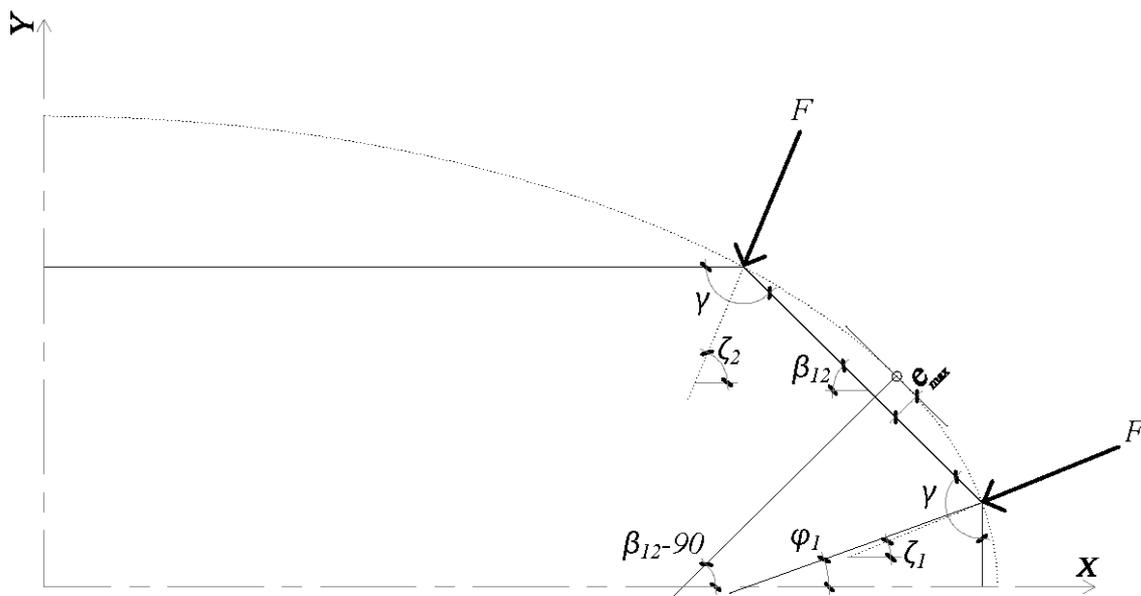


Figura 5.3: Cuadrante de un polígono de ángulos γ iguales y lados desiguales inscrito en una elipse y distribución ideal de fuerzas sobre los vértices.

Así se pueden construir polígonos de ángulos iguales y lados distintos, en número múltiplo de cuatro, inscritos en cualquier elipse conocida, y calcular una distribución ideal de fuerzas sobre los vértices de la que resulte el mismo esfuerzo axial en todo el perímetro.

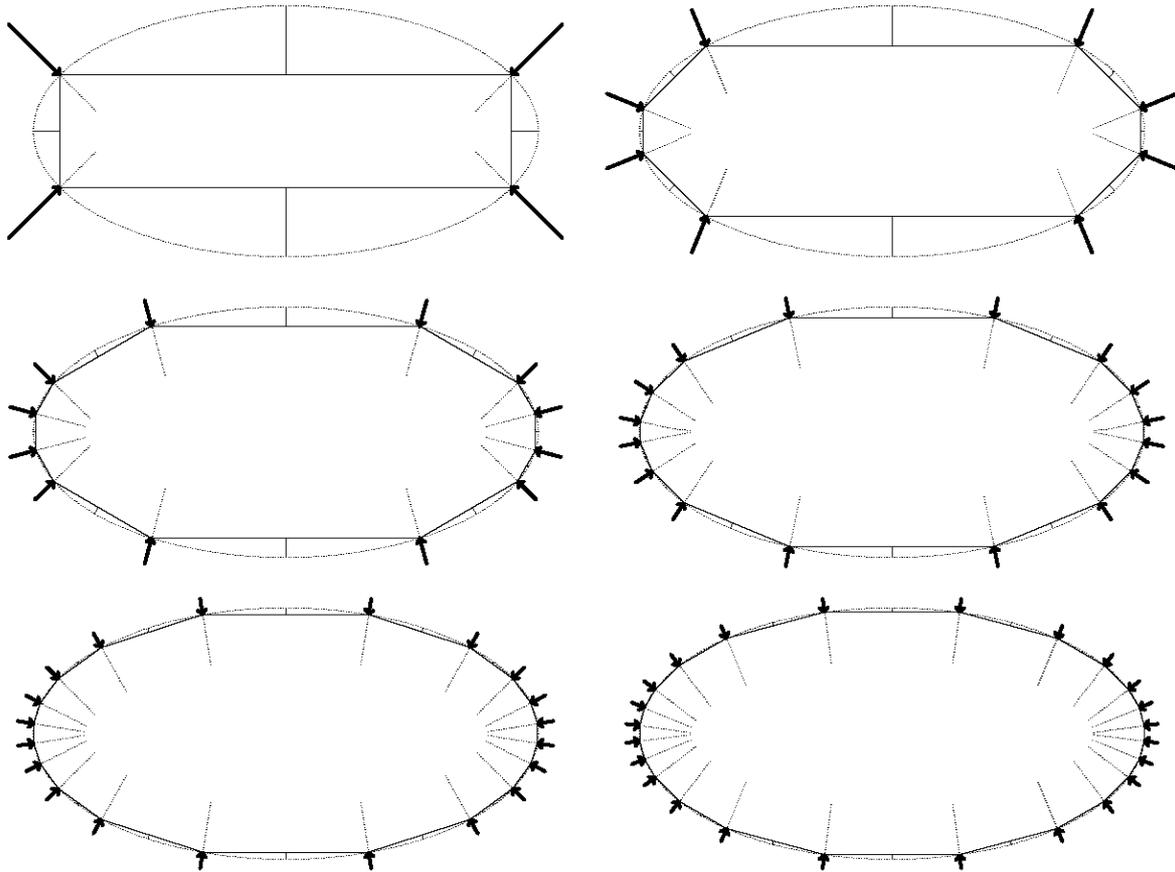


Figura 5.4: Polígonos de ángulos γ iguales de cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte y veinticuatro lados distintos, inscritos en elipses, y distribución ideal de fuerzas sobre los vértices.

Desde el punto de vista geométrico se observa que, cuando el número de lados del polígono es reducido, la aproximación a la elipse es menor, especialmente en las zonas de menor curvatura, donde la excentricidad del arco respecto a la cuerda es mayor.

Desde el punto de vista mecánico, pese a haber conseguido que la fuerza en el plano del polígono pueda ser igual en todos los radios, como la longitud de los lados del polígono es mayor en las zonas de menor curvatura de la elipse y viceversa, aunque el esfuerzo axial de compresión resulta igual en todos el perímetro y no existe flexión, las condiciones de dimensionado en cuanto al pandeo son peores en los lados de mayor longitud.

ii) Lados iguales

Para dibujar un polígono de lados iguales inscrito en una elipse, primero define la longitud l de un segmento comprendido entre dos puntos cualesquiera según:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

[5.8]

Así, dada una elipse de semiejes a y b , en la ecuación anterior se sustituye la “ y ” por la calculada en la fórmula de la elipse en su forma cartesiana y se obtiene la longitud de la cuerda de un arco elíptico:

$$l(x) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{x_i^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{x_j^2}{a^2}} \right)^2} \quad [5.9]$$

Entonces, se plantea un sistema de n ecuaciones $l(x)$ donde (x_0, y_0) y (x_n, y_n) son las coordenadas de los extremos de un cuadrante de la elipse, y n es un número entero igual a $m/4$. Así, la longitud l y las coordenadas del resto de vértices sobre el cuadrante de elipse son las “ n ” incógnitas del sistema.

Después, sobre los vértices de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse, se calculan los ángulos γ_i de cada vértice (ecuación 5.5) y se aplica una distribución ideal de fuerzas sobre los vértices de la que resulten esfuerzos axiales iguales en todos los lados (ecuación 5.3).

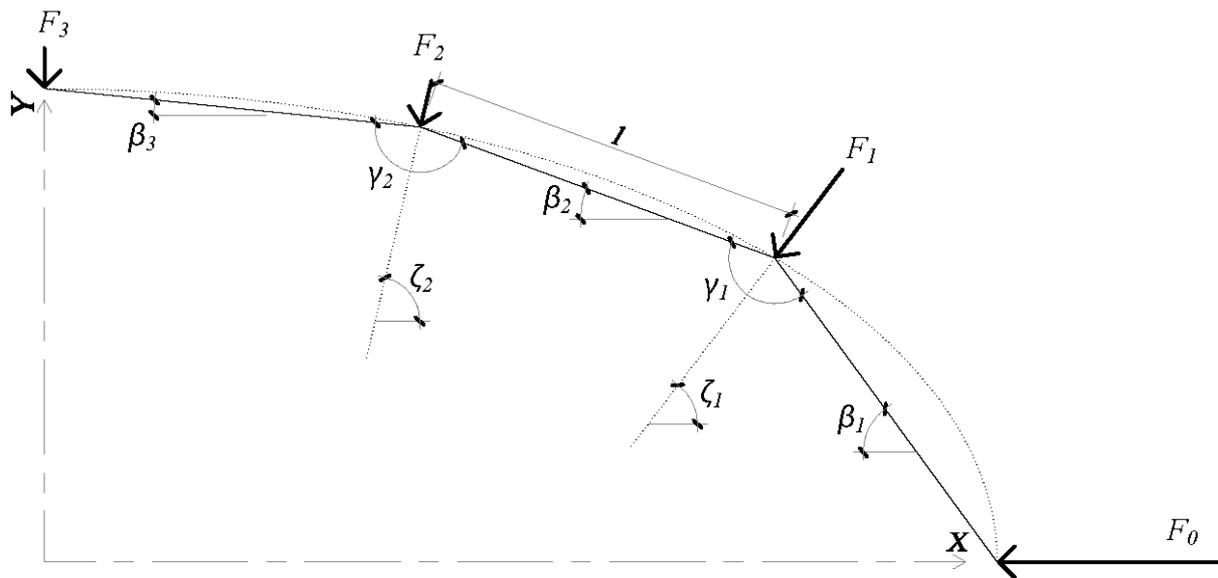


Figura 5.5: Cuadrante de polígono de lados iguales y ángulos γ desiguales inscrito en una elipse y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices.

Así se pueden construir polígonos de lados iguales y ángulos distintos, en número múltiplo de cuatro, inscritos en cualquier elipse conocida, y disponer fuerzas en sus vértices de las que resulte el mismo esfuerzo axial en todo el perímetro.

Al contrario que en el caso anterior, no parece sencillo resolver el problema mediante un método gráfico, si es que existe alguno capaz de hacerlo, ya que no se conoce *a priori* la longitud de los lados ni el ángulo entre ellos.

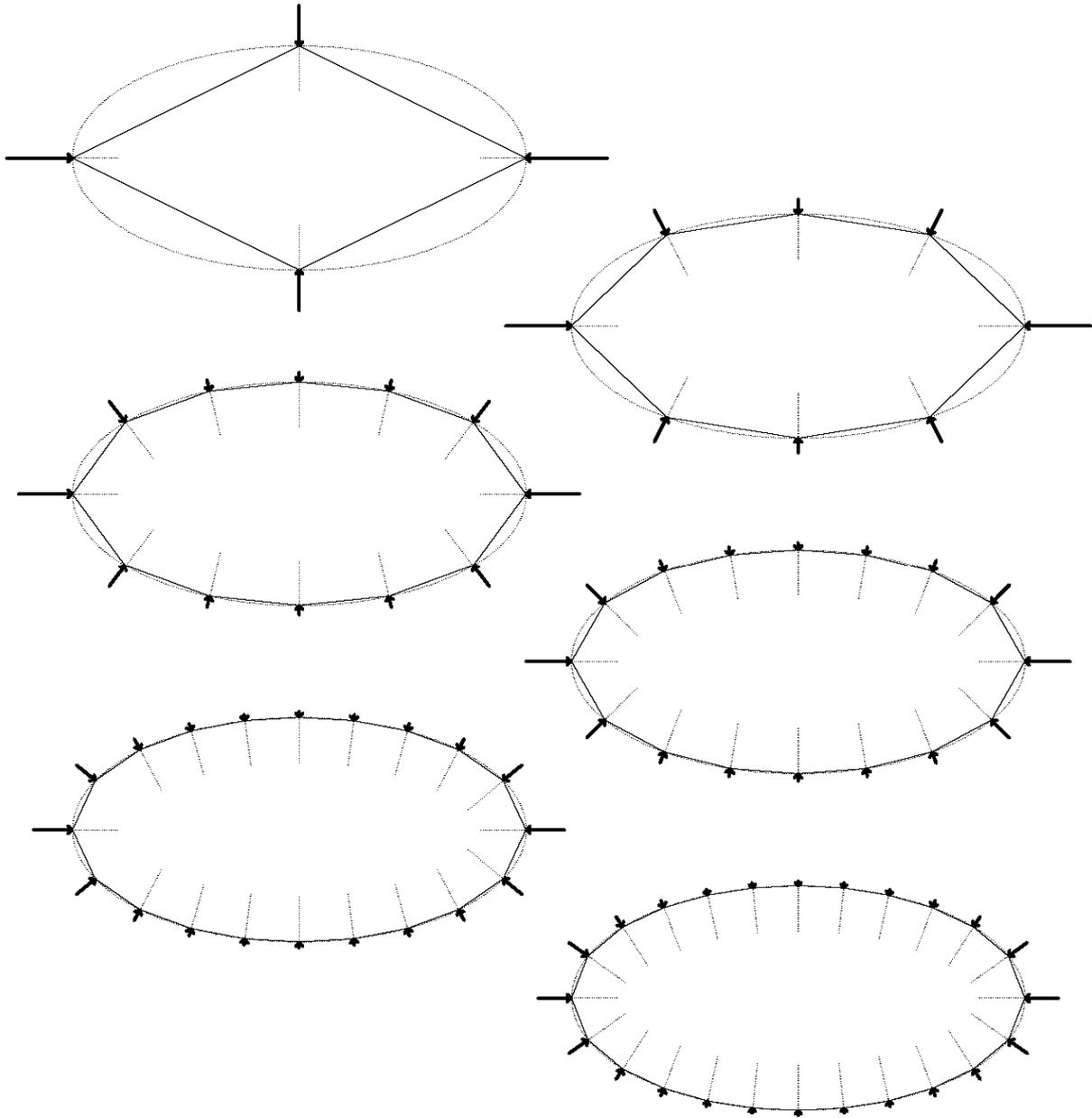


Figura 5.6: Polígonos de cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte y veinticuatro lados iguales, inscritos en elipses, y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices.

Desde el punto de vista geométrico se observa que, cuando el número de lados del polígono es reducido, al revés que en el caso anterior, la aproximación a la elipse es menor en las zonas de mayor curvatura, donde la excentricidad del arco respecto a la cuerda es mayor.

Desde el punto de vista mecánico, todos los lados del polígono tienen la misma longitud, el esfuerzo axial de compresión resulta igual en todo el perímetro y no existen flexiones en el plano. Suponiendo una coacción radial sufriente en todas las direcciones, las condiciones de dimensionado en cuanto al pandeo son iguales en todo el perímetro. Por el contrario, las fuerzas en el plano del polígono son más grandes en los vértices situados en la zona de mayor curvatura de la elipse y viceversa.

Siguiendo este proceso, se han calculado las distribuciones ideales de fuerzas (intensidad F_i , ángulo ζ_i y posición x, y) sobre los vértices de un cuadrante de n lados de polígonos inscritos en elipses distintas, definidas por la relación de sus semiejes (a/b). En todos se supone un valor unitario del esfuerzo axial en el polígono ($N=1$), y un valor unitario del semieje mayor ($a=1$).

n	l	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	1,41421	1,41421	0,00	1,00000	0,00000
			90,00	0,00000	1,00000
2	0,76537	0,76537	0,00	1,00000	0,00000
			45,00	0,70711	0,70711
			90,00	0,00000	1,00000
3	0,51764	0,51764	0,00	1,00000	0,00000
			30,00	0,86603	0,50000
			60,00	0,50000	0,86603
			90,00	0,00000	1,00000
4	0,39018	0,39018	0,00	1,00000	0,00000
			22,50	0,92388	0,38268
			45,00	0,70711	0,70711
			67,50	0,38268	0,92388
			90,00	0,00000	1,00000
5	0,31286	0,31287	0,00	1,00000	0,00000
			18,00	0,95106	0,30902
			36,00	0,80902	0,58779
			54,00	0,58779	0,80902
			72,00	0,30902	0,95106
			90,00	0,00000	1,00000
6	0,26106	0,26105	0,00	1,00000	0,00000
			15,00	0,96593	0,25882
			30,00	0,86603	0,50000
			45,00	0,70711	0,70711
			60,00	0,50000	0,86603
			75,00	0,25882	0,96593
90,00	0,00000	1,00000			

Tabla 5.1: Distribución ideal de fuerzas iguales F en los vértices de un cuadrante de un polígono regular.

n	l	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	1,25000	1,60000	0,00	1,00000	0,00000
		1,20000	90,00	0,00000	0,75000
2	0,67157	1,04995	0,00	1,00000	0,00000
		0,73182	53,13	0,64744	0,57159
		0,53133	90,00	0,00000	0,75000
3	0,45473	0,75765	0,00	1,00000	0,00000
		0,59176	39,47	0,82774	0,42084
		0,40327	68,31	0,44775	0,67062
		0,34913	90,00	0,00000	0,75000
4	0,34294	0,58671	0,00	1,00000	0,00000
		0,49460	31,38	0,89940	0,32785
		0,35740	55,99	0,65398	0,56738
		0,28232	74,40	0,34001	0,70532
		0,26060	90,00	0,00000	0,75000
5	0,27505	0,47682	0,00	1,00000	0,00000
		0,42183	25,97	0,93443	0,26712
		0,32451	47,48	0,76454	0,48343
		0,25488	64,14	0,53434	0,63395
		0,21888	77,75	0,27356	0,72139
		0,20802	90,00	0,00000	0,75000
6	0,22952	0,40087	0,00	1,00000	0,00000
		0,36593	22,10	0,95400	0,22487
		0,29631	41,17	0,83018	0,41813
		0,23710	56,50	0,65516	0,56662
		0,19933	69,02	0,45010	0,66973
		0,17934	79,89	0,22866	0,73013
		0,17315	90,00	0,00000	0,75000

Tabla 5.2: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=1,33$.

n	l	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	1,20185	1,66410	0,00	1,00000	0,00000
		1,10940	90,00	0,00000	0,66667
2	0,64166	1,16948	0,00	1,00000	0,00000
		0,70124	56,31	0,62480	0,52053
3	0,43472	0,45551	90,00	0,00000	0,66667
		0,87427	0,00	1,00000	0,00000
		0,60224	43,45	0,80997	0,39098
		0,35528	71,20	0,42987	0,60193
4	0,32799	0,29784	90,00	0,00000	0,66667
		0,68928	0,00	1,00000	0,00000
		0,52573	35,40	0,88696	0,00000
		0,32931	60,12	0,63337	0,51590
5	0,26333	0,24428	76,61	0,32596	0,63026
		0,22203	90,00	0,00000	0,66667
		0,56414	0,00	1,00000	0,00000
		0,46220	29,75	0,92601	0,25167
		0,31251	52,10	0,74606	0,44392
		0,22685	67,60	0,51556	0,57124
6	0,21960	0,18827	79,51	0,26229	0,64333
		0,17728	90,00	0,00000	0,66667
		0,47840	0,00	1,00000	0,00000
		0,41005	25,67	0,94747	0,21323
		0,29545	46,00	0,81379	0,38744
		0,21716	60,72	0,63503	0,51499
6	0,21960	0,17441	71,96	0,43295	0,60095
		0,15361	81,37	0,21900	0,65048
		0,14739	90,00	0,00000	0,66667

Tabla 5.3: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=1,50$.

n	l	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	1,11803	1,78885	0,00	1,00000	0,00000
		0,89443	90,00	0,00000	0,50000
2	0,58617	1,43694	0,00	1,00000	0,00000
		0,60164	63,43	0,57886	0,40771
		0,31488	90,00	0,00000	0,50000
3	0,39684	1,17585	0,00	1,00000	0,00000
		0,57776	52,80	0,76669	0,32101
		0,25301	76,86	0,39476	0,45939
		0,20465	90,00	0,00000	0,50000
4	0,29968	0,98199	0,00	1,00000	0,00000
		0,55340	45,47	0,85286	0,26107
		0,24931	68,69	0,58941	0,40392
		0,17038	80,74	0,29881	0,47716
		0,15245	90,00	0,00000	0,50000
5	0,24060	0,83621	0,00	1,00000	0,00000
		0,52473	39,93	0,89940	0,21856
		0,25324	62,41	0,70199	0,35609
		0,16310	74,36	0,47636	0,43962
		0,13034	82,78	0,24015	0,48537
		0,12163	90,00	0,00000	0,50000
6	0,20090	0,72451	0,00	1,00000	0,00000
		0,49417	35,54	0,92722	0,18726
		0,25707	57,23	0,77366	0,31680
		0,16268	69,28	0,59215	0,40291
		0,12324	77,48	0,39908	0,45846
		0,10613	84,06	0,20064	0,48983
		0,10122	90,00	0,00000	0,50000

Tabla 5.4: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=2,00$.

n	l	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	1,05409	1,89737	0,00	1,00000	0,00000
		0,63246	90,00	0,00000	0,33333
2	0,54064	1,70872	0,00	1,00000	0,00000
		0,44568	71,57	0,53810	0,28096
		0,19374	90,00	0,00000	0,33333
3	0,36418	1,54316	0,00	1,00000	0,00000
		0,46684	63,99	0,71901	0,23167
		0,15549	81,95	0,36347	0,31054
		0,12520	90,00	0,00000	0,33333
4	0,27471	1,39825	0,00	1,00000	0,00000
		0,48542	58,40	0,80794	0,19642
		0,15532	76,90	0,54601	0,27926
		0,10418	84,34	0,27442	0,32054
		0,09316	90,00	0,00000	0,33333
5	0,22057	1,27169	0,00	1,00000	0,00000
		0,49708	53,87	0,85975	0,17024
		0,16210	72,91	0,65487	0,25191
		0,10017	80,43	0,43948	0,29942
		0,07967	85,59	0,22042	0,32514
		0,07433	90,00	0,00000	0,33333
6	0,18425	1,16128	0,00	1,00000	0,00000
		0,50257	50,05	0,89302	0,15001
		0,17075	69,50	0,72658	0,22903
		0,10091	77,29	0,54912	0,27858
		0,07549	82,35	0,36756	0,31000
		0,06489	86,37	0,18416	0,32763
		0,06189	90,00	0,00000	0,33333

Tabla 5.5: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=3$.

n	l	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	1,03078	1,94029	0,00	1,00000	0,00000
		0,48507	90,00	0,00000	0,25000
2	0,52335	1,82647	0,00	1,00000	0,00000
		0,34754	75,96	0,52206	0,21323
		0,14053	90,00	0,00000	0,25000
3	0,35126	1,72059	0,00	1,00000	0,00000
		0,37538	70,17	0,69782	0,17907
		0,11200	84,20	0,35090	0,23410
		0,09051	90,00	0,00000	0,25000
4	0,26451	1,62214	0,00	1,00000	0,00000
		0,40219	65,80	0,78546	0,15473
		0,11114	80,59	0,52732	0,21242
		0,07502	85,92	0,26436	0,24111
		0,06725	90,00	0,00000	0,25000
5	0,21219	1,53070	0,00	1,00000	0,00000
		0,42435	62,19	0,83760	0,13657
		0,11556	77,75	0,63318	0,19350
		0,07178	83,12	0,42356	0,22647
		0,05737	86,82	0,21212	0,24431
		0,05362	90,00	0,00000	0,25000
6	0,17727	1,44389	0,00	1,00000	0,00000
		0,44271	59,00	0,87260	0,12211
		0,12212	75,29	0,70420	0,17750
		0,07216	80,86	0,53031	0,21195
		0,05426	84,48	0,35428	0,23378
		0,04679	87,38	0,17733	0,24604
		0,04468	90,00	0,00000	0,25000

Tabla 5.6: Distribución ideal de fuerzas F_i en los vértices de un cuadrante de un polígono de lados iguales inscrito en una elipse de semiejes $a/b=4$.

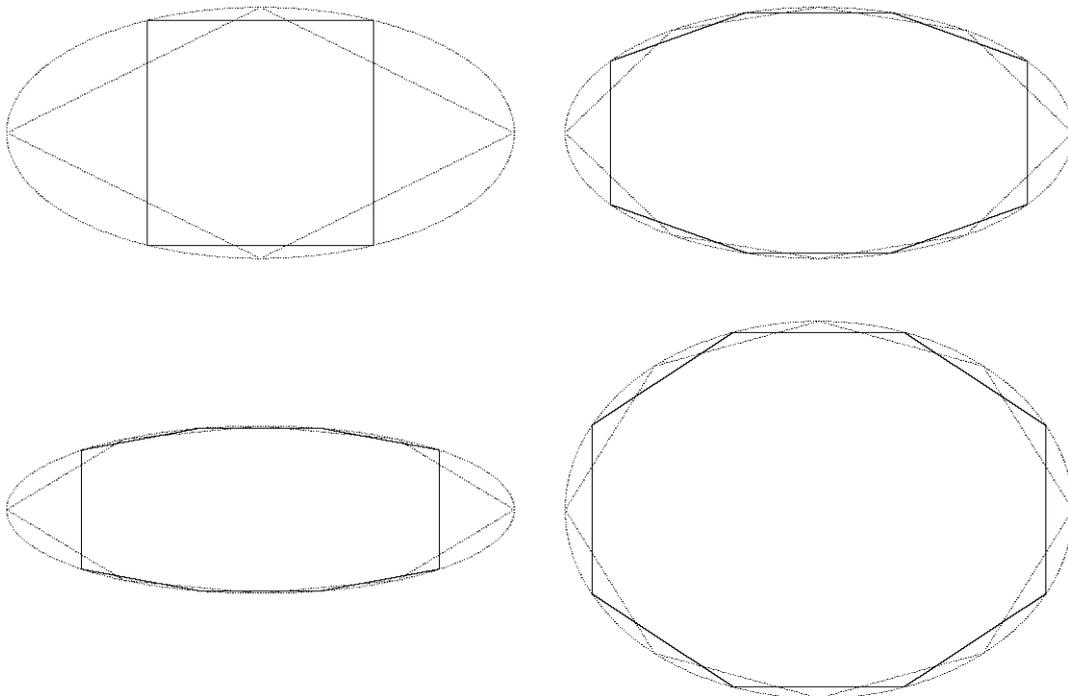
Si la proporción entre sus semiejes coincide con alguna de las calculadas, se puede plantear una polígono inscrito en una elipse con una distribución ideal de fuerzas como las de la figura 5.6, multiplicando el valor del axil N por las fuerzas F y el semieje mayor a por los valores de l y las coordenadas x , y que aparecen en las tablas anteriores.

Existe un sistema alternativo para plantear polígonos de inscritos en elipses en el que los ejes de principales no coinciden con los vértices, sino con el punto medio de los lados. Así, se parte de un cuadrante de elipse del que no se conoce *a priori* la posición de ninguno de los vértices del polígono. Entonces, para que el sistema de ecuaciones no sea indeterminado, se plantean dos ecuaciones que se suman a la ecuación 5.9:

$$l(x) = 2 \cdot y_1 = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} \quad \text{y} \quad l(x) = 2 \cdot x_n \quad [5.10a \text{ y } 5.10b]$$

...donde x_1, y_1 y x_n, y_n son las coordenadas del primero y el último de los n vértices del polígono situados sobre el cuadrante de elipse.

El más sencillo de todos los polígonos que se pueden inscribir en una elipse según este criterio es un cuadrado. Si se compara con el rombo resultante de aplicar el criterio anterior (en línea de puntos), el cuadrado (en línea continua) tiene una longitud de lado claramente inferior, lo cual resulta una ventaja en cuanto a sus condiciones de pandeo. En cambio, hay una falta de coherencia geométrica en la solución del problema, porque la diferencia entre la dimensión máxima de la elipse y la del polígono es muy apreciable (figura 5.7a). Podría decirse que el cuadrado es el polígono de doble simetría que menos se aproxima a una elipse. Aun así, a medida que se incrementa el número de lados, ambas diferencias, de longitud de lado y de dimensión máxima, se reducen (figura 5.7b). Pero, si la excentricidad ε de la elipse aumenta, vuelven a crecer (5.7c). Entonces, puede concluirse que este criterio para inscribir polígonos sólo resulta geoméricamente coherente si el número de lados iguales es elevado y, además, la elipse tiene una excentricidad ε pequeña (figura 5.7d).



Figuras 5.7a, 5.7b, 5.7c y 5.7c: Polígonos de cuatro y ocho lados iguales inscritos en elipses con diferente excentricidad ε según dos criterios distintos.

Apartado 5.3: Polígonos rígidos de base compuesta

i) En anillos compuestos por arcos elípticos iguales

Para inscribir un polígono de m lados iguales en un anillo formado por arcos iguales de una misma elipse de semiejes a y b , se plantea un sistema de n ecuaciones $l(x)$, donde x_1 y x_n se corresponden con los puntos de tangencia, es decir, con los extremos de cada arco (figura 5.8), donde n es la relación entre el número de lados del polígono inscrito y el número de lados del polígono alrededor del cual se compone el anillo.

Después, se calcula una distribución ideal de fuerzas sobre los vértices de la que resulte el mismo esfuerzo axial de compresión en todos los lados. Para calcular los ángulos γ_1 y γ_n hay que tener en cuenta que el ángulo β del lado contiguo situado al otro lado del punto de tangencia está afectado por el giro del ángulo α del polígono regular, alrededor del cual se ha compuesto el anillo, modificando la ecuación 5.5 según:

$$\gamma_1 = \gamma_n = 2 \cdot \arctg \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) + \alpha$$

[5.11]

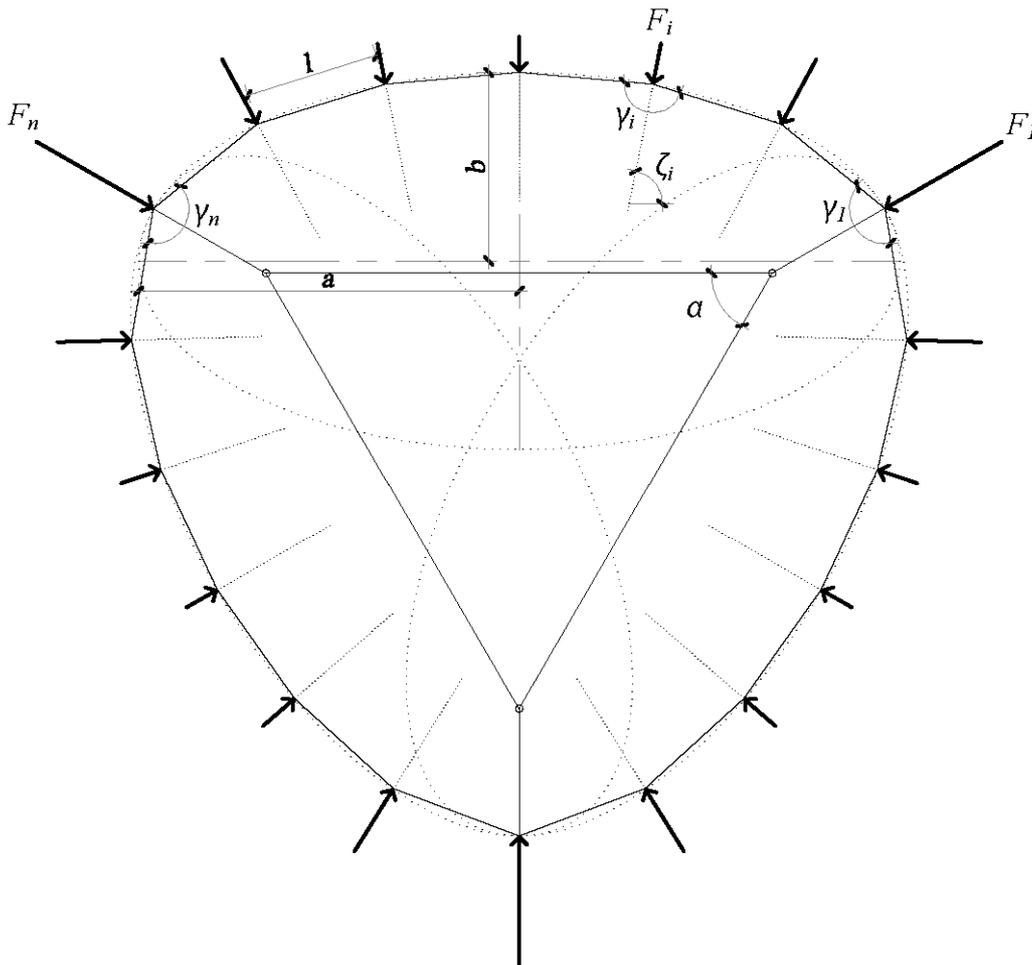


Figura 5.8: Polígono de lados iguales inscrito en un anillo compuesto por tres arcos de la misma elipse alrededor de un triángulo equilátero y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices.

En la figura anterior, se observa que el ángulo ζ de las fuerzas F_1 y F_n coincide con el ángulo geodésico φ de la elipse en el punto de tangencia ($\zeta_1 = \varphi_1$ y $\zeta_2 = \varphi_2$).

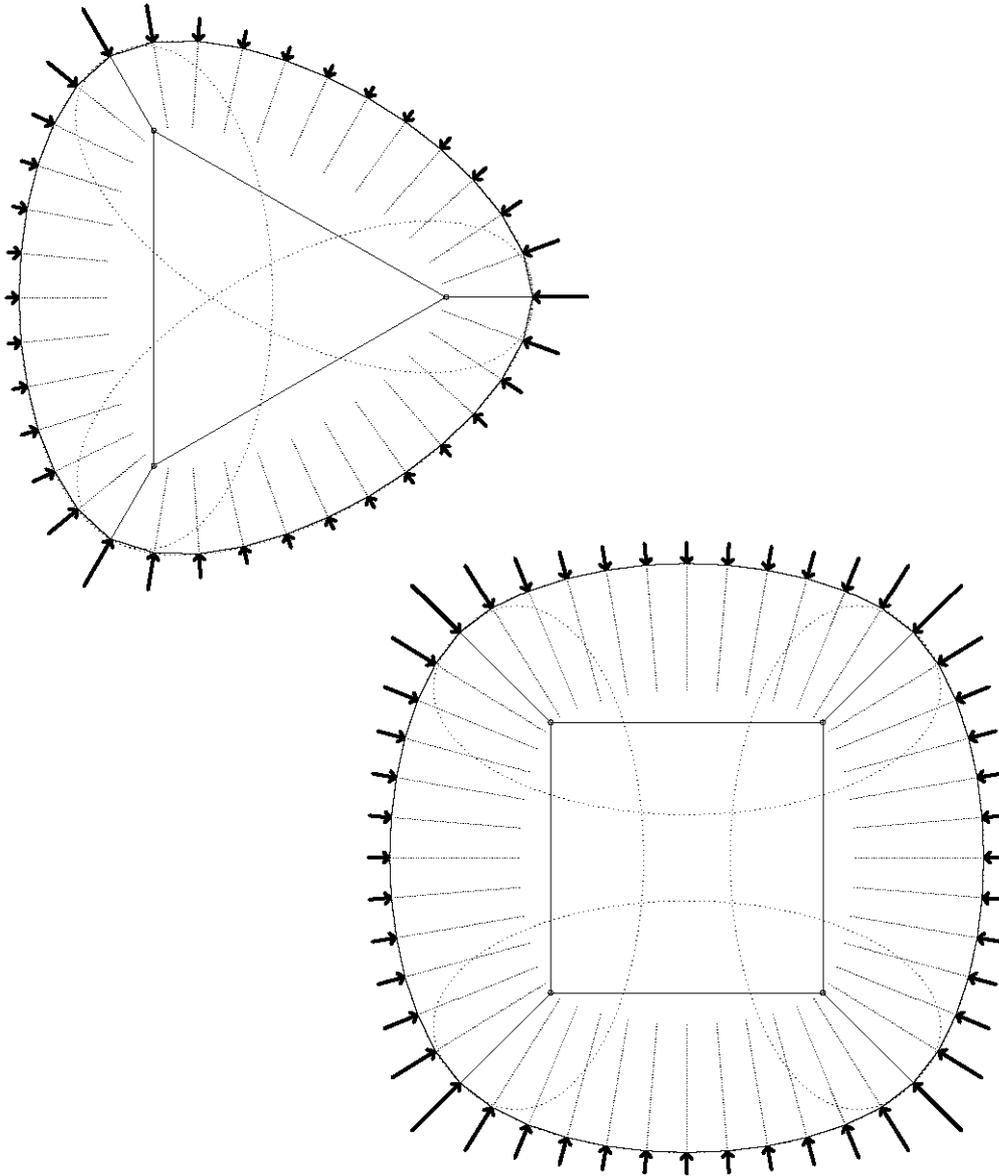


Figura 5.9: Polígonos de lados iguales y inscritos en anillos compuestos alrededor de un triángulo equilátero y un cuadrado, y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices.

Desde el punto de vista mecánico, se observa que las fuerzas se incrementan a medida que se aproximan a los vértices del triángulo o del cuadrado alrededor del cual se compone el anillo, por ser las zonas de mayor curvatura de la elipse. Aun así, este diseño resulta ventajoso para el dimensionado, ya que el esfuerzo axial de compresión y las condiciones de pandeo son idénticas en todos los lados del polígono y no existen flexiones en el plano.

ii) En anillos compuestos por arcos de circunferencias y elipses distintas alrededor de un rectángulo

Según se ha demostrado en el Capítulo 4 de esta tesis, combinando arcos de distintas elipses y circunferencias se puede componer un anillo alrededor de cualquier polígono irregular. Cada arco queda definido por una función $f_i(x)$ con un dominio de x que va desde el punto de tangencia en un extremo hasta el punto de tangencia en el extremo contrario, y así sucesivamente hasta cerrar el anillo, es decir, una función $F(x)$ compuesta por la concatenación de varias funciones de elipses y circunferencias, cada una con un dominio determinado.

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{para } x_0 > x \geq x_1 \\ f_2(x) & \text{para } x_1 > x \geq x_2 \\ \dots & \\ f_n(x) & \text{para } x_{n-1} > x \geq x_n \end{cases} \quad [5.12]$$

Siendo así, para plantear un polígono de lados iguales inscrito en un anillo compuesto de arcos de circunferencias y elipses distintas, según las condiciones descritas en el Capítulo 4, primero se calcula la longitud de la cuerda de un arco compuesto por dos curvas tangentes pertenecientes a dos funciones distintas $f_i(x)$ y $f_j(x)$, cuyos dominios coinciden justamente en el punto de tangencia M , para lo cual se modifica la ecuación 5.8, sustituyendo “ y_i ” e “ y_j ” por $f_i(x_i)$ y $f_j(x_j)$ respectivamente:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + [f_i(x_i) - f_j(x_j)]^2} \quad [5.13]$$

...siendo V_i y V_j dos puntos situados a diferente lado de M .

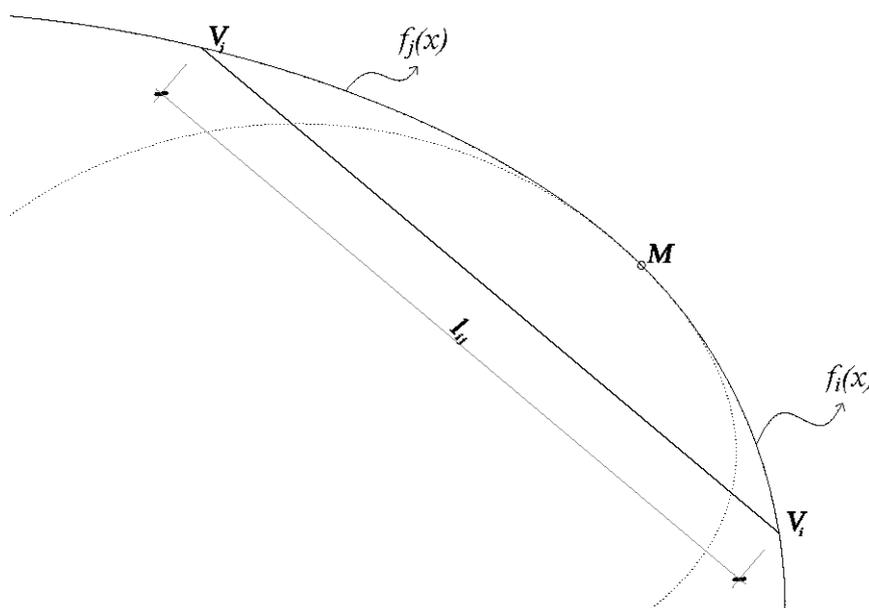


Figura 5.10: Cuerda de un arco compuesto por dos curvas tangentes con funciones distintas.

Luego se plantea un sistema de m ecuaciones $l(x)$, donde x_1 y x_n corresponden al mismo punto de la función $F(x)$ de los arcos concatenados que definen el anillo, porque son el principio y el final del anillo, y m es el número total de lados del polígono inscrito.

De todos los anillos no circulares seguramente los más interesantes son los que se pueden componer alrededor de un polígono rectangular que tienen una distancia máxima D entre el anillo y el polígono igual en todos los lados y un radio de curvatura r en el punto de tangencia igual en todos los vértices.

Así que se plantea un polígono de m lados iguales inscrito en un anillo compuesto por arcos de dos elipses distintas y una misma circunferencia oscultriz alrededor de un rectángulo, manteniendo la misma distancia máxima D entre el anillo y el polígono en cada lado⁵⁰ (figura 5.11).

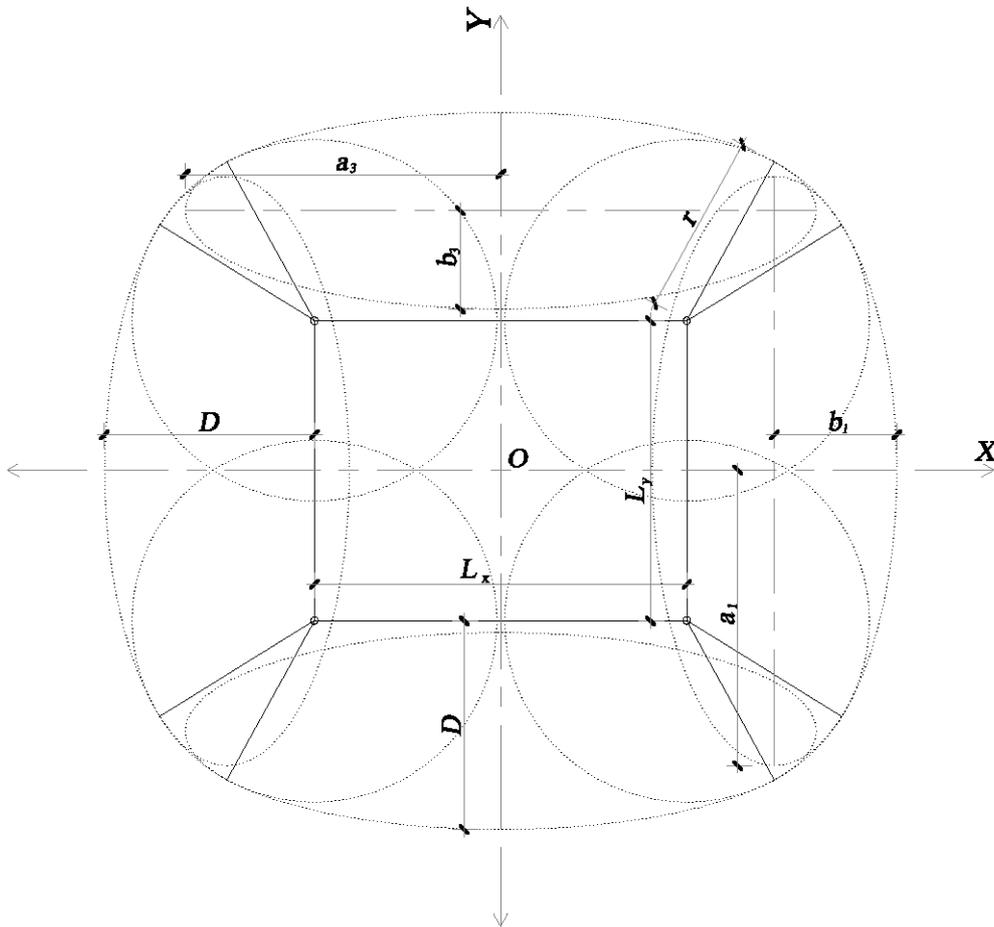


Figura 5.11: Anillo compuesto por arcos de dos elipses distintas y una misma circunferencia oscultriz alrededor de un rectángulo con la misma distancia máxima D en los cuatro lados.

Como existe simetría respecto a dos ejes principales X , Y , se considera un cuadrante formado por tres arcos, dos elípticos y uno de circunferencia, descritos por tres funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, y $f_3(x)$ con centro en O_1 , O_2 y O_3 respectivamente, que concatenadas forman una misma función $F(x)$ con centro en O :

⁵⁰ Esta geometría podría corresponderse con la de un campo o pista deportiva rodeada por una grada continua con la misma sección en todo el perímetro.

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1 \sqrt{1 - \frac{\left(x - \frac{L_x}{2} - D + a_1\right)^2}{b_1^2}} & \text{para } \frac{L_x}{2} + D > x \geq x_M \\ f_2(x) = \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{L_x}{2}\right)^2} + \frac{L_y}{2} & \text{para } x_M > x \geq x_N \\ f_3(x) = b_3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_3^2}} + \frac{L_y}{2} + D - b_3 & \text{para } x_N > x \geq 0 \end{cases}$$

[5.14]

Después se plantea un sistema de n ecuaciones $l(x)$, donde x_1 y x_n se corresponden con los extremos del cuadrante y n es igual al número de lados de un cuadrante del polígono inscrito, o sea, $m/4$ (figura 5.12), y se calcula una distribución ideal de fuerzas sobre los vértices de la que resulte el mismo esfuerzo axial de compresión en todos los lados.

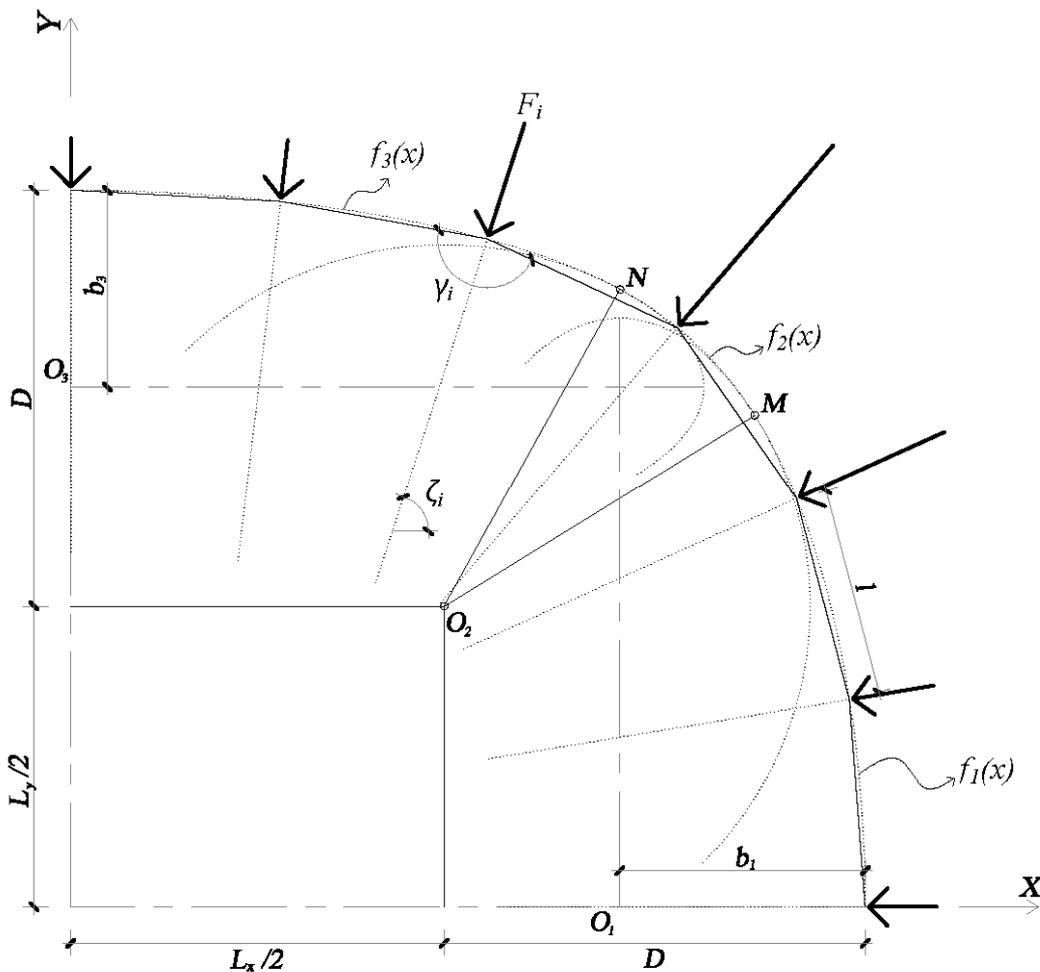


Figura 5.12: Cuadrante de un polígono de lados iguales, inscrito en un anillo compuesto por arcos de elipses distintas y una misma circunferencia oscultriz alrededor de un rectángulo, y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices.

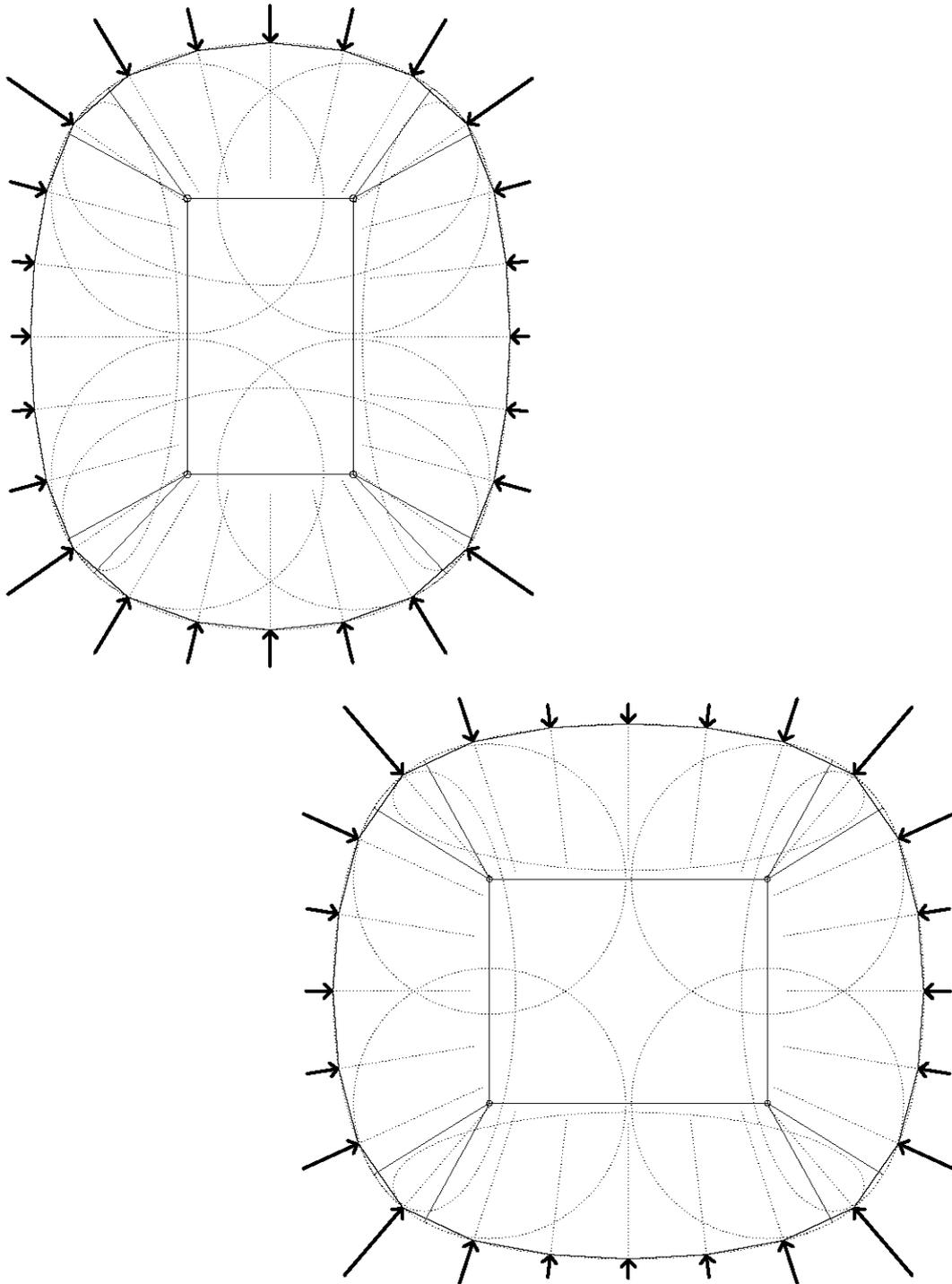


Figura 5.13: Polígonos de lados iguales inscritos en diversos anillos compuestos alrededor de rectángulos y distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices.

Desde el punto de vista mecánico se observa que, como en el anillo compuesto que sirve de base para inscribir el polígono los arcos elípticos se encadenan mediante un arco de circunferencia y no directamente entre sí, la variación de curvatura del anillo compuesto es menor que en el caso anterior, lo que hace que los ángulos γ entre los lados sean más homogéneos, aunque igualmente diferentes y, por tanto, las fuerzas F_i también. También se observa que, cuando se incrementa la diferencia entre los lados del polígono interior, o la

diferencia entre el radio r en el punto de tangencia y la distancia máxima D , la variación entre las fuerzas F_i aumenta excesivamente. Como en los casos anteriores, el diseño resulta ventajoso para el dimensionado, ya que el esfuerzo axial de compresión y las condiciones de pandeo son idénticas en todos los lados del polígono, y no existen flexiones en el plano.

iii) En anillos compuestos por arcos de circunferencias y elipses distintas alrededor de un segmento o un polígono cualquiera

Si se pretende inscribir un polígono en un anillo compuesto alrededor de un polígono no rectangular, o en uno cuyos arcos de elipse no tengan sus ejes principales alineados con los del anillo, resulta más útil formular la ecuación compuesta que define el anillo en función del ángulo geodésico φ referido a los ejes XY del anillo:

$$F(\varphi) = \begin{cases} f_1(\varphi) & \text{para } \varphi_o > \varphi \geq \varphi_1 \\ f_2(\varphi) & \text{para } \varphi_1 > \varphi \geq \varphi_2 \\ \dots & \\ f_n(\varphi) & \text{para } \varphi_{n-1} > \varphi \geq \varphi_n \end{cases} \quad [5.15]$$

Así, dada una elipse cualquiera orientada según un ángulo β y con un centro O_i distinto al origen de coordenadas O (figura 5.14), se formula la posición de un punto M cualquiera según:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\omega - \beta) + x_i \\ y = \rho \cdot \text{sen}(\omega - \beta) + y_i \end{cases} \quad [5.16]$$

...donde x_i, y_i son las coordenadas del centro de la elipse O_i , ω es la latitud geocéntrica del punto en cuestión referida a los ejes principales de la propia elipse, calculada según:

$$\omega = \text{arctg} \left[\frac{b^2}{a^2} \text{tg}(\varphi + \beta) \right] \quad [5.17]^{51}$$

...y ρ es la distancia entre el punto M y el centro O_i de la elipse, calculado según:

$$\rho = \sqrt{\left[a \cdot \cos \left(\text{arctg} \left[\frac{b}{a} \text{tg}(\varphi + \beta) \right] \right) \right]^2 + \left[b \cdot \text{sen} \left(\text{arctg} \left[\frac{b}{a} \text{tg}(\varphi + \beta) \right] \right) \right]^2} \quad [5.18]$$

...donde φ es la latitud geodésica del punto M medida en sentido antihorario a partir de la dirección horizontal, en vez del eje mayor de la elipse según es habitual.

⁵¹ Ver las transformaciones entre sistemas de referencia geocéntrico y geodésico en el apartado 4.1.

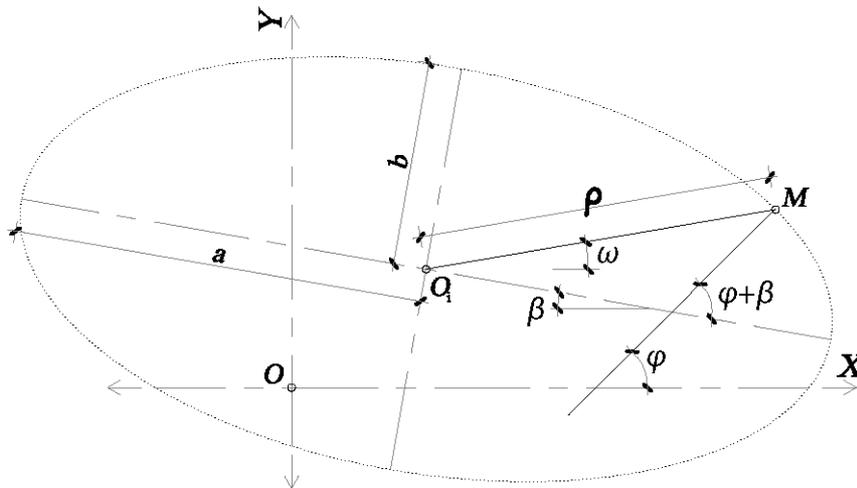


Figura 5.14: Posición de un punto cualquiera de una elipse girada un ángulo β y con centro distinto al origen de coordenadas.

Así, substituyendo en las dos fórmulas anteriores en la ecuación 5.16 se formula la función $f(\varphi)$ de la elipse según un sistema de coordenadas distinto al que forman los ejes principales de la propia elipse:

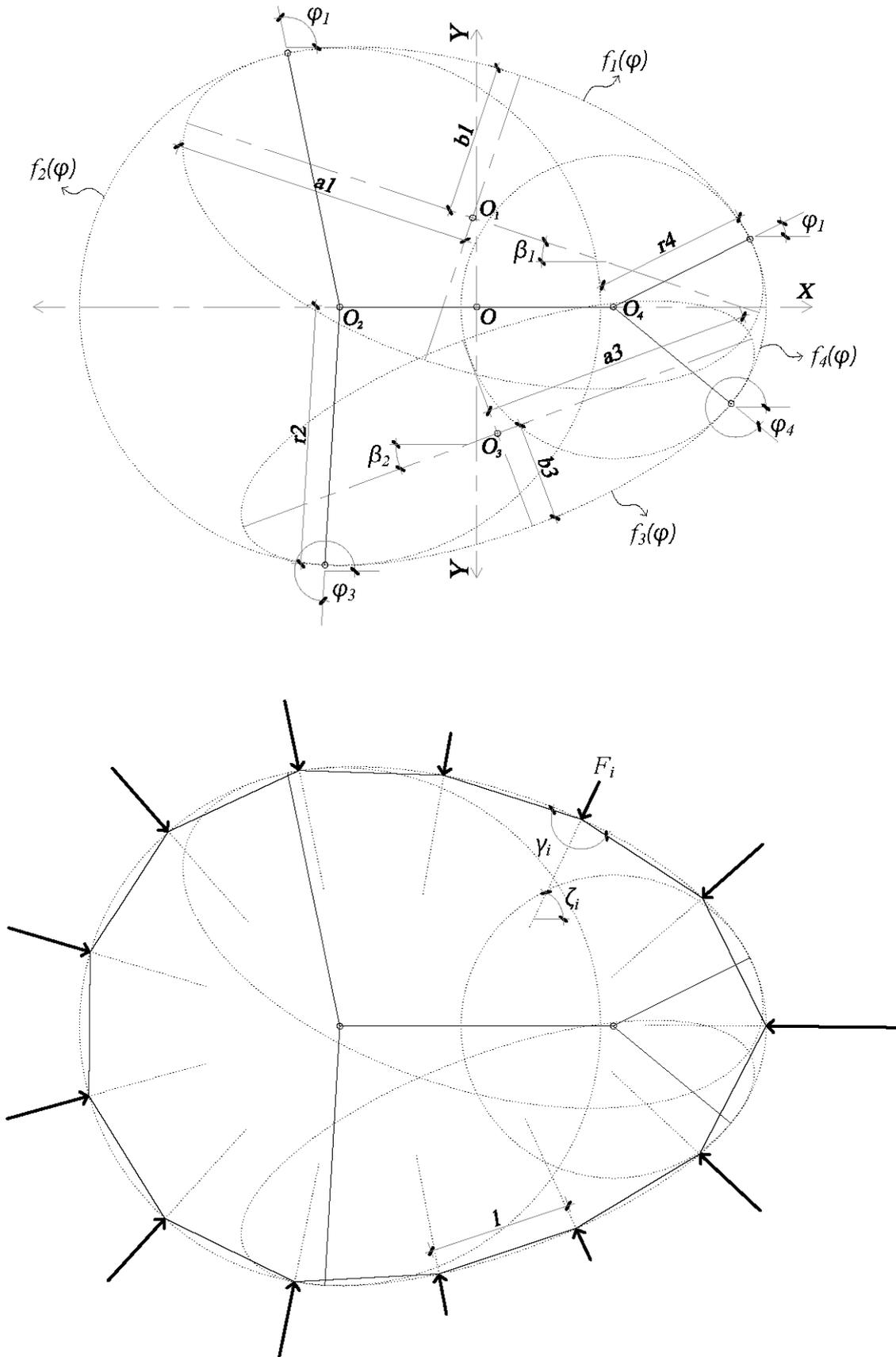
$$f(\varphi) = \begin{cases} x = \sqrt{\left[a \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b}{a} \operatorname{tg}(\varphi + \beta) \right] \right) \right]^2 + \left[b \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b}{a} \operatorname{tg}(\varphi + \beta) \right] \right) \right]^2} \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}(\varphi + \beta) \right] - \beta \right) + x_i \\ y = \sqrt{\left[a \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b}{a} \operatorname{tg}(\varphi + \beta) \right] \right) \right]^2 + \left[b \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b}{a} \operatorname{tg}(\varphi + \beta) \right] \right) \right]^2} \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}(\varphi + \beta) \right] - \beta \right) + y_i \end{cases} \quad [5.19]$$

Entonces, dado un anillo compuesto cualquiera definido por la función compuesta $F(\varphi)$, a partir de la cual se pueden calcular las coordenadas x , y de cualquier punto referidas al centro del propio anillo, para inscribir en él un polígono de n lados iguales, primero se fija la posición de un vértice sobre el anillo y luego se plantea un sistema de n ecuaciones $l(x, y)$ para encontrar la posición del resto de vértices, así como la longitud del lado del polígono.

De este modo se ha resuelto la inscripción de un polígono de doce lados iguales en un anillo compuesto alrededor de un segmento (figura 5.15a) definido por la función $F(x)$ (ecuación 5.20), y luego se han calculado distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices para que resulte el mismo esfuerzo axial de compresión en todo el perímetro.

$$F(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l}
f_1(\varphi) = \begin{cases}
x = \sqrt{\left[a_1 \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_1) \right] \right) \right]^2 + \left[b_1 \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_1) \right] \right) \right]^2} \cdot \\
\cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b_1^2}{a_1^2} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_1) \right] - \beta_1 \right) + x_1 \\
y = \sqrt{\left[a_1 \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_1) \right] \right) \right]^2 + \left[b_1 \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_1) \right] \right) \right]^2} \cdot \\
\cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b_1^2}{a_1^2} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_1) \right] - \beta_1 \right) + y_1 \\
\text{...para } \varphi_4 > \varphi \geq \varphi_1
\end{cases} \\
f_2(\varphi) = \begin{cases}
x = x_2 + r_2 \cdot \cos \varphi \\
y = y_2 + r_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi \\
\text{...para } \varphi_1 > \varphi \geq \varphi_2
\end{cases} \\
f_3(\varphi) = \begin{cases}
x = \sqrt{\left[a_3 \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_3) \right] \right) \right]^2 + \left[b_3 \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg}(\varphi + \beta_3) \right] \right) \right]^2} \cdot \\
\cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b_3^2}{a_3^2} \operatorname{tg}(\varphi - \beta_3) \right] + \beta_3 \right) + x_3 \\
y = \sqrt{\left[a_3 \cdot \cos \left(\arctg \left[\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg}(\varphi - \beta_3) \right] \right) \right]^2 + \left[b_3 \cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg}(\varphi - \beta_3) \right] \right) \right]^2} \cdot \\
\cdot \operatorname{sen} \left(\arctg \left[\frac{b_3^2}{a_3^2} \operatorname{tg}(\varphi - \beta_3) \right] + \beta_3 \right) + y_3 \\
\text{...para } \varphi_2 > \varphi \geq \varphi_3
\end{cases} \\
f_4(\varphi) = \begin{cases}
x = x_4 + r_4 \cdot \cos \varphi \\
y = y_4 + r_4 \cdot \operatorname{sen} \varphi \\
\text{...para } \varphi_3 > \varphi \geq \varphi_4
\end{cases}
\end{array} \right.$$

[5.20]



Figuras 5.15a y 5.15b: Anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas (arriba), y polígono inscrito de lados iguales con distribución ideal de fuerzas F_i sobre los vértices (abajo).

Igual que sucede con los polígonos de lados iguales inscritos en elipses, el problema tiene infinitas soluciones, en función de la situación del primer vértice. De cada una resulta una longitud de lado distinta, en principio, mayor, si el primer vértice se sitúa en el punto de máxima curvatura, y menor, si se sitúa en un punto alejado de esta zona. Si el número de lados es elevado, comprobar este criterio sobre un polígono inscrito en un anillo compuesto requiere mucha precisión, ya que las diferencias entre las diferentes longitudes encontradas apenas son apreciables. Así que se ha planteado un polígono de cuatro lados inscrito en el anillo de la figura 5.15a y se han encontrado dos soluciones prácticamente opuestas. En la primera (en línea de puntos en la figura 5.16), la longitud del lado encontrada está próxima de ser máxima, ya que sitúa uno de los vértices sobre la circunferencia de radio menor, es decir, sobre un punto de máxima curvatura. En la segunda (en línea continua en la figura 5.16), la longitud está próxima de ser mínima, ya que ninguno de los vértices se sitúa sobre la zona de máxima curvatura.

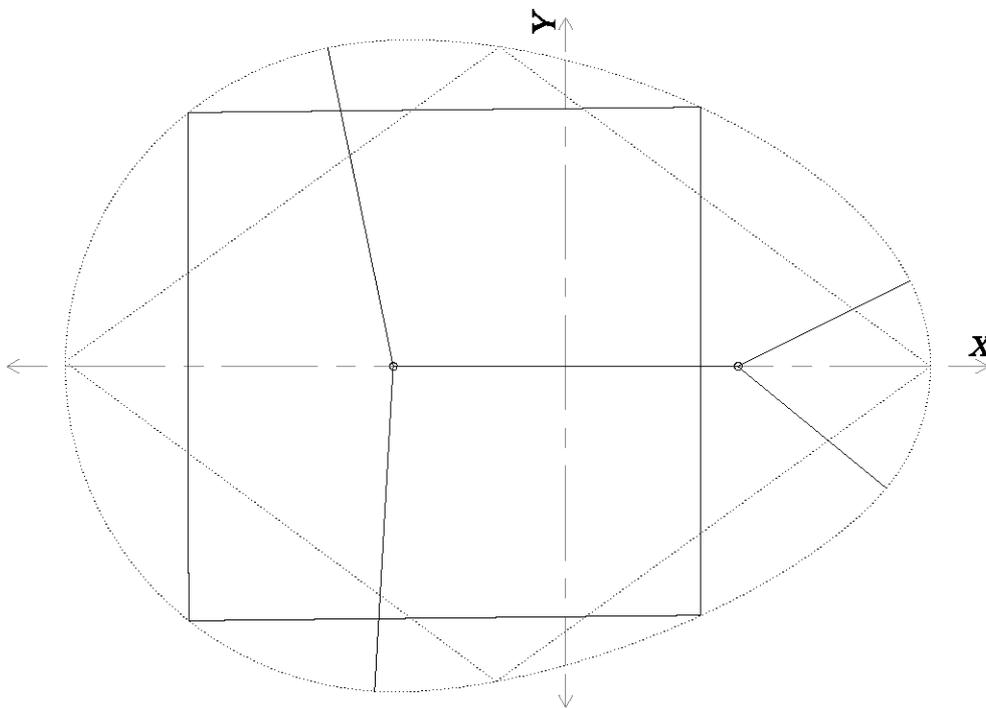


Figura 5.16: Polígonos de cuatro lados inscritos en un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas.

iv) En anillos compuestos sólo por arcos de circunferencias distintas

Los anillos que se han utilizado en este apartado como base para inscribir polígonos de lados iguales han sido compuestos conforme a las condiciones de combinación de arcos elípticos y de circunferencia enunciadas en el capítulo 4. Según estas condiciones, existe continuidad en la curvatura del anillo incluso en el punto de tangencia entre dos arcos, por lo cual se puede formular una función de fuerza distribuida ideal de la que resulte un esfuerzo axial uniforme en todo el anillo y ausencia total de flexiones y otros esfuerzos en el plano.

La continuidad de curvatura en los puntos de tangencia no es una condición necesaria para poder inscribir un polígono de lados iguales, sino que podría hacerse también en un anillo

formado por diferentes arcos de circunferencia o de elipse, que no tuvieran el mismo radio de curvatura en los puntos de tangencia entre ellos, es decir, con saltos en la curvatura.

El hecho de que los anillos planteados en este apartado sí que tengan continuidad en la curvatura permite que, en el polígono inscrito, la variación del ángulo que forman dos lados contiguos sea progresiva a lo largo de la sucesión de vértices, igual que lo es la variación de curvatura. De este modo, la variación de las fuerzas F_i en una distribución ideal, de la que resulta el mismo esfuerzo axial en todos los lados del polígono, también es progresiva, favoreciendo así el posterior diseño de la estructura de cables tensados sobre el anillo.

En el apartado 6.3 se ha analizado este tema con mayor profundidad.

CAPÍTULO 6: ANILLOS RÍGIDOS CON RADIOS TENSADOS

Donde se revisan las fórmulas que definen el comportamiento mecánico de los anillos circulares sometidos a la acción de radios tensados equidistantes, se proponen distintas distribuciones de fuerzas sobre un anillo elíptico y se enuncia una óptima, en la que el anillo queda dividido en tramos equiexcéntricos. Por último se formulan los métodos para plantear distribuciones óptimas de fuerzas sobre anillos compuestos no circulares.

Apartado 6.1: Anillos circulares con radios isotensos y equidistantes

i) Cuantificación de esfuerzos

Partiendo de la ecuación 5.3 del capítulo anterior, se plantea una distribución de n fuerzas iguales y equidistantes sobre un anillo circular donde virtualmente se inscribe un polígono regular en el que el esfuerzo axial es igual en todos sus lados.

Cada lado del polígono se corresponde con la cuerda del arco que queda comprendido entre dos radios del anillo. Como la cuerda tiene la misma dirección que la recta tangente en el punto medio del arco, el valor del esfuerzo axial N en ese punto del anillo es máximo (ecuación 6.1a) y coincide con el que se produciría en cada lado del polígono inscrito. En cambio, en el punto de intersección entre el anillo y el radio, el valor del axial es mínimo (ecuación 6.1b), de modo que el diagrama de esfuerzos no es constante en todo el perímetro, sino que varía ligeramente dentro de cada tramo (figura 6.1).

$$N_{\max} = \frac{F}{2 \cdot \cos\left(90 - \frac{180}{n}\right)} \quad \text{y} \quad N_{\min} = N_{\max} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

[6.1a y 6.1b]

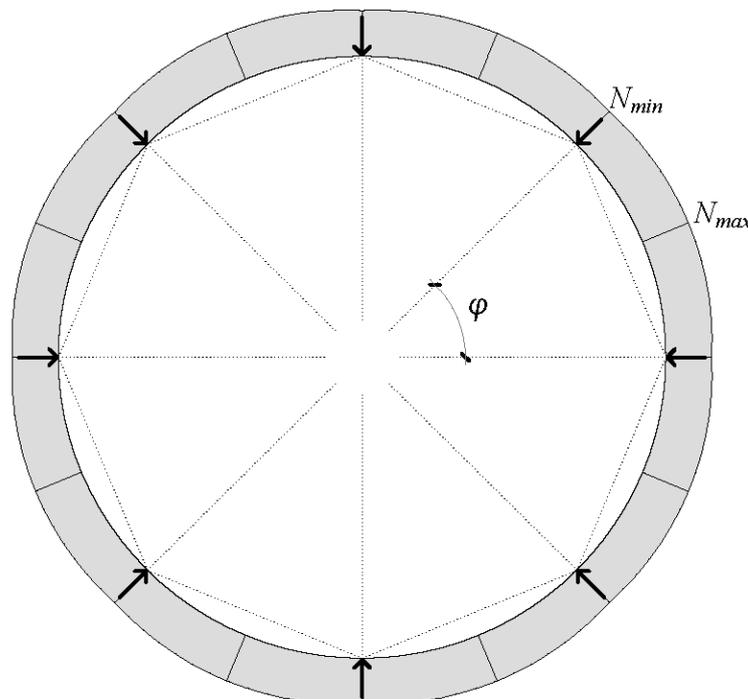


Figura 6.1: Diagrama de esfuerzos axiales en un anillo circular con ocho fuerzas radiales iguales y equidistantes.

Esta variación del esfuerzo axial es claramente visible en el caso de un anillo circular sometido a la reacción de un solo diámetro tensado, porque su valor es nulo en el punto de aplicación de la fuerza y máximo en el punto del diámetro perpendicular, justamente al contrario que lo que sucede con el esfuerzo cortante. En cambio, la misma variación se vuelve imperceptible cuando el ángulo φ es muy pequeño, o sea, si el número de radios es elevado.

Los momentos flectores en el plano del anillo son el resultado del producto del esfuerzo axial N por la excentricidad del arco respecto a la cuerda en cada punto, que es máxima en el medio de cada tramo y se calcula según:

$$e_{max} = r \left[1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad [6.2]$$

Es más, se comprueba que la diferencia entre el momento máximo positivo y negativo en un mismo tramo es igual al producto del esfuerzo axial máximo N_{max} por la excentricidad máxima e_{max} , es decir:

$$N_{max} \cdot e_{max} = M_{max}^+ + M_{max}^- \quad [6.3]$$

Así, la forma del diagrama de momentos en el plano del anillo coincide al de una viga continua de directriz curva y carga uniformemente distribuida, donde el valor del momento máximo positivo M_{max}^+ , que se produce en el punto de intersección del anillo con cada radio, es superior al del momento máximo negativo M_{max}^- , que se produce en el punto medio de cada tramo (figura 6.2).

Para encontrar la proporción exacta entre estos dos valores, se parte de la fórmula para calcular el momento generado en el punto medio de un tramo de anillo circular entre dos radios rígidos, es decir, el momento máximo negativo M_{max}^- , suponiendo que el anillo esté sometido a una fuerza radial uniformemente distribuida y que la separación entre los radios también sea uniforme, o lo que es lo mismo, que el diagrama de esfuerzo axiales varíe de la misma forma en cada tramo (TIMOSHENKO 1957b: 101):

$$M_{max}^- = -\frac{F \cdot r}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{2}{\varphi} \right) \quad [6.4]$$

...donde F es la fuerza de reacción de un radio rígido y φ es el ángulo en radianes que forman dos radios consecutivos. Después se calcula el momento máximo positivo M_{max}^+ según:

$$M_{max}^+ = N_{max} \cdot e_{max} - \frac{F \cdot r}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{2}{\varphi} \right) \quad [6.5]$$

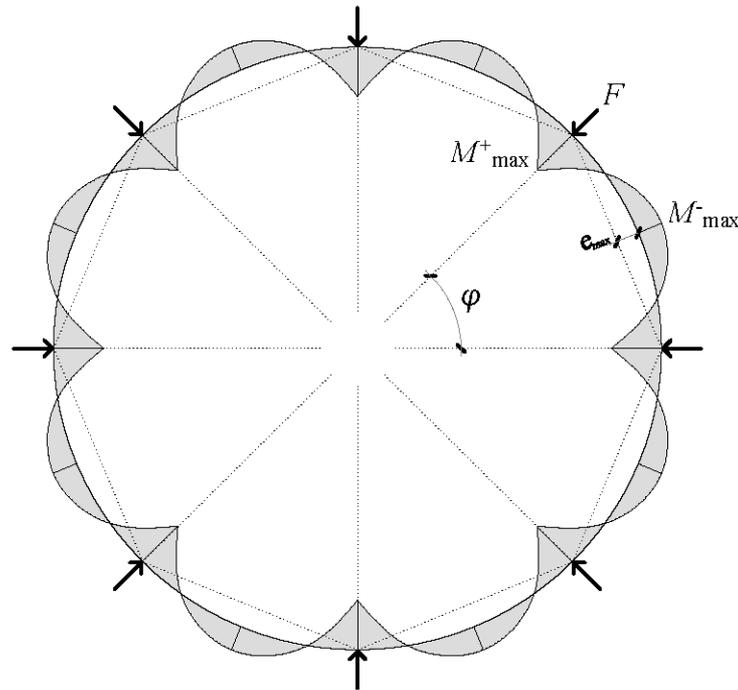


Figura 6.2: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo circular con ocho fuerzas radiales iguales y equidistantes.

Así, cuanto mayor sea el número fuerzas radiales, mayor será también el número de lados del polígono virtual, menor la excentricidad máxima del anillo respecto a éste y menores los momentos flectores que se generen en el plano del anillo.

Basándose en las ecuaciones anteriores, se han establecido las siguientes relaciones:

$$k_p = \frac{M^+_{max}}{N_{max} \cdot e_{max}} \quad \text{y} \quad k_n = \frac{M^-_{max}}{N_{max} \cdot e_{max}}$$

[6.6a y 6.6b]

... donde k_p y k_n son los coeficientes de distribución que permiten obtener los valores máximos positivo y negativo respectivamente en el diagrama de momentos flectores, a partir del axil y la excentricidad máxima. Después se han calculado estos coeficientes para diferentes valores de n :

n	2	3	4	5	6	8	10	12	16	20	24	>28
k_n	-0,3634	-0,3460	-0,3403	-0,3378	-0,3364	-0,3351	-0,3344	-0,3341	-0,3338	-0,3336	-0,3335	-0,3333
k_p	0,6366	0,6540	0,6597	0,6622	0,6636	0,6649	0,6656	0,6659	0,6662	0,6664	0,6665	0,6667

Tabla 6.1: Coeficientes de distribución k_p y k_n para el cálculo de los momentos flectores máximos en el plano de un anillo circular en función del número de radios equidistantes.

Según se muestra en la tabla anterior, a partir de un número elevado de radios ($n > 28$) la distribución de los momentos flectores máximos se puede considerar constante.

El esfuerzo cortante máximo V_{max} se produce en el punto de aplicación de la fuerza y es igual a la mitad de su valor, es decir:

$$V_{max} = \frac{F}{2} \quad [6.7]$$

...y es nulo en el punto medio del tramo (figura 6.3). Este diagrama también se asemeja al de una viga continua con una carga distribuida aplicada, que hubiera sido curvada hasta unir un extremo con otro.

En resumen, el anillo de compresión de una rueda circular con radios tensados tiene una sección pésima, en cuanto a resistencia, situada en los puntos de aplicación de la fuerza, donde el momento flector y el esfuerzo cortante en el plano son máximos, y el esfuerzo axial, si el número de radios es superior a cuatro, no difiere demasiado de su valor máximo en el centro del tramo entre dos radios.

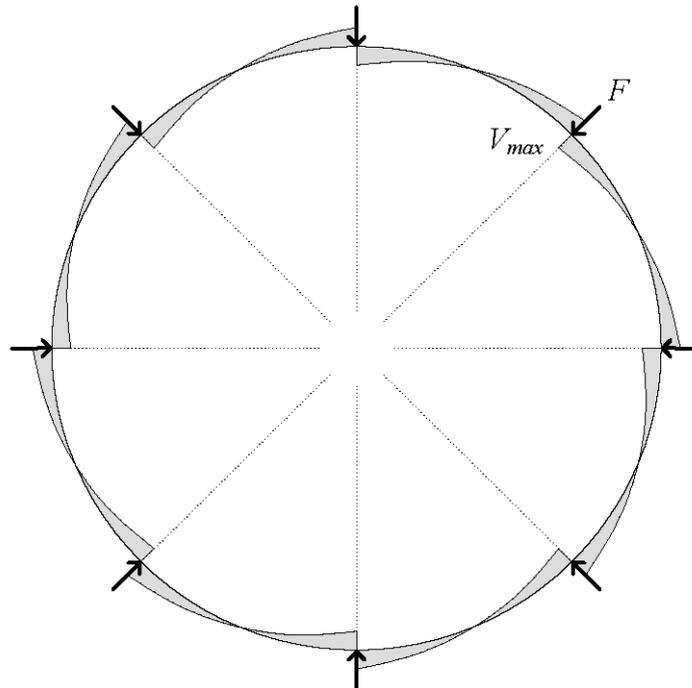


Figura 6.3: Diagrama de esfuerzos cortantes en el plano de un anillo circular con ocho fuerzas radiales iguales y equidistantes.

ii) Condiciones de pandeo

Se parte de la fórmula para calcular la carga distribuida crítica de pandeo q_{cr} de un anillo circular atendiendo a la rigidez a flexión en su propio plano (TIMOSHENKO 1961: 242):

$$q_{cr} = \frac{3E \cdot I}{r^3} \quad [6.8]$$

...donde E es el módulo de elasticidad del material e I es la inercia de la sección resistente alrededor del eje perpendicular al plano del anillo. Pero, en vez de la carga crítica del anillo,

se calcula un esfuerzo axial crítico N_{cr} que provocaría la misma carga distribuida en función de su radio:

$$N_{cr} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{r^2} \tag{6.9}$$

Si se quiere tener en cuenta la coacción que ejerce la rigidez axial de los radios tensados sobre el anillo, se parte de la formulación para calcular el esfuerzo axial crítico de una barra recta apoyada en un lecho elástico (TIMOSHENKO 1961: 125-130) y se adapta, asumiendo el mismo efecto en un anillo circular apoyado en un conjunto de radios equidistantes de rigidez limitada.

Así, primero se iguala la fórmula anterior con la del axial crítico de una barra recta biarticulada y se deduce la longitud equivalente l_{eq} de una barra con el mismo esfuerzo axial crítico que el anillo:

$$\frac{3 \cdot E \cdot I}{r^2} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{l_{eq}^2}; \quad l_{eq} = \frac{\pi \cdot r}{\sqrt{3}} \tag{6.10a y 6.10b}$$

Luego se calcula el módulo de coacción radial β_r , que en este caso sería la relación entre la rigidez axial k_r de cada radio y su separación s :

$$\beta_r = \frac{k_r}{s} = \frac{n \cdot E_r \cdot A_r}{2\pi \cdot r} \tag{6.11}$$

...donde n es el número de radios y $E_r \cdot A_r$ se refiere a la sección resistente de uno de ellos.

Por último, se aplica la fórmula para calcular el axial crítico de una barra recta apoyada sobre un lecho elástico asumiendo que el modelo es equivalente al de un anillo circular sometido a la coacción de un conjunto de radios equidistantes de rigidez limitada:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{L_{eq}^2} \tag{6.12}$$

...donde L_{eq} es una longitud equivalente reducida que se calcula a partir su relación con la longitud equivalente, según la siguiente tabla:

$\frac{\beta^4}{(16EI)}$	0	1	3	5	10	15	20	30	40	50	75	100
$\frac{L_{eq}}{(\pi r \sqrt{3})}$	1	0,927	0,819	0,741	0,615	0,537	0,483	0,437	0,421	0,406	0,376	0,351
$\frac{\beta^4}{(16EI)}$	200	300	500	700	1.000	1.500	2.000	3.000	4.000	5.000	8.000	10.000
$\frac{L_{eq}}{(\pi r \sqrt{3})}$	0,286	0,263	0,235	0,214	0,195	0,179	0,165	0,149	0,140	0,132	0,117	0,110

Tabla 6.2: Razones de $L_{eq}/(\pi r \sqrt{3})$ para un anillo sometido a la coacción de radios equidistantes de rigidez limitada.

Para saber si la coacción radial es suficiente⁵² para evitar la forma de pandeo global, se comprueba que el axil crítico del anillo, calculado en la ecuación 6.12, es superior al axil crítico de un tramo comprendido entre dos radios. Si es así, puede considerarse que el anillo tiene impedido el pandeo global en su propio plano, aunque existan cargas exteriores asimétricas, porque la coacción radial no permite que los desplazamientos relativos entre los extremos de cada arco sean relevantes, de manera que la única forma de pandeo posible es la que se produciría localmente en un tramo de anillo.

Entonces, se podría comprobar el pandeo local en el arco entre dos radios consecutivos partiendo de la ecuación que permite calcular la carga crítica de un arco biarticulado con una forma de pandeo en el plano asimétrica y con un punto de inflexión en el medio del arco (figura 6.4a), (TIMOSHENKO 1961: 250):

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{(\varphi/2)^2} - 1 \right) \quad [6.13]$$

...que se multiplica por el radio para encontrar el axil crítico que produce dicha carga:

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I}{r^2} \left(\frac{\pi^2}{(\varphi/2)^2} - 1 \right) \quad [6.14]$$

Si el ángulo φ es pequeño, la unidad del paréntesis resulta irrelevante porque curvatura del plano en relación a su longitud tiende a ser nula, y el axil crítico resulta igual al de una barra recta de longitud $l=r \cdot (\varphi/2)$.

Si se considera que los extremos del arco no tienen capacidad de giro, se parte de la fórmula para calcular la carga crítica de un arco doblemente empotrado con una forma de pandeo en el plano asimétrica con tres puntos de inflexión, uno en el medio del arco (figura 6.4b), (TIMOSHENKO 1961: 253):

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{r^3} (k^2 - 1) \quad [6.15]$$

...que se multiplica por el radio para encontrar el axil crítico que produce dicha carga:

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I}{r^2} (k^2 - 1) \quad [6.16]$$

...donde k es un factor que depende únicamente de φ y se calcula según:

⁵² El concepto de coacción radial suficiente es equivalente al de intraslacionalidad en un pórtico, donde la carga crítica calculada para un pilar corresponde a una longitud de pandeo inferior a la altura real de una planta.

$$k \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{k \cdot \varphi}{2} \right) = 1$$

[6.17]

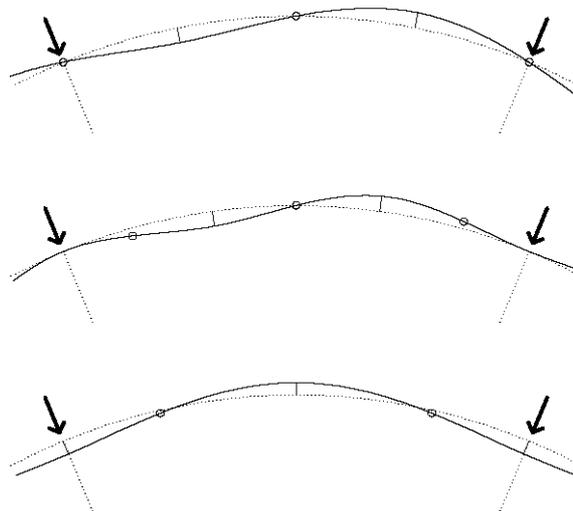
Se ha resuelto esta ecuación para diferentes valores de φ :

φ	15°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	240°	300°	360°
k	34,337	17,183	11,472	8,621	5,782	4,375	3,000	2,364	2,066	2,000

Tabla 6.3: Valores de k para el cálculo de la carga crítica de un arco circular doblemente empotrado de ángulo φ .

Evidentemente, el axil crítico calculado según el modelo de arco doblemente empotrado es superior al resultante en el modelo de arco biarticulado.

En cualquier caso, según se aprecia en la deformada de un tramo de anillo entre dos radios isotensos y equidistantes (figura 6.4c), el giro en los nudos de aplicación de las fuerzas es nulo. Si no fuera porque los extremos del arco no tienen más coacción al giro que la que depende de la rigidez a flexión del propio anillo, el modo de pandeo podría parecerse más al de un arco doblemente empotrado que al de uno biarticulado. Estos mismos nudos se desplazan en dirección radial hacia el interior, así que no son tres, sino dos los puntos de inflexión en la deformada, que, por supuesto, si no se considera ninguna imperfección geométrica, resulta simétrica. Es por eso que esta disertación no resulta concluyente, en cuanto a qué forma de pandeo considerar en un tramo de anillo circular comprendido entre dos radios.



Figuras 6.4a; 6.4b y 6.4c: Modos de pandeo de un arco biarticulado (arriba), de un arco doblemente empotrado (en medio) y deformada de un tramo anillo circular sometido a fuerzas radiales, iguales y equidistantes (abajo).

Además, si el ángulo de abertura del arco es muy pequeño en relación al radio, el arco es demasiado plano, porque la excentricidad respecto a la cuerda es muy pequeña, y la forma de

pandeo no es asimétrica, sino cualquier otra, incluyendo aquella en la que se llega a invertir su curvatura. Así, primero se calcula una suerte de excentricidad o flecha relativa “ α ” en el punto medio del arco (TIMOSHENKO 1961: 255):

$$\alpha = \frac{N_{max} \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E \cdot I} \quad [6.18]$$

...donde l es la longitud de la cuerda del arco.

Entonces, si $\alpha > 4$, la forma de pandeo del arco es asimétrica, con un punto de inflexión en el medio, y su esfuerzo axil crítico se podría calcular según la ecuación 6.12 o 6.14 según sean los giros de los extremos del arco en la deformada debida a los momentos de primer orden. En cambio, si $\alpha < 4$, la comprobación de pandeo se tiene que realizar aproximándola a la de una barra que tenga en cuenta una imperfección inicial equivalente a su curvatura. Actualmente, la mejor manera de resolver este problema sería introduciendo el arco discretizado convenientemente en un programa de cálculo que considere los efectos de segundo orden.

En resumen, aunque esta comprobación depende de la forma de pandeo que se considere en el plano del arco, que a su vez depende de factores geométricos, como la imperfección inicial, es decir, su curvatura, el ángulo de abertura y de la longitud de la cuerda, así como de factores mecánicos, como la rigidez $E \cdot I$, la capacidad de giro de los extremos y el esfuerzo axil al que esté sometido, está claro que, si el anillo circular y sus radios son equidistantes, las condiciones de dimensionado son idénticas en todos los tramos.

Apartado 6.2: Distribución óptima de radios tensados en anillos elípticos

i) Radios isotensos

En una primera intuición, podría pensarse que, reproduciendo en cierto modo algunos de los factores que definen la fuerza distribuida ideal $q(\varphi)$ de un anillo elíptico⁵³, sería posible plantear una distribución de fuerzas puntuales de la que, igual que sucede con el anillo circular con radios isotensos y equidistantes, resultasen unas condiciones óptimas de dimensionado.

Así, dada una elipse de semiejes a y b , de la que se puede encontrar la posición (x, y) de un punto con un ángulo geodésico φ cualquiera a partir de la ecuación en su forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \\ y = b \cdot \sin \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \end{cases} \quad [6.19]$$

...se divide según n incrementos regulares de ángulos geodésicos $\Delta\varphi$. Después, a partir de las ecuaciones 5.2a y 5.2b del capítulo anterior, se asume una aproximación a la relación entre el

⁵³ Ver el apartado 4.2 de esta tesis.

ángulo geodésico y el ángulo γ en un vértice de un polígono virtual de n lados inscrito en la elipse:

$$\gamma \approx 180 - \Delta\varphi \quad [6.20]$$

Entonces, en la ecuación 5.3 del capítulo anterior, se substituye el ángulo γ por la relación aproximada de la ecuación anterior y se define la fuerza radial F que se aplica en cada vértice del polígono virtual, de tal forma que resulte un axil N aproximadamente igual en todos los tramos del anillo:

$$F \approx 2 \cdot N \cdot \cos\left(\frac{180 - \Delta\varphi}{2}\right) \quad [6.21]$$

De este modo se obtiene un anillo elíptico con fuerzas radiales iguales orientadas según el ángulo geodésico correspondiente a cada punto de aplicación (figura 6.5).

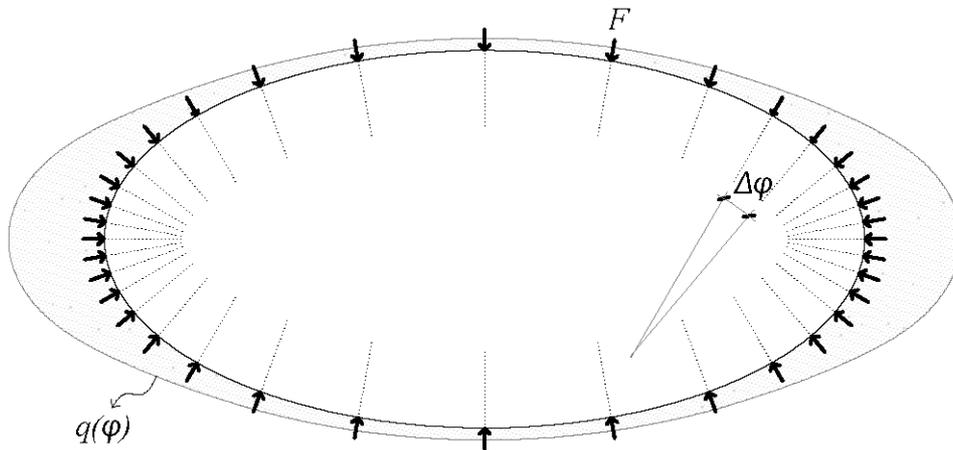


Figura 6.5: Anillo elíptico con fuerzas F iguales distribuidas según incrementos regulares de ángulos geodésicos $\Delta\varphi$ y fuerza distribuida ideal $q(\varphi)$ de las que resulta el mismo esfuerzo axil de compresión.

Según se observa, la intensidad de la fuerza distribuida ideal $q(\varphi)$ es mayor en las zonas de mayor curvatura. Esto es debido a que la relación entre fuerza y separación es mayor en las zonas de menor curvatura, donde la longitud de arco de un mismo ángulo geodésico es mayor⁵⁴. Pero hay dos razones que impiden que esta distribución de fuerzas se pueda considerar óptima.

La primera, porque si las fuerzas se distribuyen según incrementos de ángulos geodésicos iguales, en el polígono virtual de fuerzas que resulta, los ángulos γ entre lados nunca son iguales, a no ser que este polígono sea regular porque el anillo sea circular. Así que las aproximaciones de las ecuaciones 6.20 y 6.21 sólo son válidas cuando el valor de n es elevado y la excentricidad ε de la elipse es próxima a cero (figura 6.6).

⁵⁴ Ver más adelante anillos con “tramos de la misma longitud”.

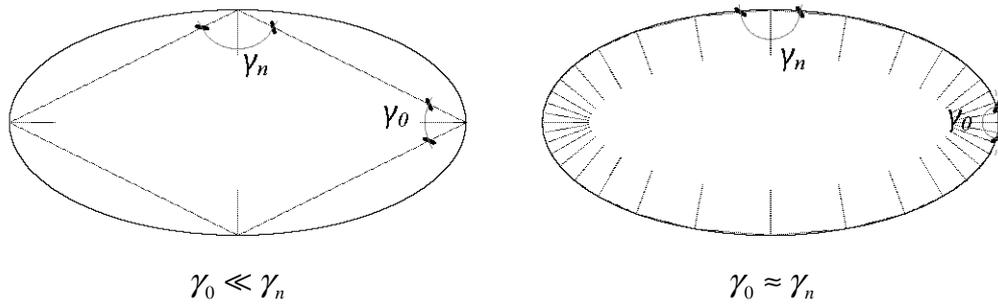


Figura 6.6: Comparación de la diferencia entre los ángulos γ en los vértices de dos polígonos virtuales de n lados inscritos en una misma elipse, planteados según un incremento regular del ángulo geodésico $\Delta\varphi=360/n$.

La segunda, porque, excepto las que se sitúan sobre los ejes principales de la elipse, las fuerzas no están alineadas con la bisectriz del ángulo γ_i de cada vértice, o sea, que $\varphi_i \neq \zeta_i$ (figura 6.7).

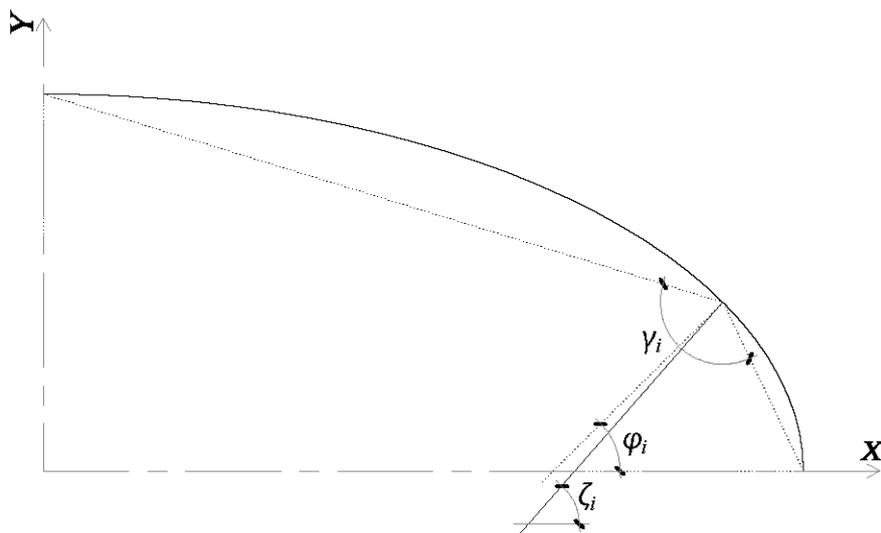


Figura 6.7: Comparación de la orientación de un radio según un ángulo geodésico φ_i (en línea de puntos) de la elipse y según la bisectriz (en línea continua) del ángulo γ_i entre dos lados del polígono virtual.

Debido a estas dos razones, si se convierte el polígono virtual en uno rígido y se le aplican unas fuerzas iguales en cada vértice orientadas según el ángulo geodésico de la elipse, resultan, además de un esfuerzo axial de compresión diferente en cada lado, unos momentos flectores⁵⁵ también diferentes en cada vértice (figura 6.8). Así, una de las condiciones para poder considerar óptima una determinada distribución de fuerzas sobre un anillo elíptico es que sea ideal si se aplica sobre los vértices de un polígono rígido.

⁵⁵ Además del esfuerzo cortante asociado a esos momentos flectores.

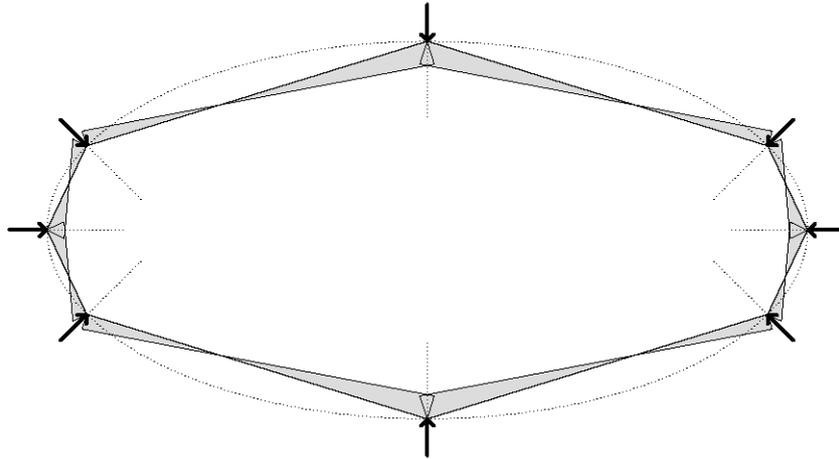


Figura 6.8: Diagrama de momentos flectores en el plano de un polígono rígido inscrito en un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales distribuidas según ángulos geodésicos regulares.

Además, como la excentricidad del anillo respecto al polígono virtual resulta diferente en cada lado, los momentos flectores debidos al producto del esfuerzo axial por la excentricidad son diferentes en cada tramo.

Sumando los momentos flectores en los extremos de los lados del polígono con los debidos a la excentricidad del arco respecto a la cuerda, diferente en cada tramo, resulta un diagrama con momentos mayores en los tramos en los que la curvatura es más plana⁵⁶ (figura 6.9).

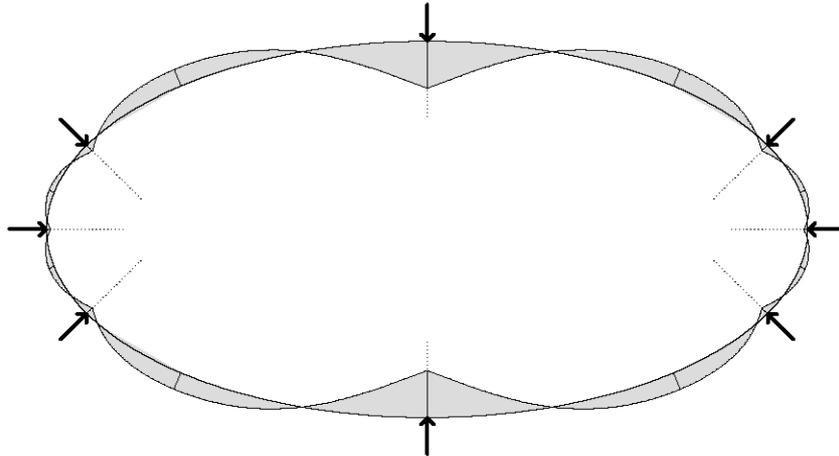


Figura 6.9: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales distribuidas según ángulos geodésicos regulares.

Alternativamente se distribuyen fuerzas iguales, orientadas en la bisectriz de ángulos γ también iguales, o lo que es lo mismo, con incrementos de ángulo $\Delta\zeta$ regulares, planteado según el método que se propone el principio del apartado 5.2 del capítulo anterior. Se comprueba que el esfuerzo axial máximo N_{max} coincide con el calculado según la ecuación

⁵⁶ Aunque aquí ya no se mencione, siempre que hay momentos flectores, a no ser que tengan un valor constante en todos los puntos, aparecen esfuerzos cortantes asociados, que no suelen ser determinantes en el dimensionado.

6.1a, que se produce en el punto de máxima excentricidad del arco entre dos fuerzas y que es igual en todos los tramos del anillo (figura 6.10).

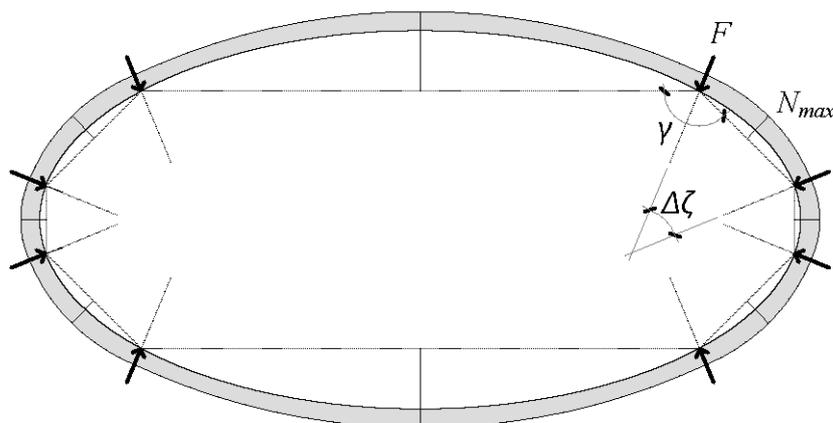


Figura 6.10: Diagrama de esfuerzos axiales en un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales, distribuidas en los vértices de un polígono inscrito virtual de ángulos γ iguales, y orientadas según su bisectriz.

Esta distribución de fuerzas sería ideal si se aplicase sobre un polígono rígido, porque resultaría el mismo esfuerzo axial en todos los lados y ausencia total de otros esfuerzos en el plano. Pero la excentricidad máxima del arco respecto a la cuerda también es diferente en cada tramo, aparecen unos momentos flectores que no se repiten iguales en todos los tramos, sino que son mayores en las zonas del anillo con curvatura más plana (figura 6.11).

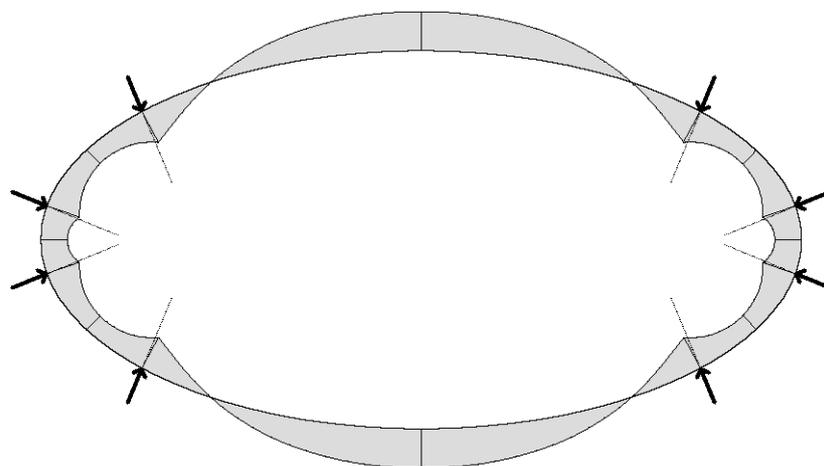


Figura 6.11: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con ocho fuerzas iguales, distribuidas en los vértices de un polígono inscrito virtual de ángulos iguales, y orientadas según su bisectriz.

Así que, a pesar de que el valor máximo del momento flector sea ligeramente inferior al del caso anterior⁵⁷, esta distribución de fuerzas tampoco se puede considerar óptima. Además, en

⁵⁷ Cabe decir que el valor de las fuerzas aplicadas es el mismo en ambos casos, como lo es también el esfuerzo axial máximo resultante en cada tramo del anillo.

ambos casos, las condiciones de pandeo, *a priori* y atendiendo solamente a la longitud del arco, parecen ser claramente más desfavorables en los tramos donde la curvatura es más plana.

ii) Tramos de la misma longitud

La longitud de un arco de circunferencia es el producto de su radio de curvatura r por el ángulo geodésico φ (ecuación 6.22a), pero para calcular de manera precisa la longitud de un arco elíptico, se necesitaría discretizarlo en n ángulos geodésicos iguales $d\varphi$ y sumar todos los productos de ángulo por el radio de curvatura r_i promediado dentro de cada uno de los tramos en los que se hubiese discretizado el arco (ecuación 6.22b).

$$S = r \cdot \varphi \quad \text{y} \quad S = \sum_{i=1}^n r_i \cdot d\varphi$$

[6.22a y 6.22b]

Entonces, si se pretendiera dividir un arco elíptico en n tramos de la misma longitud, tal que $S_1=S_2=S_3=S_4\dots=S_n$; como los puntos de inicio y final serían conocidos, el número de incógnitas del sistema de ecuaciones sería igual al número de puntos intermedios ($n-1$) más la propia longitud S del arco.

Hoy en día resulta más fácil resolver este problema matemático con un programa de CAD. Así que se plantea un anillo dividido en n arcos con la misma longitud s y se distribuyen n fuerzas F_i calculadas según la ecuación 5.3 del capítulo anterior, en la bisectriz de cada ángulo γ_i , de las que resulte el mismo esfuerzo axial máximo de compresión en todos los tramos. Pero como cada uno de ellos tiene distinta excentricidad máxima del arco respecto a la cuerda, mayor donde la curvatura es más pronunciada, el diagrama de momentos flectores no se repite idéntico en cada tramo (figura 6.12). Aun así, se observa que, curiosamente, el momento flector M^+_{max} es sensiblemente igual en todos los puntos de aplicación de las fuerzas.

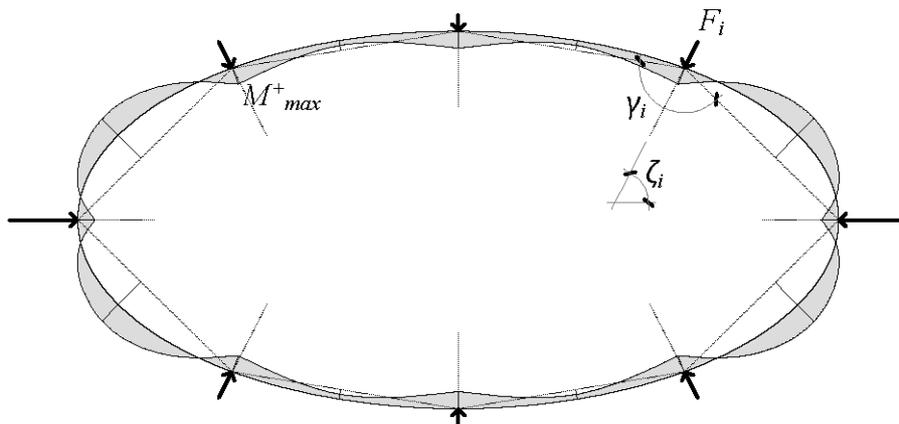


Figura 6.12: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con ocho fuerzas F_i distribuidas según longitudes de arco iguales, de las que resulta un mismo esfuerzo axial máximo de compresión en todos los tramos.

En cualquier caso, esta distribución de fuerzas sobre un anillo elíptico está lejos de ser óptima. En efecto, aparte de la falta de homogeneidad en los diagramas de momentos flectores de los diferentes tramos, aunque todas las longitudes de arco sean iguales, las condiciones de pandeo debidas a la curvatura, entendida como una imperfección inicial, y las que derivan de la deformación producida por la flexión que provoca la misma curvatura son diferentes en cada tramo.

iii) Tramos equiexcéntricos

Si las fuerzas radiales están dispuestas de manera que el esfuerzo axial sea igual en todo el perímetro y que todos los tramos tengan la misma excentricidad máxima del arco respecto a la cuerda, entonces también los diagramas de momentos flectores se repiten iguales a lo largo de todo el anillo.

Para eso, primero es necesario formular la excentricidad máxima de un arco elíptico respecto a la cuerda entre dos puntos cualquiera. Así que, sobre un cuadrante de una elipse de semiejes a y b , se dibuja su circunferencia principal de radio r igual al semieje mayor a , y luego se sitúa un punto M de la elipse y su imagen M' en la circunferencia principal, cuya excentricidad respecto a la cuerda que une los dos extremos del cuadrante de elipse es máxima, igual que lo es la excentricidad del punto M' respecto a la cuerda del cuadrante de la circunferencia principal (figura 6.13).

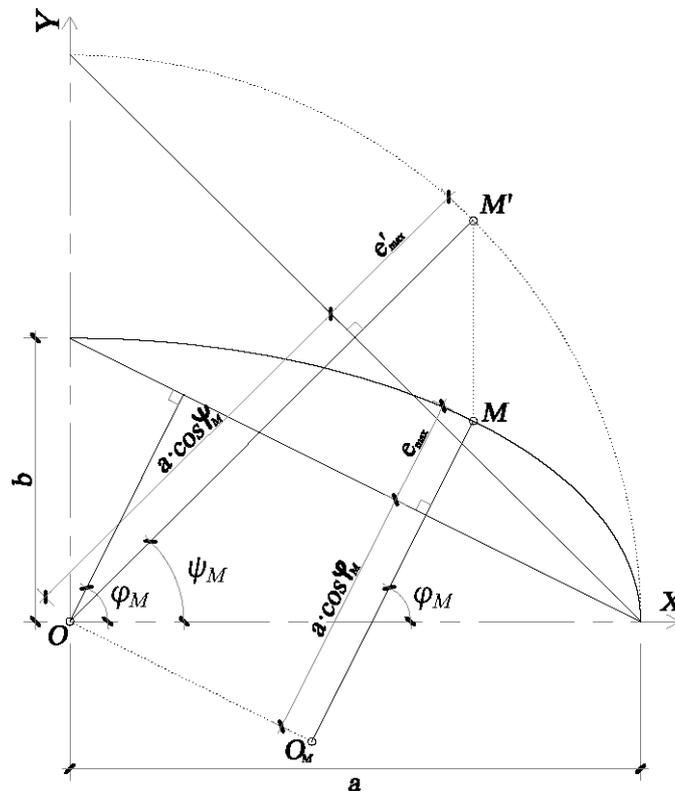


Figura 6.13: Excentricidad máxima de un cuadrante de elipse y de su circunferencia principal.

Se observa que el punto M' tiene la misma coordenada de abscisa que el punto M de máxima excentricidad del cuadrante elíptico:

$$x_M = a \cdot \cos \psi_M \quad [6.23]$$

...y se encuentra situado sobre la bisectriz del ángulo de 90° de abertura del cuadrante, que es perpendicular a la cuerda del arco. Así que, a partir de su ángulo reducido ψ_M , se calcula el ángulo geodésico φ_M según la relación de la ecuación 4.1b del capítulo 4:

$$\varphi_M = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi_M \right) \quad [6.24]$$

...que también forma un ángulo recto con la cuerda de la elipse. Después se calcula la distancia e_{max} del punto M' a la cuerda del cuadrante de la circunferencia principal según:

$$e'_{max} = a(1 - \cos 45^\circ) \quad [6.25]$$

...y se deduce la siguiente relación:

$$\frac{\cos \varphi_M}{\cos \psi_M} = \frac{e_{max}}{e'_{max}} \quad [6.26]$$

Entonces, dado un arco elíptico comprendido entre dos puntos A y B cualquiera, se calcula su imagen A' y B' en la circunferencia principal a partir de φ_A y φ_B , esto es, ψ_A y ψ_B . Luego se calcula la excentricidad máxima e'_{max} de un punto M' de la circunferencia principal situado en la bisectriz del ángulo $\Delta\psi_{AB}$ de abertura del arco respecto a su cuerda según:

$$e'_{max} = a \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta\psi_{AB}}{2} \right) \right] \quad [6.27]$$

Después, desde el punto M de máxima excentricidad de un arco elíptico se dibuja una recta perpendicular a la cuerda del arco elíptico entre los puntos A y B (figura 6.14). A partir de aquí, se puede resolver el problema calculando la distancia más corta entre el punto M y la cuerda del arco⁵⁸ o multiplicando la relación de la ecuación 6.26 por la ecuación 6.27:

$$e_{max} = a \cdot \frac{\cos \varphi_M}{\cos \psi_M} \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta\psi_{AB}}{2} \right) \right] \quad [6.28]$$

⁵⁸ La distancia más corta entre un punto M y una recta $y=m \cdot x+n$ se calcula según $d = \frac{m \cdot x_M - y_M + n}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

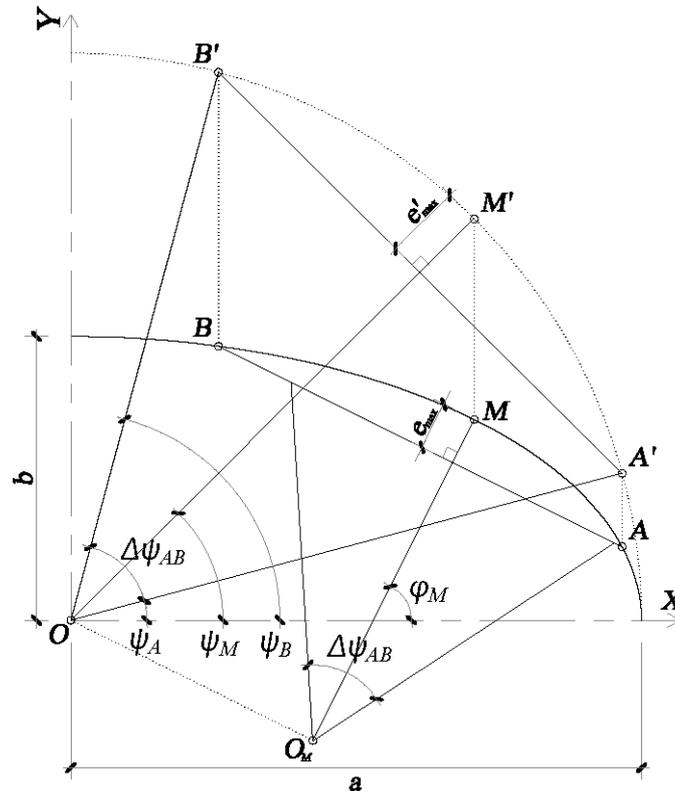


Figura 6.14: Excentricidad máxima de un arco elíptico cualquiera.

Por último, para dividir un cuadrante de elipse en tramos que tengan la misma excentricidad máxima, es decir, equiexcéntricos, se formula la ecuación de la excentricidad máxima de un tramo cualquiera según:

$$e_{max}(\psi) = a \cdot \frac{\cos \left\{ \arctg \left[\frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\psi_j + \psi_i}{2} \right) \right] \right\}}{\cos \left(\frac{\psi_j + \psi_i}{2} \right)} \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{\psi_j - \psi_i}{2} \right) \right]$$

[6.29]

...y se plantea un sistema de n ecuaciones $e_{max}(\psi)$ donde ψ_1 y ψ_n son conocidos; y los ángulos reducidos ψ_i del resto de puntos, además de e_{max} , son las n incógnitas.

Si en vez de un cuadrante, se considera la elipse entera, está claro que las posibilidades de división son distintas en función de la posición inicial ψ_1 que se considere. Entonces, se ha dividido una misma elipse en cuatro tramos equiexcéntricos según dos criterios distintos: el primero, considerando que la posición inicial $\psi_1=0$ está sobre uno de sus ejes, es decir, con el punto de excentricidad máxima $e_{max,1}$ situado en un punto intermedio $0 < \psi < 90$, y el segundo, considerando una posición inicial ψ_1 de la que resulte que los puntos de excentricidad máxima $e_{max,2}$ estén situados sobre los ejes principales, es decir, con la posición inicial en un punto intermedio $0 < \psi_1 < 90$ (figura 6.15a). Se ha comprobado que, situando los puntos de división sobre los ejes se obtiene una excentricidad máxima ligeramente menor, es decir, que

$e_{max,1} < e_{max,2}$, así que, en principio, es éste el criterio de división óptimo. En cualquier caso, a medida que se incrementa el número de divisiones, la diferencia en el resultado se vuelve despreciable (figura 6.15b).

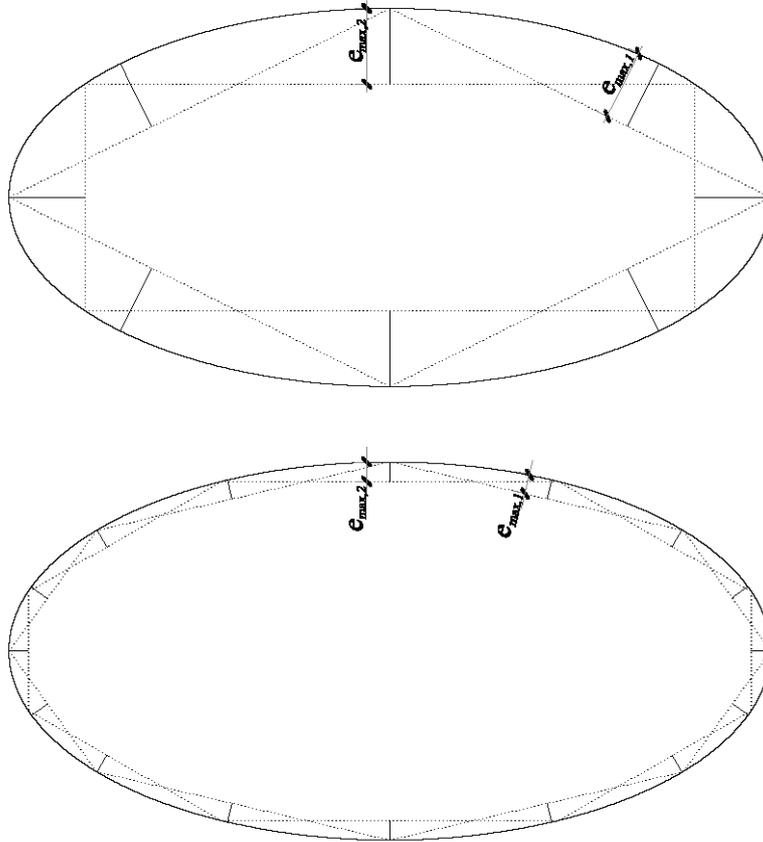


Figura 6.15a y 6.15b: Dos posibilidades distintas de división de una elipse en cuatro y ocho tramos equiexcéntricos respectivamente.

Entonces, sobre una elipse dividida en tramos equiexcéntricos, se pueden disponer fuerzas F_i de los que resulten los mismos esfuerzos axiales máximos en cada tramo y, en consecuencia, también diagramas de momentos flectores iguales.

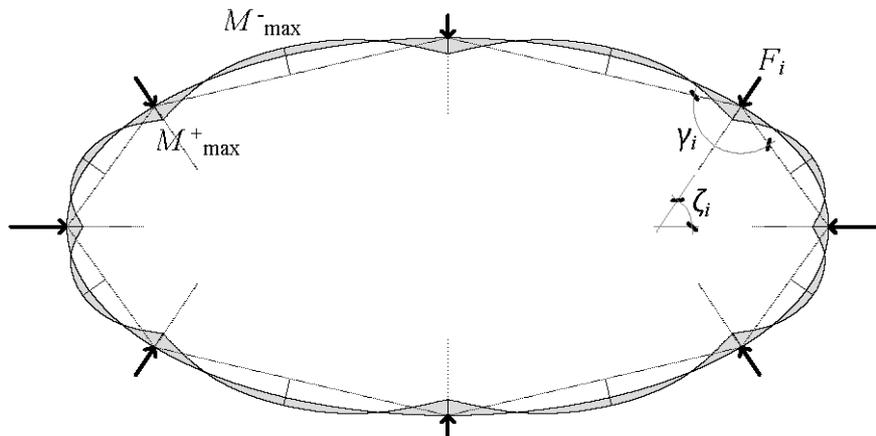


Figura 6.16: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos.

Se comprueba que los valores de los momentos máximos positivos y negativos coinciden con los que se calculan a partir de multiplicar el axil por la excentricidad máxima y por los coeficientes de distribución k_p y k_n respectivamente, obtenidos en la tabla 6.1, ya que guardan la misma relación que los momentos flectores máximos de un anillo circular con el mismo número de radios tensados.

Si se compara este diagrama con cualquiera de los anteriores, se comprueba que esta distribución de fuerzas, la que divide el anillo en tramos equiexcéntricos, es la que provoca momentos flectores menores. En concreto, en los puntos de menor curvatura del anillo del modelo de distribución de fuerzas según ángulos geodésicos uniformes, el momento resulta del orden de tres veces superior al calculado en el modelo de tramos equiexcéntricos (figura 6.17).

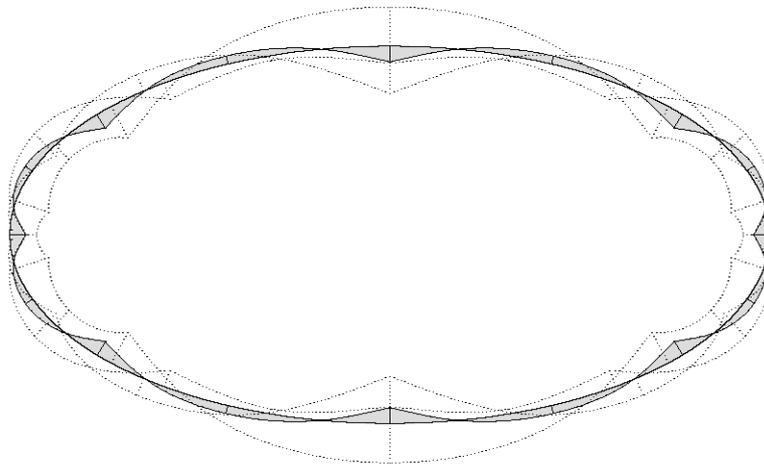


Figura 6.17: Superposición de los diagramas de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico de semiejes $a/b=2$, resultantes de cuatro distribuciones distintas de fuerzas, de las que siempre resulta un mismo esfuerzo axil máximo de compresión.

Si se duplica el número de fuerzas y se aplican en un anillo elíptico de semiejes $a/b=4$, el momento máximo resultante de una distribución de fuerzas iguales según ángulos geodésicos regulares resulta del orden de diez veces mayor que el que resulta de una distribución óptima según tramos equiexcéntricos (figura 6.18).

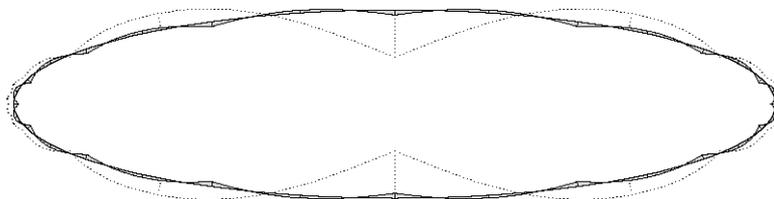


Figura 6.18: Superposición de los diagramas de momentos flectores en el plano de un anillo elíptico de semiejes $a/b=4$, resultantes de una distribución de fuerzas iguales según ángulos geodésicos regulares y de una óptima según tramos equiexcéntricos, ambas con un mismo esfuerzo axil máximo de compresión.

Ahora, se plantea una elipse dividida en cuadrantes, equiexcéntricos de por sí. Se disponen fuerzas radiales F_x y F_y coincidentes con los ejes de la elipse, de manera que valor del momento flector sea idéntico en cada extremo del cuadrante:

$$F_y \cdot a = F_x \cdot b \quad [6.30]$$

Se compara el diagrama de momentos obtenidos en la elipse con los de un anillo circular en el que se aplican fuerzas iguales sobre dos diámetros perpendiculares, de manera que en ambos cuadrantes se obtenga el mismo esfuerzo axial máximo de compresión (figura 6.19).

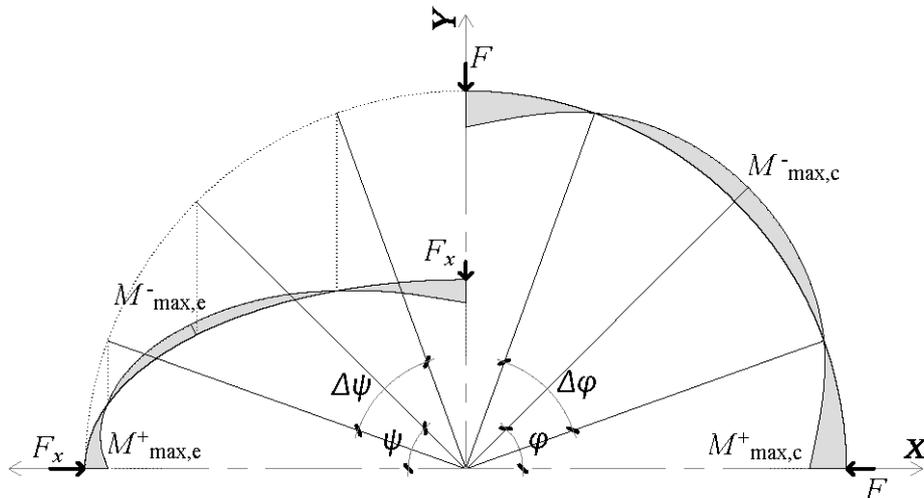


Figura 6.19: Comparación entre un cuadrante de elipse y uno de circunferencia con momentos flectores iguales en los extremos y un mismo esfuerzo axial máximo de compresión en ambos.

Se observa que la proporción entre los valores de máximo momento positivo y máximo momento negativo es sensiblemente igual en los dos arcos. También, que los puntos de momento nulo en la elipse están desplazados respecto a los del arco circular y son ligeramente asimétricos respecto al punto de máxima excentricidad del arco, pero tienen la misma posición angular reducida ψ , es decir, que la posición de la proyección de estos puntos sobre la circunferencia principal de la elipse es la misma que la del arco circular.

A medida que aumenta la diferencia entre los semiejes del anillo elíptico, la excentricidad máxima, igual en todos los tramos, disminuye con respecto a la del anillo circular con el mismo número de tramos, de forma que, para distribuciones de fuerzas con el mismo esfuerzo axial máximo de compresión en ambos anillos, los momentos flectores en el plano de la elipse resultan menores que en la circunferencia (figura 6.20). En ese sentido, podría decirse que, en cuanto a esfuerzos de flexión en el plano se refiere, las condiciones de dimensionado de los anillos elípticos son incluso mejores que las de los anillos circulares.

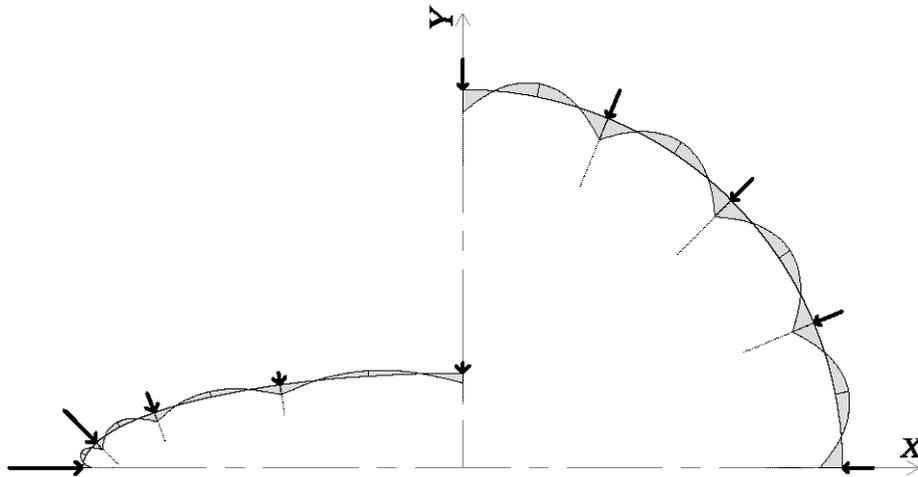


Figura 6.20: Comparación entre el diagrama de momentos flectores en el plano de un cuadrante de elipse y de una circunferencia, y distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos.

En resumen, para plantear una distribución óptima de fuerzas en el plano de un anillo elíptico, primero se resuelve la división en n tramos equiexcéntricos mediante el sistema de ecuaciones antes planteado. Luego, sabiendo que la cuerda es perpendicular a la dirección del ángulo geodésico φ en el punto de máxima excentricidad de cada tramo, se encuentra el ángulo β_i de inclinación de cada cuerda de arco (ecuación 5.4 del capítulo anterior) y el ángulo γ_i que forman entre ellas (ecuación 5.5 del capítulo anterior). Por último, se plantean las fuerzas radiales F_i situadas en la bisectriz de cada ángulo γ_i entre cuerdas, de manera que resulte el mismo esfuerzo axil máximo de compresión en todos los tramos (ecuación 5.3 del capítulo anterior) y se calcula su orientación ζ_i (ecuación 5.6 del capítulo anterior). De esta manera, los dos factores que determinan los momentos flectores en el plano del anillo, o sea, el esfuerzo axil y la excentricidad máxima, son iguales en todos los tramos.

Siguiendo este proceso, se han calculado las distribuciones óptimas de fuerzas (intensidad F_i , ángulo ζ_i y posición x, y) para diferentes valores de n y cuadrantes de distintas elipses, definidas por la relación de sus semiejes (a/b). En todas ellas se supone un valor unitario del esfuerzo axil en el anillo ($N=1$), y un valor unitario del semieje mayor ($a=1$).

n	e_{max}	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	0,29289	1,41421	0,00	1,00000	0,00000
			90,00	0,00000	1,00000
2	0,07612	0,76537	0,00	1,00000	0,00000
			45,00	0,70711	0,70711
			90,00	0,00000	1,00000
3	0,03407	0,51764	0,00	1,00000	0,00000
			30,00	0,86603	0,50000
			60,00	0,50000	0,86603
			90,00	0,00000	1,00000
4	0,01921	0,39018	0,00	1,00000	0,00000
			22,50	0,92388	0,38268
			45,00	0,70711	0,70711
			67,50	0,38268	0,92388
			90,00	0,00000	1,00000
5	0,01231	0,31287	0,00	1,00000	0,00000
			18,00	0,95106	0,30902
			36,00	0,80902	0,58779
			54,00	0,58779	0,80902
			72,00	0,30902	0,95106
			90,00	0,00000	1,00000
6	0,00856	0,26105	0,00	1,00000	0,00000
			15,00	0,96593	0,25882
			30,00	0,86603	0,50000
			45,00	0,70711	0,70711
			60,00	0,50000	0,86603
			75,00	0,25882	0,96593
			90,00	0,00000	1,00000

Tabla 6.4: Distribución óptima de fuerzas F en tramos equiexcéntricos de un cuadrante circular.

n	e_{max}	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	0,24853	1,60000	0,00	1,00000	0,00000
		1,20000	90,00	0,00000	0,75000
2	0,06534	0,92432	0,00	1,00000	0,00000
		0,75390	49,67	0,73494	0,50860
		0,62412	90,00	0,00000	0,75000
3	0,02927	0,63318	0,00	1,00000	0,00000
		0,56571	34,89	0,88207	0,35334
		0,46017	64,62	0,52766	0,63709
		0,41849	90,00	0,00000	0,75000
4	0,01651	0,47946	0,00	1,00000	0,00000
		0,44754	26,80	0,93368	0,26858
		0,38313	50,78	0,73264	0,51046
		0,33240	71,39	0,40627	0,68532
		0,31447	90,00	0,00000	0,75000
5	0,01058	0,38526	0,00	1,00000	0,00000
		0,36797	21,71	0,95757	0,21616
		0,32826	41,76	0,82903	0,41940
		0,28807	59,48	0,61532	0,59121
		0,26107	72,57	0,32903	0,70824
		0,25182	90,00	0,00000	0,75000
6	0,00735	0,32182	0,00	1,00000	0,00000
		0,31150	18,22	0,97054	0,18071
		0,28592	35,40	0,88145	0,35421
		0,25618	50,98	0,73228	0,51075
		0,23120	64,98	0,52670	0,63754
		0,21532	77,79	0,27602	0,72086
		0,20995	90,00	0,00000	0,75000

Tabla 6.5: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=1,33$.

n	e_{max}	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	0,22976	1,66410	0,00	1,00000	0,00000
		1,10940	90,00	0,00000	0,66667
2	0,06106	0,99364	0,00	1,00000	0,00000
		0,74268	51,59	0,74573	0,44417
		0,57182	90,00	0,00000	0,66667
3	0,02735	0,68508	0,00	1,00000	0,00000
		0,58137	36,93	0,88843	0,30601
		0,43524	66,40	0,53879	0,56163
		0,38270	90,00	0,00000	0,66667
4	0,01544	0,52012	0,00	1,00000	0,00000
		0,46990	28,66	0,93754	0,23192
		0,37634	53,10	0,74270	0,44642
		0,30946	72,84	0,41556	0,60638
		0,28715	90,00	0,00000	0,66667
5	0,00990	0,41841	0,00	1,00000	0,00000
		0,39087	23,35	0,96013	0,18638
		0,33131	44,15	0,83689	0,36492
		0,27591	61,62	0,62613	0,51981
		0,24125	76,47	0,33689	0,62770
		0,22982	90,00	0,00000	0,66667
6	0,00688	0,34973	0,00	1,00000	0,00000
		0,33315	19,66	0,97235	0,15568
		0,29395	37,70	0,88750	0,30721
		0,25150	53,38	0,74216	0,44682
		0,21824	66,87	0,53720	0,56231
		0,19818	78,82	0,28279	0,63945
		0,19157	90,00	0,00000	0,66667

Tabla 6.6: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=1,5$.

n	e_{max}	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	0,18524	1,78885	0,00	1,00000	0,00000
		0,89443	90,00	0,00000	0,50000
2	0,05110	1,16965	0,00	1,00000	0,00000
		0,70014	56,28	0,76999	0,31903
		0,45759	90,00	0,00000	0,50000
3	0,02298	0,82373	0,00	1,00000	0,00000
		0,60821	42,03	0,90282	0,21501
		0,37303	70,48	0,56345	0,41307
		0,30494	90,00	0,00000	0,50000
4	0,01297	0,62986	0,00	1,00000	0,00000
		0,51924	33,40	0,94642	0,16146
		0,35162	58,58	0,76580	0,32154
		0,25650	76,07	0,43689	0,44976
		0,22850	90,00	0,00000	0,50000
5	0,00832	0,50849	0,00	1,00000	0,00000
		0,44567	27,60	0,96603	0,12921
		0,33020	49,98	0,85497	0,25934
		0,24323	66,47	0,65109	0,37950
		0,19689	79,11	0,35516	0,46740
		0,18279	90,00	0,00000	0,50000
6	0,00578	0,42583	0,00	1,00000	0,00000
		0,38721	23,46	0,97654	0,10768
		0,30689	43,45	0,90145	0,21644
		0,23450	59,01	0,76494	0,32205
		0,18636	71,09	0,56149	0,41374
		0,16040	81,03	0,29853	0,47720
		0,15230	90,00	0,00000	0,50000

Tabla 6.7: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=2$.

n	e_{max}	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	0,13099	1,89737	0,00	1,00000	0,00000
		0,63246	90,00	0,00000	0,33333
2	0,03853	1,41774	0,00	1,00000	0,00000
		0,60856	62,86	0,79820	0,20080
		0,32760	90,00	0,00000	0,33333
3	0,01750	1,04226	0,00	1,00000	0,00000
		0,61296	49,26	0,92044	0,13029
		0,28931	75,42	0,59408	0,26813
		0,21818	90,00	0,00000	0,33333
4	0,00990	0,80967	0,00	1,00000	0,00000
		0,56874	40,40	0,95737	0,09629
		0,30237	65,62	0,79426	0,20253
		0,19166	79,81	0,46391	0,29529
		0,16344	90,00	0,00000	0,33333
5	0,00636	0,65843	0,00	1,00000	0,00000
		0,51365	34,10	0,97335	0,07645
		0,30914	57,88	0,87731	0,15997
		0,19496	72,36	0,68224	0,24371
		0,14470	82,11	0,37824	0,30857
		0,13066	90,00	0,00000	0,33333
6	0,004432	0,55362	0,00	1,00000	0,00000
		0,46121	29,40	0,98173	0,06343
		0,30681	51,56	0,91869	0,13166
		0,20108	66,15	0,79326	0,20296
		0,14400	76,05	0,59201	0,268464
		0,11684	83,53	0,31850	0,31597
		0,10884	90,00	0,00000	0,33333

Tabla 6.8: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=3$.

n	e_{max}	F	$\zeta (^{\circ})$	x	y
1	0,10046	1,94029	0,00	1,00000	0,00000
		0,48507	90,00	0,00000	0,25000
2	0,03086	1,57760	0,00	1,00000	0,00000
		0,52777	67,37	0,81335	0,14544
		0,25500	90,00	0,00000	0,25000
3	0,01417	1,20788	0,00	1,00000	0,00000
		0,59130	54,35	0,93071	0,09144
		0,23621	78,33	0,61256	0,19761
		0,17044	90,00	0,00000	0,25000
4	0,00804	0,95357	0,00	1,00000	0,00000
		0,58435	45,46	0,96389	0,06658
		0,26256	70,00	0,81138	0,14613
		0,15342	81,94	0,48048	0,21925
		0,12773	90,00	0,00000	0,25000
5	0,00517	0,78139	0,00	1,00000	0,00000
		0,54945	38,94	0,97773	0,05246
		0,28327	63,03	0,89073	0,11363
		0,16243	75,83	0,70128	0,17822
		0,11482	83,78	0,39259	0,22993
		0,10212	90,00	0,00000	0,25000
6	0,00360	0,65976	0,00	1,00000	0,00000
		0,50706	33,95	0,98485	0,04335
		0,29390	57,08	0,92904	0,09259
		0,17434	70,54	0,81046	0,14645
		0,11752	78,90	0,61084	0,19794
		0,09228	84,92	0,33097	0,23591
		0,08506	90,00	0,00000	0,25000

Tabla 6.9: Distribución óptima de fuerzas F_i en tramos equiexcéntricos de un cuadrante elíptico de semiejes $a/b=4$.

Si la proporción entre sus semiejes coincide con alguna de las calculadas, se puede plantear una distribución óptima de fuerzas en una elipse como la de la figura 6.16, multiplicando el valor del axil N por las fuerzas F y el semieje mayor a por los valores de e_{max} y las coordenadas x , y que aparecen en las tablas anteriores.

iv) Condiciones de pandeo

Igual que en los anillos circulares con radios tensados, primero se calcula el axil crítico del anillo en su forma de pandeo global, teniendo en cuenta la coacción que ejerce el conjunto de radios de rigidez limitada. Al tratarse de un anillo elíptico, este cálculo presenta dos dificultades añadidas que hay que tener en cuenta: la primera, que el anillo tiene una imperfección inicial en forma de elipticidad; la segunda, que la rigidez axil de los radios no es homogénea porque su longitud es distinta en cada posición angular.

Si, como en el caso de la distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos, los diagramas de esfuerzos axiles y de momentos flectores son más o menos regulares en todos los tramos del anillo, el axil crítico en el modo de pandeo global se puede aproximar al calculado en una circunferencia de radio equivalente r_{eq} que tenga el mismo perímetro:

$$r_{eq} = \frac{P}{2\pi} = \frac{\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b) \cdot (a+3b)} \right]}{2} \quad [6.31]$$

..., la rigidez k_r de los radios se puede calcular como el promedio de rigideces de todos los radios diferentes de un cuadrante:

$$k_r = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{E_r \cdot A_r}{2r_i} \right)}{n/4} \quad [6.32]$$

...y la separación entre radios s también se puede promediar entre las longitudes de arco de cada uno de los tramos de un cuadrante:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n/4} \quad [6.33]$$

Luego se substituyen estos promedios en la ecuación 6.11 para obtener un *módulo de coacción radial* aproximado:

$$\beta_r \approx \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{E_r \cdot A_r}{2r_i} \right)}{\sum_{i=1}^n s_i} \quad [6.34]$$

...con el que, entrando en la tabla 6.2, se encuentra la longitud equivalente reducida L_{eq} , que se substituye en la ecuación 6.12 para, finalmente, deducir un esfuerzo axil crítico, por supuesto también aproximado.

Para saber si la coacción radial es suficiente para evitar la forma de pandeo global, se comprueba que el axil crítico aproximado para el anillo elíptico es superior al axil crítico de un arco comprendido entre dos radios. En este caso, hay que tener en cuenta que cada uno de los tramos en los que queda dividido un cuadrante de elipse es distinto al resto, ya que no se ha conseguido demostrar que sea posible igualar a la vez todos los factores de los que dependen las condiciones de pandeo en el plano de un arco (longitud del arco, excentricidad respecto a la cuerda, esfuerzos axiales y deformación inicial producida por los momentos flectores).

Si, tal y como se supone al principio, gracias a una distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos, los diagramas de esfuerzos axiales y de momentos flectores son sensiblemente iguales en todos los tramos, *a priori* parece que el tramo más desfavorable en cuanto sus condiciones de pandeo sería el de mayor longitud, situado en la zona de menor curvatura, próxima al eje menor de la elipse.

Para aproximar el axil crítico de este tramo, se necesita calcular primero la excentricidad o flecha relativa " α " en base a la ecuación 6.18, y comprobar si se comporta como un arco o de una barra ligeramente curvada, conforme al criterio establecido en el primer apartado de este capítulo, es decir, si tiene una forma de pandeo con un punto de inflexión en el punto de máxima excentricidad entre la cuerda y el arco (si $\alpha > 4$) o, si por el contrario, el tramo es demasiado plano y la forma de pandeo puede ser cualquiera otra incluyendo aquella en la que se llega a invertir la curvatura del tramo en cuestión (si $\alpha < 4$).

Después, se puede aplicar la formulación de la forma de pandeo que corresponda considerando una curvatura constante promediada entre todas las del tramo. Aunque, como ya se ha comentado antes, la mejor manera de resolver este problema sería introduciendo el arco discretizado convenientemente en un programa de cálculo que considere los efectos de segundo orden.

En resumen, uno de los objetivos de esta investigación es encontrar disposiciones de radios tensados, es decir, distribuciones de fuerzas sobre el anillo de las que resulten condiciones óptimas para su dimensionado. Así, aparte de la homogeneización de los diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores en todos los tramos del anillo, se ha pretendido que las condiciones de pandeo fuesen también homogéneas en todos los tramos; sin embargo, esto último no se ha demostrado posible.

En general, cabe pensar que en una distribución según tramos equiexcéntricos, si el número de radios es suficientemente elevado, las distancias entre ellos, aun diferentes, no serán tan grandes como para que el dimensionado del anillo esté condicionado por el pandeo, sino por los esfuerzos de primer orden, en especial por la flexión en el plano. Pero puede resultar que, si el número de radios no es muy elevado y la excentricidad ε de la elipse está próxima a la unidad, la distribución según tramos equiexcéntricos no sea la mejor, ya que el dimensionado de los tramos de menor curvatura, los de mayor longitud, a diferencia del resto, podría estar más condicionado por el pandeo que por los esfuerzos de primer orden. Sólo si así fuese, la distribución óptima podría ser la que divide el anillo en tramos de la misma longitud. En todo caso, para determinar cuál es la que permite mayor optimización en el dimensionado en cada caso, habría que hacer valoraciones cuantitativas sobre casos específicos, lo cual está fuera del alcance de esta investigación.

Apartado 6.3: Distribución óptima de radios tensados en anillos compuestos

i) En anillos compuestos por arcos elípticos iguales

Para dividir en tramos equiexcéntricos un anillo compuesto por arcos elípticos iguales alrededor de un polígono regular, se plantea un sistema de n ecuaciones $e_{max}(\psi)$, donde ψ_1 y ψ_n se corresponden con los puntos de tangencia, es decir, con los extremos de cada arco (figura 6.21), donde n es la relación entre el número de tramos del anillo y el número de lados del polígono alrededor del cual se compone el anillo.

Después se calcula una distribución óptima de fuerzas de la que resulten los mismos diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores en todos los tramos. Para calcular los ángulos γ_1 y γ_n , hay que tener en cuenta que el ángulo β del lado contiguo situado al otro lado del punto de tangencia está afectado por el giro del ángulo α del polígono regular alrededor del cual se ha compuesto el anillo, según la ecuación 5.11 del capítulo anterior.

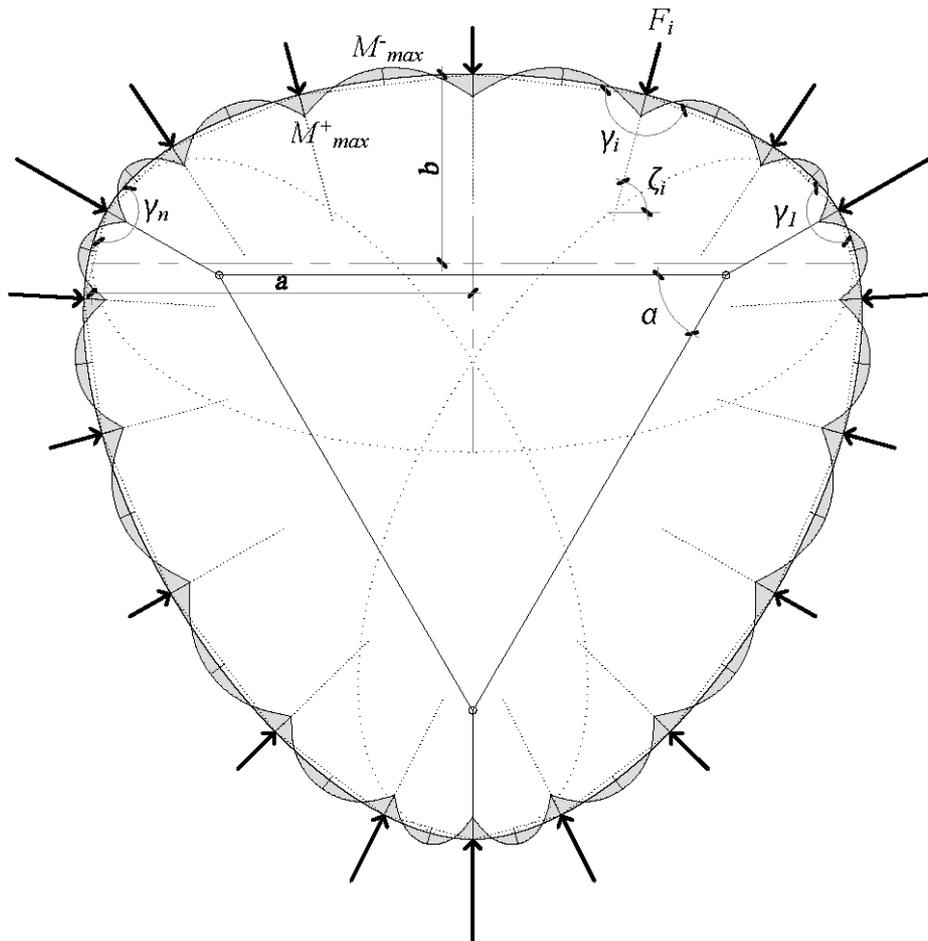


Figura 6.21: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por tres arcos elípticos iguales con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos.

Desde el punto de vista mecánico, se observa que las fuerzas se incrementan a medida que se aproximan a los vértices del triángulo, por ser las zonas de mayor curvatura de la elipse. Aun así, el diseño resulta ventajoso para el dimensionado, porque los diagramas de esfuerzos axiales y de momentos flectores se repiten idénticos en todos los tramos. Pero es necesario

valorar cuantitativamente en cada anillo concreto si el dimensionado de los tramos de mayor longitud, a diferencia del resto, está más condicionado por el pandeo que por los esfuerzos de primer orden. De ser así, cabrían dos posibilidades: aumentar el número de radios manteniendo el mismo criterio de distribución o cambiar la distribución de radios según tramos de la misma longitud.

ii) En anillos compuestos por arcos de circunferencias y elipses distintas alrededor de un de un rectángulo

Como se ha demostrado en el capítulo 5, se puede formular la función $F(\varphi)$ de un anillo compuesto por arcos de circunferencias y elipses distintas, según cualquiera de los tipos definidos en el capítulo 4, como la concatenación de varias funciones $f_i(\varphi)$ referenciadas según un mismo origen de coordenadas.

Así, para dividir en tramos equiexcéntricos un anillo compuesto cualquiera, primero es necesario formular la excentricidad máxima de un arco compuesto por dos curvas tangentes respecto a su propia cuerda.

Se sabe que la excentricidad máxima de un arco se produce en un punto con un ángulo geodésico φ que forma 90° con la cuerda del mismo arco (figura 6.22). Entonces, dadas dos curvas distintas, tangentes en un punto M , definidas por funciones $f(\varphi)$ con el mismo origen de coordenadas, se traza una cuerda entre dos puntos, cada uno situado a un lado distinto del punto de tangencia M . Después, se calcula el ángulo β_{ij} que forma esta cuerda con la horizontal, medido en sentido antihorario:

$$\beta_{ij} = \arctg\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right) \quad [6.35]^{59}$$

...y se encuentra un punto P tal que $\varphi_P = 90 + \beta_{ij}$. Luego se formula la ecuación de la recta que contiene la cuerda ij del arco según $y = mx + n$, donde m y n se calculan según:

$$m = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad \text{y} \quad n = y_i - \frac{x_i (y_j - y_i)}{x_j - x_i} \quad [6.36]$$

Por último, se calcula la excentricidad máxima del punto P en cuestión hasta dicha recta:

$$e_{\max} = \frac{m \cdot x_P - y_P + n}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad [6.37]$$

⁵⁹ De la ecuación 5.4 del capítulo anterior.

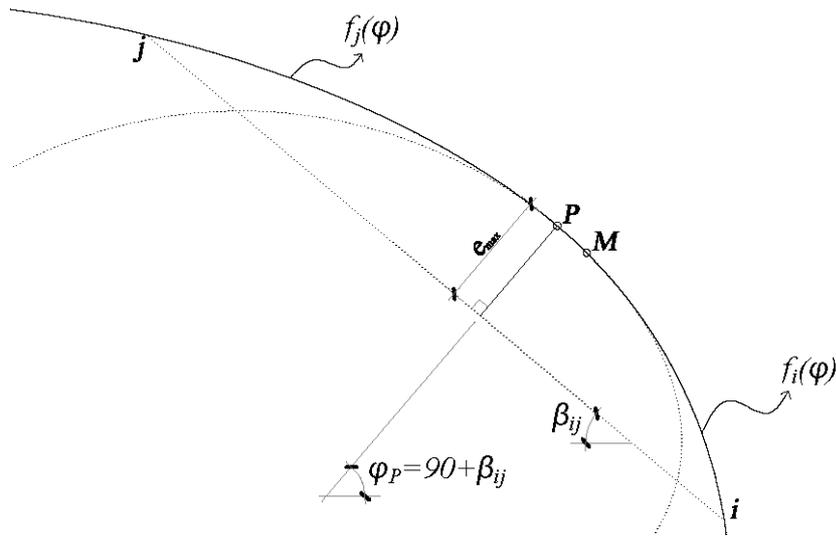


Figura 6.22: Excentricidad máxima de un arco compuesto por dos curvas tangentes con funciones distintas.

Ahora, se propone la división en tramos equiexcéntricos de un anillo compuesto por arcos de dos elipses distintas y una misma circunferencia osculatriz alrededor de un rectángulo, manteniendo la misma distancia máxima D entre el anillo en cada lado del rectángulo. Como existe simetría respecto a dos ejes perpendiculares, se formula la función que define un cuadrante de anillo, pero esta vez en forma paramétrica (ecuación 6.38).

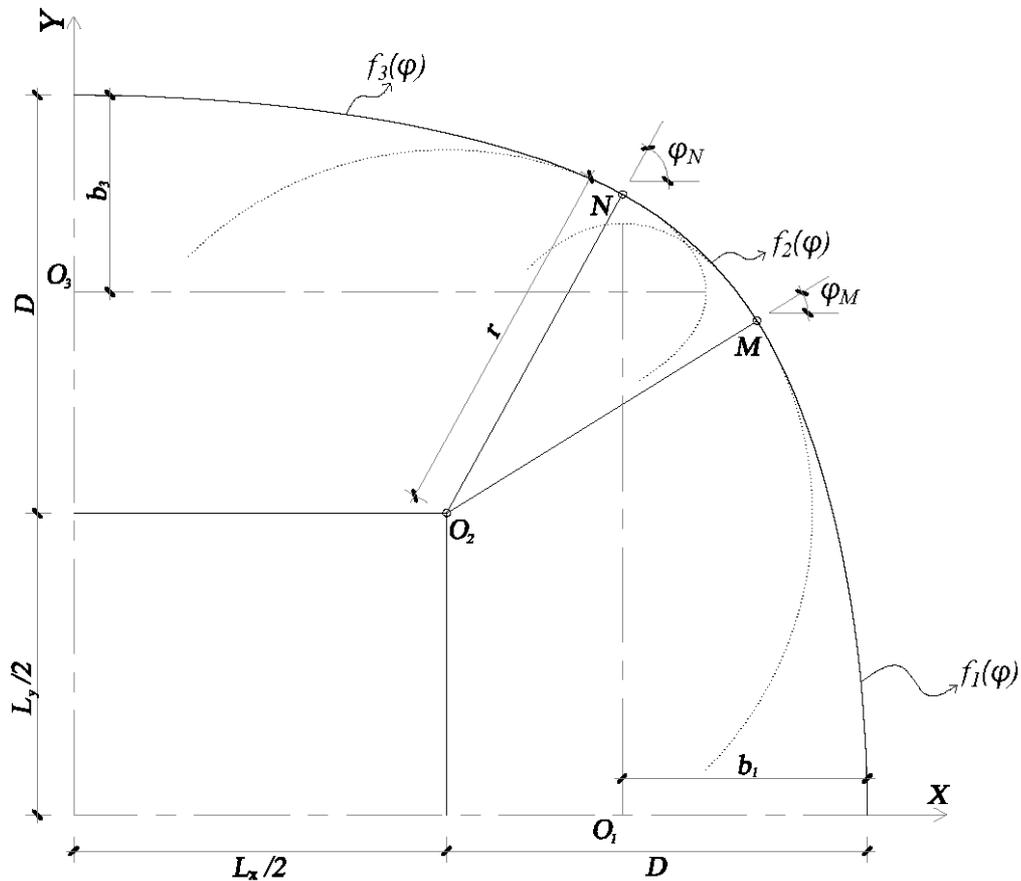


Figura 6.23: Cuadrante de anillo compuesto por dos arcos de elipses distintas y una circunferencia osculatriz.

$$F(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l}
 f_1(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l}
 x = \sqrt{\left[a_1 \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + 90) \right] \right) \right]^2 + \left[b_1 \cdot \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + 90) \right] \right) \right]^2} \\
 \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + 90) \right] - 90 \right) + \frac{L_x}{2} + D - b_1 \\
 y = \sqrt{\left[a_1 \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + 90) \right] \right) \right]^2 + \left[b_1 \cdot \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + 90) \right] \right) \right]^2} \\
 \cdot \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi + 90) \right] - 90 \right)
 \end{array} \right. \\
 \dots \text{para } 0^\circ > \varphi \geq \varphi_M \\
 \\
 f_2(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l}
 x = \frac{L_x}{2} + r \cdot \cos \varphi \\
 y = \frac{L_y}{2} + r \cdot \operatorname{sen} \varphi
 \end{array} \right. \quad \dots \text{para } \varphi_M > \varphi \geq \varphi_N \\
 \\
 f_3(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l}
 x = \sqrt{\left(a_3 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right)^2 + \left(b_3 \cdot \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right)^2} \\
 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \\
 y = \sqrt{\left(a_3 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right)^2 + \left(b_3 \cdot \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \right)^2} \\
 \cdot \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_3}{a_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] + \frac{L_y}{2} + D - b_3
 \end{array} \right. \\
 \dots \text{para } \varphi_N > \varphi \geq 90^\circ
 \end{array} \right.$$

[6.38]

Después se plantea un sistema de n ecuaciones $e_{\max}(x,y)$, donde n es igual al número de tramos equiexcéntricos de un cuadrante del anillo, y se calcula una distribución óptima de fuerzas de la que resulten los mismos diagramas de esfuerzos axiales y de momentos flectores en todos los tramos (figura 6.24).

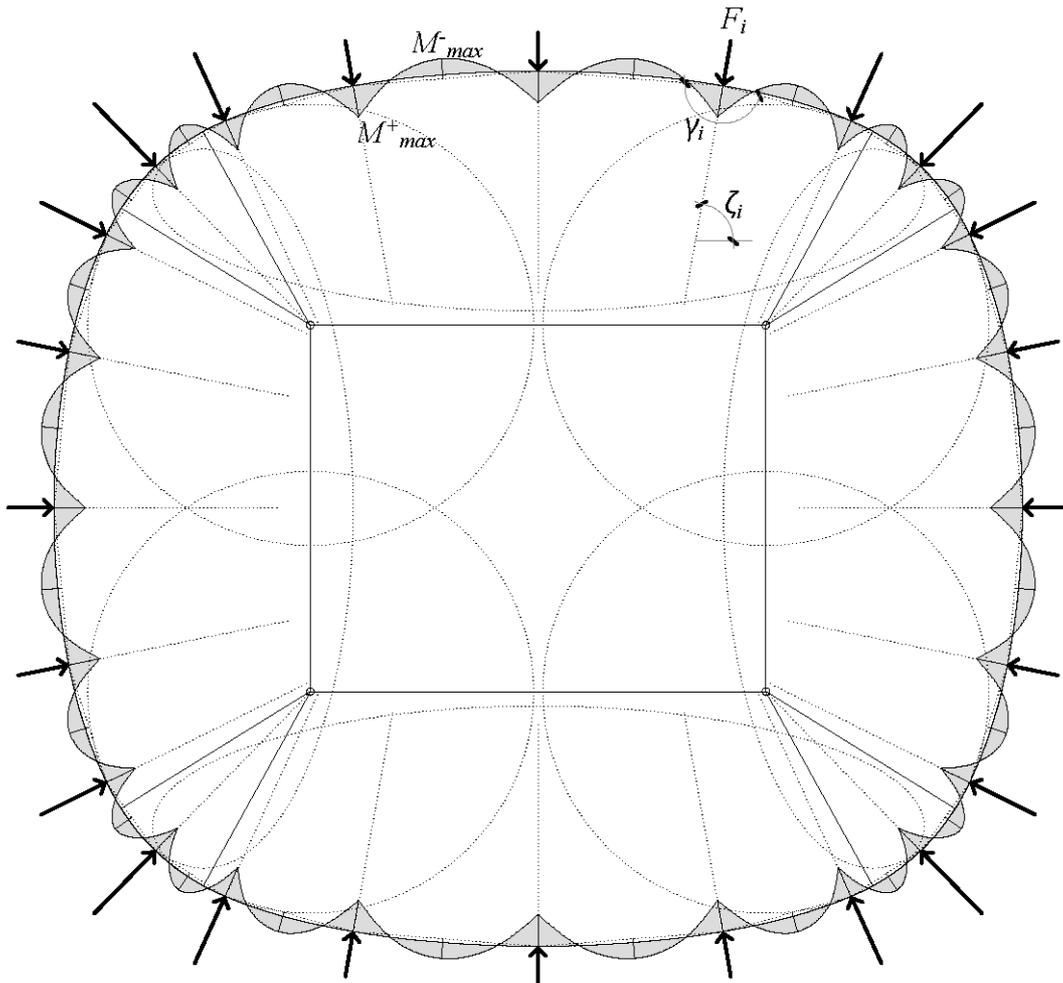


Figura 6.24: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas alrededor de un rectángulo con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos.

iii) En anillos compuestos por arcos de circunferencias y elipses distintas alrededor de un segmento o un polígono cualquiera

Se plantea la división en tramos equiexcéntricos de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas alrededor de un segmento, definido por una función $F(\varphi)$ de la ecuación 5.20 y representado en la figura 5.15a del capítulo anterior, y se le aplica una distribución óptima de fuerzas F_i de la que resulten los mismos diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores en todos los tramos (figura 6.25).

Igual que lo que sucedía con los polígonos de lados iguales inscritos en este tipo de anillos, la distribución de fuerzas y el consecuente diagrama de momentos flectores resultan diferentes dependiendo de la posición que se fije para la aplicación de la primera fuerza, es decir, que existen infinitas soluciones a este problema. Según se ha demostrado, cuando los puntos de división de un anillo elíptico coinciden con los ejes principales, la excentricidad máxima resulta la menor de todas las posibles para un mismo número de tramos equiexcéntricos.

Podría deducirse entonces que, en el caso de un anillo compuesto, la excentricidad máxima resultaría menor cuando alguno de los puntos de división coincidiese con uno de los ejes

principales de la elipse. Pero este criterio presenta dos problemas: el primero, que el anillo está formado por arcos de varias elipses distintas; el segundo, que estos arcos de elipse sólo coinciden con uno de sus ejes principales, el menor.

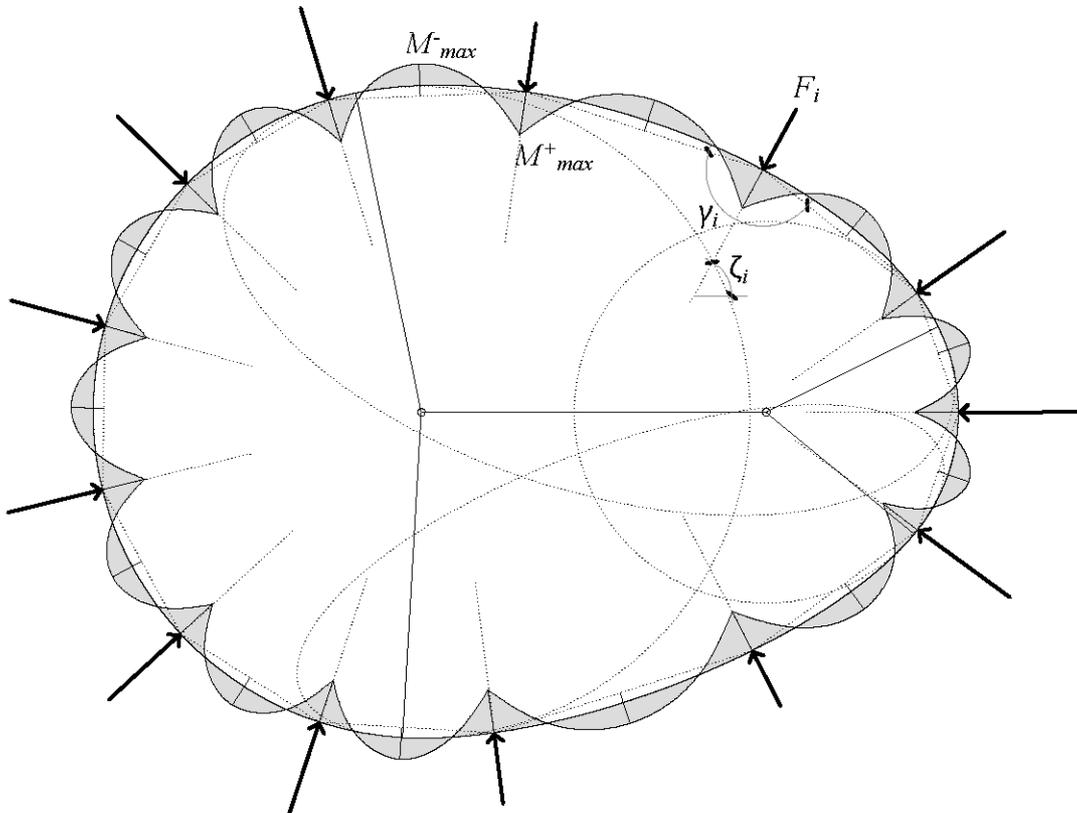


Figura 6.25: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos.

Entonces, para deducir un criterio universal que permita conocer el punto de inicio $F(\varphi_1)$ de la división óptima de un anillo compuesto cualquiera en tramos equiexcéntricos, se repasa el concepto de excentricidad máxima y de su causante principal, a saber, la distancia más corta entre el punto más alejado de un arco y su cuerda, debida a la curvatura del propio arco. Cuanto mayor es la curvatura de un arco respecto de una misma cuerda, mayor es la excentricidad máxima.

En un anillo compuesto sólo por arcos de elipse, la mayor curvatura se produce en un solo punto, coincidente con el de tangencia entre dos arcos, en cambio, si se combinan arcos de elipses y circunferencias, todos los puntos del arco circular con radio menor tienen la misma curvatura, máxima en el anillo. En ese caso, se tomará como referencia el punto más alejado de la curvatura mínima, es decir, el punto medio del arco de circunferencia en cuestión.

Así, si la excentricidad máxima de uno de los tramos equiexcéntricos se produce en el punto de mayor curvatura o, en su caso, en el punto medio del arco circular de radio menor, el resultado de la división es máximo, es decir, la excentricidad máxima resulta la mayor de todas las posibles (figura 6.26a). En cambio, si se empieza la división por el punto de mayor

curvatura del anillo o, también en su caso, por el punto medio del arco circular de radio menor, la excentricidad máxima resulta la menor de todas las posibles (figura 6.26b).

Como sucede con los anillos formados por una sola elipse, si el número de radios es elevado, la diferencia entre ambos resultados no es apreciable. En este caso concreto no llega al 0,12%.

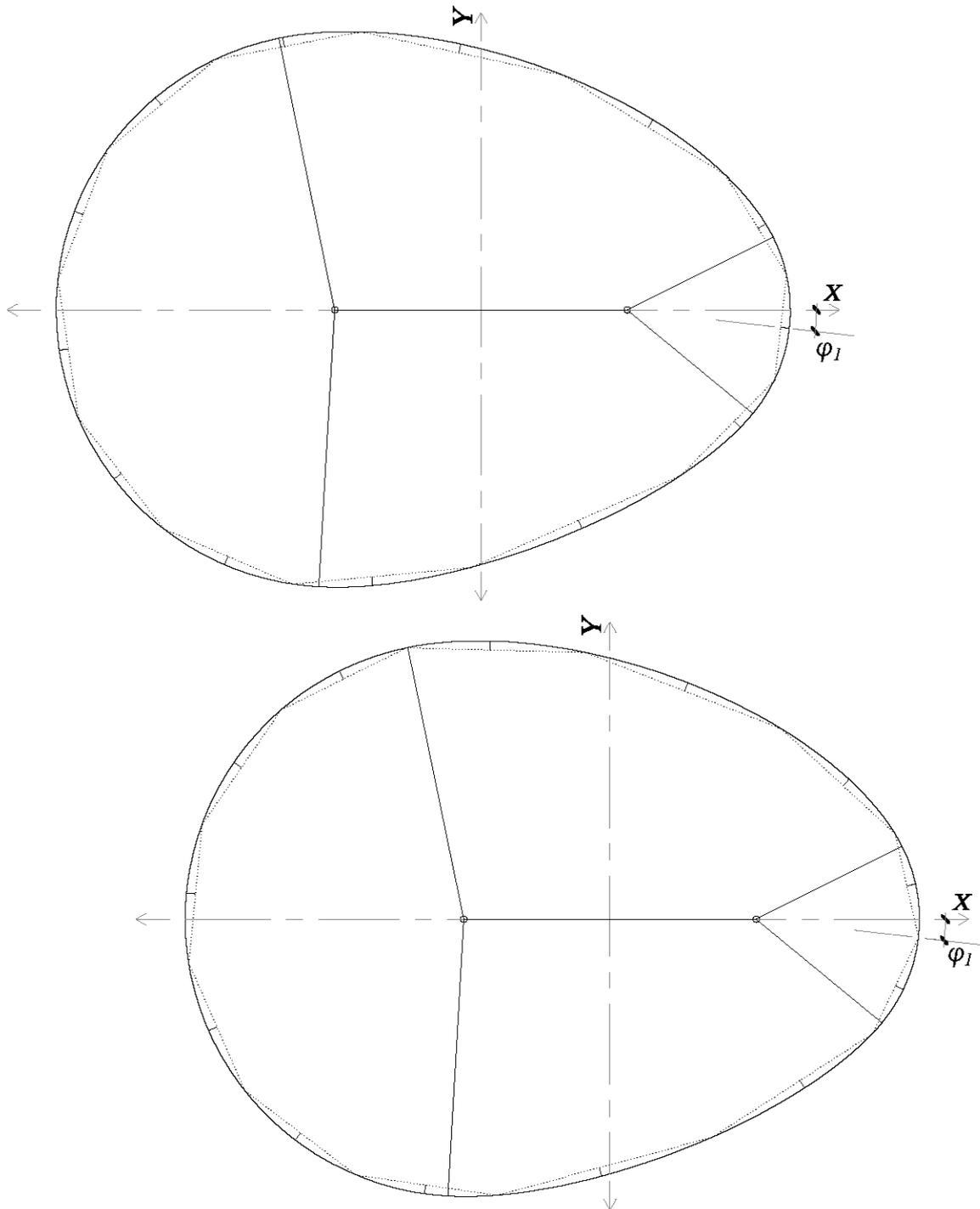


Figura 6.26a y 6.26b: División de un anillo compuesto según tramos equiexcéntricos con resultado distinto: excentricidad máxima mayor (arriba) y menor de todas las posibles (abajo).

iv) En anillos compuestos sólo por arcos de circunferencias distintas

Como en el capítulo anterior, los anillos que se han utilizado en este apartado para distribuir fuerzas según tramos equiexcéntricos han sido compuestos según las condiciones de combinación de arcos elípticos y de circunferencia enunciadas en el capítulo 4, según las cuales existe continuidad en la curvatura del anillo incluso en el punto de tangencia entre dos arcos, por lo cual se puede formular una función de fuerza distribuida ideal de la que resulte un esfuerzo axil uniforme y ausencia total de otros esfuerzos en el plano.

Para demostrar que la continuidad en la curvatura en los puntos de tangencia no es una condición necesaria para poder dividir el anillo en tramos equiexcéntricos, se compone un anillo según el esquema de la figura 6.23 en el que se substituyen los arcos elípticos por arcos de circunferencias distintas, unidos en los puntos M y N mediante tangencias, y se formula su la función $F(\varphi)$ que define un cuadrante (ecuación 6.39).

$$F(\varphi) = \begin{cases} f_1(\varphi) = \begin{cases} x = \frac{L_x}{2} + D - r_1 + r_1 \cdot \cos \varphi \\ y = r_1 \cdot \text{sen} \varphi \end{cases} & \dots \text{para } 0^\circ > \varphi \geq \varphi_M \\ f_2(\varphi) = \begin{cases} x = \frac{L_x}{2} + r_2 \cdot \cos \varphi \\ y = \frac{L_y}{2} + r_2 \cdot \text{sen} \varphi \end{cases} & \dots \text{para } \varphi_M > \varphi \geq \varphi_N \\ f_3(\varphi) = \begin{cases} x = r_3 \cdot \cos \varphi \\ y = \frac{L_y}{2} + D - r_3 + r_3 \cdot \text{sen} \varphi \end{cases} & \dots \text{para } \varphi_N > \varphi \geq 90^\circ \end{cases} \quad [6.39]$$

Después se divide en tramos equiexcéntricos mediante el mismo proceso que el caso anterior y se calcula una distribución óptima de fuerzas para que resulte el mismo esfuerzo axil que el anillo representado en la figura 6.24, obteniéndose también los mismos diagramas de momentos en todos los tramos (figura 6.27).

Ambas figuras resultan muy parecidas, pero existen sutiles diferencias. En primer lugar, la excentricidad máxima y consecuentemente los momentos flectores máximos resultan ligeramente inferiores en el anillo compuesto sólo por arcos de circunferencias. Además, en este anillo, las fuerzas están orientadas según ángulos ζ_i coincidentes con el ángulo geodésico φ_i de cada punto de aplicación, mientras que en el que está compuesto por combinaciones de arcos de elipses y circunferencias estos ángulos son distintos en un mismo punto de aplicación.

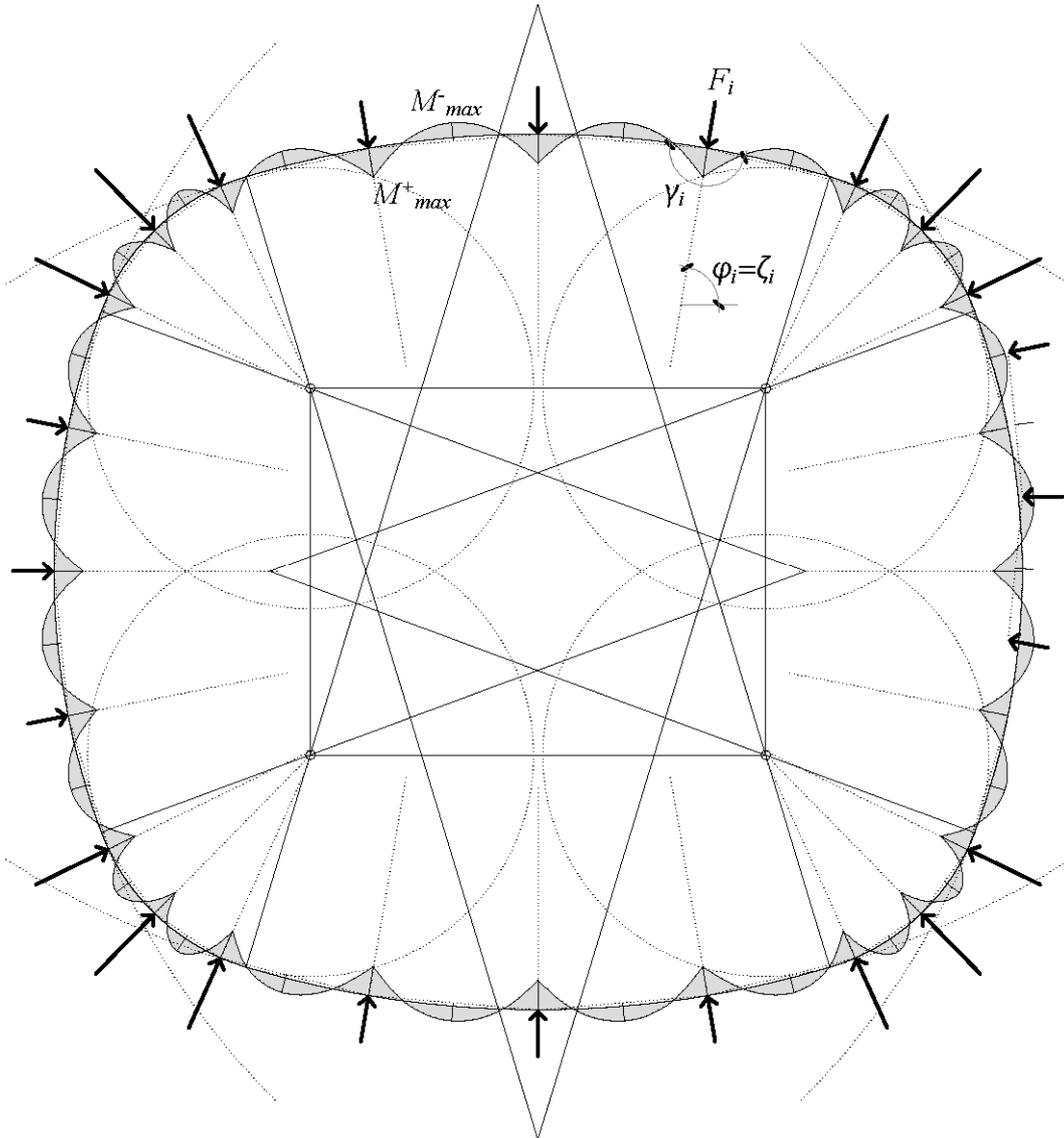


Figura 6.27: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto sólo por arcos de circunferencias distintas alrededor de un rectángulo con distribución óptima de fuerzas F_i según tramos equiexcéntricos.

Si se incrementa el número de fuerzas y se superponen los dos anillos, se observa que, en el anillo compuesto sólo mediante arcos de circunferencia (en línea continua en la figura 6.28), las fuerzas que separan tramos de un mismo arco de circunferencia son iguales y mantienen una separación constante, mientras que, en el anillo compuesto por combinaciones de arcos de elipses y circunferencia oscultriz (en línea de puntos en la figura 6.28), el valor de las fuerzas incrementa progresivamente como lo hace la curvatura del arco, al contrario que su separación, que lo hace de manera inversa, es decir, aumenta a medida que la curvatura se vuelve más plana.

Aunque la composición del anillo sólo mediante arcos de circunferencia, teniendo en cuenta la longitud de los tramos, resulta ligeramente más ventajosa en cuanto a las condiciones de dimensionado por pandeo, la variación progresiva del valor de las fuerzas a medida que se acercan a las zonas de mayor curvatura podría resultar más ventajosa para el diseño de la

estructura de cables tensados en el interior del anillo, ya que parece lógico pensar que, considerando sólo acciones permanentes (pretensado y peso propio), las reacciones de los cables sobre el anillo crezcan progresivamente a medida que se aproximan a las zonas más rígidas del anillo, las de mayor curvatura, y no que aumenten de manera brusca cuando se produzca un cambio de arco de circunferencia. En todo caso, esto sólo es una intuición cuya demostración queda fuera del alcance de esta investigación.

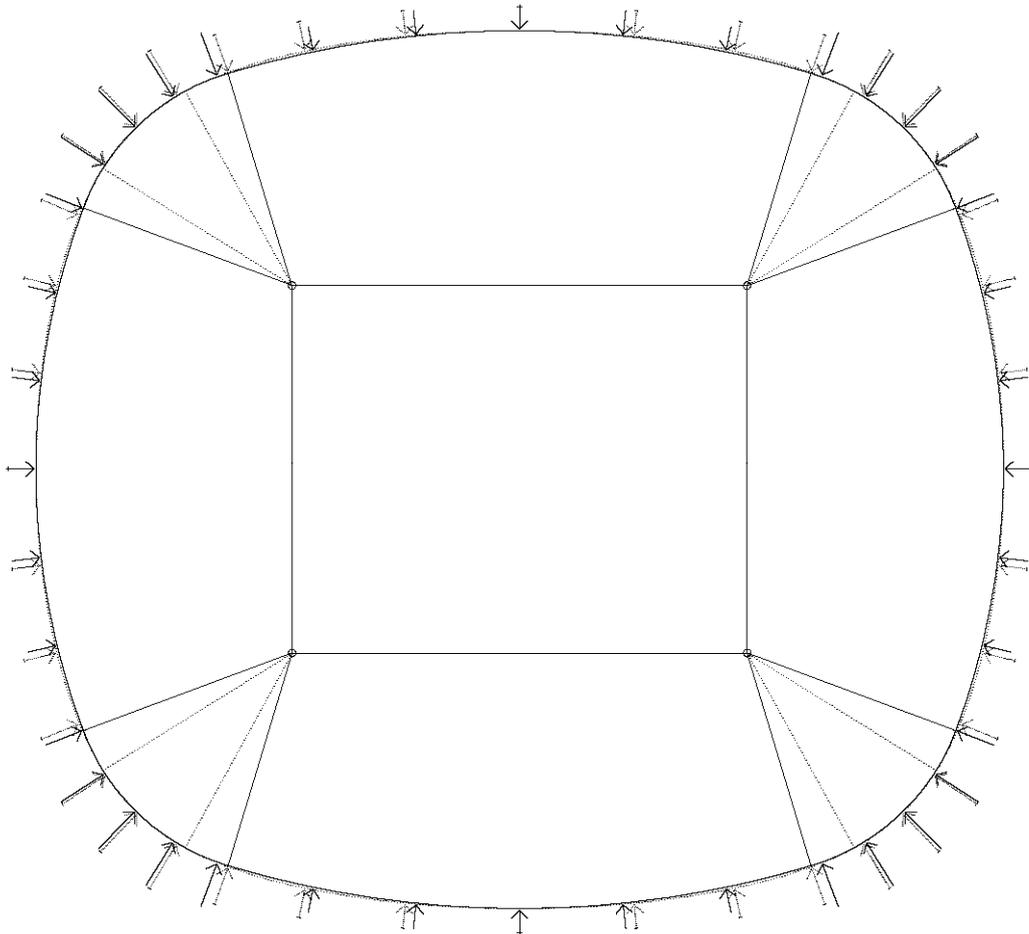


Figura 6.28: Comparación de la distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos en un anillo compuesto sólo por arcos de circunferencia (en línea continua) y en uno compuesto por dos arcos de elipses distintas y cuatro arcos de una misma circunferencia osculatriz (en línea de puntos).

PARTE III: CONCLUSIÓN

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

Donde se resumen los resultados de la investigación y los objetivos alcanzados, se enumeran sus posibles aplicaciones y se plantean las líneas de continuidad para futuras investigaciones.

Apartado 7.1: Resultados y objetivos alcanzados

i) Anillos con membrana tensada

Se ha formulado la función de fuerza distribuida ideal en el plano de un anillo elíptico, de la que resulta un esfuerzo axial de compresión de valor uniforme en todo el perímetro y ausencia total de flexiones y cortantes. Esta función se basa en la relación entre la carga y curvatura, que debe mantenerse constante en cada punto, es decir, que la carga tiene que variar en la misma proporción que lo hace la curvatura. Se han propuesto y mostrado posibles representaciones de la fuerza distribuida ideal sobre el plano de un anillo elíptico. Se ha mostrado cómo calcular el acortamiento de un anillo elíptico sometido a dicha fuerza distribuida ideal.

Después, se han enunciado las condiciones de combinación de arcos de elipse y circunferencia para formar anillos compuestos no circulares en los que se pueda formular una función de fuerza distribuida ideal. Estas condiciones son dos: que los arcos se unan mediante tangencia y que en el punto de tangencia ambos arcos tengan la misma curvatura, es decir, que compartan centro y radio de curvatura.

Se han enunciado las variables que definen un anillo compuesto por combinaciones de arcos de elipse y circunferencias alrededor un segmento o un polígono conocido, incluyendo las que controlan sus dimensiones. Se han planteado los sistemas de ecuaciones que permiten encontrar soluciones para diferentes tipos de composición.

Se ha ido incrementando progresivamente el grado de irregularidad del anillo, aumentando el número de variables que lo definen y, en consecuencia, el grado de complejidad del sistema de ecuaciones necesario para resolver cada caso. Así, se ha planteado y resuelto el diseño de los siguientes anillos compuestos alrededor de un segmento de longitud conocida:

- Dos arcos elípticos iguales y dos arcos de la misma circunferencia osculatriz, con simetría respecto a dos ejes perpendiculares.
- Dos arcos de la misma circunferencia osculatriz y dos arcos de elipses distintas, con simetría respecto al eje perpendicular al segmento.
- Dos arcos de la misma elipse y dos arcos de circunferencias oscultrices distintas, con simetría respecto al propio segmento.
- Cuatro arcos de dos circunferencias oscultrices y dos elipses distintas, sin ninguna simetría.

Del mismo modo, se han planteado y resuelto los siguientes anillos compuestos alrededor de polígonos regulares:

- Arcos elípticos iguales, intercalando a veces arcos de circunferencias oscultrices también iguales.
- Arcos de elipses distintas y circunferencias oscultrices iguales.

- Arcos de elipses iguales y de dos circunferencias osculatrices distintas, sólo posible alrededor de polígonos regulares de lados pares.

Por último, se han planteado y resuelto los siguientes anillos compuestos alrededor de polígonos irregulares:

- Arcos de elipses y circunferencias osculatrices distintas, o caso general de anillo compuesto alrededor de un polígono irregular.
- Arcos de circunferencias osculatrices iguales y elipses distintas, pero con la misma distancia máxima D entre el anillo y el polígono en cada lado.

En todos estos anillos no circulares se puede formular una función de fuerza distribuida ideal de las que resulte un esfuerzo axial uniforme en todo el perímetro y ausencia total de otros esfuerzos en el plano.

En definitiva, ha quedado demostrado que es posible diseñar anillos de compresión no circulares y formular una fuerza distribuida ideal en el plano, de manera que igualen las condiciones óptimas de dimensionado que tienen los anillos circulares sometidos a fuerzas centrípetas uniformemente distribuidas.

ii) Polígonos con radios tensados

Se han enunciado las condiciones para que, aplicando unas determinadas fuerzas sobre los vértices de un polígono cualquiera, resulten esfuerzos axiales iguales en todos sus lados y ausencia total de otros esfuerzos en el plano. Estas condiciones afectan a dos factores: el valor y la orientación de la fuerza sobre cada vértice, que dependen únicamente del ángulo γ entre dos lados contiguos del polígono.

Siempre que la fuerza esté alineada con la bisectriz del ángulo, los dos lados del vértice están sometidos al mismo esfuerzo axial, que es mayor cuanto mayor sea el ángulo entre los lados. Así, en un polígono regular con el mismo esfuerzo axial en todos los lados, todas las fuerzas tienen que ser iguales, mientras que en uno irregular han de ser distintas en cada vértice, como lo son los ángulos entre sus lados.

Así, se ha definido la distribución ideal de fuerzas sobre los vértices de un polígono cualquiera como aquella de la que resulta un mismo esfuerzo axial en todos los lados y ausencia total de otros esfuerzos en el plano.

Se ha formulado el sistema de ecuaciones que permite plantear polígonos de ángulos iguales inscritos en elipses, y se ha calculado la distribución ideal de fuerzas iguales, alineadas con la bisectriz de cada vértice, de la que resulta el mismo esfuerzo axial de compresión en todos los lados. Luego se han resuelto polígonos inscritos en elipses según este criterio, observándose que, cuando el número de lados del polígono es reducido, la aproximación a la elipse es menor, especialmente en las zonas de curvatura más plana, donde la excentricidad del arco respecto de la cuerda, entendida como el lado del polígono, resulta mayor. También, que, pese a que el esfuerzo axial de compresión resulta igual en todo el perímetro, como las longitudes de los lados varían de mayor, en las zonas de curvatura más plana, a menor, en las de curvatura más pronunciada, las condiciones de pandeo no son iguales en todos los lados.

Se ha formulado el sistema de ecuaciones que permite plantear polígonos de lados iguales inscritos en elipses, y se ha calculado la distribución ideal de fuerzas distintas, en función del ángulo en cada vértice, y alineadas con su bisectriz. Luego se han resuelto polígonos de este tipo con diferente número de lados y se ha calculado el conjunto ideal de fuerzas sobre los vértices para que resulte el mismo esfuerzo axial de compresión en todo el perímetro. Se ha observado que, al contrario que en el caso anterior, cuando el número de lados del polígono es reducido, la aproximación a la elipse es menor en las zonas de mayor curvatura, donde la excentricidad del arco respecto a la cuerda es mayor. También, como todos los lados del polígono tienen la misma longitud y el mismo esfuerzo axial de compresión, las condiciones de dimensionado en cuanto al pandeo son iguales en todo el perímetro. Por el contrario, las fuerzas necesitan ser más grandes en los vértices con ángulos más cerrados, situados en la zona de mayor curvatura de la elipse, y viceversa.

Se ha comprobado que el problema de plantear polígonos de lados iguales en una elipse tiene múltiples soluciones, cada una con distinto resultado. Así, cuando los ejes principales coinciden con vértices del polígono, la longitud de los lados resulta la mayor de todas las posibles; en cambio, cuando los ejes coinciden con el punto medio de los lados, la longitud resulta la menor de todas las posibles. En este segundo criterio, la diferencia entre la dimensión máxima de la elipse y la del polígono resulta claramente apreciable, y se considera que la solución tiene falta de coherencia geométrica, especialmente si el número de lados es reducido o si la excentricidad de la elipse ε está próxima a la unidad.

Se han configurado unas tablas adimensionales con treinta y seis casos genéricos, a partir de las cuales es posible plantear polígonos de lados iguales, inscritos en elipses con distintas proporciones de semiejes, y su distribución ideal de fuerzas en el plano, de las que resulte un mismo esfuerzo axial de compresión en todos los lados y ausencia total de otros esfuerzos en el plano.

Se ha formulado el sistema de ecuaciones que permite plantear polígonos de lados iguales inscritos en anillos formados por arcos elípticos iguales. Se ha resuelto un caso y se ha calculado la distribución ideal de fuerzas sobre los vértices, observándose que éstas se incrementan a medida que se aproximan a los vértices del polígono regular interior, alrededor del cual se compone el anillo, donde la curvatura de la elipse es mayor.

Se ha formulado el sistema de ecuaciones que permite plantear polígonos de lados iguales inscritos en anillos formados por arcos de circunferencia y elipses distintas alrededor de un rectángulo conocido, donde la distancia máxima entre el anillo y cada lado del rectángulo también es conocida. Para eso, primero se ha formulado la función compuesta que define la geometría de un cuadrante del anillo, a partir de la concatenación de las funciones de cada arco referidas a un mismo origen de coordenadas cartesianas. Luego se han resuelto algunos casos y se ha calculado la distribución ideal de fuerzas sobre los vértices.

Por último, se ha planteado el sistema de ecuaciones que permite diseñar polígonos inscritos en un anillo compuesto cualquiera. Para eso, antes se ha formulado la función del anillo compuesta por la concatenación de las funciones de cada arco referidas a un mismo origen de coordenadas geocéntricas. Luego se ha resuelto un caso en el que también se ha calculado la distribución ideal de fuerzas sobre los vértices. Se ha comprobado que, igual que sucede en los polígonos inscritos en anillos elípticos, la longitud de los lados es mayor cuando uno de los vértices se sitúa sobre el arco de menor radio de curvatura y es menor cuando los vértices se sitúan fuera de esta zona.

Cuando los anillos compuestos en los que se inscriben polígonos de lados iguales tienen continuidad en la curvatura, es decir, están formados por combinaciones de arcos con la mismo radio de curvatura en los puntos de tangencia, según los criterios descritos en el capítulo 4, la variación del ángulo que forman dos lados contiguos es progresiva a lo largo de la sucesión de vértices. Por este motivo, en una distribución ideal, la variación de las fuerzas F_i de las que resulta el mismo esfuerzo axial en todos los lados del polígono también es progresiva. Esto podría favorecer el posterior diseño de la estructura de cables tensados sobre el anillo no circular.

En definitiva, ha quedado demostrado que es posible diseñar polígonos de compresión de lados iguales, inscritos en anillos no circulares, elípticos o compuestos, y calcular una distribución ideal de fuerzas sobre los vértices, de la que resulte el mismo esfuerzo axial en todos los lados y ausencia total de otros esfuerzos en el plano, es decir, se ha conseguido igualar las condiciones óptimas de dimensionado que tienen los polígonos regulares sometidos a fuerzas centrípetas iguales y equidistantes.

iii) Anillos con radios tensados

Se ha analizado el comportamiento mecánico en el plano de un anillo circular sometido a fuerzas radiales, iguales y equidistantes, revisando la formulación existente y completándola con nuevas ecuaciones que permiten calcular los esfuerzos axiales, los momentos flectores y esfuerzos cortantes en el plano del anillo, para un número cualquiera de radios isotensos y equidistantes.

Se ha establecido la relación entre los momentos flectores máximos positivos y negativos en el plano de un mismo tramo en función del número de radios que inciden sobre el anillo.

Se han revisado las fórmulas para calcular el axial crítico en el modo de pandeo global del anillo en su propio plano. **Se ha definido la coacción radial como el efecto que tiene la rigidez axial del conjunto de radios sobre la rigidez a flexión en el plano del anillo. Se ha propuesto un modo de cuantificarla a partir de la formulación de la carga crítica de una barra apoyada sobre un lecho elástico.**

Se han repasado los posibles modos de pandeo en el plano de un tramo de anillo comprendido entre dos radios consecutivos, asimilándolo al de un arco o al de una barra ligeramente curva, en función de la flecha o excentricidad relativa respecto a la cuerda. También, la formulación existente que permite calcular el axial crítico en cada caso. No se ha conseguido determinar de manera concluyente cuál es el modo de pandeo que más se aproxima al que realmente se produciría en el plano de un tramo de anillo, teniendo en cuenta que éste está flectado por el efecto de las fuerzas radiales.

Se ha definido la coacción radial suficiente como aquella que impide el modo de pandeo global en el plano del anillo, esto es, cuando el axial crítico en este modo de pandeo, incluyendo el efecto de la coacción radial, es mayor que el axial crítico de pandeo local en el plano de un tramo de anillo.

Se han planteado diversas distribuciones de fuerzas sobre un anillo elíptico con objeto de que resulten las mejores condiciones para su dimensionado. **Se ha demostrado que, en cuanto a la homogeneización de los diagramas de esfuerzos en todos los tramos del anillo, la**

distribución de fuerzas según tramos equiexcéntricos resulta óptima, ya que permite obtener diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores iguales en todos los tramos. Se ha demostrado que, dentro de un mismo tramo, el diagrama de momentos flectores resultante tiene la misma proporción que el de un tramo de un anillo circular con el mismo número de radios isotensos y equidistantes.

Se ha comprobado que el problema de división de una elipse en tramos equiexcéntricos tiene múltiples soluciones, cada una con distinto resultado. Así, cuando los ejes principales coinciden con puntos de división, la excentricidad máxima resulta la menor de todas las posibles; en cambio, cuando estos ejes coinciden con puntos de excentricidad máxima, ésta resulta la mayor de todas las posibles.

Se han configurado unas tablas adimensionales con treinta y seis casos genéricos, a partir de las cuales es posible plantear distribuciones óptimas de fuerzas en el plano de elipses con distintas proporciones de semiejes, según tramos equiexcéntricos.

A partir de la formulación para los anillos circulares, se ha planteado un método aproximado para comprobar el modo de pandeo global de un anillo elíptico teniendo en cuenta la coacción radial. Luego se han expuesto las diferentes situaciones de un arco elíptico en cuanto a su modo de pandeo en función de la excentricidad, resultante de la curvatura y longitud diferente en cada tramo.

Se ha valorado el ámbito de aplicación de la distribución de fuerzas según tramos equiexcéntricos, frente a la distribución que divide el anillo en tramos de la misma longitud, esto es, cuando la longitud de los tramos más largos es suficientemente pequeña como para que el pandeo no condicione su dimensionado, más de lo que lo hace en los tramos más cortos.

Se ha planteado un sistema de ecuaciones que permite distribuir fuerzas según tramos equiexcéntricos en anillos compuestos por arcos elípticos iguales alrededor de polígonos regulares. Se ha resuelto un caso y se ha observado que las fuerzas incrementan progresivamente a medida que se aproximan a las zonas del anillo con mayor curvatura, alrededor de los vértices del polígono interior.

Se ha formulado un método para calcular la excentricidad de un arco compuesto por dos curvas tangentes definidas con dos funciones distintas. Después, se ha planteado un sistema de ecuaciones para calcular la distribución de fuerzas según tramos equiexcéntricos en anillos compuestos por arcos de dos elipses distintas y una misma circunferencia osculatriz alrededor de un rectángulo. Se ha resuelto un caso y se han obtenido diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores iguales en todos los tramos.

Se ha planteado un sistema de ecuaciones para calcular la distribución de fuerzas según tramos equiexcéntricos de un anillo cualquiera compuesto por arcos de elipses y circunferencias distintas. Se ha resuelto un caso de un anillo formado por arcos de dos elipses distintas y dos circunferencias también distintas alrededor de un segmento, y se han obtenido diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores iguales en todos los tramos.

Se ha demostrado que, igual que sucede con los anillos elípticos, el problema de división de los anillos compuestos en tramos equiexcéntricos tiene múltiples soluciones con diferentes resultados. Así, cuando el inicio de la división se sitúa en el punto de máxima curvatura o, en

su caso, en el punto medio del arco circular de radio menor, la excentricidad máxima resulta la menor de todas las posibles, en cambio, si ese mismo punto de máxima curvatura es también el de máxima excentricidad, ésta resulta la mayor de todas las posibles.

Por último, se ha demostrado que, para plantear una distribución óptima de fuerzas según tramos equiexcéntricos, no es una condición necesaria que los anillos estén compuestos mediante combinaciones de arcos de elipses y circunferencias según los criterios expuestos en el capítulo 4 de esta tesis, es decir, con continuidad de curvatura en todos los puntos, incluidos los de tangencia. Aun así, se ha comparado la distribución de fuerzas según tramos equiexcéntricos en un anillo compuesto por combinaciones de arcos de elipses y circunferencias con la de uno compuesto sólo por circunferencias tangentes, guardando las mismas dimensiones máximas. Se ha observado que, en el primero, la variación de las fuerzas y su separación es progresiva y proporcional a la variación de la curvatura, mientras que, en el segundo, las fuerzas que dividen tramos equiexcéntricos de un mismo arco se mantienen constantes, pero varían bruscamente en el arco contiguo, a partir del punto de tangencia. Se ha comentado que la variación progresiva de las fuerzas que se produce en el caso de los anillos compuestos según el criterio de continuidad de curvatura podría resultar una ventaja en el diseño del trazado de los cables tensados sobre un anillo no circular.

En definitiva, **ha quedado demostrado que es posible distribuir fuerzas en el plano de anillos de compresión no circulares, elípticos o compuestos, de manera que resulten diagramas de esfuerzos axiales y de momentos flectores iguales en todos los tramos, igualando las condiciones de dimensionado, en cuanto a esfuerzos de primer orden, que tienen los anillos circulares con radios isotensos y equidistantes. También se ha demostrado que no es posible igualar, simultáneamente a los diagramas de esfuerzos, las condiciones de pandeo en todos los tramos de un anillo no circular.**

iv) Resumen

Elementos rígidos		Elementos tensados					
		Membrana			Cables		
Forma	Fuerza	Esfuerzos	Pandeo	Fuerzas	Esfuerzos	Pandeo	
Anillos Circulares	Distribuida uniforme	Axil puro de valor uniforme			Puntuales, iguales y equidistantes	Diagramas de axiles y momentos flectores iguales en todos los tramos	
		Coacción radial uniforme		Coacción radial uniforme. Condiciones iguales en cada tramo			
	Compuestos	Distribuida variable	Coacción radial no uniforme		Puntuales, distribuidas según tramos equiexcéntricos	Coacción radial <i>a priori</i> no uniforme. Condiciones distintas en cada tramo	
Polígonos regulares	de ángulos y lados iguales	-					
Polígonos irregulares							

Tabla 7.1: Cuadro-resumen de resultados y objetivos alcanzados.

Apartado 7.2: Aplicaciones

j) Arquitectónicas

Si bien en esta tesis no se desarrolla un método de diseño completo de una estructura tensada, la composición de anillos no circulares y el posterior planteamiento de distribuciones de fuerzas en su propio plano, continuas o puntuales, según criterios de minimización de sus

efectos en el dimensionado, es decir, de optimización, permite iniciar el proceso de diseño de cubiertas tensadas autónomas para grandes espacios de planta no circular.

El ejemplo de aplicación más inmediato sería la cubierta de un estadio o un pabellón de deportes, donde la composición parte siempre del rectángulo que limita la pista o el terreno de juego, alrededor del cual se dispone un graderío, que tiende a ser cada vez más homogéneo en todo el perímetro.

Además, los planeamientos expuestos en esta investigación permiten afrontar el diseño de anillos de compresión para cubiertas sobre espacios más irregulares, como son un estadio de béisbol o una plaza pública, sin que esa irregularidad suponga una desventaja *a priori* para su dimensionado.

ii) Otras aplicaciones

Además de las aplicaciones arquitectónicas mencionadas, la posibilidad de diseñar estructuras de cables o membranas tensadas sobre anillos no circulares con unas condiciones de dimensionado muy parecidas, o incluso iguales, a las que tendría una estructura circular de las mismas características, permite plantear artefactos tales como radares, velas, discos o cualquier otro que se pueda imaginar, cuyas exigencias de ligereza y autonomía necesiten de las prestaciones que ofrecen este tipo de estructuras tensadas y que, además, estén condicionados por una necesaria forma no circular de su perímetro. En cualquier caso, aunque tales objetos no hayan sido inventados aún, o sí, pero sean totalmente desconocidos para el autor, lo que se ha planteado en esta investigación podría servir, sin duda, para optimizarlos.

Como se ha demostrado, el efecto de coacción radial que tiene la rigidez axial de los cables o la membrana tensada sobre un anillo puede ser suficiente para impedir el pandeo global sin necesidad de incrementar la rigidez a flexión en el plano del anillo. Siendo así, sería posible plantear la rigidización de conductos de sección no circular y grandes dimensiones disponiendo planos de membrana o cables tensados que impidan la abolladura de la pared del conducto cuando éste esté sometido a fuerzas externas que lo compriman. Pero antes sería necesario desarrollar una formulación que permita cuantificar de forma exacta, y no aproximada como se hace en esta tesis, el efecto de esta coacción radial en anillos no circulares.

Apartado 7.3: Líneas de continuidad para investigaciones futuras

i) Implementación en programas de diseño paramétrico

Para poder aplicar con facilidad los criterios de diseño expuestos en esta tesis, resultaría interesante programar herramientas que se integrasen en programas de diseño y cálculo de estructuras tensadas. Para eso, habría que encontrar los algoritmos matemáticos más adecuados para resolver rápidamente los sistemas de ecuaciones aquí planteados para el diseño de anillos compuestos, de polígonos inscritos y para el planteamiento de fuerzas radiales según tramos equiexcéntricos.

ii) Otras geometrías no circulares

Los anillos súper elípticos son uno de los pocos tipos, si no el único, donde se había planteado y formulado una solución que integra una geometría no circular con una distribución de fuerzas que evita la aparición flexiones relevantes en su propio plano. Ha quedado pendiente relacionar este caso y su formulación con los planteamientos de distribución de fuerzas sobre anillos compuestos que se hacen en esta tesis. Asimismo queda pendiente la investigación de otras geometrías no circulares que permitan configurar anillos cerrados con continuidad de curvatura en todos los puntos, por ejemplo combinando espirales con arcos de circunferencia.

iii) Disposición en planta de los elementos tensados

Otra línea de continuidad de esta investigación es el estudio de las disposiciones en planta de los elementos tensados, cables y membranas⁶⁰, compatibles con la distribución óptima de fuerzas sobre un anillo de geometría no circular, además del planteamiento de anillos y polígonos de tracción en el interior de la estructura. Con un planteamiento completo de la estructura en planta, se podría desarrollar una formulación para el cálculo exacto de la coacción radial en anillos no circulares⁶¹.

iv) Adecuación del trazado de los elementos tensados

Por último, para obtener un sistema de diseño completo de estas estructuras, habría que estudiar la adecuación del trazado de los elementos tensados, membranas y cables, a la distribución óptima de fuerzas en el plano para cada uno de los tipos de estructura tensada que se pueden equilibrar con anillos de compresión no circulares, a saber: conoides, ruedas lenticulares y dentadas, cúpulas tensadas y cubiertas neumáticas. Para eso habrá que atender a dos factores: la fuerza de tensado y el ángulo de incidencia del elemento tensado con el plano del anillo.

Con un planteamiento tridimensional completo de la estructura, se podrían estudiar fenómenos como la torsión o el alabeo del anillo en función de la coacción de los cables y membranas fuera de su propio plano, y de la disposición de los soportes en el perímetro.

Respecto a los efectos de la acción del viento y de otras acciones variables, habría que comprobar si existen diferencias significativas entre anillos circulares y los no circulares de dimensiones equivalentes. En ese sentido, sería interesante considerar casos de anillos circulares ya construidos.

⁶⁰ Las disposiciones de los elementos tensados no han de ser necesariamente radiales o coincidentes con la orientación de las fuerzas de distribución óptima, sino que también pueden ser mallas trianguladas, romboidales o de cualquier otro patrón estable.

⁶¹ Ha quedado claro que el cálculo de la coacción radial que aquí se expone para los anillos no circulares es sólo una aproximación.

ANEJOS

BIBLIOGRAFÍA

Libros:

- BERGER, H. (2005) *Light Structures, Structures of Light: The Art of Engineering of Tensile Architecture*. Bloomington: AuthorHouse.
- CAPASSO, A.; MAJOWIECKI, M.; PINTO, V. (1993) *Le Tensostrutture a Membrana per l'Architettura*. Rímìni: Maggioli Editore.
- HERNÁNDEZ-LÓPEZ, D. (1997) *Geodesia y Cartografía Matemática*. Valencia: Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- ENGEL, H. (2001) *Sistemas de Estructuras*. Barcelona: Gustavo Gili.
- HERZOG, T. (1977) *Construcciones Neumáticas*. Barcelona: Gustavo Gili.
- OTTO, F. (2005) *Frei Otto: Complete Works: Lightweight Construction, Natural Design*. Basilea: W. Nerdinger, Birkhäuser.
- ORTEGA Y GASET, J. (1933) *Meditación de la técnica y otros ensayos sobre ciencia y filosofía*. Madrid: Revista de Occidente.
- LE RICOLAIS, R. (1997) *Visiones y paradojas*. Madrid: Fundación cultural COAM.
- SUETONIO. *Calígula*.
- TIMOSHENKO, S. (1957a) *Resistencia de Materiales. Primera Parte. Teoría Elemental y Problemas*. Madrid: Espasa-Calpe.
- TIMOSHENKO, S. (1957b) *Resistencia de Materiales. Segunda Parte. Teoría y Problemas más Complejos*. Madrid: Espasa-Calpe.
- TIMOSHENKO, S. (1961) *Teoría de la Estabilidad Elástica*. Buenos Aires: EDIAR Editores.
- WILSON, F. (1975) *Emerging Form in Architecture: Conversations with Lev Zetlin*. Boston: Cahners Publishing Company.

Ponencias, Artículos y Monografías en Revistas:

- ACKROYD, J. A. (2011) Sir George Cayley: The invention of the Aeroplane near Scarborough at the Time of Trafalgar. *Journal of Aeronautical History*. (2011/6), pp. 130-181.
- CASTRO, G.; LEVY, M. (1992) Analysis of the Georgia Dome cable roof. *Computing in Civil Engineering and Geographic Information Systems Symposium*. ASCE 1993, pp. 566-573.
- ESCRIG, F.; SÁNCHEZ, J.; LLORENS, J. (1999a) Monografía. Estructuras en Tracción I. *Star Structural Architecture*. (5).
- ESCRIG, F.; SÁNCHEZ, J. (1999b) Monografía. Estructuras en Tracción II. *Star Structural Architecture*. (6).
- GEIGER, D. (1975) Low-Profile Air Structures in the USA. *Building Research and Practice*. Marzo/Abril, pp. 80-87, doi: <<http://dx.doi.org/10.1080/09613217508550368>>.
- ROMANA, F.; IANNACE, G.; IANNIELLO, C.; IANNIELLO, E. (2014) “Velaria” in Ancient Roman Theatres. Can they have an acoustic role? *Energy and Buildings*. Vol. 95, Mayo, pp. 98-105, doi: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.enbuild.2015.03.010>>.
- KARGON, J. (2013) Baltimore’s Un-built Domed Stadium for 100,000 Spectators: Technology “Transfer” or Technocratic “Collision”. *Proceedings of the 1st International Conference on Architecture and Urban Design (ARUD’13)*. Energy, Environment and Structural Engineering, Series 15, pp-195-201.
- MARTÍN-SÁIZ, R. (2014) Composition of Non-circular Compression Rings with Optimal Behaviour in Radial Tensile Roofs. *Archi-DOCT. The e-journal for the dissemination of*

- doctoral research in architecture*. Vol. 2 (I), pp. 40-49. Disponible online en: <<http://www.enhsa.net/archidoct/>>.
- MERCADER, M. P.; RAMÍREZ DE ARELLANO, A.; OLIVARES, M. (2012) Modelo de Cuantificación de las Emisiones de CO₂ producidas en edificación derivadas de los recursos materiales consumidos en su ejecución. *Informes de la construcción*. Vol. 64, (527), pp. 401-414, doi: <<http://dx.doi.org/10.3989/ic.10.082>>.
- MILLÁS, J. J. (2012) Planeta Japón. *El País Semanal* (1850).
- MONTILLA, R. B. (1969) The Awnings of Roman Theatres and Amphitheatres. *Theatre Survey*. Vol. 10 (01), pp. 75-88, doi: <<http://dx.doi.org/10.1017/S0040557400007419>>.
- NENADOVIC, A. (2010) Development, Characteristics and Comparative Structural Analysis of Tensegrity Type Cable Domes. *SPATIUM International Review* (22), pp. 57-66.
- QUINTAS-RIPOLL, V. (1988) Sobre el Teorema de Maxwell y la Optimización de Arcos de Cubierta. *Informes de la Construcción*. Vol. 40, (400), pp. 57-70, doi: <<http://dx.doi.org/10.3989/ic.1989.v40.i400.1529>>.
- RYDELL, R. W. (2003) World's Columbian Exposition. *Encyclopedia of Chicago*. p. 1386. Disponible en: <<http://encyclopedia.chicagohistory.org/pages/1386.html>>.
- SANTOS-GUERRAS, J. J. (1990) El desarrollo de las Cubiertas Colgantes Pesadas. *Informes de la Construcción*. Vol. 41, (405), pp. 5-18, doi: <<http://dx.doi.org/10.3989/ic.1990.v41.i405.1465>>.
- VEGAS, F.; MILETO, C. (2003) El Espacio, el Silencio y la Sugestión del Pasado. El Santuario de Ise en Japón. *Loggia, Arquitectura & Restauración*. (14-15), pp. 14-41. Disponible en: <<http://ojs.upv.es/index.php/loggia/article/view/3555>>.

Patentes:

- BERGER, H. (1988) *Cable Dome System with Main Cables Oriented Along Chords*. U. S. Patent nº 4,757,650, 19 de julio de 1988.
- BIRD, W. (1973) *Large Air Supported Structures*. U. S. Patent nº 3,744,191 A, 10 de Julio de 1973.
- CASTRO, G. (1999) *Dome Roof Structure and Method of designing and constructing the same*. U. S. Patent nº 5,857,294 A, 12 de enero de 1999.
- FULLER, R. B. (1959) *Geodesic Tent*. U. S. Patent nº 2,914,074, 24 de noviembre de 1959.
- FULLER, R. B. (1964) *Suspension Building*. U. S. Patent nº 3,139,957, 7 de julio de 1964.
- GEIGER, D. (1974) *Roof Construction*. U. S. Patent nº 3,772,836, 20 de noviembre de 1973.
- GEIGER, D. (1974) *Roof Construction*. U. S. Patent nº 3,841,038, 15 de octubre de 1974.
- GEIGER, D. (1988) *Roof Structure*. U. S. Patent nº 4,736,553, 18 de febrero, 1988.
- HELMERS, E. N. (1958) *Air Supported Structure*. U. S. Patent 3,035,590, 22 de mayo de 1962.
- ISHLER, M. (1986) *Fabric Roof Structure*. U. S. Patent nº 4,578,908, 1 de abril de 1986.
- KAWAGUCHI, M. (1993) *Dome Shaped Roof Structure*. U. S. Patent nº 5,371,983, 13 de Julio de 1993.
- LANCHESTER, F. W. (1922) *Construction and Roofing of Buildings for Exhibition and like Purposes*. U. S. Patent 1,402, 077, 3 de enero de 1922.
- LEVY, M. (1993) *Triangulated Roof structure*. U. S. Patent nº 5,259,158, 9 de noviembre de 1993.
- LEVY, M. (1994) *Triangulated Cable Dome with Retractable Roof*. U. S. Patent nº 5,335,641, 18 de octubre de 1994.
- SIMENS, R. *Inflatable Roof Supports Systems*. U. S. Patent nº 6,282,842 B1, 4 de septiembre de 2001.

STEVENS, Jr. H. H. (1944) *Building with air supported roof and method of constructing the same*. U. S. Patent 2,355,248, 8 de agosto de 1944.

Tesis:

SINGH, S. (2004) *Complexities in Conservation of a Temporary Post-War Structure: The Case of Philip Johnson New York State Pavilion at the 1964-1965 World's Fair*. University of Pennsylvania. Disponible online en: <http://repository.upenn.edu/hp_theses/59>.

Internet:

COLUMBIA UNIVERSITY. (1995) *Housing the Spectacle. The Emergence of America's Domed Superstadiums*. Nueva York.
<<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/domes.html>> (consultado en septiembre de 2013).

CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY (2007-2015) *Space Structures Laboratory*. Pasadena.
<<http://www.pellegrino.caltech.edu/>> (consultado en marzo de 2014).

CHICAGO HISTORICAL SOCIETY. (2005) *The Electronic Encyclopedia of Chicago*. Chicago.
<<http://www.encyclopedia.chicagohistory.org/>> (consultado en mayo de 2015).

CITY OF MINOT. (2015) *Minot Memories Blog*. Minot.
<<http://www.minotmemories.com/>> (consultado en junio de 2015).

JANBERG, N.; STRUCTURAE (1998-2015) *Structurae- International Database for Civil and Structural Engineering*. <<http://www.structurae.net>> (consultado entre marzo y abril de 2015).

SASTRE, R. *Prof. Ramon Sastre*. <<http://tecno.upc.edu/profes/sastre/>> (consultado en abril de 2015).

TENSI NET ASSOCIATION. (2001-2015) *TensiNet*. <<http://www.tensinet.com/>> (consultado entre abril y junio de 2015).

THORNTON TOMASETTI. *Utica Memorial Auditorium*. Nueva York.
<<http://www.thorntontomasetti.com/>> (consultado en mayo de 2015).

UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA, SCHOOL OF DESIGN. *The Architectural Conservation Laboratory*. Philadelphia. <<http://www.conlab.org/>> (consultado en mayo de 2015).

WEISSTEIN, E. W.; WOLFRAM RESEARCH (1999-2015). *Wolfram MathWorld*. Oxfordshire.
<<http://mathworld.wolfram.com/>> (Consultado entre septiembre de 2013 y enero de 2015).

WIKIMEDIA FOUNDATION. (2003-2015). *Wikipedia. The Free Encyclopedia*. San Francisco.
<<http://.wikipedia.org>> (consultado entre septiembre de 2013 y junio de 2015).

MODELOS DE CÁLCULO

A continuación se muestran imágenes extraídas de las hojas y los modelos de cálculo más representativos de los realizados por el autor durante el desarrollo de esta tesis.

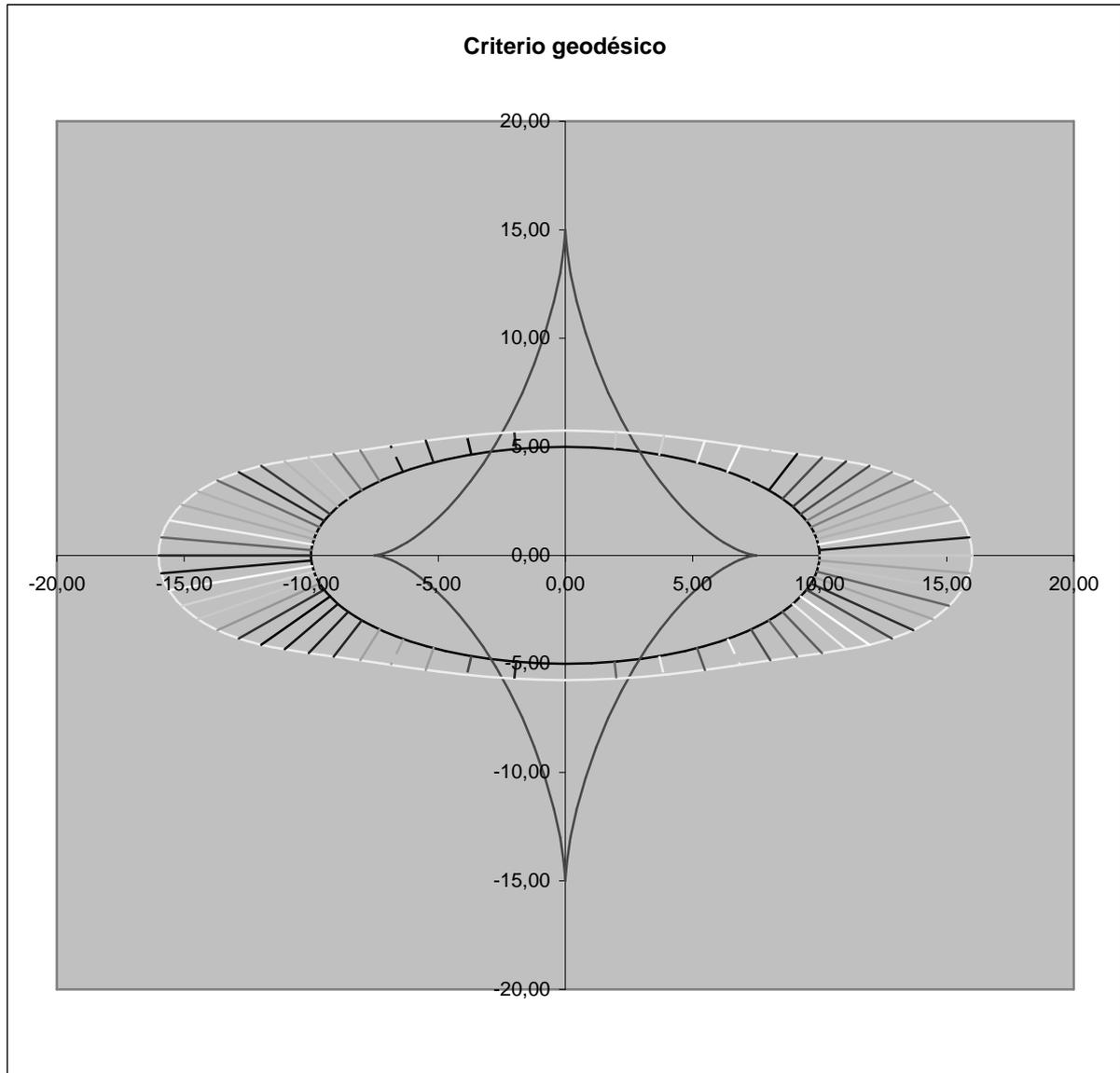
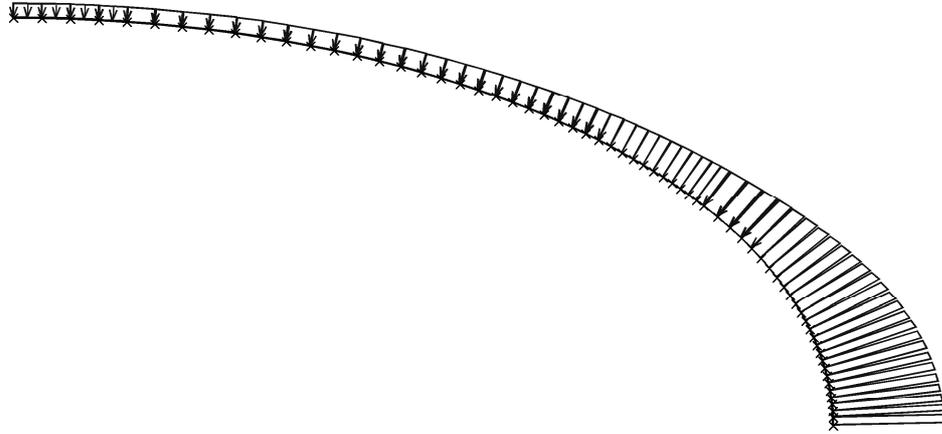


Figura A1: Representación de un anillo elíptico con su evoluta y una fuerza distribuida ideal.

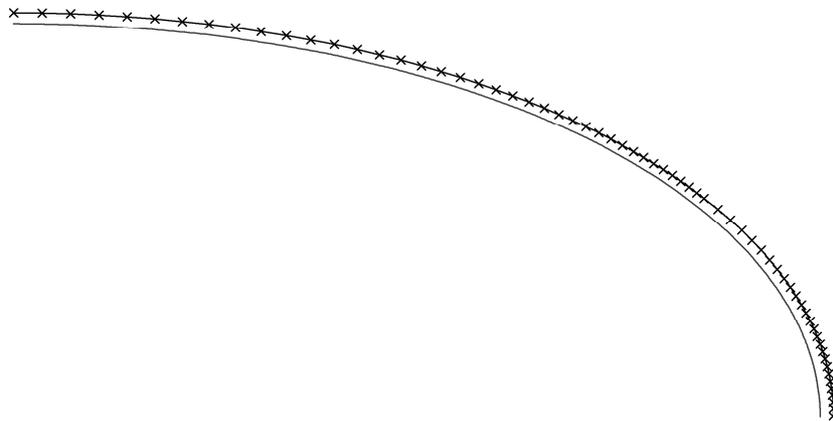


cuadrante_elipse_3.dxf (cuadrante_elipse_4_axil_constante.eva)



WinEva (Versión 7.00)
Acciones (distribuida) - Escala (1/25)

Figura A2: Fuerza distribuida ideal en el plano de un cuadrante de elipse.



WinEva (Versión 7.00)
Deformaciones (distribuida) - Escala (1/25)

Figura A3: Deformada de un cuadrante de elipse con fuerza distribuida ideal aplicada.

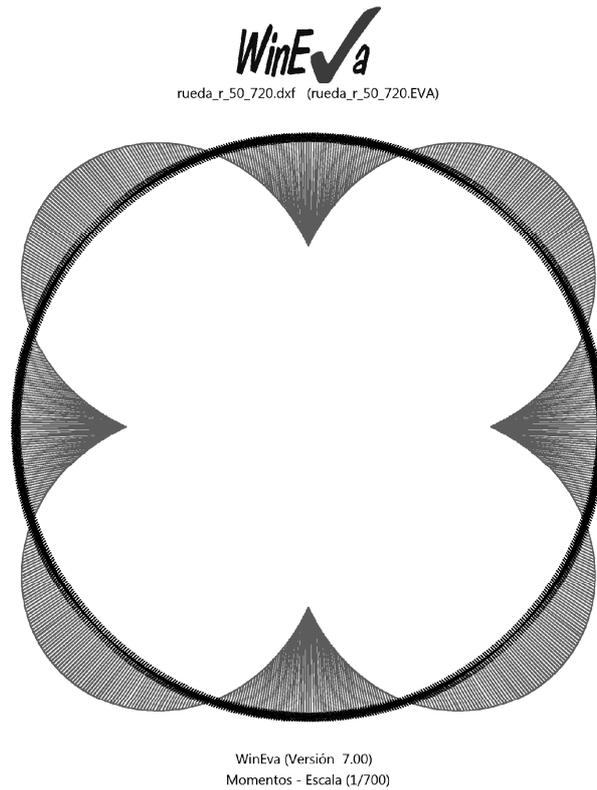


Figura A4: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo circular con cuatro fuerzas iguales y equidistantes.

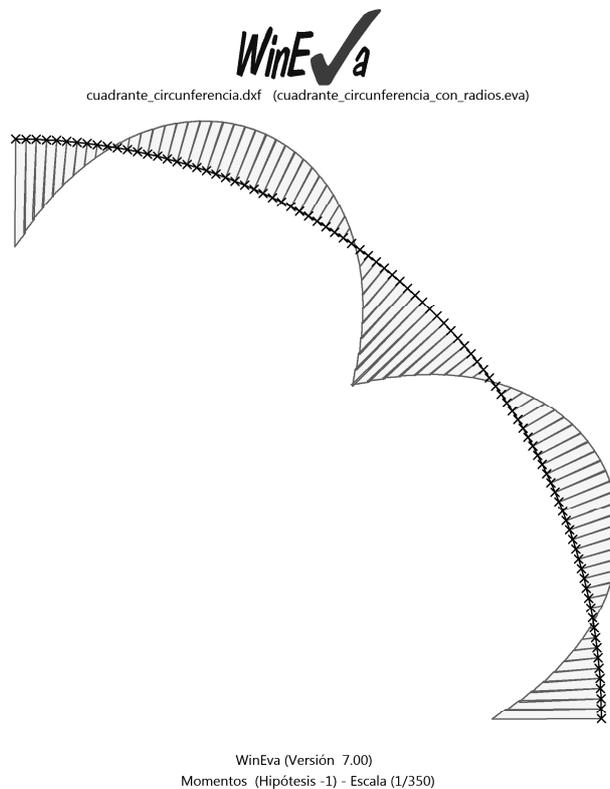


Figura A5: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo circular con ocho fuerzas iguales y equidistantes.

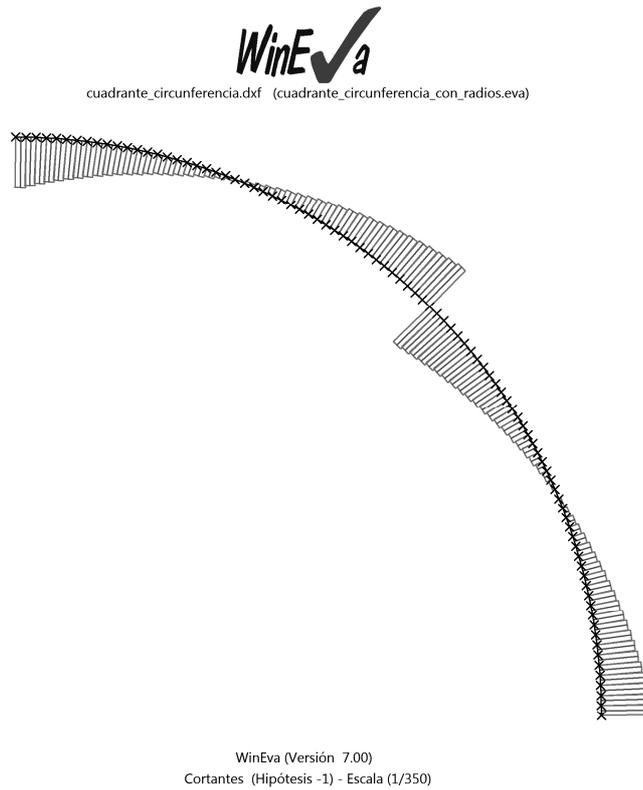


Figura A6: Diagrama de esfuerzos cortantes en el plano del cuadrante de un anillo circular con ocho fuerzas iguales y equidistantes.

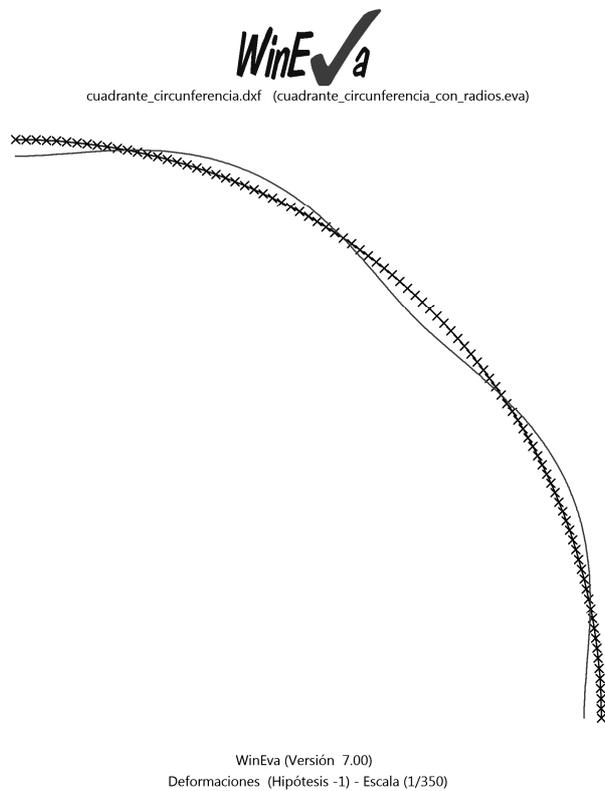
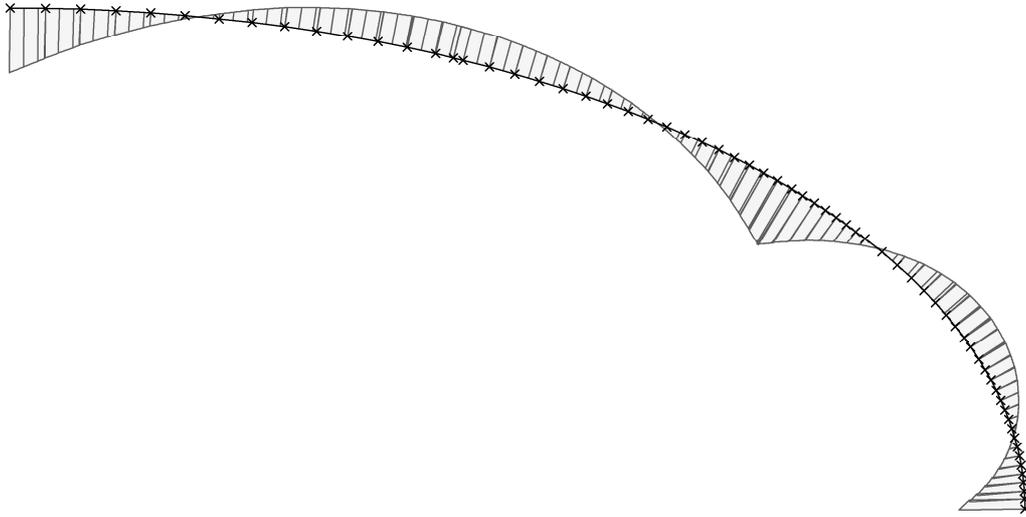


Figura A7: Deformada en el plano del cuadrante de un anillo circular con ocho fuerzas iguales y equidistantes.

WinE✓a

cuadrante_elipse_3.dxf (cuadrante_elipse_5_equiexcentrico.eva)

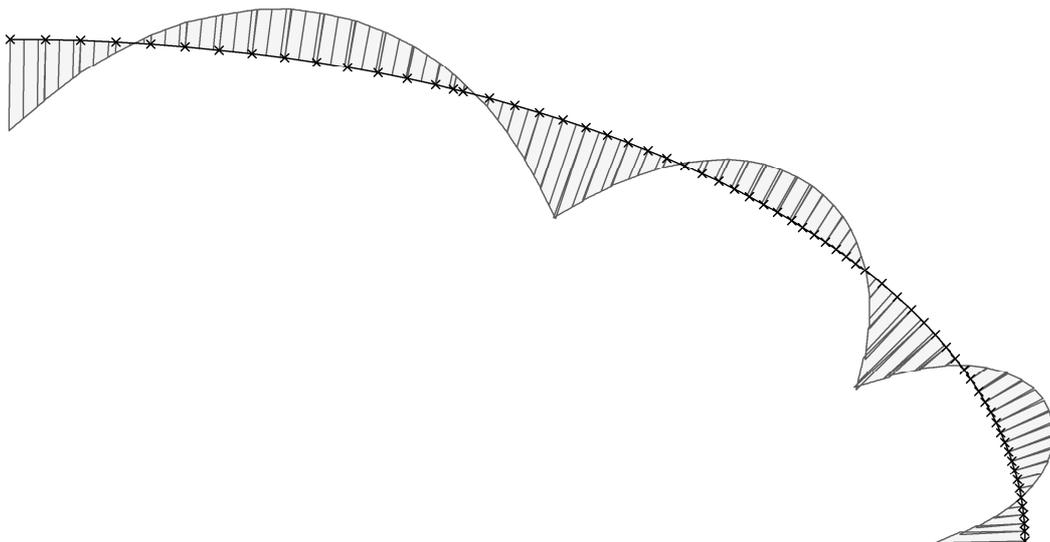


WinEva (Versión 7.00)
Momentos (2_tramos) - Escala (1/20)

Figura A8: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=2$ con distribución óptima de ocho fuerzas según tramos equiexcéntricos.

WinE✓a

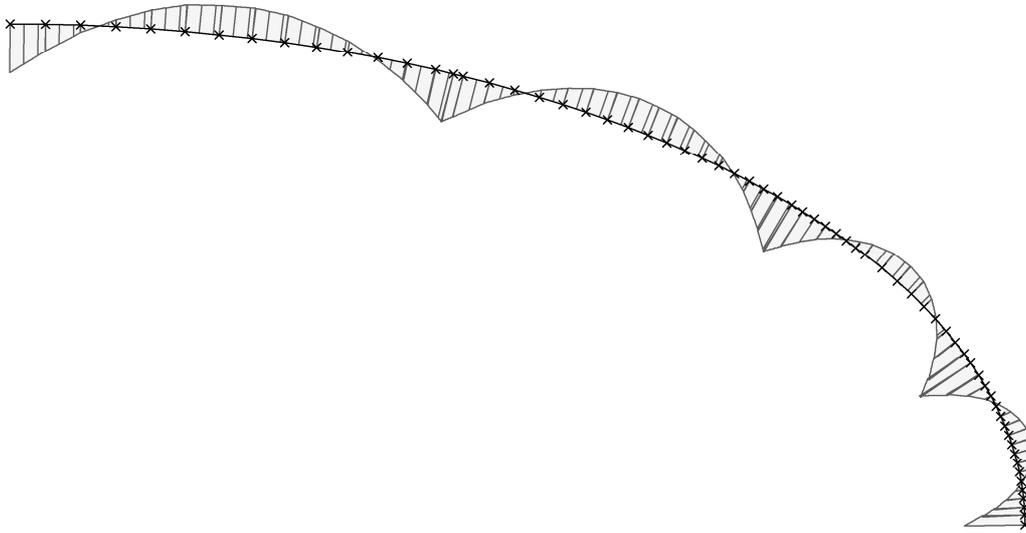
cuadrante_elipse_3.dxf (cuadrante_elipse_5_equiexcentrico.eva)



WinEva (Versión 7.00)
Momentos (3_tramos) - Escala (1/20)

Figura A9: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=2$ con distribución óptima de doce fuerzas según tramos equiexcéntricos.

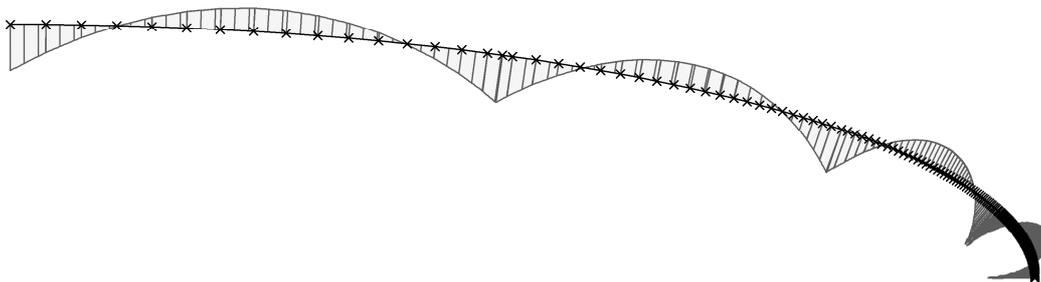
WinE√a
cuadrante_elipse_3.dxf (cuadrante_elipse_5_equiexcentrico.eva)



WinEva (Versión 7.00)
Momentos (4_tramos) - Escala (1/20)

Figura A10: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=2$ con distribución óptima de dieciséis fuerzas según tramos equiexcéntricos.

WinE√a
cuadrante_elipse_2_5-5.dxf (cuadrante_comparativo.eva)



WinEva (Versión 7.00)
Momentos (equiexcéntricos) - Escala (1/200)

Figura A11: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo elíptico $a/b=4$ con distribución óptima de dieciséis fuerzas según tramos equiexcéntricos.

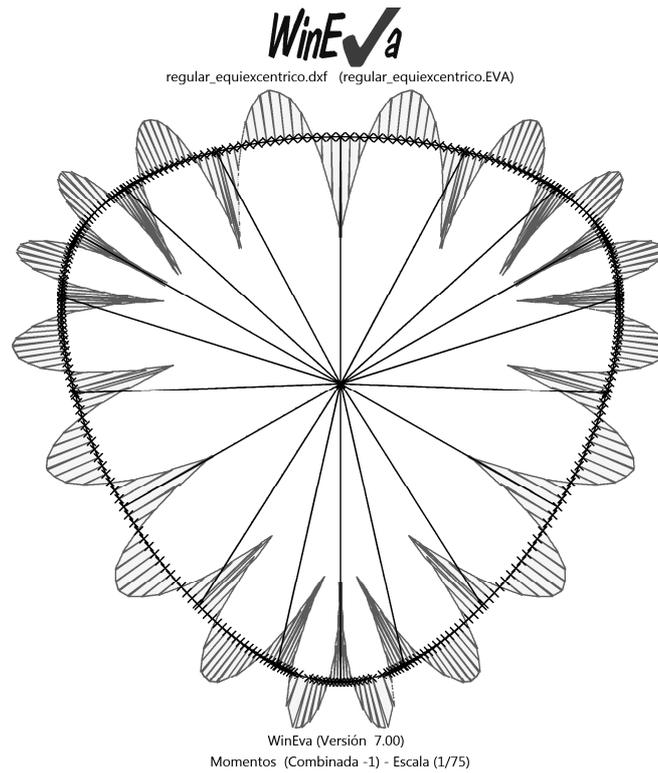


Figura A12: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por tres arcos de elipses iguales alrededor de un triángulo equilátero aplicando una distribución óptima de dieciocho fuerzas según tramos equiexcéntricos (no se representan radios sino barras auxiliares).

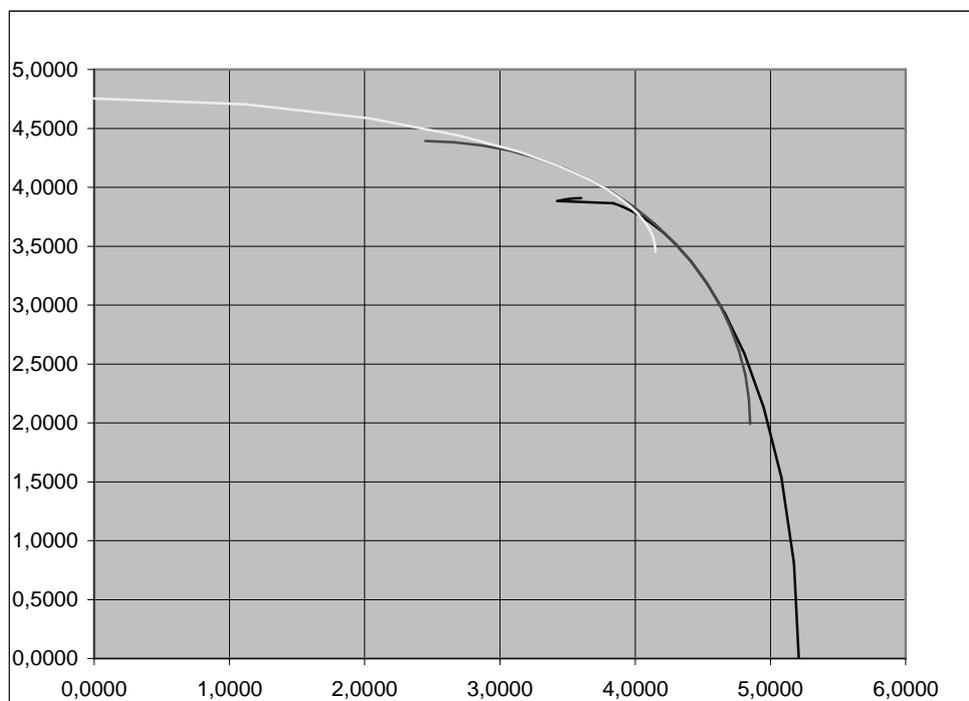
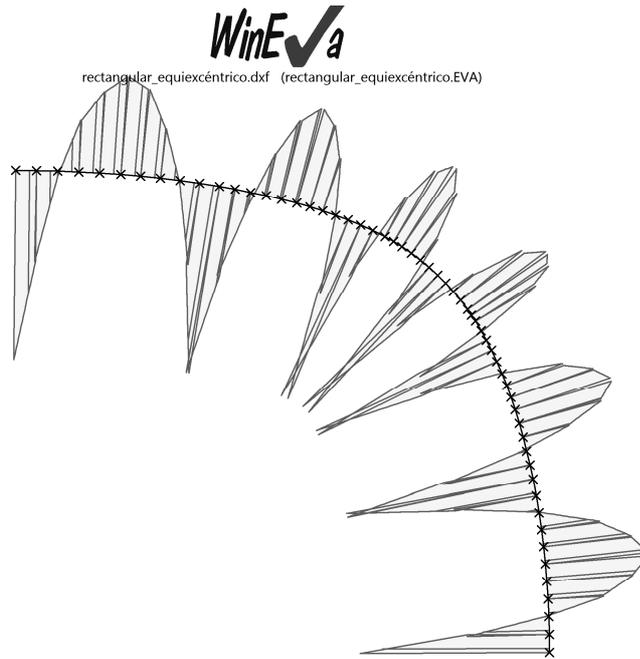
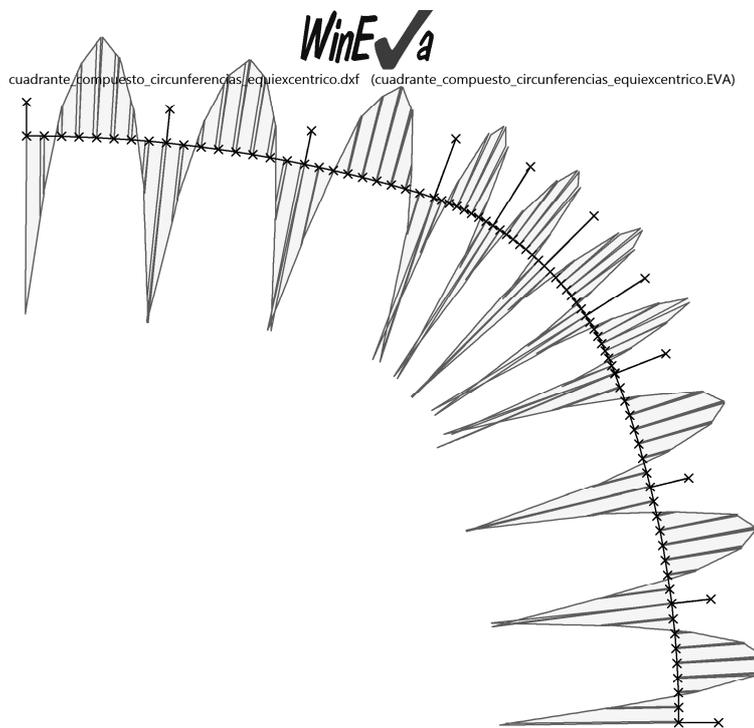


Figura A13: Representación de un cuadrante de anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias alrededor de un rectángulo.



WinEva (Versión 7.00)
Momentos - Escala (1/40)

Figura A14: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un anillo compuesto por arcos de elipses y circunferencias alrededor de un rectángulo aplicando una distribución óptima de veinticuatro fuerzas según tramos equieixcéntricos.



WinEva (Versión 7.00)
Momentos - Escala (1/40)

Figura A15: Diagrama de momentos flectores en el plano del cuadrante de un compuesto por circunferencias distintas alrededor de un rectángulo aplicando una distribución óptima de veinticuatro fuerzas según tramos equieixcéntricos.

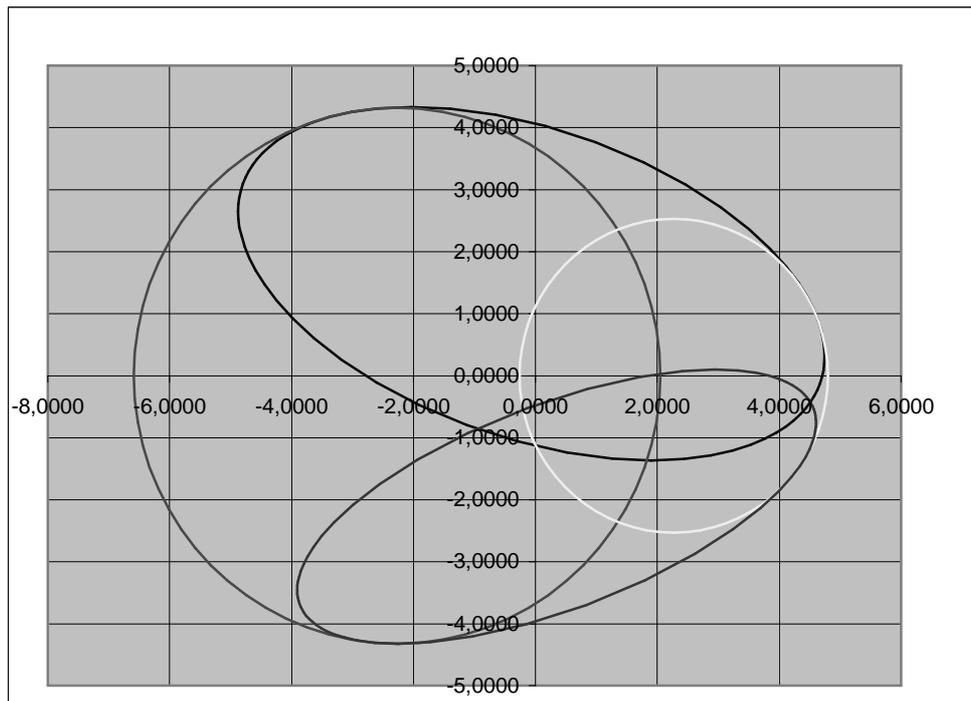


Figura A16: Representación de un anillo compuesto por arcos de dos elipses y dos circunferencias distintas alrededor de un segmento.

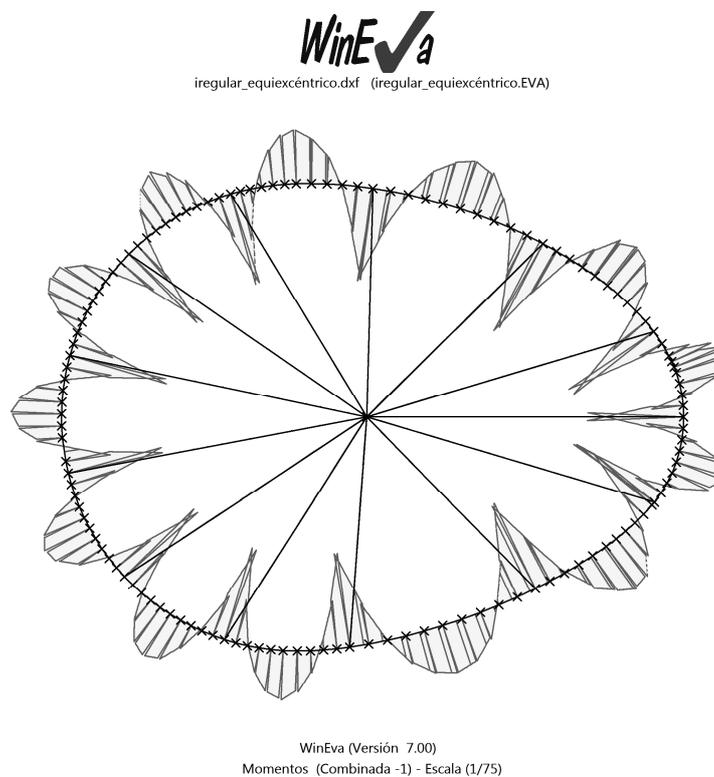


Figura A17: Diagrama de momentos flectores en el plano de un anillo compuesto por arcos de dos elipses y dos circunferencias distintas alrededor de un segmento aplicando una distribución óptima de doce fuerzas según tramos equiexcéntricos (no se representan radios sino barras auxiliares).