Universitat Autònoma de Barcelona

EL DESENVOLUPAMENT DE LA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA A ITÀLIA

Miriam Alcalá Vicente

Universitat Autònoma de Barcelona

CENTRE D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA (CEHIC)

EL DESENVOLUPAMENT DE LA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA A ITÀLIA

TESI DOCTORAL

presentada per

Miriam Alcalá Vicente

dirigida per

Agustí Reventós Tarrida

Programa Interuniversitari de Doctorat en Història de la Ciència (UAB-UB)

Maig 2017

Al Dídac i a l'Aleix,
que no perdin mai la curiositat.

Agraïments

Aquesta tesi doctoral ha estat possible gràcies, en primer lloc, al suport i la motivació que m'ha donat el meu director Agustí Reventós i Tarrida. Tot i les seves dificultats personals, sempre he pogut comptar amb ell per superar els entrebancs que han anat sorgint. La manera com les seves explicacions converteixen les matemàtiques més complicades en conseqüències clares i naturals, no ha deixat de sorprendre'm i m'ha fet recuperar la il·lusió de saber més. Li vull agrair molt especialment que confiés en la meva capacitat per dur a terme aquesta feina, encara que la meva situació personal i laboral no era la més propícia, ja que ha estat justament l'empenta que necessitava per realitzar-la.

Recordar també les indicacions inicials que ens va aportar Carlos J. Rodríguez, plenes d'entusiasme, que em van fer interessar-me pel tema, i lamentar que per raons personals no hagi pogut participar en tot el procés.

Vull agrair a Umberto Botazzini la seva desinteressada acollida de dos mesos a la Universitat degli Studi di Milano, i que compartís amb nosaltres la seva àmplia experiència. Les trobades amb ell al principi de la nostra recerca van ser fonamentals per guiar-les pel camí encertat. A Rossanna Tazzioli qui, encara que només va coincidir amb mi uns breus instants als Archives de l'Académie des Sciences de París, va tenir la gran consideració d'enviar-me la seva publicació de les cartes de Beltrami a Betti, Tardy i Gherardi, que ens ha resultat especialment útil en la redacció de la biografia de Beltrami. Sense oblidar el tracte amable i servicial amb que em va tractar en tot moment el personal tant dels arxius de París com de la biblioteca de Caen.

Als doctors del CEHIC que m'han escoltat en les sessions de seguiment durant aquests anys, Jesús Mª Galech, Agustí Nieto, Mª Rosa Massa i Xavier Roqué, per les seves aportacions constructives que sens dubte han ajudat a perfilar i enriquir aquesta tesi. I al coordinador del doctorat, Jorge Molero, que sempre m'ha facilitat les gestions i m'ha informat amb diligència i eficàcia.

Finalment, no vull oblidar que ha estat imprescindible el suport en el dia a dia de les persones més properes. Vull donar les gràcies, sobretot, al Ferran, el meu company, per haver-me recolçat en la decissió d'emprendre aquests estudis, pels esforços que sempre ha estat disposat a fer perquè continués endavant, per creure en mi i per encoratjar-me en els moments de dubtes.

Tenint en compte que des del primer moment he compaginat els estudis de doctorat amb la feina a Ensenyament, sovint la manca de temps per fer-ho tot ha estat un problema, que sens dubte a repercutit en la quantitat de temps per dedicar a la família i als amics. Vull agrair als avis la predispoció incondicional per tenir cura dels meus fills sempre que ha estat necessari, deixant-me amb la tranquilitat de saber-los cuidats i estimats. I als meus amics, el saber comprendre i perdonar les meves absències.

Resum

La tesi doctoral que presentem se situa en el moment de la renaixença de la geometria no euclidiana, que es va iniciar cap a l'any 1860, i pretén explicar el procés de difusió, desenvolupament i acceptació de la nova geometria que es va donar a Itàlia. La nostra recerca s'ha basat en la correspondència, publicada i inèdita, entre els protagonistes i en l'estudi de les seves obres sobre la qüestió.

El procés de divulgació de la geometria no euclidiana va ser impulsat per les traduccions que J. Hoüel i G. Battaglini van fer de les oblidades obres de Bolyai i Lobatxevski. Veurem que el paper dels dos matemàtics va ser fonamental en el posterior desenvolupament de la nova geometria.

La reaparició de la geometria no euclidiana va ocasionar un interessant debat sobre si devia ser acceptada o no. Amb la presentació dels models del disc de Beltrami, el 1868, i de Klein, el 1871, es van aportar els arguments necessaris per finalitzar la discussió, ja que constituïen una prova de la consistència relativa de la nova geometria.

Un dels objectius principals de la tesi és mostrar que les aportacions de Giuseppe Battaglini en el camp de la geometria no euclidiana van més enllà de la divulgació, que és el mèrit que li acostumen a atribuir els historiadors. Al final del seu article *Sulla geometria imaginaria di Lobatschewsky*, ens trobem amb una inesperada coincidència entre la descripció que ell fa del pla no euclidià i el model del disc donat per E. Beltrami. Ens proposem justificar la semblança entre les dues interpretacions.

L'anàlisi de l'escrit de Battaglini, en el que aclarirem els seus punts confusos, mostrarà que l'autor planteja per primer cop l'opció de considerar la geometria imaginària com a inclosa en la geometria projectiva. Aquesta és

la línia de recerca que posteriorment va seguir F. Klein. La lectura de la correspondència de Battaglini desvelarà que el matemàtic italià ja tenia al seu cap moltes de les idees desenvolupades per Klein.

Per altra banda, veurem que els treballs de Beltrami es basen en la teoria de la geometria diferencial introduïda per Gauss. L'estudi de la geometria no euclidiana de Beltrami parteix d'aplicar els resultats que havia obtingut en un treball previ sobre geodèsia, on resol el problema de fer mapes de manera que les geodèsiques de la superfície vinguin representades per equacions lineals. Veu, llavors, que la geometria de Lobatxevski és la de les superfícies de curvatura constant negativa.

Conclourem explicant que les similituds entre les descripcions de Battaglini i Beltrami a que ens referiem abans, són degudes a que les geometries intrínseques de totes les superfícies de curvatura constant es poden estudiar com a casos particulars de la geometria projectiva, com va senyalar F. Klein a la seva memòria de 1871. Beltrami també va posar de manifest aquesta relació en el seu article de 1873, i sabem per les seves cartes, que n'era conscient uns anys abans, però que no l'havia arribat a desenvolupar. Al nostre estudi, hem descobert que Battaglini ja havia vist el caràcter generalitzador de la geometria projectiva l'any 1867.

Abstract

This PhD thesis is contextualized during the renaissance of non-euclidian geometry, which began towards 1860. It aims to explain the process of diffusion, development and acceptance of the new geometry that took place in Italy. Our research is based on published and unknown correspondence between the principal characters and the analysis of their work in the issue.

The dissemination process was driven by the translations of the forgotten works of J. Bolyai and N. I. Lobatschewsky, made by J. Hoüel and G. Battaglini. The paper of both mathematicians in the following development of the new geometry was essential.

The reappearance of the non-euclidian geometry provoked an interesting debate about his acceptance. In this context, the presentation of Beltrami's disc model, in 1868, and Klein's, in 1871, gave the required arguments to finish the discussion, since they were a proof of the relative consistence of the new geometry.

One of the main goals of this thesis is to show that the contributions of Giuseppe Battaglini in the field of non-euclidean geometry go further than divulgation, which is the only role historians used to attributed him. His article *Sulla geometria imaginaria di Lobatschewsky* ends with a description of the non-euclidian plane which has an unexpected similarity with Beltrami's disc model. We will be able to justify this coincidence.

The analysis of Battaglini's writing, where its confusing points will be also clarified, will show how he suggests regarding the imaginary geometry as included in the projective. This is the way followed by Klein some years later. The reading of Battaglini's correspondence will reveal that he had inside his head much of the ideas developed by Klein.

On the other hand, Beltrami's works are based on the differential geometry theory introduced by Gauss. Beltrami's study on the non-euclidean geometry starts by applying the results he obtained in a previous work on geodesy, where he solves the problem of mapping surfaces in such a way that their geodesics lines were represented by lineal equations. He saw then that Lobatschewsky's geometry was the geometry of a surface of constant negative curvature.

As a conclusion, we will explain that the similarities between Battaglini's and Beltrami's descriptions mentioned above, are due to the fact that intrinsic geometries of all surfaces with constant curvature can be considered as particular cases of projective geometry, as Klein pointed out on his 1871 memoir. Beltrami also stated this relation in his article from 1873. Actually, his letters show he was aware of it some years before, but he didn't arrive to develop the idea. In our study, we have discovered that Battaglini had already seen the generalising aspect of projective geometry in 1867.

Índex

Introducció

La història de la geometria no euclidiana comença gairebé amb la mateixa aparició dels *Elements* d'Euclides. Ja en temps d'Aristòtil hi havia discussions sobre si el postulat de les paral·leles era un axioma necessari per construir els coneixements geomètrics d'una manera rigorosa. La creença de que el postulat es devia poder demostrar a partir dels altres axiomes i per tant, passar a ser considerat com un teorema, va mantenir molts grans matemàtics ocupats en aquesta empresa fins ben avançat el segle XIX.

Quan finalment, les recerques presentades per J. Bolyai i N. I. Lobatxevski a la segona dècada del segle, donen una solució a la qüestió, aquestes no van tenir la repercusió que la seva transcendència mereixia. Essencialment, perquè la seva conclusió és justament contrària a la que es buscava, doncs proven la impossibilitat de demostrar el postulat de les paral·leles.

El descobriment dels dos geòmetres va passar pràcticament desapercebut, durant més de 30 anys, fins que l'any 1860, es va començar a publicar la correspondència de Gauss. El coneixement de que el cèlebre matemàtic, havent-se ocupat també del tema, elogiava els seus treballs i a més, compartia les seves conclusions, va fer que la comunitat matemàtica s'interesés per aquestes obres i que fosin rescatades de l'oblit.

Aquest és el punt de partida del procés de renaixença de la geometria no euclidiana, que va ser impulsat a França i a Itàlia per les traduccions de les obres al·ludides i la difusió de les noves idees, dutes a terme per G. J. Hoüel i G. Battaglini. El paper dels dos matemàtics va ser fonamental en el posterior desenvolupament de la geometria no euclidiana. Només un any després que apareguessin les primeres traduccions, el 1867, Beltrami descubreix, basant-se en la geometria diferencial de Gauss, que la geometria no euclidiana es pot donar en les superfícies de curvatura constant negativa. D'aquesta manera, proporciona la primera interpretació de la geometria no euclidiana. Poc després, el 1871, Klein donarà la seva interpretació projectiva.

En el moment de la seva primera aparició, la comunitat científica havia estat molt contrària a acceptar la geometria que resultava de la negació del postulat. Saccheri, fins i tot hàvia rebutjat els seus resultats, encara que no havia trobat cap contradicció lògica. En aquesta actitud té un gran pes la filosofia kantiana, que en considerar que la geometria euclidiana era un conjunt de veritats absolutes i a priori, feia impossible ni tan sols insinuar que es pogués donar una geometria que negués el postulat. Però, quan Hoüel i Battaglini la van tornar a treure a la llum, una gran part de la comunitat científica havia canviat el seu punt de vista epistemològic. El principal impediment era si es podia acceptar una geometria que encara que fos lògicament coherent no estigués d'accord amb la realitat.

Les raons necessàries per admetre la validesa de la nova geometria venen proporcionades per les interpretacions donades per Beltrami i Klein, doncs constituiexen una prova de la seva consistència relativa a la geometria euclidiana o a la projectiva, respectivament. Tot i així, encara restaren algunes veus crítiques. De fet, la reaparició de la geometria no euclidiana va provocar una crisi en els fonaments de les matemàtiques, que no va ser resolta fins a finals de segle amb la reformulació de la geometria donada per Hilbert.

Aquesta tesi doctoral se situa en el moment de la renaixença de la geometria no euclidiana. Concretament, tractarem el procés de difusió, desenvolupament i acceptació que es va donar a Itàlia.

La història de les geometries no euclidianes fins la seva descoberta ha estat àmpliament estudiada. Entre la bibliografia més reconeguda, en la que ens basat per aquest treball, trobem els treballs de R. Bonola [26], B. A. Rosenfeld [91] i J. Gray [48]. Però a excepció de la publicació de J.D. Voelke [100], s'ha escrit ben poca cosa sobre el procés de difusió i desenvolupament que va tenir lloc abans d'arribar a les primeres interpretacions de Beltrami i Klein. Respecte aquest llibre, la tesi suposarà una extensió en la descripció del context italià i del desenvolupament de la nova geometria en aquest pais.

Amb la intenció d'aportar més llum sobre com aquests autors van arribar als seus resultats, ens vam introduir en l'estudi dels traductors, J. Hoüel i G. Battaglini. Interessant-nos particularment per l'italià, atrets inicialment per la seva proximitat a E. Beltrami i pel fet de que hagués publicat també un escrit propi sobre la geometria de Lobatxevski [8]. La lectura d'aquest article aviat ens va desvelar que la seva labor no es va limitar a la traducció i la difusió com sempre se li havia atribuit. Concretament, al final de l'escrit Battaglini fa una descripció del pla no euclidià que recorda molt a la interpretació del disc donada per Beltrami, a la que actualment ens referim com a model de Klein. Així un dels principals objectius de la tesi ha estat explicar la relació entre les recerques que van fer aquests tres matemàtics sobre la geometria no euclidiana. Centrant-nos sobretot en els dos italians, en els capítols 4 i 5, hem analitzat els seus treballs sobre la qüestió, exposant les seves aportacions.

Els treballs de Beltrami *Saggio d'interpretazzione* [15] i *Teoria fondamentale* [16] s'han comentat en moltes ocasions, nosaltres hem consultat, principalment, [23], [96] i [100]. També els de Klein han estat sovint analitzats, encara que només [64] està traduït de l'alemany, hem consultat: [2] i [96]. Tindran, llavors, especial interés els comentaris que fem sobre el *Risoluzzione* [14] i l'*Osservazione* [18] de Beltrami, i el *Sulla geometria imaginaria* [8] de Battaglini, ja que són obres menys conegudes que no han estat analitzades en profunditat. L'article de Battaglini presenta la dificultat afegida de la falta de claredat en l'exposició. En l'últim apartat del capítol 4, aportarem algunes explicacions necessaries per poder comprendre'l millor i senyalarem els punts més rellevants del treball. Ampliarem així de manera substancial la lectura feta per Voelke a [100], que fins ara és, al nostre entendre, la més detallada. En particular, justificarem la fórmula que Voelke considera falsa, erròniament segons el nostre parer, mitjançant els possibles raonaments matemàtics contemporanis i els aclariments que el mateix Battaglini va fer a Hoüel a una carta inèdita.

La lectura de correspondència entre els protagonistes ha estat una font imprescindible en la nostra recerca. Les cartes escrites per Beltrami ens va guiar, en primer lloc, en la investigació sobre la via de descobriment de Beltrami, a més d'aclarir detalls sobre els seus treballs i el procés que va seguir en la seva acceptació de la geometria imaginària de Lobatxevski. La majoria de correspondència de Beltrami que hem llegit, es troba publicada a [46] i a [23], on en la introducció podem llegir a més, un excel·lent comentari sobre les aportacions del matemàtic italià. Hem consultat també els manuscrits originals de les cartes enviades a Hoüel que es troben als Archives de l'Académie des Sciences de Paris, així com a l'*Archive Hoüel* de la Bibliothèque

Municipale de Caen, on vam trobar dues cartes inèdites que completarien el recull de la correspondència de Beltrami a Hoüel.

De la mateixa manera, les cartes escrites per Battaglini ens van mostrar els seus interessos i línea de recerca, la seva manera de ser i de pensar, donant-nos a la vegada, informació rellevant que ens ha ajudat a desvelar el perquè de la seva acceptació immediata de les noves idees. La majoria de la seva correspondència es troba publicada a [30] i algunes cartes més a [33]. Igualment, hem pogut consultar les cartes originals a Hoüel als Archives de l'Académie des Sciences de Paris, i també en aquesta ocasió ens hem topat amb algunes cartes inèdites rebudes per Hoüel a l'*Archive Hoüel* de la Bibliothèque Municipale de Caen.

La correspondència ens va portat també a descobrir la rellevància en la nostra història de J. Hoüel, que hem tractat en el capítol 2 per tal de mantenir un ordre cronològic. El matemàtic francès era molt considerat entre la comunitat matemàtica italiana, els seus treballs es publicaven sovint a les revistes italianes i mantenia contacte amb la majoria dels matemàtics rellevants. La reputació de Hoüel no ve només de les seves traduccions, sinó també dels seus treballs sobre els fonaments de la geometria [51], [53], [63], [60]. La lectura d'aquestes obres ens ha permés conèixer el seu pensament epistemològic, representatiu d'una part de la comunitat científica, i ens ha introduït en el debat sobre l'acceptació de la geometria no euclidiana. Aprofondir en aquest procés ha estat també un dels nostres propòsits. Al llarg de l'estudi s'exposarà, amb tot el detall i claredat que ens ha estat possible, les opinions dels nostres protagonistes, defensors de les noves idees, que seran contrastades, en el capítol 6, amb les dels principals detractors. De nou en aquest tema, les cartes conservades per Hoüel són una documentació valuosíssima per il·lustrar la discussió. En particular, tant en l'arxiu de París com en el de la biblioteca de Caen, hem pogut accedir a la correspondència rebuda per part de G. Bellavitis, el principal opositor de la nova geometria a Itàlia, que és completament inèdita, a excepció d'una carta publicada a l'apèndix de [23].

En aquests arxius hem pogut llegir altres cartes, no publicades en la seva majoria, de destacables matemàtics italians, com Cremona, Cassorati, Forti, Bertini, D'Ovidio o Padova, que ens ha permés donar una configuració força amplia de la vida científica italiana i completar la visió del context en que es movien els nostres protagonistes. La situació política i social a Itàlia, que descrivim al capítol 3, ve marcada per la revolució davant l'ordre establert i l'ideal de construir un nou estat i va tenir un paper important en l'escena científica, ja que molts matemàtics van contribuir en les reformes educatives des de les institucions.

Finalment, esmentar que també podem trobar correspondència d'altres personatges rellevants en la nostra història com De Tilly, Darboux o Klein, que no hem consultat amb profunditat. Entre els papers que de Hoüel que es conserven a la biblioteca de Caen, figura a més, un preciós manuscrit de la seva traducció del treball de Lobatxevski, [52].

.

Capítol 1

Breu història del descobriment de les geometries no euclidianes

La invenció de les geometries no euclidianes és probablement la fita intelectual més revolucionària del segle XIX. El seu descobriment va acabar amb la idea, acceptada fins llavors per la comunitat científica i filosòfica, de que les matemàtiques són una font de veritat absoluta. La geometria euclidana, considerada com un paradigma de fets inqüestionables i un model per la seva rigorositat, es podia refutar mijançant un sistema axiomàtic-deductiu coherent. La consciència d'aquest problema va mostrar la necessitat de fer una profunda revisió i reconstrucció dels fonaments de les matemàtiques, que culminarà l'any 1899 amb l'obra de Hilbert.

El punt de partida d'aquesta revolució en la filosofia i en les matemàtiques és l'antic postulat de les paral·leles.

1.1 L'herència de la matemàtica grega

Les matemàtiques a la Grècia Clàssica es caracteritzen per utilitzar per primer cop l'argumentació lògico-deductiva per garantir la certesa dels resultats. El concepte demostració, probablement, va sorgir cap al 400 a.C., a l'època dels últims pitagòrics.

Veient que fenòmens naturals diferents mantenien les mateixes propietats matemàtiques, els grecs van començar a aplicar les regles d'aquesta disciplina per entendre els patrons de la realitat física. Pels pitagòrics, concretament, el nombre i les relacions numèriques constituien l'essència de l'univers. Però l'aparició dels nombres irracionals, o magnituds incommensurables, com a conseqüència de l'anomenat teorema de Pitàgoras, va suposar un canvi en aquesta filosofia. En adonar-se de que no hi ha una unitat comú que pugui mesurar la diagonal i el costat d'un quadrat de manera exacta, o el que és el mateix, la diagonal no és "conmensurable" amb el costat, van trobar una contradicció amb la teoria de la proporció pitagòrica, que suposa que tot es pot mesurar amb la mateixa unitat i proporcions d'aquesta. Desapareix, conseqüentment, la possibilitat de poder mesurar-ho tot amb exactitud.

La incapacitat de l'aritmètica per resoldre la qüestió de la mesura dels irracionals va impulsar l'ús de la construcció geomètrica com a eina de raonament. Però, la incommesurabilitat no es pot comprovar de manera empírica, no es pot decidir si un segment es pot o no mesurar exactament amb un altre i les seves particions de manera visual o física, cal utilitzar raonaments teòrics basats en el pensament intelectual pur.

Els mètodes de raonament suposen una de les principals preocupacions per la filosofia platònica. Plató va ressaltar la necessitat de demostracions deductives, a partir d'uns principis acceptats, per arribar al coneixement veritable. També observa que les matemàtiques es serveixen del pensament i no dels sentits. En aquesta disciplina es fan servir unes figures considerades com un intermig entre els objectes sensibles i les idees. Els objectes matemàtics a diferència de les coses físiques, són independents de l'experiència. No tenen res material, són eterns i inamovibles, però no són únics com les idees; és a dir, podem dibuixar molts triangles, però la idea de triangle és única. Així Plató considera que les matemàtiques són un entrenament per la ment, una preparació per arribar al coneixement del món de les idees.

Amb la filosofia platònica s'instaura, llavors, la idea de que el conjunt de veritats, del que les matemàtiques en formen part, no es troba al món experimental i canviant, només s'hi pot arribar per mitjà de la deducció a partir de premises correctes. Per tant, cal incorporar l'argument deductiu a aquesta disciplina, davant d'altres tècniques com l'observació i l'experimentació. La demostració s'estableix, doncs, com a un paradigma d'actuació lligat a les matemàtiques, que ha continuat fins als nostres dies. Els *Elements* d'Euclides van suposar la culminació d'aquesta filosofia.

Cap a l'any 300 a.C. el gran geòmetre grec Euclides tractà de recopilar i ordenar lògicament els nombrosos resultats de geometria coneguts en el seu temps. D'aquesta voluntat sorgiran els *Elements* ($\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\hat{\iota}\alpha$), considerada una obra mestre de la deducció lògica i un model a seguir per la seva rigurositat.

Com acabem de dir, el coneixement matemàtic s'obtenia mitjançant raonaments lògics a partir de teoremes ja coneguts, que a la seva vegada provenien d'altres teoremes coneguts, i així successivament. Es feia necessari, doncs, determinar quins eren aquells que havien de servir de punt de partida, calia que fossin uns resultats tan evidents per si mateixos que no calgués demostrar-los.

Euclides comença els Elements amb una llista de definicions, on es descriuen els diferents elements geomètrics[1]:

- Un *punt* és allò que no té parts.
- Una *línea* és una longitud sense amplada.
- Una *superfície* és allò que té longitud i amplada únicament.
- Una *línea recta* és una línea igualment distribuïda respecte als seus punts.

  [..]

I contínua fins a un total de vint-i-tres definicions. També dóna cinc regles lògiques, que anomena *nocions comunes*, com ara:

- Coses iguals a una mateixa cosa són iguals entre elles.
- El tot és més gran que una part.

  [..]

Finalment, dóna cinc postulats que resulten tan evidents per si mateixos que tothom els acceptarà sense necessitat de cap demostració:

[1] Veure la Comferència d'Agustí Reventós, pronunciada amb motiu de la festivitat de Sant Albert Magne, *Un món creat del no-res*, [84], p. 9-12., on es dóna la llista completa de definicions, les nocions comunes i els postulats, que escrivim a continuació.

1. Podem dibuixar línees rectes des de qualsevol punt a qualsevol punt.
2. Podem prolongar una línea recta finita contínuament a una línea recta.
3. Podem descriure un cercle amb qualsevol centre i distància.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. Si una línea recta es tallada per dos de manera que la suma dels angles interiors del mateix costat es menor que dos rectes, en prolongar les dues rectes es tallaran en aquest costat.

A partir d'aquestes definicions, regles i postulats, retroba tots els teoremes de la geometria elemental amb un rigor que va ser considerat un model a seguir durant els segles posteriors.

Els tres primers axiomes ens imposen la condició de que els elements d'estudi s'han de poder construir amb regle i compàs. Observem que a la redacció del segon no es diu que les rectes tenen una llargada infinita. El problema dels incommensurables havia provocat una tendència a defugir la presència de l'infinit. Aristòtil havia abordat la qüestió afirmant que l'infinit només existeix en potència i no en acte. Però diu que la negació d'aquesta existència en la realitat no destorba l'estudi dels matemàtics, ja que només necessiten que allò que és finit pugui ser tan llarg com ells vulguin, és a dir que pugui continuar indefinidament[2].

Amb el quart postulat es volia evitar tota referència al moviment. Si intentem demostrar-lo, la primera cosa que se'ns acudeix és posar un parell d'angles adjacents iguals a sobre d'un altre parell, és a dir, moure'ls[3]. Però això només seria vàlid suposant la invariabilitat de les figures al moure-les per l'espai, o el que és el mateix, l'homegeneitat de l'espai.

Les raons d'Euclides per no fer referències al moviment neix d'una altra discussió contemporànea. El concepte de moviment havia estat molt debatut, arrel de les paradoxes de Zenó[4], que posen de manifest que la noció que es tenia del moviment no era prou clara i que també els intents de dividir l'espai o el temps donen problemes.

[2]Veure: Aristòtil, *Física.* Libro III, Cap. 7, 207b, editorial Gredos, p. 210.
[3]Com senyala Reventós a [84], p. 13.
[4]Les més conegudes són la dicotomia, la de la fletxa que no es pot moure i la d'Aquil·les i la tortuga.

1.2 El problema del 5è postulat

Sens dubte el cinquè postulat és el que ha generat més controversia i dedicació al llarg de la història.

L'enunciat donat per Euclides és equivalent a dir que per un punt exterior a un recta passa una única paral·lela. La clau està en la unicitat, ja que l'existència pot provar-se a partir dels altres postulats. Un cop acceptat, es poden probar resultats tan assimilats en geometria com que que les línies paral·leles són equidistants, el teorema de Pitàgoras, que la suma dels angles d'un triangle és igual a dos rectes i tot el referent a figures semblants. De fet, el cinquè postulat es pot formular equivalentment de les següents maneres[5]:

- Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral.lela.
- Tres punts no alineats determinen una circumferència.
- Existeixen triangles semblants.
- Per a tot triangle n'hi ha un de semblant arbitràriament gran.
- Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem.
- Els angles d'un triangle sumen el mateix que dos angles rectes.
- Les rectes que no es tallen són equidistants.
- Les equidistants són rectes.

Observem que, així com els altres postulats tenen una redacció breu i senzilla, el cinquè presenta una formulació molt més elaborada. Això va fer pensar a molts matemàtics que aquest axioma hauria de ser un teorema i que segurament es podia demostrar a partir dels altres quatre. Ningú dubtava de la seva veracitat, però no complia el requisit de ser senzill, clar i evident, per la qual cosa els incomodava haver-lo de posar com a axioma. El mateix Euclides sembla no estar gaire convençut d'haver-lo triat entre aquells que són veritats absolutes, doncs no l'utilitza fins a la proposició 29, perquè no hi ha més remei. Les 28 primeres proposicions es demostren només a partir dels quatre primers postulats.

[5] Recollides per Reventós a [84], p. 23-24.

Els motius d'aquestes peculiaritats venen causats, segurament, perquè la discussió sobre la qüestió de les paral·leles ja existia entre els pensadors de la generació anterior a Euclides. Imre Toth a [99] explica que el postulat de les paral·leles era originalment una proposició que els contemporanis d'Euclides intentaven demostrar, arribant sempre a un cercle viciós[6].

Sabem per Aristòtil que fins als seus temps la teoria de les paral·leles no tenia cap base científica[7]. En els seus escrits es fan algunes referències a aquesta controversia i se'n desprén la solució proposada pel filòsof.

A l'*Ethica ad Eudemum*, Aristòtil afirma que "l'essència del triangle és la suma dels seus angles, que pot ser igual, major o menor que dos rectes"[8], admeten que les tres hipòtesis són igual de possibles. Però en el camp de la geometria, a diferència d'en l'ètica, l'ésser humà no és lliure de triar entre les diferents opcions, encara que aquestes tinguin els mateixos drets. L'epistemologia aristotèlica explica que la manera d'arribar al coneixement és fent servir el sil·logisme a partir d'axiomes que siguin veritats i sabem que un axioma és cert mitjançant la inducció, és a dir, obtenim conclusions després de percebre un gran nombre d'exemples. La decisió, doncs, no depén de nosaltres, les coses succeeixen d'acord amb la seva pròpia natura i només la contemplació de l'estat veritable de les coses és acceptable[9]. La qualitat dels triangles de que els seus angles sumen dos rectes, forma part de la seva essència inamovible i per tant, és idemostrable.

La conclusió del seu pensament queda clarament reflexada a la *Física*, on diu, suposem que senyalant alguna recta: "Si això és una línea recta, llavors la suma dels angles d'un triangle és igual a dos rectes"[10]. Una afirmació que, com veurem, bé podria haver estat feta en el segle XIX.

Per Aristòtil la tria entre la hipòtesi que la suma dels angles és dos rectes o no ho és, es planteja com un dilema ètic, cal escollir entre la "geometria

[6]Aristotil fa servir aquests intents per solucionar el problema de les paral·leles per explicar què és la petició de principi. En llatí *petitio principii*, que significa: suposant el punt inicial. Veure l'article d'Imre Toth *Non-Euclidean Geometry before Euclid*, [99], p. 92.

[7]Heath fa referència a l'escrit d'Aristòtil *Analytica Priora* ii.16.65 a 4. Veure [50], p. 358.

[8]La cita l'hem extret de l'article de Toth, [99], p. 94.

[9]Toth cita els *Problemata*, a [99], p. 98.

[10]La cita l'hem llegit a [99], p. 98, Toth diu que també Thomas Heath la comenta a *Mathematics in Aristotle* (1949).

bona", la que està d'acord amb la natura, i la geometria equivocada, que va contranatura.

Així, quan Euclides va decidir establir els principis de la teoria de les paral·leles, veient que el postulat descriu la natura de la línia recta, va considerar que calia prendre'l com a axioma idemostrable. El que va suposar un gran encert, doncs, de la seva negació, no se segueix cap contradicció, només que llavors, les línees rectes no són com sempre les imaginem.

Albert Dou[11], sintetitza molt clarament el punt de vista clàssic:

> La geometria dels *Elements* és una geometria que avui seria geometria física, perquè per a Euclides i Aristòtil els termes de les proposicions dels *Elements* es refereixen amb tota exactitud als cossos naturals que la realitat del món físic, amb una referència única que és simultàniaments immediata i última. *És una geometria que pretén estudiar l'estructura de l'espai físic*

Molts geòmetres, però, no van quedar satisfets amb la solució donada per Euclides a la qüestió, i aviat començaren els primeres intents per demostrar el postulat, fets per Ptolomeu (150 d.C.) i Proclus (410 - 485). Al llarg dels segles posteriors molts matemàtics es van embarcar en l'aventura de demostrar el cinquè postulat, sense èxit. Entre ells, els matemàtics àrabs Ibn Al-Haytham (965-1040) i Nasir-eddin (1201-1274), John Wallis (1616-1703), A. M. Legendre (1752 - 1833) i F. Bolyai (1775 - 1856)[12]. La majoria de les demostracions fallaven perquè en algun moment de la prova se suposava com a cert un fet, aparentment evident, que en el fons era una de les formulacions equivalents del cinquè postulat que hem especificat més amunt.

Dels diferents intents de demostració del postulat de les paral·leles, cal destacar el de Girolamo Saccheri (1667-1733)[13], doncs el seu plantejament suposa

[11] A. Dou, *Evolució dels fonaments de la matemàtica i relacions amb la física.* Lliçó inaugural del curs acadèmic 1987?1988, Universitat Autònoma de Barcelona.

[12] Contradictòriament, Farkas Bolyai va publicar aquesta prova en el *Tentamen*, on apareix, a l'apèndix, el treball del seu fill János.

[13] Exposat a la seva obra *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universiae geometriae principia.*, Milan, 1733. Reimpresió recent a [92], p. 152-207. Nosaltres l'hem llegit a la versió anglesa donada per Albert Dou a [35]. Aquest treball de Saccheri va ser oblidat aviat. El 1889 E. Beltrami va tornar a cridar l'atenció sobre ell en la seva Nota: *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky.* Rend. Acc. Lincei (4), vol. V, p. 441-448.

un gir en el desenvolupament de la qüestió.

Fins llavors, totes les tentatives consistien en fer deduccions a partir dels altres axiomes. Saccheri, en canvi, es proposa provar el postulat per *redutio ad absurdum*[14]. És a dir, suposarà de que el postulat és fals amb el convenciment de que les deduccions el portaran a una contradicció.

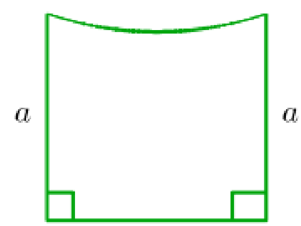


Figura 1.1: Quadrilàter de Saccheri

Parteix de la figura 1.1, un quadrilàter en el que els angles de la base són rectes i els costats contigus a la base són iguals. Veu llavors, sense fer ús del postulat, que els altres dos angles han de ser iguals i que es tenen tres possibles situacions, que anomena:

1. Hipòtesi de l'angle recte, quan aquest angle és igual a un recte.
2. Hipòtesi de l'angle obtús, quan és més gran que un recte.
3. Hipòtesi de l'angle agut, quan és més petit.

La primera hipòtesi és l'euclidiana, així que en prendre qualsevol de les altres dues estem negant el postulat de les paral·leles.

Saccheri veu que la hipòtesi de l'angle obtús porta a contradicció, doncs no permet l'extensió indefinida de les rectes. Però en prendre la hipòtesi de l'angle agut no acosegueix arribar a una conseqüència absurda i s'acaba convencent de que la hipòtesi és falsa perquè "repugna la natura de la línea recta"[15].

Com explica Dou[16], Saccheri creu que en aplicar al món exterior els teoremes que s'obtenen de la hipòtesi de l'angle agut, s'arribarà a proposicions

[14]Saccheri era un important estudiós en el camp de la lògica i era especialista en proves per *reducció a l'absurd*.
[15]Veure Bonola [26], p. 43.
[16]Veure el seu article *De la verdad a la validez en geometría (1733 - 1871)*, [36], p. 9.

absurdes, i es va arribar a convèncer de que aquestes proposicions físicament absurdes havien d'implicar proposicions lògicament absurdes. Així, en el seu treball va demostrar correctament molts resultats que ell creia absurds.

Johan H. Lambert (1728-1777) a l'obra *Theorie der Parallellinien* fa un plantejament semblant al de Saccheri[17]. Parteix d'un quadrilàter amb tres angles rectes (figura 1.2), el que el porta a les tres hipòtesis, segons la mesura del quart angle.

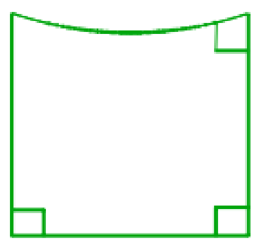


Figura 1.2: Quadrilàter de Lambert

Si l'angle és recte s'obté el sistema euclidià. A partir de la hipòtesi de l'angle obtús s'arriba a una contradicció. Però en fer el raonament anàleg amb la hipòtesi de l'angle agut no s'obté cap contradicció, el que el porta a continuar l'argument. Troba llavors, que la suma dels angles d'un triangle és menor que dos rectes i que aquest *defecte* és proporcional a l'àrea del triangle. És a dir, com més gran sigui l'àrea del triangle, menor és la suma dels seus angles.

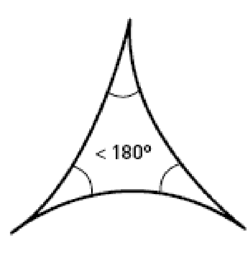
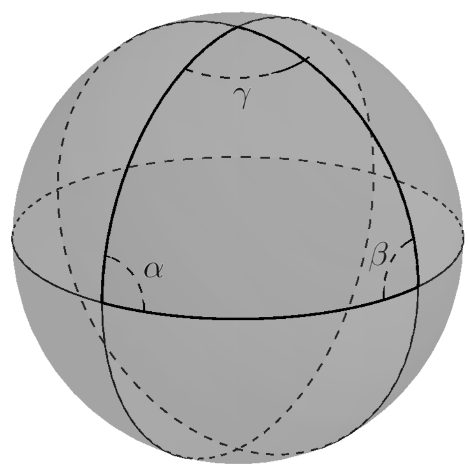


Figura 1.3: Triangle hiperbòlic

[17]És probable que estigués familiaritzat amb el treball de Saccheri, doncs en aquest treball cita l'anàlisi que va fer G. S. Klügel (1739-1812) de l'obra de l'italià.

El que resulta més interessant en l'obra de Lambert, és que no cau en l'error de creure que ha demostrat el cinquè postulat. De fet, sembla que veu possible una geometria sense que es compleixi el postulat.

Lambert observa que en desenvolupar la segona i tercera hipòtesis s'obtenen resultats anàlegs. Seguint la de l'angle obtús, es té que la suma dels angles d'un triangle és més gran que dos rectes. Aquesta propietat es dóna en els triangles esfèrics i el teorema del defecte que acabem de mencionar, és anàleg al resultat conegut de geometria esfèrica que diu que l'*excés* dels angles d'un triangle és proporcional a la seva àrea.



$$\textit{Excés} = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^{\circ}$$

Figura 1.4: Triangle esfèric

De fet, la geometria que s'obté a partir de la hipòtesi de l'angle obtús és la de l'esfera. Les rectes, pensades com a línies de longitud mínima, són els cercles màxims de l'esfera. Llavors, donada una recta i un punt exterior a ella, no hi ha cap recta pel punt que no talli la recta, és a dir, no hi ha cap paral·lela a una recta per un punt exterior a ella.

Observem que en canviar el radi R de l'esfera per iR, en la fórmula de l'àrea d'un triangle:

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \text{Excés}$$

obtenim:

$$A = -R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2(\pi - \alpha + \beta + \gamma) = R^2 \cdot \text{Defecte}$$

De la mateixa manera es poden obtenir les fórmules trigonomètrques de geometria no euclidiana a partir de les de geometria esfèrica.

Aquesta analogia fa arribar Lambert a la següent conclusió: "M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari"[18].

Carlos Rodríguez argumenta a [89][19] que l'analogia de Lambert va ser el mitjà pel que Schweikart, Taurinus i fins i tot, Gauss, Bolyai i Lobatxevski, van arribar a molts dels resultats no euclidians.

1.3 Un món creat del no-res

El geòmetre rus Nikolai Ivanovich Lobatxevski (1792-1856) i l'hongarés Jánnos Bolyai (1802-1860) són considerats els fundadors de la geometria no euclidiana. A diferència dels matemàtics anteriors, són conscients de que en els seus estudis, realitzats de manera simultània i independent, suposen la creació d'una nova teoria matemàtica.

D'altra banda, la correspondència de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostra que també ell creia que l'axioma de les paral·leles no es podia provar i que es podia construir una nova geometria diferent de la euclidiana lògicament consistent[20]. O al menys aquesta és la conclusió a la que arriben M. Klein i Bonola. Opinió que no comparteix J. Gray, qui considera que és atribuir massa a Gauss[21]. Malauradament, Gauss mai va publicar res sobre la qüestió, el que fa díficil saber fins a quin punt arribaven realment els seus coneixements.

[18] "Ich sollte daraus fast den Schuss machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor." A *Theorie der Parallellinien*, [73], es pot llegir a [39], p. 203.

[19] L'article també el podem llegir a [90].

[20] Veure M. Klein, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días* [70], v. III, p. 1159.

[21] Veure [47], p. 15 i 16.

El 1799, Gauss confesa al seu amic Farkas Bolyai[22] que creu que la veritat de la geometria és dubtosa. Diu que molt del que ha trobat en la seva recerca podria ser considerat com una prova de la correcció de la geometria euclidiana, però que des del seu punt de vista no prova res. Aquesta mateixa valoració és la que fa del treball de Legendre en una carta a C. L. Gerlig[23], l'abril de 1816, on a més comenta algunes conseqüències que resultarien de que la geometria euclidiana no fos correcta:

> Es is leicht zu beweisen, dass, wenn Euclids Geometrie nicht die wahre iest, es gar keine ähnliche Figuren gibt: die Winkel in einem gleichseitigen Dreieck sind dann auch nach der Grösse der Seiten verschieden, wobei ich gar nichts Absurdes finde.
>
> És fàcil demostrar que, si la geometria euclidiana no és la veritabel, llavors no n'hi ha en absolut figures semblants: els angles d'un triangle equilàter depen llavors de la magnitud dels costats, i no trobo en això absolutament res absurd.
>
> [Gauss a Gerlig, Göttingen 11/4/1816[24]]

I com Lambert, elucubra que fins i tot seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa, perquè llavors es tindria una mesura absoluta de longitud.

El fet de no trobar res contradictori el fa arribar a la conclusió de que els postulats geomètrics no són veritats absolutes. A diferència que l'aritmètica, que només existeix a la nostra ment, la ciència de l'espai té una realitat exterior i les seves lleis no es poden establir a priori[25]:

> Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom

[22]Farkas Bolyai (1775-1856), el pare de János, va ser amic de Gauss i company d'estudis a Göttingen. En la carta a que ens referim, Helmstedt 16/12/1799, Gauss valora el treball de Farkas B. sobre les paral·leles en resposta a la seva petició. Tant en aquesta carta com en la de Braunschweig 25/11/1804, Gauss declararà que no està convençut de l'explicació de Farkas B.

[23]Christian Ludwig Gerlig (1788-1864), va ser estudiant de Gauss a Göttingen. És reconegut pel seu treball en el camp de la geodèsia. Va ser el director de doctorat de Julius Plücker.

[24]A [93], p. 122, versió digitalitzada a `https://gauss.adw-goe.de`.

[25]Veure la carta de Gauss a Bessel, Goettingen 9/4/1830, a [4], p. 497, versió digitalitzada a `https://gauss.adw-goe.de`.

menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen das Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen.

Cada vegada estic més convençut que la necessitat física de la nostra geometria euclidiana no pot ser demostrada almenys per la raó humana. Potser en un altre vida ens serà possible penetrar en la naturalesa de l'espai, però ara no és factible. Fins llavors, hem de posar la geometria, no en el mateix lloc que l'aritmètica, que és purament a priori, sinó en el mateix lloc que la mecànica.

[Gauss a Olbers[26], Göttingen 28/04/1817[27]]

Sembla que Gauss va tenir present la problemàtica de les paral·leles durant molts anys, però que no va arribar a posar en ordre les seves idees per publicar-les. En la següent carta a F. W. Bessel[28] diu que porta pensant en el tema almenys 40 anys[29] i afirma:

[...] meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und veilleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Boeoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.

[...] la meva convicció de que no podem establir completament una geometria a priori s'ha tornat més forta. Entretant, trigaré bastant encara a publicar les meves extenses recerques sobre la qüestió; i potser no ho arrivi a fer en tota la meva vida, doncs pateixo per la cridòria

[26]Heinrich Wilhelm Olbers (1758-1840), metge i astrònom. Va estudiar medicina a Göttingen i posteriorment va exercir a Bremen. A les nits es dedicava a fer observacions astronòmiques, va descobrir els asteroides Pallas i Vesta, deixant a Gauss que posés el nom del darrer.

[27]Veure Gauss, *Werke*, [44], vol. VIII, p. 177, versió digitalitzada de Schilling, 1900, a `https://gauss.adw-goe.de`, p. 651-652.

[28]Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), matemàtic i astrònom. A partir de 1810 va dirigir l'observatori de Köningsberg.

[29]També ho diu a la seva carta a Schumacher, 17/5/1831, a Gauss, *Werke*, [44], vol. III, p. 220.

dels beocis, si expressés el meu parer.

[Gaus a Bessel, Göttingen 27/01/1829 [30]]

La referència als beocis, els habitants d'una regió de l'antiga Grècia que tenien fama de ser d'esperit obtús, mostra que Gauss entenia que la comunitat cièntifica no estava preparada per acollir les seves recerques. La idea que s'havia anat formant al cap de que el postulat de les paral·leles no era una noció a priori, anava clarament contracorrent amb la filosofia kantiana que imperava en aquell moment. Gauss no dubtava de que la publicació de les seves recerques hauria comportat una forta polèmica.

Veiem, però, per la resposta de Bessel, que Gauss contava amb el seu suport[31], així com el d'altres col·legues amb qui mantenia correspondència, com Wachter[32], F. Bolyai, Gerling[33], Olbers i Schumacher. Gauss també tenia contacte amb Schweikart i Taurinus[34], considerats per Bonola entre els fundadors de la geometria no euclidiana, perquè també estan convençuts de que no és contradictòria. Schweikart, per exemple, en una nota que va fer arribar a Gauss mitjançant Gerlig, on desenvolupa la geometria independentment del postulat d'Euclides, escriu:

> Es gibt eine zweifache Geometrie, - eine Geometrie im engern Sinn - die Euklidische; und eine astralische Grössenlehre.
>
> Hi ha una doble Geometria, una geometria en sentit estricte, la Euclidiana; i un estudi astral de les magnituds.

[Memorandum, Marburg December 1818[35]]

[30] A [4], p. 490, versió digitalitzada a `https://gauss.adw-goe.de`.

[31] Veure la carta de Bessel a Gauss, Koenigsberg 10/02/1829, a Gauss, *Werke*, [44], vol. III, p.201.

[32] Friedrich L. Wachter (1792-1817, any de la seva desaparició) va estudiar matemàtiques i astronomia a Göttingen, on va tenir Gauss com a professor. Es va interessar per la teoria de les paral·leles i va imprimir un treball sobre la qüestió. Segons comenten Abardia, Reventós i Rodríguez a [1], p. 299, n. 29, en 1816, suggereix a Gauss que en geometria no-euclidiana, l'esfera de radi infinit té una geometria euclidiana, segons com Veure Gauss, *Werke*, [44], vol. III, p. 175-176.

[33] Veure la carta de Gauss a Gerlig, 25/8/1818, a [93], p. 181. Traducció al català d'un fragment a [86], p. 103.

[34] F. K. Schweikart (1780-1859), professor de Jursiprudència. F. A. Taurinus (1794-1874), el nebot de Schweikart, advocat, es va interessar per la qüestió de les paral·leles influenciat pel seu oncle.

[35] Gerlig li envia a Gauss en la seva carta, Marburg 25/01/1819, a [93], p. 194. També a

I Taurinus en el seu treball *Theorie der Parallellinien*[36] declara explícitament que la geometria de l'angle agut no conté cap contradicció en ella mateixa, és a dir, en la seva estructura lògica, tot i que contradigui la intuició[37].

Per a Gray, la correspondència de Gauss revela que tot i voler contemplar la nova geometria, no estava disposat a donar una descripció detallada. Aquesta actitud seria contrària a la seva habitual manera de fer. Així, el fet que morís sense posar en ordre les seves idees, li fa pensar que encara tenia reserves respecte la qüestió[38]. Però la nova lectura del *Disquisitiones generales circa superficies curvas* que proposen Abardia, Reventós i Rodríguez a *What did Gaus read in the Appendix?* [1], revela que, en realitat, Gauss sí que pretenia donar una presentació acurada de les seves idees i que estava abordant el tema amb l'estudi de la geometria intrínseca de les superfícies. Parteixen de dues hipòtesis: que Gauss decideix seguir la consideració de Lambert de que la prova del cinquè postulat no s'hauria de fer basant-se en una representació de la qüestió, sinó seguint una via simbòlica; i que es va proposar trobar una superfície que pugués jugar el paper d'esfera imaginària[39]. Així, el programa de Gauss comença per fer un desenvolupament completament analític de la geometria esfèrica, per després generalitzar aquests resultats i aplicar-los a l'estudi de qualsevol superfície corba. Després haurà de buscar una superfície anàloga a l'esfera, on es doni la hipòtesi de l'angle agut.

El *Disquisiciones* no és, doncs, només un tractat de geodèsia, sinó que recull el primer pas d'aquest programa i la seva lectura des d'aquest punt de vista permet veure el lligam que té aquest estudi amb la geometria no euclidiana. Gauss, però, no va relacionar els dos temes explícitament. Segurament perquè no va ser capaç de trobar cap superfície que tingués una geometria intrínseca on es cumplís la hipòtesi no euclidiana. Conscient de que sense definir aquesta superfície les seves investigacions no resolien completament el problema, no es decidia a publicar res sobre la qüestió.

Gauss, *Werke*, [44], vol. VIII, p. 180-181. A la seva resposta a Gerlig, el 16/3/1819, Gauss parla del treball de Schweikart, veure Gauss, *Werke*, [44], vol. VIII, p. 181. Traducció al català d'un fragment a [86], p.103.

[36] Part dels treballs de Taurinus es troben a [39].

[37] Veure els fragments traduïts per Dou al castellà a [36], p. 12-13.

[38] Veure [48], p. 97 i [47], p. 16.

[39] Com justifiquen Abardia, Reventós i Rodríguez a [1], p. 295-297, Gauss coneixia els estudis de Lambert. Gray recolza aquesta hipòtesi, afirmant que el tractat sobre les paral·leles de Lambert va ser una de les seves primeres lectures quan va arribar a Göttingen, veure [47], p. 15.

Gauss, però, estava preocupat perquè les seves recerques sobre la geometria de l'angle agut desapareixessin a la seva mort[40]. Segons les seves pròpies paraules, aquest neguit desapareix en llegir el treball de János Bolyai. Clarament, considera que amb la presentació que fa el jove hongarés de la geometria no euclidiana la qüestió queda resolta completament[41]:

> Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.
> Wenn ich damit anfange "dass ich solche nicht loben darf": so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30-35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äusserste überrascht.
> Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen.[...] Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.
> Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

> Ara, una cosa sobre el treball del teu fill.
> Si començo dient que no l'he d'elogiar, segurament, et quedaràs sorprés de moment, però no puc fer una altra cosa; elogiar-lo a ell voldria dir elogiar-me a mi mateix: perquè tots els comentaris del treball, el camí que segueix[42] i els resulats que obté coincideixen quasi completament amb les meditacions en les que he estat parcialment ocupat ja per 30-35 anys. De fet, això em sorpren en extrem.
> La meva intenció respecte al meu treball, del que en realitat, només he anotat una petita part, era deixar-lo sense publicar en vida.[...] Mentrestant, el meu propòsit era anar escrivint-ho tot amb el temps,

[40]Veure la carta de Gauss a Schumacher, 17/5/1831, a [82], p. 261, versió digitalitzada a `https://gauss.adw-goe.de`.

[41]Veure [1] per més detalls sobre les implicacions que veu Gauss en els resultats de l'Apèndix.

[42]Abardia, Reventós i Rodríguez [1] creuen que aquest comentari es deu a que possiblement, en 1831, veient que no podia trobar l'esfera imaginària en $\mathbb{R}^3$, Gauss decidís canviar a la via sintètica de recerca.

perquè al menys no desaparegués amb mi algun dia. Estic enormement soprès de poder-me estalviar aquest problema, i m'alegra moltíssim que sigui precisament el fill d'un vell amic qui tan maravellosament se m'hagi adelantat.

[Gauss a F. Bolyai, Göttingen 6/3/1832[43]]

L'obra de János Bolyai, sota el títol *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, és un escrit de 24 pàgines, que s'adjunta coma a apèndix en la publicació del seu pare, *Tentamen juventutem studiosam...* [24], el 1832[44].

En la carta al seu pare del 3 de novembre de 1823, János li explica que està acabant de posar en ordre les seves recerques sobre la teoria de les paral·leles per publicar-les, i declara que ha fet descobriments maravellosos, però que de moment només li pot dir que "del no-res ha creat un univers nou"[45].

Efectivament, en el seu treball, seguint la metodologia deductiva grega, Bolyai construeix la geometria de l'espai sense decidir prèviament si el postulat és cert o fals, és a dir, fent servir només els quatre primers axiomes. A aquesta geometria independent del postulat de les paral·leles l'anomena *geometria absoluta*.

El punt de partida és una definció diferent de paral·leles. Donat el punt B exterior a una recta AM, es defineix la paral·lela BN com la posició límit de les rectes per B secants a AM, és a dir, la primera recta que no la talla. N'hi ha una paral·lela per la dreta i una per l'esquerra, que Bolyai anomena paral·leles assimptòtiques. Els angles NBA i $N'BA$ són iguals i menors que un recte. Més endavant veurà que el seu valor depén de la distància AB, trobant la fórmula de l'angle de paral·lelisme.

Dóna, llavors una definició de l'horocicle i l'horosfera, als que ell anomena simplement corba L i superfície F. Considera una recta a pertanyent a un feix de paral·leles en el mateix sentit, per la dreta o l'esquerra, que passa pel punt A, per cada paral·lela del feix b es pot prendre un punt B de manera que

[43] Transcripció a `https://gauss.adw-goe.de`, editada a Gauss, *Werke*, [44], vol. VIII, p. 220-221. Versió anglesa de F. Kárteszi a[71].

[44] Trobem la traducció anglesa de George Bruce Halsted a [26]. Edició recent a [25].

[45] Podem llegir la versió anglesa a [26], p. 98. I la traducció al català a [86], p. 110.

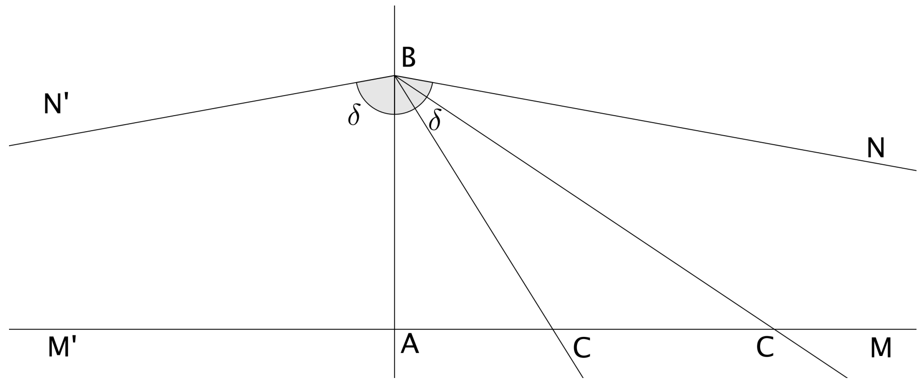


Figura 1.5: Les dues paral·leles de Bolyai

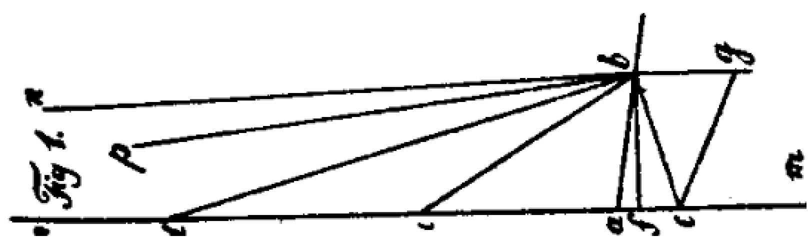


Figura 1.6: Dibuix original de Bolyai

el segment AB formi el mateix angle amb les dues rectes. El lloc geomètric d'aquests punts B és la corba L. La superfície F s'obté en fer rotar l'horocicle L al voltant de la recta a.

La idea central del seu treball de Bolyai és fer ús de l'horosfera per estudiar els triangles no euclidians.

Bolyai troba resultats en geometria absoluta, és a dir, que són certs independenmeent de si el postulat és cert o no, i altres que només es donen quan el postulat és fals. Entre els darrers, el més interessant és que en la superfície F, si dues corves L tallen una tercera i la suma dels angles interiors és menor que dos rectes, les dues corves L és tallen. És a dir, en geometria no euclidiana, si prenem com a rectes les línies L, el cinquè postulat es dóna en la superfície F! Per tant, un geòmetra no euclidià podria estudiar la geometria euclidiana treballant amb l'horosfera, de la mateixa manera que nosaltres fem servir l'esfera per estudiar la geometria esfèrica. Això li permet comparar els triangles no euclidians amb els de la superfície F, que segueixen les lleis euclidianes, i partint de la trigonometria plana ordinària, aconsegueix trobar les fórmules que relacionen els angles i els costats dels triangles no euclidians.

Bolyai utilitza l'horosfera com si fos un mapa de la geometria no euclidiana. Fins i tot, acaba dibuixant un corva amb coordenades cartesianes i diu com s'hauria d'interpretar com a un dibuix d'una figura no euclidiana en el pla euclidià.

De manera pràcticament simultània, el geòmetra rus N. I. Lobatxevski desenvolupa la geometria que resulta de la negació del postulat de les paral·leles, obtenint resultats similars. Sembla que Lobatxevski va començar a pensar en la geometria no euclidiana a partir de 1823, però no és fins el 1829-30 que apareix *Sobre els principis de Geometria*[46], la publicació d'una xerrada que va presentar el 1826 de la que no es conserva el manuscrit. Els anys posteriors, publicarà altres treballs sobre la qüestió, tots ells en rus[47]. El 1837, apareix per primer cop un escrit seu en francés al Journal de Crelle, sota el títol *Géométrie Imaginaire* [74]. I tres anys més tard, en el 1840 presenta un resum dels seus treballs destinat a cridar l'atenció de la comunitat matemàtica europea sobre la seva feina *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* [75][48]. Finalment, just abans de morir dictarà la *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, publicat en francés i en rus l'any 1855 [76].

De la mateixa manera que Bolyai, Lobatxevski parteix de distingir tres tipus de línies en el feix de rectes que passen per un punt A exterior a una recta donada l, en el mateix pla: les que no tallen mai la recta l, les que la tallen i les dues paral·leles una en cada direcció, que separen les primeres de les segones. Les paral·leles formem un angle amb la perpendicular que depen de la distància a des del punt A a la recta l, anomenat *angle de paral·lelisme*: $\Pi(a)$. D'aquesta definició va deduïnt les diferents propietats i dóna les fórmules trigonomètriques dels triangles que es donen en relació dels valors Π en lloc de les mesures dels costats del triangle.

[46] Al Butlletí de Kasan. L'original està en rus.

[47] Entre ells *Geometria Imaginària*, Publicacions Científiques de la Universitat de Kasan, 1835. Els altres són mencionats per Bonola a [26], p. 85-86.

[48] A [26], trobem la traducció a l'anglès de George B. Halsted *Geometrical researches on the theory of parallels.*

Lobatxevski també demostra que la geometria en l'horosfera és euclidiana. De fet, els treballs dels dos geòmetres són molt semblants, tret de que el darrer tracta exclusivament la hipòtesi de l'angle agut. La principal diferència és que Lobatxevski fa un desenvolupament analític de la seva Geometria Imaginària, mentre que Bolyai segueix la via sintètica.

També el treball del geòmetre rus gaudirà de l'aprovació de Gauss[49], que igual que en el cas de Bolyai, es mantindrà en l'àmbit privat de la seva correspondència. Així, tot i els esforços de Lobatxevski per donar a conèixer la seva obra, aquesta tindrà poca repercusió.

1.4 Postures epistemològiques i acollida de la geometria no euclidiana

L'opinió generalitzada a la comunitat científica fins a finals del segle XIX era que les lleis matemàtiques són inherents al diseny de l'univers. Tot i que trobem algunes veus crítiques amb aquesta filosofia dins l'empirisme britànic. Per exemple John Locke (1632-1704), que afirma que tot el coneixement prové en última instància de l'experiència; i David Hume (1711-1776), el seu màxim representant, que considera que l'ésser humà observa la natura que l'envolta i extreu conclusions sobre aquesta basant-se en l'experiència. Hume explica que després de veure repetidament una determinada causa-efecte, creiem que es donarà sempre, però que en realitat no en podem estar segurs de que torni a succeir.

El segle XIX s'inicia amb una forta influència de la filosofia d'Immanuel Kant (1724-1804), especialment a Alemania. Kant no creu que tot el coneixement provingui de l'experiència, hi ha conceptes que la nostra raó forma per ella mateixa. Aquests principis estan presents a l'esperit humà i s'apliquen a les experiències que tenim, com per exemple la causalitat o els axiomes matemàtics.

A la seva obra *Crítica de la raó pura* Kant planteja el que anomena una *Revolució copernicana*, que consisteix en deixar de pensar que el nostre coneixement s'adecua als objectes, per suposar justament l'invers. La realitat

[49]Veure la carta de Gauss a Schumacher, 28/11/1846, que citem a la p. 34.

no pot ser objecte del nostre coneixement més que en la mesura en que es sotmet a certes condicions *a priori* posades pel subjecte. Els éssers humans tenim una sèrie d'intuïcions que fan que organitzem les experiències del món sensible d'una determinada manera i no d'un altre. Aquestes dues formes de sensibilitat són l'espai i el temps, condicions necessàries *a priori* de l'experiència sensible. Tots els objectes externs ens els hem de representar com a existents a un espai i percebem els estats físics de manera successiva, és a dir, rebem les sensacions en un marc de relació espai-temporal que les ordena i disposa. L'espai i el temps són formes pures de la sensibilitat humana, facultats d'intuició universals i necessàries, que permeten la intuïció empírica.

La geometria euclidiana determina les propietats de l'espai, per tant, els seus enunciats són veritats *sintètiques a priori*[50], que a més són vàlids en el món empíric. Els objectes externs concorden necessària i estrictament amb la geometria, doncs la nostra ment ens obliga a percebre el món mitjançant un filtre euclidià. Així, la geometria clàssica s'aplica a la realitat objectiva i no hi haurà cap altre sistema geomètric que ho faci, l'únic espai possible és l'espai euclidià.

Aquesta concepció del món físic contrasta amb la dels filòsofs empiristes, que en considerar que els enunciats geometrics provenen de l'experiència, no creuen que la geometria euclídea sigui "necessariament" la veritat física. Tot i així, ni els uns ni els altres, critiquen la certesa inqüestionable dels enunciats de la geometria euclidiana, encara que sigui per raons diferents.

L'aparició de la geometria no euclidiana suposa trencar amb la visió kantiana del món. El fet de que es puguin construir sistemes geomètrics lògicament coherents tant a partir del postulat de les paral·leles com de la seva negació, porta a plantejar-se la possibilitat de que la realitat física no sigui euclidiana. Aquesta simple consideració desmunta la filosofia de Kant, perquè encara que s'acabi arribant a la conclusió de que el món és euclidià, no serà basant-se en que aquesta concepció forma part dels nostres coneixements a priori, sinó veient quina de les dues teories s'adapta millor a la realitat sensible.

La comunitat matemàtica, doncs, no va acollir la geometria no euclidiana

[50] Les proposicions *sintètiques* donen informació no inclosa en el subjecte, al contrari que les *analítiques* en les que la informació del predicat està inclosa al subjecte. Els judicis *a priori* no provenen de l'experiència, a diferència dels judicis *a posteriori* que es verifiquen després d'haver-los experimentat moltes vegades obtenint iguals resultats.

tan bé com calia esperar després de tants segles d'investigacions, perquè l'evidència a priori deia que no era posssible. Les obres de Bolyai i Lobatxevski, tot i la seva genialitat, van passar força desapercebudes. Però no només degut al seu caràcter innovador i a la crítica que feien dels fonaments euclidis, també perquè, a excepció de Gauss, els fundadors de la nova geometria es movien fora dels cercles acadèmics. Schweikart, Taurinus i Bolyai no eren matemàtics professionals i Lobatxevski va escriure moltes de les seves obres en rus, una llengua que no era massa coneguda a Europa.

El que distingeix el pensament de Gauss, Lobatxevski i Bolyai dels seus precesors, és que creuen que la geometria no euclidiana no és contradictòria i que per tant, és possible en el món físic.

Lobatxevski considerava que la seva geometria era vàlida perquè creia en la certesa de les fórmules trigonomètriques que havia trobat i posava fora de dubte que poguessin arribar mai a un absurd. Les fórmules són anàlogues a les de l'esfera, que forma part de l'espai euclidià, així una contradicció a la geometria no euclidiana portaria per analogia a una contradicció a l'euclidiana[51]. Per Bolyai la convicció prové de que la geometria euclidiana es dóna en la superfície F, i que per tant, es pot considerar com el cas límit de les infinites geometries no euclidianes, que venen definides pels valors d'un paràmetre k[52].

Ja hem explicat anteriorment que tampoc Gauss veu res absurd en el nou sistema geomètric. El fragment de la carta a Taurinus que citarem a continuació, traduït per A. Dou al castellà, és especialment interessant perquè a més, desvela l'actitud de Gauss davant les rígides idees metafísiques imposades al coneixement científic.

Per contextualitzar-la, cal mencionar que Taurinus, en el seu extens desenvolupament de la hipòtesi de l'angle agut, ja havia introduït l'esmentat paràmetre k, que dóna peu a considerar infinites geometries no euclidianes per cadascun dels seus valors, totes elles objectivament igual de vàlides. També se n'havia adonat que la geometria euclidiana es dóna quan k és infinitament gran[53]. La possibilitat de que hi hagi infinites geometries, el porta

[51]Veure [74], p. 295, com senyala Montesinos a [81], p. 216.
[52]Com exposa Montesinos a [81], p. 213.
[53]Els seus treball sobre el tema són *Theorie der Parallellinien*, 1825 i *Geometriae prima elementa*, 1826.

a pensar que es podrien construir infinites rectes que passin per dos punts, i conclou que això és absurd.

> La hipótesis de que la suma de los tres ángulos sea menor que 180º lleva a una geometria original, completamente distinta de la nuestra (euclidia), que en sí misma es absolutamente consecuente y que he construido de una manera satisfactoria para mí mismo, de modo que puedo resolver cualquier ejercicio de la misma, excepto la determinación de una constante, que a priori no puede averiguarse, [...] Todos mis esfuerzos para encontrar una contradicción o una consecuencia en esta geometría no euclídea han sido estériles, y lo único que resiste a nuestro entendimiento es que si fuera verdadera tendría que haber en el espacio una magnitud lineal determinada en sí misma (aunque desconocida para nosotros). Pero creo que, a pesar de la sabia palabrería de los metafísicos que nada dice, sabemos propiamente demasiado poco o incluso nada acerca de la verdadera esencia del espacio, para que podamos confundir algo que nos viene poco natural con lo Absolutamente Imposible. Si la geometria no euclidea fuera la verdadera y si aquella constante estuviera en cierta relación con magnitudes que se encuentren en la región de nuestras mediciones en la tierra o en el cielo, entonces sería posible averiguarla a posteriori.
>
> [Gauss a Taurinus, 8/11/1824[54]]

Segons Dou, dóna la sensació de que Taurinus donava massa crèdit a la filosofia de Kant[55]. En canvi, la conclusió a la que arribarà Gauss és que cal abandonar la hipòtesi kantiana de que la geometria és una ciència a priori, i decidir quina és la geometria veritable a partir de l'experiència.

Sembla ser que en un principi Gauss sí que creia en una geometria a prioiri, però considerava que calia decidir si aquesta és l'euclidiana o una de les de l'angle agut amb un k molt gran, doncs totes dues són possibles. Gauss no accepta que s'hagi d'acatar la tria de la geometria euclidiana feta pels filòsofs, doncs no s'ha aportat cap argument concloent. En cas de que la geometria de l'espai sigui la no euclidiana, tampoc veu cap problema en que calgui determinar la constant a posteriori, encara que el seu valor sigui a priori com totes les propietats geomètriques. Amb els anys, però, Gauss s'anirà convencent de que la geometria no pot ser a priori.

[54] Traducció presentada per A. Dou a [36], p. 16. La versió digital de la carta manuscrita es pot trobar a `https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/1688`.

[55] Veure [36], p. 15.

Tot i que Gauss valora que totes les k-geometries són igualment possibles, creu que només hi ha una geometria veritable i que ha de ser determinada per l'experiència. La idea de que hi hagi múltiples geometries que coexisteixen serà introduïda anys més tard per Bernhard Riemann.

Lobatxevski comparteix el punt de vista empirista de Gauss i suggereix, al igual que Schweikart, que la geometria *imaginària* o *astral* podria ser la de l'espai a escala astronòmica.

Coneixent que la geometria euclidiana es dóna en el cas límit en que la constant k és molt gran, Lobatxevski té la idea de fer un experiment per provar si l'espai és euclidià. Tractarà, doncs de trobar empíricament el valor de k. Farà també ús de la propietat dels triangles no euclidians de que a mesura que es fan més grans disminueix la suma dels seus angles. Així, si en prendre un triangle molt gran, la suma és igual a dos rectes, tret d'errors de precisió, la geometria de l'espai serà euclidiana. La seva idea és fer servir la paral·laxi dels estels[56]. No ens entretindrem en els detalls de l'experiment i el càlculs que va fer Lobatxevski[57], només dir que fent servir la paral·laxi de Sirius, obté que $\frac{a}{k} < 0,000006012$, demostrant que el valor de la constant és molt gran en relació al diàmetre de l'órbita terrestre a. En quant a la suma dels angles del seu triangle astronòmic, situant-se sempre en la hipòtesi no euclidiana, obté que és molt propera a dos rectes.

D'aquesta manera, Lobatxevski demostra experimentalment que la realitat és euclidiana, o al menys a efectes pràctics es pot considerar com a tal; resta la possibilitat de que el triangle considerat, immesament gran per nosaltres, sigui massa petit en l'univers perquè el defecte sigui apreciable. Per tant, Lobatxevski decideix anomenar a la seva nova geometria *geometria imaginària*, doncs no existeix en el món físic, encara que sigui lògicament coherent:

> Encara que la nova geometria no estigui dins de la natura, pot existir a la nostra imaginació i, tot i que sigui inútil per a mesures reals, obre un ampli i nou camp tant per aplicacions de la geometria com de

[56] Un estel proper sembla que canviï de posició respecte a un fons d'estels llunyans, degut al moviment de la Terra per la seva òrbita. Angle de paral·laxi és l'angle que formen les dues rectes que uneixen l'astre observat amb les dues posicions terrestres des de les que l'observem. La paral·laxi anual és l'angle màxim dels que es donen en la situació descrita. S'obté observant la posició de l'estel en relació a una estrella molt llunyana que es considera fixa, amb 6 mesos de diferència.

[57] Es poden consultar a [100], p. 34-37 i a [26], p. 94-95.

l'anàlisi[58].

L'aparició de la geometria no euclidiana va suposar, doncs, un canvi en el paradigma matemàtic[59]. La geometria deixa de ser un sistema de veritats evidents sobre el món físic per convertir-se en una construcció humana basada en l'experiència i l'observació de l'espai.

Tot plegat va provocar una crisi en els fonaments de les matemàtiques, i es va veure la necessitat de establir una base sòlida sobre la que reconstruir la geometria.

El 1899[60] Hilbert proposa una reformulació dels *Elements* d'Euclides, que serà la més acceptada per ser el que segueix una línia més semblant a la del matemàtic grec.

El nou plantejament parteix de considerar uns termes no definits, per no fer el procés interminable, que en geometria plana anomenarem *punts* i *rectes*. Entre aquests elemenst es donen unes *relacions* que tampoc definim, però que cumpliran una sèrie de propietats que ens ajudaran a entendre els conceptes no definits. Aquestes propietats venen recollides pels *axiomes*. A diferència dels axiomes grecs, que eren fets obvis i veritables sobre conceptes coneguts mitjançant la intuïció, aquests axiomes són arbitraris. Però en el cas de la geometria euclidea, venen suggerits per l'observació de la realitat. De la mateixa manera, els termes no definits s'associen als elements geometrics habituals, tot i que en realitat es podriem reemplaçar per qualsevol cosa que cumpleixi els axiomes.

Hilbert dóna quatre grups d'axiomes: els d'*incidència*, relacionats amb el fet de que per dos punts passa una recta, els de *congruència*, que determinen com construir segments i angles iguals a uns donats, els d'*ordre*, que permeten parlar de segments i els de *continuïtat*, que donen peu a la construcció dels nombres reals[61]. Un cop determinats els axiomes es farà ús del sistema lògico-deductiu per demostrar teoremes. En les demostracions només poden

[58]En traduït la cita donada en castellà per Montesinos a [81], p. 214.

[59]Klein en el seu *Pensamiento matemático* considera que és la creació més profunda del segle XIX. Veure [70], p. 1137.

[60]Aquest any es publica la 1ª edició de *Grundlagen der Geometrie*, que posteriorment, Hilbert va revisar diverses vegades.

[61]Agustí Reventós dóna a *Geometria axiomàtica* [85] una presentació bastant assequible del desenvolupament axiomàtic de la geometria seguint de prop l'obra de Hilbert.

prendre com a premises els axiomes i els teoremes obtinguts a partir d'ells i no es fa servir la intuïció geomètrica per provar resultats.

La construcció de Hilbert permet una abstracció de les propietats fora de la interpretació concreta. Tots aquells models que compleixin els axiomes cumpliran també els teoremes de geometria euclidiana que hem demostrat a partir d'ells.

La matemàtica moderna considera que no existeixen veritats absolutes, o si més no, no creu que l'ésser humà sigui capaç de trobar-les. Per tant, no és necessari mostrar la certesa de les teories, n'hi ha prou amb que siguin *vàlides*. Per a que un sistema d'axiomes sigui vàlid haurà de cumplir una sèrie de requisits, haurà de ser consistent, no s'ha de poder demostrar una proposició i també la seva negació, i complet, ha de contenir el màxim d'axiomes independents possible.

Capítol 2

La renaixença de la geometria no euclidiana

En el moment de la seva publicació, els treballs de Bolyai i Lobatxevski no van tenir gaire repercusió. Els seus autors no es movien en els principals cercles acadèmics i aportaven idees massa innovadores, que feien trontollar els fonaments de la tradició matemàtica. La comunitat científica no acceptava la geometria no euclidiana, essencialment per contradir la filosofia kantiana, i va anar caient en l'oblit. El tema de les paral·leles va deixar d'interessar, i amb la mort de Legendre[1], qui va intentar repetides vegades, sense èxit, donar una prova del postulat, els matemàtics de primera línea van abandonar els esforços per demostrar-lo.

Durant els anys següents, el postulat d'Euclides va passar a considerar-se de la mateixa manera que la quadratura del cercle o el moviment perpetu, qüestions que s'han mantingut irresolubles al llarg de la història. La referència a aquests problemes clàssics, que trobem a escrits de H. R. Baltzer[2] i de G. J. Hoüel[3] mostra un canvi de mentalitat. Al contrari del que pensava Legendre

[1]Adrien-Marie Legendre (1752-1833), a les successives edicions dels seus *Eléments de géométrie*, la primera de 1794, va presentar diferents proves del postulat. Està convençut de que es pot demostrar a partir dels altres axiomes.

[2]Heinrich Richard Baltzer (1818-1887), professor a la Universitat de Giessen. La referència la trobem al prefaci de *Die Elemente der Mathematik*, [5], p. III. Aquest manual va ser molt conegut i utilitzat a Alemanya.

[3]Veure *Quelques reflexions sur la ligne de longueur minimum sur la sphère*, [55], p. 78.

i molts altres anteriorment, entre els matemàtics es va començar a instaurar la idea de que el cinquè postulat no es podia demostrar a partir dels altres quatre, el que va donar una certa predispossició a acceptar les noves idees proposades per Bolyai i Lobatxevski.

L'any 1860, un nou aconteixement va provocar que l'atenció de la comunitat matemàtica tornés a recaure sobre la teoria de les paral·leles. Va ser quan es va començar a publicar la correspondència de C. F. Gauss, donant a conèixer que l'il·lustre matemàtic s'havia ocupat durant molts anys del postulat i de la nova geometria, en el pla privat, doncs mai no havia publicat res[4]. Les cartes desvelen la seva coneixença i aprovació dels treballs dels dos geòmetres, a més de les seves pròpies investigacions i reflexions sobre la discutida qüestió.

La correspondència que mantenia amb Schumacher va ser la primera en publicar-se[5]. A una de les cartes parla de la versió alemana d'un treball de Lobatxevski:

> Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werckchen von Lobatschefski (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinie. Berlin 1840, bei G. Funcke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müsste und strenge consequent Statt finden könnte, wenn die Euclidische nicht die wahre ist. Ein gewisser Schweikardt nannte eine solche Geometrie Astral-geometrie, Lobatschefsky imaginaire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Ueberzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will). Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefsky'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste.
>
> Recentment, he tingut l'ocasió de tornar a fullejar l'opuscle de Lobatxevski (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinie. Berlin 1840, bei G. Funcke. 4 Bogen stark). Conté els elements principals de la geometria que haurien de tenir lloc i que podrien tenir lloc rigurosament si suposem que la geometria euclidiana no és la veritable.

[4]Carta de Gauss a Schumacher 17/5/1831 a [82], 1861, vol. 2, p. 261; i a [44], 1900, vol. VIII, p.220.

[5]Editada per C. A. F. PETERS, [82], en 6 volums que apareixeren entre els anys 1860-65.

> El que un tal Schweikart va anomenar geometria astral, Lobatxevski ho anomena geometria imaginària. Sabeu que durant 54 anys (des de 1792) he compartit els mateixos punts de vista (amb alguns desenvolupaments addicionals que no vull mencionar aquí). No he trobat, doncs, elements nous per mi en el treball de Lobatxevski, però el seu desenvolupament segueix un altre camí diferent del que jo vaig prendre, i la veritat és que el de Lobatxevski és magistral i en un vertader esperit geomètric
>
> [Gauss a Schumacher 28/11/1846[6]]

Encara més interessant, és una carta anterior, de 1831, en la que descobrim que Gauss no té cap problema en acceptar la geometria no euclidiana, no la considera contradictòria, i diu que és només el costum el que ens fa considerar la geometria euclidiana com la veritable:

> [...] enthält die Nicht-Euclidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes, wenn gleich diejenigen viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der frühern Gewöhnung die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.
>
> [...] la geometria no euclidiana no té absolutament res de contradictòria, encara que, al principi, molts dels seus resultats s'hagin de tenir per paradoxes; però el que els fa semblar contradictoris és una il·lusió, provinent del costum inicial de considerar la geometria euclidiana com a estrictament certa.
>
> [Gauss a Schumacher 12/7/1831[7]]

Més endavant, a la mateixa carta, es refereix a la constant k, que acostuma a apareixer a les fórmules de geometria no euclidiana, i afirma que "sabem per l'experiència que ha de tenir un valor immensament gran en comparació a tot allò que nosaltres podem mesurar"[8]. O dit d'una altra manera, perquè les fórmules s'adequïn a l'experiència, el valor de la constant k ha de tendir a infinit, doncs, en aquest cas, coincideixen amb les fórmules euclidianes. Per tant, Gauss creu, com Lobatxevski, que la geometria euclidiana es verifica

[6] A [82], 1863, vol. 5, p. 246-247. També a [44], 1900, vol. VIII, p. 239.

[7] A [82], 1861, vol 2, p. 269. També a [44], 1900, vol. VIII, p. 218.

[8] "[...] k eine Constante ist, von der wir durch Erfahrung wissen, dass sie gegen alles durch uns messbare ungeheuer gross sein muss." Carta de Gauss a Schumacher del 12/7/1831, a [82], 1861, vol 2, p. 271.

per l'experiència, i també que per tots els altres valors de la constant k, tenim geometries possibles. Aquestes declaracions de Gauss, de ben segur que debien saccejar la comunitat matemàtica, que va tornar a interessar-se per la qüestió.

Les reaccions no van trigar a arribar. El 1866 i el 1868, apareixen les traduccions franceses de Hoüel del citat opuscle de Lobatxevski i de l'*Appendix* de Bolyai, resepectivament; i el 1867, en el prefaci de la segona edició de *Die Elemente der Mathematik*, H. R. Baltzer, es refereix als dos autors, lamentant que la falta d'interés pel postulat hagi fet passar desapercebuts els seus treballs.

Voelke assenyala les dues cartes a Schumacher que hem citat com els principals desencadenants de la renaixença de la geometria no euclidiana[9], per ser les primeres en que Gauss parla sobre la qüestió, que van sortir a la llum. En moltes més ocasions l'alemany escriu sobre les seves conviccions i dels treballs de Lobatxevski i de Bolyai, però són documents que es van començar a publicar anys més tard[10]. Tot i així, la correspondència de Gauss es va trobar arrel de la seva mort, el 1855, i segurament, encara que no s'hagués editat, debia ser pública. Això justificaria el comentari de Baltzer, al prefaci de *Die Elemente*, fent referència també al treball de Bolyai:

> C'est seulment grâce à la publication des lettres de Gauss à Schumacher que la question non résolue a été remise à l'ordre du jour.[...]En même temps c'est grâce à Gerling que le travail de Bolyai, dirigé vers le même but et non moins réussi, a été arraché à l'oubli[11].
>
> És només gràcies a la publicació de les cartes de Gauss a Schumacher que la qüestió no resolta s'ha posat a l'ordre del dia. [...] A la vegada que és gràcies a Gerling que el treball de Bolyai, dirigit al mateix objectiu i no menys exitós, ha estat arrencat de l'oblit.

[9] A *Renaissance de la géométrie non euclidienne...*, [100], p. 50.

[10] Trobem referències a Lobatxevski a les cartes de Gauss a Gerling 4/2/1844 i 8/2/1844 (a [44], 1900, vol. 8, p. 235-236 i 236-237; també a Schaefer 1927, p. 666-667 i 667-668); i referències a Bolyai a la carta de Gauss a Gerling 14/2/1832 (a [44], 1900, vol. 8, p. 220; també a Schaefer 1927, p. 386-387), i a la carta de Gauss al seu pare, Farkas Bolyai, 6/3/1832, (a [44], vol. 8, 1900, p. 220-221; també a Schmidt and Stäckel, 1899, p. 108-113, traducció anglesa de Dunnington, 1955, p. 215).

[11] Fragment original en alemany a [5], p. III. Aquesta és la traducció al fracès donada per Voelke a [100], p. 52.

Baltzer es deu referir al següent fragment de la carta que Gerling va rebre de Gauss:

> [...]ich dieser Tage eine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwicklet, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Concentrirung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse.
>
> [...]Recentment he rebut d'Hongria un petit treball sobre geometria no euclidiana on trobo totes les meves idees i resultats desenvolupats amb una gran elegància, tot i que en forma concentrada, el que el fa difícil de seguir per una persona no familiaritzada amb el tema. L'autor és un oficial austríac molt jove, el fill d'un amic meu de juventud, amb qui sovint vaig discutir la qüestió al 1798, encara que les meves en aquell moment eren molt menys desenvolupades i madures de les obtingudes per aquest jove a partir de les seves pròpies reflexions. Considero aquest jove geòmetra, v. Bolyai, un geni de primera classe.
>
> [Gauss a Gerling 14/2/1832[12]]

Els comentaris de Baltzer donen a entendre que el que va fer que el postulat de les paral·leles tornés a estar al punt de mira, és l'autoritat de Gauss. El que ha cridat l'atenció dels matemàtics no és la pròpia qualitat dels estudis de Lobatxevski i Bolyai, sinó el fet que Gauss els aprova, comparteix les seves idees i considera que han estat desenvolupades de "manera magistral" i "amb una gran elegància". De la mateixa manera, Hoüel reconeix el valor de l'opinió de Gauss a la nota *Sur l'axiôme 11 d'Euclide*:

> Malheureusement ce grand mathématicien n'a jamais publié ses travaux sur ce sujet, et sans la publication récente de sa correspondance avec Schumacher, nous ignorerions encore l'existence des nouvelles théories qu'il a appuyées de son imposante autorité.[13]

[12] [44], vol. VIII, 1900, p. 221.
[13] A [53], Nota VI de l'apèndix, p. 72.

> Malauradament aquest gran matemàtic mai va publicar els seus treballs sobre el tema, i sense la recent publicació de la seva correspondència amb Schumacheer, encara ignorariem l'existència de les noves teories que ell va recolçar des de la seva imponent autoritat.

Anteriorment, en presentar la seva traducció de Lobatxevski [52], s'havia encarregat de deixar clar el recolçament que tenia la nova geometria per part de l'insigne matemàtic, explicant que la correspondència publicada per Peters mostra que Gauss havia meditat sobre la qüestió durant anys, i que va decidir renunciar a la propietat de les seves descobertes i donar "son adhésion complètè" a la Geometria imaginària de Lobatxevski[14]. Pren, a més, la decisió d'adjuntar alguns fragments de les esmentades cartes, potser perquè els lectors ho puguin comprovar per ells mateixos. Al mateix prefaci Hoüel fa la següent reflexió:

> Malgré la haute valeur de ces recherches, elles n'ont attiré jusqu'ici l'attention d'aucun géomètre, ce qui ne fût pas arrivé si Gauss les eût prises publiquement sous son patronage[15].

> Malgrat l'elevat valor d'aquestes recerques, no han cridat fins ara l'atenció de cap geòmetra, el que no hauria passat si Gauss les hagués pres públicament sota el seu patronatge.

També Battaglini, en la carta que escriu a Genocchi per donar-li a conèixer la nova geometria, fa notar la rellevància de la recent publicació de la coorespondència de Gauss. Senyala, concretament, les cartes amb dates el 17 de maig i el 12 de juliol de 1831 i el 18 de novembre de 1846, que figuren a l'apèndix de l'*Études géométriques* de Hoüel. A més, atribueix a Baltzer el mèrit d'haver estat el primer en cridar l'atenció sobre l'obra de Lobatxevski[16].

El descobriment de l'opinió de Gauss suposa, doncs, el punt de partida de la renaixença de la geometria no euclidiana. El seu posterior desenvolupament, però, no hauria estat possible sense la labor de traducció i divulgació de persones com Hoüel i Battaglini. Fent arribar les obres dels fundadors a un públic més ampli, van potenciar que es tornés a parlar del tema, i van dedicar grans esforços en fer entendre les noves idees en la comunitat científica.

---

[14] Veure el prefaci de l'*Études géométriques*, [52], p. I.

[15] [52], Prefaci del traductor, p. II.

[16] Veure la carta de Battaglini a Genochi, Napoli 14/5/67, a [33], p. 105. El fragment al que ens referim es cita a la p. 112 d'aquesta tesi.

2.1 Influència científica de G. J. Hoüel.

Guillaume Jules Hoüel (1823-1886) va néixer a Thaon, Calvados, pertanyent a una antiga família protestant de la Normandia. Va estudiar a Caen fins al 1843, any en que va ingresar a l'École Normale Supérieure. Va ensenyar matemàtiques al liceu fins que, el 1855, finalitza el seu doctorat a la Faculté de Sciences de la Sorbonne de París. Al 1859, obté la càtedra de matemàtiques pures de la Facultat de Ciències de Bordeaux, succeïnt a Le Besgue.

Els seu serveis a la ciència són nombrosos i abarquen diferents àrees, com són l'anàlisi, la geometria, la mecànica celest i l'astronomia. És molt destacable la seva labor en la creació i revisió de taules de càcul. Considerava que eren una eina molt útil per facilitar la feina dels matemàtics, ja que el càlcul és en les matemàtiques com l'experiència en les ciències físiques i naturals[17]. Les seves aportacions tenen l'objectiu de fer les taules més pràctiques en el seu ús. A la vegada que corregeix els errors trobats a les taules de logaritmes existents, construeix de noves donant un gran nombre de xifres decimals. D'altra banda, també elabora taules de només 5 decimals, més apropiades pel seu ús a l'ensenyament i a l'astronomia, afegint a més algunes fórmules molt útils.

A Bourdeaux, imparteix classe de càlcul infinitessimal, el que el porta a interessar-se pels fonaments d'aquesta disciplina. Amb el material que anirà perfeccionant al llarg dels anys es publicarà el seu *Cours de calcul infinitésimal*[18]. A la introducció, tracta els principis generals del càlcul d'operacions independentment de les quantitats involucrades i també reflexiona sobre la idea de quantitat. Segurament, motivat per l'acusació de falta de rigor, que se l'havia fet durant els primers anys a la universitat, en presentar les quantitats negatives i les imaginaries sense demostrar apropiadament les regles de càlcul entre elles, Hoüel arriba, pel seu compte, a les mateixes conclusions que Hamilton, Grassmann i Hankel: que les regles de càlcul es poden extentre a les quantitat negatives i complexes. Un cop acceptat que l'ús d'aquestes quantitats no porta a cap contradicció, però, encara cal veure si se'ls hi pot donar una interpretació geomètrica o física. A aquesta qüestió es refereixen sovint les cartes rebudes del matemàtic italià Giusto Bellavitis, qui

[17]Segons diu Brunel a la seva biografia de Hoüel, [28], p. 37.

[18]Autografia de 1871, i posterior edició de quatre volums publicats consecutivament del 1878 al 1881.

va crear el *càlcul d'equipolències*, precursor del càlcul vectorial, que Hoüel va donar a conéixer a França. Bellavitis, amb el seu mètode, intenta donar una justificació geomètrica als nombres complexos. Les entitats que descriu són equivalents als vectors que fem sevir avui dia per representar geomètricament els nombres complexos , i mostra com fer amb elles operacions anàlogues a les algebraiques. Bellavitis, a les seves cartes, es possiciona, com Hoüel, a favor d'acceptar les quantitats complexes, però no comparteix la idea d'alguns matemàtics de que els nombres imaginaris siguin una quantitat algebraica, per ell $\sqrt{-1}$ és un símbol que representa un objecte geomètric[19].

La feina de Hoüel com a professor al liceu el va portar a interessar-se per la geometria elemental i pel seu ensenyament. La seva recerca sobre els fonaments apareix a l'*Essai d'une exposition rationnelle des principis fondamentaux de la géométrie élémentaire* [51], el 1863, i en una versió més completa, el 1867, a l'*Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire ou comentaire sur les XXXII premières porpositions d'Euclide* [53], que va veure una segona edició el 1883, [63]. En aquests últims també indicarà els últims descubriments fets per Lobatxevski i Bolyai sobre la teoria de les paral·leles.

Hoüel veu una debilitat axiomàtica en els tractats de geometria. La mateixa discussió sobre si el postulat de les paral·leles és o no un axioma és un síntoma evident de que no s'ha reflexionat prou sobre els fonaments geomètrics. I creu que, lamanentablement, no s'està treballant en fer una revisió en l'exposició de la geometria elemental, que és del tot necessària:

> Si l'on excepte les tentatives nombreuses qui ont eu pour objet la question insoluble de la théorie des parallèles, et les vagues dissertations de quelques métaphysiciens sur l'origine des idées géométriques, rien n'a été fait en France, jusqu'à ces derniers temps, pour perfectionner l'exposition des premiers principes de la science de l'étendue.[20].
>
> Exceptuant les nombroses tentatives que han tingut per objectiu la qüestió irresoluble de les paral·leles i de les vagues disertacions d'alguns metafísics sobre l'origen de les idees geomètriques, a França, no s'ha fet res per perfeccionar l'exposició dels primers principis de la ciència de l'espai.

[19]Carta de Bellavitis a Hoüel del 5/5/1868, Archiu de la Bibliothèque Muncipale de Caen.

[20]Prefaci de la primera edició de l'*Essai Critique*, 1867, [53], p. V.

Es proposa, per tant, examinar els axiomes, per tal d'aconseguir una base sòlida a partir de la que construir la Geometria.

En l'exposció, Hoüel, defensa la metodologia clàssica dels *Elements* d'Euclides, davant de les darreres tendències, que seguien la línea del manual de Legendre, que era el més estès i utilitzat a França:

> Nous avons dû examiner, à cette occasion, les idées qui ont servi de base aux *Éléments de Legendre*, et qui dominent encore dans la plupart des traités modernes, auxquels celui de *Legendre* a servi de type.[...]
> L'immense succès qu'ont eu les *Éléments de Legendre*, à leur apparition, n'est pas dû seulement à la renommée scientifique de cet illustre analyste. Il tient aussi aux éminentes qualités de précision et de clarté qui distinguent la rédactions de ce livre, où l'auteur a si bien su reproduire la forme et le style des géomètres de l'antiquité. Malheureusement, *Legendre*, entraîné par l'exemple de ses contemporains, n'a pas su conserver dans toute leur pureté les méthodes vraiment géométriques des anciens, et il les a profendément altérées, en y mètant les procédés arithmétiques de l'Analyse moderne.
> Chez *Euclide*, la Géométrie forme une science complète, que se suffit à ell-même, et n'invoque nulle part, dans ses démonstrations, le secours de la science des nombres[21].

> Hem d'examinar, en aquesta ocasió, les idees que serveixen de base als *Elements de Legendre*, i que dominen encara en la major part dels tractats moderns, als que aquest de Legendre ha servit de model.[...]
> L'immens éxit que van tenir els *Elements de Legendre*, en el moment de la seva aparició, no es deu només al renom científic d'aquest il·lustre analista. Té també eminents qualitats de precissió i de claredat que distingeixen la redacció d'aquest llibre, on l'autor ha sabut reproduir tan bé la forma i l'estil dels geòmetres de l'antiguitat. Malauradament, *Legendre*, arrossegat per l'exemple dels seus contemporanis, no ha sabut conservar en tota la seva puresa els mètodes veritablement geomètrics dels antics, i els ha alterat profundament, en incorporar els procediments aritmètics de l'Anàlisi moderna.
> En l'*Euclides*, la Geometria forma una ciència completa, que es basta a ella mateixa i no invoca enlloc, en les seves demostracions, el socors de la ciència dels nombres.

A més d'aquestes raons, Hoüel creu que el text d'Euclides és un model de

[21] Introducció del *Essai critique*, 1867, [53], p. 3.

com s'aplica la lògica de manera rigurosa a partir d'uns axiomes, que ha de ser un dels principals objectius en l'ensenyament de les matemàtiques. En la redacció de manuals per les escoles, doncs, creu que el més apropiat seria fer una reedició de l'Euclides no literal, sino revisada, adaptant-la al nivell dels estudiants segons la seva edat, modernitzant l'exposició, fent les proposicions més concises i clares, incorporant les idees que suposen les últimes troballes en relació a les geometries no euclidianes... Aquesta línea és la que s'estava seguint a altres països europeus, com Alemania, on Richard Blatzer havia publicat *Die Elemente der Mathematik* [5], considerat per Hoüel l'"únic tractat de Geometria Elemental veritablement científic del moment"[22].

Hoüel exposa les seves opinions sobre com hauria d'estructurar-se l'ensenyament de les matemàtiques a la nota *Réflexions sur l'enseignement de la Géométrie élémentaire* de l'*Essai Critique*[23]. En aquesta, valora que caldria començar per un primer ensenyament exclusivament experimental, mostrant les aplicacions més immediates a la vida quotidiana i a altres ciències com la geografia, la física o l'astronomia. En aquest nivell, proposa augmentar el nombre d'axiomes, que s'anirà reduïnt gradualment, i substituir les demostracions difícils per explicacions i per verificacions experimentals. Posteriorment, en un segon grau destinat a les classes de ciències dels liceus, proposa seguir els *Elements* d'Euclides i tractar les primeres nocions sobre seccions còniques.

Les idees de Hoüel sobre l'ensenyament eren molt respectades, especialment a Itàlia, com veurem al següent capítol. La seva correspondència amb els principals matemàtics italians en relació al debatut retorn als Elements d'Euclides com a llibre de text, mostra la gran consideració en que tenien la seva opinió i els seus treballs. A França, en canvi, sembla que no acaba d'arribar la reforma en l'ensenyament de la geometria i en la redacció dels manuals, que Hoüel considera necessària. Aquesta és la raó que l'empeny a fer la segona edició de l'*Essai Critique*: "Per això no he volgut abandonar la lluita"[24].

Hoüel va ser un personatge molt rellevant a la seva època per la seva labor com a traductor[25]. El seu coneixement de vàries llengües europees: anglès,

[22] "[...] Dr. Baltzer, l'auteur du seul Traité de Géométrie élémentaire vraiment scientifique que ait paru de nos jours,[...]". Prefaci de l'*Essai Critique* de 1867, [53], p. VII.

[23] Nota IX de l'apèndix, a [53], p. 81-85, i a [63], p. 88-91.

[24] "Je n'ai pas voulu pour cela abandonner la lutte". Prefaci de l'*Essai Critique* de 1883, [63], p. V.

[25] Per tenir una relació completa de totes les obres i traduccions de Hoüel, veure la

alemany, italià i espanyol, junt amb la facilitat per aprendre de noves (va aprofitar que tenia un estudiant rus per aprendre també aquest idioma[26]), el van portar a traduïr obres que van ser decicives en l'esdevenir de la ciència matemàtica. Especialment destacables pel nostre estudi són les traduccions dels treballs de Lobatxevski [52] i Bolyai [54], l'article de Battaglini [56] i les de les dues memòries, [57] i [59], de Beltrami, qui havia conegut l'escrit de Lobatxevski precisament per la traducció del matemàtic francès.

Hoüel comença a estudiar les geometries no euclidianes al 1866. N'és una prova el manuscrit trobat a la biblioteca universitària de Bordeaux[27], intercalat entre les pàgines d'una versió més completa de l'*Essai* del 63, [51]. En les anotacions, fetes en el sobre d'una carta timbrada l'any 1866, Hoüel reflexiona sobre la teoria de les paral·laleles i el que suposen les aportacions fetes per Lobatxevski. Hoüel acaba, referint-se a Baltzer com la persona que el va informar sobre les idees del geòmetra rus i dels hongaresos Wolfang i Janos Bolyai:

> Je dois l'idée de ces remarques à une intéressante communication de M. Baltzer qui se propose de la développer dans la seconde édition de ses excellents éléments de géométrie[28].
>
> Dec la idea d'aquestes observacions a una interessant comunicació del Sr. Baltzer, qui es proposa desenvolupar-la en la segona edició dels seus excel·lents elements de geometria.

I al prefaci l'*Essai Critique*[29], es torna a referir a la influència que va tenir Baltzer en el seu interés per la geometria no euclidiana. L'alemany va ser el primer en introduir les nocions no euclidianes a un tractat de geometria elemental, en aquesta segona edició dels seus elements [5]. Al juliol de 1866, escriu a Hoüel dient que les idees de Bolyai i Lobatxevski eren desconegudes a tot el món científic i el convida a divulgar-les a França[30].

El mateix any 1866, en que té coneixença de la geometria de Lobatxevski,

biografia escrita per Brunel, [28], p. 5-17.

[26]Sembla que ho va aconseguir, Battaglini a la seva carta a Hoüel del 19/7/71, fa menció als seus coneixements de rus.

[27]Brunel transcriu aquest manuscrit a [28], p. 25-31.

[28]Citat per Brunel a [28] p. 31.

[29]A la primera edició de 1867, [53], p. VII.

[30]Carta de Baltzer a Hoüel 19/7/66, *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris. Citada per Voelke a [100], p. 60, n. 3.

Hoüel, publica la traducció de *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* sota el títol *Études géométriques sur la Théorie des parallèles par N. I. Lobatschewsky, conseiller d'État de l'empire de Russie, et professeur à l'université de Kazan, suivi d'un extrait de la correspondace de Gauss et de Schumacher*, [52]. Al prefaci explica que l'objectiu de l'autor és demostrar que no existeix *a priori* cap raó per afirmar que la suma dels tres angles d'un triangle no pot ser menys de dos rectes. Valora aquestes recerques com l'inici d'"un nou dia en els principis fonamentals de la geometria", i considera que, a més d'obrir una via d'investigació encara inexplorada, suposen un gran avanç en l'ensenyament, ja que "releguen a les quimeres" l'esperança d'aconseguir demostrar el postulat d'Euclides d'una altra manera que no sigui per l'experiència[31].

La traducció de l'*Appendix* de Bolyai, [54], apareix un parell d'anys més tard, degut a les dificultats que va tenir per fer-se amb un exemplar. Hoüel diu, a la nota del traductor, que va ser gràcies a l'arquitecte Franz Schmidt de Temesvár (Hongria), que va aconseguir l'article. En la seva biografia de Hoüel, [49], Halsted explica els detalls. Sembla que Schmidt va trobar, per casualitat, una còpia del *Essai* del 63 i volent continuar amb els seus estudis de matemàtiques, va escriure a Hoüel demanant-li consell. Junt amb la seva resposta, Hoüel li demana ajut per aconseguir el treball de Bolyai, i tot el material que pugui trobar per una biografia dels dos matemàtics hongaresos[32]. Schmidt va aconseguir dos exemplars i va escriure la biografia de Wolfang i Janos Bolyai, que apareix publicada junt amb la traducció francesa. Hoüel va enviar un dels dos exemplars a Battaglini, demanant-li que donés a conèixer les idees que es presenten a Itàlia[33], i es va quedar l'altre per fer la traducció, que apareixerà sota el nom: *La Science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori), suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiome XI, par Jean Bolyai, Capitaine au Corps du génie de l'armée autrichienne, précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai par Fr. Schmidt.*

A més dels articles de Battaglini i Beltrami esmentats més amunt, Hoüel va

[31] Al prefaci del traductor de l'*Études géométriques*, [52], p. I-II.

[32] Halsted diu que Schmidt li va mostrar personalment les cartes que havia rebut de Hoüel a [49], p. 100.

[33] Veure les cartes de Battaglini a Hoüel, Naples 13/6/1867 i 17/6/1867, on li agraeix que li hagi enviat l'article i diu que el publicarà, a [30], p. 66-67.

traduir *Über die thatsächlichen Grundlagen der Geoemtrie* de Helmholtz,[58], i per culminar la sèrie de traduccions de les obres més rellevants de la història de la geometria no euclidiana, el 1870, publica la traducció de l'*Habilitationsvortrag* de Riemann del 1854 [87], a [62], i el 1871, la del treball de Klein *Über die sogennante Nicht-Euklidische Geoemtrie*, a [65]. Aquesta darrera apareix al *Bulletin des Sciences mathémaiques et astronimiques*, que Hoüel va crear junt amb Gaston Darboux, el 1870, i on va donar a conèixer nombroses memòries publicades a revistes estrangeres.

La rellevància del matemàtic francès en el context de l'època queda manifesta quan es consulta el *Dossier Hoüel* dels *Archives de l'Académie des sciences de Paris*. La llista de matemàtics amb que mantenia correspondència, tant dins del seu país, com a Alemania i a Itàlia, és llarguíssima. Entre les seves cartes, en trobem signades per Baltzer, Battaglini, Bellavitis, Beltrami, Casorati, Cremona, Darboux, De Tilly, Forti, Klein, D'Ovidio, Rubini,... i molts altres. Però aquest petit recull de la seva feina, és una demostració definitiva de la seva destacable contribució en la història de les matemàtiques. Amb les seves traduccions, Hoüel, aconsegueix fer arribar les obres, pràcticament oblidades, de Lobatxevski i Bolyai, a un públic més ampli, implusant que els matemàtics tornessin a investigar sobre la qüestió[34]. En particular, Beltrami llegeix la traducció de Lobatxevski:

> Le dit écrit (celui qui a pour titre "Interprétation etc) a été rédigé en l'automme de l'année passée, d'après des réflexions qui avaient pullulé en moi à l'époque de la publication de votre traduction de Lobatschewsky.
>
> L'esmentat escrit (el que té per títol "Interpretació etc) el vaig redactar la tardor de l'any passat, seguint reflexions que m'havien pul·lulat durant l'època de la vostra traducció de Lobatxevski.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 18/11/68[35]]

Poc després, amb les seves memòries, aportarà arguments trascendentals per l'acceptació de la geometria imaginària. Fet que no passarà desapercebut pel Hoüel, que immediatament s'encarregarà de traduir i utilitzar aquests

[34]Battaglini en la seva carta a Hoüel del 9 de febrer de 1868, a [30], p. 69, li reconeix l'esforç per posar a l'abast dels geòmetres aquestes obres. Veure també el reconeixement per part de Cremona a la seva carta del 29 de gener, *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences, Paris.

[35]A [23], p. 65

articles per recolçar les noves idees.

També en l'opertura de nous camps d'investigació, va tenir gran importància la traducció de la memòria de Riemann, ja que aquest escrit va fer que els matemàtics comencencin a treballar amb espais n-dimensionals. D'altra banda, els seus propis escrits van potenciar la recerca sobre els fonaments de la geometria. Podem afirmar, doncs, que els seus treballs, junt amb la gran defensa i divulgació que va fer de les noves idees, van ajudar a saccejar els fonaments de les matemàtiques, el que provocà que s'establissin uns nous principis en els que basar aquesta ciència.

2.2 La postura de Hoüel respecte a les noves idees.

Al contrari que la comunitat científica del seu país[36], Hoüel accepta immediatament la geometria no euclidiana. La seva predisposició a favor de les noves idees, prové de la recerca sobre els fonaments de la geometria elemental, que l'havia portat a creure que el postulat de les paral·leles no es podia demostrar. Ja a l'*Essai d'une exposition rationnelle*, escrit al 1863, abans de conèixer els treballs de Lobatxevski i Bolyai, parteix de la consideració de que si les recerques de tants "esperits eminents" no han arribat a cap resultat satisfactori, és probablement, perquè han escomés un "problema irresoluble"[37]. La convicció de Hoüel es basa en la resistència que l'enunciat havia oposat davant els esforços de tantíssims geòmetres al llarg de la història, però, apart de la confiança en l'habilitat dels investigadors, no és capaç d'alegar cap prova definitiva. En llegir l'opuscle de Lobatxevski, Hoüel troba els arguments que estava cercant[38]. A les seves primeres impressions sobre aquest treball, recollides al document trobat a la biblioteca de Bordeaux[39], afirma:

> Ce fait que l'hypothèse de la somme des angles d'un triangle $<$ 2 droits

[36] Degut a la gran influència de Legendre, que estava convençut de la veracitat del postulat i pensava haver solucionat la qüestió, els matemàtics francesos no estaven interessats en el problema de les paral·leles.

[37] Veure la introducció, [51], p. 171.

[38] Veure la carta de Hoüel a De Tilly 25/2/1875, *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des Sciences, citada a [100] p. 61.

[39] Transcrit per Brunel a [28], p. 25-31.

> conduit, sans aucune contradiction, autre que celle de l'expérience, à un système complet de géométrie, [...] nous semble prouver d'une manière irréfutable que l'axiome XI ne peut être contenu comme conséquence dans les principes précédents,...

> El fet que la hipòtesi de que la suma dels angles d'un triangle sigui menor que dos rectes condueixi, sense cap contradicció, apart que la de l'experiència, a un sistema complet de geometria, [...] ens sembla que prova de manera irrefutable que l'axioma XI no pot estar contingut com a conseqüència dels principis anteriors,...

Efectivament, si el postulat es pogués demostrar a partir dels altres principis, el prendre la seva negació com axioma, hauria portat a una contradicció. Però, com sabem, el fet de no haver trobat cap contradicció, no vol pas dir que no hi sigui, pel que l'argument de Hoüel no constitueix una prova formal. Tot i així, el fet que s'hagi arribat fins a construir un nou sistema geomètric, és per Hoüel una raó més que suficient. Així a l'*Essai Critique* del 1867, ja comença referint-se al postulat directament com "la qüestió irresoluble de la teoria de les paral·leles"[40], i adjunta a l'apèndix la nota *Sur l'axiome 11 (dit postulatum) d'Euclide*, on exposa aquestes conclusions:

> Des recherches dejà anciennes, mais qui ont passé inaperçues jusqu'à ces derniers temps, ont mis hors de doute que la démonstration de l'axiôme 11 d'Euclide (notre axiôme IV) ne peut pas se déduire des axiômes précédents[41].
> [...]
> Il n'y a, en effet, aucune incompatibilité entre les premiers axiomes (nos axiomes I, II et III) et la supposition que la somme des angles d'un triangle soit moindre que 2 angles droits. J. Bolyai et Lobatchefsky ont tiré les conséquences de cette supposition, sans jamais se trouver en contradiction avec la logique, mais seulment avec l'expérience, telle que nous la permettent nos moyens limités.
> [...]
> Lobatchefsky a fait voir que l'on pourrait construire sur cette hypothèse un système complet de Géométrie, à laquelle il a donné le nom de *Géométrie imaginaire*[42].

[40] "la question insoluble de la théorie des parallèles", al prefaci de [53], p. V.
[41] [53], Nota VI de l'apèndix, p. 72.
[42] Ibidem, p. 76-77.

> Recerques ja antigues, però que han passat desapercebudes fins aquests últims temps, han posat fora de dubte que l'axioma 11 d'Euclides (el nostre axioma IV) no es pot deduir dels axiomes precedents.
> [...]
> No hi ha, en efecte, cap incompatibilitat entre els primers axiomes (els nostres axiomes I, II i III) i la suposició de que la suma dels angles d'un triangles sigui menor que 2 angles rectes. J. Bolyai i Lobatxevski han tret les conseqüències d'aquesta suposició, sense trobar cap contradicció amb la lògica, només amb l'experiència, tal com ens la permeten els nostres mitjans limitats.
> [...]
> Lobatxevski ha fet veure que es pot construir sobre aquesta hipòtesi un sistema complet de Geometria, al que li ha donat el nom de *Geometria imaginària*.

Per explicar-se el perquè de la creença inicial de Hoüel en la impossibilitat de demostrar l'axioma 11, cal entendre la seva manera de concebre la ciència de l'espai. Un dels trets fonamentals del seu pensament, i que el diferencia de molts dels seus contemporanis, és que no creu que la geometria sigui una ciència a priori. Hoüel creu que els axiomes provenen de l'experiència. No comparteix, doncs, la filosofia kantiana, que anys enrera havia suposat el primordial impediment epistemològic perquè la comunintat científica acceptés les recerques de Bolyai i Lobatxevski, i perquè Gauss exposés publicament les seves opinions al respecte.

A la introducció de l'*Essai* del 63[43], Hoüel planteja que en intentar resoldre el problema de les paral·leles s'està seguint un camí equivocat i que s'ha exagerat sobre la importància de la qüestió degut a "idees inexactes sobre la naturalesa i l'origen de les veritats primordials de la ciència de l'extensió". Continua explicant que l'error prové de partir del "fals punt de vista metafísic" de considerar la geometria com una ciència de raonament pur, i de voler admetre com a axiomes només veritats necessàries. Per Hoüel, la geometria, és una ciència com la física o la mecànica, que estudia una magnitud concreta, en aquest cas l'extensió, que afecta als nostres sentits d'una determinada manera. Així, és "només per les revelacions dels sentits" que coneixem les seves propietats fonamentals, "indefinibles i idemostrables", i a partir

[43]Veure [51], p. 171-178. La mateixa introducció es troba a les obres del 67 i del 83, [53], p. 1-8, i [63], p. 1-10, respectivament. Nosaltres ens referirem a partir d'ara a l'*Essai* de 1867.

d'elles arribem a altres resultats, amb l'ajuda del raonament lògic.

> Ainsi les sens seul peuvent nous mettre en relation avec l'étendue, et ils nous en font connaître déjà un grand nombre de propriétés, sans emprunter le secours de la logique déductive. Parmi ces propiétés, les unes sont tellement simples, tellement faciles à constater, que la force de l'habitude, jointe à la tradition constante de l'Ecole, a bien pu faire oublier leur véritable origine, et le rôle essentiel qu'ont joué les sens dans leur découverte[44].

> Així són només els sentits els que ens poden posar en relació amb l'extensió, i ja ens donen conèixer un gran nombre de propietats, sense recórrer al socors de la lògica deductiva. Entre aquestes propietats, algunes són tan simples, tan fàcils de constatar, que la força del costum, junt amb la tradició constant de l'Escola, bé ha pogut fer oblidar el seu veritable origen, i el paper essencial que han jugat els sentits en la seva descoberta.

D'aquesta manera, Hoüel delata el paper de l'experiència en la tria dels axiomes. No es tracten de veritats innates de les que parteix el nostre pensament, com afirmen les teories kantianes, és un coneixement que han percevut els nostres sentits. El que succeeix és que, algunes de les propietats que experimentem les veiem tan clarament, que hem acabat creient-les naturals a l'intel·lecte humà. Hoüel es refereix també als experiments astronòmics de Lobatxevski[45], considerant que, en haver-se repetit tant i de tantes maneres, revelen una probabilitat molt alta de que el postulat sigui cert, i que això ha portat a que fàcilment se'l prengui per una certesa a priori.

Així, per Hoüel, la certesa de moltes de les propietats geomètriques no prové de que puguin ser demostrades, sinò de l'experimentació. Quin és llavors, per ell, el paper de la lògica en la geometria? A la citada introducció, continua reflexionant que un podria tenir la idea de suprimir moltes demostracions i, remetent-se a l'experiència, prendre un major nombre de proposicions com a axiomes. Però, d'aquesta manera, la geometria es convertiria en un conjunt de veritats aïllades. El paper de les demostracions lógiques és posar de manifest les connexions existents entre les proposicions, aportant al lector una claredat impresindible per després poder arribar a altres veritats menys evi-

[44] A [53], p. 2.
[45] Hoüel fa aquesta reflexió al document de Bordeaux citat per Brunel [28], p. 31.

dents[46]. Caldrà, doncs, decidir quines de les veritats experimentals es prenen com a axiomes i quines no. Hoüel explica que aquesta decisió és arbitraria, donades dues veritats que són conseqüència l'una de l'altra, es pot prendre qualsevol d'elles com a axioma, resultant llavors l'altra un teorema. Ara bé, el que ha quedat clar, després de les nombroses tentatives per demostrar el postulat de les paral·leles, és que hi ha un nombre mínim d'axiomes a seleccionar que no es pot reduir. És a dir, Hoüel valora que la història ens ha ensenyat que el postulat és idemostrable a partir dels altres[47] i que si no el prenem, l'hem de canviar per un altre equivalent.

Fem un incís sobre aquesta darrera afirmació, observem que s'està donant, precisament, la definició d'axioma independent. Ho senyalem perquè Stump considera que Hoüel no utilitza la paraula independent en el sentit lògic[48], en canvi, a nosaltres ens sembla que sí. Veiem un altre exemple de com utilitza Hoüel el terme:

> Il peut se faire, d'autre part, que les lois admises ne soient pas toutes distinctes et indépendantes les unes dels autres, et que quelques-unes d'entre elles fassent partie des conséquences que l'on peut tirer de la combinaison des autres.
>
> D'altra banda, podria ser que les lleis admeses no siguin totes diferents i independents les unes de les altres, i que algunes d'elles formessin part de les conseqüències que un pot deduir combinant les altres[49].

La visió empirista de Hoüel, comporta la idea de que el postulat de les paral·leles, així com la resta de propietats geomètriques, s'ha de verificar físicament. Lobatxevski ja creia en la necessitat de constatar el postulat. Arrel de la seva recerca, afirma que "res autoritza, apart de les observacions directes" a suposar que en un triangle la suma dels angles és igual a dos angles rectes[50]. Aquesta consideració va motivar els seus experiments, que

[46]Veure [53], p. 4. Voelke cita la carta de Hoüel a Genocchi 15/09/1869 on també parla sobre aquesta qüestió, a [100], p. 69.

[47]Tal i com exposa a l'inici de la seva nota *Sur l'axiôme 11 (dit* postulatum*) d'Euclide*, a [53], p. 72.

[48]Veure [97], p. 22: "though he too does not yet use the word independent in the logical sense"

[49]A [63], p. 63-64.

[50]"...j'ai atâché de prouver que rien n'autorise, si ce ne sont les observations directes, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits,..." Veure l'article*Géométrie imaginaire* publicat al diari de Crelle el 1837, [74], p. 295.

tenen per objectiu determinar el valor de la constant k o el dèficit d'un triangle molt gran. Recordem que quan la constant k, que apareix a les fórmules de la geometria no euclidiana, tendeix a infinit, es donen els resultats euclidians. D'altra banda, Lambert ja havia demostrat que el dèficit d'un triangle, és a dir, la diferència entre la suma dels seus angles i 180°, és proporcional a la seva àrea. Per tant, si la realitat és no euclidiana, prenent un triangle molt gran, la suma dels seus angles ha de ser molt més petita que dos rectes. En mesurar la suma dels angles de triangles astronòmics, Lobatxevski obté que la constant k ha de ser molt gran i que el dèficit és molt petit, quasi zero. Conclou, doncs, que la realitat és pràcticament euclidiana. Clar que, el darrer resultat, també pot significar que aquest triangle, tan gran per nosaltres, és en realitat, infinitament petit; però en tot cas, podem considerar euclidiana la realitat que ens envolta, limitada per les nostres capacitats d'observació. La idea de que la geometria euclidiana havia de ser físicament verificada, la trobem igualment a les cartes de Gauss, a qui la possibilitat lògica d'una geometria basada en la negació de l'axioma de les paral·laleles, també el va portar a pensar que la geometria euclidiana no és a priori, sino experimental.[51]

Partir del reconeixement de que la geometria no és una ciència de raonament pur, suposa una diferència epistemològica fonamental per poder acceptar la geometria no euclidiana. Pels kantians, els axiomes són veritats absolutes, innats a la manera que té l'ésser humà de veure la realitat, no pot existir, per tant, cap geometria que no sigui la euclidiana. En canvi per Hoüel, que Bolyai i Lobatxevski hagin construït un sistema geometric lògicament coherent prenent un axioma contrari al d'Euclides, significa que totes dues geometries són possibles, és només l'observació directa la que ens porta a triar la geometria euclidiana. Però en cas que la inducció experimental ens portés decidir que l'axioma de Lobatxevski és més apropiat, llavors, hauriem de desbancar la geometria tradicional en favor de la no euclidiana.

[51] Gauss reconeix per primer cop que no troba res d'absurd en la hipòtesi no euclidiana a la seva carta a Gerling del 11/4/1816 (A Schäfer 1927, p. 121-124, i també a [44], vol. 8, p. 168-169). A seva carta a Olbers del 28/04/1817 (A Schilling 1900/09, p. 651-653, i a [44], vol. 8, p. 177, trad. anglesa Dunnington 1955, p. 180), diu que la geometria s'ha de considerar en el mateix rang que la mecànica, que no és a priori, i ho torna a dir a les cartes a Bessel del 27/1/1829 i del 9/4/1830 (A Auwers 1880, p. 487-490, o a [44], vol. 8, p. 200; i a Auwers 1880, p. 495-499, o [44], vol. 8, p. 201 i vol. 9, p. 363).

Al 1875, Hoüel escriu *Du rôle de l'expérience dans les Sciences Exactes*[52], on havent madurat les seves idees, aporta un raonament estructurat i concís, sobre com es construeix la geometria. Una ciència exacta, consta de dues parts ben diferenciades: la primera es basa en l'observació i l'experiència, consisteix a reunir fets i a establir per inducció les lleis i principis que serviran de base a la ciència; l'altra és una branca de la lògica general i s'encarrega de combinar aquests principis fonamentals per predir fets nous. Construïnt la ciència exacta sobre fonaments obtinguts a partir de l'observació, veurem que els resultats que s'obtenen mitjançant la deducció lógica coincideixen amb la realitat experimental. La realitat serveix com a reafirmació de que les conclusions a les que arribem són certes, i perquè els resultats es puguin considerar veritables, no la poden contradir.

Però l'observació experimental no és completa i no es pot fer amb rigurosa exactitud, pel que no es pot garantir que les lleis que obtenim siguin certes.

> On reconnaîtra leur fausseté lorsque, combinées par les procédés logiques elles aboutiront à des conséquences contradictoires, ou lorsque les faits nouveaux qu'elles conduiraient à prévoir seront en désaccord avec la réalité objective[53].
>
> La seva falsetat es reconeixerà quan, combinades pels procediments lògics, ens portin a conseqüències contradictòries, o quan els nous fets als que ens condueixin estiguin en desacord amb la realitat objectiva.

És a dir, si arribem a resultats que estan en "desacord amb la realitat objectiva", és degut a que les lleis que hem obtingut per inducció no eren certes. Del que se segueix que, en prendre un axioma com la negació del de les paral·leles, que podriem considerar que és físicament fals, hauriem d'arribar a una contradicció o, com és el cas, a resultats que no s'adequen a la realitat. Hem de concloure, en conseqüència, que la geometria no euclidiana és físicament falsa. El raonament de Hoüel, no sembla, doncs, dissentir gaire dels arguments que donaven molts matemàtics per rebutjar qualsevol geometria que no fos l'euclidiana. Per molts empiristes contemporanis, aquesta contradicció amb la realitat suposava justament la no acceptació de la nova

[52] Iednota českych mathématiků, Prague, 1875, traduïda a l'alemany per F. Müller: Über die Rolle der Erfarung in den exacten Wissenschaften, Grunert Arch. T.LIX, 1876, p. 65. La nota es recull també a la segona edició de l'*Essai Critique*, [63], p. 63-70.

[53] *Du rôle de l'expérience*, nota I de l'apèndix de [63], p. 63.

geometria. Però les reflexions de Hoüel van encara més enllà: que la geometria no euclidiana no s'adequï a la realitat física, no vol pas dir que no sigui "absolutament certa".

Doncs, un cop hem constatat que els principis, triats arbitrariament, són compatibles, no es contradiuen entre ells, i independents els uns dels altres, garantint que el nombre seleccionat és el mínim possible; la ciéncia que es contrueix basant-se en aquests axiomes i seguint les normes de la deducció lógica per arribar als resultats, és certa des del punt de vista abstracte, tot i que no concordi amb els fets reals que pretenia representar:

> Toute science abstraite, fondée sur des hypothèses non contradictoires et dévelopée conformément aux règles de la loguique, est en elle-même *abslument vraie*. Mais elle peut bien n'avoir aucun rapport avec les phénomènes naturels, et se trouver fausse lorsqu'on l'examine au point de vue de la réalité physique[54].

> Tota ciència abstracta, basada en hipòtesis no contradictòries i desenvolupada comforme a les regles de la lògica, és en si mateixa *absolutament certa*. Però bé pot no tenir cap relació amb els fenòmens naturals, i resultar falsa quan un l'examina des del punt de vista de la realitat física.

És a dir, per saber si una geometria és certa des del punt de vista matemàtic, no cal inquietar-se per si està d'acord amb el mon exterior, amb els sentits o amb la nostra intuïció, només cal veure si hi ha una contradicció entre les hipòtesis que prenem[55]. Ara bé, si el que es vol és aplicar aquesta teoria científica a una determinada realitat i que condueixi a resultats pràctics, llavors els principis s'han de triar en comformitat a aquesta realitat observada. La geometria no euclidiana, per tant és certa, però com que no sembla que es pugui aplicar a l'espai que ens envolta, l'hem de considerar com una teoria abstracta que només existeix al nostre pensament, d'aquí el nom de *Geometria Imaginària* que li va posar Lobatxevski. Hoüel conclou la nota *Sur l'axiome 11 (dit postulatum) d'Euclide* considerant que la geometria euclidiana és suficient en la pràctica i que la no euclidiana mai tindrà més interés que el filosòfic, punt de vista en el que adquireix, en canvi, una gran importància[56].

[54] *Du rôle de l'expérience*, nota I de l'apèndix de [63], p. 66.
[55] Veure la carta de Hoüel a De Tilly del 9/12/73, citada per Voelke a [100], p. 71.
[56] Veure [53], p. 77-78 o [63], p. 85.

Com veiem, Hoüel distingeix clarament entre la consistència lògica d'una teoria abstracta i la seva validesa experimental. Sobre aquesta diferència, en parla a una carta a De Tilly [57]:

> On croyait qu'il existait une *vrai* géométrie et une *fausse*, et que pour les distinguer il ne s'agissait que savoir laquelle s'accordait le mieux avec la physique. Il me semble que le point de vue doit être maintenant complètement changé, et que l'on doit faire une distinction profonde entre la vérité intinsèque d'une doctrine abstraite et son utilité au point de vue des applications physiques.
>
> Es creia que existia una geometria *certa* i una *falsa*, i que per distingir-les no calia més que saber quina concordava millor amb la física. Em sembla que el punt de vista ara s'ha de canviar completament, i que s'ha de fer una distinció profunda entre la veritat intrínseca d'una teoria abstracta i la seva utilitat des del punt de vista de les aplicacions físiques.

Hoüel, per tant, considera la geometria no euclidiana, com una teoria matemàtica certa, perquè és lògicament coherent, i defensa aquesta postura davant els empiristes contemporanis, que en tenir com a criteri de veritat, l'adequació a la realitat, s'oposaven a que la geometria imaginària pogués ser acceptada. En semblant escenari, l'aparició dels dos articles claus de Beltrami [15] i [16], va tenir una profunda significació. Hoüel de seguida se n'adona del canvi que suposen per l'acceptació de la geometria imaginària, doncs, demostren que la geometria de Lobatxevski es pot donar en una superfície real. D'aquesta manera la nova geometria adquireix una nova categoria, a més de ser una teoria coherent lògicament, ara també existeix a l'espai físic. Així, el 1870, Hoüel escriu *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide* [60], on exposa que amb el treball de Beltrami, la qüestió queda del tot resolta.

[57] Carta de Hoüel a De Tilly 21/8/1876, citada per Voelke a [100], p. 70-71.

Capítol 3

L'escena italiana

Indagar a la divulgació i el desenvolupament de la geometria no euclidiana a Itàlia porta directament a les figures de Giuseppe Battaglini[1] i Eugenio Beltrami. Els dos matemàtics van viure durant el temps del Risorgimento, època de grans canvis polítics i socials a la història italiana, i van arribar a tenir una importància indiscutible en l'escena matemàtica post-unitària.

Les cartes escrites per Battaglini i per Beltrami a Hoüel i a altres matemàtics italians han estat una font inestimable d'informació pel nostre estudi. A més de reflectir l'entorn científic i acadèmic, mostren pensaments més íntims que desvelen el caràcter dels dos matemàtics i ens ajudaran a comprendre la seva filosofia i les seves eleccions matemàtiques. La major part de la correspondència de Battaglini ha estat recollida per M. Castellana i F. Palladino a [30][2] i per S. Cicenia a [33], on apareixen tres cartes més a A. Genocchi. En quant a la correspondència de Beltrami, les cartes escrites a Betti, Gherardi i Tardy han estat editades per Livia Giacardi i Rossana Tazzioli a [46][3], i les

[1]Veure Bonola [26], p. 126.

[2]Els originals es troben a: *Fons Cesàro*, Dipartamento di Matematica e Applicazioni R. Caccioppoli, Università degli studi Federico II di Napoli; *Archivio Betti*, Biblioteca de la Scuola Normale Superiore de Pisa, 1854-89; *Fons Genocchi*, Biblioteca comunale *Passerini Landi* de Piacenza, 1867-81; les cartes a Amodeo pertanyen a la seva filla; *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[3]Els originals es troben a: *Archivio Betti. Corrispondenza* I, 28, 112-222, Biblioteca de la Scuola Normale Superiore di Pisa; *Cassetta Loria*, Busta 9/1-20, Biblioteca Universitaria de Genova; *Fondo Silvestro Gherardi*, I. XIV. A. Busta 35, 384-421, Biblioteca Comunale "Fabrizio Trisi", Lugo (RA).

cartes a Hoüel, publicades per les mateixes autores junt amb Luciono Boi es poden llegir a [23][4]. D'altra banda, hem trobat, a la Bibliothèque Muncipale de Caen, cinc cartes de Battaglini i dues de Beltrami que va rebre Hoüel, que resten inèdites i que transcrivim a l'apèndix[5].

Per escriure les biografies dels dos matemàtiques, a més de les cartes, hem pres com a referència els següents articles: en la de Battaglini, la *Commemorazione* de E. D'Ovidio [37] i la nota biogràfica d'A. Capelli [29][6]; i en la de Beltrami, la ressenya feta per L. Cremona amb que s'inicia l'edició de les obres completes de Beltrami [19] i l'article de G. Loria *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche* [78][7].

3.1 Context polític i social.

A mitjans del segle XIX Itàlia estava formada per diferents estats independents. Entre ells, el Regne del Piamonte i Cerdenya, el Regne Lombardo-Veneto, sota el domini austríac, els Estats Pontificis i al sud, el Regne de les Dues Sicilies.

Europa vivia una època de revolucions socials, la burgesia liberal reclamava drets civils a les monarquies governants i es van redactar les primeres constitucions. Al Regne de les Dues Sicilies, la insistència dels liberals napolitants afegida a importants revoltes d'independència per part dels sicilians obliguen al monarca Fernando II de Borbó (gov. 1830-59) a concedir la constitució, que va ser promulgada el 10 de febrer de 1848, convertint-se aquest estat en el primer d'Itàlia en aconseguir-la. Però la continuació, els següents anys, dels disturbis al carrer en contra de la monarquia, faràn que el rei doni marxa enrera al respecte de la constitució. L'any 1860, s'expulsen els Borbons i Nàpols s'incorporarà al procés de la Unificació d'Itàlia.

[4]Els originals es conserven al *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[5]Giacardi i Tazzioli presenten un elenc de les cartes de Beltrami, publicades i inèdites, a l'apèndix de [46], p. 287-291, on no es mencionen les dues a les que ens referim.

[6]També es pot consultar l'article de F. Amodeo *Giuseppe Battaglini e le sue opere*, Atti dell'Accademia Pontaniana, **36**, 1906, p. 1-64.

[7]També es pot trobar informació bibliogràfica a l'article *Eugenio Beltrami* d'E. D'Ovidio [38].

Per la seva banda, els estats del nord assistien a una sèrie d'insurreccions liberals i antiaustriaques que beneficiaven les aspiracions de la burgesia comerciant, que veia en la unitat política una resposta a la necessitat econòmica d'ampliar el mercat. El territori havia viscut un desenvolupament industrial sense precedents i per donar sortida als seus productes, es pretenia construir una xarxa ferroviària que comuniquès tota la península. Apareix com a conseqüència, el moviment polític anomenat *Risorgimento*, del que el primer ministre del Piamonte, el Comte de Cavour, recolzat per la monarquia, va ser el principal instigador. Amb l'ajuda de l'emperador francès Napoleó III, que va rebre els territoris de Niça i la Savoya, a canvi, els piamontesos van expulsar el austriacs de la Lombardia, iniciant la primera fase de la Reunificació Italiana. Poc després, l'expedició liderada per Giuseppe Garibaldi desembarca a Sicilia i, impulsada pel moviment independentista sicilià, allibera l'illa de la dominació borbònica. Travessant després l'estret de Mesina, Garibaldi, amb el suport de les masses populars, es fa amb el control de la Calàbria i Nàpols. Les tropes piamonteses es despleguen, llavors, cap al sud, annexionant-se els territoris pels que van passant, fins a trobar Gariabaldi, qui, tot i ser d'idees democràtiques, acaba cedint a la pressió de la diplomàcia europea i reconeixent el rei Vittorio Emanuele II com a rei d'Itàlia. El 1866 s'incorpora el Vèneto i el 20 de setembre de 1870 els estats Pontifícis, governats pel Papa, convertint-se Roma en la capital del nou país.

El govern de Vittorio Emanuele iniciarà una sèrie de reformes a l'educació pública[8], i a les universitats, amb la voluntat d'arribar a tot el conjunt de la població i no només a les classes benestants. Molts estudiants, intelectuals i professionals, pertanyents a una petita burgesia moderada, van formar part del moviment del *Risorgimento*, i amb la Unificació, es van convertir en funcionaris, col·laborant, desde les institucions, en la construcció del nou estat. Els matemàtics italians van tenir una vida política molt activa, van participar en la lluita per la unificació italiana en diferents episodis[9] i posteriorment

[8]Recollides a la llei Casati, promulgada el 13/11/1859. El nom es deu al llavors Ministre d'Educació Gabrio Casati.

[9]Enrico Betti (1823-1892) va formar part del Batalló dels universitari pisans a la batalla de Curtatone i Montara, el 29 de maig de 1848; Francesco Brioschi (1824-1897) va participar a les Cinc Jornades de Milà; un Luigi Cremona (1830-1903) molt jove va formar part de la defensa de la República de Venècia fins a la seva rendició a l'agost del 49; altres van participar a moviments revolucionaris i com a conseqüència van ser exiliats o van perdre la feina, com Angelo Genocchi (1817-1889) a Piacenza, Battaglini a Nàpols i Beltrami, a qui van acomiadar de l'administració ferroviaria lombardo-veneta al 1859.

van ocupar càrrecs importants al nou govern: Eugenio Beltrami i Felice Casorati, van ser senadors, Enrico Betti i Francesco Brioschi, foren diputats, senadors i secretaris generals del Ministeri d'Instrucció Pública[10], Giuseppe Battaglini va ser anomenat conseller de l'Intrucció Pública, i Luigi Cremona, a més de ser senador, al 1898, va ser anomenat Ministre d'Instrucció Pública i vicepresident del Senat. Des d'aquests càrrecs a les administracions públiques, es van involucrar a les reformes del sistema educatiu, creant una escena científica on repercutien les seves idees liberals, i aconseguint formar una generació de matemàtics que van portar la recerca italiana al nivell de l'alemana i la francessa.

D'aquests personatges els que van tenir un paper més influent van ser: Enrico Betti, Francesco Brioschi[11] i Luigi Cremona. En una carta a Hoüel, Forti[12] escriu:

> Ho impegnato il Betti a farle avere i ritratti del Cremona e del Brioschi, che formano insieme a lui, il triunvirato dei geometri d'Italia.
>
> He demanat a Betti que es comprometés a fer-li arrivar els retrats de Cremona i Brioschi, que formen, junt amb ell, el triunvirato dels geòmetres d'Itàlia.
>
> [Forti a Hoüel, Pisa 1/04/68[13]]

Enrico Betti va dirigir la reconeguda *Scuola Normale Superiore di Pisa*, on es van formar molts matemàtics; Francesco Brioschi, va fundar el *Politecnico di Milano* amb l'objectiu de formar ingeniers per tal de modernitzar el país i fer creixer la industria, projecte que compartia amb la nova classe mitjana empressaria; i Luigi Cremona, va dirigir l'*Scuola di Applicazioni per gli ingegneri* a Roma i va intervenir activament en la reforma de l'ensenyamet de les matemàtiques, fent incloure la estàtica gràfica i la geometria projectiva.

[10] Es tracta del màxim organ de govern de la universitat estatal, que tenia una certa autonomia, doncs no depenia dels delegats provincials de les autoritats educatives com els altres graus d'ensenyament.

[11] Tazzioli considera la col·laboració Betti-Brioschi el principal potenciador del desenvolupament de les matemàtiques post-unitàries,[98], p. 469.

[12] Angelo Forti (1818-1900), professor d'Àlgebra i Mecànica al Liceu de Pisa. Només va poder dedicar-se a l'ensenyament a partir de l'any 1859, doncs el govern anterior no permetia els hebreus treballar a les escoles.

[13] La carta original es conserva al *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

L'any 1858, Betti i Brioschi, junt amb Angelo Genocchi, projecten fer un viatge a les principals universitats estrangeres amb l'objectiu de conèixer les últimes novetats en recerca i presentar els treballs dels matemàtics italians, conscients de la necessitat de promoure les seves investigacions a nivell internacional[14]. També tenen interès en veure com funciona el sistema educatiu a les universitats a França i Alemania, països de considerable tradició en la formació de matemàtics insignes, pensant en la reforma que pretenen fer al seu propi estat. Al viatge hi va acabar anant Felice Casorati en lloc de Genocchi i van visitar les universitats de Göttingen, Berlín i París, coneixent les personalitats més importants del panorama científic: Dedekind, Dirichlet, Riemann, Kronecker, Weierstrass, Bertrand, Hermite, entre altres. Betti quedà força impressionat de la trobada amb Riemann. De seguida va traduir la seva *Inauguraldissertation* del 1851[15], es va encarregar de promocionar les seves idees i el va convidar a la Universitat de Pisa, quan Beltrami n'era professor de Geodèsica.

El projecte per promoure el desenvolupament de la matemàtica va seguir diverses línies d'actuació[16]. Com hem dit, es va fer una reforma de l'escola secundària i de les universitats; també es van crear nous centres de recerca, com el Politecnico di Milano, i noves càtedres, com la Geometria superior assignada a Cremona a Bologna i a Battaglini a Nàpols, o la de Càlcul diferencial i integral assignada a Genocchi a Torino, que posteriorment va passar a Giuseppe Peano. Amb la proclamació de Roma com a capital, el llavors ministre de la Instrucció Pública, Antonio Scialoja, es va proposar convertir la seva universitat, l'*Ateno de la Sapienza*, en el principal centre científic del país, i es van cridar els professors més il·lustres i reputats a formar-ne part. A la vegada, es va crear una gran Escola d'Aplicacions pels Enginyers Civils, dirigida per Cremona, on també donaran classe Battaglini i Beltrami, i una Escola Normal per formar professors[17]. La Universitat de Roma, però, no es va acabar imposant com a centre de recerca matemàtica

[14] Aquest viatge s'ha considerat històricament un punt important. La idea va sorgir a casa de Placido Tardy, a Genova, a les vacances de Pasqua. Veure [46], p. 176.

[15] Riemann, B. "Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile complessa (trad. di E. Betti)", *Annali di matematica pura ed applicata* (1) **2** (1859), pp. 288-304, pp.337-356. Títol original: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851.

[16] Boi, Giacardi i Tazzioli enumeren les línies d'actuació que es van dur a terme a [98], p. 469 i a [46], p. 8-10.

[17] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologna 8/10/73, a [23], p. 176.

a Itàlia, en són testimoni les cartes de Battaglini a Hoüel, on s'evidencien els problemes que sorgiren.

> Fui abbagliato dalle velleità che mostrò i Ministro della pubblica istruzione di fare dell'Università di Roma un'Università degna della Capitale d'Italia, ma il fatto (almeno sinora) non ha corrisposto per nulla alle previsioni. Si sono chiamati è vero a dettar lezioni molte persone illustri, ma non appartenenti ai cultori delle Scienze positive, e quel che è peggio persone politiche, le quali hanno tutt'altro pel capo che la scienza. Le Bibioteche sono sfornite di tutto ciò che è moderno, né il Governo pensa a fornirle di fondi per l'acquisto di opere nouve. In somma la vita scientifica per ora qui è nulla.
>
> Vaig ser enlluernat per la vel·leitat que va mostrar el Ministre de la Instrucció Pública per fer de la Universitat de Roma una Universitat digna de la Capital d'Itàlia, però el fet (almenys fins ara) no s'ha correspost en absolut a les previsions. S'han cridat, és cert, a donar classes moltes persones il·lustres, però no pertanyents als devots de la Ciència positiva, i el que és pitjor persones polítiques, que tenen al cap de tot menys la ciència. Les Biblioteques estan desproveïdes de tot allò que és modern, i el Govern no pensa a fornir-les de fons per l'adquisició d'obres noves. En resum, la vida científica aquí és, per ara, inexistent.
>
> [Battaglini a Hoüel, Roma 25/1/1872[18]]

Veient la manca de manuals de qualitat per a l'ensenyament es van traduïr els tractats que es feien servir a Europa i se'n van escriure de nous[19]. Battaglini, qui es va ocupar bastant en l'empresa, justifica la necessitat de fer aquesta feina:

> [...] mi decisi ad intraprenderne la traduzione, per soddisfare ad un imperioso bisogno delle nostre scuole, di avere cioè un libro d'istituzione abbondante di esercizi; oridnariament i nostri professori si dilungano nelle teoriche, ee tracurano interamente le applicazioni ad esempio, con quale detrimento degli allievi ognuno lo vede.

[18] A [30], p. 126-127.

[19] Es publicaran tractas escrits per Brioschi, Casorati, Chelini... Veure [98], p. 470, o [46], p. 9. Com veurem més endavant, també es va incentivar la creació de manuals per les escoles.

> [...] em vaig decidir a emprendre la traducció[20], per satisfer una imperiosa necessitat de les nostres escoles, de tenir un llibre d'instrucció amb abundants exercicis; normalment els nostres professors s'allarguen a la teoria, i desatenen totalment les aplicacions a exemples, en detriment dels alumnes, com és evident.
>
> [Battaglini a Hoüel, Napoli 1/3/1870[21]]

D'altra banda, es va iniciar la publicació de revistes matemàtiques, com el *Giornale di Matematica* de Battaglini i els *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, nom que van prendre els *Annali di scienze matematiche e fisiche* (1850) de Barnaba Tortolini, quan, al 1858, Genocchi, Brioschi i Betti van entrar a formar part de la redacció. Aquesta darrera, ja difonia gran part de la recerca que es feia a Itàlia, però la nova direcció volia donar-li una línia més internacional, informant també sobre l'activitat que es duïa a terme a l'estranger. A totes dues revistes s'hi podien llegir sovint articles dels matemàtics italians més rellevants de l'època com Beltrami, Cremona, Betti, Brioschi, Battaglini, Genocchi i Casorati.

Els italians havien entés la importància d'estar informats sobre el que succeïa fora del seu país, i van començar una feina de traducció i divulgació de les principals obres europees, a la vegada, que es van mantenir en contacte amb els matemàtics estrangers i es van esforçar per enviar els joves fora a especialitzar-se, principalment a les universitats franceses i alemanes. Aquest va ser el cas de Gregorio Rici Curbastro i Luigi Bianchi, que van assistir a les classes de Klein a la Universitat de Munich els anys 1877-78 i 1879-80, respectivament, o Salvatore Pincherle que va passar un any 1877-78 a Berlín amb Weierstrass. En una carta a Betti, Beltrami escriu:

> [...] Lipschitz, il quale si felicita che ormai gli indirizzi degli studi matematici in Italia ed in Germania abbiano tanti punti di contatto e soggiunge: In Italien und in Deutschland ist es doch dieselbe Luft die wir athmen!
>
> [...] Lipschitz, qui es felicita de que la direcció dels estudis matemàtics a Itàlia i a Alemanya ara ja tinguin tants punts de contacte i afegeix:

[20]Es refereix a la traducció del *Trattato del Calcolo differenziale con molti esempi di I. Todhunter. Versione dall'inglesse ocn aggiunte di G. Battaglini*, Napoli, Pellerano, 1870; i el *Trattato del Calcolo integrale e le sue applicazioni con molti esempi* del mateix autor, Napoli, Pellerano, 1870.

[21]A [30], p. 87.

A Itàlia i a Alemànya respirerm el mateix aire!

[Beltrami a Betti, Bologna 15/1/72.[22]]

L'any 1866, el govern va instaurar per Reial Decret els primers premis científics del Regne d'Itàlia i va encarregar a la *Società Italiana delle Scienze*, també anomenada *Società dei XL*, la concessió de dues medalles d'or anuals a les millors memòries italianes en matemàtiques i en ciències físiques i naturals. Els premis no es van assignar cada any i a vegades es donaven amb retard, sovint per la falta d'acord entre els membres de la comissió[23]. De la Societat dels XL, n'eren socis Battaglini, Beltrami, Betti, Brioschi i Casorati, entre d'altres. Les cartes entre els tres primers mostren de primera mà el procés d'elecció d'alguns guanyadors i altres questions relatives al concurs. Per exemple, Beltrami exposa a Betti que la decissió d'excloure de les nominacions els membres de la Societat, implica atorgar els premis als investigadors més joves, i li fa reflexionar sobre la necessitat de baixar el nivell d'exigència que seria desitjable. Sembla que Betti no considerava que hi hagués cap candidat mereixedor del premi, decissió que tant Beltrami com Cassorati estan disposats a acceptar, però dóna alguns noms a tenir presents[24]. O també, el seguit de cartes de Battaglini i Beltrami a Betti de principis del 82, que relaten com es van assignar els premis endarrerits de 1879 i 1880 a D'Ovidio[25] i De Paolis[26], respectivament. Battaglini els havia proposat com a principals candidats[27], decantant-se pel primer, mentre que Beltrami dubtava d'aquest ordre i proposava consultar a Cremona, ja que tots dos eren geòmetres[28]. El napolità suggerirà, llavors, que es pot premiar tots dos a la vegada, ja que calia assignar els premis de dos anys, però que

[22] A [46], p. 96.

[23] Relació de premiats durant aquests anys: Felice Cassorati (1868), Eugenio Beltrami (1875), Emanuele Fergola (1876), Ettore Caporali (1878), Enrico D'Ovidio (1879), Riccardo De Paolis (1880), Alfredo Capelli (1882), Luigi Bianchi (1883), Corrado Segrè (1884), Ernesto Cesàro (1887).

[24] Pavia 28/3/78, a [46], p. 114.

[25] Enrico D'Ovidio (1843-1933) va ser estudiant de Battaglini a Nàpols. Posteriorment, va ser professor de G. Peano, C. Segre i G. Loria a Torino, on també va tenir com ajudant a G. Castelnuovo.

[26] Riccardo de Paolis (1854-1892) va estudiar a Roma amb Beltrami, Battaglini i Cremona, de qui va ser deixeble continuant les seves recerques en geometria.

[27] Veure la carta de Battaglini a Betti, Roma 16/02/86, a [30], p. 215-218.

[28] Carta de Beltrami a Betti, Pavia 1/2/82, a [46], p. 135.

acceptarà el que decideixin Beltrami i Betti. Aquests estaràn d'acord[29] i la decisió es farà efectiva. Les cartes següents es refereixen a la posterior labor de relator, que Beltrami delegarà en Battaglini[30], de qui considerava que tenia una clara vocació per fer aquesta feina i que a més, la feia de bona gana i acuradament[31]. Tots tres matemàtics, estaran, de nou, a la comissió per l'assignació del premi de l'any 84 [32]. En aquesta ocasió Battaglini proposa E. Cesaro[33], pels seus treballs d'aritmètica, o C. Segre[34], pels treballs en geometria superior, resultant el segon guanyador. També les cartes de Beltrami a Tardy es refereixen a qüestions relatives als assumptes de la Societat dels XL, en particular, a la proposta de fusió amb la Reale Accademia dei Lincei, feta per Brisochi durant la seva presidència de la Societat, al 1874[35]. La proposta va ser inicialment refusada pels membres de la Societat, se'n tornarà a parlar al 1881[36].

Aquests anys van ser un periode d'obertura a nous camps de recerca. Betti va introduir les idees de Riemann, que van servir d'inspiració a Beltrami, i en les que treballarà Casorati fent grans aportacions en la teoria de funcions complexes. A més, va ser dels primers en interessar-se per les idees de Galois. Brioschi també treballava en la teoria d'equacions, però des d'un altre enfoc, investigant la resolució de les de 5è i 6è grau mitjançant funcions elíptiques. Cremona i Battaglini es van interessar per la geometria projectiva. Battaglini va introduir, a més, la geometria no euclididana de Bolyai i Lobatxevski, que Beltrami desenvoluparà, fent servir les eines de la geometria diferencial de Gauss i Riemann. Cremona, per la seva banda, va difondre les investigacions més recents en geometria fetes a Alemania, França i Anglaterra i va fer importants aportacions amb la seva recerca seguint una metodologia sintètica o intuitiva. La seva feina com a docent i com a investigador va portar a la creació de l'escola italiana de geometria algebraica, de la que van formar

[29]Veure la carta de Beltrami a Betti, Pavia 20/2/82, a [46], p. 137.

[30]Veure la carta de Beltrami a Betti, Pavia 24/2/82 i 13/3/82 a [46], p. 137 i 138.

[31]Veure la carta de Beltrami a Betti, Pavia 20/6/82, a [46], p. 140.

[32]Veure les cartes de Battaglini a Betti, Napoli 13/9/86 i 18/11/86 a [30], p. 222-224.

[33]Ernesto Cesàro (1859-1906) treballava en el camp de la geometria diferencial.

[34]Corrado Segre (1863-1924) va formar part de l'anomenada *Escola Italiana de Geometria Algebraica*, de la que és considerat fundador junt amb E. Bertini. Va dirigir el perfeccionament de Guido Castelnuovo, per qui va ser una forta influència.

[35]Veure les cartes de Beltrami a Tardy, Roma 3/1/75, 28/1/75 i 15/2/75, a [46], p. 192-199.

[36]Veure la carta de Beltrami a Betti, Pavia 6/7/81, a [46], p. 132.

part Giuseppe Veronese, Eugenio Bertini, Corrado Segre, Guido Castelnuovo, Federigo Enriques i Francesco Severi.

3.2 L'ensenyament de la geometria a les escoles. La controvèrsia sobre l'*Euclides*.

Itàlia vivia aquests anys un procès de renovació en l'àmbit de l'educació, emprés pel nou govern. Al 1859, la llei Casati donava una nova estructura a l'ensenyament. L'Escola Elemental gratuïta, s'iniciava a l'edat de 6 anys i s'allargava durant quatre anys dels que els dos primers eren obligatoris. L'educació secundària es dividia en dos itineraris: el tècnic, que començava amb tres anys d'Escola Tècnica, també gratuïta, seguit de tres anys a l'Escola Normal o a l'Institut Técnic; i el clàssic, que constava de cinc anys de Gimnàs més tres anys de Liceu. Aquest segon itinerari portava a la Universitat, mentre que el primer estava encaminat a la formació de professionals, només des de la línea físico-matemàtica dels Instituts Tècnics, creada el 1860, es podia accedir a les Universitats de Ciències[37].

El 10 d'octubre de 1867, el decret emès pel ministre d'educació Michele Coppino[38], planteja grans canvis en l'ensenyament de les matemàtiques i proposa, inspirat per les idees de Cremona, el retorn als *Elements* d'Euclides en l'estudi de la geometria a les escoles clàssiques[39]. Al document es fan les següents consideracions:

> La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da riguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza.[...] Nella geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa,

[37] Giacardi presenta un esquema que mostra com s'estructura el sistema educatiu a [45], p. 588.

[38] Estratto dal Decreto Coppino (10.10.1867), *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, Firenze 24 ottobre 1867.

[39] Sobre la inflència de Cremona en l'ensenyament i les conseqüents edicions de l'Euclides veure l'escrit de Felix Klein, a [69], p. 303-309.

e per ridurre a un tempo la materia entro modesti confini, basta applicare alle nostre l'esempio delle scuole inglesi, facendo ritorno agli elementi di Euclide, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore geometrico.

La matemàtica a les escoles secundàries clàssiques no s'ha de considerar només com un conjunt de proposicions o de teories, útils en sí mateixes, de les que els nois hagin d'adquirir coneixença per aplicar-les després a les necessitats de la vida; sinó principalment, com un mitjà de cultura intelectual, com una gimnàsia del pensament, dirigida a desenvolupar la facultat del raonament, i a ajudar a aquell just i sà criteri que serveix de llum per distingir la veritat d'allò que té només l'aparença.[...] En la geometria, per donar a l'ensenyament la màxima eficàcia educativa, i per reduir a la vegada la matèria dins d'uns límits modestos, n'hi ha prou amb aplicar a les nostres escoles l'exemple de les angleses, fent un retorn als elements d'Euclides, que per concens universal son el més perfecte model de rigor geomètric.

El mateix any 1867, l'editorial Le Monnier de Florencia, publicava *Gli Elementi di Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei a cura di Enrico Betti e Francesco Brioschi* [22], pensat per què es fes servir com a llibre de text. A la següent carta, A. Forti ho explica a J. Hoüel:

Ed a proposito di Decreti, le dirò che ha alcune modificazioni suli insengamento secundario, vi è stato quello di suggerire ai Professori di tornare ali Euclide. Consultati a questo scopo sono stati i Prof. Betti, Brioschi e Cremona ed essi si sono ocupati a tradurre in italiano gli libri di Euclide, corredandolo di qualche nota e di una serie di esempi. Sulla Prefazione dovuta al Brioschi e in alcune di queste note è citato con molto elogio e verità il suo ultimo lavoro sopra l'Euclide.

I a propòsit dels Decrets, li diré que hi ha hagut alguna modificació sobre l'ensenyament secundari, ha estat la de suggerir als Professors de tornar a l'Euclides. Consultats sobre aquest objectiu han estat els Prof. Betti, Brioschi i Cremona i ells s'han ocupat en traduir a l'italià els llibres d'Euclides, acompanyant-lo d'alguna nota i d'una sèrie d'exemples. Al Prefaci, escrit per Brioschi, i en alguna d'aquestes notes es cita amb molta lloança i veritat el seu últim treball sobre l'Euclides.

[Forti a Hoüel, Pisa 3/12/67[40]]

[40]La carta es troba al *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

El manual, com apunta Forti, és una revisió de la traducció italiana de Vicenzo Viviani[41] amb alguns comentaris i una sèrie d'exercicis al final de cada llibre. En l'exposició es segueix un estil purament euclidià, conservant el llenguatge característic i sense fer més ús de l'àlgebra o de l'aritmètica, en la seva intenció de contraposar-se a la metodologia dels *Elements de Legendre*, com els mateixos autors especifiquen al prefaci:

> Perciò dobbiamo lamentare che quell'inimitabile modello di logica e di chiarezza lasciatoci dai Greci negli Elementi d'Euclide sia stato pressochè abbandonato dalle nostre scuole, e siansi invece introdotti e raccomandati libri, nei quali esagerandosi il metodo di Legendre, al rigore del raggionamento si è sostituito il meccanismo del processo aritmetico. *La suprema accuratezza d'Euclide* non è più apprezzata nelle nostre scuole, e vi si preferiscono dimostrazioni inesatte di proprietà, le quali non ponno esserci rivelate che dai sensi,...[42]

> Lamentablement, l'inimitable model de lògica i claredat que els Grecs van deixar en els Elements d'Euclides, pràcticament s'ha abandonat a les nostres escoles, i en canvi, s'han introduït i recomanat llibres, en els que exagerant-se el métode de Legendre, el rigor del raonament s'ha substituït pel mecanisme del procés aritmètic. *La suprema meticulositat d'Euclides* ja no s'aprecia a les nostres escoles, i es prefereixen demostracions inexactes de propietats, que només poden ser revelades pels sentits,...

En aquest fragment es fa referència a l'obra [53] de Hoüel, igual que en algunes de les notes aclaratories dels autors, tal i com diu Forti a la seva carta. Recordem que també Hoüel, a la introducció de [53], s'havia referit al text de Legendre, considerant-lo inadequat per tractar la geometria elemental, degut a que introdueix procediments aritmètics de l'anàlisi moderna, enlloc de conservar els mètodes purament geomètrics que caracteritzen el text clàssic. El francès, compartia l'opinió de que calia tornar a fer ús de la metodologia euclidiana per ensenyar la geometria a les escoles.

[41] Vicenzo Viviani (1622-1703), deixeble de Galileo, el seu equip es caractitzava per fer servir la geometria sintética, sense recurrir a àlgebra. El 1690, publica *Elementi piani, e solidi d'Euclide*, que segueix la traducció italiana de Commandino de 1575, renovant la llengua. Aquesta darrera és la segona traducció dels Elements a l'italià, la primera és la de Tartaglia, de 1543. Commandino va fer també la versió llatina, recuperant les edicions i versions anteriors, publicada el 1572 i considerada la més ajustada a l'original.

[42] A [22], prefaci, p. VI-VII.

El tractat de Betti-Brioschi no va tenir una bona acceptació entre el professorat, degut a la seva complexitat i a la manca d'aportacions didàctiques, i va passar a engrandir la discussió, encetada pel decret ministerial, entre partidaris i detractors de fer servir els Elements com a llibre de text. Els primers defensaven el rigor d'Euclides, que consideraven perdut, i veien en la seva metodologia una bona "gimnàsia mental", és a dir, un bon mètode per aprendre lògica. Els segons el consideraven antiquat, perquè no incloia els recents descobriments que s'havien fet en aquesta disciplina, i pel llenguatge complicat que s'utilitza. Les cartes creuades pels seus protagonistes, expossant les seves reflexions, permeten seguir des de primera línea aquest debat.

El debat s'havia estés també a altres països europeus, especialment a Anglaterra, on J. M. Wilson havia publicat *Euclid as a text-book of elementary geometry*[43], fent una crítica contundent del text d'Euclides. L'article rebaixa el valor de la seva exposició geomètrica i descarta la seva utilitat didàcitca, concluent que és "antiquat, artificial, il·lògic i inapropiat" com a llibre per l'ensenyament[44].

A Itàlia, la polèmica es va reavivar, justament, arrel de la traducció d'aquesta Memòria de Wilson, [101], publicada al *Giornale di Matematiche* de Battaglini. El traductor, sota la signatura R.R., afegia en el següent paràgraf, la nota a peu de pàgina que escrivim a continuació[45]:

> Non va mai ripetuto abbastanza, in questa controversia, che la Francia, la Germania, l'Italia* e l'America sono d'accordo nell'adottare gli stessi metodi d'insegnare si in Geometria como nelle altre scienze; esse scrivono istituzioni per propio uso.
>
> *Grazie all'illuminato Consiglio d'Istruzione Superiore, questo pregio ora l'Italia lo ha perduto; perchè esso raccomanda, e quindi *comanda* che nei Ginnasi, Licei, e scuole elementari s'insegni l'Euclide!! *(Il traduttore)*

> No s'ha repetit mai suficient, en aquesta controversia, que França, Alemanya, Itàlia* i Amèrica estan d'acord en adoptar els mateixos mètodes d'ensenyament tant en Geometria com en les altres ciències; escriuen tractats per l'ús propi.

[43] *The Educational Times*, 1868, p. 125-128.
[44] Veure la traducció de Rubini [101], pag 368.
[45] A la traducció de Rubini, [101], p. 362.

*Gràcies a l'il·lumintat Consell d'Instrucció Superior, ara Itàlia ha perdut aquesta virtut; ja que recomana, i per tant *mana*, que en els Gimnasos, Liceus, i escoles elementals s'ensenyi l'Euclides!! *(El traductor)*

Forti revela a Hoüel que darrere les inicials R.R. s'amaga el professor Raffaele Rubini de la Universitat de Nàpols, expressant, a més, que és del mateix parer que Hoüel, de fer servir l'Euclides, per modernitzat:

> Ho parlato al Betti rapporto all'articolo sopra Euclide, dei due Inglesi, e dell' autour della nota, [...]. Non so si Ella conosca il nome di questo autore; se non lo conosce, glielo dico in confidenza è il Rubini. Pare che ... Professore siasi avuto a male dell'... dell'Euclide, essendo egli autore di varie opere scolastiche, tra cui la Geometria[46].
>
> He parlat amb Betti en relació als articles sobre Euclides, dels dos anglesos, i de l'autor de la nota, [...]. No sé si vos coneixeu el nom d'aquest Autor; si no ho sap, li dic en confiança, és en Rubini. Sembla que [aquest] Professor, s'ha pres malament [l'adopció de] l'Euclides, essent autor de diverses obres escolars, entre les que es troba la Geometria.
>
> [Forti a Hoüel, Pisa 25/2/1869[47]]

La reacció dels partidaris del text d'Euclides, no es va fer esperar. Els al·ludits, Cremona i Brioschi, escriuran la seva rèplica a Battaglini justificant la seva postura i serà publicada al Giornale[48]. A la seva carta al redactor, defensen la mesura del govern i intenten refutar les diferents crítiques de Wilson. Contrasten l'educació anglesa amb la italiana, dient que al seu pais no s'aprenen textos de memòria i que el llibre és només una guia per professors i alumnes. A més, senyala la distinció entre les dues branques de l'ensenyament, inexistent a Anglaterra, insistint en que només s'aplicaria a l'itinerari en que es preten donar un coneixement més elevat, on el seu objectiu primordial és que els joves aprenguin a raonar:

> I nostri ginnasi e licei sono destinati a dare una cultura elevata, eccezionale. In essi non si mira ad insegnare il disegno geometrico, né

[46]R.Rubini va escriure diversos tractats per l'ensenyament, entre ells: *Elementi di Geometria 1: Geometria del piano*, *Elementi di Geometria 2: Geometria nello spazio*, Napoli, tipografia de A. Moreli, 1864-1865.

[47]La carta es troba al *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[48]*Al signor Direttore del Giornale di matematiche...*, [27]. Hoüel fa una traducció parcial de la carta "L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie", als *Nouvelles Annales de Mathématiques* sèrie 2, **8** (1869), p. 278-283.

importa che i giovani apprendano la tale o tal'altra proposizione, né che studino molte cose in poco tempo. Importa invece che apprendano a raggionare, a dimostrare, a dedurre: non giovano dunque i mezzi celeri, né i libri ove la geometria è mescolata coll'aritmetica o coll'algebra: l'Euclide è veramente il testo che meglio serve a questi fini.

Els nostres gimnasos i liceus son destinats a donar una cultura elevada, excepcional. En ells no es té en compte en ensenyar el diseny geomètric, ni importa que els joves aprenguin una o altra proposició determinada, ni que estudiïn moltes coses en poc temps. Importa en canvi, que aprenguin a raonar, a demostrar, a deduïr: no ens beneficien, doncs, els mètodes ràpids, ni els llibres on la geometria està barrejada amb l'aritmètica o amb l'àlgebra: l'Euclides és veritablement el text que millor serveix a aquests fins.

Incapaços, però, de contrarrestar alguns dels arguments dels seus opositors, es veuen obligats a acceptar que l'Euclides hauria de ser revisat i simplificat, per tal d'utilitzar-lo com a llibre de text. En una carta a Hoüel, Cremona reconeix també que el manual de Betti i Brioschi s'ha de millorar:

Vous avez vu peut-être qu'on a eu la mauvaise pensée de publier dans le Giornale di Napoli les banalités de M. Wilson contre Euclide, avec une ignoble note du traducteur. M. Brioschi et moi nous sommes convaincus que dans l'état actuel de nos écoles sécondaires classiques, l'Euclide est la meilleur texte qu'on puisse choisir. Sans doute qu'il serait mieux de substituer un Euclid revised à l'édition trop précipitée fait a Florence sous les noms de MM. Betti - Brioschi.

Potser heu vist que s'ha tingut la mala pensada de publicar dins el Giornale di Napoli les banalitats de M. Wilson contra Euclides, amb una nota innoble del traducctor. El Senyor Brioschi i jo ens hem convençut que en l'estat actual de les nostres escoles secundàries clàssiques, l'Euclides es el millor text que es pot triar. Sens dubte que seria millor de substituir per un Euclides revisat, l'edició massa precipitada feta a Florència sota els noms dels Senyors Betti-Brioschi.

[Cremona a Hoüel, Milan 29/1[49]]

Sent un referent en la revisió dels Elements d'Euclides i fet partícep de la dis-

[49]A la carta no s'especifica l'any, però per context ha de ser el 1869. Es troba al *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences, Paris.

cussió per les cartes dels seus coneguts, Hoüel sentirà la necessitat de defensar el text clàssic i intervé en el debat, també amb una carta al redactor[50]:

> J'aurais beaucoup de choses à relever dans les preuves que donne M. Wilson de ce qu'Euclide est *antiquato, artifizioso, illogico (!!!) e inadatto como libro d'istituzione. Antiquato*, soit: je l'ai dit moi-même à l'occasion. *Artifizioso*, pas plus que les trois quarts des ouvrages modernes. Mais *illogico*, je le nie, et je prétend qu'il ne le paraît qu'à ceux qui ne l'ont pas compris entièrement. [...] Quant à être *inadatto come libro d'istituzione*, oui et non. Oui, s'il est mis entre les mains d'un élève comme code de géométrie, comme texte de renvoi, où l'on trouve les propositions fondamentales dont on a besoin à chaque instant, *mais pourvu qu'il soit accompagné de commentaires, d'éclaircissements, d'additions, quelquefois de rectifications, faites par un professeur bien pénétré de l'esperit du texte*, et que els explications su professeur soient la partie *principale* de l'enseignement. Non, si l'on suit le système anglais consistant à faire apprendre Euclide par coeur sans l'expliquer.

> Tindria moltes coses a revelar sobre les proves que dóna el Senyor Wilson de que l'Euclides es *antiquat, artificiós, il·logic (!!) i inadequat com a llibre de text. Antiquat*, sigui: jo mateix ho he dit en alguna ocasió. *Artificiós*, no més que les tres quartes parts de les obres modernes. Però *il·lògic*, ho nego, i afirmo que això només els hi sembla a aquells que no l'han comprés completament.[...] En quant a ser *inadequat com a llibre de text*, sí i no. Sí, si es posat a les mans d'un alumne com a codi de geometria, com a text de referència, on es troben les proposicions fonamentals que un necessita en cada moment, *sempre que vagi acompanyat de comentaris, aclariments, afegits, a vegades de rectificacions, fetes per un professor ben coneixedor de l'esperit del text*, i que les explicacions del professor siguin la part *principal* de l'ensenyament. No, si es segueix el sistema anglés consistent a fer aprendre Euclides de memòria sense explicar-lo.

Battaglini li escriu [51], dient que publicarà la seva carta al Giornale, i intentant excusar el professor Rubini:

> Nel fascicolo del Giornale di matematiche, che uscirà tra giorni, ho

[50]Hoüel, J. "Estratto di una lettera del Prof. Hoüel al redattore", *Giornale di matematiche* **7** (1869), p. 50.

[51]Veure les cartes amb data el 2/2/69 i el 13/3/69, a [30], p. 78 i p. 82

inserito le vostre rifessioni sull'Euclide. Vi leggerete anche un articolo nello stesso senso, di Brioschi e Cremona, col quale rispondono al Wilson e al suo traduttore (un collega di questa universitaà, nostro comune amico) il qualde con una vivacitá meridionale si è scagliato un po' duramente contro il Consiglio superiore di pubblica istruzion; forse ho avuto torto di far parlare quella nota poco gentile, ma mio caro Collega la [...] ingerenza governativa, dove meno [...] ha talmente irritato gli animi in queste provincie d'Italia, che prendendo a pretesto l'Euclide, il nostro comune amico non ha saputo frenare un eccesso di collera, ed io non ho voluto dargli torto.

Al fascicle del Giornale di matematiche, que surtirà en uns dies, he introduït les vostres reflexions sobre Euclides. Hi llegireu també un article en la mateixa línea, de Brioschi i Cremona, amb el que responen a Wilson i al seu traductor (un colega d'aquesta universitat, amic comú nostre) que amb la seva vivacitat meridional s'ha abocat una mica durament contra el Consell Superior d'instrucció pública; potser m'he equivocat en difondre aquella nota poc gentil, però [...] la ingerència governativa, en el menor dels casos ha irritat de tant els ànims en aquesta provincia d'Itàlia que prenent com a prestext l'Euclides, el nostre amic comú no ha sabut refrenar un excés de cólera, i jo no he volgut retreure-li.

[Battaglini a Hoüel, Napoli 13/3/69.]

La postura de Battaglini en aquesta qüestió es troba entre els detractors al retorn al text d'Euclides. A Hoüel li escriu, en un tó força moderat:

Sulla quistione dell'Euclide, la mia opinione si è, che in quanto ad insegnamento, si posono adottare i soui Elementi come *primo posto* nello studio della Geometria, ma sempre supponendo che si dia ad essi una veste moderna, e che in vari punti siano rettificati. Ma senza occuparci delle esigenze dell'insegnamento, mi pare che manchino ancora gli Elementi della Geometria, scritti in vista della scienza per sé come scienza, in cui l'ordito del lavoro corrisponda in modo strettamente logico al procedimento col quale la mente pone le determinazioni fondamentali nel concetto dello spazio.

Sobre la qüestió d'Euclides, la meva opinió és que, en quant a l'ensenyament, es poden adoptar el seus Elements en *primer lloc* en l'estudi de la Geometria, però sempre suposant que se'ls donés un format modern, i que siguin rectificats en alguns punts. Però sense tenir en compte les exigències de l'ensenyament, em sembla que manquen en-

> cara els Elements de la Geometria, escrits de cara a la ciència en sí com a ciència, en els que el guió del treball correspongui de manera estretament lógica al procediment amb el que la ment posa les determinacions fonamentals al concepte de l'espai.
>
> [Battaglini a Hoüel, Napoli 2 /2/1869[52]]

D'aquestes línies sembla que Battaglini està d'acord en utilitzar el llibre d'Euclides, revisat apropiadament, com a llibre de text[53]. Sabem però, que no és així. Beltrami en una carta a Hoüel[54], diu que Battaglini comparteix en part les opinions de Rubini. Així podriem interpretar que, en considerar que s'han de modernitzar i que s'haurien de rectificar en alguns punts, està dient d'una manera subtil que troba que el text està antiquat. Fins i tot podriem pensar que remarcant que pot estar d'acord amb l'ús dels Elements d'Euclides com a introducció en els estudis de geometria, dóna a entendre que troba aquest text insuficient per tal de conéixer amb profunditat la matèria.

La carta que el napolità escriu a Genocchi, pocs dies més tard, en la que es mostra més contundent, és una prova clara del seu desacord amb l'ús de l'Euclides:

> In una controversia tanto dibattuta quanto quella sul merito degli *Elementi di Euclide* come libro d'istituzione, non intendo che nel Giornale si posano esporre solo le opinioni che sono d'accordo con la mia; anzi desidero che gli argomenti in favore ed in contrario vi siano ventilati. Quando poi si volesse conoscere la mia particolare maniera di vedere sull'oggetto, non ho ritegno a dire che, con tutto rispetto perl merito dell'Euclide, ritengo i suoi Elementi come libro inadatto all'insegnamento, tanto se si ha in miral l'ammaestramento nella *Geometria* (pel la povertà di quel libro) quanto se si riguarda il solo lato educativo, poiché credo che quel libro sia più adatto ad adormanetare la mente dei ragazzi, che a svolgere le loro facoltà.
>
> En una controversia tan debatuda com la del mèrit dels *Elements d'Euclides* com a llibre d'instrucció, no pretenc que al Giornale es puguin exposar només les opinions que estiguin d'acord amb la meva; al contrari, desitjaria que s'exposessin els arguments a favor i en contra

[52]A [30], p. 78.

[53]Paola Calleri i Livia Giacardi, en el seu comentari a aquesta carta, són d'aquesta opinió.

[54]La citem unes pàgines més endavant: Bologna 23/1/70 a [23], p. 126-127.

> siguin. Si llavors es volgués conéixer la meva manera particular de veure la qüestió, no tinc reserves a dir que, amb tot el respecte pel mèrit d'Euclides, considero els seus Elements com a llibre inadequat per l'ensenyament, tant en quant al coneixement de la *Geometria* (per la pobresa d'aquest llibre) com si es mira només el cantó pedagògic, doncs crec que aquest llibre es més adequat per adormir la ment dels nois que per desenvolupar les seves facultats.
>
> [Battaglini a Genocchi, 7/2/69 [55]]

Tot i que amb aquestes paraules no ho sembli, la postura de Battaglini és força equilibrada. Segurament, el llenguatge original d'Euclides, debia semblar a un jove escolar de gimnàs, d'entre 10 i 15 anys, força rebuscat.

Creiem que la qüestió es troba en fins a quin punt consideren uns i altres que cal "revisar" el text clàssic, i que, en el cas de Battaglini, aquesta revisió suposaria les suficients modificacions com per considerar que l'Euclides no és apropiat per l'ensenyament. En una carta posterior a Hoüel[56], accepta que tothom està d'acord en la necessitat del rigor lògic, i en desenvolupar els conceptes sense recórrer a l'àlgebra, però que no es pot imposar un o altre llibre de text: "la llibertat i no la imitació donarà llibres d'ensenyament que marquen un progrés"[57]. Però la raó principal del seu possicionament, la trobem en el fet que el manual clàssic no té presents els nous descobriments geomètrics. A les cartes a Hoüel, manifesta sovint la necessitat d'escriure uns Elements per la geometria hiperbòlica, projecte que inicialment s'havia proposat però del que acaba desistint per temor a no sortir-se'n. També afirma que "cal una doctrina de l'espai diferent a la coneguda" i que "la via a seguir és la indicada per Riemann"[58].

Per la seva banda, Beltrami concorda amb el punt de vista de Cremona, en el debat, com es desprén de la següent carta a Hoüel, en la que, a més, li explica com va acabar la polèmica:

> Il est possible que la mauvaise santé de M. Rubini lui ait rendu la plume trop amère, mais il ne devait jamais pousser la chose jusqu'à jeter en quelque sorte le mépris sur des personnes aussi respectables, même en dehors de la science, que les promoteurs du retour à Eu-

[55] A [30], p. 169-170.
[56] Carta de Battaglini a Hoüel, Napoli 19/7/71, a [30], p. 116.
[57] "la libertà e non l'imitazione potrà dare libri d'istituzione che segnino un progreso".
[58] Napoli 5/8/1868, a [30], p. 74. Veure també Napoli 2/2/69, a [30], p. 79-80.

clide. En tout cas sa qualité de propriétaire d'une édition italienne de la Géométrie de Legendre, très répandue dans le midi, aurait dû lui fermer la bouche. Maintenant voici comment la chose est finie. Contrarié de me voir cité d'une manière aussi brutale, et de voir traiter de la sorte MM. Brioschi et Cremona, auxquels je dois tout, et que je voyais d'ailleurs en butte aux plus méchantes insinuations de la part de la presse de l'opposition (imaginez-vous qu'on accusé MM. Betti et Brioschi d'avoir prôné l'Euclide et fait réimprimer l'Euclide de Viviani, pour en faire une spéculation), j'écrivis à Battaglini une lettre très violente, destinée à paraître dans son Journal. Battaglini refusa de l'insérer; et il avait raison, car il avait déjà refusé auparavant d'imprimer la réponse de M. Rubini, d'ailleurs il partageait en grande partie la manière de voir de ce dernier. Pendant que je songeais à ce que je devais faire, M. Cremona vint à Bologne, et me raconta que M. Rubini avait écrit à M. Brioschi une lettre pleine de componction, où il déclarait de n'avoir jamais eu l'intention de le blesser, et proclamait son sincère désir de pardon; enfin il demandait que M. Brioschi voulût bien interposer son influence pour me décider a retirer ma lettre de protestation, et pour me prier de renoncer à sa publication. Brioschi me laissait toute liberté d'agir; mais mon excellent ami Cremona me conseilla à ne pas donner de suite à mon idée, et c'est ce que je fis.

És possible que al Senyor Rubini la mala salut li hagi tornat la pluma massa amarga, però mai hauria d'haver arribat a llençar aquesta mena de menyspreu per persones tan respectables, també fora del camp de la ciència, com els promotors del retorn a l'Euclides. En tot cas, en la seva qualitat de propietari d'una edició italiana de la Geometria de Legendre, molt difosa al sud, li hauria d'haver tancat la boca. Ara docs, així és com la cosa ha acabat. Contrariat per veure'm citat d'una manera tan brusca[59], i de veure tractar d'aquesta manera els Senyors Brioschi i Cremona, als que jo els hi dec tot, i d'altra part, com veia créixer les més malintencionades insinuacions per part de la prensa de l'oposició (imagineu-vos que ha acusat els Senyor Betti i Brioschi d'haver proposat l'Euclides i fet reimprimir el de Viviani, per fer-ne una especulació), vaig escriure a Battaglini una carta molt violenta, destinada a aparèixer al seu diari. Battaglini va refusar inserir-la; i tenia raó, cons ja havia refusat abans imprimir la resposta del Sr. Rubini, tot i que ell comparteix en gran part el punt de vista del darrer.

[59]Sembla que Rubini havia intentat posar a Beltrami en oposició amb Betti, Brioschi i Cremona. Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologna 14/1/70, a [23], p. 122.

> Mentre que pensava que devia fer, el Sr. Cremona, va venir a Bolonya, i em va explicar que el Sr. Bubini havia escrit al Sr. Brioschi una carta plena de penediment, on declara que no tenia cap intenció d'ofendre'l, i declarava el seu sincer desig de perdó; finalment demanava al Sr. Brioschi que considerés interposar la seva influència per fer-me retirar la meva carta de protesta, i per pregar-me que renunciés a la seva publicació. Brioschi m'ha deixat tota llibertat d'actuació; però el meu excel·lent amic Cremona m'aconsellà no seguir amb la meva idea, i és això el que he fet.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologna 23/1/70.[60]]

En formar part d'algunes inspeccions als liceus, Beltrami tindrà, més endavant, l'oportunitat de conèixer els resultats que estava tenint la mesura del govern, i explica a Hoüel les seves impressions:

> En fait de mathématiques, sur la question à l'ordre du jour, c'est-à-dire sur l'utilité de la méthode euclidienne (prescrite depuis quelques années), les avis sont partagés. Quelques professeurs s'en trouvent bien, et la croient bonne et utile; d'autres lui préfèrent les méthodes antérieures, que se résument en définitive dans la Géométrie de Legendre. J'ai cru cependant pouvoir remarquer que ces derniers appartiennent à la classe des routiniers, c'est à dire de ceux qui ne demandent mieux que de stéréotyper l'enseignement. Il y a eu du reste le phénomène ordinaire des *traités élémentaires* compilés par des gens qui auraient bien besoin d'étudier les traités classiques, et auxquels j'ai eu souvent envie de rappeler le formidable épigramme de notre Giusti:
>
> Il fare un libro è meno che niente
> se il libro fatto non rifà la gente
>
> Respecte a les matemàtiques, sobre la qüestió a l'ordre del dia, és a dir, sobre la utilitat del mètode euclidià (prescrit des d'alguns anys), les opinions estan dividides. Alguns professors el troben bé, i el creuen bó i útil; d'altres prefereixen els mètodes anteriors, que en definitiva, es resumeixen en la Geometria de Legendre. No obstant, m'he semblat observar que els darres pertanyen als de tipus rutinari, és a dir, als que no demanen més que estereotipar l'ensenyament. S'ha donat, a més, l'habitual fenomen dels tractats elementals compilats per persones que

[60] A [23], p. 126-127.

tindrien una bona necessitat d'estudiar els tractats clàssics, i als que sovint he tingut ganes de recordar el formidable epigrama del nostre Giusti:

Fer un llibre és menys que res
si el llibre no refà la gent

[Beltrami a Hoüel, Bologna 12/6/70.[61]]

Finalment, A. Sannia i E. D'Ovidio escriuen uns Elements que convencen més[62]. El llibre conserva el rigor i el métode d'Euclides[63], però millorant els punts febles i afegint alguns temes i exercicis. Els autors tenen presents els llibres moderns sobre la qüestió, com el de Blatzer, el de Duhamel[64] i *L'Essai Critique* de Hoüel[65]. De fet, D'Ovidio escriu diverses vegades a Hoüel demanant-li opinió sobre el seu treball, per considerar-lo de les persones més competents en la matèria[66]. També, en la preparació de les següents edicions del llibre, li exposa les seves raons quan no segueix els suggeriments del francès, doncs sembla que no sempre compartien la mateixa opinió, i li justifica les tries fetes[67].

L'any 1881, considerant que l'estudi de la geometria racional era massa complex pels alumnes del gimnàs, el govern introdueix una assignatura de geometria intuitiva al gimnàs, centrada més en l'experiència que en el raonament lógic. Aquesta mesura tindrà una escasa durada, doncs es suprimirà al 1884, per consell de Beltrami. A la seva relació presentada al ministre[68] argumenta que d'una banda, la geometria intuitiva podia molt fàcilment convertir-se

[61] A [23], p. 141-142.

[62] *Elementi di Geometria de' professori Achille Sannia el Enrico d'Ovidio*, Napoli, 1869. Van anar sortint més edicions.

[63] Veure la carta Battaglini a Hoüel, Napoli 12 del 79, a [30], p. 85. Pel context entenem que la data és 12/1/70, veure nota 52 de P. Calleri i L. Giacardi a [30], p. 83.

[64] Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement fondamentaux de la géométrie élémentaire au commentaire sur les XXXII premières propositions des éléments d'Euclide*, Paris, 1867.

[65] Veure la carta d'Ovidio a Hoüel, Napoli 16/6/1871, *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[66] Veure la carta de D'Ovidio a Hoüel, Torino 22/5/1875, ibiem.

[67] Veure les cartes de D'Ovidio a Hoüel, Napoli 3/7/1871, Torino 19/6/76, Torino 19 del 77 (19/1/77), ibidem.

[68] *Relazione per l'insegnamento delle matematiche per il ginnasio ed il liceo*, Ministerio della Publica Istruzione, Bolletino Ufficiale, Apèndix al N.12, 1884, p. 16-17; a [46], apèndix 5, p. 305-309.

en un conjunt de regles i que, d'altra banda, degut a que els continguts de totes dues matèries són els mateixos, diferenciant-se en que a la racional s'afegeixen els raonaments deductius, molts estudians no li veurien el sentit a la repeteció. Per aquestes raons, suggereix suprimir la geometria intuitiva i posposar l'ensenyament d'una primera part més senzilla de la geometria racional als dos últims cursos del gimnàs.

Després de la polèmica creada pel decret Coppino i el manual Betti-Brioschi, el 1871, el govern convoca un concurs per la tria de tractats d'aritmètica, àlgebra i geometria per l'escola secundària. El tribunal estarà format per Betti, Bertini, Casorati, Cremona i Beltrami. El ministeri no va establir uns criteris d'avaluació[69], i va ser aquesta comissió qui els va concretar en la valoració dels escrits que s'havien presentat[70]. Al document es diu que l'objectiu de l'ensenyament científic ha de ser ajudar en el bon exercici del pensament deductiu, presentant una base racional a la cultura general. D'altra banda, senyala que les últimes recerques han portat a fer una revisió crítica dels conceptes fonamentals de les matemàtiques, i que caldrà donar una exposició dels primers elements que vagi en la línea de la ciència actual. Els tractats seleccionats, per tant, a més de convéncer per les seves qualitats didàctiques, hauran de tenir la capacitat d'adaptar els nous resultats a l'ensenyament secundari. Per exemple, parlant de geometria, caldria incloure les idees projectives que no es tracten a la geometria clàssica d'Euclides. Malhauradament, cap dels candidats presentarà una feina que es consideri satisfactoria[71], i es determinarà no canviar els manual, valorant que no suposen cap millora respecte els tractats que s'estan fent servir.

A part de la manca de llibres de text adequats des del punt de vista cièntific i didàctic, existia el problema de la poca preparació del professorat de les escoles secundàries:

> Le nombre de professeurs des lycées qui s'occupent de leur science est très-petit chez nous: et même ceux qui s'en occupent n'ont pas le sentiment de cette solidarité didactique et scientifique qu'il y a en Allemagne et qui procure des lecteurs attentifs à tout article un peu

[69]Veure la carta de Beltrami a Casorati, Bologna 12/9/1873, a [46], Apèndix 4b, p. 305-306.

[70]*Relazione sui trattati d'aritmetica, algebra e geometria, presentati al concorso governativo stabilito con decreto 30 novembre 1871*, Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, 1874; a [46], apèndix 4a, p. 298-304.

[71]Veure les valoracions a [46], apèndix 4a, p. 300-301.

sérieux. Cependant ne désesperons pas!

> El nombre de professors dels liceus que s'ocupen de la seva ciència és molt petit al nostre país: i, a més, aquells que se n'ocupen no tenen el sentiment d'aquesta solidaritat didàctica i científica que hi ha a Alemanya i que proporciona lectors atents a qualsevol article una mica seriós. No obstant no desesperem pas!
>
> [Beltrami a Hoüel, Roma 5/1/75[72]]

Així per poder garantir el bon nivell de l'ensenyament, l'any 1875, el ministre d'educació Ruggero Bonghi, instaura les Escoles de Magisteri[73], amb la finalitat de donar coneixements actualitzats al professorat i, sobretot, un entrenament apropiat en qüestions pedagògiques. Beltrami, i Battaglini van ser directors de l'escola de Roma. El primer, força animat pel nou projecte, descriu la institució en una carta a Hoüel:

> [...] comprend trois sections, de mathématiques, de chimie, et de sciences naturelles: la physique doit aussi en avoir une, mais il manque encore le laboratoire pour les élèves. Cette "Scuola di magisterio" est tout simplement le réunion de ce que les Allemands appellent un *Seminarium* et d'un *Pedagogium*, c'est-à-dire un ensemble de travaus et d'exercices, qui, ajouté aux leçons ordinaires de chaque Faculté, doit développer chez les élèves l'amour des études et l'aptitude à l'enseignement dans les écoles secondaires: parmi les moyens de préparation au deuxième but, se trouve l'apprentissage pratique chez les lycées de la ville.
>
> [...] comprèn tres seccions, de matemàtiques, de química, i de ciències naturals: la física n'ha de tenir també una, però encara li falta el laboratori pels alumnes. Aquesta "Escola de magisteri" és simplement la unió d'allò que els alemanys anomenen un *Seminarium* i un *Pedagogium*, és a dir, un conjunt de treballs i exercicis, que junt amb lliçons ordinàries de cada Facultat, ha de desenvolupar en els alumnes l'amor pels estudis i l'aptitud per l'ensenyament en les escoles secundàries: entre els mitjans de preparació, com a segon objectiu, es troba l'aprenentatge pràctic als liceus de la població.
>
> [Beltrami a Hoüel, Rome 9/2/76[74]]

[72] A [23], p. 181.
[73] Aquestes institucions es mantindran fins l'any 1920.
[74] A [23], p. 185.

Per aclarir els objectius d'aquestes escoles, el 1885, es va crear la comissió del Consell superior de la Instrucció Pública, formada per L. Cremona, E. Beltrami, Sebastiano Richiardi. Entre les seves propostes, recollides al reglament Boselli[75], s'insistia en la necessitat de donar una preparació més pràctica als futurs professors d'ensenyament secundari, que s'estava deixat de banda per prioritzar la formació científica.

En conclusió, la recerca sobre els fonaments de les matemàtiques i els nous descobriments que qüestionaven les nocions tradicionals, havien despertat l'interés dels investigadors per l'ensenyament elemental, preocupats per transmetre els nous coneixements a les futures generacions. A alguns països, com Alemania, fins i tot es plantejava la possibilitat d'incloure l'estudi de la geometria no euclidiana a les escoles secundàries. També, es donaven nombrosos casos de professors universitaris, que havien començat ensenyant a les escoles secundàries. Tot plegat va suposar que els matemàtics s'involucressin personalment en les qüestions de l'educació tant a nivell polític, creant un marc legal apropiat, com formant professors i actualitzant els llibres de text.

3.3 El paper de Giuseppe Battaglini a les matemàtiques post-unitàries.

Giuseppe Battaglini va néixer a la ciutat de Nàpols, al Regne de les Dues Sicilies, l'11 de gener de 1826. Com molts altres joves napolitans que aspiraven a fer estudis superiors, Battaglini va assistir a l'escola privada de matemàtiques de Tucci i de Angelis[76], on es va preparar per l'admisió a la Regia Scuola di Ponti e Strade, doncs els instituts d'ensenyament secundari no donaven el nivell necessari. Aquesta escola era la de millor reputació i seguia una línia moderna d'ensenyament, per exemple feien servir com a llibre de text els *Eléments de géométrie* d'A.M. Legendre. El 1844 entra a

[75] *Sull'istruzione secondaria classica. Notizie e documenti presentati al Parlamento Nazionale dal Ministro della Publica Istruzione Paolo Boselli*, Roma, Sinimberghi, 1889, pp. 266-269 i pp. 273-274.

[76] L'estudi privat més important de Nàpols era el de Fergola. Quan a l'edat de 47 anys aconsegueix la càtedra a la Universitat, els seus deixebles van començar a obrir noves escoles privades. La de Francesco Paolo Tucci i Salvatore de Angelis, oberta al segon deceni, aviat va eclipsar totes els altres. Veure [3], p. 177.

l'Escola de Ponts i Camins on s'imparteixen les disciplines de geometria projectiva, mecànica racional i matemàtiques aplicades, llicenciant-se al 1848, el mateix any en que va ser promulgada la constitució. En no haver cap vacant com a ingenier de l'estat, dos anys més tard, comença com alumne a l'Observatori de Capodimonte, a la vegada que continuarà els seus estudis en matemàtiques fora de l'àmbit acadèmic. Després de pocs mesos, Ernesto Capocci és destituït de la direcció de l'observatori, per pertànyer al front antiborbònic, i es demana, com a condició de permanència a la institució, la signatura d'una petició al rei per abolir la constitució. Battaglini es nega firmar-la i dimiteix de la seva plaça. Els següents anys, es veurà obligat a donar classes particulars per mantenir- se i els aprofitarà per aprendre anglès i alemany, i continuar amb la recerca matemàtica iniciada pel seu compte. L'any 1854 es presenta al concurs per la càtedra d'Aplicacions de l'Àlgebra a la Geometria de la Universitat de Nàpols, sense aconseguir la plaça[77]. En la correspondència amb Betti es fa referència a aquest incident, mostrant el suport que va tenir per part de Betti[78], qui l'anima a esperar que arribin millors temps. Battaglini treballarà llavors, donant classes a l'estudi de Tucci fins l'expulsió dels Borbons l'any 1860.

Amb el canvi de govern, Battaglini va passar a ocupar la nova càtedra de Geometria Superior a la Universitat de Nàpols (1860-1871), plaça que, junt amb la de Cremona, va ser assignada per decret. Obté així el reconeixement pels estudis i importants publicacions que havia vingut realitzant. Els anys a la Universitat de Nàpols, van ser els més productius de la seva carrera i, com assenyala D'Ovidio, les seves publicacions a l'Accademia delle Scienze napolitana li van donar prestigi tant a Itàlia com a l'extranger per la seva elegància i unitat de mètode[79].

Les noves reformes no van aconseguir que la Universitat de Nàpols funcionés de manera adequada. Battaglini es queixa a Betti de l'acumulació de càrrecs d'alguns professors, concretament de Fortunato Padula, qui en tenia

[77]Veure [30], p. 22-23. La va guanyar Antonio Cua, que ja formava part del mon acadèmic i que va fer servir mètodes de geometria sintètica seguint el corrent de la universitat napolitana, mentre que Battaglini havia defensat la seva tesi seguint mètodes més moderns.

[78]Veure les cartes de Battaglini a Betti, Napoli 17/1/55 i 19/4/70, a [30], p. 183 i p.195, respectivament.

[79]*Commemorazione*, [37], p. 559.

quatre[80]. Battaglini suposava que deixaria la càtedra de Mecànica Racional per prendre-la ell i així poder cedir la seva a Cremona, aconseguint poder treballar junts a Nàpols, com tots dos desitjaven[81]. El projecte no va tenir éxit, però, ja que Padula no va renunciar a la seva càtedra, provocant la indignació de Battaglini, que considera que no és possible exerci bé tants oficis[82]. Battaglini, qui només tenia un càrrec, sembla que viu una situació econòmica complicada, segons explica a Betti, quan li exposa les seves raons per rebutjar la seva proposta de transferiment a la Universitat de Pisa[83]. El napolità veu en la reforma de la Universitat de Roma una possibilitat de millora econòmica i aprofita la visita a Nàpols del Ministre d'Instrucció Pública Cesare Correnti, per demanar-li un trasllat, pensant també en que segurament el govern es "voldrà alliberar dels clergots que, a la vegada que actualment ocupen els llocs de la Università di Roma, fan oposició obertament al nou ordre de les coses"[84].

Messos més tard, fou convidat, per consell de Brioschi, a Roma, on li ofereixen donar la Geometria Superior, conservant el sou que tenia a Nàpols, amb la promesa que podrà donar alguna altra assignatura, com la Geometria Analítca o el Càlcul Diferencial i Integral[85]. Un cop arribat a la capital, però, les coses no són com ell esperava. Battaglini explica a Betti, que no acaben d'assignar-li l'altre ensenyament que li havien proposat i que pateix perquè es resenteixi l'economia familiar, ja que les condicions de vida a Roma són més difícils[86]. Pocs mesos més tard escriu també a Hoüel dient que es penedeix d'haver-se traslladat[87]. Finalment, es veurà en la necessitat de donar classe també a l'Institut Tècnic, feina que li "treu moltíssim temps i el fatiga enormement"[88]. Ocupant-se, a més, en les traduccions de diversos tractats[89], tant per les necessitats didàctiques del seu pais, com per raons

[80]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 7/1/1864, a [30], p. 192-193.

[81]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 17/12/1863, a [30], p. 190-191.

[82]Veure la carta a Betti, Nàpols 17/12/63., a [30], p.190

[83]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 19/04/70, i d'Anna Egg Battaglini (la seva dona) a Betti, Napoli 18/7/71, a [30], p.195-196 i p. 197-198 , respectivament.

[84]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 16/8/1871, a [30], p. 198-199.

[85]Veure la carta de Battaglini a Betti, Nàpols 29/10/71, a [30], p. 200-201.

[86]Veure la carta de Battaglini a Betti, Roma 20/11/71, a [30], p. 201-202.

[87]Veure la carta de Battaglini a Hoüel, Roma 25/1/1872, a [30], p.126-127.

[88]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 13/09/1873, a [30], p 204.

[89]A les cartes a Hoüel (Napoli 1/3/70 i Roma 22/7/72, a [30], p. 87 i p. 131, respectivament) fa referència a algunes traduccions de I. Todhunter, les citades a la n. 20 de la p. 61, i el *Trattato elementare sulla Meccanica razionale con molti esempi...*, 1873. Del

econòmiques, lamentarà no poder-se dedicar a la feina científica tant com hagués desitjat[90].

Les cartes de Battaglini, d'aquests anys, mostren la seva preocupació per la renovació de la docència i la recerca a les universitats italianes, manifestamt sovint un sentiment crític envers la institució romana[91]:

> La dimora in Roma non mi porta male, con la mia famiglia: solamente la vita scientifica è presso che nulla, né pare che per ora le cose si avviino al meglio. Le preoccupazione finanziarie e politiche distraggono il Governo dalle cure pel progresso dell'istruzione pubblica...
>
> L'estada a Roma no em va malament, amb la meva família: però la vida científica és pràcticament inexistent, ni sembla que les coses hagin d'anar a millor. Les preocupacions financeres i polítiques distreuen el Govern de cuidar-se del progrés de l'educació pública...
>
> [Battaglini a Hoüel, Roma 22/7/1872]

> Infine, che cosa se ne vuol fare della Università di Roma dopo tanto chiasso? Io vedo che i migliori suoi Professori l'abbandonano, chiamati altrove da migliori condizioni; dovrò cercare anche io di ritornare in Napoli?.
>
> Al final, què és vol fer de la Universitat de Roma després de tant soroll? Veig com els millors professors l'abandonen, cridats a altres llocs amb millors condicions; hauré de provar també jo de tornar a Nàpols?
>
> [Battaglini a Betti, Napoli 13/09/1873]

Tot i així, Battaglini va restar a la Universitat de Roma fins l'any 1885, on va anar donant diferents matèries com Geometria analítica, Mecànica aplicada a la construcció, Anàlisi superior i Matemàtiques superiors. També va exercir el càrrec de rector (1873-74), va presidir la Facultat de Ciències tres anys i

mateix autor també va traduir *Complementi di Algebra o Teoria delle equazione...*, 1872, ; de J. Hamblin Smith, el *Trattato di Aritmética*, 1878 i l'*Algebra elementare*; i de Netto *Teoria delle sostituzioni e sua applicazione all'Algebra*, 1885.

[90] Veure les cartes de Battaglini a Hoüel, Roma 22/07/72, i a Betti, Napoli 13/09/1873, a [30], p. 131 i p. 204, respectivament.

[91] Veure a [30]: Carta de Battaglini a Hoüel, Roma 25/1/72, p. 126-127 i les que citem: Battaglini a Hoüel, Roma 22/7/72, p. 131; i Battaglini a Betti, Napoli 13/09/1873, p. 204.

va ser director de l'Escola de Magisteri de la Facultat. A partir de l'any 1872 fou soci de l'Accademia Reali dei Lincei, als *Atti della Accademia* va publicar alguns articles sobre geometria no euclidiana, que posteriorment apareixien republicats al *Giornale*. Finalment, els problemes de salut el fan decidir-se a tornar a la Universitat de Nàpols, en quedar lliure la càtedra de Càlcul Infinitessimal a la mort de Nicola Trudi. El 1891 deixa l'ensenyament i mor tres anys més tard, el 29 d'abril de 1894.

La freqüent correspondència que Battaglini mantenia amb altres personalitats rellevants del moment, com A. Genocchio, E. Betti i J. Hoüel, demostra que va tenir un paper important en el panorama científic i acadèmic italià. Aquesta documentació testimonia la participació de Battaglini a les institucions i en l'assignació de premis, beques i càrrecs a la universitat, a la vegada que mostren la seva implicació en la formació i promoció dels joves. A més de les qüestions acadèmiques, es tracten temes relacionats amb la publicació d'articles i veiem el desenvolupament dels seus projectes científics, dels que parla amb gran entusiasme. Com diu d'Ovidio, la seva conversa exhala ardor juvenil per la ciència[92].

La contribució de Battaglini al citat projecte nacional per promoure la matemàtica comprén molts aspectes. Citant G.Ferraro i F. Palladino:

> Giuseppe Battaglini rappresenta una delle figure maggiormente significative espresse dalla matematica italiana nel passaggio dallo stato preunitario al Regno d'Italia. Ciò si coglie dalla considerazione di aspetti molteplici, il primo dei quali è costituito dalla sua produzione scientifica.
>
> Giuseppe Battaglini representa una de les figures més significatives de la matemàtica italiana en el pas de l'estat preunitari al Regne d'Itàlia. Això es desprén de la consideració de múltiples aspectes, el primer dels quals consisteix en la seva producció científica[93].

Sens dubte, va tenir un paper destacat en el desenvolupament de la geometria no euclidiana a Itàlia. Principalment, per la difusió que va fer de les noves idees, mitjançant la traducció d'obres fonamentals com la *Pangeometria* de Lobatxevski [7] i de l'*Appendix* de Bolyai [9]. Beltrami mateix va conèixer el

[92]Veure la seva *Commemorazione*, [37], p. 560.
[93]A [30], p. 8.

treball de l'hongarès per aquesta traducció[94]. Però també, per les aportacions rellevants que va fer en aquest camp de recerca. D'Ovidio valora la seva contribució amb aquestes paraules[95]:

> La Geometria non-euclidea ebbe in lui del pari un pronto divulgatore mediante la traduzione delle memorie fondamentali di Lobatschewsky e Bolyai, e un valido collaboratore mediante i lavori del 7o gruppo, e segnatamente mediante quelli che vertono sulle proprietà del circoli non-euclidei.
>
> La Geometria no euclidiana va tenir en ell a la vegada un immediat divulgador mitjançant les memòries fonamentals de Lobatxevski i Bolyai, i un vàlid col·laborador mitjançant els treballs dels 7è grup [relatius a la Geometria no euclidiana], especialment mitjançant aquells que tracten les propietats dels cercles no euclidians.

Una altra labor que li ha estat molt reconeguda és la creació del *Giornale di Matematiche*. Fundat amb Nicola Trudi[96] i Janni Vicenzo[97] l'any 1863, el diari pretén donar resposta a les necessitats de la comunitat científica italiana amb la divulgació de les noves idees matemàtiques, especialment en el camp de la geometria, com es declara a la seva presentació[98]:

> Il sempre crescente sviluppo che prendono in questa nostra età le scienze matematiche, e d'altra parte le difficoltà che s'incontrano da chi intende a seguire questo incessante incremento, tanto per necessaria conoscenza di lingue straniere, come per corredo di libri, e cognizioni sufficienti a comprendere i lavori di molti illustri Geometri viventi: ci han fatto sorgeri il pensiero di fondare il giornale che annunziamo. El continuat creixement del desenvolupament de les ciències matemàtiques als nostres temps, i d'altra banda les dificultats en que es troben els que pretenen seguir aquest increment incessant, tant per la necessària coneixença de llengües estrangeres, com per la quantitat de llibres, i els coneixements suficients per comprendre els treballs de molts il·lustres Geòmetres vius: ens han fet sorgir la idea de fundar el diari que presentem.

[94] Veure la carta de Beltrami a Hoüel Bologna 4/12/68, a [23], p. 70.
[95] Veure la *Commemorazione*, [37], p. 564.
[96] Professor de Càlcul Diferencial i Integral a la Universitat de Nàpols.
[97] Professor de matemàtiques del Col·legi de Marina de Nàpols i de Geometria Analítica a la Universitat de Nàpols.
[98] *Ai cultori delle scienze matematiche in Itàlia*, [10].

Tres anys més tard de la seva fundació, Battaglini en va assumir la direcció, convertint-lo, junt amb els *Annali di Matematica Pura ed Applicata* en una de les revistes de referència a Itàlia.

La rellevància del *Giornale* queda palesa per la gran envergadura de les obres, tant italianes com estrangeres, que s'hi van publicar. Entre els articles més insignes es troben el *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (1868) de E. Beltrami, o les seves pròpies traduccions de les obres de Lobatxevski (1867) i Bolyai (1868). Des de la seva direcció, Battaglini col·labora en la construcció de l'entorn matemàtic italià amb la difusió d'obres estrangeres, i sobretot, amb l'obertura d'un nou camp de recerca, el de la geometria no euclidiana. El *Giornale* va ser el principal divulgador de la nova geometria a Itàlia, acollint a les seves pàgines una alta proporció d'articles relatius a aquesta qüestió[99]. A més dels ja citats, també apareixen el seu article *Sulla geometria imaginaria di Lobatschewsky* (1867) o el *Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit* Postulatum *d'Euclide*, de J. Hoüel (1870)[100]. El paper cabdal que van tenir, tant el director com la revista, en la introducció del nou àmbit d'estudi, ha estat sovint reconegut. Bonola els presenta d'aquesta manera[101]:

> With equal conviction and earnestness Giuseppe Battaglini introduced the new geometrical speculations into Italy and there spread them abroad. From 1867 the *Giornale di Matematica*, on which he was both founder and editor, became the recognized organ of Non-Euclidean Geometry.
>
> Amb la mateixa convicció i serietat [que Jules Hoüel a França] Giusepe Battaglini va introduir les noves especulacions geomètriques a Itàlia i allà es van expandir a l'extranger. Des de 1867 el *Giornale di Matematiche*, del que va ser fundador i editor, va arribar a ser l'òrgan oficial de la Geometria no Euclidiana.

Castellana i Palladino, reconeixent a més, la seva labor pedagògica, afegeixen que, el *Giornale*, va ser "*l'òrgan oficial*, al servei combinat de la didàctica i

[99] Els *Annali* també van veure publicades algunes obres sobre el tema però en menor mesura, com la *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* de Beltrami (sèrie II, volum II, 1868-69) i la traducció que va fer Hoüel del *Über die hypothesen welche der geometrie zu grunde liegen* de B. Riemann.

[100] *Giornale di Matematiche*, **8**, 1870, p. 84-90.

[101] A [26], p. 126.

de la recerca universitària italiana”[102].

Battaglini va tenir sempre la voluntat de que el *Giornale* mantingués una línea moderna i es va preocupar de que les publicacions aportessin idees innovadores, filosofia que el va caracteritzar durant la seva llarga existència, fins al 1967. A les cartes del matemàtic es fan constants referències a les feines derivades de l'edició de la revista, desvelant la gran consideració que tenia per aquest projecte. El seu trasllat a Roma el fa patir per la continuïtat de la revista, desitjant que algú vulgui assumir, sense cap compensació, com feia ell, les molèsties de la seva publicació[103]. Afortunadament, continuarà amb la cooperació dels professors Fergola, D'Ovidio, Torelli i Sardi[104]. A la seva *Commemorazione*, D'Ovidio parla en aquests termes de la seva determinació com a director de la revista:

> In cotesta impresa come nell'insegnamento, ciò che costantemente lo sospinse e guidò fu un amore intenso, disinteressato per la scienza, un desiderio vivissimo che l'Italia si afferamasse fra le nazioni più colte ed operose, che ai giovani cultori italiani della Matematica non facessero difetto quei mezzi di rapidamente apprendere le più recenti scoperte e di sottoporre al giudizio del pubblico i risultati delle proprie ricerche, i quali abbondavano in Francia, in Germania, in Inghilterra.
>
> En aquesta empresa com a l'ensenyament, el que el va empényer i guiar fou un amor intens, desinteressat per la ciència, un dessig vivíssim que Itàlia s'afermés entre les nacions més cultes i actives, que als joves italians estudiosos de la matemàtica no els manquessin els mitjans d'aprendre ràpidament els descobriments més recents i de sotmetre al judici públic els resultats de la propia recerca, que abundaven a França, Alemania i Anglaterra[105].

Com diu D'Ovidio, el napolità comparteix amb els matemàtics contemporanis un sentiment de responsabilitat per la formació científica del joves. En diverses situacions intercedeix per algun dels seus estudiants, com la recomanació que fa d'Ernesto Pascal (1865-1940) a Betti, quan ha d'anar a Pisa a prendre la plaça que ha guanyat per fer el perfeccionament dels estudis[106], o

[102][...] il *Giornale* fu, più in generale, come “l'organo ufficiale” al servizio combinato della didattica e della ricerca universitaria italiana. [30], p. 8.

[103]Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Napoli 31/10/71, a [30], p. 125.

[104]Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Roma 25/1/72, a [30], p. 127.

[105]A [37], p. 559-560.

[106]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 15/11/87, a [30], p. 44.

el vot en favor de Domenico Montesano per una plaça de perfeccionament a la Universitat de Roma[107]. El *Giornale* també va ser fundat per contribuir a aquesta finalitat, com ja s'indica al seu títol complet *Diari de matemàtiques per l'ús dels Estudiants de Matemàtica de les Universitats italianes*[108], i es constata en la declaració d'intencions amb que és presentat a [10]. Així recull obres de joves matemàtics que arribaran a ser punts de referència a l'escena matemàtica italiana com R. de Paolis, G. Ricci-Curbastro[109], Ernesto Cesàro i Enrico D'Ovidio.

El desig per cooperar a mantenir alt el prestigi de la ciència matemàtica italiana, porta a Battaglini a preocupar-se també per les qüestions pedagògiques. Aquesta motivació el porta a emprendre un seguit de traduccions de tractats extrangers[110], adaptant-los als programes italians, amb la idea de millorar l'ensenyament fonamental, a més dels seus esforços per exposar les noves doctrines i incitar als altres a apropiar-se-les i aprofondir-ne[111]. El seu ferm compromís amb l'educació de les generacions posteriors, es resaltat pel seu alume d'Ovidio, qui escriurà grans elogis de la destresa de Battaglini com a professor, declarant que "per ell ensenyar fou una necessitat de la ment i del cor"[112].

La lectura de la correspondència de Battaglini ens permet albirar alguns trets de la personalitat del matemàtic. Se'ns presenta una persona modesta, que mostra profund respecte i admiració pels grans matemàtics contemporanis. Intuïm també un home modern, obert a les noves idees tant en les qüestions socials com en les intelectuals, i revindicatiu, capaç d'exposar crítiques constructives al món acadèmic i les institucions. Aquesta actitud ajuda a entendre la seva tria de recolzar la hiperbòlica en la disputa ideològica que mantenien els partidaris de cadascuna de les dues geometries. Doncs, aquesta, no era només una discussió sobre punts de vista científics i filosòfics, es tractava també del comfrontament entre la tradició i la modernitat, l'afiliació al règim polític i social establert i la defensa d'un nou ordre de les coses, més just socialment.

---

[107] Veure les cartes de Battaglini a Betti, Napoli 6/09/86 i 13/09/86, a [30], p. 221-222.

[108] *Giornale di matematiche ad uso degli Studenti di Matematica delle Università italiane*

[109] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) considerat l'inventor del càlcul tensorial, junt amb el seu alumne Tullio Levi-Civita, seguint les idees de Riemann i Christoffel. Va estudiar a Pisa on va asistir a classes de Betti.

[110] Com per exemple els citats a la n.89, p. 81.

[111] Veure les paraules de A. Capelli al seu *Cenno biografico*, a [29], p. 206.

[112] "Per lui insegnare fu un bisogno della mente e del cuore," a [37], pag. 561.

3.4 Eugenio Beltrami. Nota biogràfica.

En aquesta biografia es pren com a referència les cartes de Beltrami a Betti, Gherardi i Tardy editades per Livia Giacardi i Rossana Tazzioli a [46], les cartes de Hoüel editades per aquestes autores junt amb Luciono Boi a [23], i la ressenya biogràfica feta per Luigi Cremona amb que s'inicia l'edició de les obres completes de Beltrami [19].

Eugenio Beltrami va néixer a Cremona el 16 de novembre de 1835. Els ideals risorgimentals li venien de família. La seva mare, Elisa Barozzi, i el seu pare, Eugenio Beltrami, van participar als moviments polítics del 48, el que va provocar que la seva família no pogués esperar cap càrrec públic de les autoritats austriaques[113], i que el pare acabés havent-se d'exiliar. Per aquest motiu, el seu avi patern, Giovanni Beltrami, reconegut artista de grabats en pedra, els mantenia a la seva mare i a ell.

Estudia Matemàtiques a la Universitat de Pavia (1853-56), on va seguir els cursos de Brioschi, però va haver d'abandonar els estudis abans de fer els examens finals per llicenciar-se. L'expulsió del col·legi Ghislieri, on s'ospedava, acusat de promoure desordres en contra del rector, va agreujar la situació econòmica de la familia, ja difícil arrel de la mort de l'avi, impossibilitant la seva manuntenció a Pavia. El jove es veu obligat a deixar la vida universitària i comença a treballar fent feines administratives per l'enginyer de mines Diday, qui el va tractar com a un fill. Descobreix aquests anys la seva veritable vocació i refà del tot la seva educació científica, estudiant pel seu compte les diferents disciplines matemàtiques[114]. Continua la seva formació a Milà, on repren el contacte amb Brioschi i coneix a Cremona. La seva intenció de trobar una feina com a professor d'ensenyament secundari, més afí a la seva vocació, es veu obstaculitzada per no haver fet els examens de la llicenciatura. Va ser gràcies a dues memòries que va publicar als *Annali di Matematica*, que Brioschi, llavors secretari general del Ministeri d'Instrucció, es va fixar en ell i va fer que l'anomenessin per decret professor extraordinari d'Àlgebra Complementària i Geometria Analítica a la Universitat de Bologna, l'any 1862.

Un any més tard, E. Betti li ofereix la càtedra de Geodèsica a la universitat

[113] Beltrami ho explica a la seva carta a Hermite, Venzia 1/11/1887, citada a [46], p. 11.
[114] Veure la mateixa carta a Hermite, Venzia 1/11/1887, citada a [46], p. 11.

de Pisa. Inicialment, escriu a Betti refusant-la per considerar que no té els coneixements que es requereixen i per veure-ho com un canvi de direcció en els seus estudis[115]. Finalment accepta, empés per Cremona, que li recomana aprofitar la oportunitat d'obtenir una plaça estable[116], i el gener de 1864 s'incorporarà a la nova plaça. Beltrami passarà uns messos preparant-se per les seves classes a l'observatori de Milan, amb l'astrònom Giovanni V. Schiaparelli[117], qui també preparava un curs de geodèsia[118].

L'experiència de dos anys fent una feina llunyana als seus interessos, l'inclinarà sempre a prioritzar les seves inquietuds científiques, refusant càrrecs administratius, rectorats i presidències de facultats (només va acceptar entrar al Consell Superior d'Instrucció). Així, al llarg de la seva vida, els seus estudis aniran sempre relacionats amb les càtedres que ocupa i les classes que ha d'impartir. Els anys a Pisa el porten, doncs, a l'estudi de les superfícies segons les directrius de Gauss i especialment en la teoria matemàtica de les cartes esfèriques. Durant aquests temps, la seva amistat amb Betti es fa més estreta i té la oportunitat de freqüentar Riemann, que durant els anys 1863-1865, havia fixat allà la seva residència per qüestions de salut. Les dues persones seran una gran influència per ell. Tot i les seves nombroses conversacions amb Riemann, Beltrami explicarà posteriorment a Hoüel, que el sorprén que mai parlés de les idees que va exposar a la seva habilitació sobre els fonaments de la geometria[119].

El 1866, es planteja tornar a Bologna, on prendria l'ensenyament de Mecànica Racional, sempre que Ulisse Dini[120], qui havia estat inicialment proposat pel càrrec, el substituïs a Pisa. El motiu principal per voler el trasllat és l'empitjorament de la salut de la seva mare, a qui no li sentava bé el clima

[115] Veure la carta a Betti, Venezia 20/08/1863, a [46], p. 61-62.

[116] Veure la carta a Betti, Venezia 26/08/1863, a [46], p. 63.

[117] Giovani V. Schiaparelli (1835-1910) va ser l'astrònom italià més important d'aquell segle.

[118] Beltrami li diu a Betti a la carta del 25/10/1863, a [46], p. 67.

[119] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologna 4/12/1868, a [23], p. 69.

[120] Ulisse Dini (1845-1918) es llicencia a Pisa al 1864, on va tenir com a professors a Betti i a F.O. Mossotti, a qui va substituir Beltrami en l'ensenyament de Geodèsia. Després d'un any a París, al 1866 ocupa el càrrec de professor de Geodèsia a Pisa, com s'insinua a la carta de Beltrami a la que ens referim a la nota següent. Després va ser director de l'Escola Normal Superior fins la seva mort. Va fer contribucions importants en anàlisi matemàtica i en altres camps de les matemàtiques.

de Pisa[121]. Esperant poder obtenir una plaça a la Universitat de Padova, on la seva mare estaria més a prop de la seva família, s'entrevista també amb Bellavitis, però les seves paraules no li semblen encoratjants[122]. Així, cedint a la insistència de Cremona, que volia millorar l'ensenyament de la Mecànica[123], ocupa finalment la càtedra a Bologna, més acord amb els seves inclinacions. Es veurà obligat, també, a substituir a Cremona, que parteix a Milà, en la docència de la Geometria descriptiva, tot i no ser del seu gust, per tal d'escloure un mal professor[124].

Aquests són els anys més productius a nivell científic, l'ensenyament de la mecànica el portarà a emprendre noves recerques, i és quan escriu el *Saggio* i la *Teoria fondamentale*. Sobre aquests treballs escriurà al seu amic Betti:

> Sono curioso di vedere l'accoglienza che si farà al mio modo di presentare le nuove teorie geometriche che ora per vero dire ha in suo favore l'esempio del Riemann. Io non pretendo che questo modo sia il migliore - anzi convien riconoscere che il metodo sintetico sembra più confacente all'argomento - ma mi pare che sia la strada più opportuna per far vedere la ragione dell'introdursi di quei concetti nelle prime considerazioni della geometria.
>
> Tinc curiositat per veure l'acollida que rebrà la meva manera de presentar les noves teories geomètriques que ara té, per dir la veritat, al seu favor l'exemple de Riemann. Jo no sostinc que el meu mètode sigui el millor - de fet cal reconèixer que el mètode sintètic sembla més adequat per aquest tema - però em sembla que és el camí més oportú per fer veure la raó d'introduir aquests conceptes en les primeres consideracions de la geometria.
>
> [Beltrami a Betti, Bologna 13/1/1869[125]]

El mateix any 1869, Betti li proposa tornar a Pisa a ocupar la càtedra de Mecànica Racional, però, encara que li sap greu no correspondre l'oferta

---

[121] Veure la carta a Betti, Pisa 23/05/1866, a [46], p. 71.
[122] Veure les cartes a Betti, Noale 16/8/1866 i Padova 17/8/66, a [46], p. 72-73.
[123] Giacardi i Tazzioli a [46], p. 14, en fer aquesta afirmació es remeten a la carta de Cremona a Betti, Bologna 10/06/1866, a Gatto R. "Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti", en *La correspondenza di Luigi Cremona (183-1903)*, p. 28-29.
[124] Veure la carta a Betti, Bologna 17/11/66, a [46], p. 75.
[125] A [46], p. 85.

del seu amic, refusarà per la salut de la seva mare[126]. Romandrà, doncs, a Bologna fins el 1873, any en que es cridat a formar part de la Universitat de Roma, on ocuparà la càtedra de Mecànica Racional i farà a més les classes d'Anàlisi Superior.

També aquest cop Cremona tindrà un gran pes en la seva decissió. Beltrami accepta participar com a professor en el nou projecte, dirigit per Cremona, de reorganització de l'Escola d'aplicacions pels Enginyers, amb el principal objectiu d'estar a prop d'ell[127]. A més, espera trobar-se també amb altres amics, com Battaglini i, potser, també Chelini. Un cop allà, però, Beltrami es lamenta a Tardy que les ocupacions dels seus col·legues els mantenen apartats del treball científic:

> Facilmente comprenderai che, nel venire a Roma, il mio principale obbiettivo fu quello di trovarmi vicino al Cremona. Disgraziatamente le cure volute dall'impianto della nuova Scuola (avversata da molti, e, *in primis ante omnia* da Brioschi, che è in stato di guerra col Cremona) sono tali e tante, che per tutto quest'anno e fors'anche per qualche anno successivo il mio ottimo amico non potrebbe, anche volendo, interessarsi gran fatto alle cose della scienza. Il Battaglini è molto occupato anch'esso, in quest'anno, dall'ufficio che gli hanno accollato di Rettore dell'Università. Quindi, per ora almeno, io dovrò accontentarmi di studiare per solo mio conto, come pur troppo sono da gran tempo abituato a fare: la vita scientifica comune è un beneficio che verrà soltanto più tardi.
>
> Compredràs fàcilment, que el principal objectiu pel que vaig venir a Roma, va ser estar a prop d'en Cremona. Desgraciadament, les atencions necessàries per la fundació de la nova Escola (amb l'oposició de molts, i, *in primis ante omnia* d'en Brioschi, que es troba en estat de guerra amb en Cremona[128]) són tals i tantes, que per tot aquest

[126] Giacardi i Tazzioli es rementen a la carta de Beltrami a Chelini, Bologna 22/11/69, nota 21, a [46], p. 16. Veure també la carta de Beltrami a Betti, Bologna 28/12/70 a [46], p. 91-92.

[127] Veure les cartes a Gherardi, Roma 9/11/1874, a [46], p. 265-266; i a Tardy, Roma 13/12/73, a [46], p. 185-186.

[128] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologna 28/12/73, a [23], p. 177. Segons Beltrami, Brioschi, acostumat a prendre un paper actiu en tot el relatiu a l'ensenyament, s'havia sentit ofés en veure sorgir, sense la seva participació, l'Escola politécnica de Roma, que l'havia privat dels seus col·laboradors més eminents (entre ells el mateix Cremona). Per aquesta raó, havia combatut vivament en el Senat, l'assignació de fons que li estaven

> any i potser també per alguns succesius, el meu òptim amic no podria, ni volent, interessar-se massa per les coses de la ciència. En Battaglini també està molt ocupat aquest any, amb la feina que li han endosat de Rector de la Universitat. Per tant, al menys per ara, m'hauré d'acontentar en estudiar pel meu compte, com desgraciadament estic acostumat a fer des de fa molt temps: la vida científica en comú és un benefici que vindrà més tard.
>
> [Beltrami a Tardy, Roma 13/12/1873[129]]

En aquests dies escriu també a Hoüel[130], mostrant-se un tant descontent amb la seva estada a Roma. Es queixa de que la compensació econòmica que reb per donar l'assignatura adicional es queda en res degut a l'elevat preu de la vivenda a Roma, *absolument dépourvus, au reste, de tout confort de la vie moderne*, i explica que tampoc Battaglini està content amb la matèria que ha donar. D'altra banda, havia quedat molt disgustat per la disputa entre Brioschi i Cremona, els dos mestres més insignes de l'escena italiana, com ja havia declarat a Gherardi anteriorment:

> Già saprete della ostilità a tutta oltranza mossa da Brioschi al nuovo Istituto di Roma ed al Cremona stesso. Chi lo avrebbe creduto! A me ciò fa un dispiacere grandissimo, come agevolmente potrete immaginare: ma per ora non vedo possibilità di conciliazione.
>
> Ja coneixeu l'hostilitat a ultrança del Brioschi al nou Institut de Roma i al Cremona mateix. Qui ho hauria dit! A mi això, com us podeu imaginar, em desagrada moltíssim: però per ara no veig cap possibilitat de reconciliació.
>
> [Beltrami a Gherardi, Bologna 27/12/1873[131]]

Acaba la seva carta a Hoüel dient:

> A côté de ces inconvenients il y en a d'autres, d'un caractère plus général, que je ne puis pas, en ce moment, vous détailler, mais qui amoindrissent de beaucoup la satisfaction que j'ai d'abord éprouvée de mon transfèrement à Rome.

destinats, i va estar a punt de fer dimitir al ministre, que només va poder obtenir la votació a favor dels fons admetent el caràcter provisional de l'Escola.

129 A [46], p. 186-187.

130 Carta del 28/12/73, a [23], p. 177.

131 A [46], p. 245. Veure també la carta a Gherardi Roma 17/1/74 a [46], p. 247.

> A més d'aquests inconvenients, n'hi ha d'altres, de caràcter més general, que no us puc detallar en aquest moment, que minven molt la satisfacció que tenia en un principi del meu trasllat a Roma.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 28/12/73[132]]

Només uns mesos més tard manifesta a Tardy que es planteja deixar la capital, degut als problemes de salut que pateix la seva dona des que s'han traslladat[133]. Sembla ser que Roma era una ciutat bastant insalubre, i que també Beltrami patia sovint de les febres "dites romaines", a causa dels habituals canvis de temperatura[134]. Menciona la possibilitat de traslladar-se a Padova, a cobrir una vacant de Càlcul Diferencial i Integral i a donar la nova assignatura de Física Matemàtica, però ja espera l'oposició de Cremona:

> In seguito a tutto questo capirai che vado pensando se mi convenga restare a Roma, o non piuttosto cogliere la prima occasione di andarmene via. Mi verrebbero fatte vive insistenze da Padova, per andare al posto del Minich, e sto appunto pensando a questo: ma pur troppo debbo aspettarmi ad opposizioni e recriminazione aspre e forti da parte del Cremona, i quale, al primo cenno che gli fu fatto di ciò, volle vederci la mano di un fierissimo [sic] nemico della scuola d'applicazione, quantunque nulla sia più strano, diciamolo pure, d'una tale supposizione. Basta: per ora ciò resti fra noi.
>
> Degut a tot això, entendràs que estic pensant en si em convé quedarme a Roma, o marxar en quant tingui ocasió. Des de Padova m'han insistit vivament per ocupar la plaça d'en Minich, i m'ho estic pensant, però desgraciadament m'esperen l'oposició i les recriminacions d'en Cremona, qui, des del primer moment en que li vaig parlar d'això, va voler veure la mà d'un gran enemic de l'escola de les aplicacions, encara que aquesta suposició, haig de dir que és ben estranya.
>
> [Beltrami a Tardy, Roma 18/4/74[135]]

La proposta de la Universitat de Padova ve també recolçada pel professor Bellavitis, tot i que Beltrami es pregunta si seria del mateix parer en el cas

[132] Veure també la carta a Hoüel del 23/6/74, en la que diu tenir diferències d'opinió amb els seus col·legues de l'escola politècnica, a [23], p. 178-179.
[133] Veure la carta a Tardy, Roma 18/4/74, a [46], p. 188.
[134] Veure la carta a Hoüel, Roma 23/6/74 a [23], p. 178.
[135] A [46], p. 188.

que decidís tornar a treballar en les geometries no euclidianes o, pitjor encara, en els espais de més de tres dimensions[136]. Es decidirà a acceptar-la per la conveniència en les relacions familiars que suposa, doncs tant la seva dona com la seva mare són venecianes i agrairien estar a prop de la família. La transferència, però, es troba, amb la forta resistència de Cremona que no vol que deixi la seva Escola, considerant que perjudicaria greument l'objectiu de fer de Roma un fort nucli matemàtic i el progrés de la ciència italiana. L'il·lustre matemàtic explica les seves raons al ministre i a R. Bondafini, secretari general de la Instrucció Pública, i demana que rebutgin la petició de la Univeristat de Padova[137].

> Mi rivolgo dunque alla S. V. Ill.^{a}, fidente ch'Ella metterà tutto il peso della sua autorità a persuadere S. E. il sig. Ministro a respingere la domanda della Facoltà matemàtica di Padova; se, come non dubio, Ella è persuasa non essere lecito a chiunque de minare l'opera del Governo nello scopo di far prevare [sic] un interesse locale sul bene pubblico. Io affermo risolutamente che pel lustro della Scienza italiana e pel progresso dell'alto insegnamento, il Beltrami dee rimanere a Roma. Ciò che nuoce alla scienza in Italia è l'eccessiva dispersione de' suoi non numerosi cultori: col riunire una buona schiera in Roma, il Governo ebbe in mira di concentre i loro sforzi per renderli più fecondi e per creare un'officina scientifica che tenga l'Italia in onore preso gli stranieri. Il Beltrami a Padova tornerebbe ad essere così isolato com'era a Bologna; giacché (non esito ad affermarlo), ora che il Bellavitis è vecchissimo, Padova non ha più alcun matematico di cui possa seriamente onorarsi.

> Em dirigeixo, doncs, a la S. V. Ill.^{a}, confiant en que farà ús de la seva autoritat per persuadir la S. E. el sr. Ministre a rebutjar la petició de la Facultat de matemàtiques de Padova; si, com no dubto, està conveçuda de que no és lícit minar l'obra del Govern amb l'objectiu de fer prevaler un interés particular sobre el bé comú. Jo afirmo decididament que pel prestigi de la Ciència italiana i pel progrés de l'ensenyament superior, en Beltrami ha de restar a Roma. A Itàlia, el que perjudica a la ciència és l'excessiva dispersió dels seus poc nombrosos estudiosos: reunint un bon grup a Roma, el Govern pretenia concentrar els seus esforços per fer-los més productius i per crear un seminari científic que dignifiqui Itàlia a l'estranger. A Padova, en Bel-

[136] Veure la carta a Hoüel, Roma 23/6/74, a [23], p. 179.
[137] La carta està publicada a [46], p.292-294.

trami estaria tan aïllat com ho estava a Bologna; doncs (no vacil·lo en afirmar-ho), ara que en Bellavitis és vell, no queda a Padova cap matemàtic que es pugui considerar prestigiós.

[L. Cremona a R. Bonfadini, Portici 23/8/1874]

A la vegada, escriu diverses cartes a Beltrami intentant convence'l per quedar-se a Roma, apel·lant a la seva amistat i argumentant que la seva partida suposaria un gran perjudici per l'Escola[138], a les que el Beltrami respondrà expossant les seves raons. Sembla que el to de les cartes es va anar degradant i la disputa va acabar per malmetre la seva amistat.

> Contemporaneamente a queste practiche, ho avuto dal Cremona non so quante lettere, alle quali mi sono studiato di rispondere colla magior calma e serenità possibili. Disgraziatamente il Cremona non ha saputo fare una buona scelta d'argomenti: egli si è sforzato di contraddire ad ogni costo a tutte le mie ragioni, e di provare che la mia condotta era illegale, immorale, tutto quello che voleti di peggio. Siccome il troppo stroppia, così, a dir vero, questa sua opposizione non punto giovato a mettermi sulla via delle transazioni, ed ha anzi scemato peso a quegli argomenti chi io traevo, prima, dalla mia antica amicizia per lui.
>
> A la vegada, he rebut d'en Cremona no sé quantes cartes, a les que estic pensant de respondre amb la major calma i serenitat possible. Desgraciadament, en Cremona no ha sabut triar bé els seus arguments: s'ha esforçat en contradir a qualsevol preu totes les meves raons, i en provar que la meva conducta era il·legal, immoral, i coses encara pitjors. Com en excès tot perjudica, aquesta oposició seva, la veritat, m'ha ajudat a decidir-me pel traslllant, ja que ha tret pes a les raons que tenia per quedar-me, principalment, a la de la meva amistat amb ell.

[Beltrami a Gherardi, Pordenone 3/10/74[139]]

La negativa del govern arribarà amb una Carta ministerial a la Facultat de Padova, que serà comunicada a Beltrami pel degà Turazza. A la missiva es diu que si Beltrami creu que no es pot quedar a Roma hauria de renunciar al càrrec i presentar-se al de Padova com un concursant qualsevol, es fan, a més, una sèrie d'acusasions ofensives referents a que les seves motivacions

[138]Veure la carta a Betti, Venzia 14/8/74, a [46], p. 103-104.
[139]A [46], p. 257-258.

són purament econòmiques i a haver rebut favoritismes, sobre les que Beltrami protestarà a una carta dirigida al ministeri[140]. Com a resposta rebrà una disculpa[141], però es mantindrà la negativa per part del govern, tot i la insistència per part de la Universitat de Padova. Beltrami explica la situació a les cartes als seus amics:

> [...] il progetto d'andata a Padova, al quale tu pure accenni, incontrò a Roma grandissime ed inaspettate difficoltà, le quali assunsero anzi un aspetto così ostile, per non dire ingiurioso, che mi procurarono non pochi dispiaceri in tutto il corso di queste vacanze autunnali. Infatti nella prima ripulsa data al Ministero al voto unanime della Facoltà di Padova, nel mese d'Agosto, era detto fra le altre cose, che se io credevo di non poter restare a Roma, dovevo dare le mie dimissioni, e presentarmi come un concorrente qualunque, non già come professore dell'Università di Roma. Ma non era neppur questa la parte che più mi offendeva: v'erano ben altre insinuazioni, tendenti in sostanza a far apparire che io volessi fare un *buon affare* andando da Roma a Padova! ... Te dirò soltanto che io inviai una protesta violentissima al Ministro, i quale rispose facendomi le più ampie scuse, ma mantenendo il rifuto.
>
> [...] el projecte d'anar a Padova, al que al·ludeixes, va trobar a Roma grans i inesperades dificultats, que van adoptar un caràcter tan hostil, per no dir injuriós, que em van causar no pocs disgustos durant totes les vacances de tardor. De fet, en la primera negativa donada pel Ministeri al vot unànim de la Facultat de Padova, en el mes d'agost, es deia entre altres coses, que si creia que no em podia quedar a Roma, havia de presentar la meva dimissió i concórrer com a un participant qualsevol, no com a professor de la Universitat de Roma. Però aquesta ni tan sols era la part que més m'ofenia: hi havia altres insinuacions, dirigides essencialment a donar a ententre que jo volia fer un *buon affare* anant de Roma a Padova!... Només et diré que vaig enviar una queixa contundent al Ministre, que em va respondre demanant-me les majors de les disculpes, però mantenint la negativa.
>
> [Beltrami a Tardy, Bologna 14/11/74[142]]

Tant Beltrami com la Universitat de Padova continuaran intentant el seu

[140] Veure la carta de Beltrami al ministeri, a [46], p. 294-297.

[141] Veure la carta a Betti, Pordenone 17/9/74, a [46], p. 105-106.

[142] A [46], p. 190-191. Veure també les ja citades cartes a Gherardi del 3/10/74, a [46], p. 257-258, i a Betti del 17/9/74 a [46], p. 257-258.

trasllat, esperant que amb el canvi de ministre es pugui solucionar. L'incertesa a que l'aboca aquesta situació afectarà molt l'estat d'ànim de Beltrami, que confesa a Gherardi que no està prou tranquil per posar-se a treballar i que no té cap gana de tornar a Roma, a causa del deteriorament de la seva relació amb Cremona[143]. El setembre d'aquell any 1874, escriu a Betti:

> Ecco: ormai la condizione delle cose, specialmente nei rapporti col Cremona, è tale che io non potrei più tornare, non dirò volentieri, ma senza ripugnanza, a Roma. Il Cremona s'è fitto in capo, prima di tutto, che la proposta di Padova sia una manovra di nemici della sua scuola, manovra di cui io non sarei che un docile strumento. È inutile ch'io dica una parola sola per convincere te dell'assoluta insussistenza di questa supposizione. In secuondo luogo egli trova che l'averere io acconsentito a che tale proposta si facesse, è un abuso di potere mostruoso, che avrebbe potuto meritarmi i maggiori rimproveri del Ministero: s'intende che lo stesso dee dirsi della proposta padovana, la quale avrebbe dovuto attirare al preside Turazza una solenne "*lavata di capo*" (e qui, fortunatamente il Cremona è contradetto dallo stesso Bonfadini che dice "non censurabile" il desiderio della Facoltà di Padova). Poi il Cremona sostiene che io faccio a lui un'"offessa crudele", all'Università ed alla Scuola di Roma un tradimento, e che altro so io di peggio; e tutto questo, non già leggermente, ma col tuono della più profonda convinzione. Tutto questo mi addolora estremamente, perché ben comprendo che vi ha gran parte il dispiacere d'un amico così egregio, dispiacere che io divido nel modo più sentito.

> Ara ja l'estat de les coses, especialment en les relacions amb en Cremona, és tal que no podria tornar, ja no dic de bona gana, sinó sense aversió, a Roma. El Cremona s'ha ficat al cap, en primer lloc, que la proposta de Padova és una maniobra dels enemics de la seva escola, de la que jo no seria més que dócil instrument. No cal que digui res per convèncer-te de la futilesa d'aquesta suposició. En segon lloc, considera que el fet de que jo hagi consentit a que es fes aquesta proposta, és un abús de poder monstruós, pel que m'hauria pogut merèixer majors retrets del Ministeri: s'entén que el mateix s'ha de dir de la proposta padovana, que hauria hagut de comportar pel degà Turazza una solemne amonestació (aquí, afortunadament, el mateix Bonfadini contradiu en Cremona, dient que el dessig de la Universitat de Padova

[143] Segons explica a la seva carta a Gherardi, Venezia 28/8/74, a [46], p. 256. Veure també la carta a Hoüel, Roma 5/1/75, a [23], p. 180-181.

"no és censurable"). A més, en Cremona manté que li faig una "cruel ofensa" a ell, una traïció a la Universitat i a l'Escola de Roma i no sé quines coses pitjors més; i tot això, no ho diu a la lleugera, sinó que està profundament convençut. Tot plegat em causa un extrem dolor, perque comprenc que es deu en gran part al disgust d'un amic molt egregi, disgust que comparteixo sincerament.

[Beltrami a Betti, Pordenone 17/9/74[144]]

El nou minsitre, Ruggiero Bonghi, també denegarà el trasllat, degut a que, acabant de prendre el ministeri, desconeixia la qüestió. Informat després per Betti, promet a Beltrami el trasllat per l'any següent[145]. Dos anys més tard, però, escriu a Hoüel que, després d'algunes consideracions personals, pràcticament ha renunciat a la càtedra de Padova, principalment, perque no creu que la seva vida universitària millori. D'altra banda, es mostra molt motivat per la creació de les noves Escoles de Magisteri, i per l'honor que li ha fet el ministre d'encarregar-li la direcció de la de Roma[146] . Finalment, el mateix any 1876, aconsegueix la càtedra de Física Matemàtica a la Universitat de Pavia[147], on marxarà, seguint la nova direcció dels seus estudis. Els seus treballs en aquesta disciplina serviran de referència a Vito Volterra i Tullio Levi Civita.

A Pavia trobarà més calma i amics com Felice Casorati i E. Bertini. Però la mort prematura del primer i el fet que la salut de la seva dona no millorés, el faran tornar a Roma l'any 1891. A una carta a Hermite[148], confesa que després de la mort de l'amic[149], no li queda cap motiu per quedar-se on és, i que acceptarà els tràmits fets pels seus amics per transferir-se a la capital. Aquests últims anys a Roma ocuparà la càtedra de Física Matemàtica i es declararà content tant amb els companys, com amb els seus alumnes[150]. Hi romandrà fins a la seva mort, el 18 de febrer de 1900.

[144] A [46], p. 257-258.
[145] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Roma 5/1/75, a [23], p. 180
[146] Carta a Hoüel, Roma 9/2/76, a [23], p. 185.
[147] A la carta a Betti, Venezia 18/8/1876, l'informa de que ha escrit a la Universitat de Pavia acceptant la seva proposta; i a la del 25/9/76 diu que la petició de trasllat a Pavia ja ha estat dirigida al ministre. Les cartes es troben a [46], p. 108 i p. 109.
[148] Pavia 12/3/91, citada a [46], p. 20.
[149] Veure també la carta a Betti, Pavia 28/6/90, on parla del greu estat de salut del seu amic i de lo molt que li entristeix, a [46], p. 170.
[150] Veure la carta a Hermite, Venezia 6/8/92, citada a [46], p. 21.

Degut als diversos trasllats d'universitat al llarg de la seva carrera, Beltrami no va crear una escola pròpia. La seva labor com a professor, però, era molt apreciada. Un dels seus darrers alumnes va ser Federigo Enriques, qui en una carta a Volterra, parla amb molta consideració de les classes que donava Beltrami[151]. El matemàtic tenia molt interés en la formació de les noves generacions. La seva preocupació pel bon funcionament de l'educació i la qualitat dels professors d'ensenyament secundari el va portar a ser director de l'Escola de Magisteri de la Universitat de Roma, on va donar lliçons especials[152], i a involucrar-se en tasques de col·laboració amb el Minsiteri d'Instrucció Pública: va participar en les inspeccions a les escoles[153], va ser membre del tribunal del concurs de llibres de text per les escoles (1871) i va formar part de la comissió del Consell superior de la Instrucció Pública per renovar les Escoles de Magisteri (1885). Sovint veiem el seu suport a la promoció de joves matemàtics, recomanant-los a Betti, com Gian Antonio Maggi[154], Paolo Gazzaniga[155], Ferdinando Aschieri[156], entre d'altres. Conscient de la importància d'estar al corrent de les últimes recerques, també es preocupava de que els seus alumes anessin a estudiar algun any a l'extranger. A les seves cartes a Klein, fa referència a l'acolliment que l'alemany va fer a molts joves italians en la Universitat de Leipzig, en particular, Beltrami recomana el seu alumne Giacinto Morera i s'interessa pel seu progrés[157].

La contribució de Beltrami al progrés de la ciència italiana post-unitària és indiscutible, com es desprén de la seva biografia i de la gran repercusió de les seves obres. Afegir que els seus coneixements d'alemany el van portar a fer algunes traduccions importants, com la de la memòria de Gauss del 1825 [43]. Havia fet, a més, pel seu ús personal, la traducció de la memòria de Riemann del 54, ajudant després a Hoüel en la seva traducció francesa[158].

[151] Segons expliquen Giacardi i Tazzioli a [46], p. 21.

[152] Giacardi i Tazzioli, a [46] p. 51, es rementen a la correspondència amb Casorati, Roma 14/3/76.

[153] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologna 12/6/70, a [23], p. 141-142.

[154] Veure la carta a Betti, Pavia 13/3/81, a [46], p. 130.

[155] Veure les cartes a Betti, Silvaplana 1/9/78 i Pavia 18/7/80 a [46], p. 116-117 i p. 126, respectivament.

[156] Veure la carta a Betti, Pavia 28/10/81, a [46], p. 134.

[157] Cartes a Klein del 7/12/83, del 5 /1/85 i del 17/4/88, a [98], p. 488-490. Les cartes de Beltrami a Klein es troben a Göttinger, Niedersächsische Staats und Universitätsbibliotek.

[158] Veure la carta a Hoüel, Bologne 25/3/69, a [23], p. 84-86. Battaglini també ho menciona a la seva carta a Hoüel, Naples 25/6/68, a [30], p. 72-73.

També corregirà per Gherardi la mala traducció que Curtze havia fet d'un escrit seu[159].

Beltrami va ser, molt especialment, una peça clau en l'objectiu d'internacionalitzar la ciència italiana. La seva recerca el va convertir en un dels matemàtics més influents i respectats a Europa. Va ser soci de les principals acadèmies europees, a més de les italianes, la Società Italiana delle Scienze detta dei XL i l'Accademia dei Lincei, va pertànyer a l'Académie des Sciences di Parigi, la Royal Society de Londres, la Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften de Göttingen i l'Acadèmia de la Ciència de Berlin[160]. A més, mantenia relació amb molts dels matemàtics més rellevants del moment, com mostra la seva correspondència. Es conserven cartes de Beltrami a G. Darboux, R. Dedekind, P. Duhem, H. von Helmholtz, D. Hilbert, F. Klein, S. V. Kovalevskaya, R. Lipschitz, L. Schläfli, H. A. Schwarz, entre d'altres[161]. Per elles, sabem que es va veure diverses vegades amb Schläfli, Helmholtz, Schwarz o Klein[162]; i que, sovint durant les vacances d'estiu, es va trobar amb matemàtics com Kronecker, Frobenius, Zeuthen, Hirst, Geiser, Meyer,[163]...

[159]Veure la carta a Gherardi, Bologna 11/6/71, a [46], p. 214-228.
[160]Veure la carta a Betti, Pavia 28/1/81, a[46], p.129.
[161]Veure l'elenc de la correspondència de Beltrami a [46], apèndix 2.
[162]Veure les cartes a Betti, Padova 14/9/1880, a [46], p. 127 i Venezia 14/8/74, a [46], p. 104.
[163]Veure [46], p. 44-45. A la carta a Betti, Parpan 30/8/79, es refereix a la trobada de vuit matemàtics: Schläfli, Geiser, Frobenius, Meyer, Hirst, Cremona, Casorati i ell mateix, a [46], p. 121.

Capítol 4

G. Battaglini i la geometria imaginària

El paper de Giuseppe Battaglini en la difusió de la geometria no euclidiana a Itàlia ha estat sovint reconegut pels historiadors. La seva labor com a traducctor de les obres fonamentals de Bolyai i Lobatxevski, així com la direcció del *Giornale di Matematiche*, que era la revista que més publicacions feia sobre el tema, han estat les aportacions que li han aconseguir aquesta merescuda reputació.

En aquest capítol volem demostrar que la seva contribució al desenvolupament de la geometria no euclidiana és molt més profunda. Veurem que en el seu primer estudi *Sulla geometria imaginaria di Lobatschewsky*, Battaglini planteja per primer cop la possibilitat de considerar-la com a part de la geometria projectiva. Aquest nou tractament és el que va seguir Klein en el seu brillant treball *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, on acaba donant una interpretació projectiva de la nova geometria.

Battaglini acaba el seu article donant una descripció del pla no euclidià que sorprenentment coincideix amb la de Beltrami i amb la de Klein, similitud que, extranyament, no s'acostuma a senyalar i que explicarem al llarg d'aquest i del següent capítol.

L'anàlisi del *Sulla geometria imaginaria*, i sobretot, la informació obtinguda a partir de la seva correspondència, desvelaran que l'italià no només tenia consciència del paper generalitzador de la geometria projectiva, sinó que fins i tot, sabia que es podia estudiar la geometria de Lobatxevski fent servir la cònica de l'*Absolut* de Cayley en el cas no degenerat, que és precisament, la idea que va portar a Klein al seu model projectiu.

4.1 Tradició matemàtica. La universitat de Nàpols

La tradició matemàtica napolitana està fortament influenciada per l'escola de Nicola Fergola[1]. Aquesta es caracteritzava per una marcada preferència per l'ús del mètode sintètic en l'estudi de la geometria, deixant de banda la via analítica més moderna que seguien Monge i Lagrange. La seva tria metodologica li va comportar sovint l'acusació de no tenir prou presents els progressos fets per l'anàlisi, que tenia també un rerafons polític, doncs els francesos veien en l'escola una important oposició a la introducció de les obres franceses al Regne de Napols, en aquell moment sota el domini napoleònic[2]. Les crítiques van posar també alguns estudiants del costat de la geometria analítica, entre ells F. P. Tucci, que defensaven que a França i a l'Alta Itàlia s'estaven aconseguint resultats més transcendentals per aquesta via.

El gran talent d'aquesta escola es manifestava en els seus treballs, dels que sovint s'ha reconegut el mèrit; però estava limitada per la seva incapacitat per renovar-se. Sembla que Fergola tenia, en realitat, la ment oberta a qualsevol mètode sempre que hi haguès puresa, elegància i extrem rigor, i en tot això entenia que els mestres eren els antics geòmetres[3]. En canvi alguns dels seus deixebles, especialment Vicenzo Flauti[4], es van posicionar fermement en la defensa de la geometria sintètica, i després de la mort de Fergola, van deixar de banda l'anàlisi fins al punt d'acabar despreciant els mètodes exclusivament

[1]Nicola Fergola (1753-1822), obté la càtedra de matemàtica analítica a la Universitat de Nàpols el 1800, però fins aquell moment havia dirigit una escola privada d'ensenyament superior, on es van formar els matemàtics napolitans més destacables i que va ser molt reconeguda.

[2]Veure *Vita Matematica Napoletana* de F. Amodeo, [3], p. 146-147.

[3]Segons diu Amodeo a [3], p. 148. G. Ferraro i F. Palladino diuen que Fergola també s'ocupava de l'anàlisi i consideren que el seu ensenyament contenia un notable esperit crític. Veure [30], p. 21-22.

[4]Vicenzo Flauti (1782-1863), va ocupar la càtedra de matemàtica sintètica a la Universitat de Nàpols, el 1803.

analítics.

La Università degli studi di Napoli, a principis del segle XIX, estava doncs, centrada en l'estudi dels clàssics grecs i els seus comentaristes. El tractament de la geometria, marcat per la ideologia de Flauti, seguia la tradició euclidiana. Davant d'aquesta exclusivitat sintètica, es contraposa una escola analítica que tenia per seu l'Scuola di ponti e strade, liderada pels professors Tucci i De Angelis[5]. Entre els seus partidaris estava també Fortunato Padula (1815-1881), qui va defensar notablement el punt de vista analític[6].

Recordem ara que Battaglini es va preparar a l'escola privada de Tucci i De Angelis per entrar a l'Escola de Ponts i Camins, on va realitzar els seus estudis. Així, tot i que la seva recerca inicial ve influenciada per l'escola Fergola-Flauti[7], tenia una clara preferència per l'ús dels mètodes analítics en la geometria. Aquesta tria va dificultar que accedís a una plaça a la universitat napolitana. El 1854, Battaglini va perdre el concurs per obtenir-ne una, en defensar una tesi seguint metodologies modernes[8]. És probable que Flauti estigués darrera d'aquesta decisió, doncs quan finalment li és assignada la càtedra per decret, criticarà públicament aquesta decisió, argumentant que encara que "té talent i coneixements per la geometria abstracta, no és capaç d'interpretar-la com correspon, mancant-li completament l'estudi de les obres dels antics"[9].

Deixant de banda aquestes disputes metodològiques, cal mencionar que la vida científica napolitana d'aquesta època gaudia de força activitat. Durant els anys d'estudiant de Battaglini, té lloc el VIIè Congrés dels Científics Italians, l'any 1845. Entre els ponents trobem Fortunato Padula i Nicola Trudi, que seran més tard els seus companys i interlocutors científics. I un

[5]F. P. Tucci (1790-1875) i S. De Angelis (1789-1850) van dirigir el *Studio privato di matematiche* a Nàpols. A la vegada, que ocupaven les càtedres de geometria descriptiva i matemàtica aplicada, respectivament, a la *Scuola speciale di Ponti e Strade*.

[6]Veure el llibre de G. Loria, *Nicola Fergola e la Scuola di Matematici che lo ebbe a duce*, [77], p. 108.

[7]Segons senyalen Ferraro i Palladino, a [30] p. 9, posant com a prova els seus treballs.

[8]Ja ens hem referit a la qüestió a la p. 80 d'aquesta tesi, n. 76.

[9]"Il sig. Giuseppe Battaglini, che vi è stato addetto, che ha ingegno e congizioni per l'astratta Geometria, non è atto a sostenerla come ad essa conviensi, mancandogli affatto lo studio sulle opere degli antichi; [...]" en un article titulat *Rivista da un cittadino senza partito...*. Sembla pel títol de la revista i per les notes editorials, que Flauti no estava massa d'acord ni amb les reformes a l'ensenyament ni amb el nou govern. Veure [30], p. 23, n. 15.

any abans, la Universitat de Nàpols havia rebut les visites dels matemàtics alemanys C. G. J. Jacobi i J. Steiner.

4.2 Línia de recerca i estudi de la geometria no euclidiana

Els interessos de Battaglini van abarcar molts camps de les matemàtiques[10]. Els seus escrits més destacables són sobre els complexes de rectes i geometria de la recta aplicada a la mecànica, donant nom a un determinat complex quadràtic del que va ser el primer en investigar les propietats.

La geometria de la recta és una subdisciplina de la geometria projectiva, iniciada per J. Plücker[11], qui va establir els seus fonaments a *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, 1868-9. Aquest treball, després de la repentiva mort de Plücker, el 1868, va ser completat per Felix Klein, que era el seu professor adjunt. El mateix any, Klein aconsegueix el seu doctorat amb una disertació sobre la geometria de la recta i la seva aplicació a la mecànica. Havent llegit els articles de Battaglini sobre la qüestió[12] i veient que la forma quadràtica que donava no era completament general, decideix mostrar a la seva tesi un forma canònica general per cada complex de rectes de segon grau.

En relació als treballs sobre formes algebraiques, Battaglini va rebre la influència de Cayley, Sylvester i Brioschi. A principis de 1857, va tenir l'ocasió de conèixer J.J. Sylvester durant l'estada del darrer a Nàpols[13]. La seva educació geomètrica prové de les obres de Chasles, Möbius i Steiner, prenent

[10] D'Ovidio a la seva *Commemorazione* dóna una classificació dels seus treballs segons la temàtica, a [37], p. 563.

[11] Julius Plücker (1801-1868), tractava la geometria des d'un enfoc analític en contraposició a l'escola alemana de geometria sintética, liderada per Steiner. Va ocupar la càtedra de física a la Universitat de Bonn, on va dirigir la tesi doctoral de F. Klein.

[12] *Intorno ai sistemi di rette di prim'ordine.*, Rend. Napoli, 1866, fasc. 6; *Intorno ai sistemi di rette di secondo grado*, Atti di Napoli, III, 1866; *Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque*, Atti di Napoli, IV, 1868. Tots tres articles van ser publicats també al Giornale di Matematiche, a vol. VI, 1868, p. 24-36, al vol. VII, 1869, p. 55-76 i al vol. X, 1872, p. 55-79, respectivament.

[13] Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 13/3/1857, a [30], p. 185.

dels primers el tractament analític, en contraposició al mètode purament geomètric de Staudt, que va seguir Klein. El mateix Battaglini al·ludeix a aquestes influències a la seva carta de presentació a E. Betti.

> Invaghitomi della geometria quale è trattata inquesto ultimi tempi, ho rivolto principalemente ad essa i miei studii: sento la necessità di salire sempre ai principi generalissimi in cui si veggano quasi intuitivamente, le innumerevoli proprietà particolari delle diverse forme dell'estensione. Per quanto a mia conoscenza, parmi che il punto più alto ciu si sia prevenuto in tale ascendente generalità sia la teoria delle trasformazioni, o della dipendeza scambievole delle figure. Tale fecondissima teoria che si trova in germe nelle proiezioni parallele della Geometria descrittiva, generalizzata sempre più da Poncelet nella proiezione polare, nella omologia della figure piane delle figure dello spazio, e da Möbius nella collineazione si compendia ora nella teoria generale dell'omografia, esposta ultimamente da Chasles nella sua geometria superiore. Se si aggiungono a questi modi di trasformazione la proiezione stereografica, e più generalmente l'inversione, e finalmente la mirabile teoria delle polari reciproche, o il principio di dualità, si avranno tutti i mezzi di cui la scienza è in possesso per la reicerca dell proprietà dell'estensione.

> Fascinat per la geometria tal i com és tractada en aquests últims temps, he dirigit a ella els meus estudis: sento la necessitat d'anar sempre als principis més generals en els que es vegin, quasi intuitivament, les innumerables propietats particulars de les diferents formes de l'extensió. Segons els meus coneixements, diria que el punt més alt al que s'ha arribat en aquesta generalització ascendent és la teoria de les transformacions, o de la dependència mútua de les figures. Aquesta teoria tan fecunda, que surgeix de les projeccions paral·leles de la Geometria descriptiva, generalitzada per Poncelet en les projeccions polars, en l'homologia de les figures planes de les figures del espai, i per Möbius en la colineació, es sintetiza ara en la teoria general de la homografia, exposada recentment per Chasles en la seva geometria superior[14]. Si afegim a aquestes transformacions les projeccions estereogràfiques, i més generalment la inversió, i finalment l'admirable teoria de les polars recíproques, o el principi de dualitat, es tindran

[14]Es tracta de l'obra *Traité de géométrie supérieure*, Paris, Badlier, Imprimeur-Libraire, 1852.

> tots els mitjans dels que gaudeix la ciència per la recerca de les propietats de les superfícies.
>
> [Battaglini a Betti, Napoli 8/11/1854[15]]

La carta continua demanant informació sobre els treballs de Steiner, que Betti li facilitarà uns messos més endavant[16]. En aquestes línies Battaglini exposa el seu projecte de recerca i la seva intenció d'abordar la geometria, el seu camp d'estudi, mitjançant la vessant analítica dels mètodes projectius. I efectivament, va escriure diversos treballs relacionats amb la geometria projectiva, essent un dels primers matemàtics a Itàlia a interessar-se per aquesta disciplina.

En l'estudi de la geometria no euclidiana Battaglini es va iniciar guiat per Hoüel. Va ser qui li va donar les primeres indicacions i li va proporcionar el material bibliogràfic.

> Acceptez mes remerciements les plus sincères pour a lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, et dans laquelle vous me donnez des renseignements pleins d'intérêt sur les fondateurs de la Géométrie non euclidiènne.
>
> Accepteu el meu agraiment més sincer per la carta que m'heu fet l'honor d'escriure'm, i en la que em doneu informació de gran interès sobre els fundadors de la Geometria no euclididana.
>
> [Battaglini a Hoüel, 21/5/67[17]]

Primer li va enviar l'article de Lobatxevski sobre la teoria de les paral·leles[18], després li va deixar un exemplar de la *Pangeometria*[19], i així que el va trobar, també li va facilitar el rar *Tentamen*[20] de Bolyai, que Battaglini estava cercant[21].

[15] A [30], p. 179-180.

[16] Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 17/.../55, a [30], p. 183.

[17] A [30], p. 62.

[18] Es tracta del *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, traduït al francès per J.Hoüel, [52]. Veure al carta de Battaglini a Hoüel del 27/4/67, a [30], p. 61.

[19] L'article de Lobatxevski publicat en francés l'any 1856 amb el títol *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.* Veure les cartes de Battaglini a Hoüel amb dates 21/5/1867, 5/6/67 i 10/7/67, a [30], p. 62, p. 65 i p. 67, respectivament. I la carta del 21/07/67, transcrita a l'apèndix A d'aquesta tesi.

[20] L'article de Farkas Bolyai amb el treball del seu fill, Janos, a l'apèndix, [24].

[21] Veure les cartes de Battaglini a Hoüel amb dates el 21/5/67, el 13/6/67 i el 17/6/67,

La labor de traducció i divulgació de Battaglini comença tot just rebre la documentació. A les cartes a Hoüel d'aquest periode, veiem com Battaglini li va informant sobre l'evolució de la seva feina[22]. Així, la *Pangeometria* de Lobatxevski apareix publicada en llengua italiana el 1867, al Giornale [7], i també com a opuscle per separat, el 1868[23]. Després es posa amb la traducció de l'*Appendix* de J. Bolyai, que es publicarà només al Giornale, el 1868, [9]. En rebre després la versió francesa de Hoüel, li comenta algunes diferències entre les respectives traduccions, i valora la importància d'aquesta:

> [...] maintenant i sera facile d'étudier et de juger cette admirable doctrine, qui vient de modifier mes idées sur l'infini géométrique, et peut-être ne sera pas sans influence sur la théorie même des fonctions.
>
> [...] ara serà més fàcil estudiar i jutjar aquesta admirable doctrina, que ha canviat les meves idees sobre l'infinit numèric, i que potser també tindrà influència en la teoria de funcions.
>
> [Carta de Battaglini a Hoüel, Napoli 25/6/68[24]]

Doncs la considerava completament necessària, ja que la seva només era accessible pels lectors del Giornale[25].

Semba que Battaglini va tenir també accés a altres obres de Lobatxevski, publicades a les Memòries de la Universitat de Kazan, mitjançant el professor de Filologia comparada de la Universitat de Nàpols, M. Lignana, qui disposava d'una recopilació[26]. Però la majoria d'aquests escrits estan en rus, i Battaglini, almenys en aquest moment, no tenia coneixements d'aquest idioma. Sabem que, anys més tard, va tenir la intenció d'aprendre'l, traduïnt paraula per paraula amb l'ajut d'un diccionari un llibre de Txevitxef. Battaglini diu que va ser seguint aquest mètode, amb el Càlcul Baricèntric de Möbius, com va començar a entendre l'alemany, doncs no va tenir paciència per estudiar-ne la gramàtica per més de tres dies[27]. Tot i haver arribat a

a [30], p. 63, p. 66 i p. 66-67, respectivament.

[22] Veure les cartes del nostre apèndix amb dates 21/7/67, 6/8/67, 23/11/67 i 2/4/68.

[23] Publicat per l'Editorial Perellano.

[24] A [30], p. 71-72.

[25] Veure la carta de Battaglini a Hoüel del 8 del 68, a l'apèndix d'aquesta tesi.

[26] Veure la carta de Battaglini a Hoüel del 10/7/67, a [30], p. 68. P. Calleri, L. Giacardi especifiquen a la nota 16 al peu de la mateixa pàgina, quines són les memòries de Lobatxevski relatives a la geometria no euclidiana.

[27] Veure la carta de Battaglini a Hoüel del 19/7/1871, a [30], p. 117.

aconseguir un diccionari rus-francès i una gramàtica rus-alemana, amb els que volia intentar entendre alguns escrits matemàtics moscovites[28], sembla que acabarà donant-se per vençut[29].

Battaglini rep les noves idees geomètriques amb la ment oberta i mostra un ràpid interès per aprofondir en el seu coneixement:

> J'ai lu ce livre avec le plus grand plaisir, et [...] le principe nouveau, [dans] la Géométrie ne soit pas généralement accepté, il mérite néanmoins toute l'attention des géométres. Comme je voudrais approfondir cette question, [...]
>
> He llegit aquest llibre amb el més gran plaer, i [...] el principi nou, [en] la Geometria no estigui generalment acceptat, no obstat mereix tota l'atenció dels geòmetres. Com que voldria aprofondir en aquesta qüestió, [...]
>
> [Battaglini a Hoüel 27/4/67[30]]

No passa ni un mes que ja parla a Hoüel sobre les seves primeres recerques[31], que sortiran publicades als Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli[32] i al Giornale di Matematiche, amb el títol *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*, [8]. El 10 de juliol li enviarà l'escrit a Hoüel, qui no triga a fer una traducció francesa, [56], que es publicarà als Nouvelles Annales l'any següent[33].

Battaglini declara també la seva voluntat d'escriure un tractat elemental sobre la geometria de Lobatxevski, projecte al que s'anirà referint en altres ocasions, però que malauradament restarà inacabat[34].

> Je partage parfaitement vos idées sur sujet des simplifications qu'on pourrait apporter dans l'exposition de la Pangéométrie, cependant je préfère la publier sans aucun changement, me proposant d'écrire moi

[28] A la que suposem que és la següent carta (no té data, però segueix aquesta conversació), a [30], p. 118.

[29] Veure la carta de Battaglini a Hoüel, 31/10/1871, a [30], p. 126.

[30] A [30], p. 61.

[31] Veure la carta de Battaglini a Hoüel amb data 21/5/67, a [30], p. 63-64.

[32] Vol. VI, 1867, p. 157-173.

[33] Veure les cartes de Battaglini a Hoüel, Naples 10/7/67 i Naples 29/4/68, a [30], p. 68 i p. 69-70, respectivament.

[34] Battaglini diu que ho ha de deixar, tenint només començada una memòria relativa a les relacions mètriques. Veure carta de Battaglini a Hoüel, Napoli 12 del 79, a [30], p. 84.

> même les Éléments de la Géométrie supérieur selon les principes de Lobatschewsky.
>
> Comparteixo totalment les vostres idees en relació a les simplificacions que es podrien fer en l'exposició de la Pangeometria, no obstant, jo prefereixo publicar-la sense cap canvi, proposant-me escriure jo mateix els Elements de la Geometria superior segons els principis de Lobatxevski.
>
> [Battaglini a Hoüel, Naples 5/6/67[35]]

Tot just passats uns dies, arriba, finalment, a les seves mans el treball de Bolyai, i quedarà especialment impressionat amb la seva lectura:

> J'ai lu l'*Appendix* de Bolyai fils; c'est un admirable écrit, incontestablement supérieur à ceux de Lobatschewsky, pour la simplicité de la rédaction, et je dirai même pour la recherche des résultats géométriques; en suivant à peu-près l'exposition de Bolyai on pourrait écrire les Éléments de la nouvelle Géométrie.
>
> He llegit l'*Appendix* de Bolyai fill, és un escrit admirable, sens dubte superior al de Lobatxevski, per la simplicitat de la redacció, i fins i tot, jo diria, per la búsqueda dels resultats geomètrics; després de l'expossició de Bolyai pràcticament es podrien escriure els Elements de la nova Geometria.
>
> [Battaglini a Hoüel, Naples 17/6/67[36]]

Continua el seu estudi de la geometria no euclidiana interessant-se pel treball pòstum de Riemann [87], seguint la recomanació de Cremona i Beltrami[37]. Battaglini confesa tenir dificultats per entendre aquesta innovadora teoria, però diu que insistirà en el seu estudi[38]. No sabem fins a quin punt devia arribar a aprofondir en el tema, però aviat veu que suposa una nova manera de concebre l'espai. Les següents línies denoten a més, que Battaglini considera que s'ha d'abandonar el concepte kantià-euclidià de l'espai.

> Sono gratissimo alla vostra amicizia, che vi spinge ad indurmi perché scrivessi un libro elementare sulla nuova Geometria: la certezza che non ne reuscirei bene mi ritiene dal farlo; inoltre è necessario ancora

[35] A [30], p. 65.
[36] A [30], p. 67.
[37] Veure la carta de Battaglini a Hoüel del 29/4/1868, a [30], p. 70.
[38] Veure la carta de Battaglini a Hoüel del 25/6/68, a [30], p. 72.

> che nelle regioni superirori della scienza si stabilisca su basi inconcusse la necessità di una dottrina dello spazio diversa da quella consciuta: la via da seguire è quella accennata da Riemann [...]
>
> Estic molt agraït per la vostra amistat, que us empeny a persuadir-me a escriure un llibre elemental sobre la nova geometria: la certesa de que no me'n sortiria em reté de fer-ho; d'altra banda, encara és necessari que a les regions superiors de la ciència s'estableixi sobre bases fermes la necessitat d'una doctrina de l'espai diferent de la coneguda: la via a seguir és la indicada per Riemann [...]
>
> [Battaglini a Hoüel, Naples 5/8/68[39]]

Tot i el seu comentari en referència al propòsit d'escriure un tractat elemental, encara no va abandonar completament aquest projecte, doncs uns mesos més tard, diu a Hoüel que havent fixat les seves idees sobre la nova geometria, es dedicarà a ella seguint una via intermitja entre la massa elevada de Riemann-Beltrami i l'absolutament elemental, i que en aquesta darrera hi vol pensar més endavant. Battaglini es planteja també les repercusions que el nou concepte de l'espai pot tenir sobre la mecànica[40]. Aquesta és una via de recerca en la que està especialment interessat. Segons Castellana, el motiu no és donar realitat a la geometria no euclidiana, sinó la curiositat per entrar en un camp d'investigació inexplorat[41].

Encara fa una última referència al projecte d'escriure sobre els fonaments de la geometria no euclidiana:

> Lo scritto sulla Geometria non euclidea che intendo di comunicare all'Accademia avrà per oggetto la deduzione (in modo analítico) delle relazioni fondamentali della Geometria da questi soli principii 1º che la linea retta è la linea *del tutto determinata* da due suoi punti, e 2º che i due punti all'infinito della linea retta, in parti opposte di essa, sono tra loro *distinti*.
>
> L'escrit sobre Geometria no euclidiana que intento comunicar a l'Acadèmia tindrà per objectiu la deducció (de manera analítica) de les relacions fonamentals de la Geometria partint només d'aquests dos principis: 1º la línia recta és la línea *del tot determinada* per dos únics

[39] A [30], p. 74.

[40] Veure la carta de Battaglini a Hoüel, Naples 2/2/69, a [30], p. 80.

[41] Veure l'article de Castellana a [30], p. 240.

> punts, i 2º que els dos punts a l'infinit de la línia recta, en costats oposats a aquesta, són entre ells *diferents*.
>
> [Battaglini a Hoüel, Naples 13/3/69[42]]

Però, com hem dit, no queda constància de que publiquès res d'aquest estil.

Finalment, deixarà els seus estudis sobre el tema, mogut per nous interesos matemàtics que el desvien de seguir treballant en aquest camp, especialment, atret per la perspectiva de que alguns conceptes la de Geometria de la recta de Plücker poguèssin ser útils per resoldre problemes de Mecanica dels cossos rígids[43]. Efectivament, el treball sobre la composició de forces a que es refereix a les cartes d'aquesta època[44] serà el primer d'un conjunt d'articles sobre l'aplicació de la geometria de la recta a la mecànica, la majoria publicats entre els anys 69 i 71[45]. La seva intenció és tornar més endavant a treballar sobre la geometria de Lobatxevski, deixant oberta la possibilitat d'entrar en l'estudi de la mecànica sota el punt de vista no euclidià:

> [...] riprenderò tali studii dopo che mi sarò occupato della Meccanica; il connubio poi di questa scienza con la Geometria non euclidea (non tentato ancora da alcuno) promette di essere interessante.
>
> [...] reprendré aquests estudis desprès d'ocupar-me de la Mecànica; el connubi d'aquesta ciència amb la Geometria no euclidiana (que encara ningú ha intentat) promet ser interessant.
>
> [Battaglini a Hoüel, Napoli 12 del 79[46]]

Els següents treballs classificats per D'Ovidio com a relatius a la geometria no euclidiana, daten entre els anys 1873 i 1876[47]. En els primers estudiarà els

[42]A [30], p. 82.

[43]Klein va escriure un treball sobre aquest tema *Notice on the connection between line geoemtry and the mechanics of rigid bodis*, Math. Annalen, Bd. 4, 1871. Traduït per D.H. Delphenich, Gesammelte Abhandlungen, pp. 226-238.

[44]Es tracta de *Sulla composizione delle forze.* Nota, Rend. Napoli,1869, fasc.2. Veure les cartes a Hoël amb data Naples 2/2/69 i 13/3/69, a [30], p. 79-80 i p. 80-81, respectivament.

[45]Veure la *Commemorazione* de D'Ovidio, [37], p. 584-588.

[46]A [30], p. 84. La data seria en realitat del 12 de gener, el 12è dia de l'any 70. S'entén pel context que Battaglini es devia despistar en escriure l'any. Veure la nota a peu de la mateixa pàgina n. 52., de Calleri i Giacardi.

[47]Veure [37], p. 591-595.

cercles no euclidians, sempre des del punt de vista projectiu[48]. Posteriorment, publica tres memòries sobre geometria projectiva[49], amb l'objectiu d'exposar coses ja conegudes relacionant-les amb el concepte de les rectes geomètriques de Möbius. Els resultats són generals, en el sentit que poden aplicar-se a les tres geometries: elíptica, hiperbòlica i parabòlica[50].

4.3 Acollida de les noves idees.

Battaglini no només accepta immediatament la nova geometria, sinó que la considera prou rellevant com per emprendre la labor de divulgació entre la comunitat científica. Però, en no tenir cap escrit en el que expliqui directament els seus arguments per defensar-la, respondre a la pregunta de per què Battaglini l'acull tan ràpida i obertament serà una tasca força complicada. Per fer-ho ens haurem de basar en idees que queden implícites en la seva correspondència i en la seva biografia.

La rebuda de la geometria no euclidiana a la facultat de matemàtiques de Nàpols, no va ser gens favorable. Davant aquesta situació Battaglini escriu a altres geòmetres que coneix per informar sobre les noves idees i demanar la seva opinió sobre el Sulla. Amb aquest objectiu recomana a Genocchi la lectura de la traducció del treball de Lobatxevski feta per Hoüel, [52], recalcant que té l'aprovació de Gauss, i li anuncia la seva intenció de publicar un escrit sobre la qüestió.

> Esso apporta una vera rivoluzione nella Geometria, dopo essere stato ignorato per circa trenta anni da tutti, eccetto che da Gauss, le cui opinioni sul proposito (d'accordo completamente col nostro autore) possono leggersi nella Corrispondenza tra Gauss e Schumacher, pubblicata recentemente da Peters, e propriamente nelle lettere del 17

[48]Es tracta dels següents treballs: *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche* i *Nota sui circoli nella Geometria non-euclidea*, Atti dei Lincei, 1873; *Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche*, Atti dei Lincei, 1874; *Sull'affinità circolare non-euclidea*, Rendiconti Napoli, 1876, fasc.11.

[49]Es tracta dels següents treballs: *Sulla Geometria proiettiva*, Memoria I, II i III, Atti di Napoli, VI (1873 i 1874) i VII (1875).

[50]Aquests noms els va donar Klein, després de demostrar que totes tres eren casos particulars de la geometria projectiva. En parlarem més ampliament a l'apartat 5 del capítol següent.

maggio, del 12 luglio 1831 e del 18 novembre 1846. Il dottor Baltzer, al quale si deve di aver richiamato l'attenzione prima di ogni altro sulla detta opera, si occupa a redigere un trattato speciale sull'oggetto. Nel prossimo mese di Giugno spero di poter presentare all'Accademia delle Scienze di Napoli un mio lavoro sullo stesso argomento; pero siccome sono *in guerra* con tutta la facoltà di matematica di Napoli, per essermi fatto propugnatore di queste nuove idee, cercherei un confronto nell'opinione dei geometri per i quali professo grande stima, ed è perciò che le ho diretto la mia preghiera.

[L'article de Lobatxevski traduït per Hoüel] aporta una veritable revolució en la Geometria, desprès d'haver estat ignorat per quasi trenta anys, a excepció de Gauss, de qui es poden llegir les seves opinions sobre la qüestió (completament d'acord amb el nostre autor) en la correspondència entre Gauss i Schumacher, publicada recentment per Peters, i concretament en les cartes del 17 de maig, del 12 de juliol de 1831 i del 18 de novembre de 1846. El doctor Baltzer, qui ha cridat l'atenció abans que ningú sobre aquesta obra, està redactant un tractat especial sobre el tema. El pròxim mes de juny espero poder presentar a l'Acadèmia de les Ciències de Nàpols un treball meu sobre el mateix tema; però com que estic *en guerra* amb tota la facultat de matemàtiques de Nàpols, per haver-me fet defensor d'aquestes noves idees, provaré de confrontar-la amb l'opinió dels geòmetres que tinc en gran estima, i és per això que li dirigeixo la meva demanda.

[Carta de Battaglini a Genochi, Napoli 14/5/67[51]]

De la següent carta escrita per Battaglini deduïm que Genocchi li fa algunes valoracions sobre la geometria imaginària que són del seu gust[52]. Battaglini també es refereix a una memòria que vol publicar Genocchi, que segurament forma part del conjut de treballs que aquest escriurà, a partir de l'any 69, relacionats amb la mecànica no euclidiana[53], tema en el que Battaglini també estava força interessat. Genocchi, però, com veurem més endavant, acabarà formant part dels detractors de les geometries no euclidianes.

Per explicar-nos l'oposició per part dels matemàtics napolitans, a la vegada

[51]A [30], p. 167-168, i a [33], p. 105.

[52]Veure carta de Battaglini a Genocchi, Napoli 7/2/69, a [30], p. 170 i a [33], p. 107.

[53]P. Calleri i L. Giacardi suposen que es tracta de *Dei primi principii della Meccanica e della Geometria in relazione al postulato d'Euclide*, Mem. di Mat e Fis. Soc. It. Sc. (detta dei XL), s. 3, t. II (1869), p. 153-189.

que l'acceptació de Battaglini, cal observar les tendències filosòfiques que corrien per la universitat. A Nàpols, coexistien un positivisme tardà amb l'idealisme absolut de Hegel[54].

El positivisme és un corrent filosòfic que havia sorgit a França a principis del segle, creat per August Comte. La seva creença és que només el mètode científic, partint de la inducció i de la percepció objectiva, pot dur al coneixement. És a dir, el coneixement es basa en l'experimentació i l'observació.

Sembla que la filosofia de Comte era bastant coneguda i debatuda al nord d'Itàlia. Beltrami diu a Hoüel, a la segona carta del nostre apèndix, que tot i que ell no coneix l'obra de Comte, "creu tenir una idea bastant exacta dels seus principis degut al gran nombre de disputes que ha sentit o llegit"[55]. Com a curiositat, afegeix que és l'únic llibre de filosofia que havia pogut entrar a la biblioteca del Sr. Brioschi, que era molt poc disposat a aquest tipus de coses.

A la Universitat de Nàpols, aquest corrent filosòfic entra el 1865, quan S. Tommasi (1813-1888) pren la càtedra de medicina clínica. En contraposició, el catedràtic de filosofia B. Spaventa (1817-1883), era el màxim representant del hegelianisme, i dirigia la seva recerca a recuperar les idees kantianes[56]. Battaglini, segurament, a diferència dels seus col·legues de facultat, té com a referència les idees positivistes, que estan més d'acord amb la geometria de Lobatxevski que l'apriorisme de Hegel.

Les raons de Battaglini per defensar la nova geometria, les hem de buscar també fora de l'àmbit científic. El napolità forma part d'una generació que es va rebel·lar contra el règim polític establert, i que viu sota l'ideal de construir un nou país. En la seva personalitat veiem certa predisposció a acollir allò que és nou, que junt amb la voluntat d'aconseguir un bona presència científica del seu país a Europa, el devia portar a la determinació de que Itàlia estigués

[54]Hegel (1770- 1831). La seva filosofia, com la de Kant, forma part dels corrents idealistes, és a dir, que afirmen la primacia de les idees. Entre les postures contràries, anomenades materialistes, trobariem el realisme o l'empirisme. Hegel té un concepte del a priori pròxim al de Kant.

[55]"je crois d'avoir une idée suffisamment exacte de ses principes par le grand nombre de disputes que j'ai entendu ou que j'ai lu à ce sujet", carta de Beltrami a Hoüel, Bologne 8/7/70, a l'apèndix d'aquesta tesi, p. 222.

[56]Segons explica S. Cicenia a [33], p. 98-99.

en l'avantguarda dels últims descobriments. S'explica així la seva passió per obrir nous camps de recerca i que s'involucrés en la difusió de les noves idees, esperant que la comunitat científica italiana les considerés en les seves investigacions.

> [...] è desiderabile che i valenti Geometri, educati alla scuola dei grandi Maestri, e che abilmente adoperano i metodi relativamente antichi, volgessero anche la loro attenzione ai più rencenti, ché maneggiati da essi condurrebbero certamente ad importantissimi risultati.
>
> [...] seria desitjable que els destres Geòmetres, educats en l'escola dels grans Mestres, i que fan ús hàbilment dels mètodes relativament antics, dirigissin també la seva atenció a mètodes més recents, que manipulats per ells segurament conduirien a resultats importants.
>
> [Battaglini a Genocchi, 16/4/1867[57]]

En quant als seus arguments científics, Battaglini, en el seu estudi de la geometria imaginària, veurà que aquesta es pot explicar com a inclosa dins de la geometria projectiva. Aquesta afirmació l'argumentarem àmpliament en el següent apartat. Com que aquesta darrera és una branca de la matemàtica completament acceptada, devia pensar que no hi havia cap raó per no acceptar també la geometria de Lobatxevski.

Una altre tret que caracteritza el moviment positivista és la seva insistència en abandonar la metafísica en la ciència. Sembla que aquesta idea havia calat en el pensament dels joves matemàtics. Beltrami fa la següent crítica:

> [...] quant aux mathématiques, il est généralement admis que les plus grands phylosphes aient le droit de s'en mêler sans avoir pris la peine de les apprendre.
>
> [...] en quant a les matemàtiques, està generalment acceptat que els grans filòsofs tinguin el dret de ficar-s'hi sense haber fet l'esforç d'aprendre-les.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 8/7/70[58]]

Battalgini, tot i que segons D'Ovidio estudiava "quasi en secret" filosofia, no està particularment interessat per les qüestions filosòfiques relacionades

[57] A [30], p. 166.
[58] A l'apèndix d'aquesta tesi, p. 222.

amb els principis de la ciència. El mateix D'Ovidio, diu que un cop li va escriure:

> [...] ma vi è tanto a fer nella scienza *vera*, che si potrebbero lasciar da parte le quistioni sui fondamenti della scienza.

> [...] però hi ha tant a fer a la ciència *veritable*, que es podrien deixar de banda les qüestions sobre els fonaments de la ciència.[59]

Pot semblar que aquestes paraules contrasten amb la seva insistència en la necessitat d'escriure un tractat elemental sobre la geometria de Lobatxevski que hem vist a l'apartat anterior. La motivació per aquest projecte, l'hem d'associar més al seu compromís amb l'educació de les noves generacions, que no pas a una preocupació pels fonaments de la geometria.

Battaglini no té dubtes de que la geometria de Lobatxevski suposa una ruptura amb el pensament matemàtic tradicional. Conscient d'aquest canvi de paradigma, considera que cal introduir en l'ensenyament les noves teories matemàtiques, per tal de donar a les noves generacions els instruments necessaris per poder canviar els punts de vista i les metodologies heredats del passat, i preparar-les per mantenir la ment oberta davant de possibles vies de recerca fora de les establertes. Battaglini sent la responsabilitat d'ensenyar una revolució científica, i és per aquesta raó que veu imprescindible disposar d'uns Elements de la geometria no euclidiana.

Encara que no es va dedicar a escriure sobre els fonaments de la ciència, com va fer Hoüel, entén que el nou descobriment té implicacions epistemològiques. Com hem vist a la seva carta a Hoüel del 5 d'agost de 1868, considera que les noves idees requereixen un replantejament de la doctrina de l'espai, i que per fer-ho s'ha de seguir la línea de Riemann. Més endavant a la mateixa carta diu:

> È indispensabile per decidere la questione tra le due Geometrie, di stabilire la Stereometria, poiché, come con molto talento ha fatto vedere il mio amico Prof. Beltrami (in uno scritto che verrà pubblicato in uno dei prossimi numeri del *Giornale di matematiche*) si può dare una rappresentazione della Planimetria di Lobatschewsky, senza uscire dal sistema euclideo, essendoci in tale sistema alcune superficie le cui linee geodetiche hanno tra loro le stesse relazioni che portano tra loro le linee rette nella Planimetria di Lobatschewsky.

[59] A la *Commemorazione* [37], p. 560.

> És indispensable establir l'Estereometria per decidir la qüestió entre les dues geometries, ja que com ha mostrat, amb mot de talent, el meu amic el Professor Beltrami (en un escrit que es publicarà en un dels pròxims números del *Giornale di matematiche*), es pot donar una representació de la Planimetria de Lobatxevski, sense sortir del sistema euclidià, ja que en aquest sistema hi ha certes superfícies en les que les línies geodèsiques tenen entre elles les mateixes relacions que les que tenen les línies rectes de la Planimetria de Lobatxevski.
>
> [Battaglini a Hoüel, Napoli 5/8/68[60]]

Aquestes paraules semblen donar a entendre, que cal decidir si la geometria de l'espai és l'euclidiana o la de Lobatxevski, el que seria un tant extrany, doncs estava força acceptat que la realitat era euclidiana. Battaglini deu estar pensant en la geometria segons les teories de Riemann, quan es refereix a l'altra opció geomètrica diferent de l'euclidiana.

Les següents línies en que es torna a referir a la qüestió, donen suport a la nostra opinió:

> [...] l'egregio Prof. Beltrami (in dubbio sulla necessità di ammettere un altro concetto dello spazio, diverso dall'Euclideo, finché si trattava della planimetria) riconosca ora indispensabile quel concettto per interpretare la stereometria di Lobatschewsky.
>
> [...] l'egregi Professor Beltrami (que tenia dubtes sobre la necessitat d'admetre un altre concepte de l'espai, diferent de l'Euclidià, mentre que es tratava de la planimetria), reconeix ara indispensable aquest concepte per interpretar l'estereometria de Lobatxevski.
>
> [Battaglini a Hoüel, Napoli 2/2/69[61]]

És a dir, la planimetria de Lobatxevski, es podia considerar existent dins d'unes determinades superfícies de l'espai euclidià de tres dimensions, però per explicar l'estereometria és indispensable recórrer al concepte riemannià d'espai n-dimensional. Per Battaglini la segona memòria de Beltrami demostra la necessitat de trencar amb la doctrina euclidiana de l'espai i instaurar un nou punt de vista.

[60] A [30], p. 74.
[61] A [30], p. 77.

4.4 El *Sulla Geometria Immaginaria*

En aquest primer article sobre la geometria imaginària, Battaglini es proposa, tal com diu ell mateix, "establir directament el principi en que es basa la nova teoria de les paral·leles i per tant deduir, de manera diferent a la de Lobatxevski, les fórmules que expressen les relacions entre les parts d'un triangle en el sistema de la Geometria imaginària"[62].

Així, Battaglini no partirà de la fórmula de l'angle de paral·lelisme en relació a la distància per arribar a les equacions fonamentals de la geometria imaginària, com feia Lobatxevski a la *Pangeometria* i als *Études géométriques*. Però el que resulta realment innovador és que en la seva exposició, utilitza conceptes de geometria projectiva, plantejant per primer cop la idea de considerar la nova geometria com a inclosa en la projectiva. D'altra banda, Battaglini donarà també un tractament analític a la geometria, d'acord amb la tradició heredada dels seus mestres. Veurem, doncs, que el Sulla és un estudi de la geometria imaginària de Lobatxevski des del punt de vista projectiu, seguint una metodologia analítica.

La principal dificultat que un es troba en llegir el Sulla és la falta de claredat de la seva exposició. Per tal d'entendre'l millor hem recorregut a la sisena edició del tractat de geometria [40], publicat per Rouché i Comberousse, el 1891. A la nota II de la segona part *Sur la géométrie non euclidienne*, considerant que l'anàlisi dels nombrosos treballs sobre el tema seria molt llarga, es proposen facilitar la seva lectura, exposant els principis fonamentals dels que parteix aquesta ciència[63]. En la tercera secció de la nota esmentada Rouché i Comberousse diuen que es pot establir la teoria de les funcions circulars independentment de tota consideració geomètrica[64]. I en fer-ho segueixen els passos de Battaglini.

---

[62] "In questa Nota ho cercato di stabilire direttamente il principio che serve di base alla *nuova* teorica delle parallele, e quindi di pervenire, in modo diverso da Lobatschewsky, alle formole che esprimono le relazioni tra le parti di un triangolo nel sistema della Geometria immanginaria.", [8], p. 28.

[63] Tal i com diuen a [40], p. 577.

[64] Veure [40], p. 583.

4.4.1 El mètode analític

Durant la primera meitat del s. XIX, s'havia instaurant entre la comunitat matemàtica un debat entre els partidaris d'utilitzar el mètode sintètic en la geometria i els que defensaven el mètode analític. Aquesta discussió va tenir especial intensitat a la Universitat de Nàpols, un dels centres on més força tenia la geometria sintètica, degut a la influència de l'escola de Fergola. Com hem vist, Battaglini, seguint la línia dels seus mestres, s'havia decantat en contra d'aquesta tendència i preferia la via analítica, compartint la mateixa postura que Riemann i Beltrami.

El debat havia pres gran importància en relació a la geometria projectiva. Entre els partidaris del mètode sintètic trobem J. Steiner i C. von Staudt, mentre que Möbius i J. Plücker, eren favorables al mètode analític. Battaglini segueix en l'estudi de la projectiva, la via metodològica dels dos darrers.

En el seu article parteix de la funció que expressa la rotació d'una recta Ω entorn a un punt p i demostrant que aquesta rotació es pot definir mitjançant la funció exponencial.

Així la posició de la recta es defineix:

$$\Omega_z = \Omega_0 F(z),$$

on z denota la *quantitat de rotació*, és a dir, l'angle que formen la recta en posició inicial Ω_0 amb la recta en posició actual Ω_z[65].

Veu llavors que la funció $F(z)$ ha de ser de la forma $F(z) = e^{kz}$, on k és una constant. Degut a que la recta passarà periòdicament per cada una de les seves possicions, $F(z)$ ha de ser una funció periòdica. Però quan la variable z sigui real, només cumplirà aquesta condició si es pren la constat k imaginaria pura, per tant, caldrà prendre $F(z) = e^{ikz}$.

Utilitza llavors el desenvolupament de Taylor de la funció exponencial per definir les funcions circulars: $\sin kz$ i $\cos kz$ [66], com a sèries de potències, de manera que compleixen la igualtat: $e^{ikz} = \cos kz + i \sin kz$, és a dir:

[65] A la seva carta a Genocchi del 7/2/69, Battaglini aclareix que aquesta expressió no vol dir que la posició sigui una *quantitat*, sinó *un estat* de la recta mòbil, i que cal atribuir a $F(z)$ el significat d'*operador*. Veure [33], p. 107.

[66] Battaglini fa servir la notació $\sin z$ i $\cos z$, per expressar aquestes funcions. L'hem modificat per seguir la notació habitual i no crear confusió.

$$\cos kz = 1 - \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - ...$$
$$\sin kz = \frac{kz}{1} - \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^5z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - ...$$

D'aquesta manera demostra que les pot definir de manera analítica, independentment de qualsevol interpretació geomètrica.

Battaglini continua amb l'objectiu de trobar el valor de π també sense que hi hagi influència de cap qüestió geomètrica. Considerant que 2π sigui el valor de kz que fa que $e^{ikz} = 1$, troba que π tindrà el valor numèric habitual[67]

La periodicitat de la funció exponencial ens serveix per determinar el valor de k. Battaglini opta per prendre $k = 1$ per simplificar les fórmules. Això vol dir que pren com a unitat angular la $\frac{\pi}{2}$-èsima part d'un angle recte, és a dir, fa servir els radians com a unitat de mesura.

Una altra conseqüència de la periodicitat és que la funció $u = e^z$ no és bijectiva, doncs a cada valor real o imaginari de u li corresponen infinits valors de z donats per la fórmula: $z = \ln r + (\alpha + 2n\pi)i$, on r és el mòdul de z i α el seu argument. Caldrà acordar que l'angle estarà comprès entre $-\pi$ i π, perquè la funció: $z = \ln r + \alpha i$ estigui ben definida[68].

La funció inicial pot expressar de manera anàloga la rotació d'un pla o la posició d'un punt ω que es mou sobre una recta L.

En el darrer cas, expressem la posició del punt amb l'equació:

$$\omega_z = \omega_0 F(z),$$

on z és la *quantitat de progressió* del punt en passar de la posició inicial ω_0 a l'actual ω_z. És té encara que $F(z) = e^{kz}$, però en aquest cas no es dóna la condició de periodicitat. Conseqüentment, la constant k roman indeterminada i la funció ha de ser una exponencial real. Defineix, llavors, les funcions hiperbòliques en base k, de manera anàloga a les circulars[69]:

[67]En el tractat de Rouché es defineix el nombre π, com a l'arrel positiva més petita de l'equació $e^{iz} = -1$.

[68]Aquest valor s'anomena, seguint la terminologia de Cauchy, el *valor principal*.

[69]Battaglini utilitza $Cosz$, $Senz$ i $Tanz$, per expressar les funcions hiperbòliques. Nosaltres farem servir la notació habitual.

$$\cosh kz = 1 + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ...$$
$$\sinh kz = \frac{kz}{1} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^5z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + ...$$

I es té que: $e^{kz} = \cosh kz + \sinh kz$

4.4.2 La falta de rigor

Al Sulla se li ha atribuït sovint falta de rigor. D'Ovidio considera que el seu procediment és "més feliç que rigurós"[70] i el mateix Battaglini reconeix a Hoüel:

> Je sais que ma Note sur la Géométrie de Lobatschewsky aurait besoin d'être plus clairement développée.
>
> Se que caldria desenvolupar la meva Nota sobre la Geometria de Lobatxevski amb més claretat.
>
> [Battaglini a Hoüel, Naples 6/8/67[71]]

Voelke valora el mètode de Battaglini com a "matemàticament insatisfactori" i considera que està "seriosament hipotecat des del principi"[72]. La raó és que creu que la demostració de la fórmula que inicia la secció 2, a partir de la que Battaglini dedueix gran part dels seus resultats, és incorrecta.

Battaglini considera el sistema de punts ω de la recta L i les corresponents rectes Ω que els uneixen amb un punt p, exterior a la recta. Prenent dues posicons fixades del punt n i m i les resectives rectes M i N, com es mostra a la figura 4.1, es tenen les següents bijeccions:

$$\omega \longleftrightarrow \frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = r(\omega)$$

[70] "In verità più felice che rigoroso può dirsi il procedimento del Battaglini". A [37], p. 588.

[71] Transcrita a l'apèndix d'aquesta tesi, p. 212.

[72] "La méthode de Battaglini est mathématiquement insatisfaisante", a [100], p. 75. "La méthode de Battaglini est sérieusement hypothéquée dès le début", a [100], p. 77.

$$\Omega \longleftrightarrow \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N} = R(\Omega)$$

$$\omega \longleftrightarrow \Omega$$

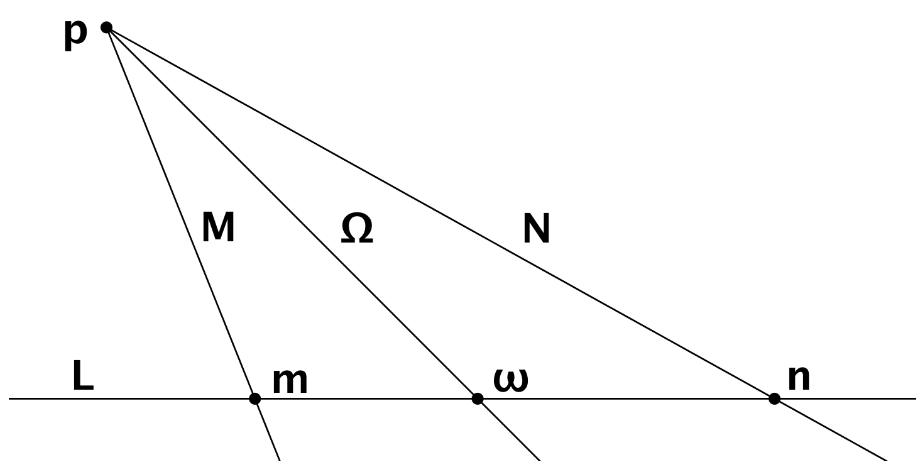


Figura 4.1: Ejemplo de Grafico

La última resulta òbvia per la mateixa construcció. Les dues primeres afirmen que cada una de les dues raons tindrà un valor únic i determinat segons la posició del punt ω o la recta Ω, i viceversa. Es poden demostrar fent servir les definicions de sinus circular i hiperbòlic mitjançant l'exponencial.

La composició d'aquestes funcions ens dóna una bijecció entre les dues raons que ens porta, segons Battaglini "evidentment", a la relació:

$$r(\omega) = \lambda R(\Omega)$$

és a dir,

$$\frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = \lambda \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N} \tag{4.1}$$

Per descontat que la deducció no ens sembla tan evident. Sembla que Hoüel compartia el nostre punt de vista, doncs a la carta del 6 d'agost del 67 que transcrivim a l'apèndix, Battalgini li envia una sèrie de càlculs per aclarir aquest pas. Aquestes aclaracions apareixeran a la traducció francesa de Hoüel [56], amb el vist i plau de l'autor[73]. L'argument és que com que les dues proporcions són funció uniforme l'una de l'altre, i per tant hi ha una bijecció, "pels principis coneguts de la teoria general de funcions"[74], han de ser una funció racional de l'altre[75]:

$$r(\omega) = \frac{\gamma R(\Omega) + \delta}{\alpha R(\Omega) + \beta},$$

el que exigeix que estiguin lligades per una equació algebraica de primer ordre de la forma:

$$\alpha r R + \beta r + \gamma R + \delta = 0,$$

essent $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coeficientes constants.

Considerant llavors les possicions de la recta Ω i el punt ω en que coincideixen amb les rectes M i N i els punts m i n, es té, en el primer cas:

$$\sinh m\omega = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{i} \quad \sin M\Omega = 0 \Rightarrow R = 0,$$

per tant $\delta = 0$; i en el segon cas:

$$\sinh \omega n = 0 \Rightarrow r = \infty \quad \text{i} \quad \sin \Omega N = 0 \Rightarrow R = \infty,$$

llavors $\alpha = 0$, per ser l'únic terme d'ordre dos.

L'equació queda, doncs, de la forma: $\beta r + \gamma R = 0$, per tant:

$$r = \frac{-\gamma}{\beta} R,$$

i anomenant $\lambda = \dfrac{-\gamma}{\beta}$, obtenim la fórmula inicial donada per Battaglini.

---

[73]Veure la carta de Battaglini a Hoüel 5/8/68, a [30], p. 74.

[74]Aquesta frase és un afegit de Hoüel qui es refereix al manual de Briot et Bouquet [41] a peu de pàgina. Veure [56], p. 215.

[75]Seguint l'aclaració de Hoüel a la seva traducció, [56], p. 215, veiem que una funció uniforme és el que actualment anomenem simplemenet aplicació, és a dir, que cada valor de x té una unica imatge $f(x)$. En ser les dues proporcions uniformes l'una de l'altra, es té que hi ha una bijecció entre elles. Observem que fent només aquesta hipòtesi la conclusió no és certa, en canvi, sí que ho és si la funció és biholomorfa, com explicarem més avall.

Voelke considera que aquest argument és erroni i per tant la demostració de Battaglini és falsa, doncs una aplicació bijectiva no té perquè ser racional[76]. Segons la nostra opinió aquesta conclusió és precipitada.

En efecte, la indicació afegida per Hoüel a peu de pàgina, en aquest punt, fa referència al capítol 4 del llibre I del manual de Briot et Bouquet *Théorie des fonctions doublement périodiques*, on es demostra el següent teorema[77]:

> Tota funció monodroma i monògena, que admet un nombre limitat d'infinits, és una fracció racional

Les dues hipòtesis, monodroma i monògena, són equivalents a demanar que la funció sigui biholomorfa[78]. Observem que el fet de que les funcions siguin bijectives implica que admeten un sol infinit.

No sabem si Battaglini es devia parar a demostrar aquestes dues hipòtesis rigorosament, però està clar que, tant Hoüel com Rouché i Comberousse, les donen per vàlides. Els darrers segueixen un procediment similar i arribats a aquest punt donen el mateix argument[79]. De fet, no sembla difícil veure que la funció, a més de bijectiva, és holomorfa, doncs es tracta d'una composició de funcions circulars, hiperbòliques i fraccions. La única singularitat estaria quan s'anul·len els denominadors, que és el cas límit plantejat més amunt en que les rectes Ω i N són coincidents.

Per Voelke encara queda el problema de que, en cas d'estar aplicant aquest teorema, Battaglini estaria fen ús d'un teorema de variable complexa en el cas real[80]. La nostra sensació, però, en llegir el Sulla, és que Battaglini considera des del principi que la variable z és complexa. En l'apartat anterior, per exemple, hem vist que en l'argumentació de la periodicitat de la posició de la recta, contempla la possibilitat de que z prengui valors reals com un cas particular[81].

---

[76] Veure [100], p. 76.

[77] A la p. 40 del manual [41].

[78] Voelke dóna les següents definicions a la p. 76 de [100]: Una funció és *monodroma* si els valors obtinguts per prolongació analítica no depenen del camí recorregut i el terme *monògena* es sinònim d'holomorfa.

[79] "...la teoria de funcions estableix que existeix entre elles una relació de la forma: $AT(z)\tan\theta + BT(z) + C\tan\theta + D = 0$". Veure [40], p. 586.

[80] Veure [100], p. 76.

[81] Veure p. 218 del Sulla [8].

Una altra crítica de Voelke és que el resultat també hauria de ser cert en geometria euclídiana, ja que no està distingint cap cas particular, i en canvi, és necessari canviar la fórmula 4.1 per la següent igualtat:

$$\frac{m\omega}{\omega n} = \lambda \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

Pel que nosaltres hem entés, Battaglini no canvia les fórmules, sinó que la darrera sortiria de prendre el valor 0 per la constant indeterteminada k, el que correspon al cas de la geometria euclidiana[82].

Fent alguns càlculs a partir l'equació inicial 4.1, s'obté l'equació equivalent[83]:

$$\frac{\tanh \theta}{\tan \Theta} = \frac{\tanh \frac{1}{2}mn}{\tan \frac{1}{2}MN} \tag{4.2}$$

Battaglini diu que en el cas $k = 0$, aquesta fórmula es transforma en:

$$\frac{\theta}{\tan \Theta} = \frac{\frac{1}{2}mn}{\tan \frac{1}{2}MN}.$$

Aquest pas és fàcil de demostrar, fent servir la definició de tangent hiperbòlica.

Posant $z = \frac{1}{2}mn$, per simplificar la notació, es té::

$$\lim_{k\to 0} \frac{\tanh \theta}{\tanh z} = \frac{\tanh \theta}{\tanh z} = \frac{e^{k\theta} - e^{-k\theta}}{e^{k\theta} + e^{-k\theta}} \cdot \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{e^{kz} - e^{-kz}} = \frac{0}{2} \cdot \frac{2}{0}$$

Cal trobar, doncs, el límit del quocient de les restes, que fent el desenvolupant en sèries de potències, dóna:

[82] Veure el Sulla [8], p. 222. En l'expossició Rouché-Comberousse les fórmules venen donadaes amb la k al denominador, pel que el cas euclidià és quan k tendeix a ∞.

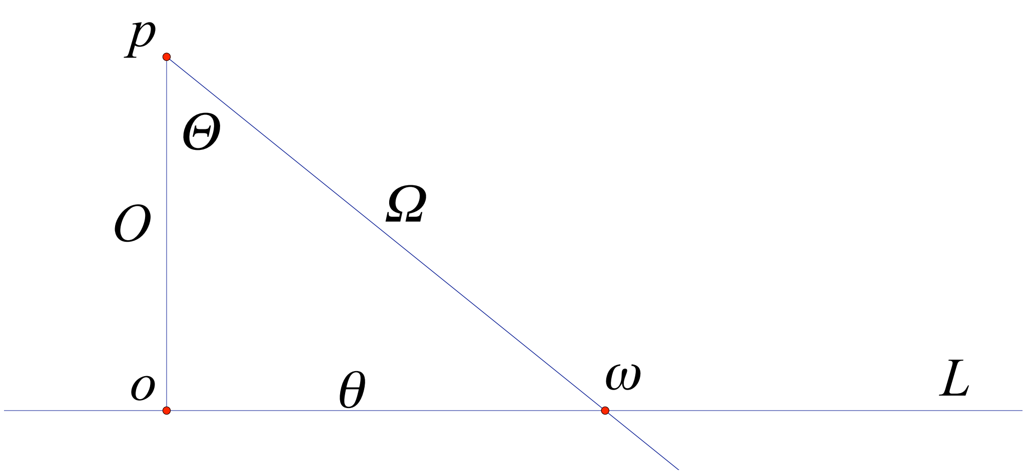
[83] Battaglini no presenta els càlculs del pas d'una fórmula a l'altre, que no és immediat. Voelke dóna una manera a [100], p. 77, n. 6. Rouché i Comberousse segueixen un mètode semblant, però utilitzen sempre les tangents en lloc dels sinus, pel que arriba a aquesta fórmula sense passar per la de la proporció entre els sinus.

$$\lim_{k\to 0}\frac{e^{k\theta}-e^{-k\theta}}{e^{kz}-e^{-kz}}=\lim_{k\to 0}\frac{k\theta+\dfrac{k^3\theta^3}{3!}+\dfrac{k^5\theta^5}{5!}+...}{kz+\dfrac{k^3z^3}{3!}+\dfrac{k^5z^5}{5!}+...}=\lim_{k\to 0}\frac{k\left(\theta+\dfrac{k^2\theta^3}{3!}+...\right)}{k\left(z+\dfrac{k^2z^3}{3!}+...\right)}=\frac{\theta}{z}$$

Observem, d'altra banda, que el resultat de Battaglini, sí que resulta evident utilitzant una argumentació geomètrica i les fórmules conegudes per l'analogia de Lambert, com demostrem a l'apèndix B.1 d'aquesta tesi.

4.4.3 Distàncies ideals i punts *més enllà de l'infinit.*

Battaglini demostra a continuació que el quocient $\dfrac{\tan\Theta}{\tanh\theta}$ és constant, amb la notació de la figura.



Concretament, aquesta constant és la tangent de l'angle de parel·lelisme Δ, o equivalentment[84]:

$$\tanh\theta=\frac{\tan\Theta}{\tan\Delta} \tag{4.3}$$

L'angle de parel·lelisme ve definit com aquell que formen amb O les rectes Ω corresponents al punt ω quan aquest es troba en el límit de les seves posicions.

[84]Veure la demostració al segon apartat de l'apèndix B, p. 226.

Recordem que serà menor que un angle recte, doncs aquesta és la hipòtesi de partida en la geometria imaginària.

Calculant la funció inversa de la tangent hiperbòlica, obté dues expressions per la distància θ, depenent de si aquesta pren un valor real o imaginari[85]. Descriu llavors les diferents situacions:

- Si $\tan\Theta > \tan\Delta$, es té que $\tanh\theta > 1$ i la distància θ pren un valor complex que vindrà donat per l'expressió:

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta} + \frac{i\pi}{2k} \tag{4.4}$$

  Llavors, com que $\Theta > \Delta$, la recta Ω està "compresa dins de l'angle suplementari de 2Δ". És a dir, forma amb la perpendicular un angle que supera el de paral·lelisme i troba L a distància *ideal* expressada per l'equació anterior.

- Si, en canvi, $\tan\Theta < \tan\Delta$ es té que $\tanh\theta < 1$, llavors la distància θ és real i pren el valor:

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta} \tag{4.5}$$

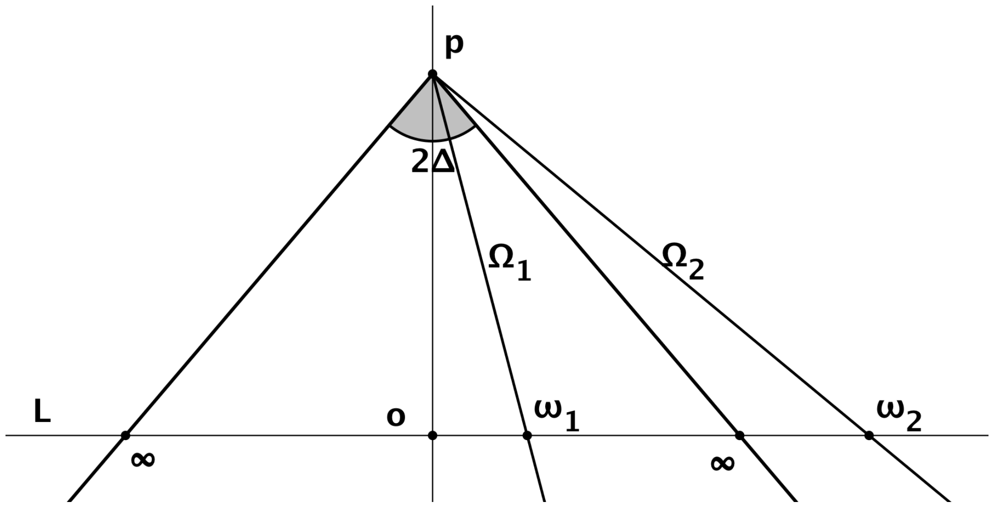
  Com que $\Theta < \Delta$, la recta Ω està "compresa dins de l'angle 2Δ". És a dir, forma amb la perpendicular un angle inferior al de paral·lelisme, i troba L a distància *finita*, expressada per equació anterior.

- Quan les dues tangents són iguals $\tan\Theta = \tan\Delta$, és a dir $\Theta = \Delta$, la posició del punt ω està en l'infinit.

  > [...] es té així el concepte fonamental de la teoria de les paral·leles de Lobatxevski, que *per un punt p es poden traçar dues rectes paral·leles a una recta L*, és a dir, dues rectes que *tallen L a una distància infinita*.

Aquestes dues paral·leles separen les rectes que tallen L en punts situats a distància *finita* de les que ho fan en punts situats a distància *ideal*. Els darrers són punts de la recta que estan *més enllà de l'infinit*.

[85]Veure els detalls al segon apartat de l'apèndix B, p. 227.



Així, Battaglini no només utilitza els punts a l'infinit[86] en un context de geometria no euclidiana, sinó que a més introdueix els que anomena punts ideals, que es podrien definin com aquells on es tallen dues rectes divergents.

Continua reflexionant sobre les conseqüències de moure el punt p sobre la perpendicular O, i conclou que l'angle de paral·lelisme depen de la distància δ del punt p a la recta L, observant que es té la següent relació:

$$\cot\Delta = \frac{1}{\tan\Delta} = \Phi(\delta)$$

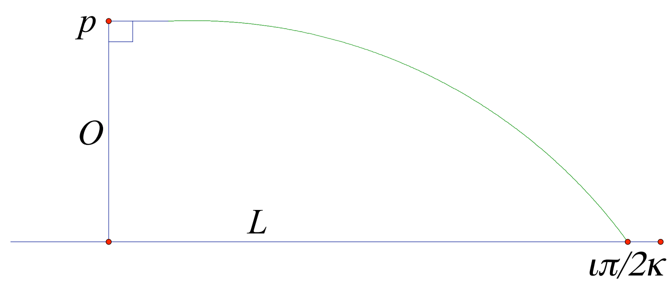
Defineix, llavors, el *pol* d'una recta, introduïnt una altra noció de la geometria projectiva en l'estudi de la imaginària.

Un cop fixada la posició de p es té la següent bijecció:

$$\omega \longleftrightarrow \tanh\theta = \frac{\tan\Theta}{\tan\Delta}$$

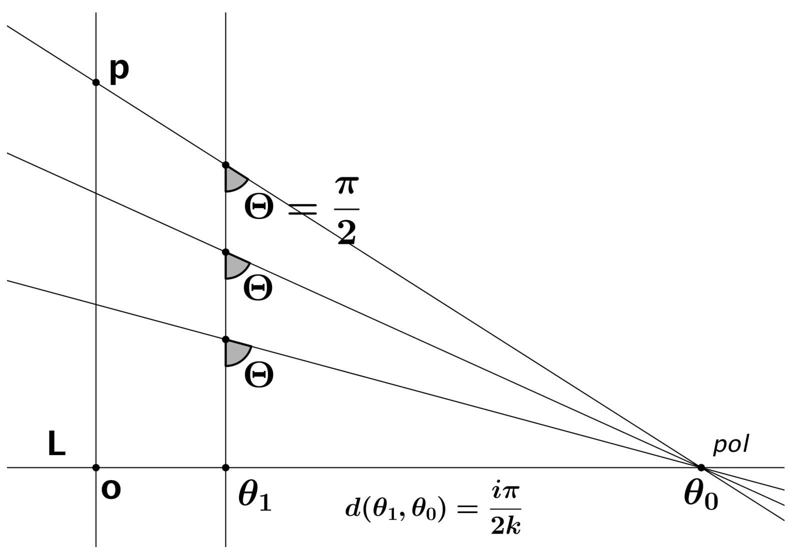
Així, totes les rectes corresponents al valor de la fracció ∞, és a dir, totes les perpendiculars a O, troben L al punt $\theta = \dfrac{i\pi}{2k}$.

[86]Definits per Desargues en el *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'une cône avec un plan* (1639), com aquells en que es tallen les rectes paral·leles.



És té, doncs, que totes les rectes que tallen L en un punt ideal θ_0, determinat per l'eqüació 4.4, seran també perpendiculars a una mateixa recta, concretament a la perpendicular a L pel punt:

$$\theta_1 = \frac{1}{2k} \log \frac{\tan \Theta + \tan \Delta}{\tan \Theta - \tan \Delta}$$



Qualsevol punt ideal es pot considerar, llavors, com el punt de tall de dues rectes perpendiculars a una donada. Battaglini anomena aquest punt en que es tallen totes les perpendiculars a una determinada recta, el *pol* d'aquesta recta.

Acabem de veure tot un seguit de referències a termes projectius, que deixa fora de dubtes que Battalgini està estudiant la geometria de Lobatxevski fent ús de les eines projectives. El que d'altra banda, tampoc ens ha de sorprendre, doncs, com havia comunicat a Betti, Battaglini creu que la geometria projectiva és la teoria més general, i que amb ella es tenen tots els mitjans per estudiar les propietats de l'extensió[87].

4.4.4 La Geometria euclidiana com a cas particular de la imaginària

Un altre resultat important que mostra Battaglini en el Sulla és que la geometria imaginària conté la geometria euclidiana. Concretament, la darrera és el cas particular en que la constat k és 0.

Prenent aquesta hipòtesi, observa que l'angle de paral·lelisme serà sempre recte i que totes les rectes tallen L a excepció de *dues paral·leles coincidents*, que tallen L en *dos punts coincidents a l'infinit*. El que suposa el concepte fonamental de la teoria de les paral·leles d'Euclides.

Battaglini fa llavors una reflexió sobre la diferència entre les dues geometries, considerant que radica en el concepte de recta i d'infinit. La recta euclidiana seria com un cercle, en extendre-la pels dos costats arribariem a dos punts a l'infinit que són coincidents. En canvi, en la geometria imaginària els dos infinits als que arribariem són diferents. A més, entre aquests dos infinits trobariem els punts ideals[88].

Observem que, en donar aquesta descripció de la recta hiperbòlica, no només està afegint el punt de l'infinit com s'acostumava a fer en geometria projectiva, sinó que també afegeix a la recta infinits punts ideals.

Veiem, també, que Battaglini veu la idea estructural de coexistència de vàries geometries.

4.4.5 Descripció del pla no euclidià

Battaglini conntinua les següents seccions 3 i 4 trobant diferents resultats pels triangles hiperbòlics a partir del seu plantejament, a alguns dels quals

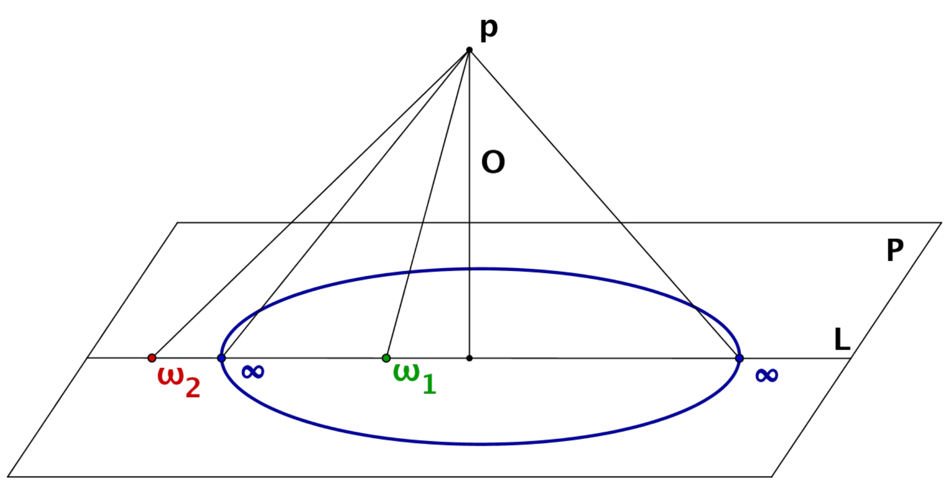
[87] Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 8/11/74, que hem citat anteriorment, a la p. 105.

[88] Veure la p. 223 del Sulla, [8]

Beltrami farà posteriorment referència al Saggio[89].

Les darreres seccions del Sulla no apareixeran a la traducció francesa publicada per Hoüel als Annales [56], que només presenta les dues primeres seccions comentades en els apartats anteriors. A l'inici de la cinquena i última secció, però, se'ns presenta una idea d'allò més interessant.

Battaglini generalitza la situació descrita a les dues primeres seccions de la següent manera. Prenent el sistema de rectes pel punt p que tallen en els diversos punts la recta L, si el fem girar respecte a la perpendicular a L per p, O, la recta L descriu un pla perpendicular a O. Es tindran llavors que les rectes per p tallen el pla a distància finita, infinita o ideal del peu de la perpendicular. Es donarà també el resultat que ens dóna la definició de *pol* d'un pla, això és, que totes les rectes que es tallen en un punt ideal del pla seran perpendiculars a un mateix pla, del que el punt és el pol.



Diu llavors:

> Nel sistema della Geometria *non-euclidiana* il piano è una superficie

[89]Veure les pàgines: 13, 19 i 22. Els nombres de pàgines als que ens referirem són de la versió digitalitzada de l'article [15]: http://www.caressa.it/pdf/beltrami01.pdf.

> indefinita essendo i suoi punti all'infinito tutti *distinti* tra loro ed appartenenti ad una *circonferenza di circolo*, che ha per centro un punto *qualunque* del piano ed il raggio infinito; similmente per lo spazio, i punti all'infinito sono tutti *distinti* tra loro ed appartengono ad una *superficie sferica*, che ha per centro un punto *qualunque* ed il raggio infinito.
>
> En el sistema de la Geometria *no euclidiana* el pla és una superfície indefinida, tots els seus punts de l'infinit són *diferents* entre si i pertanyen a una *circumferència de cercle*, que té per centre un punt *qualsevol* del pla i radi infinit; anàlogament per l'espai, els punts de l'infinit són tots diferents entre si i pertanyen a una superfície esfèrica que té per centre un punt qualsevol i radi infinit.[90]

És a dir, considera que el concepte de pla és diferent en aquesta nova geometria, com també ho era el concepte de recta. En la geometria euclidiana, el pla és una superfície indefinida "reentrant en ella mateixa", on els punt de l'infinit són parelles de punts coincidents que formen una línia recta[91]. En canvi, en la geometria imaginària, els punts a l'infinit són tots diferents i formen una circumferència de radi infinit. Els punts reals del pla no euclidià pertanyen a l'interior d'aquest disc, mentre que els punts ideals es situen a l'exterior.

Aquesta descripció del pla no euclidià, com la regió limitada per un cercle sense frontera dins del pla euclidià coincideix, clarament, amb les donades posteriorment per Beltrami i Klein.

Com veurem més endavant, el nou plantejament de Battaglini no va suposar una influència en el treball de Beltrami, que seguirà un altre enfoc. En canvi, Klein sí que va seguir el punt de vista projectiu per explicar la geometria no euclidiana.

Klein comparteix la opinió de Battaglini de que la projectiva pot unificar les diferents geometries i aconsegueix demostrar-ho als seus treballs *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, [64] i [66]. Els seus estudis parteixen de la teoria de l'*Absolut* de Cayley. Veiem en que consisteix.

La geometria projectiva es distingeix de l'euclidiana en que, en lloc d'estudiar les propietats mètriques dels elements geomètrics, es centra en l'estudi de

[90] Al Sulla [8], p. 229.
[91] Veure el Sulla [8], p. 230.

la seva posició relativa. Les propietats mètriques, com la distància entre punts i la mesura d'angles, principals conceptes d'estudi en la geometria euclidiana, no es conserven quan fem aplicacions de projecció i secció, a les que anomenem projectivitats. La geometria projectiva estudia aquelles propietats que sí són invariants per aquestes transformacions, com l'aliniació de punts i l'intersecció de rectes, propietats que tenen a veure amb la posició relativa dels objectes geomètrics.

El britànic Arthur Cayley (1821-1895), a la seva memòria del 1859, *Sixth Memoire upon quantics* [31], es proposa donar la noció de distància dins de la geometria projectiva[92]. Per fer-ho, introdueix una cònica al pla projectiu, o una quàdrica a l'espai, que anomena *Absolut*, de manera que les nocions mètriques són independents de qualsevol transformació projectiva que conservi l'Absolut. Veu, llavors, que la geometria projectiva és més completa que l'euclidiana, doncs aquesta última és un cas particular de la primera. Concretament, es tracta del cas en que l'Absolut és una cònica degenerada formada per un parell de punts.

Una de les novetats aportades per Klein és que distingeix, a més del cas degenerat anterior corresponent a la geometria euclidiana, dos casos més, segons si l'Absolut és real o imaginari, que donen la geometria de Lobatxevski i l'esfèrica, respectivament, demostrant que també es poden estudiar com a incloses en la projectiva.

El cercle límit que descriu Battaglini al Sulla és en realitat l'Absolut de Cayley pel cas de la geometria hiperbòlica, és a dir, el cas en que és real. El que resulta més interessant és que Battaglini, en l'època que va escriure el Sulla, ja era conscient de que la geometria de Lobatxevski es podia estudiar seguint les idees de Cayley:

> Il m'est réussi (avec des principes de Géométrie iperbolique [sic]) à établir des relations données par Lobatschewsky entre les angles et les côtés d'un triangle rectiligne; on peut même arriver à ces formules en suivant la méthode de Cayley (Sixth Memoir on Quantics, Philos. Trans) pour établir les relations métriques du continu à deux dimensions, en supposant (lorsque on parle du plan) que l'*Absolu* soit une

[92]A l'abstract de [31], p. 561, diu:

> A chief object of the present memoir is the establishment, upon purely descriptive principles, of the notion of distance.

forme quadratique *quelconque*, tandis que dans la Géométrie euclidiènne cette forme se décompose en deux facteurs linéaires. J'espère le mois prochain pouvoir communiquer mes rescherches à l'Academie des Sciences de Naples.

He aconseguit (amb els principis de Geometria hiperbòlica) establir les relacions entre els angles i els costats d'un triangle rectilini donades per Lobatxevski; també es pot arribar a aquestes fórmules seguint el mètode de Cayley (Sixth Memoir on Quantics, Philos. Trans) per establir les relacions mètriques del continu en dues dimensions, suposant (quan parlem del pla) que l'*Absolut* sigui una forma quadràtica *qualsevol*, mentre que en la Geometria euclidiana aquesta forma es descomposa en dos factors lineals. Espero poder comunicar les meves recerques el mes que ve a l'Acadèmia de les Ciències de Nàpols[93].

[Battaglini a Hoüel, Naples 21/5/67[94]]

Aquestes paraules donen a entendre que Battaglini pensa que hi ha, encara, una tercera via per trobar els resultats no euclidians obtinguts per Lobatxevski, i ell mateix, de maneres diferents. Aquesta via consisteix en seguir el mètode mètrico-projectiu de Cayley[95], s'obté llavors, que la geometria no euclidiana resulta del cas en que la cònica de l'Absolut és real. Aquest mètode és el que va seguir Klein uns anys després, obtenint justament aquest resultat. Observem, a més, que Battaglini ja fa servir el terme "geometria hiperbòlica", que serà després utilitzat per Klein.

El que resulta curiós és que a la carta mencioni tan clarament la cònica de l'Absolut i en canvi aquest concepte no aparegui en el Sulla. Tampoc a les seves memòries sobre les formes ternàries, apareixen els resultats de geometria no euclidiana trobats fent servir com Absolut una quàdrica qualsevol, com es suggereix a la carta. En el primer d'aquests darrers treballs només s'arriba a exposar el concepte de Cayley amb el que s'estableixen les relacions mètriques de les figures de manera completament analítica[96].

[93] Es tracta de les memòries 1ª i 2ª *Sulle forme ternarie quadratiche*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, s. I, t. III, n. 17, p. 1-26 i n. 26, p. 1-32, 1867. Veure per més informació la nota 11 a peu de pàgina, a [30], p. 64.

[94] A [30], p. 63-64.

[95] De fet, a la memòria de Cayley de 1859, ja apareix de manera implícita la fórmula de la mètrica que porta a la geometria de Lobatxevski, tot i que ell no n'era conscient.

[96] Veure el resum que fa Battaglini a la seva carta a Hoüel del 5/5/70, a [30], p. 93; i el que fa D'Ovidio a la *Commemorazione*, [37], p. 580.

La impressió que dóna és que, en el Sulla, Battaglini només pretenia "traduir" el treball de Lobatxevski al llenguatge matemàtic amb el que ell treballava, la geometria projectiva amb metodologia analítica, per entendre'l millor i perquè estava convençut que la projectiva era la geometria més general i que amb ella s'hauria de poder explicar tot allò relatiu a l'extensió. En fer això, li surt de manera natural la cònica no degenerada real de l'Absolut. Potser, va adonar-se, llavors, del resultat que menciona a la carta.

Sembla, però, que no considerava que amb la descripció donada al Sulla estigués donant un model de la geometria no euclidiana, doncs en cap moment diu que és el que aconsegueix el seu article. En tot cas, el que suggereix a la carta és que per trobar el model projectiu de Klein, cal seguir una altra metodologia, la de Cayley.

Extranyament, Battaglini no va continuar els seu estudi de la geometria no euclidiana intentant desenvolupar-la seguint les idees de Cayley, i explicant el model projectiu que, segons Montesinos, té al cap:

> La clave para entender a Battaglini en todo este artículo es que él piensa en geometria proyectiva, y que tiene en su mente -claramente configurado- el modelo proyectivo de la geometria hiperbòlica. Afirmo por tanto que Battaglini se adelantó seis años a Klein en la parte más sustancial del modelo proyectivo. [81]

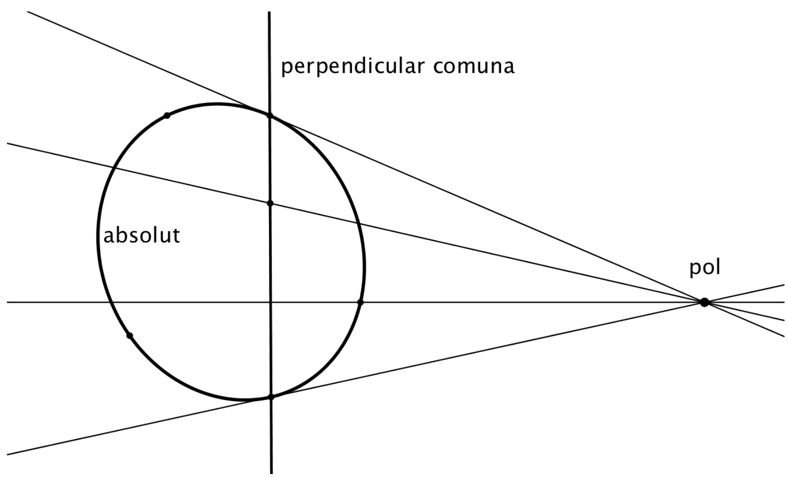
Possiblement, no va creure necessari tornar a exposar la geometria de Lobatxevski d'una manera. El que podria voler dir que no era conscient del que suposava aquesta nova via de presentació, és a dir, potser no se n'havia adonat de que estava en possesió d'un model per la nova geometria.

Les explicacions que hem donat, argumenten, a la vegada que matitzen, les anteriors paraules de Montesinos.

La carta demostra, doncs, que Battaglini sabia que la geometria no euclidiana es pot estudiar fent sevir la teoria de Cayley suposant que l'Absolut és una cònica qualsevol no degenerada, però el desenvolupament d'aquest resultat, mostrant que suposa un model de la geometria no euclidiana, és aportació de Klein.

Això sí, sabem que Klein va llegir el Sulla, doncs el cita a la primera part de la seva memòria [64], i és més que probable que amb els seus coneixements, veiés el nou enfoc projectiu que estava donant Battaglini en l'estudi de la geometria de Lobatxevski. Fins i tot, és possible que entengués que la circumferència de punts a l'infinit, és la cònica no degenerada de l'Absolut.

De fet, Klein atribueix a Battaglini la introducció del concepte de punt ideal i l'observació de que les perpendiculars a una recta són concurrents en el pol d'aquesta respecte a la cònica fonamental[97]. Aquesta darrera s'interpreta al model de Klein com es mostra a la figura.



[97]Veure [64], p. 290.

Capítol 5

La interpretació de la geometria no euclididana.

La contribució d'Eugenio Beltrami a la geometria no euclidiana és de les mes destacables en la història d'aquesta matèria. La seva genialitat va ser descubrir la geometria de Lobatxevski en les superfícies de curvatura constant negativa. D'aquesta manera, proporciona la primera interpretació de la geometria no euclidiana i demostra la seva consistència relativa a la geometria euclidiana.

El punt clau per entendre els treballs de Beltrami és llegir-los en el context de la geometria diferencial, introduïda per Gauss. La principal novetat en la teoria de Gauss és la possibilitat d'estudiar les superfícies de manera intrínseca, en lloc de pensar-les com a immerses en l'espai euclidià, $\mathbb{R}^3$, tot i que ell fa servir tota l'estona la mètrica induïda de $\mathbb{R}^3$. Posteriorment, Riemann desenvoluparà aquesta idea, aconseguint fer el difícil pas conceptual d'estudiar les superfícies com a varietats no submergides en $\mathbb{R}^3$. Beltrami entén clarament aquest punt de vista, i és el principi en que es fonamenten els seus treballs sobre geometria no euclidiana. Podriem dir, doncs, que Gauss i els matemàtics que es van ocupar després d'ell de la geometria diferencial, van ser la principal influència del treball de Beltrami.

En aquest capítol comentarem quatre articles de Beltrami que es relacionen entre ells i mostren l'evolució dels pensaments de Beltrami sobre la qüestió de la geometria no euclidiana. Concretament, el *Risoluzione* es presenta com un preludi del *Saggio*, i és, per tant, el desencadenant de les reflexions de Beltrami soble la geometria imaginària que presenta als dos articles següents: el *Saggio* i el *Teoria Fondamentale*. Amb el darrer escrit, l'*Osservazione*, es tanca la qüestió possant en rellevància la connexió entre els seus estudis anteriors i els resultats aportats per Klein en el context de la geometria projectiva.

Com a conseqüència d'aquest estudi, respondrem a una de les preguntes principals que han motivat aquesta tesi: quina és la relació entre la descripció feta per Battaglini del pla no euclidià i el model que dóna Beltrami.

5.1 La Geometria diferencial, inspiració dels treballs de Beltrami.

Beltrami parteix d'una tradició matemàtica basada en la teoria de geometria diferencial, que s'estava desenvolupant a la Universitat de Pavia, amb matemàtics com Antonio Bordini, Gaspare Mainardi, Delfino Codazzi, Francesco Brioschi i Luigi Cremona, els dos últims els seus principals mentors. Les seves primeres publicacions pertanyen a aquesta disciplina. Per exemple, el 1864, a [12], Beltrami dóna una fórmula per les geodèsiques que farà servir després al *Risoluzione*; el mateix any, a [11], calcula l'àrea i el volum de la pseudoesfera (no utilitza aquest nom); i el 1865, estudia superfícies reglades a [13], demostrant que una superfície reglada es pot transformar per flexions de manera que una geodèsica donada sobre ella es transformi en una línia recta.

Per tal d'establir la base conceptual dels treballs que analitzarem a les seccions posteriors, haurem de fer, doncs, una petita revisió de les principals idees de geometria diferencial que hi apareixen, recollides majoritariament en el *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss.

En aquest treball, Gauss dóna dues maneres diferents per a definir una superfície: la primera, com els zeros d'una funció; la segona, en forma paramètrica. Concretament diu[1]:

> Hi ha dos mètodes generals per a exhibir l'índole d'una superfície

[1] Traducció catalana del *Disquisitiones* continguda a [86], p. 32-33.

> corba. El *primer* utilitza l'equació entre les coordenades x, y, z, la qual podem suposar reduïda a la forma $W = 0$, on W serà una funció de les indeterminades x, y, z.
>
> El *segon* mètode expressa les coordenades en forma de funcions de dues variables p, q.
>
> [...]
>
> Amb aquests dos mètodes generals n'hi ha associat un *tercer*, en el qual una de les coordenades, per exemple z, està expressada en forma d'una funció de les altres dues x, y. Aquest mètode és evidentment tan sols un cas particular bé del primer mètode o bé del segon."[2]

A continuació (secció 6 del *Disquisitiones*) Gauss defineix curvatura com el quocient d'àrees entre una regió de la superfície i la imatge d'aquesta regió sobre l'esfera per l'anomenada *aplicació de Gauss*. Aquesta aplicació, considerada ja per altres autors, com per exemple Olinde Rodrigues[3], però que és Gauss qui l'explota fortament per primer cop, consisteix en aplicar cada punt P de la superfície al punt de l'esfera unitat centrada a l'origen de $\mathbb{R}^3$ donat per l'extrem del vector unitari normal a la superfície en P, amb origen el centre de l'esfera. Concretament, Gauss diu[4]:

> De la mateixa manera que, traslladant les direccions normals a la superfície corba sobre la superfície esfèrica, fem correspondre a punts de la primera superfície punts de la segona, així també qualsevol línia o qualsevol figura sobre la primera estarà representada per la corresponent línia o figura sobre la superfície esfèrica. En la comparació de dues figures que es corresponguin l'una amb l'altra d'aquesta manera, una de les quals és com la imatge de l'altra, es poden prendre dos punts de vista, un quan es considera únicament la quantitat, l'altra quan, oblidant relacions quantitatives, es considera només la posició.
>
> El primer punt de vista és la base per a introduir algunes nocions

[2] És a dir, podem donar la superfície *globalment* com els zeros d'una funció de tres variables, per exemple, una esfera es pot donar per $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, o bé *localment*, com una aplicació d'un obert del pla p, q a $\mathbb{R}^3$, per exemple la mateixa esfera (no tota) es pot donar per $x = \sin p \cos q, y = \sin p \sin q, z = \cos p$. Si identifiquem les coordenades p, q amb les coordenades x, y de $\mathbb{R}^2$, llavors un cas particular d'això últim és prendre la superfície com la gràfica d'una funció $z = z(x, y)$, és a dir, $x = x, y = y, z = z(x, y)$.

[3] Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851), deixeble de Gaspard Monge.

[4] A [86], p. 35-36.

> noves que semblen útils dins de la teoria de superfícies corbes. Així, a cada part d'una superfície corba inclosa dintre de límits determinats li assignem una *curvatura total* o *integral*, que és l'àrea de la figura corresponent sobre l'esfera. Aquesta curvatura integral s'ha de distingir d'una curvatura una mica més específica que anomenarem *mesura de curvatura*: la darrera es refereix a un *punt* de la superfície, i representarà el quocient obtingut en dividir la curvatura integral de l'element de superfície al voltant d'un punt per l'àrea del mateix element; i per tant denota la raó de les àrees infinitament petites que es corresponen l'una amb l'altra, una sobre la superfície corba i l'altra sobre l'esfera.

Podríem escriure doncs, que si B_n és una successió d'entorns connexos que tendeixen a un punt P de la superfície, llavors

$$|K(P)| = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Àrea}\,(\mathcal{N}(B_n))}{\text{Àrea}\,(B_n)}$$

on $\mathcal{N} : S \longrightarrow S^2$ és l'aplicació de Gauss. Posem valor absolut per no entrar en consideracions sobre el signe que ens portarien massa lluny.

A la secció 8 veu que $K = k_1 k_2$, és a dir, que la curvatura de Gauss és igual al producte de les curvatures principals introduïdes per Euler a [42]. Quan tallem la superfície pel feix de plans determinats per la normal, obtenim corbes planes. k_1 i k_2 són les curvatures màxima i mínima de totes aquestes corbes. Encara que sembli mentida, aquests valors màxim i mínim es prenen sobre corbes determinades per plans, de l'anterior feix, que són ortogonals entre ells.

Remarquem que el famós *Teorema Egregi*, que apareix a la secció 12 del *Disquisitiones*[5] diu:

Teorema *Si una superfície corba es desenvolupa sobre qualsevol altra superfície, la mesura de curvatura en punts corresponents no canvia.*

És a dir, quan dobleguem una superfície sense estirar-la ni trencar-la, les curvatures principals k_1 i k_2 canvien, però el seu producte no!

I aquí és on comença la famosa *geometria intrínseca* de la superfície (estudi de les propietats de la superfície invariants per flexions) que donarà origen a

[5] A [86], p. 50.

la geometria riemanniana i al model de Beltrami de la geometria no euclidiana.

Si la superfície està donada per

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

els vectors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$$

són tangents a la superfície, i Gauss s'adona de que per calcular la longitud d'una corba sobre la superfície no cal 'sortir' de la superfície i mirar-la com una corba de $\mathbb{R}^3$, sinó que només cal conèixer el valor de las funcions

$$\begin{aligned} E &= \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \rangle, \\ F &= \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle, \\ G &= \langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle, \end{aligned}$$

sobre aquesta corba (notació que introdueix a la secció 11 del *Disquisitiones* i que ha perdurat fins avui), on $<,>$ és el producte escalar de $\mathbb{R}^3$.

Concretament, la quantitat que s'ha d'integrar, i que per tant rep el nom de *diferencial de longitud*, és ds amb

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Més concretament, la longitud de la corba $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)),\ t \in [a,b]$ és

$$L = \int_a^b \sqrt{E\,u'^2 + 2F\,u'v' + G\,v'^2}dt.$$

També es coneix amb el nom de *Primera forma fonamental* de la superfície. La seva generalització, feta per Riemann, a varietats de dimensió superior, rep el nom de mètrica de Riemann.

Les propietats que depenen d'aquest objecte són propietats intrínseques de la superfície. Així, quan dues superfícies són isomètriques, és a dir, tenen el mateix element de longitud, són intrínsecament iguals, com és el cas d'un cilindre i un pla, tot i ser diferents com a superfícies de $\mathbb{R}^3$. El que mesura aquesta darrera diferència és la segona forma fonamental.

La demostració del Teorema Egregi que hem comentat abans, es fa observant que K es pot calcular directament a partir de E, F, G i les seves derivades. La extraordinària fórmula de Gauss és:

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)^2K = \; & E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) \\ + \; & F\left(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u\right) \\ + \; & G\left(E_uG_u - 2E_uF_v + (E_v)^2\right) \\ - \; & 2(EG-F^2)\left(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}\right).\end{aligned}$$

Així, si dues superfícies tenen la mateixa primera forma fonamental tenen la mateixa curvatura de Gauss. Conseqüentment, com l'esfera de radi R té curvatura de Gauss $1/R$ i el pla té curvatura de Gauss 0, aquestes superfícies no poden tenir el mateix element de longitud, o no són localment isomètriques, i per tant, és impossible fer mapes fidels de la Terra.

Resumint, cada cop que tinguem un obert de $\mathbb{R}^2$ i sobre aquest obert funcions E, F, G amb la condició $EG - F2 > 0$, diem que tenim una *varietat de Riemann* de dimensió 2. La mètrica de la varietat ve determinada per la fórmula de l'element de longitud ds^2, o equivalentment, pels seus coeficients E, G, F, ja que a partir d'ells podem calcular les propietats mètriques com la longitud o l'àrea. En el treball de Gauss aquestes funcions són, com hem vist més amunt, la restricció a la superfície del producte escalar de $\mathbb{R}^3$, és a dir, els coeficients E, F i G és calculen fent el producte escalar de $\mathbb{R}^3$ amb vectors tangents a la superfície. La idea de Riemann és treballar amb mètriques que *no provenen* forçosament de la mètrica de $\mathbb{R}^3$. Aquesta és exactament la situació que ens trobem quan estudiem el model de Beltrami o el disc de Poincaré. Com a conjunt es pren un disc, però la manera de mesurar distàncies en aquest disc ve donada per unes certes funcions $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, on (u, v) són les coordenades de cada punt del disc, que no es defineixen a partir del producte escalar de $\mathbb{R}^3$, i que tenen com a única condició $EG - F^2 > 0$. Llavors, aplicant les fórmules que Gauss va trobar en funció de E, F, G i les seves derivades, es poden calcular les propietats mètriques de la superfície.

Els resultats que es desenvolupen al *Saggio* es fonamenten, doncs, en la teoria de superfícies corves de Gauss[6], concretament, en la idea de que les propietats intrínseques de les superfícies venen determinades per l'element lineal.

El aquesta mateixa línia, també li devien servir d'inspiració alguns resultats de Ferdinand Minding. Aquest matemàtic, nascut a l'actual Polònia, en aquell moment part de l'Immperi Rus, va ser l'introductor a Rússia de l'estudi de la geometria diferencial de superfícies, i les seves investigacions es poden considerar com una continuació de la feina de Gauss. El seu resultat més famós, conegut com el *Teorema de Minding*, apareix el 1839 a [79][7]. Es tracta del recíproc del Teorema Egregi de Gauss, ens diu que dues superfícies amb la mateixa curvatura gaussiana constant són localment isomètriques, és a dir, es poden desenvolupar l'una sobre l'altra. Remarquem que aquest resultat no és cert per qualsevol superfície, cal que la seva curvatura sigui constant. Com a conseqüència, totes les superfícies de curvatura igual a zero són localment isomètriques a un pla i totes les de curvatura constant positiva ho són a una esfera de radi $1/\sqrt{k}$. I es dedueix també, que totes les superfícies de curvatura constant negativa són desenvolupables l'una sobre l'altra, i en particular, sobre la pseudoesfera.

El 1840, Minding publica [80][8], on parla del que coneixem com *Analogia de Lambert*, que mostra l'analogia existent entre els resultats que es donen a l'esfera i a l'esfera imaginària. Concretament diu que, si es substitueixen les funcions trigonomètriques per les corresponents funcions trigonomètriques hiperbòliques, les fórmules pels triangles geodèsics sobre les superfícies de curvatura constant positiva es transformen en les fórmules pels triangles geodèsics sobre les superfícies de curvatura constant negativa. Aquestes fórmules concideixen, canviant només la notació, amb les de la trigonometria plana no euclidiana de Lobatxevski. Però sembla que Minding no va veure l'estreta relació entre la geometria intrínseca de les superfícies de curvatura constant negativa i la geometria imaginària de Lobatxevski. Aquest serà el mèrit de Beltrami, qui també seguirà l'Analogia per donar inici al *Saggio*.

[6]Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologne 18/11/68, a [23], p. 67, on diu precisament que busca les bases analítiques de la nova geometria en la teoria del *Disquisitiones* de Gauss.

[7]*Com decidir si dues superfícies són mútuament desenvolupables; incloent remarques sobre superfícies de curvatura constant negativa.*

[8]*Contribucions a la teoria de les línies més curtes en superficies corbes.*

En el context italià, altres matemàtics que van treballar en la línia de la geometria diferencial i que segurament devien inspirar Beltrami, van ser Domenico Chelini, de qui parla en ocasions a la seva correspondència[9] i Delfino Codazzi[10], qui es citat junt a Minding al *Saggio*[11].

Beltrami parteix d'una total comprensió dels treballs de Gauss i de Riemann. Aquesta coneixença distava molt del punt en que es trobava la comunitat matemàtica que, en general, no havia entès les importants conseqüències que es derivaven de la contribució de Gauss a la geometria, i encara menys de la de Riemann. Aquest fet es desprén de les cartes a Hoüel. Els dubtes que li planteja el francés respecte a la seva exposició de la geometria no euclidiana, desencadenen una sèrie d'explicacions sobre la teoria de Gauss, ja que és d'on en realitat provenen[12]. Veiem alguns exemples, que ens ajudaran també a nosaltres a entendre la geometria no euclidiana des del punt de vista diferencial.

Les explicacions que dóna Beltrami a Hoüel són principalment sobre la geometria de l'horosfera i la distinció entre la geometria intrínseca d'una superfície i les seves propietats geomètriques com a sólid de l'espai.

Sembla que Hoüel tenia dificultats per entendre que la igualtat entre les geometries intrínseques de l'horosfera i del pla euclidià, no vol dir que l'horosfera sigui efectivament un pla euclidià.

Recordem que l'horosfera és l'esfera amb centre a l'infinit (i radi infinit). Beltrami també l'anomena esfera-límit[13] ja que es pot considerar com el límit d'una seqüència d'esferes amb radi creixent, amb el mateix pla tangent i punt de tangència. En dimensió dos l'horosfera es diu horocicle.

En aquesta carta del 1 d'abril de 1869, Beltrami aclareix que vol dir quan afirma que la geometria de l'horosfera és la del pla euclidià, donant resposta a què suposa el fet de que dues superfícies tinguin la mateixa curvatura constant, i per tant, segons el teorema de Minding, el mateix element de

[9]Veure [46], p. 329, per una relació de les cartes de Beltrami a Betti, Tardy i Gherardi on es menciona a Chelini

[10]El 1857, va mostrar que els triangles a la pseudoesfera venen descrits per les fórmules de trigonometria hiperbòlica de la geometria no euclidiana.

[11]A la p. 13 de la versió digital de [15].

[12]Com li suggereix Beltrami a la carta 19/12/69, a [23], p. 108.

[13]Bolyai defineix l'horosfera com la superfície ortogonal a un feix de geodèsiques paral.leles.

longitud:

> De la formule $ds = const. \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2}$, que j'ai établie à la page 21 de mon dernier Mémoire on tire (ou plutôt on vérifie, car cela se trouve dans Lobatcheffsky) que la géométrie de la sphère-limite n'est pas autre chose que celle du plan euclidien. En disant que la courbure de cette surface est nulle je n'ai pas voulu dire autre que toutes les propriétés métriques de cette surface sont les mêmes que celles du plan ordinaire, à cause de l'identité des éléments linéaires chez l'une et chez l'autre. Et cela a lieu indépendamment de l'axiome XI, seulement on ne doit pas se figurer la sphère-limite comme étant un plan euclidien véritable. Dans la géométrie ordinaire, aussi, on ne pourrait pas conclure, de ce que l'élément linéaire d'une surface serait réductible à la forme $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, que cette surface est un plan: elle pourrait être aussi bien un cylindre, un cône, ou toute autre surface développable. Dans la géométrie abstraite on doit dire la même chose, c'est-à-dire que la surface de courbure nulles est identique, non par sa forme mais par ses propriétés métriques avec le plan euclidien, sur lequel on peut dire qu'elle es développable, ou *constructible* sauf le mot barbare (je crois). Pour mon compte je dirais que la sphère-limite est une des formes sous lesquelles le plan euclidien existe dans l'espace non-euclidien, *en considérant le plan euclidien commen défini par la propriété d'avoir la courbure nulle.*

> De la fórmula $ds = const. \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2}$, que he establert a la pàgina 21 de la meva darrera Memòria s'extreu (o més aviat es verifica, doncs això es troba dins Lobatxevski) que la geometria de l'esfera-límit no és altra que la del pla euclidià. En dir que la curvatura[14] d'aquesta superfície és nul·la no he volgut dir altra cosa que totes les propietats mètriques d'aquesta superfície són les mateixes que les d'un pla ordinari, a causa de la identitat entre els seus respectius elements lineals. I això té lloc independenment de l'axioma XI, només que un no s'ha d'imaginar l'esfera-límit com a un pla euclidià veritable. En la geometria ordinària, tampoc es podria concloure, de que l'element lineal d'una superfície sigui reductible a la forma $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, que aquesta superfície és un pla: podria ser també un cilindre, un con o qualsevol altre superfície desenvolupable. En la geometria abstracte un ha de

[14] Beltrami especifica unes línies més avall que quan parla de *curvatura* és refereix a la *mesura de curvatura* de Gauss.

dir el mateix, és a dir, que la superfície de curvatura nul·la és idèntica, no per la seva forma sinó per les seves propietats mètriques al pla euclidià, sobre el que un pot dir que és desenvolupable, o *construïble* en cas del mot primitiu (crec). Jo, per la meva banda, diria que la esfera-límit és una de les formes sobre les que el pla euclidià existeix dins de l'espai no euclidià, *considerant el pla euclidià com definit per la propietat de tenir curvatura nul·la.*

[Beltrami a Hoüel, Bologne 1/4/69[15]]

A la seva carta del 12 d'octubre del mateix any, torna a parlar de la identitat de les superfícies amb el mateix element lineal:

L'élément de l'horisphère est de la forme

$$ds = const. \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2} \qquad (pag. 21)$$

c'est-à-dire de même forme que celui du plan *euclidien*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Or j'admets, comme un principe incontesté jusqu'ici, que deux surfaces, dont les éléments linéaires sont réductibles à une même expression, sont superposables, *par simple flexion sans extension*, l'une sur l'autre, et je formule par conséquent l'identité, *sous ce point de vue*, de l'horisphère avec le plan *euclidien.*

L'element de l'horosfera és de la forma

$$ds = const. \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2} \qquad (pag. 21)$$

això és, de la mateixa forma que el del pla *euclidià*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ara bé, jo admeto, com a principi indiscutible fins aquí, que dues superfícies, amb els seus elements lineals reductibles a una mateixa expressió, són superposables, *per simple flexió sense extensió*, l'una sobre l'altra, i formulo com a conseqüència, la identitat, *des d'aquest punt de vista*, de l'horosfera amb el pla *euclidià.*

[15] A [23], p. 87-88.

[Beltrami a Hoüel, Bologne 12/10/69[16]]

El principi "indiscutible" del que parteix Beltrami no és altre que l'exposat per Gauss al *Disquisitiones*: l'element lineal defineix la mètrica de la superfície, per tant, dues supefícies amb la mateixa mètrica són intrísecament iguals, es poden desenvolupar l'una sobre l'altra.

A la següent carta que escriu a Hoüel, diu:

> Vous dites qu'on ne voit pas assez si je me place dans l'hypothèse euclidienne ou dans celle d'un espace de courb. neg. const. Pour répondre catégoriquement à cette question je declare tout de suite que, dans le passage dont il s'agit, j'entends me maintenir toujours dans la seconde hypothèse. Ce n'est, en quelque sorte, que par un hasard, que l'on rencontre, parmi les lieux géométriques existant dans cette seconde hypothèse, une surface que partage la propriété la plus *essentielle* du plan euclidien, c'est-à-dire la *nullité de la courbure*, dont découle nécessairement l'identité de la trigonométrie des triangles géodésiques de cette surface avec la trigonométrie plane *ordinaire*. Mais le plan non-euclidien, que j'appelle *surface de premier ordre*, continue toujours d'avoir sa géométrie à lui, c'est-à-dire la géometrie des surfaces de courbure constante negative, qui ne saurait être celle des figures horisphériques, et que l'on peut appeler planimétrie non-eucl.
> [...]
> Par conséquent, la seule définition analytique *essentielle* de la surface sur laquelle existent les figures de la planimétrie ordinaire, ne peut être que celle de la *nullité de la courbure*, qui en effet caractérise *toutes* les surfaces développables. Voilà pourquoi, quan je rencontre, dans la géométrie des spaces de courbure constante, une surface (l'-horisphère) dont la forme de l'élément linéaire montre la nullité de la courbure, j'en conclus immédiatement que la géométrie est la même que celle du plan *euclidien*, non pas parce que sa forme actuelle soit celle d'un tel plan, mais parce qu'elle pourrait être appliquée sur un plan eucl., à l'aide de simples flexions sans extensions (comme pour les surfaces développables), *quand on la supposerait isolée de l'espace non-euclidien et existant par elle seule*, ainsi que l'est toute surface qui n'est donnée par autre chose que par l'expression analytique de son élément linéaire.

Dieu que no es veu tampoc si em situo dins de la hipòtesi euclidi-

[16] A [23], p. 100.

> ana o dins de la d'un espai de curv. neg. const. Per respondre categòricament a aquesta qüestió declaro de seguida que, en el passatge al que es refereix, em mantinc sempre dins la segona hipòtesi. No és més que una casualitat, per dir-ho d'alguna manera, que un troba, entre els llocs geomètrics existents en aquesta segona hipòtesi, una superfície que comparteix la propietat més *essencial* del pla euclidià, és a dir la *nul·litat de la curvatura*, del que es deriva la identitat de la trigonometria dels triangles geodèsics d'aquesta superfície amb la trigonometria plana *ordinària*. Però el pla no euclidià, que jo anomeno *superfície de primer ordre*, contínua tenint la seva pròpia geometria dins seu, és a dir la geometria de les superfícies de curvatura constant negativa, que és la de les figures horosfèriques, i que la podem anomenar planimetria no euclidiana.
> [...]
> Consequentment, la única definició analítica *essencial* de la superfície sobre la que existeixen les figures de la planimetria ordinària, no pot ser altra que la de la *nul·litat de la curvatura*, que en efecte caracteritza *totes* les superfícies desenvolupables. Aquesta és la raó per la que, quan em trobo dins de la geometria dels espais de curvatura constant, una superfície (l'horosfera) en la que la forma de l'element lineal mostra la nul·litat de la curvatura, concloc immediatament que la geometria és la mateixa que la del pla *euclidià*, no perque la seva forma actual sigui la d'aquest pla, sinó perque es podria aplicar sobre un pla eucl., mitjançant simples flexions sense extensions (com per les superfícies desenvolupables), *quan un la suposi aïllada de l'espai no euclidià i existent per ella sola*, com ho és tota superfície donada només per l'expressió analítica del seu element lineal.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 25/10/69[17]]

En el cas de les superfícies de curvatura constant, la posibilitat de desenvolupar localment una superfície sobre una altra depén només de la curvatura, o dit d'una altra manera, dues superfícies de curvatura constant K_1 i K_2 es poden desenvolupar l'una sobre l'altra si i només si $K_1 = K_2$. La curvatura, és doncs, un invariant que classifica. En particular, com diu Beltrami, la curvatura nul·la caracteritza totes les superfícies desenvolupables sobre un pla. Així, com que de l'element lineal de l'horosfera, es dedueix que la seva curvatura és zero, aquesta té la mateixa geometria que el pla euclidià. Beltrami torna a puntualitzar que això no vol dir que les superfícies siguin iguals, en

[17] A [23], p. 102-103.

el sentit de que tinguin la mateixa forma, però sí que seran desenvolupables l'una en l'altre.

Al primer paràgraf dels que acabem de citar, Beltrami explica que tant el pla no euclidià com l'horosfera són dues superfícies de l'espai de curvatura constant negativa. Les propietats mètriques de cadascuna d'elles es poden estudiar de manera intrínseca, seguint el punt de vista de Gauss, i venen determinades per la curvatura. En el cas de l'horosfera, la curvatura és zero, i per tant, la seva geometria coincideix amb la del pla euclidià, i en el cas del pla no euclidià, o superfície de primer ordre, com l'anomena Beltrami, la curvatura és la mateixa que la de l'espai. Beltrami havia explicat també a Hoüel a l'anterior carta de l'1 d'abril que en l'espai no euclidià hi ha infinites superfícies amb diferents curvatures constants intermitges entre aquestes dues:

> Par conséquent il y a bien, sous le rapport de la courbure, une infinité de surfaces (de courbure négative constante) intermédiaires entre le plan non-euclidine (ou surface de 1^er ordre) et la sphère limite, mis ces surfaces ne sont plus des plans non-euclidiens, elles sont des sphères non-euclidiens, dont le rayon varie depuis la valeur constante jusque à l'infini.
>
> Conseqüentment hi ha, en relació a la curvatura, una infinitat de superfícies (de curvatura negativa constant) intermitges entre el pla no euclidià (o superfície de 1^er ordre) i l'esfera límit, aquestes superfícies ja no són plans no euclidians, són esferes no euclidianes, amb radi que vara des del valor constant fins a l'infinit.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 1/4/69[18]]

Tot plegat devia crear una nova confusió a Hoüel, com es desprén de la següent carta de finals d'any:

> Si vous prenez la peine de relire quelques unes de mes lettres les plus récentes, vous verrez que jamais je n'ai admis la *possibilité de concevoir la coexistence du plan euclidien avec une horisphère courbe* (je souligne la phrase par laquelle vous formulez votre difficulté). Le plan euclidien, considéré dans l'ensemble de ses propriétés, savoir tel qu'on le considère dans les cours élémentaires de géométrie, n'existe pas dans l'espace de courbure constante négative. [...] Or de ce que l'expressi-

[18] A [23], p. 87-88.

on analytique de l'élément de l'horisphère est réductible à la forme de celui du plan ordinaire, je conclus en particulier que la théorie métrique des figures formées sur l'horisphère par des lignes géodésiques est identique avec celle des figures formées de la même manière sur un plan ordinaire par des dorites [...]

> Si es pren el treball de llegir algunes de les meves cartes més recents, veurà que mai he acceptat la *possibilitat de concebre la coexistència del pla euclidià amb una horosfera curva* (emfatitzo la frase amb la que formula la seva dificultat). El pla euclidià, vist en totes les seves propietats, aquelles que es consideren en els cursos de geometria elemental, no existeix en l'espai de curvatura constant negativa.[...] Ara bé, de que l'expressió analítica de l'element de horisphère sigui reductible a la forma de la del pla ordinari, concloc, en particular, que la teoria mètrica de les figures formades sobre l'horosfera per línies geodèsiques és idèntica a la de les figures formades de la mateixa manera sobre un pla ordinari per rectes [...]
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 19/12/69[19]]

Un altre aspecte fonamental que Beltrami intenta explicar a Hoüel és que la curvatura de Gauss és una propietat local i intrínseca de les superfícies, i que en realitat, l'expressió donada per Gauss és independent de les coordenades que es prenguin:

> Jusqu'ici je n'entends par *courbure* (en un point) que la valeur de l'expression connue, k, de Gauss, qui a la propriété d'être tout a fait indépendante des variables que l'on emploie, et qui appartient, par conséquent, à quelque chose d'intimement lié avec la véritable nature de la surface.
>
> Fins aquí entenc per *curvatura* (en un punt) el valor de la coneguda expressió de Gauss, k, que té la propietat de ser totalment independent de les variables que es facin servir, i que, com a conseqüència, està intimament lligada a la veritable natura de la superfície.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne, 22/4/69[20]]

[19] A [23], p. 108.

[20] A [23], p. 92. Veure també la carta de Beltrami a Hoüel, Bologne, 13/3/69, a [23], p. 79.

5.2 Geodèsia i Geometria no Euclidiana

Durant els anys que va ser professor de Geodèsia a la Universitat de Pisa (1864 - 1866), Beltrami es va dedicar a l'estudi de les cartes geogràfiques. Relacionat amb la problemàtica de fer mapes fiables, ja havia traduït l'article de Gauss [43][21], que tracta les transformacions conformes, concretament, la possibilitat d'aplicar una superfície sobre una altra de manera que les figures siguin infinitesimalment similars.

Partint d'un comentari fet per Lagrange[22]:

> Au reste des Cartes géographiques construites d'après cette projection auraient le grand avantage que tous les lieux de la Terre, qui sont situés dans un même grand cercle du globe, se trouveraient placés en ligne droite dans la Carte; en sorte que, pour avoir le plus courte chemin d'un lieu de la Terre a l'autre, il n'y aurait qu'à joindre ces deux lieux dans la Carte par une ligne droite.
>
> Llevat d'això, les Cartes geogràfiques construïdes d'acord amb aquesta projecció tindrien el gran avantatge de que tots els llocs de la Terra situats dins del mateix gran cercle del globus, es trobarien col·locats en línia recta sobre el mapa; de manera que, per tenir el camí més curt d'un lloc a un altre a la Terra, només s'haurien d'unir aquests dos llocs al mapa per una línia recta.

Beltrami es planteja la possibilitat de representar una superfície sobre un pla de manera que les geodèsiques de la superfície es corresponguin amb rectes del pla, i exposa la solució del problema al seu article de 1866: *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette* [14]. Aquest estudi el conduirà a topar-se amb la geometria no euclidiana gairebé per casualitat:

> [...] gli è appunto per questa via che io sono entrato, senza volerlo e quasi sense saperlo, nelle dottrine di Lobatschewsky[...]

[21] La traducció de Beltrami: *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*, Annali di matematica pura ed applicata, **4**, 1861, p. 214-232.

[22] A l'article *Sur la construction des cartes géographiques* de 1779, [72].

> [...] és precisament per aquesta via que he entrat sense voler-ho i quasi sense saber-ho, en les doctrines de Lobatxevski[...]
>
> [Beltrami a D'Ovidio, 25/12/1872[23]]

L'article s'inicia amb l'observació de que les cartes geogràfiques, és a dir, els mapes, normalment es fan conservant els angles o les relacions entre les àrees, però que, per segons quin tipus de problemes relacionats amb la distància, seria més natural considerar aplicacions que transformin les geodèsiques en rectes, com la projecció central de l'esfera sobre el pla tangent.

A continuació, considera x, y les coordenades ortogonals del pla i X, Y les coordenades curvilínies de la superfície. Les fórmules que relacionen els punts de la superfície amb els del pla, venen donades per:

$$x = u(X, Y) \quad \text{i} \quad y = v(X, Y).$$

Si llavors acceptem la hipòtesi de que les corves són geodèsiques si i només si es corresponen amb rectes del pla. Tenim que a cada recta $ax + by + c = 0$ del pla li correspon una geodèsica de la superfície, que vindria expressada per l'equació:

$$au(X, Y) + bv(X, Y) + c = 0.$$

Aquesta condició es equivalent a la següent equació diferencial[24]:

$$du\, dv^2 - dv\, du^2 = 0.$$

Observem que busquem un element de longitud

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

amb $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$ i $G = G(u, v)$, on (u, v) són les coordenades curvilínies desconegudes de la superfície respecte de les quals les geodèsiques són rectes. Llavors, si es pren la següent fórmula per les geodèsiques, que Beltrami havia donat a la seva memòria anterior [12]:

$$\begin{aligned} 0 &= (EG - F^2)(dud^2v - dvd^2u) \\ &+ (Edu + Fdv)[(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v})du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}dudv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2] \\ &- (Fdu + Gdv)[(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u})dv^2 + \frac{\partial E}{\partial v}dudv + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2] \end{aligned}$$

[23] Citada per G. Loria a [78], p. 421. Aquesta carta es publicada per primer cop per D'Ovidio a la seva commemoració de Beltrami [38].

[24] Derivant dos cops $au + bv + c = 0$, veiem que ha de ser $du\, dv^2 - dv\, du^2 = 0$ o $a = b = 0$.

veien que perquè l'equació es redueixi a la forma $du\,dv^2 - dv\,du^2 = 0$, els dos últims termes s'han d'anul·lar, és a dir, els coeficients de du^3, $du^2\,dv$, $du\,dv^2$, dv^3, han de ser zero.

Així, el problema es redueix al següent sistema de quatre equacions en derivades parcials que involucren els coeficients de la mètrica:

$$E(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}) - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} = 0,$$
$$\begin{array}{rcl} E\frac{\partial G}{\partial u} + F(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}) - F\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} & = & 0, \\ G\frac{\partial E}{\partial v} + F(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}) - F\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} & = & 0, \end{array}$$
$$G(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}) - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

El problema no es pot resoldre de manera general, ja que hi ha més equacions que funcions a determinar, així que només es complirà en unes determidades condicions. Beltrami integra el sistema amb moltes dificultats i molta astúcia, arribant a la famosa expressió de la mètrica que el portarà a la geometria hiperbòlica només canviant R^2 per $-R^2$. Concretament:

$$\begin{array}{rcl} E & = & \frac{R^2(v^2+a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2} \\ F & = & \frac{-R^2uv}{(u^2+v^2+a^2)^2} \\ G & = & \frac{R^2(u^2+a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2} \end{array}$$

on R és una constant arbitrària. Busca llavors les propietats absolutes comunes de les superfícies amb aquesta mètrica, començant per la curvatura que, amb un càlcul elemental, mostra que és la constant $1/R^2$.

Conclou el seu treball fent veure que aquelles superfícies en les que les línees geodèsiques poden ser representades per rectes són aquelles de curvatura constant, positiva, negativa o zero:

> Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano, in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta, sono quelle la cui curvatura è dovunque costante

> (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall'ordinaria omografia. Quando non è nulla, questa legge è riducibili alla projezione centrale nella sfera ed alle sue transformazioni omografiche.

> Les úniques superfícies susceptibles de ser representades sobre un pla, de manera que a cada punt correspongui un punt i a cada línia geodèsica una línia recta, són aquelles amb qualsevol curvatura constant (positiva, negativa o nul·la). Quan aquesta curvatura constant és nul·la, la llei de correspondència no difereix de l'homografia ordinària. Quan no és nul·la, aquesta llei és reductible a la projecció central en l'esfera i a les seves transformacions homogràfiques.

L'article finalitza sense que Beltrami hagi fet cap comentari sobre geometria no euclidiana. No serà fins un parell d'anys més tard, quan al *Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea* [15] mostra com l'aplicació dels resultats que ha aconseguit porten a la geometria de Lobatxevski.

Concretament, pren el següent element lineal:

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2 - u^2)dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$$

que resulta de canviar a la mètrica que ha trobat, les dues constants que hi apareixen, R i a, per Ri i ai respectivament, és a dir, R^2 per $-R^2$ i a^2 per $-a^2$. Aquest element lineal defineix una superfície de curvatura constant negativa $-1/R^2$, amb una determinada geometria intrínseca que coincideix amb la de Lobatxevski.

Beltrami explica en diverses ocasions com aquest estudi sobre geodèsia va originar les idees que exposa al *Saggio*:

> Le diró anche, e questo potrà giovare al di lei scopo, l'ordine cronologico dei miei studi in argomento. Dapprima un'osservazione, buttata là da Lagrange in una delle sue Memorie sulle carte geografiche, mi ha condotto a cercare se ci fossero superficie rappresentabili sopra un piano, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da linee rette; il che è quanto dire, superficie rapprasentabili con coordinate curvilinee u e v, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da un'equazione lineare in u e v. Nella citata *Memoria* del 66 ho trovato che tali superficie dovevano avere necessariamente la curvatura constante (positiva, negativa o nulla). Più tardi, nel *Saggio*,

ho mostrato, *partendo da questo fatto*, che nella ipotesi della curvatura *negativa* la Geometria di queste superficie è identica a quella di Gauss e di Lobatschewsky. curvatrua costante.

Li diré també, i això podrà beneficiar el seu objectiu, l'ordre cronològic dels meus estudi sobre la qüestió. Primer una observació, deixada anar per Lagrange a una de les seves Memories sobre les cartes geodèsiques, em va conduir a buscar si hi havia superfícies representables sobre un pla, de manera que les seves línies geodèsiques fossin representades per línies rectes; que és el mateix que dir, superfícies representables amb coordenades curvilínies u i v, de manera que les seves línies geodèsiques fossin representades per una equació lineal en u i v. En la citada *Memoria* del 66 vaig trobar que aquestes superfícies havien de tenir necessàriament la curvatura constant (positiva, negativa o nul·la). Més tard, al *Saggio*, vaig demostrar, *partint d'aquest fet*, que en la hipòtesi de la curvatura *negativa* la Geometria d'aquestes superfícies és idèntica a la de Gauss i Lobatxevski.

[Beltrami a D'Ovidio, 25/12/1872[25]]

I a la seva primera carta adreçada a Hoüel, amb la que li envia tots dos articles, el *Saggio* i el *Risoluzione*, escriu:

Je prens la liberté de vous adreser, sous bande, deux mémoires dont l'un a pour objet une construction réelle de la géometrie non-euclidienne, et l'autre, beaucoup moins recent, contient la démonstration de quelques résultats analytiques, sur lesquels cette construction est appuyée, mais n'a pas, hors cela de rapport immédiat avec la question dont il s'agit.

M'he pres la llibertat d'adreçar-li, a banda, dues memòries, de les que una té per objectiu una construcció real de la geometria no euclidiana, i l'altre, molt menys recent, conté la demostració d'alguns resultats analítics, sobre els que es recolça aquesta construcció, però no té, fora d'això cap relació immediata amb la qüestió de la que es tracta.

[Beltrami a Hoüel, Bologne 18/11/68[26]]

[25]Citada per G. Loria a [78], p. 421. Aquesta carta es publicada per primer cop per D'Ovidio a la seva commemoració de Beltrami [38].

[26]A [23], p. 65.

5.3 El Saggio

Beltrami va escriure el *Saggio* un any abans de la seva publicació. Inicialment, havia decidit no publicar-lo degut a una objecció que li feu Cremona, referida a si es podia utilitzar l'anàlisi ordinària, fonamentada en la geometria euclidiana, per tractar nocions de geometria no euclidiana. Les seves reticències desapareixeran quan llegeixi la memòria pòstuma de Riemann, el seu coneixement és el que el va empènyer a publicar el seu estudi[27].

> L'anno scorso, quando nessuno sapeva di questo lavoro fondamentale de Riemann, io aveva comunicato all'ottimo Cremona un mio scritto nel quale davo un interpretazione della planimetria non-euclidea, che mi sembrava soddisfacente. Il Cremona non ne giudicò diversamente, ma mi fece una obbiezione di massima, dicendomi che poichè io usavo l'ordinaria analisi, che è fondata dal concetto euclideo, non potevo tenermi certo che con ciò solo io non avessi pregiudicato il finale risultamento.
> Questo discorso per verità non mi soddisfaceva, perchè mi pareva che quando uno spiega un nuovo fenomeno col mezzo dei leggi note, non si puè legittimamente pretendere che egli debba ancora provare non potersi lo stesso fenomeno spiegare con altre leggi, rimote dalle comuni. In questo caso non vi potrebbe mai essere alcuna ipotesi scientificamente provata. Comunque sia, quell'obbiezione fece sì che io lasciassi dormire lo scritto, e di ciò sono ora contento perchè alla fine del medesimo avevo arrischiato un giudizio sulla stereometria non-euclidea, che adesso non credo equo. Ma lo scritto, purgato di questo fallo, uscirà sul Giornale di Napoli, nella sua forma originale, salvo qualche aggiunta che posso azzardare ora, perchè sostanzialmente concordante con alcune delle idee di Riemann.

> L'any passat, quan ningú coneixia aquest treball fonamental de Riemann, jo vaig comunicar a l'excel·lent Cremona un escrit meu en el que donava una interpretació de la planimetria no euclidiana, que em semblava satisfactòria. En Cremona no ho va jutjar diferent, però em va fer una objecció fonamental, dient-me que com que utilitzava l'anàlisi ordinària, que està fundada en el concepte euclidi, no podia

[27] A més de la carta que citem a continuació, Beltrami menciona els seus dubtes en una carta anterior a Genocchi, Bologna 9/6/1868, citada per G. Loria a [78], p. 415, amb la que li envia la seva traducció de l'esmentada memòria de Riemann. També en parla a la seva carta a Hoüel del 18/11/1868, veure [23], p. 66.

> estar segur que només amb això no hagués perjudicat els resultats finals.
> Aquest discurs, la veritat és que no em satisfeia, perquè em semblava que quan un explica un fenomen nou per mitjà de les lleis conegudes, no es pot pretende legítimament que també hagi de provar que no es pot explicar el mateix fenomen amb altres lleis, diferents de les comuns. En aquest cas no es podria mai provar cap hipòtesi científica. Sigui com sigui, aquella objecció va fer que deixés dormir l'escrit, i estic content d'haver-ho fet, perquè al final del mateix havia arriscat un judici sobre l'estereometria no euclidiana, que ara no crec just. Però l'escrit, purgat d'aquesta errada, surtirà al Giornale de Nàpols, en la seva forma original, tret d'algun afegit que ara puc aventurar, perquè sustancialment concorda amb algunes de les idees de Riemann.
>
> [Beltrami a Genocchi 23/7/1868[28]]

Passem ara a comentar els principals resultats del *Saggio*. L'article s'introdueix amb el comentari de que les noves idees en relació a les geometries no euclidianes s'estan imposant en el món matemàtic, i fent referència a l'acceptació per part de Gauss que mostren les seves cartes. Parla també de geometria esfèrica per remarcar l'existència de geometries no-euclidianes.

Com deiem a l'apartat anterior, el punt de partida del *Saggio* és el *Risoluzione*, on Beltrami ha vist que de les úniques superfícies de les quals es poden fer mapes plans on les geodèsiques tinguin equacions lineals, i corresponguin doncs a rectes d'aquest pla, són les de curvatura constant. En aquesta ocasió, Beltrami es proposa estudiar les superfícies en que la curvatura constant és negativa, a les que anomenarà, més endavant, superfícies pseudoesfèriques.

Beltrami parteix de la següent fórmula de l'element de longitud:

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2 - u^2)dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$$

És fàcil veure que, llavors, la curvatura de Gauss de la supertícIe és la constant $-1/R^2$. Beltrami demostrarà que la geometria intrínseca definida per aquesta mètrica en una superfície abstracta de curvatura constant negativa, és precisament la desenvolupada per Lobatxevski.

[28]Citada per G. Loria a [78], p. 415-416. Els originals de les cartes de Beltrami a Angelo Genocchi es troben a la Biblioteca Comunale Passerini-Landi di Piacenza.

L'expressió s'aconsegueix fent l'analogia de Lambert a la fórmula de l'element lineal que havia trobat al *Risoluzione*, tal i com explica a la nota I del *Saggio*[29]

> Ma siccome i valori delle costanti R ed a sono realmente arbitrari, così è lecito supporli anche immaginari, se conviene. Ed infatti cambiando quelle costanti in $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'elemento lineare risultante corrisponde ad una superficie di curvatura costante negativa $-1/R^2$, le cui linee geodetiche non cessano di essere, come nel caso precedente, rappresentate nel piano da linee rette, e quindi date da equazioni lineari rispetto ad u, v.

> Però com que els valors de les constants R i a són totalment arbitraris, és lícit suposar-los també imaginaris, si convé. I de fet, canviant aquestes constants per $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'element lineal resultant correspon a una superfície de curvatura constant negativa $-1/R^2$, amb línies geodèsiques que no deixen de ser, com en el cas precedent, representades en el pla per línies rectes, i per tant donades per equacions lineals de u, v.

Observem que el denominador només està definit a l'interior (o exterior) del disc de radi a. Continua dient que els dos sistemes de coordenades $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ estan formats per línies geodèsiques que formen entre elles l'angle θ, donat per les fórmules:

$$\cos\theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}, \qquad \sin\theta = \frac{a\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}.$$

Pels casos $u = 0$ i $v = 0$, $\theta = 90^o$; i per tant els sistemes de geodèsiques $u = const.$ i $v = const.$ són ortogonals a $v = 0$ i $u = 0$, respectivament. Pel que es té que el sistema de coordenades donat per u, v constitueix una generalització del mètode cartesià. Aquestes darreres expressions només són admisibles si $u^2 + v^2 \leq a^2$.

Parla, llavors, de la representació d'aquesta superfície abstracta en el pla[30]:

> Quindi se indichiamo con x, y le coordinate rettangolari dei punti di un piano ausiliare, le equazioni $x = u$, $y = v$, stabiliscono una rap-

[29] *Saggio*, p. 126. Els nombres de pàgines als que ens referirem són de la versió digitalitzada de l'article [15]: http://www.caressa.it/pdf/beltrami01.pdf.

[30] *Saggio*, [15], p. 5 de la versió digital.

> presentazione della regione considerata, rappresentazione nella quale a ciascun punto di quella regione corrisponde un punto unico e determinato del piano e reciprocamente; e tutta la regione trovasi rappresentata dentro un cerchio di raggio a col centro nell'origine delle coordinate, che chiamiamo *cerchio limite*. In questa rappresentazione le geodetiche della superficie sono rappresentate dalle corde del cerchio limite,[...]
>
> Per tant, si indiquem amb x, y les coordenades rectangulars dels punts d'un pla auxiliar, les equacions $x = u$, $y = v$, estableixen una representació de la regió considerada, representació en la que a cada punt d'aquella regió correspon un punt únic i determinat pel pla i recíprocament; i tota la regió es troba representada dins d'un cercle de radi a amb el centre en l'origen de les coordenades, que anomenem *cercle límit*. En aquesta representació les geodèsiques de la superfície són representades per les cordes del cercle límit, [...]

És a dir, que les superfícies de curvatura constant negativa es poden representar per un disc, la vora del qual Beltrami anomena *cercle-límit*, de tal manera que les geodèsiques de la superfície s'apliquen a les cordes d'aquest disc.

Ara Beltrami es planteja com està limitada sobre la superfície la regió a la que s'apliquen les seves consideracions. Calcula la distància ρ d'un punt (u, v) a l'origen $u = 0, v = 0$:

$$\rho = \frac{R}{2} \ln \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}$$

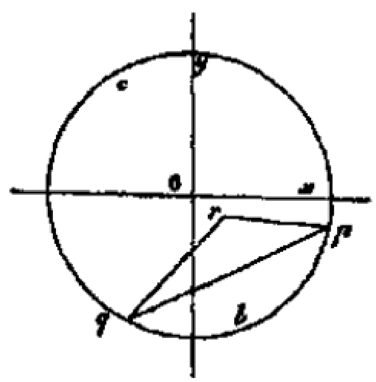
de la qual es desprèn trivialment que els punts (u, v) tals que $u^2 + v^2 = a^2$, que són justament els punts del cercle límit, corresponen a punts que estan a distància infinita del punt de la superfície de coordenades $u = 0$, $v = 0$. Per això es diu que els punts del cercle límit són els punts de l'infinit, i aquest es pot considerar com un cercle geodèsic de centre $u = v = 0$ i radi infinitament gran. Més enllà d'aquest cercle hi trobem la part imaginària de la superfície.

Acaba veient que com que a l'interior del disc dos punts qualssevol determinen una única corda, els dos punts corresponents de la superfície determinen una única geodèsica. Respon així a la pregunta que s'havia formulat anteriorment[31], de si en les superfícies de curvatura constant negativa passava com a les de positiva que dos punts no determinen un única geodèsica. Veien doncs que l'axiomàtica d'Euclides (dos punts determinen una única recta) s'aplica aquí millor que a l'esfera.

A la secció següent, troba la fórmula que per l'angle de dues geodèsiques i dóna la següent classificació de les geodèsiques:

I. Si dues cordes diferents es tallen dins del cercle-límit, les geodèsiques corresponents es tallaran en un punt a distància finita sota un angle diferent de 0º i de 180º.
II. Si es tallen a la perifèria del cercle-límit, les dues geodèsiques concórren a un mateix punt a distància infinita on formen un angle nul.
III. I si es tallen fora del cercle-límit, o són paral·leles, les geodèsiques no tenen cap punt en comú en tota l'extensió real de la superfície.

Considera, llavors, una corda pq del cercle límit i un punt r interior al disc que no pertany a la corda.



Els segments rp i rq, són paral·lels a la corda pq, perque la tallen a l'infinit, és a dir, als punts p i q del cercle límit. Per tant, pel punt r passen dues paral·leles a pq, el que concorda amb el tret característic de la geometria no euclidiana, que per un punt exterior a una recta donada passa més d'una paral·lela a aquesta recta. De fet, el nombre de paral·leles que passen pel punt r és infinit, totes aquelles que uneixen r amb els punts de l'arc pcb, rp i rq determinen el pas de les cordes que intersequen pq de les que no.

[31] *Saggio*, [15], p. 4 de la versió digital.

Beltrami, considerant les geodèsiques corresponents a les cordes anteriors, conclou[32]:

> [...] si può enunciare il risultato dicendo che: da ogni punto (reale) della superficie si possono sempre condurre *due* geodetiche (reali) parallele ad una medesima geodetica (reale) che non passi per quel punto, e queste due geiodetiche fanno tra loro un angolo differente tanto O^{o} quanto da 180^{o}.
> Questo risultato s'accorda, salva la diversità delle espressioni, con quello che forma il cardine della geometria non-euclidea.

> [...] es pot enunciar el resultat dient que: per cada punt (real) de la superfície es poden *dues* geodèsiques (reals) paral·leles a una mateixa geodèsica (real) que no passa per aquest punt, i que aquestes dues geodèsiques formen entre elles un angle diferent de tant de 0^{o} com de 180^{o}.
> Aquest resultat concorda, tret de la manera d'expressar-lo, amb aquell que constitueix l'eix de la geometria no euclidiana.

Continua veient com s'interpreten altres resultats no euclidians, en la geometria pseudoesfèrica. Comença estudiant els triangles geodèsics. Explica que la constant k, que Gauss considerava que es podia determinar per l'experiència, no és altre cosa que el radi de la seva superfície pseudo-esfèrica[33]. Després fa trigonometria, obtenint les mateixes fórmules que Lobachevsky i troba la fórmula de l'angle de paral·lelisme[34]. Llavors, Beltrami insisteix:[35]:

> Il risultati precedenti ci sembrano manisfestare pienamente la corrispondenza vigente fra planimetria non-euclidea e la geometria pseudoesferica.

> Els resultats precedents semblen manifestar plenament la correspondència vigent entre la planimetria no euclidiana i la geometria pseudoesfèrica.

I per reforçar aquesta coincidència, calcula l'àrea d'un triangle, trobant que el defecte és l'àrea dividida pel radi al quadrat.

[32] *Saggio*, [15], p. 9 de la versió digital.

[33] Beltrami fa referència a la carta de Gauss a Schumaker de 12 de juliol de 1831 (p. 11), en la que li diu que el semiperímetre d'un cercle no euclidià de radi ρ està donat per $\frac{1}{2}\pi k(e^{\rho/k} - e^{-\rho/k})$, on k és una constant.

[34] Aquí Beltrami es refereix a Battaglini, dient que la fórmula coincideix amb la obtinguda pel napolità a [8].

[35] *Saggio*, [15], p. 14 de la versió digital.

Passa després a estudiar les circumferències geodèsiques. Beltrami defineix els cercles geodèsics com les trajectòries ortogonals a les geodèsiques que parteixen d'un punt. Aquest punt és el centre de les circumferències i pot ser real, ideal o infinit, depenent de si els segments que representen a les geodèsiques convergeixen a l'interior, a l'exterior o a la frontera del cercle-límit.

En la representació del disc, els cercles serien doncs les trajectòries ortogonals a les cordes i venen donades per l'equació:

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C,$$

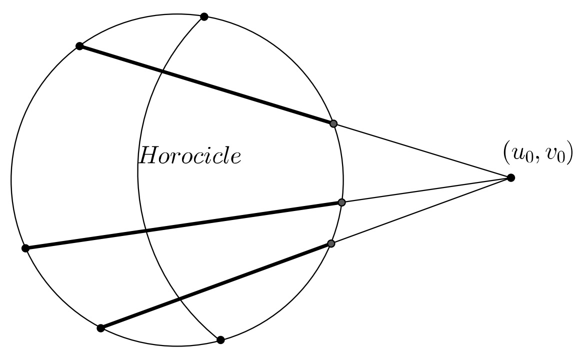
on C és una constant i (u_0, v_0) és el punt del que parteixen les cordes.

En el primer cas, en que el centre és real, les trajectòries són cercles.

En el segon cas, el centre és ideal, és a dir, el punt (u_0, v_0) està fora del cercle, la constant C és 0, i l'equació $a^2 - uu_0 - vv_0 = 0$, representa una corda del cercle, que és la polar del punt (u_0, v_0).Beltrami observa que sobre l'esfera les dues idees de *circumferència geodèsica* i *corba paral·lela a una línia geodèsica* coincidixen completament, però que sobre la superfície pseudoesfèrica aquests coceptes són diferents. Veu que entre les circumferències geodèsiques que tenen el mateix centre ideal, existeix una i només una geodèsica real, tal que les esmentades circumferències es poden definir també com a corbes paral·leles a aquesta geodèsica. I menciona que Battaglini ja coneixia aquesta propietat[36]

El darrer cas, en que les geodèsiques convergeixen en un punt de l'infinit i per tant, les circumferències geodèsiques tenen centre en l'infinit, es correspon amb els horocicles de Lobatxevski, és a dir són les trajectòries ortogonals a un feix de rectes paral·leles.

[36]Beltrami cita el *Sulla* [8], p.228, puntualitzant que Battaglini fa servir un llenguatge diferent.



Beltrami veu, llavors, que en cada cas, es pot aplicar una part de la superfície pseudoesfèrica en una superfície de revolució[37].

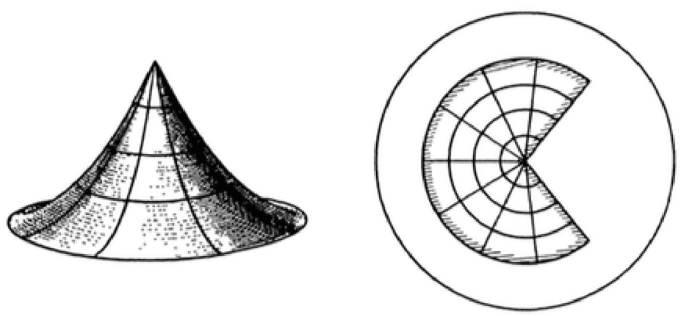


Figura 5.1: Elicoide

En el tercer cas, Beltrami troba que l'element lineal d'aquesta superficie és de la forma:

$$ds^2 = d\rho^2 + \exp -\frac{2\rho}{R} d\sigma^2$$

Aquest és l'element lineal de la pseudoesfera, la superfície de revolució generada per la tractriu, la línia de les tangents constants. Existeix, per tant, una isometria entre la pseudoesfera i una part limitada del pla de Lobatxevski. Llavors, un sistema d'horocicles concèntrics es transforma en el sistema de paral·lels de la pseudoesfera.

[37] Les imatges apareixen a l'edició de 1928 del *Nicht-Euklidische Geometrie* de F. Klein, [68], p. 286.
També podem veure els dibuixos fets a mà en el seu manuscrit *Nicht-Euklidische Geometrie, I, Vorlesung gehalten während des Wintersemester 1889-90*, Göttingen, 1893, que es troba digitalitzat a: https://archive.org/details/nichteuklidische01klei.

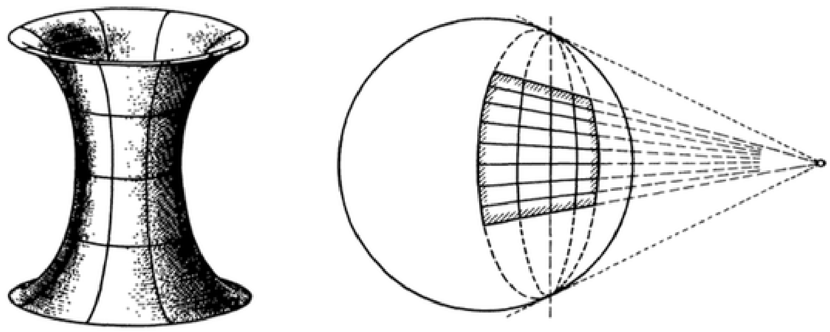


Figura 5.2: Catenoide

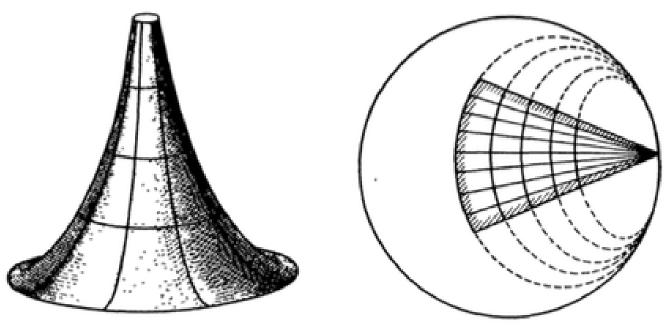


Figura 5.3: Pseudoesfera

Observem, com diu Gray[38], que Beltrami al *Saggio* fa un canvi en la direcció de l'argument, respecte al del Risoluzione. En lloc de prendre l'esfera i ferne un mapa, pren el mapa i busca la figura que descriu, una superfície de dimensió 2 que té com a geometria intrínseca la de Lobatxevski.

Beltrami té molt clara la diferència entre la seva superfície pseudoesfèrica abstracta, que avui anomenariem varietat de Riemann de dimensió 2 amb curvatura constant negativa, i la seva realització a $\mathbb{R}^3$: la pseudoesfera. Però sovint, la seva nomenclatura, porta a confusió. Fem algunes aclaracions.

Com hem vist, la pseudoesfera és localment isomètrica a un tros del disc de Beltrami, és a dir, podem tallar-la i obrir-la, i posar-la sobre un tros del disc de Beltrami. De la mateixa manera que ho fem amb el cilindre i el pla i afirmem, llavors, que un tros de cilindre és un tros de pla. Però un

[38]A [48], p. 215.

cilindre no és un pla i, anàlogament, la pseudoesfera no és el disc de Beltrami. La pseudoesfera és un subconjunt de $\mathbb{R}^3$, amb la mètrica induïda de $\mathbb{R}^3$. Beltrami, en canvi, treballa només amb el disc i la mètrica que havia trobat al *Risoluzione* sense preocupar-se per la seva realització com a subconjunt de $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica induïda. Doncs, seguint les aportacions de Riemann, no cal conèixer l'aplicació de l'obert en $\mathbb{R}^3$ a partir de la que s'obtenen E, F i G. Beltrami, igual que Klein, és conscient de que la realització de les superfícies de curvatura constant negativa és només local[39]. Però, no serà fins uns anys més tard, que Hilbert demostrarà que no existeix dins l'espai euclidià una realització del pla no euclidià sencer.

Beltrami conclou el *Saggio*, tornant a insistir en que:

> Da quanto precede ci sembra confermata in ogni parte l'annunciata interpetrazione della planimetria non-euclidea per mezzo delle superficie di curvatura costante negativa.
>
> De tot el que precedeix sembla comfirmada en cada part l'anunciada interpretació de la planimetria no euclidiana per mitjà de les superfícies de curvatura constant negativa.

Després es refereix a l'extensió dels resultats obtinguts a dimensió 3:

> La natura stessa di questa interpetazione lascia facilmente prevedere che non ne può esistere una analoga, egualmente reale, per la stereometria non-euclidea[40].
>
> La mateixa natura d'aquesta interpretació deixa preveure fàcilment que no pot existir una anàloga, igualment real, per l'estereometria no euclidiana.

La raó que dóna és que, per fer l'interpretació de la planimetria no euclidiana, ha calgut recórrer a una superfície amb un element lineal que no es pot reduir a la forma $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, que carecteritza el pla euclidià. És a dir, hem necessitat la noció de superfície no aplicable al pla. Per tant, per interpretar l'estereometria, caldria, anàlogament, considerar un espai amb un element lineal no reduïble a $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

[39] Veure cartes de Beltrami a Helmholtz 24/04/1869, citada a [100], pag. 161, i a Hoüel 2/1/1870. Veure també la traducció de Hoüel de l'article de Klein de 1871, *Sur la géométrie dite non euclidienne*, [65], p. 345.

[40] *Saggio*, [15], p. 22 de la versió digital.

> E poichè finora la nozione di uno spazio diverso da questo sembra mancarci, od almeno sembra trascendere il dominio dell'ordinaria geometria, è ragionevole supporre che quand'anche le considerazioni analitiche alle quali si appoggiano le precedenti costruzioni siano suscettive d'essere estese dal campo di due variabili a quello di tre, i risultati ottenuti in quest'ultimo caso non possano tuttavia essere costruiti coll'ordinaria geometria[41].
>
> I ja que fins ara la noció d'un espai diferent d'aquest sembla que ens manca, o al menys sembla transcendir el domini de la geometria ordinària, és raonable suposar que encara que les consideracions analítiques en les que es recolzen les contruccions precedents siguin susceptibles de ser esteses del terreny de dues variables al de tres, els resultats obtinguts en aquest últim cas no es poden construir encara amb la geometria ordinària.

No obstant, veu possible un model analític, sense suport geomètric, per a l'estereometria, simplement introduint una variable més en la mètrica inicial:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{(a^2-t^2-u^2-v^2)^2}[(a^2-u^2-v^2)dt^2+(a^2-v^2-t^2)du^2 \\ &+ (a^2-t^2-u^2)dv^2+2uv\,du\,dv+2vt\,dv\,dt+2tu\,dt\,du]. \end{aligned}$$

i anuncia l'aparició de la *Teoria fondamentale* [16].

El *Saggio* va ser traduït immediatament al francès per Hoüel i publicat als *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, [57]. Les cartes entre els dos matemàtics parlen sovint sobre aquesta traducció i sobre la de la *Teoria fondamentale*. Hoüel consulta amb Beltrami dubtes que li van sorgint[42] i l'italià suggereix alguns canvis per millorar els escrits[43].

Un altre tema recurrent en la correspondència entre els dos matemàtics és la construcció material de la superfície pseudoesfèrica. Beltrami va dedicar temps i esforços a aquest projecte, que considerava de gran importància. La seva finalitat és donar la possibilitat de visualitzar les propietats geomètriques

[41] *Saggio*, [15], p. 23 de la versió digital.

[42] Ja hem vist alguns exemples al primer apartat d'aquest capítol.

[43] Veure la carta a Hoüel del 29/07/1869, a [23], p. 96-97. També fa referència a afegir aclaracions a les cartes del 1/10/69, [23], p. 99, del 12/10/69, a[23], p. 101, i del 19/11/69, p. 105-107.

d'aquestes superfícies, el que li permet verificar alguns resultats i trobar nous teoremes[44]. El primer model que construeix el descriu a la carta a Hoüel del 13 de març de 1869[45], on menciona també un resultat "molt elegant" al que ha arribat fent aquesta labor[46]. El 22 d'abril tornarà a escriure a Hoüel dient que ha acabat una construcció que vol enviar a Cremona, aquest model es conserva al Departament de Matemàtiques de la Universitat de Pavia[47]. Beltrami no tornarà a treballar sobre el tema fins el 1872, quan publica *Sulla superficie di rotazione che seve di tipo alle superficie pseudosferiche*[48], exposant les seves recerques.

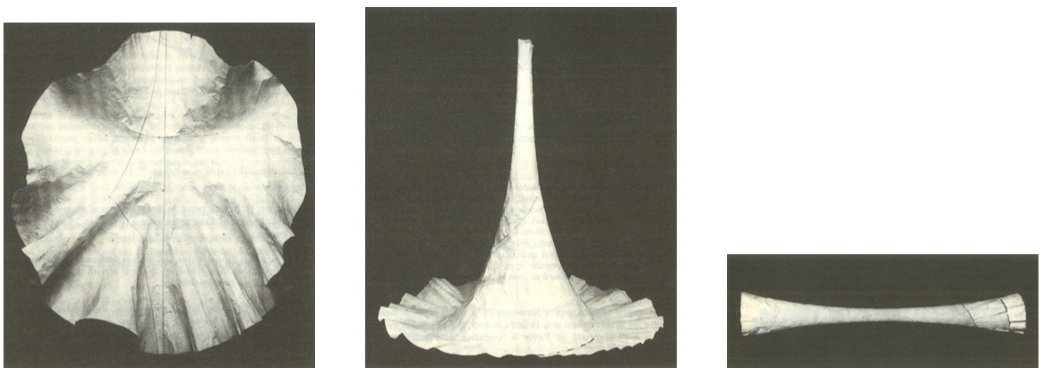


Figura 5.4: Model de superficie pseudoesfèrica conservat a Pavia. Es pot doblegar per obtenir les superfícies pseudoesfériques de tipus parabòlic i hiperbòlic.

5.4 Teoria Fondamentale degli spazii di curvatura costante

En el *Teoria fondamentale*, Beltrami fa servir la geometria diferencial per donar una interpretació analítica de l'estereometria no euclidiana, considerant-la com un cas de varietat de Riemann 3-dimensional de curvatura constant

[44]Veure les cartes a Hoüel del 13/3/1869, [23], p. 80-82, i del 25/3/1869, [23], p. 86

[45]A [23], p. 80-82

[46]El resultat es publica el 1872 en *Teorema di geometria pseudosferica*, Giornale di matematiche **10**, p. 53; Opere II, p. 63-73.

[47]Per tenir més informació sobre el model veure [23], p. 36-38.

[48]Giornale di matematiche **10**, 147-159; Opere II, p. 394-409.

negativa. En l'article, també es proposa facilitar la comprensió d'alguns resultats donats per Riemann. Com ja hem dit en anteriors ocasions, Beltrami devia ser una de les poques persones de l'època que tenia un complet enteniment de l'estudi del matemàtic alemany.

Recordem que Beltrami havia explicat a Genocchi que en un principi tenia dubtes al respecte de l'estereometria no euclidiana[49]. També a la seva primera carta a Hoüel, exposa aquestes reticències inicials:

> [...] je fus tenté d'abord de ne pas croire à la partie stéréométrique des recherches de Lobatschewsky et de n'y voir qu'une espèce de "hallucination géométrique"(c'est ainsi que je la qualifiais; dans ma pensée, bien entendu) que j'espérais pouvoir, après des réflexions plus mûres, réduire à sa vraie signification. En d'autres termes je croyais alors que *la construction de la planimétrie non-euclidienne sur la surface que j'apelle pseudosphérique épuisait entièrement la portée de cette planimétrie transcendante*, à peu près comme la construction ordinaire des variables complexes sur un plan épuise toute entière leur signification arithmétique.
>
> [...] Al prinicipi vaig estar temptat de no creure en la part estereomètrica de les recerques de Lobatxevski i de no veure més que una mena d'"al·lucinació geomètrica" (així és com la qualificava; dins del meu pensament, naturalment) que esperava poder, després de reflexions més madures, reduir al seu verdader significat. En altres termes, creia que *la construcció de la planimetria no-euclidiana sobre la superfície que jo anomeno pseudoesfèrica esgotava completament l'abast d'aquesta planimetria transcendent*, aproximadament com la construcció ordinària de les variables complexes sobre un plànol esgota totalment el seu significat aritmètic.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 18/11/68[50]]

És a dir, en no poder donar una interpretació geomètrica de l'estereometria, el seu primer impuls va ser no acceptar-la. A la vegada, segons explica a Hoüel unes línies més avall, el fet que Lobatxevski dedueixi la trigonometria pseudoesfèrica dels teoremes de la seva estereometria, i que aquests resultats siguin del tot coherents, el portaven a pensar el contrari, que la teoria hauria

[49] Veure el fragment de la carta a Genocchi amb data 9/6/1868, citada al principi de l'apartat anterior. G. Loria a [78], p. 415.
[50] A [23], p. 65-66.

de ser correcta.

En les cartes escrites a aquests dos matemàtics[51], declara que va ser la lectura de la memòria de Riemann el que va dissipar, finalment, els seus dubtes, en veure que recolçava les seves recerques.

> Je n'y pensais presque plus quand parut le mémoire de Riemann qui, au milieu de ses nombreuses obscurités, vint cepandant me convaincre que je ne m'étais pas fourvoyé en cherchant les bases analytiques de la nouvelle doctrine dans les conceptions que Gauss a inauguré par ses fameuses *Disquisitiones generales circa superficies curvas*,[...]. J'ai crue que les vues larges de Riemann ne contredisaient nullement aux développements donnés par moi sur la simple planimétrie, et je repris ma redaction, pour l'envoyer à M. Battaglini. Ce fut quand je terminais de la transcrire, pour en supprimer tout ce qui se rapportait à mes doutes sur la stéréométrie de Lobatschewsky, que je trouvai l'explication analytique complète de la géométrie non-euclidienne pur un nombre quelconque de dimensions.
>
> No hi vaig pensar més fins que va aparèixer la memòria de Riemann que, tot i les seves nombroses obscuritats, em va convèncer de que no m'estava equivocant en buscar les bases analítiques de la nova doctrina en els conceptes que Gauss va inagurar amb les seves famoses *Disquisitiones generales circa superficies curvas*,[...]. Vaig pensar que les àmplies idees de Riemann no contradeien en res els meus desenvolupaments sobre la simple planimetria, i vaig reprendre la meva redacció, per enviar-la a Battaglini. Va ser en acabar-la de transcriure, per suprimir tot allò relatiu als meus dubtes sobre l'estereometria de Lobatxevski, que vaig trobar l'explicació analítica completa de la geometria no euclidiana per un nombre qualsevol de dimensions.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 18/11/68[52]]

Beltrami explica el procés que va seguir en l'extensió dels resultats del *Saggio* a tres i més dimensions, a la seva carta a E. D'Ovidio del 25 de desembre del 1872[53]:

---

[51] Veure les dues cartes a Genocchi amb data Bologna 9/6/1868 i 23/7/1868 citades per G. Loria a [78], p. 415-416, a més de la que citem a Hoüel del 18/11/1868.

[52] A [23], p. 67.

[53] Citada per G. Loria a [78], p. 422. i publicada per primer cop per D'Ovidio a la seva commemoració de Beltrami [38].

In seguito, volendo estendere queste considerazioni allo spazio, sgomentandomi (a torto) delle difficoltà che presentava la risoluzione, nel caso di tre dimensioni, del problema già da me risloluto nel 65, tentai di costruire la soluzione *a priori*, cioè per induzione, e fortunatamente ci riuscii, osservando che in luogo della equazione (1) del *Saggio* si può scrivere:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

formole che, aggiungendo una dimensione, suggeriscono di porre:

$$ds^2 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2.$$

Verificai dunque che *due* equazioni *lineari* fra le tre variabili t, u, v definiscono una linea geodetica, cioè rendono $\delta \int ds = 0$. Ma appena conseguito questo risultato, che io sviluppai in modo prolisso e coll'aiuto di variabili ausiliarie (specie di coordinate polari non-euclidee), cominciai a sospettare che i teorema fosse vero per n qualunque, e verificando questa congettura giunsi alla dimostrazione che forma il principio della *Memoria* sugli spazii di curvatura costante.

A continuació, en voler estendre aquestes consideracions a l'espai, espantant-me (sense raó) de les dificultats que presentava la resolució en el cas de tres dimensions, del problema que ja havia resolt al 65, vaig intentar construir la solució *a priori*, és a dir, per inducció, i afortunadament me'n vaig sortir, observant que en lloc de l'equació (1) del *Saggio* es pot escriure:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

fórmules que, afegint una dimensió, suggereixen posar:

$$ds^2 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2.$$

Vaig verificar, doncs, que *dues* equacions *lineals* entre les variables t, u, v defineixen una línia geodèsica, és a dir, es té $\delta \int ds = 0$. Quan vaig aconseguir aquest resultat, que vaig desenvolupar de manera prolixa i amb l'ajut de variables auxiliars (una mena de coordenades polars no euclidianes), vaig començar a sospitar que el teorema fos cert per qualsevol n, i verificant aquesta conjectura vaig arribar a la demostració que constitueix el principi de la *Memoria* sobre els espais de curvatura constant.

[Beltrami a D'Ovidio 25/12/72]

Efectivament, el *Teoria fondamentale* parteix de considerar sobre la semiesfera

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2, \quad x > 0$$

la mètrica

$$ds = R\frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}}{x},$$

que defineix una varietat de Riemann de dim n. D'aquesta manera les geodèsiques tenen equacions lineals, de fet, són seccions de la semiesfera amb plans verticals.

Si projectem sobre l'equador, és a dir, sobre el disc

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < a^2,$$

hi tenim la mètrica que s'obté eliminat x entre les dues equacions anteriors, fent:

$$x = \sqrt{a^2 - x_1^2 \cdots - x_n^2},$$

que té la mateixa expressió que la donada al *Saggio*. Beltrami no l'escriu explícitament, probablement, com suggereix Stillwell[54], perquè porta als mateixos resultats obtinguts el 1868, però prova que en aquest cas les geodèsiques són rectes del disc. D'aquesta mètrica s'obté el model del disc descrit per Beltrami, que actualment coneixem com el "model de Klein".

Beltrami exposa després altres expressions per l'element lineal, obtingudes en canviar les coordenades, que donen dos models més per la geometria no euclidiana.

Fent la projecció estereogràfica de l'hemisferi nord de l'esfera sobre el seu pla tangent horitzontal obté unes noves coordenades respecte de les quals la mètrica s'escriu:

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + \cdots + d\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}{4R^2}}$$

[54] A [96], p. 36

i diu que aquesta forma és la donada per Riemann, sense demostració, a la seva famosa memòria [87]. Es tracta de la que posteriorment tothom coneixerà com a "mètrica de Poincaré del disc".

Una quarta transformació importantíssima per Beltrami[55] s'obté introduïnt n noves variables independents:

$$\frac{Rx}{a-x_n}=\eta,\quad \frac{Rx_1}{a-x_n}=\eta_1,\quad \ldots\quad \frac{Rx_{n-1}}{a-x_n}=\eta_{n-1}$$

donant lloc a l'element lineal següent[56]:

$$ds=R\frac{\sqrt{d\eta^2+d\eta_1^2+\cdots+d\eta_{n-1}^2}}{\eta}$$

Aquest model s'obté fent la projecció estereogràfica de la semiesfera en la meitat superior d'un pla vertical, i és el que avui anomenem "semiplà de Poincaré".

De les diferents expressions per l'element lineal que va trobant, dedueix les propietats de l'espai que se'n deriven i veu que coincideixen amb les de l'espai no euclidià. Fa, llavors, algunes consideracions generals sobre la possibilitat de sobreposar figures, punt clau de la geometria Euclidiana, i conclou[57]:

> Si può verificare che la teoria di Lobatschewski coincide, salvo nei nomi, colla geometria dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante negativa.
>
> Es pot verificar que la teoria de Lobatxevski coincideix, llevat dels noms, amb la geometria de l'espai de tres dimensions de curvatura constant negativa.

Després estableix les correspondències dels conceptes de recta, pla i esfera de la geometria no euclidiana a l'espai de curvatura constant negativa i proposa anomenar *pseudoesfèrica* a la geometria no euclidiana. Finalitza l'article demostrant que la geometria esfèrica de dimensió n es pot mirar com a continguda a la geometria de l'espai pseudoesfèric de dimensión $n+1$.

[55]Veure *Teoria fondamentale*, [16], p. 419

[56]Aquesta mètrica per dues dimensions ja l'havia donat Liouville, el 1850, en la Nota IV de la seva revisió de l'obra de G. Monge *Application de l'analyse à la géometrie*, 5a edició, Bachelier, Paris.

[57]*Teoria fondamentale*, [16], p. 425.

Beltrami, en el *Teoria fondamentale*, no dóna interpretacions geomètriques, a diferència del que fa al *Saggio*, dóna només construccions analítiques. I com ja havia comentat en el darrer, explica que no veu possible imaginar-se els espais no euclidians en el nostre espai euclidi com podiem fer amb el pla[58]:

> Così tutti i concetti della geometria non-euclidiana trovano un perfetto riscontro nella geometria dello spazio di curvatura costante negativa. Solamente fa d'uopo osservare che mentre quelli relativi alla semplice planimetria ricevono in tal modo un'interpretazione vera e propria, poichè diventano *construibili* sopra una superficie *reale*, quelli all'incontro che abbracciano tre dimensioni non sono suscettibili che di una rappresentazione analitica, poichè lo spazio in cui tale rappresentazione verrebbe a concretarsi è diverso da quello cui generamente diamo tal nome. Per lo meno l'esperienza non sembra poter essere messa d'accordo coi risultati di questa geometria più generale, si non si suppone infinitamente grande la costante R, cioè *nulla* la curvatura dello spazio; il che per altro potrebbe non essere dovuto che alla piccolezza dei triangoli che noi possiamo misurare, ossia alla piccola estensione dello spazio a cui le nostre osservazioni si estendono, non altrimenti da ciò che accade per le misure prese sopra una piccola parte di superficie terrestre, la precisione delle quali non è sufficiente a mettere in evidenza la sfericità del globo.

> Així tots els conceptes de la geometria no euclidiana troben una coincidència perfecta en la geometria de l'espai de curvatura constant negativa. Només cal obsevar que mentre que els relatius a la simple planimetria reben d'aquesta manera una veritable interpretació, doncs resulten *construïbles* sobre una superfície *real*, aquells que comprenen les tres dimensions només són susceptibles d'una interpretació analítica, ja que l'espai en el que aquesta representació s'hauria de concretar és diferent d'aquell al que normalment li donem aquest nom. Al menys l'experiència no sembla poder-se posar d'acord amb els resultats d'aquesta geometria més general, si no es suposa infinitament gran la constant R, és a dir *nulla* la curvatura de l'espai; el que d'altra banda podria ser degut a que els triangles que podem mesurar són massa petits, o sigui, a que l'extensió de l'espai en el que es desenvolupen les nostres explicacions és massa petita, de la mateixa manera de com succeeix per les mesures preses sobre una petita part de la superfície

[58] *Teoria fondamentale*, [16], p. 427.

terrestre, que la seva precissió no és suficient per posar en evidència l'esfericitat del globus.

5.5 Relació entre el model de Beltrami i les idees de Battaglini.

En comparar les interpretacions que Battaglini i Beltrami han fet del pla hiperbòlic en els seus respectius articles, la seva semblança ens pot portar a especular que l'escrit de Battaglini fos una possible inspiració a les idees de Beltrami, com fa Montesions a [81][59]. Però, l'anàlisi de l'obra de Beltrami i la lectura de la seva correspondència descarten totalment aquesta idea.

Beltrami explica en diferents ocasions a les seves cartes la via de descobriment que el va portar al seu model del pla hiperbòlic, i va en una línea completament diferent als estudis de Battaglini. Les seves paraules venen reforçades pel contingut dels articles que hem analitzat als apartats anteriors. Tots aquests escrits es fonamenten en la teoria de geometria diferencial iniciada per Gauss i consolidada per Riemann, de la que Beltrami tenia un profund coneixement. Hem mostrat, en canvi, que Battaglini enfoca l'estudi dels resultats de Lobatxevski des de la geometria projectiva. El fet de que els dos matemàtics treballin des d'aquests dos punts de vista diferents justifica sobradament que no es pugui parlar d'influència.

Tot i així, no es pot oblidar que en el procès de renaixença de la geometria no euclidiana que s'estava donant en aquell moment, tant Battaglini com Hoüel, van tenir un paper destacable difonent les noves idees i era ben sabut que en el debat sobre l'acceptació de la geometria no euclidiana tots dos la defensaven sense recances[60]. En aquest sentit, es podria dir que la seva feina va ajudar a que es duessin a terme els estudis que posteriorment van desenvolupar el tema. En particular, Beltrami va tenir coneixement dels treballs de Bolyai i Lobatxevski per mitjà de les seves traduccions[61]. Sabem,

[59] "[...]no me cabe duda de la influencia de Battaglini sobre Beltrami." A [81], p. 221.

[60] Veure la carta de Beltrami a Tardy, Bologna 14/11/67, [46], p. 179, on exposa la postura d'alguns dels matemàtics italians davant les noves idees.

[61] Veure les cartes de Beltrami a Hoüel, Bolonge 18/11/68 i 4/12/1868, a [23], p. 65 i p. 70, respectivament.

a més, que Beltrami va llegir el *Sulla*, doncs al *Saggio* fa referència en tres ocasions als resultats trobats per Battaglini [62]

Dit això, un encara es pot plantejar la següent pregunta: a què es deu, llavors, la semblança en la descripció del pla hiperbòlic que fan els dos matemàtics italians? La justificació d'aquesta coincidència la trobem en la relació existent entre la geometria de les superfícies de curvatura constant i la teoria de l'*Absolut* de Cayley.

Klein serà el primer en posar de manifest aquesta relació, mostrant, en els seus articles *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, [64] i [66][63], que les tres geometries de curvatura constant es poden estudiar com a casos d'una teoria més general, la geometria projectiva.

Klein es basa en les idees de Cayley, també utilitza la cònica de l'Absolut per mesurar distàncies, però a diferència de Cayley, defineix distàncies i angles a partir de la raó doble. No oblidem que la raó doble és un invariant projectiu, i per tant, el seu ús resulta molt apropiat en aquest cas. Donada una cònica fixa i dos punts P i Q, la línea que els uneix talla la cónica en dos punts A i B, que poden ser reals o imaginaris, coincidents o no. Klein defineix la distància entre els dos punts com el logaritme de la raó doble dels quatre punts, multiplicat per una constant que serveix per fer que el resultat sigui real, doncs, en tractar-se d'una distància no es pot deixar que surti imaginari:

$$d(P,Q) = c \log{(A,B,P,Q)} = c \log \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$$

Klein se n'adona que, com la geometria euclidiana, les dues geometries no euclidianes són també casos particulars de la projectiva i dóna fórmules per la distància en els tres casos a partir de la raó doble.

A diferència de Cayley, distingeix els casos en que l'Absolut és real o imaginària. Obté així les tres geometries, que anomena el·líptica quan l'Absolut és imaginari, hiperbòlica quan és real i parabòlica en el cas límit dels dos anteriors, en que la cónica degenera en dos punts imaginaris. Aquesta nomenclatura, introduïda per Klein, es a deu a que en la geometria hiperbòlica

[62]Veure [19], p. 386, p. 392 i 396. O el [15], p. 295, 300, 304.

[63]La primera part publicada el 1871 i la segona el 1873, d'aquesta darrera no s'ha fet cap traducció. Amb el mateix nom es publica també [65], que és l'article que va traduir Hoüel al francés.

les rectes tenen dos punts a l'infinit, en l'euclidiana un punt doble i en l'esferica cap. Recordem que, en el pla projectiu, una hipèrbola talla la recta de l'infinit en dos punts, una paràbola en un de doble i una elipse no la talla.

A la seva memòria *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*[64], ho explica de la següent manera[64]:

> Following the usual terminology in modern geometry, these three geometries will be called hyperbolic, elliptic or parabolic in what follows, according as the points at infinity of a line are real, imaginary or coincident.
>
> These three geometries will turn out to be special cases of the general Cayley measure. One obtains the parabolic (ordinary) geometry by letting the fundamental surface for the Cayley measure degenerate to an imaginary conic section. If one takes the fundamental surface to be a proper, but imaginary, surface of second degree, one obtains the elliptic geometry. Finally, the hyperbolic geometry is obtained when one takes the fundamental surface to be a real, but not ruled, surface of second degree and considers the points inside it.
>
> Seguint la terminologia de la geometria moderna, aquestes tres geometries s'anomenaran hiperbòlica, elíptica o parabòlica, segons si els punts a l'infinit d'una línia són reals, imaginaris o coincidents.
>
> Aquestes tres geometries resulten ser casos especials de la mesura general de Cayley. La geometria parabòlica (ordinària) s'obté deixant degenerar la superfície fonamental de la mesura de Cayley en una secció cònica imaginària. Si es pren com a superfície fonamental una cònica pròpia, però imaginària, superfície de segon ordre, s'obé la geometria elíptica. Finalment, la geometria hiperbòlica s?obté quan es pren com superfície fonamental una superfície real, però no reglada, superfície de segon ordre, i es consideren els seus punts interiors.

Centrant-nos en el cas bidimensional, la cònica imaginària té l'expressió $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, no té solucions reals. No hi ha punts a l'infinit i la recta és una línia tancada. Es donarà a l'espai projectiu una mètrica elíptica. Quan la cònica és real, té l'expressió $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i determina una zona exterior i una interior, que és proveïda d'una mètrica hiperbòlica. Klein presenta

[64] Veure la traducció de Stillwell, [96], p. 72.

aquesta última com un model del pla de Lobatxevski, sent els punts de la cònica els punts a l'infinit del pla.

Conclou el seu treball veient que aquestes tres geometries coincideixen amb les tres de curvatura constant, com ja havia anunciat a la introducció de l'article[65]:

> Now since it will be shown that the general Cayley measure in space of three dimensions covers precisely the hyperbolic, elliptic and parabolic geometries, and thus coincides with the assumption of constant curvature, one is led to the conjecture that the general Cayley measure agrees with the assumption of constant curvature in any number of dimensions. [...] It includes the facts that, in such spaces, geodesics can be represented by linear equations, like straight lines, and that the elements at infinity form a surface of second degree, etc. These results have already been proved by Beltrami, proceeding from other considerations; in fact, it is only a short step from the formulae of Beltrami to those of Cayley.

> Mostrarem que la mesura general de Cayley en l'espai de tres dimensions cobreix precisament les geometries hiperbòlica, parabòlica i elíptica, i que això coincideix amb asumir curvatura constat, el que ens portarà a la conjectura de que la mesura general de Cayley coincideix amb asumir curvatura constant en qualsevol dimensió. [...] També inclou els fets de que en aquests espais les geodèsiques es poden representar per equacions lineals, com línies rectes, i que els elements a l'infinit formen una superfície de segon ordre, etc. Aquests resultats ja han estat demostrats per Beltrami, seguint altres consideracions; de fet, hi ha només un petit pas entre les fórmules de Beltrami i les de Cayley.

En el model de Klein les geodèsiques hiperbòliques són representades per línies rectes euclidianes i la distància ve donada pel logaritme de la raó doble. La primera propietat, com sabem, és l'aportació que fa Beltrami al *Saggio*, l'aportació de Klein consiteix en aportar una fórmula per la distància i observar, a més, que el disc també pot ser una el·lipse.

Segons A'Campo i Papadopoulos, amb aquesta fórmula mostra per primer cop de manera explícita la relació entre les geometries hiperbólica i projecti-

[65]Veure la traducció de Stillwell,[96], p. 73.

va[66]. Puntualitzem, però, que com hem demostrat al capítol 4, Battaglini ja havia plantejat un lligam entre aquestes dues geometries al *Sulla*, en estudiar la geometria no euclidiana fent ús dels mètodes projectius. Podria ser, fins i tot, que Klein fos conscient d'aquest indici, doncs, sabem que havia llegit el treball de Battaglini ja que el cita a la primera part del *Über die Sogenannte*, el 1871[67].

Beltrami ja era conscient d'aquesta relació, dos anys abans de la publicació de Klein. El 29 de juliol de 1869, escriu a Hoüel sobre algunes modificacions que li agradaria fer a les seves dues memòries, de cara a la publicació de les traduccions franceses:

> Quant à des additions, j'en ai en vue deux.[...] La seconde serait plus importante, si je parvenais à lui donner une forme concrète, car elle n'existe jusqu'ici dans ma tête qu'à l'état de conception assez vague, quoique sans doute fondée dans le vrai. C'est la conjecture d'une étroite analogie, et peut-être identité, entre la géométrie pseudosphérique et la théorie de M. Cayley sur l'*origine analytique des rapports métriques*, à l'aide de la conique (ou de la quadrique) *absolue*. Je ne connaissais presque pas cette théorie, quand l'identité de certaines formes m'a vivement frappé. Seulment, comme la doctrine des invariants y joue un rôle assez considérable, et que je l'ai perdue de vue depuis quelques années, je veux maintenant m'y remettre par quelques études préliminaires, avant d'aborder la comparaison dont il s'agit.
>
> En quant als afegits, en veig dos. [...] El segon seria més important, si aconseguís donar-li una forma concreta, doncs fins ara només existeix en el meu cap en un estat de concepció força vague, però sens dubte amb un fonament cert. Es tracta de la conjectura d'una estreta analogia, i potser identitat, entre la geometria pseudoesfèrica i la teoria de Cayley sobre l'*origen analític de les relacions mètriques*, amb l'ajut de la cònica (o quàdriga) *absoluta*. Amb prou feines coneixia

[66] En *On Klein's So-called Non-Euclidean geometry*, [2], versió digital: `https://arxiv.org/pdf/1406.7309v1.pdf`, p. 15:

> [...]Klein gave the first explicit distance function for hyperbolic geometry. At the same time, this made the first explicit link between hyperbolic geometry and projective geometry.

[67] Veure [67], nota a peu de pàgina 38, p. 290. O la traducció anglesa de Stillwell, [96], p. 98.

> aquesta teoria, quan la identitat de certes formes m'ha impressionat profundament. Però la doctrina dels invariants hi juga un paper considerable, i jo fa uns quants anys que l'he perdut de vista, ara m'hi vull tornar a posar per fer alguns estudis preliminars, abans d'abordar la comparació a la que em refereixo.

Més endavant, en la carta a D'Ovidio a que ens hem referit ja en diverses ocasions diu:

> ...Più tardi, quando imparai a conoscere la teoria di Cayley, mi accorsi che il su *assoluto* era precisamente quel luogo *limite* che io otteneva dell'equazione $w = 0$ ossia $x = 0$, e compresi che l'identità dei risultati era dovuta a questa circostanza, che nella Geometria proiettiva (analitica) si ammette già per dato che le equazioni lineari rappresentino linee di minima distanza, cosicchè questa Geometria studa, inconsapevolmente, gli spazii di curvatura costante. Io ho avuto il torto di non pubblicare questa osservazione, che fu poi fatta dal Klein e corredata da lui di molti sviluppi, a molti del quali io non avevo punto pensato. In questo modo il mio *principio della linearità* è stato naturalmente dimenticato, ed è stato sostituito da quello della *proiettività* che gli equivale completamente.[68]

> ... Més tard, quan vaig aprendre la teoria de Cayley, em vaig adonar de que el seu *absolut* era precisament el lloc *límit* que jo obtenia de l'equació $w = 0$ o sigui $x = 0$, i vaig comprendre que la identitat dels resultats es devia a la següent circumstància, que en la Geometria projectiva (analítica) ja s'admet com a dada que les equacions lineals representen línies de mínima distància, així que aquesta Geometria estudia, inconscientment, els espais de curvatura constant. Vaig cometre l'error de no publicar aquesta observació, feta després per Klein i dotada de molts desenvolupaments, en molts dels quals jo no hi havia pensat. En aquest mètode s'oblida de manera natural el meu *principi de la linealitat* i es substitueix pel de *projectivitat* que és del tot equivalent.

Pot semblar extrany que Beltrami digui que reconeix el seu cercle límit en l'Absolut de Cayley i faci referència als treballs de Klein, però que en canvi no mencioni, tot i haver-lo llegit, el *Sulla geometria imaginaria* de Battaglini, que nosaltres veiem com un preludi d'aquests estudis. L'explicació la podem trobar en que, tot i que a nosaltres ens sembli que el punt de vista projectiu es

[68] Carta a Enrico d'Ovidio del 25/12/1872. Publicada a [38].

manifesta clarament en l'article de Battaglini, ell no fa cap referència explícita a les teories de Cayley. En canvi, sí que ho fa a la seva correspondència[69], on també declara obertament el seu interés per la geometria projectiva i la seva creença en que serveix per generalitzar la geometria[70].

D'altra banda, Beltrami en el moment en que va llegir el *Sulla*, no coneixia profundament les teories de Cayley, com confesa a la carta a Hoüel que acabem de citar, i tampoc havia donat gaire importància a aquesta relació per no considerar-ho una idea nova[71].

5.6 Osservazione sulla nota del Prof. Schläfli

Per finalitzar aquest capítol sobre la contribució de Beltrami, analitzarem el seu article *Osservazione sulla nota del Prof. L. Schlaefli*, que no hem trobat comentat per cap autor, i que suposa el punt final al seus estudis sobre la geometria no euclidiana.

Al *Teoria fondamentale*, Beltrami ha demostrat que en un espai n-dimensional, es poden triar les n variables independents per donar l'expressió de l'element lineal de manera que cada línea geodèsica dins de l'espai es representi per $n-1$ equacions lineals. Uns anys més tard, el 1872, el professor de la Universitat de Berna Ludwig Schläfli [72] escriu *Nota alla Memoria del sig. Beltrami, Sugli spazi di curvatura costante* [94], on demostra el recíproc d'aquest resultat, és a dir, que els espais on les geodèsiques es poden representar per equacions lineals són de curvatura constant.

En resposta a aquest article, Beltrami publica, l'any següent, *Osservazione*

[69]Veure la carta a Hoüel, Naples 21/5/67, a [30], p. 63-64.

[70]Veure la carta de Battaglini a Betti, Napoli 8/11/1854, a [30], p. 179-182.

[71]Veure la carta de Beltrami a Hoüel del 5/7/72, a [23], p. 164-165.

[72]Ludwig Schläfli (1814-1895) estudia a la Universitat de Berna. Després de treballar a l'escola secundària de Thum, torna a l'estudi de les matemàtiques amb J. Steiner, C. G. J. Jacobi, P.G.L. Dirichlet i K.W. Borchardt.

Ja van veure a la biografia de Beltrami que tenia relació amb Schläfli. Veure les cartes de Beltrami a Betti Venezia, 27/8/69 i 4/10/71, a [46], p. 86-86 i p. 95, respectivament. Giacardi i Tazzioli donen la següent referència per la correspondència entre els dos matemàtics: Graf, J.H. *La correspondence entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque. II. Correspondence entre E. Beltrami et L. Schläfli, 1870-1891*, Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche **17**, 1915, p. 81-86, p. 113-122.

sulla nota del Prof. L. Schlaefli alla memoria del Sig. Beltrami [18]. L'escrit és especialment interessant perque relaciona els resultats dels seus estudis previs amb la teoria de l'Absolut de Cayley. En referència a ell, escriu a Hoüel:

> Ce n'est qu'un petit article de 4 pages (inséré aux *Annali di Matematica*), mais je prendrai la liberté de vous prier de lui accorder quelque attention, à deux titres différents. D'abord parce qu'il éclaire, à mon avis, l'analyse très-ingénieuse, mais un peu compliquée, par laquelle M. Schläfli a résolu (dans le Cahier des *Annali* qui paraîtra sous peu) un problème que j'avais résol en 1866 pour le cas de $n = 2$ mais par une voie trop laborieuse, qui aurait été très-difficilment applicable au cas général. Et en second lieu parce que le principe que a dirigé mon analyse est précisément celui que M. Klein vient de développer dans son mémoire récent sur la géométrie non euclidienne, pour les espaces à deux dimensions, c'est-à-dire que, analytiquement, la géométrie des espaces de courbure constante n'est autre chose que la doctrine de l'absolu, de Cayley. Je regrette beaucoup de m'être laissé prévenir par M. Klein sur ce point, sur lequel j'avais déjà rassemblé des matériaux, mais auquel j'ai eu le tort de ne pas donner assez d'importance. Au reste cette manière de voir n'est pas absolument nouvelle, et c'est précisément à cause de cela que je n'ai pas eu hâte de publier ma remarque.

> Aquest és només una petit article de 4 pàgines (afegit als *Annali di Matematica*), però em prenc la llibertat de demanar-vos que li pareu atenció, en dues qüestions diferents. En primer lloc, perque aclareix, al meu entendre, anàlisi molt enginyos, però una mica complicat, amb el que el Sr. Schläfli ha resolt (en el quadern dels *Annali* que apareixerà aviat) un problema que jo havia ressolt el 1866 per al cas de $n = 2$ però per via massa laboriosa, que hauria estat diffícilment aplicable al cas general. I en segon lloc perque el principi al que va portar el meu anàlisi és precisament el que el Sr. Klein acaba de desenvolupar en la seva recent memòria sobre la geometria no euclidiana, pels espais de dues dimensionals, és a dir, que analíticament, la geometria dels espais de curvatura constant no és altra cosa que la doctrina de l'absolut de Cayley. Lamento molt haver deixat que el Sr. Klein se m'anticipés en aquest punt, sobre el que ja havia recollit material, però al que vaig cometre l'error de no donar prou importància. D'altra banda, aquest punt de vista no és completament nou, i és precisament per això que

no vaig tenir presa per publicar el meu comentari[73].

[Beltrami a Hoüel, Bologne 5/7/72[74]]

Beltrami comença destacant que el resultat de Schläfli s'obté fent una transformació homogràfica sobre l'espai considerat al *Teoria fondamentale* i que això comporta, principalment, que en lloc de la funció

$$a^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2$$

que igualada a zero definia l'*espai límit*, aparegui una funció quadràtica general que, fent-la homegènia amb la introducció de la variable x_0, s'expressa:

$$\varphi_{xx} = \varphi(x_0, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum a_{rs} x_r x_s,$$

amb $0 \leqslant r, s \leqslant n$.

Diu llavors, que l'equació $\varphi_{xx} = 0$ correspon a la quàdrica absoluta de Cayley per l'espai n-dimensional, i que la fórmula de la distància entre dos punts corresponent a la (8) del *Teoria fondamentale*[75] és:

$$\cosh^2 d(x,y) = \frac{\varphi_{xy}^2}{\varphi_{xx}\varphi_{yy}}$$

Beltrami es refereix en aquest punt a la memòria de Klein[76], dient que segueix el mateix criteri en la classificació de les funcions quadràtiques i de les bilineals correlatives.

Aquesta expressió dóna la de la distància hiperbòlica $d(x,y)$ entre dos punts x, y d'un espai de dimensió arbitrària respecte d'un producte escalar arbitrari.

[73]Continua parlant dels origens de la idea, dient que es remonten a Chasles, Laguerre y Cayley.

[74]A [23], p. 164-165.

[75]Es refereix a la fórmula de la distància ρ entre els punts de coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (la coordenada $n+1$ queda determinada per l'equació de l'esfera):

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - \cdots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)(a^2 - x_1^{0^2} - \cdots - x_n^{o^2})}},$$

donada a [16], p. 409.

[76]Concretament, a la p. 587 de l'article de 1871, [64].

És una generalització de la fórmula (8). Curiosament, en un dels llibres de geometria hiperbòlica més erudits sobre el tema, l'escrit per J. G. Ratcliffe [83], s'atribueix la fórmula a Killing, el 1878, cinc anys més tard que l'article que estem comentant.

De la fórmula de la distància obté l'element lineal de l'espai general de dimensió n considerat per Schläfli, el definit únicament per la condició de transformar geodèsiques en equacions lineals:

$$ds^2 = \frac{R^2}{4\varphi_{xx}^2}[(d\varphi_{xx})^2 - 4\varphi_{xx}\varphi_{dxdx}],$$

i diu que s'aconsegueix fent la transformació homogràfica de la fórmula (1) del *Teoria fondamentale*[77]. El compara, llavors, amb l'obtingut pel matemàtic suís [78], veient que només és diferent en aparièncía. Acaba alabant el mètode seguit per Schläfli tot dient que li ha permés superar amb molta elegància les dificultats que s'haurian presentat aplicant la metodologia del *Risoluzione*.

L'*Osservazione* presenta també indicis a fer ús de la mètrica de Lorentz per estudiar la geometria hiperbòlica, idea que va ser introduïda per Klein a la segona part del *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, [66], el 1873.

Considerar l'espai $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica de Lorentz, és una de les maneres més còmodes de treballar amb el pla hiperbòlic. En aquest cas, el producte de dos vectors $u = (u_0, u_1, u_2), v = (v_0, v_1, v_2)$ està donat per

$$\langle u, v \rangle = -u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

D'aquesta manera hi ha vectors de norma negativa, pel que el producte de Lorentz no és pròpiament un producte escalar. També, a diferència de si prenem la mètrica habitual, hi ha vectors diferents del $(0, 0, 0)$ que tenen norma zero. Això porta a classificar el vectors de l'espai de lorentz $\mathbb{R}^3$ en

[77]Es refereix a la mètrica

$$ds = R\frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}}{x}.$$

La trobem a [16], p.407.

[78]Es refereix a la que es troba a [94], p. 185.

vectors de norma positiva “tipus espai”, norma zero “tipus llum” i norma negativa “tipus temps”. Quan ho dibuixem, apareix un con, anomenat el “con de llum”, i els vectors de l’espai són tipus temps o tipus espai segons estiguin dins o fora d’aquest con.

Si dintre de $\mathbb{R}^3$ hi considerem l’hiperboloide

$$\mathbb{H} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3; x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1\}$$

i restringim el producte de Lorentz als vectors tangents a aquest hiperboloide, resulta que, llavors, aquest producte és definit positiu, és a dir, és un vertader producte escalar. Llavors, $\mathbb{H}$ és una varietat de Riemann i no és difícil veure que té curvatura constant negativa -1. És a dir, és un model de la geometria hiperbòlica que anomenarem “model hiperboloide”.

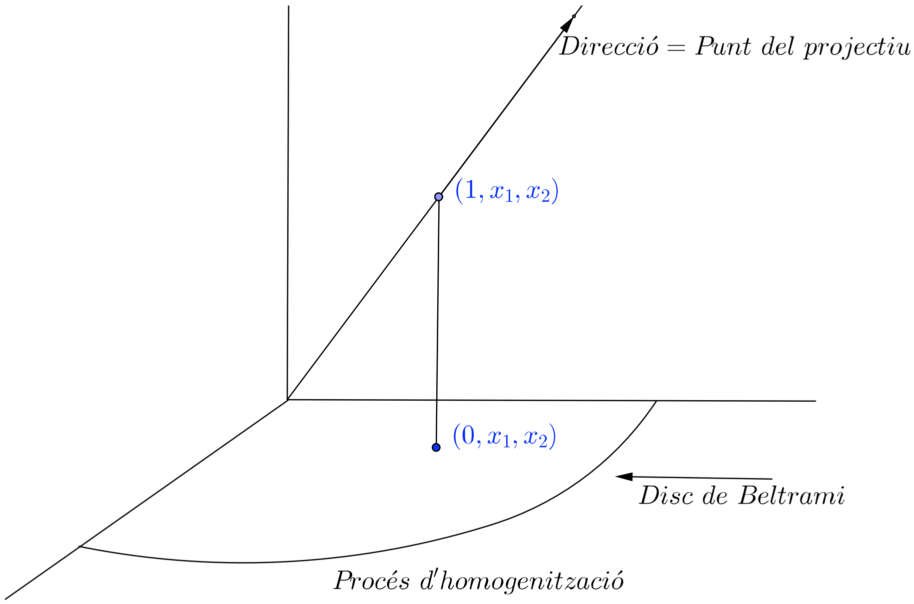
Si, en l’hiperboloide equilàter de dues fulles, considerem la projecció estereogràfica de la fulla superior des del pol de la fulla inferior sobre el pla $x_0 = 0$, obtenim el disc de Poincare. Les geodèsiques, les corves obtingudes en tallar amb plans que passen per l’origen, es projecten en el disc de Poincaré en arcs de circumferència ortogonals a la frontera.

El sorprenent a l’article de Beltrami és que ja a la primera pàgina apareix gairebé el model hiperboloide, tot i que no ho cita explícitament.

En l’equació de partida, observem que si $n = 2$, tenim $a^2 = x_1^2 + x_2^2$, que és la vora d’un disc de $\mathbb{R}^2$. Els punts que considera Beltrami són els de l’interior i el disc és la cònica de l’absolut. Si pensem $\mathbb{R}^2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ i homogeneitzem, com fa Beltrami, obtenim

$$a^2 x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

que és el “con de llum” de l’espai de Lorentz. Les direccions interiors a aquest con de llum, direccions “tipus temps”, són justament els punts que considera Beltrami. Això és degut a que la condició $\varphi_{xx} = 0$, amb φ_{xx} homogeni quadràtic, determina els punts llevat d’escalars. És a dir que si $(x_0, \ldots, x_n)$ compleix aquesta condició, $\lambda(x_0, \ldots, x_n)$ també la compleix.



Resumint, al fer el procés d'homogenització passa dels punts de l'interior del disc a les direccions interiors al con. I aquestes direccions estan en correspondència bijectiva amb els punts de l'hiperboloide

$$a^2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$$

Aquesta darrera observació no la fa Beltrami, però queda implícita.

Capítol 6

L'Acceptació de les noves geometries

De nou, la geometria no euclidiana no va tenir una acceptació immediata. La reaparició de les idees de Bolyai i Lobatxevski va provocar una divisió entre la comunitat matemàtica, deguda bàsicament a les diferents postures epistemològiques.

D'una banda trobem la contraposició entre els aprioristes i els empiristes. Els primers, en la línia de la filosofia de Kant, consideraven que la geometria és una ciència a priori i els axiomes són veritats absolutes. La geometria no euclidiana contradiu aquests judicis innats al pensament humà i per tant, no és possible. Els segons, creien que els axiomes provenen de l'experiència, són fets empírics idealitzats. La negació del postulat no suposa una contradicció i en principi, tots dos enunciats són possibles, cal realitzar un experiment per determiniar quin dels dos és cert.

D'altra banda, entre els empiristes, es donaven dos punts de vista antagònics. Per uns la veritat es fonamaneta en la realitat i no en la coherència lògica, per tant, només hi ha una geometria possible, l'euclidiana. Sovint, també es declaraven en contra de les altres dues teories que protagonitzaven els debats de l'època: els espais n-dimensionals i els nombres complexos[1]. No acceptaven cap objecte matemàtic que no existís realment, és a dir, que no

[1] Com per exemple Genocchi, que no acceptava cap d'aquestes teories a nivell geometric, les considerava només com a pertanyents al camp de l'anàlisi.

se li pogués associar un objecte real concret. Els altres prenien la postura de que qualsevol idea que puguem concebre sense contradicció és certa en un sentit abstracte i per tant, vàlida. Com hem vist al capítol 2, aquesta era la postura de Hoüel.

6.1 Reaccions davant la geometria no euclidiana

La nova geometria torna a ser rebuda amb reticències tant a França com a Itàlia. En una de les seves primeres cartes, Battaglini escriu a Hoüel:

> J'ai du répondre, ainsi que vous, à de nombreuses difficultés qu'on m'a faites au sujet de la nouvelle Géométrie (par lettres pourtant) et de montrer la nullité de certaines prétendues démonstrations de l'Axiome XI d'Euclide: il faut avoir de la patience avec les *simples*: la verité enfin sera reconnue.
>
> He hagut de respondre, com vos, a nombroses dificultats que se m'han presentat sobre el tema de la nova Geometria (per carta, no obstant) i de mostrar la invalidesa d'algunes preteses demostracions de l'Axioma XI d'Euclides: cal tenir paciència amb els *simples*: la veritat, al final, serà reconeguda.
>
> [Battaglini a Hoüel, Naples 29/4/1868[2]]

A França, l'actitud mostrada dels matemàtics de primera línea era de certa indiferència, i la majoria, no es manifestava públicament sobre la qüestió. En preguntar sobre l'acollida de les noves idees geomètriques a París, Beltrami va rebre, per part de l'enginyer Jules De La Gournerie[3], la següent resposta que transcriu a Hoüel:

> Je dois vous avouer que je ne connais cette question que par quelques discussions auxquelles j'ai assité, et qui avaient lieu entre plusieurs des principaux géomètres de Paris. En général, ils se tenaient dans une

[2] A [30], p. 70.

[3] Jules Maillard De La Gournerie (1814-1883), enginyer de Ponts i Camins, va ensenyar a l'École polytechnique a partir del 1850 i al Conservatoire des Arts et Métiers a partir del 1854, ocupant la càtedra de Geometria descriptiva.

> réserve assez grande; aucun d'eux ne repoussait d'une manière absolue les idées nouvelles, mais ils paraissaient douter de leur fécondité.
>
> Us he de confesar que no conec aquesta qüestió més que per les discussions a les que he assistit, i que es donen entre molts dels principals geòmetres de París. En general, mantenen una gran reserva; cap d'ells rebutja de manera absoluta les noves idees, però semblen dubtar de la seva fecunditat.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologna 14/2/1869[4]]

I uns mesos més tard, arrel de la intenció de Hoüel de traduir les seves memòries per donar-les a conèixer a França, insinua una possible mala acollida d'aquestes:

> Je vous suis très-obligé du projet d'envoyer aux Annales de l'École Normale Supérieure la traduction de mes Memòires, et je voudrais bien qu'ils fussent un peu dignes de cette honneur. Mais he crains beaucoup le jugement du public mathématique français, et je regretterais beaucoup d'être exposé à des critiques et à des polémiques, surtout après avoir vu un article de M. Bertrand dans le Journal des Savans, qui marque l'attention que l'on donne au nouveau Recueil.
>
> Us estic molt agraït pel projecte d'enviar als Annales de l'École Normale Supérieure la traducció de les meves Memòries, i m'agradaria que fossin prou dignes d'aquest honor. Però temo molt el judici del públic matemàtic francés, i lamentaria molt ser exposat a les crítiques i a les polèmiques, sobretot després d'haver vist un article del Sr. Bertrand en el Journal des Savans, que mostra l'atenció que es dóna al nou sistema.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologna 29/7/69[5]]

Joseph Bertrand era el principal opositor de la geometria no euclidiana a França. El 20 de desembre de 1869 presentà a l'Académie des Sciences [20], una demostració del cinquè postulat feta per Jules Carton[6], desencadenant que el conflicte es fes més visible.

[4] A [23], p. 74-75.

[5] A [23], p. 96-97.

[6] Jules Carton, *Nouveau moyen de lever la difficulté de la théorie des parallèles*, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris, **69**, 1869, p. 44.

Bertrand forma part dels empiristes que creuen que la ciència no s'ha de fonamentar únicament en el raonament lògic, cal que els conceptes als que es refereix existeixin en la realitat. En la qüestió del postulat, considera que s'ha de recórrer a l'"evidència", que ens mostra quina és la natura de la línia recta:

> [...] l'évidence de ce *postulatum* permet aux esprits de bonne foi de l'accepter comme un axiome, et les dialecticiens curieux de disputer, non de s'instruire, peuvent seuls en contester l'évidence.[...] la prétention de faire reposer la science sur le raisonnement seul, sans y laisser intervenir le sentiment intime relatif aux idées d'espace, semble absolument chimérique; l'évidence, quoi qu'on fasse, doit être invoquée, c'est sur elle seulement que peuvent reposer les idées premières de ligne droite et de plan.

> [...] l'evidència d'aquest *postulatum* permet als esperits de bona fe acceptar-lo com un axioma, i els dialèctics interessats en discutir, no en instruir-se, són els únics que en rebaten l'evidència.[...] la pretensió de basar la ciència només en el raonament, sense deixar intervenir el sentiment íntim relatiu a les idees de l'espai, em sembla totalment quimèrica; l'evidència, es faci el que es faci, ha de ser invocada, és en l'únic en que es basen les idees primeres de línia recta i de pla[7].

De fet, per Bertrand, la demostració del postulat és, en el fons, innecessària, la percepció de la realitat ja ens el mostra com a cert. Tenir una prova lògica no farà augmentar la seva ceretesa ni la de la geometria euclidiana[8]. L'esforç que ha fet Carton per demostrar el postulat amb el mateix rigor que els altres teoremes, té només la finalitat d'arribar a convèncer aquells que no el veuen tant evident com la resta d'axiomes. Així, en provar-lo basant-se en l'únic suposit de que les línies rectes no es desvien en cap moment, aconsegueix el seu propòsit, ja que aquesta sí és una evidència irrecusable.

La darrera hipòtesi, però, és equivalent al postulat d'Euclides, com el mateix Bertrand reconeix[9], per tant, la demostració pren com a premisa el mateix

[7] A [20], p. 1265-1266.

[8] A [20], p. 1266, diu: "La démonstration du *postulatum* d'Euclide ne suffirait donc pas pour changer le carctère logique et le degré de certitude des études géométriques."

[9] Veure [21], p. 18.

que es vol provar, i aquí és, justament, on radica l'error pels partidaris de la geometria no euclidiana:

> Je viens d'examiner avec attention la prétendue démonstration Bertand-Carton, et je m'assurer qu'on y tourne dans un cercle vicieux.
>
> Acabo d'examinar la pretesa demostració Bertrand-Carton, i de cerciorar-me de que s'hi dóna voltes en un cercle viciós.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologna 4/1/70[10]]
>
> En effet, ces constructions, pour être concluantes, doivent être faites sans s'appuyer sur le principe que l'on veut établir, et, par suite, en admettant l'hypothèse contraire.
>
> Efectivament, aquestes construccions [les realitzades en un pla], per ser concloents, han de fer-se sense basar-se en el principi que es vol establir, i, per conseqüència, admetent la hipòtesi contrària.
>
> [Hoüel, *Note sur l'impossibilité*[11]]

Tant Beltrami com Hoüel van mostrar la seva indignació davant els judicis de Bertrand en la seva correspondència. Beltrami critica que faci valoracions sobre qüestions en les que no ha profundit i lamenta la repercusió que aquestes han tingut[12]. I Hoüel, referint-se a la prova de Carton, escriu a De Tilly[13]:

> Quant à celui-là, je me dispenserai de le lire, et sa place est trouvée dans ma collection de *Curiosa* entre une quadrature du cercle et une démonstration de l'immobilité de la terre.
>
> En quant a aquesta, m'estalviaré llegir-la, i el seu lloc està dins la meva col·lecció de *Curiosa* entre una quadratura del cercle i una demostració de la immobilitat de la terra.
>
> [Hoüel a De Tilly, 12/4/1872[14]]

Per la seva part, Gaston Darboux, un dels principals geòmetres francesos de l'època, que fins al moment no havia acceptat la nova geometria, sembla que

[10] A [23], p. 119-120.
[11] A l'article publicat en els Nouvelles Annales, [61], p. 95.
[12] Veure la carta de Beltrami a Genocchi, citada a [23], p. 59. Veure també la carta a Hoüel del 30/12/69, a [23], p. 111, on escriu la seva primera reacció a l'escrit de Bertrand.
[13] Voelke fa notar també les cartes de Hoüel a De Tilly del 17 i el 19 d'abril de 1870, a [100], p. 65.
[14] A [6], p. 63.

va trobar arrel de la disputa els motius per canviar la seva postura:

> P.S. Je rouvre ma lettre pour vous dire que j'ai été à l'Institut aujourd'hui. On n'a pas encore reçu d'objection à la démosntration de M. Bertrand. Après y avoir bien réfléchi je crois que cette démonstration est inexacte, mais je vous prie de ne pas faire mention de mon opinion à ce sujet. La démonstration est du reste très spécieuse, vous trouverez sans peine le point où elle est en défaut. Je me range dorénavant tout à fait à l'opinion que vous avez émise et dont je n'étais pas très convaincu. Il est impossible de démontrer le postulatum.
>
> P.S. Torno a obrir la meva carta per dir-vos que avui he estat a l'Institut. Encara no s'ha rebut objecció a la demostració del Sr. Bertrand. Després d'haver-hi reflexionat bé, crec que aquesta demostració és inexacta, però us prego que no mencioneu la meva opinió sobre la qüestió. La demostració és per la resta molt enganyosa, trobareu sense esforç el punt on està equivocada. D'ara en endavant, m'adhereixo totalment a l'opinió que vos haveu emès, de la que no estava prou convençut. És impossible demostrar el postulat.
>
> [Darboux a Hoüel, principis de 1870 [15]]

Va resultar, a més, que Genocchi ja havia presentat la mateixa demostració als Nouvelles Annales l'any 1849 i que li havia estat refutada uns mesos més tard[16].

> M. Genocchi en a écrit à M. Bertrand, en déclarant cependant qu'il renonçait volontiers à la "priorité d'une bévue". M. Bertrand lui a répondu qu'il tiendra compte de cet avertissement dans un prochain n^{o} des Comptes Rendus, sans nommer M. Genocchi, et il dirà, à propos de la démonstration Carton, que (ce sont les propres mots de M. Bertrand) "pour la juger en elle-même, il faut s'entendre sur lequel et qu'on se propose. Est-ce un pur exercice de logique, applicable par cela même aus surfaces psuedosphériques? Dans ce cas il a tort sans contredit. Mais s'agit il du plan et de la réalité? En ce cas, comme ja l'ai dit au commencement de l'exposition que a paru au Compte rendu, le droit d'invoquer l'évidence et la possibilité de la figure me parait alors incontestable".

[15] Citada per Voelke a [100], p. 9. L'original es troba al *Dossier Darboux*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[16] A la mateixa carta, Beltrami cita les pàgines de la demostració i de la seva resposta, per més detalls bibliogràfics veure la nota 1 a peu de pàgina a [23], p. 121.

> El Sr. Genocchi ha escrit al Sr. Bertrand declarant no obstant que ell renunciava amb molt de gust a la "prioritat d'una ficada de pota". El Sr. Bertrand li ha contestat que tindrà en compte aquesta advertència en un nº proper dels Comptes Rendus, sense anomenar el Sr. Genocchi, i que a propòsit de la demostració Carton, dirà que (aquestes són les pròpies paraules del Sr. Bertrand) "per jutjar-la en ella mateixa, cal entendre què tracta i què es proposa. És un exercici de lògica, aplicable per ell mateix a les superfícies pseudoesfèriques? En aquest cas està equivocada sens dubte. Però es tracta del pla i de la realitat? En aquest cas, com ja he dit al començament de l'exposició que ha aparegut al Compte rendu, el dret a invocar l'evidència i la possibilitat de la figura em sembla llavors indiscutible."
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologna 6/1/70,[17]]

En les paraules que Beltrami cita textualment, veiem de nou el punt de vista epistemològic de Bertrand. Aquest, en resposta a les crítiques rebudes, escriu [21], on justifica la seva apel·lació a l'evidència, i insisteix:

> Celui qui prétend démontrer le *postulatum* d'Euclide s'adresse naturellement aux esprits assez difficiles pour n'en pas admettre l'évidence, et cherche à leur montrer, dans le cas où ils refuseraient de l'accepter, des conséquences tellement absurdes, qu'il sont impossible à personne de s'y arrêter.
>
> Aquell qui pretén demostrar el *postulatum* d'Euclides s'adreça naturalment als esperits que són prou difícils per no admetre l'evidència, i cerca de mostrar-los, en cas que refusessin acceptar-lo, conseqüències tan absurdes que és impossible que ningú hi entri[18].

En les últimes línies, senyala que una demostració similar havia estat presentada per un geòmetre italià el 1849.

Amb la intenció de resoldre definitivament la qüestió, Hoüel publica, a finals de l'any 1870, *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide*[19], aclarint perquè no

[17] A [23], p. 121.

[18] A [21], p. 18.

[19] Amb el mateix títol Hoüel va publicar en vuit revistes diferents, vegeu la bibliografia de [97], però hi ha només dues versions de l'article, nosaltres les hem consultat en les *Mémoires de la Societe des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, [60], i en els *Nouvelles Annales de Mathématiques*,[61].

és possible demostrar el postulat d'Euclides i especificant les raons per les que la demostració de Carton és incorrecte. Hoüel explica que si volem demostrar proposicions diferents a l'horosfera, que té la mateixa geometria que el pla, i a la pseudoesfera, caldrà que ho fem a partir de les propietats que els hi són diferents, concretament, el principi de les paral·leles. D'altra manera, si fem servir només la trigonometria, que els hi és comuna, en ser l'horosfera el cas límit de les superfícies pseudoesfèriques, tindriem una construcció aplicable en totes dues extensions. Llavors, qualsevol construcció d'aquest tipus que demostrés el postulat en el pla, el demostraria també en la pseudoesfera, on sabem que no es dóna.

> Il est donc démontré par là qu'aucune construction plane, non fondée implicitement sur le principe des parallèles, ne peut être employée pour établir ce principe, sous peine de conduire à un cercle vicieux.
>
> Queda llavors demostrat que no es pot utilitzar cap construcció plana, que no es recolzi implicitament en el principi de les paral·leles, per establir aquest prinicipi, sota pena d'arribar a un cercle viciós[20].

Conclou, anunciant la traducció francesa del *Saggio* de Beltrami, que no dubta de que ajudarà a que tothom accepti aquestes idees:

> Peut-être alors l'Académie des Sciences se décidera-t-elle à reléguer résolûment les demonstrations du *postulatum* par la géométrie plane dans les casiers oú dorment les projets de mouvement perpétuel.
>
> Potser llarvors l'Académie des Sciences es decidirà a relegar resoltament les demostracions del *postulat* per geometria plana als arxivadors on dormen els projectes del moviment perpetu[21].

Tot i la publicació de les traduccions franceses dels dos articles de Beltrami i els esforços de Hoüel, els intents per demostrar el postulat van continuar. Sembla ser que l'Académie des Sciences de París acostumava a rebre tantes demostracions que havia creat una *Comission spéciale des parallèles* per examinar-les[22], però que al voltant del 1870 va començar a retornar-les.

De la mateixa manera, a Itàlia, pocs van veure amb bons ulls la introducció de la geometria no euclidiana.

---

[20] A [60], p. XVI.
[21] A [60], p. XVII.
[22] Veure [6], p. 55.

Les postures dels matemàtics italians ve descrita per Beltrami en la següent carta a Tardy, on també explica les seves primeres impressions:

> Non so se Ella abbia accordato alcuna attenzione a quel sistema d'idee che ora si va divulgando col nome di geometria non-euclidea, e quale giudizio ne faccia. So che il prof. Chelini gli è decisamente avverso, e che il Bellavitis lo chiama geometria da manicomio: mentre il Cremona lo crede discutibile ed il Battaglini lo abbraccia senza reticenze. Io me ne sono un pò occupato ed ho indirizzato al Cremona una esposizione confidenziale delle mie vedute [...] - Non ho però intenzione di insistere molto sull'argomento, prima di tutto perché bisognerebbe conoscere tutti i lavori di Lobatschewsky e di Bolyai, i quali sono molto rari e fors'anche di poco interesse in tutto il resto, e poi perché, in tesi generale, prima di abbandonarsi a certe idee eccessivamente astratte (quand'anche ammissibili, o non assurde) mi pare che convenga avere la certezza della loro fecondità reale. - Credo che anche il rigoroso ed acuto Genocchi sia poco favorevole alla geometria non euclidea.
>
> No sé si heu dedicat atenció al sistema d'idees que ara es va divulgant amb el nom de geometria no euclidiana, ni quin és el vostre judici. Sé que el professor Chelini és decididament advers, i que Bellavitis l'anomena geometria de manicomi: mentre que en Cremona creu que és discutible i en Battaglini l'accepta sense reticences. Jo me n'he ocupat un mica i he enviat a en Cremona uan exposició confidencial de les meves idees [...] - No tinc, però, intenció d'insistir molt sobre la qüestió, en primer lloc perquè caldria conèixer tots els treballs de Lobatxevski i de Bolyai, i perquè, com a idea general, abans d'abandonar-se a certes idees excessivament abstractes (encara que també admissibles, o no absurdes) em sembla que convé tenir la certesa de la seva fecunditat real.- Crec que també el rigorós i agut Genocchi és poc favorable a la geometria no euclidiana.
>
> [Beltrami a Tardy, Bologna 14/11/67[23]]

Per la seva part, Tardy era també contrari a la nova geometria. En unes cartes a Genocchi del 1867, diu que tot i la seva admiració per Gauss, no pot renunciar a les conviccions de tants anys, potser degut a la seva avançada edat i que les proposicions de Lobatxevski es dedueixen negant una veritat de la que està plenament convençut[24].

[23]A [46], p. 179-180.

[24]Veure les cartes amb data del 31/5/67 i del 24/7/67, citades a [23], p. 60. La primera també a [30], p. 48-49.

Els principals opositors a les noves idees, van ser A. Genocchi i G. Bellavitis. El darrer destaca especialment en la correspondència entre els protagonistes per manifestar-se obertament i de manera molt directa contra les noves idees. Bellavitis compartia la postura realista de Bertrand com ell mateix confesa a Hoüel[25]. Considera que tots els axiomes provenen de l'experiència, en aquest punt està d'acord amb Hoüel, però no pot admetre un mon creat només a partir del raonament. La ciència serveix per explicar la realitat, i el mon real és necessariament aquell que és[26].

En la següent carta, veiem la reacció de Bellavitis, davant la postura dels "immaginaristes", que és també la de Hoüel, de que la geometria euclidiana és només una de les geometries possibles:

> Le monde réal est un cas particulier de monde possible et la geometrie réelle un cas particulier des géométries possibles .- Io la penso ben diversamente: la cose o sono o non sono; o certe o impossibili. Possibile è soltanto una vesta dell'ignoranza umana.- Che cosa intendete con mondi possibili?[...] Che cose vuol dire apparecchiarsi ad altre scienze ancora ideali, ma che pure ...[27] divenir reale un giorno a venire È qualche tempo che sento parlare della musica dell'avvenire; vi sono anche le scienze dell'avvenire?
>
> El mon real és un cas particular de mon possible i la geometria real un cas particular de les geometries possibles.- Jo ho concevo d'una manera ben diferent: les coses són o no són; o certes o impossibles. Possible és només una disfresa de la ignorança humana.-Què enteneu per mons possibles? [...] Què vol dir assemblar-se a altres ciències encara ideals, però que podrien esdevenir reals algún dia que està per venir? Fa temps que sento a parlar de la música del futur; hi ha també unes ciències de l'avenir?
>
> [Bellavitis a Hoüel, 2/7/72[28]]

[25]Carta de Bellavitis a Hoüel del 20/03/70, *Dossier Bellavitis*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris, Beltrami també ho diu a la carta a Hoüel, Bolonge 8/7/1870, transcrita al nostre apèndix, p. 220-221.

[26]Veure la carta de Bellavitis a Hoüel del 20/2/69, transcrita a l'apèndix de [23], p. 221.

[27]Aquí ve una paraula que no he pogut entendre en el manuscrit original; tradueixo la frase basant-me en el context.

[28]A la pàgina 4 de la carta que es troba al *Dossier Bellavitis* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

En quant a l'axioma de les paral·leles no creu que sigui diferent dels altres, també el coneixem a partir de l'observació de la realitat que ens envolta, i si es vol dubtar de la seva veracitat s'hauria de dubtar també de tota la geometria[29]. Bellavitis explica a Hoüel que comprendria que s'estudiés, si no es tingués clara la seva veracitat, per comprovar-la. Però, després dels experiments realitzats, ningú no dubta de que els angles dels triangles sumen dos rectes. El problema és només que la demostració no sembla rigurosa. No entén, llavors, que es vulguin estudiar les conseqüències de la negació d'aquest axioma, li sembla que és una cosa força "extravagant" voler raonar sobre una idea de la que s'està convençut que és falsa[30].

> Studierò anche il vostro Essai critique; sono persuaso che i principi della Geometria si debbano considerare come fatti di sperienza, alcuni dei quali ci sono entrati nella mente in guisa di crederli assiomi o principi prettamente razionali; ma non poso ammettere che si formi una pretesa geometria con principi differenti; se non si crede che una cosa sia rigorosamente dimostrata si potra porla in dubbio (ma ni uno già dubita della verità dei postulati d'Euclide) ma formare una scienza sopra un'ipotesi opposta la mi pare una grande aberrazione delle menti ragionatrici.
>
> Estudiaré també el vostre Essai critique; estic convençut de que els principis de la geometria s'han de considerar com a fets experimentals, alguns d'ells han entrat en la ment de tal manera que els creiem axiomes o principis purament racionals; però no puc admetre que es formi una pretesa geometria amb principis diferents; si no es creu que una cosa estigui rigurosament demostrada es pot posar en dubte (tot i que ningú dubta ja de la veritat dels postulats d'Euclides) però formar uan ciència sobre una hipòtesi oposada em sembla una gran aberració per les ments raonadores.
>
> [Bellavitis a Hoüel 5/5/68 [31]]

Un any més tard, havent llegit l'*Essai critique*, li escriu dient que està content de que estiguin d'acord en la majoria, ja que si no no podrien filosofar junts, i opina sobre diversos punts de l'article. En particular, en referir-se a la

[29]Carta de Bellavitis a Hoüel del 30/4/1868, *Dossier Bellavitis*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[30]Veure carta de Bellavitis a Hoüell del 11/6/68, *Archive Hoüel*, Bibliothèque Municipale de Caen.

[31]*Archive Hoüel* de la Bibliothèque Muncipale de Caen.

geoemtria de Bolyai i Lobatxevski, comenta:

> Pag. 77. La G. d'E. è certamente vera, au moins dans les limites de nos observations!! Per me invece di G. astratta dirò G. falsa, oppure G. della pseudoesfera, non del piano.
>
> Pag. 77 La G. d'E. és veritablement certa, al menys dins els límits de les nostres observacions!! Jo en lloc de G. abstracta diria G. falsa, o bé G. de la pseudoesfera, no del pla.
>
> [Bellavitis a Hoüel 5/11/69[32]]

La referència a la geometria de la pseudosefera es deguda a que Bellavitis considerava que el descobriment de Beltrami suposava, en realitat, un bon argument contra la geometria de Lobatxevski, per molt que Beltrami es declarés com a partidari.

> In quanto a tutto quel catafalco della geometria antiEuclidiana il mio amico Beltrami ha dimostrato che essa è una verissima teoria di proprietà delle geodetiche tracciate su una speciale superficie avente in ogni punto la stessa misure di curvatura (con due raggi di curvatura opposti), io non conosco ancora la sua memoria, spero che essa coglierà tutto il prestigio a quella aberrazione!
>
> Respecte a tota aquella parafernàlia de la geometria antiEuclidiana el meu amic Beltrami ha demostrat que és una teoria molt certa sobre les propietats de les geodèsiques traçades sobre una superfície especial que té en cada punt la mateixa mesura de curvatura (amb dos rajos de curvatura oposats), jo no conec encara la seva memòria, espero que li prendrà tot el prestigi a aquella aberració!
>
> [Bellavitis a Hoüel 30/4/68[33]]

Seguramanet, Hoüel devia quedar estranyat per aquestes paraules, doncs per ell la citada memòria solucionava la qüestió, justament. en el sentit contrari. Beltrami li explica perquè Bellavitis podria haver-se recolçat en les seves recerques per comfirmar la seva aversió a la geometria no euclidiana. Sembla que el primer cop que havia parlat amb Bellavitis sobre la qüestió encara no creia totalment en la veritat d'aquesta teoria, i en les posteriors ocasions,

[32]Veure les p. 4 i 5 de la carta, al *Dossier Bellavitis* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[33]La carta es troba al *Dossier Bellavitis* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

tenint poc temps, li havia declarat simplement haver trobat l'explicació completa *per l'analisi*. Segons Beltrami, aquesta explicació no devia ser del gust de Bellavitis, una persona que pensa que els imaginaris només tenen valor com a construcció geomètrica, i no l'hauria tingut en compte [34]. Però de les paraules de Bellavitis es desprén que la veritable raó és que considerava que Beltrami havia demostrat que la teoria de Lobatxevski no tracta sobre els plans i les rectes, sinó sobre unes altres superfícies, les pseudoesferes, i les seves geodèsiques[35].

Aquesta era també la valoració de Genocchi, qui compartia completament l'opinió de Bellavitis respecte a la geometria no euclidiana[36]:

> Del resto a me pare che le Memorie del prof. Beltrami abbiano ucciso la Geometria non Euclidea provando che questa non era che una illusione poiché si credeva di fare la geometria del piano mentre si faceva invece la geometria delle superficie pseudosferiche.
>
> Per la resta, a mi em sembla que les Memòries del professor Beltrami han matat la Geometria no Euclidiana provant que aquesta no era més que una il·lusió, doncs, es pensava que es feia geometria del pla mentre que, en canvi, es feia la geometria de les superfícies pseudoesfèriques.
>
> [Genocchi a Betti, Torino 1/4/89 [37]]

Com veiem, en les cartes que escriu a Hoüel[38], Bellavitis deixa clara reiteradament la seva "obstinació contra tot allò que és immaginari"[39]. Opinió que, com és ben conscient, no comparteix el seu interlocutor:

> Pur troppo non poso dissimularmi che noi siamo in due campi opposti, voi in numerosissima ed ottima compagnia nel campo degli *immaginaristi*; io rimasto quasi solo in quello dei *realisti*.

[34] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologne 4/12/68 [23], p. 69-70.

[35] Veure també la carta de Bellavitis a Hoüel del 20/2/69, a l'apèndix de [23], p. 221; i la del 30/3/70, al *Dossier Bellavitis*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[36] Veure la carta de Hoüel a De Tilly del 9/10/1873, citada per [100], p. 184-185, que es conserva al *Dossier De Tilly* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[37] A l'apèndix de [23], p. 247-248.

[38] A més de les citades, altres cartes interessants sobre aquesta discussió són les datades el 3/6/68, a l'*Archive Hoüel* de la Bibliothèque Muncipale de Caen, el 24/10/1868, el 3/6/71 i el 20/2/70, al *Dossier Bellavitis* dels Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[39] Carta del 20/2/69, transcrita a l'apèndix de [23], p. 221: "Credo avervi ancora confessato la mia ostinazione contro tutto quanto è immaginario".

> Malauradament no puc disimular que estem en dos camps oposats, vos en numerosa i òptima companyia en el camp dels *immaginaris*; jo m'he quedat pràcticament sol en aquell dels *realistes*
>
> [Bellavitis a Hoüel 2/3/76 [40]]

Tot i aquesta discrepància, la correspondència entre els dos matemàtics és molt nombrosa i mostra una bona amistat. En certa ocasió Bellavitis s'escusa a Hoüel per expressar-se amb tant entusiasme, dient que no fer-ho aniria en contra del seu caràcter i que a més es troba en aquella edat en que un es torna poc flexible sobre algunes idees fixes, i valora l'amistat que els uneix tot i no compartir les mateixes idees[41]. Sembla ser que Bellavitis era un home que, a més de gran talent, tenia una forta personalitat, segons Beltrami, amb "tendència a l'excesiva originalitat"[42], i es va mantenir ferm en la seva convicció:

> Fui di solo a Torino ed a Milano vidi Genocchi che non approva ciò che scrisse Bertrand sulla Geometria ... ma siccome io partecipo invece alla opinione del Bertrand, così in ... ... della Decima che ora ... ... ; io ritorno sulla mia idee eterodosse a rischio di tirarmi addosso la disapprovazione se non publica privata di Cremona, Battaglini e Beltrami.
>
> Vaig anar sol a Turí i Milà i vaig veure en Genocchi que no aprova el que va escriure Bertrand sobre la Geometria ... però com que jo comparteixo, en canvi, l'opinió d'en Bertrand, així en ... ... de la Decima[43] que ara ... ...; torno sobre les meves idees hetereodoxes a risc de tirar-me a sobre la desaprovació si no pública, privada, de Cremona, Battaglini i Beltrami.
>
> [Bellavitis a Hoüel 20/3/70 [44]]

[40] Pàgines 2-3 de la carta que es troba al *Dossier Bellavitis*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[41] Veure la carta a Hoüel del 24/10/68, *Dossier Bellavitis*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

[42] Veure la carta de Beltrami a Hoüel, Bologne 4/12/68, a [23], p. 69-70, on explica algunes anècdotes que mostren el peculiar caràcter de Bellavitis.

[43] *Decima rivista di giornali*, el desè número de la revista que editava G. Bellavitis.

[44] Al *Dossier Bellavitis*, Archives de l'Académie des Sciences de Paris. La lletra del manuscrit original està una mica esborrada, hem posat punts suspensius en el lloc de les paraules que no hem pogut llegir.

En la postura oposada es troba principalment Battaglini, qui va acceptar la nova geometria des del moment que la va conèixer:

> Il Prof. Bellavitis ha sentenziato che accadrà alla Geometria non-euclidea come alle tavole giranti, o non so a quali altre stranezze, che dopo un po' di rumore sono cadute in dimenticanza. Per me ritengo invece che se si scrivessero bene gli Elementi della nuova Geometria, se ne ammirerebbero la generalità e l'armonia.
>
> El Prof. Bellavitis ha sentenciat que la Geometria no euclidiana esdevindrà com a les taules giratòries[45], o no sé a quines coses estranyes que després d'una mica de soroll han caigut en l'oblit. Jo penso, en canvi, que si s'escribissin bé els *Elements* de la nova Geometria se n'admirarien de la seva generalitat i l'harmonia.
>
> [Battaglini a Genocchi, Nàpols 24/4/1870[46]]

No es coneix cap document en que Battaglini exposi les seves raons per donar suport a la geometria no euclidiana, però com hem anat veient, no dubte en cap moment sobre la seva validesa. Segurament, Battaglini, poc interessat en les qüestions metafísiques de la ciència, en veure que podia explicar la geometria de Lobatxevski mitjançant les eines habituals de la geometria projectiva va considerar que era matemàticament acceptable. No oblidem, a més, que Battaglini es va adonar de que la geometria imaginària es podia estudiar prenent un cas no degenerat de la cònica de l'Absolut de Cayley. Tenint, per tant, clar que està inclosa en la geometria projectiva i que aquesta era una teoria acceptada, no és d'extranyar que l'aprovés sense recances.

A les seves cartes, Battaglini tampoc mostra preocupació per l'existència real de la geometria no euclidiana. Com que la dóna per vàlida des del principi, les seves inquietuds estan més aviat relacionades amb les repercusions que pot tenir aquesta nova teoria. Per exemple, per com afectaria a la mecànica, i molt especialment, per si comporta la necessitat de canviar la doctrina de l'espai. De fet, considera que cal trencar amb la visió euclidiana de l'espai i redefinir-lo seguint les idees de Riemann.

[45]Hem traduït "tavole giranti" literalment per "taules giratòries", no sabem a què es deu referir Battaglini.
[46]A [30], p. 171.

A diferència de Hoüel i Battaglini, Beltrami no accepta immediatament la geometria no euclidiana. Com molts dels seus contemporanis, considera necessari que pugui tenir una interpretació real. És només quan aconsegueix explicar-la en termes de la ja coneguda geometria diferencial que es convenç de la seva validesa.

Com ell mateix diu, en la seva primera redacció, enviada a Cremona, havia valorat que la seva interpretació geomètrica era només vàlida per la planimetria, el que l'induïa a no creure en l'estereometria[47].

En llegir la memòria de Riemann, on s'introdueix el concepte de varietat n-dimensional i s'estudien sense pensar-les incloses en l'espai real, Beltrami veu un fonament per explicar la geometria no euclidiana en qualsevol dimensió. És conscient de que només pot donar una "interpretació geomètrica" com la del *Saggio* a la planimetria, però sí pot donar, en canvi, una "interpretació analítica" basant-se en les noves aportacions a la geometria diferencial. L'estereometria de Lobatxevski és la geometria intrínseca d'una varietat de Riemann 3-dimensional de curvatura constant negativa. Es tracta, doncs, d'un cas particular de la geometria de riemanniana, que és certa i està acceptada. Per tant, l'estereometria no euclidiana també ha de ser acceptada, encara que no li puguem donar una interpretació "real" en el mateix sentit que hem fet amb la planimetria. De fet, amb l'argument de Beltrami, aquest tipus d'interpretació ja no és necessària.

6.2 La solució al problema de la consistència

En la matemàtica moderna actual es considera que una teoria és vàlida si es construeix seguint deduccions lògiques a partir d'un conjunt d'axiomes. A diferència del que es creia anteriorment, no es preten que aquests axiomes siguin veritats, però es demana que compleixin una sèrie de propietats. En primer lloc, a partir dels axiomes no s'ha de poder demostrar un resultat a la vegada que el seu contrari, diem que el conjunt d'axiomes ha de ser *consistent*. A més, els axiomes han de ser *independents* els uns dels altres, és a dir, no ha de ser possible demostrar un a partir dels altres. També podem

[47]Recordem la carta a a Hoüel del 18/11/68 on es refereix a la geometria no euclidiana de tres dimensions com a "al·lucinació geomètrica". A [23], p. 66.

definir aquest concepte dient que un axioma és independent dels altres si tant en prendre el sistema d'axiomes amb la seva afirmació com en prendre'l amb la seva negació obtenim teories consistents, o dit d'una altra manera, no arribem a contradicció en cap dels dos casos.

Parlant en aquests termes, els treballs de Bolyai i Lobatxevski demostren la independència del postulat de les paral·leles, doncs, construeixen una teoria matemàtica sense contradiccions basada en la negació del postulat, de la mateixa manera que la geometria euclidiana no obté contradiccions partint de l'afirmació del postulat. Però no oblidem que, encara que no hagin trobat cap contradicció, hi podria haver alguna.

En una teoria axiomàtica abstracta es tenen també una sèrie de *nocions primitives* o *no definides*, com per exemple els termes punt i recta[48]. Donar un model de la teoria, consisteix en donar una interpretació de les nocions no definides de manera que es compleixin els axiomes. Si podem proporcionar un model per un determinat sistema axiomàtic podem dir que és consistent.

Els models solucionen el problema de la consistència de la següent manera. Suposem que tenim un model on són vàlids tots els axiomes d'una determinada teoria abstracta. Si en aquesta teoria poguéssim demostrar un teorema i el seu contrari, també els podriem demostrar sobre el model. Però el model està construït en base a l'aritmètica, la teoria de conjunts o, en el cas del de Beltrami, la geometria euclidiana, per tant, una contradicció en el model significaria la no consistència d'aquestes teories que ja hem acceptat com a vàlides[49]. Llavors, si podem proporcionar un model per un determinat sistema axiomàtic podem dir que és almenys tan consistent com la teoria en la que s'ha construït el model. En conseqüència, el que es demostra amb el model de Beltrami és que la geometria no euclidana és tan consistent com l'euclidiana.

Beltrami és considerat, doncs, el primer en donar una prova definitiva de la consistència relativa de la geometria no euclidiana, en haver proporcinat

[48]Les nocions primitives que Hilbert va donar per la geometria euclidiana són els termes: punt, recta i pla, i les reslacions d'ordre, pertinença i congruència.

[49]El que no vol dir que s'hagi demostrat la seva consistència. Hilbert va veure que la consistència de la geometria euclidiana es redueix a provar la consistència de l'aritmètica. Però, el 1931, Gödel va demostrar que no es pot provar la consistècia de l'aritmètica a partir d'ella mateixa.

un model per aquesta teoria. Aclarim però, que Beltrami no veia la nova geometria com un sistema d'axiomes i no pensava en la teoria de models quan va escriure el *Saggio*, principalment, perquè en aquell moment encara no s'havia fet la reconstrucció de la matemàtica mitjançant la lògica, i no es parlava en aquests termes.

La raó per la que es fa aquesta afirmació, és que les conclusions a les que va arribar es poden reformular segons la teoria de models. El disc descrit per Beltrami, constitueix un model en el sentit lògic modern, ja que dóna una interpretació de les nocions no definides punt i recta hiperbòlica, com a punts i segments de l'interior del disc, de manera que es cumpleixen els axiomes no euclidians, en particular, que per un punt exterior a una recta passen més d'una recta paral·lela a aquesta.

No obstant, Voelke senyala el següent fragment d'una carta de Beltrami a Hoüel, considerant que és el primer cop que apareix la idea de model en el sentit modern[50]

> Mais il y a, je crois, un autre moyen simple d'éluder cette difficulté, c'est de se rappeler que la surface pseudosphérique peut être, comme je l'ai démontré représenter complètement sur la surface finie d'un cercle ordinaire, *point* par *point*.[...]
>
> Però crec que hi ha un altre mitjà més senzill d'eludir aquesta dificultat [provar la impossibilitat de demostrar el postulat d'Euclides amb una construcció plana], enrecordar-se de que la superfície pseudoesfèrica pot ser, com vaig demostrar, completament representada sobre la superfície finita d'un cercle ordinari.
>
> [Beltrami a Hoüel 11/7/1871[51]]

Tot i no adoptar el punt de vista de la lògica formal, tant Beltrami com Klein, són conscients de que han donat les raons suficients per acceptar la validesa de la geometria no euclidiana.

Beltrami, en veure que les varietats de Riemann de curvatura constant negativa tenen com a geometria intrínseca la de Lobatxevski, demostra que la geometria no euclidiana es pot deduir, mitjançant l'anàlisi ordinaria, de la teoria general de superfícies de Gauss. No té dubtes, per tant, sobre la

[50]Veure [100], p. 178.
[51]La carta sencera es troba a [23], p. 156-158.

seva coherència lògica. La geometria diferencial, de la que no es discuteix la certesa, engloba les tres geometries: euclidiana, esfèrica i pseudoesfèrica. La darrera, doncs, és exacatament igual de vàlida que la geometria intrínseca de qualsevol altre superfície, com la de l'esfera o l'euclidiana del pla.

De la mateixa manera, Klein demostra que aquestes tres geometries es poden mirar com a determinats casos de la geometria projectiva i que per tant, cap d'elles presentarà contradiccions, si acceptem prèviament la consistència de la geometria projectiva.

Beltrami explica en diverses ocasions com el seu punt de vista demostra la validesa de la geometria de Lobatxevski. Les seves raons es basen en que que la geometria diferencial és independent de l'acceptació o negació del postulat de les paral·leles. És la fórmula de l'element lineal la que defineix la geometria intrínseca d'una superfície, i és del tot irrellevant si s'admet o no el postulat, ja que les propietats de la superfície es dedueixen només a partir d'aquesta fórmula.

> Je crois que votre difficulté ne vient pas du sujet dont il s'agit, mais des principes qui sont supposés par moi relativement à la doctrine de Gauss sur les seurfaces courbes. Il me semble que cette doctrine n'a pas trouvé généralement sa complète "Würdigung", à tel point que personne n'a encore remarqué ce fait capital, savoir qu'*elle est entièrement indépendante du postulat d'Euclide.* Je suis convaincu que le jour où vous me donnerez raison sur ce point, vous vous rendrez immédiatement compte d'une foule de détails qui peut-être ne vous semblent pas bien clairs maintenant, et, surtout, vous comprendrez parfaitement comment Gauss devait être nécessairement amené à créer, au moins dans sa tête, la géométrie de Lobatchevsky et de Bolyai, ainsi qu'il l'a affirmé.
>
> Crec que les vostres dificultats no venen del tema al que us refereiu, sinó dels principis que suposo relatius a la doctrina de Gauss sobre les superfícies corbes. Crec que, en general, aquesta doctrina no ha estat completament apreciada, fins al punt que ningú ha remarcat encara aquest fet captital, que *és totalment independent del postulat d'Euclides.* Estic convençut de que el dia que em doneu la raó sobre aquest punt, us adonareu immediatament d'una multitut de detalls que potser ara no us semblen prou clars, i, sobretot, comprendreu perfectament que Gauss va arribar necessàriament a creure, al menys

> en el seu cap, en la geometria de Lobatxevski i Bolyai, tal com va afirmar.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 19/12/69[52]]

I en una carta posterior, escriu:

> Pour mieux dire, la formule (1) est en quelque sorte *antérieure* à toute hypothèse (hors celle de la continuité), en ce sens quel la forme spéciale de ses coefficients décide d'elle même sur l'hypothèse que l'on veut admettre.
>
> M'explico millor, la fórmula (1)[53] és d'alguna manera *anterior* a qualsevol hipòtesi (llevat de la de continuïtat), en el sentit de que és la forma determinada dels seus coeficients la que decideix les hipòtesis que es volen admetre.
>
> [Beltrami a Hoüel, Bologne 2/01/1870[54]]

6.3 Validesa i realitat

Gauss i Lobatxevski, en trobar-se amb la geometria derivada de la negació del postulat d'Euclides, van tenir el següent conflicte, veien que tenien un sistema geomètric coherent però que no estava en acord amb la realitat. Llavors, la simple consideració de que es pogués fer una geometria negant el postulat d'Euclides, així com la idea de comprovar experimentalment si era cert, ja era prou revolucionària, doncs anava totalment en contra de la filosofia kantiana.

En el moment de la renaixença de la geometria no euclidiana, però, el debat sobre l'acceptació havia passat a uns altres termes. Uns matemàtics l'acceptaven perquè és lògicament coherent i per tant, certa en un sentit abstracte, mentre que altres la rebutjaven perquè no es dóna en el mon real, i llavors, el seu estudi no té cap interés. La principal preocupació era doncs, saber si la geometria hiperbòlica existia en la realitat.

[52] A [23], p. 108.
[53] Es tracta d'una fórmula d'element lineal, en concret $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$.
[54] A [23], p. 117.

Pensem que a diferència de la geometria esfèrica, que es podia aplicar a una superfície coneguda, no es coneixia cap aplicació de la geometria hiperbòlica a l'espai físic. Per molts, era necessari veure si existia realment una superfície amb aquesta geometria.

El 1865, Cayley al seu comentari *Note on Lobatschewsky's Imaginary Geometry* [32], exposa que Lobatxevski ha provat que podria existir una geometria basada en la hipòtesi que la suma dels angles és menor que dos rectes, si no a la realitat, al menys a l'anàlisi i que seria interessant trobar una interpretació geomètrica real d'aquesta teoria.

Beltrami, troba una superfície de revolució, la pseudoesfera, on es dóna localment, la geometria de Lobatxevski, mostrant que es pot aplicar a un objecte real. Donant, així, resposta a la crida a trobar una interpretació real de la geometria no euclidiana[55].

La proposta de Beltrami es va enfrontar a diverses crítiques, formulades principalment per A. Genocchi[56], qui no creia que la construcció de Beltrami donès una prova de la validesa de la geometria no euclidiana. Les objeccions són les següents: dos punts diferents de la pseudoesfera poden coincidir en el mateix punt de l'espai, no hi ha una demostració rigurosa de la propietat de la pseudoesfera d'estendre's indefinidadment, la pseudoesfera no és simplement connexa, i finalment, Genocchi diu que cal demostrar que existeix almenys una integral de les equacions en derivades parcials que expressen les superfícies de curvatura constant, que satisfà totes les condicions suposades per la pseudoesfera[57].

La darrera és la més substancial, de fet és el punt clau en que radica la discrepància. Novament, es posa de manifest, com hem dit en anteriors ocasions, la manca de comprensió amb que encara es trobaven els treballs de Gauss i Riemann. Pels que no entenien el nou punt de vista, la validesa de

[55]Stump a [97], p. 25-26, diu que li agradaria poder probar que Beltrami buscava donar la interpretació real que Hoüel demanava a l'*Essai Critique*. Al capítol 5 d'aquesta tesi, ha quedat clar, però, que Beltrami no tenia aquesta intenció. Ara bé, sens dubte, va ser conscient de que responia a aquesta qüestió, doncs coneixia bé els treballs de Hoüel, com diu Stump, veure la carta a Hoüel del 14/12/68, a [23], p. 68.

[56]Veure sobre aquesta qüestió l'article de L. Giacardi i L. Fenoglio *La polemica Genocchi-Beltrami sulle superficie pseudosferiche: una tappa nelle storia del concetto di superficie*, a [34], p. 155-209.

[57]Aquesta és també la de Helmholtz i Klein.

la geometria no euclidiana depén de que es pugui trobar o no la realització de les superfícies pseudoesfèriques abstractes, és a dir, de la existència d'un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ que cumpleixi totes les propietats del pla no euclidià.

> Ma non pare strano anche a voi che quella superficie si prenda per tipo delle pseudosferiche? A me fa lo stesso effetto come se si prendesse la superficie cilindrica di rivoluzione per tipo delle superficie piane. [...]
> Per me dunque nella teoria delle pseudosferiche il punto fondamentale, la proposizione da cui bisogna cominciare, il *porro unum est necessarium*, è dimostrare che tale superficie esistono.
>
> No us sembla també extrany a vos que aquella superfície es prengui com exemple de les pseudoesfèriques? A mi em causa el mateix efecte que si es prengués la superfície cilíndrica de revolució com a exemple de les superfícies planes[58]. [...]
> Així doncs, per mi, en la teoria pseudoesfèrica el punt fonamental, la proposició per la que caldria començar, el *porro unum est necessarium*, és demostrar que aquestes superfícies existeixen.
>
> [Genocchi a Betti, Torino 29/7/72 [59]]

Sembla que ni Bellavitis ni Genocchi creien que aquestes superfícies poguessin existir[60], i no anaven equivocats. De fet, Hilbert demostrarà un any després de la mort de Beltrami, que la realització d'aquestes superfícies no existeix dins de l'espai real.

La superfície de revolució donada per Beltrami, la pseudoesfera, és el més proper a una realització que podem aconseguir, ja que és localment isomètrica al pla no euclidià. Però no és exactament igual que un pla euclidià, i efectivament, presenta tots els altres problemes que menciona Genocchi.

Genocchi no va aconseguir acceptar els raonaments basats en la teoria de Gauss, tot i les explicacions que va rebre per part dels seus amics Hoüel[61] i Betti:

> In questi lavori una superficie si considera soltanto come uno spazio, o forse dicendo meglio, come una varietà di due sole dimensioni definita

[58]Genocchi fa aquest comentari arrel d'haver llegit l'article de Beltrami, publicat al Giornale, sobre la superfície generada per la tractriu [17].

[59]A l'apèndix de [23], p. 246-247. Veure també la carta a Betti, sense data, de la p.240.

[60]Veure la carta de Genocchi a Betti, Torino 4/2/71, a l'apèndix de [23], p. 241-242.

[61]Veure la carta de Hoüel a Genocchi, 1/2/71

> dalla espressione del suo elemento lineare; si astrae completamente dalla forma speciale che essa può avere nello spazio a tre dimensioni al quale non ci riferieamo più affato.[...]
>
> En aquests treballs[62] una superfície es considera només com un espai, o millor dit, com una varietat de dues dimensions definida per l'expressió del seu element lineal; s'abstreu completament de la forma especial que aquesta pot tenir a l'espai de tres dimensions al que, de fet, ja no ens referim més.
>
> [Betti a Genocchi, Sojana 16/8/71[63]]

Beltrami, en canvi, té clar que l'existència o no existència d'aquesta realització a $\mathbb{R}^3$ no afecta en absolut al fet que el seu treball demostra la validesa de la geometria no euclidiana. Les superfícies pseudoesfèriques existeixen en el sentit donat per Riemann i es pot estudiar la seva geometria intrínseca que resulta que és la de Lobtxevski.

> M. Genocchi croit, avec beaucoup de personnes, que l'on ne puisse parler de coordonnées curvilignes u, v sur une surface sans supposer connues ou sans considérer au même temps les trois fonctions $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ exprimant les trois coordonnées cartésiennes par u, v. Or cela est tout-à-fait en dehors de l'esprit de la théorie de Gauss à laquelle j'ai toujours voulu me tenir attaché.
>
> El Sr. Genocchi creu, com moltes persones, que un no pot parlar de les coordenades curvilínies u, v d'una superfície sense suposar conegudes o sense considerar al mateix temps les tres funcions $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ que expressen les tres coordenades cartesianes per u, v. Quan això està totalment fora de l'esperit de la teoria de Gauss a la que jo sempre m'he volgut mantenir vinculat.
>
> [Beltrami a Hoüel, 3/3/71[64]]

Ara bé, Beltrami està d'acord en que com que no coneixem la funció $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ que descriu la superfície com a subconjunt de $\mathbb{R}^3$, la integral a la que es refereix Genocchi, en realitat, no podem saber si les

[62] Es refereix als treballs de Beltrami, el *Saggio* i el *Teoria Fondamentale*, que van ser criticats per Genocchi.

[63] A l'apèndix de [23], p. 232. Aquesta carta és, probablement, la resposata a la que li escriu Genocchi amb data 18/6/71, apèndix de [23], p. 244-245 i d'altres cartes anteriors on també li planteja dubtes sobre el tema, que podem llegir al mateix apèndix.

[64] A [23], p. 155.

superfícies pseudoesfèriques existeixen en l'espai real. I en això sembla que la seva opinió és propera a la de Bellavitis, ja que intueix que trobar-la seria molt complicat.

> Mais, comme l'on ne connâit pas l'intégrale générale de cette surface en coodonnées ordinaires x, y, z (inégrale que l'analyse actuelle est probablement bien éloignée de pouvoir donner), et que, par suite on ne connâit pas la forme la plus générale de cette surface, on ne peut démontrer, a priori, qu'elle peut existir dans l'espace ordinaire au double état d'indéfinité en tous les sens et de simple connexion.
>
> Però, com que no es coneix la integral general d'aquesta superfície en coordenades ordinàries x, y, z (integral que l'anàlisi actual està probablement ben lluny de poder donar), i que, per conseqüent no es coneix la forma més general d'aquesta superfície, no es pot demostrar, a priori, que pot existir dins de l'espai ordinari en el doble estat d'indefinitat en tots els sentits i de connexió simple.
>
> [Beltrami a Hoüel, 2/1/70[65]]

Beltrami distingeix, doncs entre la validesa de la geometria no euclidiana, que està convençut que ha demostrat, i l'existència física d'una superfície completa que tingui aquesta geometria.

De fet, després de les publicacions de Beltrami, només els matemàtics realistes continuaren veient la necessitat de demostrar l'existència de la tant cercada superfíce. La resta havia tingut prou amb la base analítica que li havia proporcionat Beltrami, és a dir, amb que estiguès fonamentada en una teoria acceptada. A partir de 1880 seràn pocs els matemàtics que es mantinguin en una postura contrària a la geometria no euclidiana.

[65]A [23], p. 114.

Apèndix A

Cartes a J. Hoüel

Totes les cartes que transcrivim a continuació es troben a l'*Archive Hoüel* de la Bibliothèque Muncipale de Caen.

Les paraules que estaven subratlllades al manuscrit, les hem escrit en cursiva. Ens ha estat impossible entendre algunes de les paraules a causa de que el paper estava deteriorat o de que la tinta s'havia esborrat, en aquests casos escriurem [...] en substitució de la paraula o paraules inintel·ligibles. Hem fet servir el mateix símbol en algun cas en que no hem estat capaços d'entendre la caligrafia.

A.1 Cartes de G. Battaglini a J. Hoüel.

IN 4 333 (43)

Naples 21 juillet 1867

Monsier et cher Collègue.

J'espère que vous aurez reçu la Pangèométrie, que je vous avait envoyée avant de recevoir votre dernière lettre. Le mois prochain j'en ferai paraître la traduction dans le *Giornale di Mathematiche*.
De vos brochures M. Rubini ne m'a donné que les Etudes géométriques sur la thèorie des Parallèles de Lobatschewsky, et vos Tables arithmétiques pour servir d'Appendice à l'Introduction à la theòrie des nombres de M. Le Besgue,

je n'ai pas votre Mémoire *sur la développement des fonctions etc.* et je serai bien [...] d'en recevoir un exemplaire, à moins que cela ne vous démanger.
Ne renoncez pas à votre projet de visiter l'Italia, c'est avec le plus grand plaisir que je ferai votre connaissance personnelle.
Agréez, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de mes sentiments d'estime et d'amitié.

Votre dévoué.
G. Battaglini

IN 4 333 (44)

Naples 6 Août 1867

Monsieur et cher Collègue.

Je réponds avec retard à votre aimable lettre du 20 juillet à cause d'une indisposition arthritique què mà empeché d'écrire. Je sais que ma Note sur la Géométrie de Lobatschewsky aurait besoin d'être plus clairement développée: voilà les éclaircissements que je puis vous donner sur le point què vous a arrêté.
Si les points (m, n) de la droit L, et les droits (M, N) qui passent par le point p étaient tout à fait arbitraires, la relation entre les quantités

$$(1) \qquad \frac{Senmw}{Senwn}, \frac{sinMR}{sinNR}$$

qui déterminent le point w de L et la droite R conduite par p et w, serait de la forme

$$(2) \qquad \alpha\frac{Sinmw}{Sinwn}\cdot\frac{senMR}{sinRN}+\beta\frac{Sinmw}{Sinwn}+\gamma\frac{sinMR}{sinRN}+\delta=0$$

$(\alpha$, β, γ, δ étant des coéfficients constants, puis que chacun des deux rapports (1) doit être une fonction *uniforme* de l'autre; mais lorsque les droites (M, N) partent respectivement par les points (m, n) , on a eu même temps pour les positions particulières (m, M), (n, N) de $(w, R))$

$$Sinmw = 0, sinMR = 0$$

$$Sinwu = 0, sinRN = 0$$

d'où $\delta = 0$, $\alpha = 0$, et par consequent

$$\beta\frac{Sinmw}{Sinwn} + \gamma\frac{sinMR}{sinRN} = 0$$

,

$$\frac{Sinmw}{Sinwn} = \lambda\frac{sinMR}{sinRN}$$

$$\lambda = -\frac{\gamma}{\beta} = const$$

Ce sera un honneur pour moi qu'un estrait de mon écrit soit inséré dans les Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux; faitez à ce sujet tout ce que vous voudrez. En vérité jusqu'à ce moment je n'ai pas en le loisir d'étudier sérieusement le *Tentamen* de Bolyai, j'espère que j'en aurai la patience lorsque les grandes chaleurs de l'été serait passées. Comme je vous dirais dans ma dernière lettre je n'ai pas votre Mémoire sur le développement des fonctions en séries périodiques; e serais bien aise d'en avoir un exemplaire, si vous en auesi de disponibles.
Je viens justement de recevoir votre *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, que je lirai avec la plus grand intérêt, et pour lequel je vous remercie infiniment.
M. Rubini me charge de vous faire ses amitiés.
Je suis, Monsieur,

Votre très dévoué et affectionné
G. Battaglini

P.S. Je vous remets un exemplaire de mon dernier écrit sur les Formes Ternaires quadratiques.

IN 4 333 (46)

Naples 23 Novembre 1867

Monsieur et cher Collègue.

Après un très long silence, causé d'abord par les distractions des vacances d'automne, et puis par les graves préoccupations politiques, je viens enfin satisfaire au devoir de vous écrire, en vos remerciant avant tout de l'envoi de votre Mémoire sur l'*Interpolation*, et de vous deux si intéressants écrits, l'un sur *les quantités complexes*, et l'autre *sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*: tandis que dans le premier vous donnez une exposition entièrement rigoureuse d'une théorie si importante de l'Analysie moderne, dans le second vous posez les bases véritablement rationnelles sur lesquelles on doit fonder la Géométrie. Les fascicules des Actes de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux parvinrent à temps à l'Académie des Sciences de Naples, et à l'*Accademia Pontaniana*, les Actes de ces deux Académies envoyés en échange furent expédiés avec quelque retard, qu'on ne put éviter, mais ils seront sans doute arrivés maintenant à Bordeaux.
En quelques jours je pourrai publier entièrement la Pangéométrie, doit une partie est déjà imprimée dans la dernier cahier du *Giornale di Matematiche* de Naples. J'espère encore pouvoir bien tôt vous envoyer un second Mémoire sur *les formes ternaires quadratiques*; ce travail m'a empêché de continuer l'étude de la Géométrie de Bolyai; mais j'y retournerai bientôt. Veuillez agréer, mon cher Collégue, l'assurance de mes sentiments de vraie estime, est le sincère amitié.

Votre très dévoué
G.B

IN 4 333 (50)

Naples 2 Avril 1868

Monsieur et cher Collègue.

Je viens de recevoir votre intéressante lettre de 25 mars. Mr Anriti, à ce qu'il parait, ne suppose pas le moins du monde que ses spéculations métaphysiques

manquent de sens commun mathématique: ce Mr Anriti est un Magistrat, qui dans sa jeunesse a étudié les Mathématiques, probablement jausqu'à la Trigonométrie, et qui se croit pour cela le droit de nous donner l'organisation de la Science; en face de cette espèce de gens il faut dire avec le Poête
"Non ti curar di lor, ma guarda e passa."
J'ai hâte, autant que vous, de savoir s'il y a line d'espérer la publication des ouvres posthumes de J. Bolyai; et serait surtout intéressant de connaître sa Tétraédrométrie; tout ce qui regarde la mesure des volumes présente de grandes difficultés dans la Géométrie non-euclidéenne.
Pouvez vous me dire quelque chose à propos de l'ouvrage sur la nouvelle doctrine, qu'on attendait de Mr. Baltzer?
J'ai commencé à faire imprimer pour le *Giornale di Matematiche* la traduction de l'Appendix de Bolyai; elle paraîtra le mois prochain par la publication d'un résumé de la Géométrie de Lobatscewsky vous rendrez un nouveau service aux Géomètres; jusqu'à ce que ces saines doctrine ne voient parlées dans les Éléments, elles trouveront toujours des contradicteurs.
Je vous remercie de ce que vous avez envoyé à la rédaction des Nouvelles Annales de Mathématique un démonstration du théorème sur la pyramide.
Mr. Rubini vous fait ses compliments.

Votre très dévoué
G.B.

IN 4 333 (71)

Napoli 8 del 1868[1]

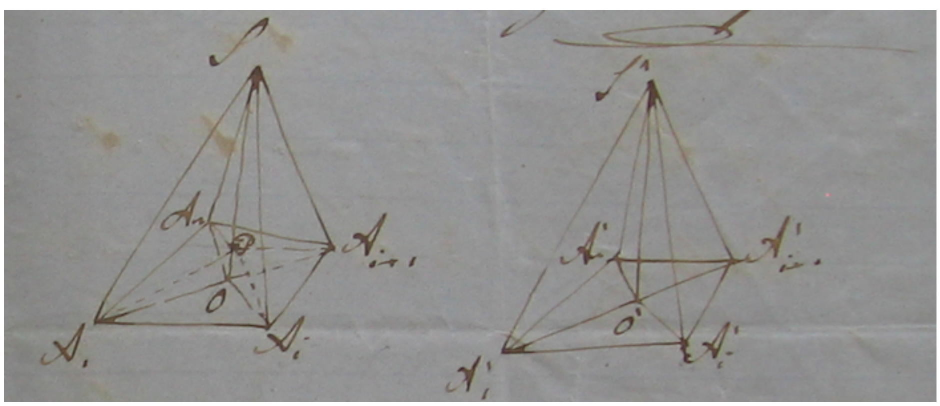
Signore, e caro Collega.

Sono dolentissimo che non siamo ancora pervenute costà la Memorie che l'Accademia delle Scienze di Napoli, e l'Accademia Pontaninana a cotesta Società di Scienze fisiche e naturali; ne ho tenuto parola con i segretarii della detta Accademie e spero che per l'avvenire non si rinnoveranno simili ritardi.
Io intenderei pubblicare la traduzione italiana dell'Appendix di Bolyai pel solo comodo dei lettori del Giornale di Matematiche, senza estrarne esemplari a parte; sicchè la vostra traduzione francese sarà sempre necessaria per

[1]Entenem que es refereix a l'1 de gener de 1868.

diffondere quell'interessantissimo lavoro.
Sento con piacere che due nostri colleghi siano opera a far conoscere i lavori geometrici di Lobatchewsky pubblicati in [...] è certo che queste nuove teoria non hanno ancora detto la loro ultima parola, e prima di oggi altro vi è ancora a estabilire la tetraedrometria, ed a sviluppare la Geometria analitica secondo i nuovi principii.
In verità non so approvare la pubblicazione degli Elementi di Euclide fatta da Betti e Brioschi, senza averli prima alquanto *rimodernati*; riconoscendo i difetti dell'attuale imparamento della Geometria elementare non conviene però esagerare in senso opposto.
Eccovi una dimostrazione del teorema della piramide; da voi enunciato, e che mi sembla sufficientemente semplice.
Vi prego di ringraziare i Sig.[r] Lespiault da parte mia, e dei colleghi de Gasparis e Rubini per l'invio della sua Memoria di Mecanica celeste.
Gradite, mio caro collega, l'attestato dei miei sentimenti di stima e di sincera amicizia.

G. Battaglini



Due piramidi poligonali $SA_1...A_iA_{i+1}...A_n$, $S'A'_1...A'_iA'_{i+1}...A'_n$ sono eguali allorchè hanno gli spigoli rispettivamente eguali e similmente disposti. Siano SO, $S'O'$ le altezze delle piramidi. Sarà

$$\overline{SA_i}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OA_i}^2, \quad \overline{S'A'_i}^2 = \overline{S'O'}^2 + \overline{O'A'_i}^2,$$

ed essendo $SA_i = S'A'_i$ per ipotesi, si avrà

$$\overline{O'A'_i}^2 - \overline{OA_i}^2 = \overline{SO}^2 - \overline{S'O'}^2 = (\text{supposiamo})\overline{OP}^2$$

Adunque

$$\overline{PA_i}^2 = \overline{OA_i}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{O'A'_i}^2,$$

quindi

$$PA_i = O'A'_i, \quad \text{similmente} \quad PA_{i+1} = O'A'_{i+1},$$

ma $A_iA_{i+1} = A'_iA'_{i+1}$, per ipotesi, dunque

$$\text{angolo}A_iPA_{i+1} = \text{angolo}A'_iO'A'_{i+1}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{ang}A_iPA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{ang}A'_iO'A'_{i+1}$$

risultato assurdo (a meno che P no coincida con O) poichè la prima somma è minore di quella di quattro angoli retti, mentre la seconda somma le è eguali. Adunque $SO = S'O'$, $OA_i = O'A'_i$ e quindi le due piramidi sono manifestamente eguali[2].

IN 4 333 (185)

Roma 18 ottobre 1875

Carissimo Collega ed Amico.

Ho ricevuto con molto piacere vostre memorie. Benchè gli Articoli di Peirce, di cui mi parlate, non siano propriamente quelli, molto più estesi, che io desiderava avere (e che sono inseriti nei Volumi precedenti degli Atti dell'Accademia americana delle Scienze), pure avrei curiosità di vedere anche questi, tanto per formarmi un concetto di quest'*Algebra Lineare associativa.* Da quanto mi dite, mi confermo nell'idea che si tratta di ricerche analoghe alle

[2]Battaglini torna a fer referència a aquesta demostració del teorema de les piràmides a la seva carta a Hoüel, Naples 5/8/68. La trobem a [30], p. 75-76. Aquesta demostració serà publicada als Nouvelles Annales l'any 1868. Veure la carta de Battaglini a Hoüel del 2/2/69 i n. 40, a [30], p. 79.

teorie dei *Quaterninoi*, delle *Chiavi algebriche dei numeri complessi di Grassman.* Vi sarei molto obbligato se vorreste avere la compiacenza di mandarmi questi due articoli del *Peirce*; io li tradurrò pel Giornale, si portano store da se, e poi ne le restituirò.
Spero potervi mandare fra breve un mio terzo scritto sulla *Geometria proiettiva* nel quale ho trattato dei *Connessi* di 1º grado nello spazio; questo lavoro, insieme a due altri dati all'Accad. dei Lincei, e che forze avreste ricevuti (*Sopra una superficie di 8º grado, e sulla Quintica binaria*) sono le sole produzioni che mi è riuscito di poter publicare in questo anno. Il Prof. Beltrami è qui, dove pare che rimanga, con grande piacere mio, e dei Colleghi. Farò conoscere ad alcuni dei miei colleghi le agevolazioni che offre il vostro *Bulletin*; senza di esse ancora [...] dovrebbe esser lieto di prender parte ad una opera così utile.
Vi stringo cordialmente la mano.

Il vostro ottimo.
G. Battaglini

A.2 Cartes d'E. Beltrami a J. Hoüel

Ms in.4º 333 (78)

Bologne 24 Mai 1869

Mon cher collègue,

J'ai reçu a son temps la seconde épreuve de la Note de M. Helmholtz, puis votre excellente lettre du 8, puis encore votre brochure sur la formule de Leibnitz. Je vous remercie bien vivement de toutes ces marques d'affection, auxquelles je n'ai pu répondre plus tôt. Je vous ai déjà dit que j'étais sus le coup d'un déménagement: i s'est fait, mais j'ai eu d'autres occupations pressantes. J'avais entr'autres, un peu légèrement, promis aux étudiants de leur passer des feuilles contenant les résumés de mes leçons (sur la Mécanique rationnelle). Comme j'avais déjà beaucoup de notes, dressées pour mon usage particulier dans les années passées, cette [...] m'a été facile jusqu'a un certain point; mais dans la seconde moitié du [...] j'ai voulu remanier tout ce matériel, le [...] différemment, ajouter des développements par-ci et en rebrancher par-là; et tout cela, avec la *conditio sine qua non* de me renfermer dans les limites les plus étroites possibles, a fini par me donner une peine assez considérable, dont je suis bien aide de m'être enfin délivré, aujourd'hui précisément. Car autant j'aime à pénétrer dans un sujet spécial, même lorsque je n'ai pas l'intention d'en faire une étude suivie et exclusive, autant in m'est désagréable de m'entourer de traités pour en faire des *excerpta* dans un tut purement seholastique. Et cependant, dans l'état actuel des études en Italie, il n'y a pas moyens de faire autrement, car le nombre des leçons est tellement borné, et les connaissances qu'on doit supposer aux élèves sont tellement ligères, qu'il n'y a absolument pas la possibilité de choisir un livre de texte et d'en développer regulièrement les diverses parties; il manquerait le temps pour combler l'immense lacune qui exisserait entre l'intelligence des élèves et le niveau de culture préliminaire qui est supposé dans un traité quelconque, que est un des plus élémentaires, quoique, à mon avis, excellent. J'ai fait quelque allusion à vos difficultés, dans une lettre que j'ai écrit a Mr. Helmholtz pour le remercier de son adhésion: mais jusqu'à présent je n'ai reçu aucune réponse. Il me semble que tout se résume dans la difficulté que vous avez d'attribuer un sens géométrique à une expression telle que $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ avant d'avoir expliqué la géométrie analytique. Je dois avouer que, indépendamment de tout le reste, je suis peu approprié à porter un jugement sur cette question, car j'ai tellement *bearbaitet* cette conception à tous les points de vue, qu'il m'est très difficile de me placer maintenant au point de vue de l'incrédulité. Cependant je ne perdrais pas de vue vos doutes et je tacherai de m'affranchir de tout préjugé pour m'en rendre complètement raison. Votre principe de ne faire intervenir les infiniment petits qu'après les quantités finies est certainement très exact en lui même; mais il me semble que dans le cas actuel on ne pêche pas nécessairement centre cette rêgle, du moins en adoptant un mode d'exposition convenable. En tout cas on trouve par l'analyse qu'il est toujours possible, au moins par les séries, d'assigner trois functions X, Y, Z de u et de v, telles que l'on ait identiquement $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, E, F, G étant des fonctions arbitraires de u et v. En [...] done l'existence de l'espace ordinaire et ce serait la même chose si on voulait admettre un espace différent, pourvu que l'expression de son élément linéaire fût quadratiques il existe toujours une surface (réelle ou imaginaire) dont l'élément linéaire a une forme donnée d'une manière quelconque.

Quant au procédé qui consiste à admettre certaines propriétés dans les éléments infiniment petits (procédé dont on trouve plusieurs exemples chez Riemann, et aussi chez moi, - quoique dans une occasion aù cela n'était pas nécessaire, comme je l'ai reconnu depuis), je crois qu'on peut l'adopter quelquefois, faute de mieux, et en voie provisoire. Il peut devenir nécessaire de le suivre, lorsqu'il s'agit de questions qui impliquent l'idée de *continuité*, car nous reconnaissons la continuité d'après les caractères des éléments infiniment petits. J'ai reçu dernièrement un Mémoire de M. Christoffel (différent de celui dont je vous ai déjà parlé), extrait des Mémoires de Berlin pour 1868, et intitulé: *Allgemeine Theorie a geodätischen Dreicke*. Il m'a semblé très interessant, et il faut que je l'étudie avec soin. Il termine paru une *Geodätische Classification der krummen Uberflächen*, fondée sur la possibilité de deplacer sur la surface un triangle géodésique sans en altérer les éléments trigonométriques: selon que ce déplacement est impossible, ou possible de différents manières, on a des classes différentes. La dernière classe est celle des surfaces où ce déplacement n'est sujet a aucune limitation, et ce sont les surfaces sphériques et pséudosphériques.

[...] à vous
E. Beltrami

Ms in.4º 333 (106)

Bolonge le 8 Juillet 1870

Cher collègue et ami

Les examents m'ont ôté dans ces jours tout loisir de songer à la correspondance; c'est une chose bien assommante, pour tout le monde. Les braves allemands ont bien trouvé le moyens de s'en priver, ou du moins de les réduire à leur plus simple expression: mais nous sommes encore bien loin de là.
Je vous remercie infiniment d'avoir bien voulu demander à M. Blatzer di mes envois lui étaient parvenus, et je vous prie de lui présenter "gelegentlich" mes salutations respectueuses. Je viens de recevoir de mon libraire la 3me édition de ses Déterminants, retour de Padoue, où je me rends demain matin pour y voir M. Cremona, comme je crois vous avoir annoncé déjà. M. Cremona a opéré la réconciliation avec M. Bellavitis, et il est même logé Chez celui-ci. Ils n'ont pas du reste échangé un mot sur les deux lignes qui avaient été la pomme de la discorde. À propos de M. Bellavitis, vous aurez vu, par sa

dernière *Rivista*, qu'il approuve la manière de penser de M. Bertrand, ce qui était bien à prévoir.

Je me hâte d'ajouter que les doutes qu'il élève sur sujet des lignes géodésiques de ce qu'il appelle la *tractoïde* sont absolument denuées de fondement et ne reposent que sur une équivoque. J'ai bien eu à "inspecter" le lycée de Pistoia et à faire par conséquent la connaissance de M. Corsi, qui a bien voulu me faire hommage (phrase consacrée) de son opuscule. Comme professeur il n'est pas des pires, et il possède assez de routine; mais il a été un de ceux dont la Commission a dû demander le déplacement à cause de circonstances regrettables d'ordre moral. Vous aurez vu du reste qu'il voit une absurdité là où il n'y en a point.

Pour répondre d'une manière précise à vos demandes de renseignements au sujet du personnel de la Faculté je vais vous envoyer, à mon retour de Padoue, l'Annuaire officiel que l'Université publie chaque année, avec les noms de tous les professeurs, leurs enseignements et leurs leçons. En attendant, pour ce qui mer regarde, je vous dirai que j'ai la chaire de mécanique rationnelle, appartenant à la dernière des trois années de cours de mathématiques (la quatrième année, de complément, n'existe que dans trois Universités), et que fe fais trois leçons (obligatoires) para semaine, que je double après Pâques pour faire répéter le cours aux élèves. D'après le Règlement chaque professeur aurait le droit de faire jusqu'à cinq leçons par semaine, mais comme tous les professeurs sans exception ne font que les trois qui constituent le minimum j'ai renoncé à me mettre hors la loi vis à vis de mes collègues. A Pise on ne fait de même que trois leçons, mais elles sont d'une heure et demie, et puis les vacances pendant l'année y sont moins fréquentes et moins longues. Au reste font cela va peut-être subir de grands changements si les Chambres adoptent le nouveau projet présenté par la Commission parlementaire et appuyé par le Ministre, et dans ce cas il ne serait pas impossible que je dusse, en mon particulier, changer ou de résidence ou d'enseignement. Je vous remercie d'avance du soins que vous voulez bien prendre de me procurer la Géométrie de Terquem, que je verrai avec plaisir. Mais quoique votre offre de collaboration soit tout ce qu'il y a de plus propre à aplanir les difficultés de l'ouvre, je crois que je n'aurai jamais le courage d'entreprendre l'essai dont vous me partez. La malheureuse issue de la tentative analogue faite par M. Cremona par la traduction des Elements de Blatzer est de nature à décourager quiconque voudrait donner de l'impulsion sérieuse à l'enseignement des mathématiques élémentaires dans ce pays, où la politique envahit tout, au moins à cette époque, au grand détriment des autres intérêts.

Je m'occuperai aussi des sujets de cours supérieurs en Italia.
Je n'ai pas encore votre traduction du mémoire d'Imschentsky, que j'ai vu chez M. Betti à Pise; ni l'article sur Lobatschewsky non plus. Je vous serai bien obligé pour ce dernier, mais je veux me réserver le droit d'acquérir le premier par le moyen libraire, car c'est un travail trop considérable pour être accepté à titre d'amitié.
Je ne connais l'ouvrage de Taine dont vous me parlez que par les éloges que j'en ai vu dans les Journaux. Il doit y avoir sans doute du ton; mais, quant aux mathématiques, il est généralement admis que les plus grands phylosphes aient le droit de s'en mêler sans avoir pris la peine de les apprendre.- Je dois, à ma tonte, avouer de ne connaitre aussi que de nom le fameux ouvrage de Comte, quoique je crois d'avoir une idée suffisamment exacte de ses principes par le grand nombre de disputes que j'ai entendu ou que j'ai lu à ce sujet. Je vous dirai que c'est le seul livre de philosophie qui ait pu pénétrer dans la bibliothèque de M. Brioschi, esprit très-peu disposé de sa nature à ce genre de choses.
Je vous donne le bonjour, dans l'espoir de retrouver de vous nouvelles à mon retour à Bologne. Votre tout devoué

E. Beltrami

Je viens de recevoir une aimable lettre de M. Darboux à laquelle je répons de suite. Je vous remercie aussi de cette bonne fortune, que je vous dois entièrement.

Apèndix B

Alguns comentaris més sobre l'article de Battaglini

B.1 La controvertida fórmula des d'un enfoc geomètric

Veiem com la fórmula donada per Battaglini a l'inici de la secció 2 del Sulla:

$$\frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = \lambda \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

resulta força evident utilitzant una argumentació geomètrica i les fórmules conegudes per l'analogia de Lambert.

Sembla clar que per establir aquesta igualtat, s'ha d'utilitzar la relació que hi ha entre l'angle que forma la recta Ω i la longitud del segment que abarca, determinada pel punt ω. Geomètricament, aquesta relació vindria donada pel teorema dels sinus, que dóna les següents equacions:

en geometria euclidea:

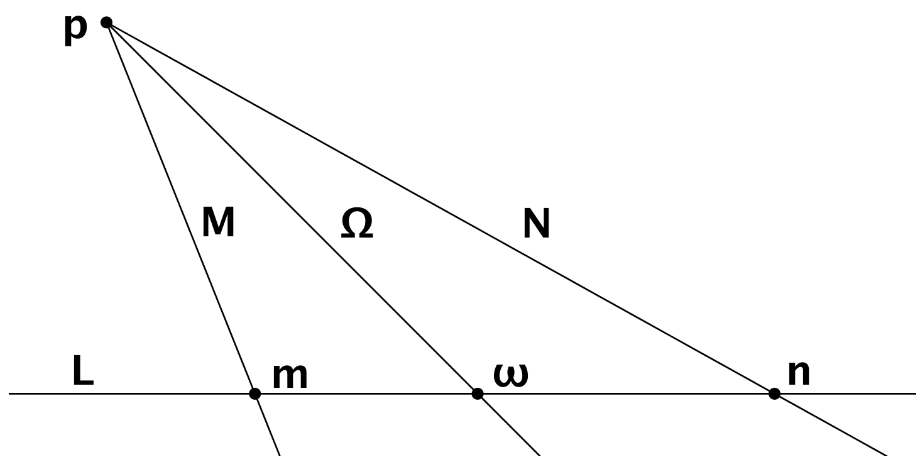
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

en geometria esfèrica:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

i en geometria hiperbòlica, per l'analogia de Lambert.

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}$$



Aplicant la darrera fórmula als triangles: $mp\omega$ i ωpn, obtenim:

$$\frac{\sinh mp}{\sin L\Omega} = \frac{\sinh m\omega}{\sin M\Omega} = \frac{\sinh p\omega}{\sin LM}$$
$$\frac{\sinh pn}{\sin L\Omega} = \frac{\sinh \omega n}{\sin \Omega N} = \frac{\sinh p\omega}{\sin LN}$$

De la primera igualtat, de les dues equacions:

$$\sinh pn \frac{\sin \Omega N}{\sinh \omega n} = \sinh mp \frac{\sin M\Omega}{\sinh m\omega}$$
$$\frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = \frac{\sinh mp}{\sinh pn} \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

De la segona:

$$\sin LM \frac{\sinh m\omega}{\sin M\Omega} = \sin LN \frac{\sinh \omega n}{\sin \omega N}$$

$$\frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = \frac{\sin LN}{\sin LM}\frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

D'altra banda, aplicant el teorema del sinus al triangle pmn:

$$\frac{\sinh mn}{\sin MN} = \frac{\sinh mp}{\sin LN} = \frac{\sinh np}{\sin LM}$$

I de la segona igualtat:

$$\frac{\sinh mp}{\sinh np} = \frac{\sin LN}{\sin LM} = \lambda$$

Amb un procediment anàleg obtenim en geometria esfèrica les relacions:

$$\frac{\sin m\omega}{\sin \omega n} = \frac{\sin mp}{\sin pn}\frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

$$\frac{\sin m\omega}{\sin \omega n} = \frac{\sin LN}{\sin LM}\frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

$$\frac{\sin mp}{\sin np} = \frac{\sin LN}{\sin LM} = \lambda$$

I en geometria euclidiana la fórmula que planteja Battaglini per aquest cas particular:

$$\frac{m\omega}{\omega n} = \frac{mp}{pn}\frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

$$\frac{m\omega}{\omega n} = \frac{\sin LN}{\sin LM}\frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

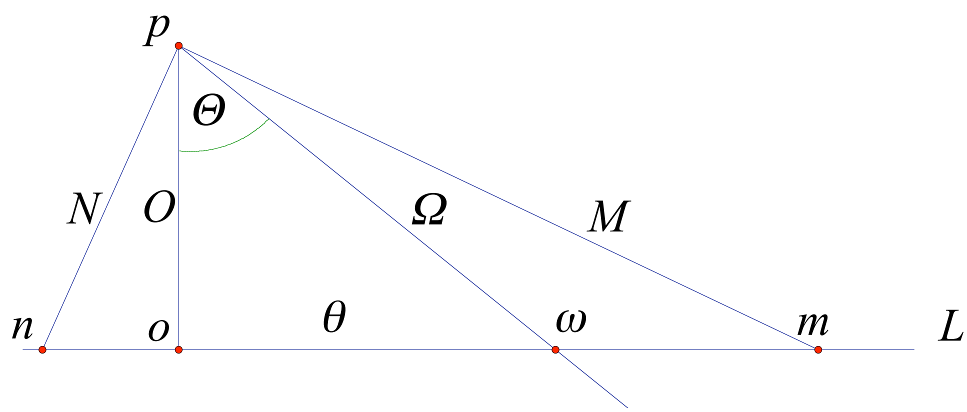
$$\frac{mp}{np} = \frac{\sin LN}{\sin LM} = \lambda$$

B.2 Algunes demostracions dels resultats presentats al *Sulla geometria immaginaria*

Teorema B.2.1 *Amb les notacions de la figura, el quocient*

$$\frac{\tanh \theta}{\tan \Theta}$$

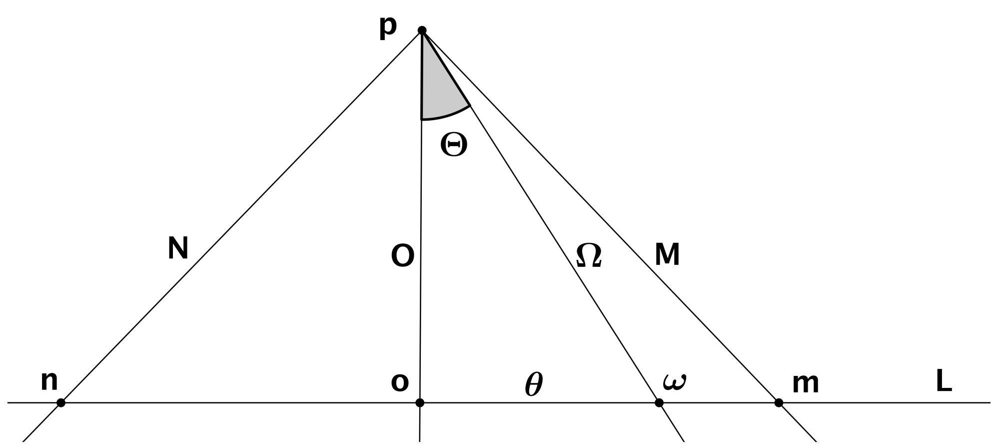
és constant.



Demostració. Suposem que les rectes M, N, i per tant els punts m, n estan fixats. La recta Ω, i per tant e punt ω el suposem variable. S'ha demostrat prèviament que

$$\frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = \lambda \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}$$

Si ara suposem que m, n equidisten de o ha de ser $\lambda = 1$. Doncs, en el cas particular en que ω es trobi a la possició o, es té $m\omega = \omega n$ i també els angles que formen les rectes M, N amb la perpendicular són iguals, llavors els dos quocients donen 1, i per tant λ haurà de ser 1.



Si m, n están a la mateixa distància del peu de la perpendicular o, tenim que:

$$\frac{\tanh\theta}{\tan\Theta} = \frac{\tanh\frac{1}{2}mn}{\tan\frac{1}{2}MN}$$

I aquest quocient és constant, ja que hem considerat que m, n són possicions fixades.

Veiem ara quin és, concretament, aquest valor constant.

Els punts m i n poden situar-se a qualsevol posició de la recta L entre o i infinit, per tant la funció $\tanh\theta$ està definida en tot el seu domini i pot prendre tots els valors del seu recorregut [-1,+1].

Considerem ara les possicions límits d'ω, les rectes Ω corresponents formen un angle, a cada costat de O, que anomenarem l'angle de parel·lelisme, Δ, i que és diferent de l'angle recte, doncs aquesta és la Hipòtesi de l'Angle Agut que caracteritza la geometria hiperbólica.

En aquesta possició $\omega = \infty$, $\tanh\theta = +1$ i $\Theta = \Delta$, llavors el quocient del teorema anterior queda expressat:

$$\frac{1}{\tan\Delta} = \frac{\tanh\frac{1}{2}mn}{\tan\frac{1}{2}MN}$$

D'on deduïm que la constant del teorema ve determinada pel valor de $\cot\Delta$.

Teorema B.2.2 *El valor de la distància θ ve donat per les següents expressions:*

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta} + \frac{i\pi}{2k},$$

quan θ pren un valor imaginari, i

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta},$$

quan θ pren un valor real.

Demostració. Recordem la definició de logaritme d'un nombre complex:

$$\log z = \log|z| + i\arg z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

i la fórmula:

$$e^{2k\theta} = \frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta},$$

d'on s'obté que:

$$\tanh\theta = \frac{e^{2k\theta}-1}{e^{2k\theta}+1}.$$

Calculem ara la funció inversa de la tangent hiperbòlica, per trobar el valor de θ.

Posant: $y = \tanh\theta$ i $z = e^{k\theta}$, es té:

$$y = \frac{z^2-1}{z^2+1},$$

d'on

$$z^2 = \frac{1+y}{1-y}.$$

Ara, fent servir la igualtat

$$\tanh\theta = \frac{\tan\Theta}{\tan\Delta},$$

tenim:

$$z^2 = \frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Delta - \tan\Theta}$$

Observem que, si $\tan\Theta > \tan\Delta$, aquest quocient de la dreta és un número real negatiu, que pensem com un complex d'argument π.

Prenent logaritmes, s'obté:

$$\begin{aligned} 2\log z &= 2k\theta = \log \left\| \frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Delta - \tan\Theta} \right\| + i\pi \\ &= \log \frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta} + i\pi \end{aligned}$$

Trobem així la fórmula de Battaglini, aïllant θ:

$$\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta} + \frac{i\pi}{2k}$$

En el cas que $\tan\Theta < \tan\Delta$, el quocient que expressa z^2 és un nombre real positiu, o un complex d'argument 0.

Per tant, l'expressió anterior per θ queda de la següent manera:

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta}$$

Bibliografia

[1] Judit Abardia, Agustí Reventós, and Carlos J. Rodríguez, *What did Gauss read in the Appendix?*, Historia Mathematica **39** (2012), 292–323.

[2] Norbert A'Campo and Athanase Papadopoulos, *On Klein's So-called Non-Euclidean geometry* in *Sophus Lie and Felix Klein: The Erlangen program and its impact in mathematics and physics* (ed. L. Ji and A. Papadopoulos), European Mathematical Society Publishing House, 2014, p. 91-136.

[3] Federico Amodeo, *Vita matematica napoletana: Studio storico, biografico, bibliografico*, vol. 1, Napoli, 1924.

[4] G. F. Auwers, *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Leipzig, 1880, Reprint Hildesheim, New York 1975.

[5] Richard Baltzer, *Die Elemente der Mathematik*, 2nd ed., vol. 2, B.G. Teubner, Dresden, 1867.

[6] P. Barbarin, *La correspondance entre Hoüel et de Tilly*, Bulletin des sciences mathématiques **50** (1926), 50–64, 74–88.

[7] Giuseppe Battaglini, *Pangeometria, o sunto di geometria fondata sopra una toeria generale e rigorosa delle parallele per N. Lobatschewsky, professore emerito dell'Università di Kazan. (Versione dal francese)*, Giornale di Matematiche **5** (1867), 273–320.

[8] ______, *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*, Giornale di Matematica, Napoli **5** (1867), 217–231.

[9] ———, *Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità e lassa falsità dell'assioma XI di Euclide (giammai da potersi decidere a priori) per Giovanni Bolyai. Traduzione*, Giornale di Matematica, **6** (1868), 98.

[10] Giuseppe Battaglini, V. Jani, and Nicola Trudi, *Ai cultori delle scienze matematiche in Itàlia*, Giornale di Matematiche **I** (1863), 1.

[11] Eugenio Beltrami, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione*, Annali di Matematica pura ed applicata (1) **6** (1864), 271–279.

[12] ———, *Richerche di analisi applicata alla geometria*, Giornale di matematiche, Napoli **2** (1864), 267–282, 297–306, 331–339, 355–375, ; **3** (1865), 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314.

[13] ———, *Sulla flessione delle superficie rigate*, Annali di matematica pura ed applicata, Milano (1) **7** (1865), 105–138.

[14] ———, *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*, Annali di Matematica pura ed applicata **VII** (1866), 185–204, Versió digital: http://www.caressa.it/pdf/beltrami01.pdf.

[15] ———, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di Matematica, **6** (1868), 248–312.

[16] ———, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Annali di Matematica pura ed applicata **II** (1869), 232–255.

[17] ———, *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*, Giornale di Matematica, **10** (1872), 147–159.

[18] ———, *Observazione sulla nota del Prof. L. Schlaefli alla memoria del Sig. Beltrami 'Sulla spazii di curvatura constante'*, Annali di Matematica pura ed applicata **V** (1873), 194–198.

[19] ———, *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, Ed. Ulrico Hoepli, Milano, 1902-1904.

[20] Joseph Bertrand, *Sur la somme des angles d'un triangle*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences **69** (1869), 1265–1269 ?167–.

[21] ______, *Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle*, Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences **70** (1870), 17–20.

[22] Enrico Betti and Francesco Brioschi, *Gli elementi d'Euclide, con note, aggiunte ed esercizi ad uso de'ginnasi e de'licei*, Le Monnier, Florencia, 1867.

[23] Luciano Boi, Livia Giacardi, and Rossana Tazzioli, *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*, Éditions Albert Blanchart, Paris, 1998.

[24] Farkas Bolyai, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitva evidentiaque huic propria, introducendi*, Maros Vasarhelyini : J. and S. Kali, 1832-1833, Apèndix de János Bolyai: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.*

[25] János Bolyai, *Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, Polygon, Szeged, 2002, amb la traducció a l'hongarès de Rados Ignàcz, 1897 i a l'anglès de G. B. Halsted, 1897.

[26] Roberto Bonola, *Non euclidean geometry. A Critical and Historical Study of its Development*, Dover, 1955, Primera edició 1912. Conté la traducció de l'*Appendix* de J. Bolyai, i de la *The theory of parallels* de N. I. Lobatxevski.

[27] Francesco Brioschi and Luigi Cremona, *Al signor direttore del giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane.*, Giornale di Matematiche **7** (Milano, 24 febbraio 1869), 51–54.

[28] G. Brunel, *Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Hoüel*, Mémoires de la Société des sciences physiques de Bordeaux **4** (1888), 1–78.

[29] Alfredo Capelli, *Giuseppe Battaglini. Cenno biografico*, Giornale di Matematiche **32** (1894), 205–208.

[30] M. Castellana and F. Palladino, *Giuseppe Battaglini. Raccolta di lettere di un matematico al tempo del Risorgimento d'Italia*, Levante Editori, Bari, 1996.

[31] A. Cayley, *A sixth memoir upon quantics*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **149** (1859), 61–90, Collected Mathematical Papers, Cambridge University Press, Cambridge, 1889, **2**, p. 561-560.

[32] ______, *Note on Lobatschewsky's Imaginary Geometry*, Philosophical Magazine London **29** (1865), 231–233, Collected Mathematical Papers, Cambridge University Press, Cambridge, 1892, **5**, p. 471-472.

[33] Salvatore Cicenia, *Il contributo di G. Battaglini alla geometria non euclidea con appendice di tre lettere inedite ad A. Genochi*, Rendiconti della Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL **XXI** (1997), 89–108.

[34] A. Conte and L. Giacardi, *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici, Contributi dall'epistolario*, Deputazione subalpina di storia patria, 1991.

[35] Alberto Dou, *Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **XI** (1970), no. 4, 385–415.

[36] ______, *De la verdad a la validez en geometría (1733–1871)*, Pensamiento **28** (1972), no. 112, 2–19.

[37] Enrico D'Ovidio, *Comemorazione del Socio Giuseppe Battaglini*, Atti della R. Accademia dei Lincei **I** (1894), 558–610.

[38] ______, *Eugenio Beltrami*, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino **35** (1900), 541–546.

[39] F. Engel and P. Stäckel, *Die theorie der parallellien von euklid bis auf gauss*, Teuber, 1895.

[40] Eugène Rouché et Charles de Comberousse, *Traité de géométrie*, vol. 2, 6 edition, Gautier-Villars et fils, Paris, 1891.

[41] M. Briot et M. Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1859.

[42] Leonhard Euler, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin **16** (1767), 119–143, *Opera Omnia*: Serie 1, vol. 28. pp. 1-22.

[43] Carl Friedrich Gauss, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Flache so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildenten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird.*, Astronomischen Abhandlungen **VI** (1825), 112–145, Resposta a un tema proposat per la Real Societat de Ciències de Copenhagen. Traducció italiana de E. Beltrami, *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*, Annali de Matematica Pura ed Applicata, serie 1, 1861, V. 4, p. 214-232.

[44] ______, *Werke*, vol. 1-12, B. G. Teubner, Leipzig, 1870-1927, Les cartes de Gauss digitalitzades es poden consultar a: https://gauss.adw-goe.de.

[45] Livia Giacardi, *From Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867-1923): Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Itali*, Paedagogica Historica **42** (2006), 587–613.

[46] Livia Giacardi and Rossana Tazzioli, *Le lettere di Eugenio Beltrami a Betti, Tardy e Gherardi*, 1ª ed., Associazione Culturale Minesis, 2012.

[47] Jeremy Gray, *Non-euclidean geometry*, first published 1987. reprinted 1990, 1995. ed., The Open Univerity, Great Britain, 1987.

[48] ______, *Worlds out of nothing*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London Ltd., London, 2007, A course in the history of geometry in the 19th century.

[49] G. B. Halsted, *Biography: Guillaume Jules Hoüel*, The American Mathematical Monthly **4** (1897), no. 4, 99–101.

[50] Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, Dover Publications, Inc, 1981.

[51] Guillaume Jules Hoüel, *Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Archiv der Mathematik un Physik **40** (1863), 171–211.

[52] ———, *Études géométriques sur la théorie des parallèles, par N. I. Lobatschewsky, conseiller d'État de l'empire de Russie, et professeur à l'université de Kazan, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher*, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

[53] ———, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premiéres propositions des Éléments d'Euclide*, Gauthier-Villars, Paris, 1867.

[54] ———, *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir* a priori*) suive de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fuasseté de l'Axiôme XI par Jean Bolyai, Captaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne; précéde d'une d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai par Fr. Schmidt.*, Gauthier-Villars, 1868.

[55] ———, *Quelques réflexions au sujet de la ligne de longueur minimum sur la sphère*, Nouvelles annales de mathématiques. **7** (1868), no. 2e série, 73–78.

[56] ———, *Sur la géométrie imaginaire de Lobatcheffsky, par M. G. Battaglini. Traduction*, Nouvelles annales de mathématiques. **VII** (1868), 209–221.

[57] ———, *Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne, par Beltrami. Traduction*, Annales scientifiques de l'École Normal Supérieure **VI** (1869), 251–288.

[58] ———, *Sur les faits qui servent de base à la géométrie, par M. Helmholtz. Traduction*, Mémoires de la Societe des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux **VIII** (1869), 372.

[59] ———, *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante, par Beltrami. Traduction*, Annales scientifiques de l'École Normal Supérieure **VI** (1869), 347–377.

[60] ———, *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulam d'Euclide*, Mémoires de la Societe des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux **8** (1870), XI–XVIII.

[61] ———, *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulam d'euclide*, Nouvelles Annales de Mathématiques **9** (1870), 93–96.

[62] ———, *Sur les hypothèses sur lesquelles est fondée la géomérie, par Riemann. Traduction*, Annali di Matematica pura ed applicata **III** (1870), no. 2, 309–326.

[63] ———, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premiéres propositions des Éléments d'Euclide*, Gauthier-Villars, Paris, 1883.

[64] Felix Klein, *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen **IV** (1871), 573–625, Traducció francesa de L. Laugel *Sur la Géométrie dite non euclidienne*, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse, **11** (1897), 1-62, traducció anglesa de J. Stillwell a [96].

[65] ———, *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Vorgelegt von A. Clebsch*, Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **17** (1871), 419–433, traducció francesa de J. Hoüel *Sur la géométrie dite non euclidienne*, Bulletin de sciences mathématiques et astronomiques, **2**, 1871, p. 341-351.

[66] ———, *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Zweiter Aufsatz)*, Mathematische Annalen **VI** (1873), 112–145.

[67] ———, *Gesammelte Matematische Abhandlungen*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921.

[68] ———, *Vorlesungen über nicht-euklidische geometrie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.

[69] ———, *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*, Nivola, 2006, Traducció de l'original *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Berlin, 1924-1928, 3 vols.

[70] Morris Klein, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, 1972, Traducció de l'original *Mathematical thought from ancient fo modern times*, Oxford University Press, 1972, 3 vols.

[71] Ferenc Kárteszi, *János Bolyai. Appendix. The theory of space*, vol. 138, North-Holland Mathematics Studies, 1987, with a supplement by Barna Szénássy.

[72] Joseph Louis Lagrange, *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux mémoires de l'Académmie Royale des Sciences et belles-lettres de Berlin **35** (1779), 161–210, *Oeuvres de Lagrange*, **4**, 1867-1892, Paris, Gauthier-Villars, p. 635-692.

[73] Johann Heinrich Lambert, *Theorie der Parallellinien*, Mag. Reine Angew. Math. (1786), 137–164, 325–358, see [39], pag. 152-207. The work was written in 1766 and published posthumously by J. Bernouilli and C. F. Hindenburg.

[74] N. I. Lobatxevski, *Géométrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, gerausgégeben von A. L. Crelle **17** (1837), 295–320.

[75] ———, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, G. Fincke, Berlin, 1840, Reimprès per Mayer i Müller, 1887.

[76] ———, *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, Collection of Memoirs pels Catedràtics de la Reial Universitat de Kasan en el 50è aniversari de la seva fundació **1** (1855), 279–340, Publicat a la vegada en rus a les Publicacions Científiques de la Universitat de Kasan.

[77] Gino Loria, *Nicola Fergola e la Scuola di Matematici che lo ebbe a duce*, Genova, 1892.

[78] Gino Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, Bibliotheca Mathematica **ser. 3, 2** (1901), 392–440.

[79] Ferdinand Minding, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlín **19** (1839), 370–387.

[80] ———, *Beiträge sur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlín **20** (1840), 323–327.

[81] José María Montesinos, *La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid (1994), 213–232.

[82] C. A. F. Peters (ed), *Briefwechsel zwishen C.F. Gauss und H.C.Schumacher*, vol. 6 vols, Altona: Esch, 1860-65, 3 vols, Hildesheim and New York: Olms, 1975.

[83] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 149, Springer-Verlag, 1994.

[84] Agustí Reventós, *Un nou món creat del no-res, un món on es pot quadrar el cercle!*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **19** (2004), 47–83, also: Conferència de Sant Albert, Facultat de Ciències de la UAB, 17 de novembre de 2004. Dipòsit legal B.44.926-2004.

[85] ———, *Geometria axiomàtica*, Societat Catalana de Matemàtiques, 2010.

[86] Agustí Reventós and Carlos J. Rodríguez, *Una lectura del* Disquisitiones generales circa superficies curvas *de Gauss*, Societat Catalana de Matemàtiques, 2005, conté la traducció del *Disquisitiones* al català.

[87] Georg Friedrich Bernhard Riemann, *Über die hypothesen welche der geometrie zurgrunde liegen* (habilitationsvortrag), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1867), 133–152, Llegida el 10 de Juny de 1854; podeu trobar la traducció a l'anglès a [95], Vol. II, o [88]. També es troba a B. RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedelind, von H.Weber*, Leipzig, Teubner, 1876, No. XIII, pags 254-268.

[88] ———, *On the hypotheses which lie at the bases of geometry*, Nature **VIII** (1873), no. 183,184, pp. 14–17, 36–37., Translated by William Kingdon Clifford and transcribed by D. R. Wilkins. See http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/WKCGeom.html.

[89] Carlos J. Rodríguez, *La importancia de la* La Analogía *con una esfera de radio imaginario en el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas*, Publicacions del Departament de Matemàtiques, UAB **30**

(2006), 1–48, Work presented in 2002 during the course given by Professor A. Dou.

[90] ______, *Una revisión de la historia de la geometría no euclidiana*, Ph.D. thesis, Departament de Matemàtiques, UAB, 2010.

[91] Boris A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, 1988.

[92] Giovanni Girolano Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, G. B. Halsted, Chicago, London, 1920.

[93] Clemens Schaefer, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerlig*, Berlin: Otto Elsner, 1927, Reprint Hildesheim, New York 1975.

[94] Ludwig Schlaefli, *Nota alla Memoria del sig. Beltrami "Sugli spazi di curvatura constante"*, Annali di Matematica pura ed applicata **V** (1871), 178–193.

[95] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979, 2a ed., 5 v.

[96] John Stillwell, *Sources of hyperbolic geometry*, American Mathematical Soc. London Mathematical Soc., 1996.

[97] David J. Stump, *The independence of the parallel postulate and development of rigorous consistency proofs*, Hist. Philos. Logic **28** (2007), no. 1, 19–30.

[98] Rossana Tazzioli, *New Perspectives on Beltrami's Life and Work*, Mathematicians in Bologna 1861-1960. Birkhauser (2012), 465–517.

[99] Imre Toth, *Non-Euclidean Geometry before Euclid*, Scientific American **221** (1969), 87–98.

[100] J. Voelke, *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900*, Peter Lang, 2005.

[101] J. M. Wilson, *Euclide come testo di geometria elementare*, Giorn. di Mat. **VI** (1868), 361–368.