On the diagonals of a Rees algebra

Olga Lavila Vidal

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Àlgebra i Geometria

ON THE DIAGONALS OF A REES ALGEBRA

Olga Lavila Vidal

Appendix A

Resum en català

A.1 Introducció

L'objectiu d'aquesta memòria és l'estudi de les propietats aritmètiques de les diagonals d'una àlgebra de Rees o, des d'un punt de vista geomètric, dels anells de coordenades homogenis d'immersions d'explosions de varietats projectives al llarg d'una subvarietat. En primer lloc, anem a introduir el tema i els principals problemes que tractarem. A continuació, exposarem els resultats coneguts sobre aquests problemes i finalment farem un resum dels resultats obtinguts en aquesta memòria.

Sigui A una àlgebra graduada noetheriana generada sobre un cos k per elements de grau 1, és a dir, A admet una presentació $A = k[X_1, \ldots, X_n]/K = k[x_1, \ldots, x_n]$, on K és un ideal homogeni de l'anell de polinomis $k[X_1, \ldots, X_n]$. Donat un ideal homogeni I de A, considerem la varietat projectiva X obtinguda explotant l'esquema projectiu $Y = \text{Proj } (A)$ al llarg del feix d'ideals $\mathcal{I} = \widetilde{I}$, és a dir, $X = \mathcal{P}roj(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n)$. Per a $c \in \mathbb{Z}$, denotem per I_c la component homogènia de grau c de I. Si I és un ideal generat per formes de grau menor o igual a d, es prova que per a c, e enters positius tals que $c \geq de + 1$, $(I^e)_c$ correspon a un sistema lineal complet molt ample en X que dóna una immersió de X en un espai projectiu: $X \cong \text{Proj } (k[(I^e)_c]) \subset \mathbb{P}_k^{N-1}$, on $N = \dim_k (I^e)_c$ [CH, Lemma 1.1].

El nostre propòsit principal és l'estudi de les propietats aritmètiques de les k-àlgebres $k[(I^e)_c]$, on c, e són enters positius i I és un ideal homogeni de A. Aquest problema té el seu origen en els treballs d'A. Gimigliano [Gi],

A. Geramita i A. Gimigliano [GG], i A. Geramita, A. Gimigliano i B. Harbourne [GGH], on s'estudien les superfícies projectives racionals obtingudes per immersions d'explosions del pla projectiu en un conjunt de punts diferents.

Sigui k un cos algebraicament tancat i $s = \binom{d+1}{2}$, $d \geq 2$. En [Gi] s'estudia el cas particular de l'explosió de $\mathbb{P}_k^2$ al llarg de s punts diferents $P_1, \ldots, P_s$ que no estan en cap corba de grau $d-1$ i de manera que no hi ha cap subconjunt de d punts alineats si $d \geq 3$. En aquest cas, l'ideal de definició I del conjunt de punts ve generat per formes de grau d i les aplicacions racionals definides pels sistemes lineals I_c donen immersions de l'explosió per a $c \geq d$. En el cas $c = d$ la superfície obtinguda s'anomena *superfície de White*, i per a $c = d + 1$ *superfície de Room*. Respecte a les superfícies de White, es prova que són superfícies a $\mathbb{P}_k^d$ de grau $\binom{d}{2}$, amb ideal de definició generat pels menors maximals d'una matriu $3 \times d$ de formes lineals. En particular, $k[I_d]$ és Cohen-Macaulay i té una resolució que prové del complex d'Eagon-Northcott [Gi, Proposition 1.1]. D'altra banda, les superfícies de Room són aritmèticament Cohen-Macaulay [GG, Theorem B] i tenen ideal de definició generat per quàdriques [GG, Theorem 1.2].

Aquest estudi detallat de les superfícies de White i les superfícies de Room permet posteriorment considerar el següent cas més general. Siguin $P_1, \ldots, P_s$ punts diferents del pla $\mathbb{P}_k^2$, amb k un cos algebraicament tancat, i sigui I el seu ideal de definició i $d = \operatorname{reg}(I)$ la regularitat de I. Suposant que els punts no estan en cap corba de grau $d-1$ i que no hi ha cap subconjunt de d punts alineats, els sistemes lineals I_c per a $c \geq d$ donen immersions de l'explosió de $\mathbb{P}_k^2$ en aquest conjunt de punts. Les superfícies que s'obtenen són aritmèticament Cohen-Macaulay [GG, Theorem B] i tenen ideal de definició generat per quàdriques si $c \geq d+1$ [GG, Theorem 2.1].

Més en general, A. Geramita, A. Gimigliano i Y. Pitteloud [GGP] consideren l'explosió de $\mathbb{P}_k^n$ al llarg d'un ideal de *fat points*, amb k un cos algebraicament tancat de característica zero. Per a $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{P}_k^n$, siguin $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ els seus ideals de definició, i prenem ideals de la forma $I = \mathcal{P}_1^{m_1} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_s^{m_s}$, amb $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Aleshores estudiem les varietats projectives obtingudes per immersions de l'explosió de $\mathbb{P}_k^n$ al llarg de $\mathcal{I}$ via els sistemes lineals corresponents a peces graduades de I, quan aquests sistemes lineals són molt amples. Sigui $d = \operatorname{reg}(I)$, i suposem que no hi ha d punts alineats. Llavors els sistemes lineals I_c són molt amples per a $c \geq d$, i les varietats obtingudes per les immersions associades són projectivament normals [GGP, Proposition 2.2] i artitmèticament Cohen-Macaulay [GGP, Theorem 2.4].

Un nou punt de vista per tractar aquestes qüestions és introduït per A. Simis, N.V. Trung i G. Valla en [STV], i continuat posteriorment per A. Conca, J. Herzog, N.V. Trung i G. Valla en [CHTV] per atacar el problema més general de l'explosió d'un espai projectiu al llarg d'una subvarietat. Si I és un ideal homogeni de A, considerem l'àlgebra de Rees $R_A(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n \cong A[It] \subset A[t]$ de I amb la bigraduació natural donada per

$$R_A(I)_{(i,j)} = (I^j)_i.$$

L'observació fonamental és que totes les àlgebres $k[(I^e)_c]$ són de forma natural subàlgebres de l'àlgebra de Rees. Per a descriure la relació entre l'àlgebra de Rees i les àlgebres $k[(I^e)_c]$ necessitem introduir el functor diagonal.

Per a c, e enters positius, es defineix la (c,e)-*diagonal* de $\mathbb{Z}^2$ com el conjunt

$$\Delta := \{(cs, es) \mid s \in \mathbb{Z}\}.$$

Donada una àlgebra bigraduada $S = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} S_{(i,j)}$, es defineix la *subàlgebra diagonal* de S al llarg de Δ com l'àlgebra graduada

$$S_\Delta := \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} S_{(cs,es)}.$$

Anàlogament, per a un S-mòdul bigraduat L podem definir la diagonal de L al llarg de Δ com el S_Δ-mòdul

$$L_\Delta := \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} L_{(cs,es)}.$$

Tenim així definit el functor diagonal com el functor exacte

$$(\ )_\Delta : M^2(S) \to M^1(S_\Delta),$$

on $M^2(S)$ i $M^1(S_\Delta)$ denoten les categories de S-mòduls bigraduats i S_Δ-mòduls graduats respectivament.

Ara podem descriure els anells $k[(I^e)_c]$ com a diagonals de l'àlgebra de Rees de la forma següent: considerant Δ la (c,e)-diagonal de $\mathbb{Z}^2$, tenim que

$$R_A(I)_\Delta = \bigoplus_{s\geq 0} (I^{es})_{cs} = k[(I^e)_c].$$

Aquesta observació permet una aproximació algebraica a l'estudi dels anells $k[(I^e)_c]$ via les diagonals de $R_A(I)$. Aquest és el punt de partida en [STV] per a estudiar el cas d'ideals homogenis de l'anell de polinomis generats per formes del mateix grau, i més tard en [CHTV] per a estudiar ideals homogenis arbitraris de l'anell de polinomis. D'altra banda, les diagonals d'una àlgebra bigraduada estàndard definida sobre un anell local han estat també estudiades per E. Hyry [Hy] usant alhora eines algebraiques i geomètriques. Finalment, S.D. Cutkosky i J. Herzog [CH] estudien les diagonals de l'àlgebra de Rees d'un ideal homogeni en una k-àlgebra graduada general.

A continuació anem a exposar els resultats principals d'aquests treballs.

L'aportació fonamental del treball d'A. Simis et al.[STV] és l'aproximació algebraica als problemes considerats per A. Geramita et al. via l'estudi de la diagonal d'una àlgebra bigraduada, una noció que generalitza el producte de Segre d'àlgebres graduades. Per a $V \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$, $W \subset \mathbb{P}_k^{r-1}$ varietats algebraiques amb anells de coordenades R_1, R_2, la imatge de $V \times W \subset \mathbb{P}_k^{n-1} \times \mathbb{P}_k^{r-1}$ per la immersió de Segre

$$\mathbb{P}_k^{n-1} \times \mathbb{P}_k^{r-1} \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{nr-1}$$

és una varietat amb anell de coordenades el producte de Segre de R_1 i R_2:

$$R_1 \underline{\otimes} R_2 = \bigoplus_{u \in \mathbb{N}} (R_1)_u \otimes_k (R_2)_u .$$

Donada $R = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{N}^2} R_{(u,v)}$ una k-àlgebra bigraduada estàndard, la diagonal R_Δ ve definida per $R_\Delta = \bigoplus_{u\in\mathbb{N}} R_{(u,u)}$ (és a dir, la $(1,1)$-diagonal). Observem que considerant el producte tensorial $R = R_1 \otimes_k R_2$ de R_1 i R_2 bigraduat en la forma $R_{(u,v)} = (R_1)_u \otimes_k (R_2)_v$, tenim que $R_\Delta = R_1 \underline{\otimes} R_2$. Clàssicament, R és l'anell de coordenades bihomogeni d'una subvarietat projectiva de $\mathbb{P}_k^{n-1} \times \mathbb{P}_k^{r-1}$, mentre que R_Δ és l'anell de coordenades homogeni de la seva imatge per la immersió de Segre.

En la primera part del treball de [STV], es relacionen les presentacions, les dimensions i les multiplicitats d'una k-àlgebra bigraduada estàndard R i la seva diagonal R_Δ. L'eina principal per a provar aquests resultats és l'existència del polinomi de Hilbert d'una k-àlgebra bigraduada estàndard i la caracterització del seu grau, resultats deguts a D. Katz et al. [KMV] i M. Herrmann et al. [HHRT] entre d'altres. Anàlogament al cas graduat, es poden definir en aquest cas l'ideal irrelevant, els primers irrelevants i l'esquema biprojectiu associat a una k-àlgebra bigraduada estàndard.

A continuació fan un estudi del comportament de la normalitat i la propietat Cohen-Macaulay per pas a diagonals. L'existència d'un operador de Reynolds de R a R_Δ implica que la normalitat de R serà heretada per la seva diagonal R_Δ. Respecte a la propietat Cohen-Macaulay, l'estratègia és reduir el problema a una situació especial on la subàlgebra diagonal esdevé un producte de Segre, cas en què es coneixien criteris per a la propietat Cohen-Macaulay.

Aquests resultats s'apliquen a l'estudi de l'àlgebra de Rees $R_A(I)$ d'un ideal homogeni $I \subset A = k[X_1, \dots, X_n]$ generat per formes del mateix grau d (ideals *equigenerats*). En aquest cas, l'àlgebra de Rees es pot bigraduar de forma que sigui estàndard definint

$$R_A(I)_{(i,j)} = (I^j)_{i+dj},$$

i aleshores $R_A(I)_\Delta = k[I_{d+1}]$. S'estudien principalment dues famílies d'ideals en detall: per a ideals intersecció completa generats per una successió regular de r formes de grau d es prova que $k[I_{d+1}]$ és Cohen-Macaulay si $(r-1)d < n$, mentre que $k[I_{d+1}]$ no és Cohen-Macaulay si $(r-1)d > n$ [STV, Theorem 3.7]; per a ideals I *straightening closed* sota certes restriccions es prova que $k[I_{d+1}]$ és Cohen-Macaulay [STV, Theorem 3.13]. Aquesta segona família d'ideals inclou per exemple els ideals determinantals generats pels menors maximals d'una matriu genèrica.

Com a continuació natural del treball anterior, A. Conca et al. estudien en [CHTV] les diagonals R_Δ d'una k-àlgebra bigraduada R, amb $\Delta = (c, e)$ per a $c, e > 0$ arbitraris. El problema principal que es planteja aquí és trobar condicions en R per a que certes propietats algebraiques de R siguin heretades per alguna diagonal R_Δ, sobretot per a les propietats Cohen-Macaulay i Koszul. Els resultats es volen aplicar al cas d'una k-àlgebra bigraduada estàndard o a l'àlgebra de Rees d'un ideal homogeni I de $A = k[X_1, \dots, X_n]$. En el primer cas, R admet una presentació com a quocient d'un anell de polinomis $S = k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_r]$ amb la graduació determinada per $\deg(X_i) = (1, 0)$, $\deg(Y_j) = (0, 1)$. Per a l'àlgebra de Rees, si I està generat per formes $f_1, \dots, f_r$ de graus $d_1, \dots, d_r$ respectivament, tenim un epimorfisme natural

$$\begin{array}{rcl} S = k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_r] & \to & R \\ X_i & \mapsto & X_i \\ Y_j & \mapsto & f_j t \end{array}$$

on $\deg(X_i) = (1,0)$, $\deg(Y_j) = (d_j,1)$. Treballant doncs en la categoria de S-mòduls bigraduats, per $S = k[X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_r]$ l'anell de polinomis amb $\deg(X_i) = (1,0)$, $\deg(Y_j) = (d_j,1)$, $d_1,\ldots,d_r \geq 0$, estudiem alhora els dos casos. Notem per $\mathcal{M}$ i $m = \mathcal{M}_\Delta$ els maximals homogenis de S i S_Δ respectivament, i $d = \max\{d_1,\ldots,d_r\}$. Considerarem diagonals $\Delta = (c,e)$ amb $c \geq de+1$.

Les propietats aritmètiques d'un mòdul sovint poden ser caracteritzades mitjançant la seva cohomologia local, d'aquí l'interès per a estudiar la cohomologia local de les diagonals L_Δ d'un S-mòdul bigraduat finitament generat L. Aquest estudi és dut a terme a partir d'una anàlisi de la resolució lliure bigraduada minimal de L sobre S. Sigui

$$0 \to D_l \to \ldots \to D_0 \to L \to 0,$$

amb $D_p = \bigoplus_{(a,b)\in\Omega_p} S(a,b)$, la resolució lliure bigraduada minimal de L sobre S. Prenent diagonals, obtenim una resolució graduada de L_Δ

$$0 \to (D_l)_\Delta \to \ldots \to (D_0)_\Delta \to L_\Delta \to 0,$$

amb $(D_p)_\Delta = \bigoplus_{(a,b)\in\Omega_p} S(a,b)_\Delta$. El primer pas és llavors el càlcul de la cohomologia local dels mòduls $S(a,b)_\Delta$, que es fa a partir d'un estudi més general referent a la cohomologia local del producte de Segre de dues k-àlgebres bigraduades. S'obté en particular un criteri per a la propietat Cohen-Macaulay de $S(a,b)_\Delta$ en funció de a, b i Δ. Diem que la resolució de L és bona si per a tot $p \geq 0$, $(D_p)_\Delta$ és Cohen-Macaulay per a diagonals Δ prou grans. A partir d'aquest estudi, s'enuncia el següent teorema:

Teorema [CHTV, Theorem 3.6, Lemma 3.8] *Suposem $n \geq r$. Donat un S-mòdul bigraduat finitament generat L, existeix un morfisme canònic*

$$\varphi_L^q : H_m^q(L_\Delta) \to H_{\mathcal{M}}^{q+1}(L)_\Delta, \forall q \geq 0$$

tal que

(i) φ_L^q *és un isomorfisme per a $q > n$.*

(ii) φ_L^q *és un quasi-isomorfisme per a $q \geq 0$.*

(iii) Si la resolució de L és bona, φ_L^q és un isomorfisme per a diagonals prou grans.

Com a conseqüència s'obtenen condicions necessàries i suficients per a que existeixin diagonals L_Δ de L que siguin Cohen-Macaulay o Buchsbaum en funció de les peces graduades de la cohomologia local de L.

Per a una k-àlgebra bigraduada estàndard R, es defineixen les k-subàlgebres graduades $\mathcal{R}_1 = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_{(i,0)}$, $\mathcal{R}_2 = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} R_{(0,j)}$. En funció d'aquestes subàlgebres, donen el següent criteri per a la propietat Cohen-Macaulay de les diagonals de R:

Teorema [CHTV, Theorem 3.11] *Sigui R una k-àlgebra bigraduada estàndard Cohen-Macaulay. Si els shifts en les resolucions de $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ són més grans que $-n$ i $-r$ respectivament, llavors R_Δ és Cohen-Macaulay per a diagonals Δ prou grans.*

En particular, obtenen el següent corol.lari:

Corol.lari [CHTV, Corollary 3.12] *Sigui R una k-àlgebra bigraduada estàndard Cohen-Macaulay. Si $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ són anells Cohen-Macaulay amb $a(\mathcal{R}_1), a(\mathcal{R}_2) < 0$, llavors R_Δ és Cohen-Macaulay per a diagonals Δ prou grans.*

Aquest resultat aplicat a àlgebres de Rees d'ideals equigenerats dóna un criteri per a la propietat Cohen-Macaulay de les seves diagonals.

També es completa l'estudi de les diagonals de l'àlgebra de Rees d'un ideal intersecció completa iniciat a [STV], i s'estén a qualsevol ideal intersecció completa i a qualsevol diagonal. En aquest cas es determinen exactament les diagonals de l'àlgebra de Rees amb la propietat Cohen-Macaulay, i és l'únic en què es consideren ideals no equigenerats.

Teorema [CHTV, Theorem 4.6] *Sigui $I \subset A = k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal generat per una successió regular de r formes de graus $d_1, \dots, d_r$ respectivament. Sigui $u = \sum_{j=1}^r d_j$. Per a $c \geq de+1$, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay si i només si $c > d(e-1)+u-n$.*

Sobre la propietat Cohen-Macaulay de les diagonals d'una àlgebra de Rees, es conjectura:

Conjectura *Sigui $I \subset A = k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal homogeni. Si $R_A(I)$ és Cohen-Macaulay, existeix una diagonal Δ tal que $R_A(I)_\Delta$ és Cohen-Macaulay.*

Referent a la propietat Gorenstein, l'únic resultat que es prova fa referència a les diagonals de l'àlgebra de Rees d'un ideal generat per una succesió regular de longitud 2.

Proposició [CHTV, Corollary 4.7] *Sigui* $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ *un ideal generat per una successió regular* f_1, f_2 *de formes de graus* $d_1 \leq d_2$. *Si* $n \geq d_2 + 1$, $k[I_n]$ *és Gorenstein amb a-invariant* -1.

Finalment, es prova que les diagonals prou grans de l'àlgebra de Rees són sempre Koszul:

Teorema [CHTV, Corollary 6.9] *Sigui* $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ *un ideal generat per formes de grau* $\leq d$. *Aleshores existeixen enters* a, b *tals que* $k[(I^e)_{c+de}]$ *és Koszul per a tot* $c \geq a$, $e \geq b$.

En un context diferent, E. Hyry [Hy] estudia la relació entre la propietat Cohen-Macaulay de l'àlgebra de biRees $R_A(I, J)$ i la propietat Cohen-Macaulay de l'àlgebra de Rees $R_A(IJ)$, on $I, J \subset A$ són ideals d'alçada positiva en un anell local. Amb aquest objectiu, estudia la diagonal $\Delta = (1,1)$ d'un anell bigraduat estàndard definit sobre un anell local. El resultat principal [Hy, Theorem 2.5] dóna condicions necessàries i suficients per a la propietat Cohen-Macaulay d'un anell bigraduat estàndard R amb a-invariants negatius en funció de la cohomologia local de les diagonals $R(p, 0)_\Delta$ i $R(0, p)_\Delta$, per a $p \in \mathbb{N}$. En particular, obté condicions suficients en R per tal que la propietat Cohen-Macaulay passi de R a R_Δ:

Teorema *Sigui* R *un anell bigraduat estàndard definit sobre un anell local. Suposem que* $\dim \mathcal{R}_1, \dim \mathcal{R}_2 < \dim R$ *i* $a^1(R), a^2(R) < 0$. *Si* R *és Cohen-Macaulay,* R_Δ *també ho és per a* $\Delta = (1,1)$.

Sigui ara A una k-àlgebra graduada noetheriana generada en grau 1 i $I \subset A$ un ideal homogeni. S.D. Cutkosky i J. Herzog [CH] tracten el cas general de les immersions de l'explosió $X = \mathcal{P}roj(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n)$ de l'esquema projectiu $Y = \text{Proj}\ (A)$ al llarg del feix d'ideals $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ definides per les peces graduades de I. El problema plantejat és l'existència d'un enter f que compleixi que $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a tot $e > 0$ i $c \geq ef$. El cas més senzill correspon a l'explosió d'una varietat projectiva Y no singular al llarg d'un ideal regular en un cos de característica zero, on el Teorema d'Anul.lació de Kodaira pot ser emprat per provar:

Teorema [CH, Theorem 1.6] *Suposem que* k *té característica zero,* A *és Cohen-Macaulay,* Y *és no singular,* I *és equidimensional i* Proj (A/I) *és no singular. Aleshores existeix un enter positiu* f *tal que* $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay per a* $e > 0$, $c \geq ef$.

Sigui $\pi : X \to Y$ el morfisme natural, $E = \mathcal{P}roj(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})$, i w_E el seu feix dualitzant. El resultat fonamental és el següent criteri general:

Teorema [CH, Theorem 4.1] *Sigui $I \subset A$ un ideal homogeni tal que $I \not\subset \mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(A)$, A és Cohen-Macaulay i X és un esquema Cohen-Macaulay. Suposem que $\pi_*\mathcal{O}_E(m) = \mathcal{I}^m/\mathcal{I}^{m+1}$ per $m \geq 0$, $R^i\pi_*\mathcal{O}_E(m)$=0 per $i > 0$, $m \geq 0$, $R^i\pi_*w_E(m)$=0 per $i > 0$, $m \geq 2$. Aleshores, existeix un enter positiu f tal que $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a $e > 0$, $c \geq ef$.*

Aquest resultat s'aplica a les següents famílies d'ideals:

Corol.lari [CH, Corollary 4.2] *Sigui $I \subset A$ un ideal homogeni tal que $I \not\subset \mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(A)$, A és Cohen-Macaulay i $I_{\mathfrak{p}}$ és intersecció completa per a tot $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\ (A)$. Aleshores, existeix un enter positiu f tal que $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a $e > 0$ i $c \geq ef$.*

Corol.lari [CH, Corollary 4.4] *Sigui $I \subset A$ un ideal homogeni tal que $I \not\subset \mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(A)$, A és Cohen-Macaulay i $I_{(\mathfrak{p})}$ és fortament Cohen-Macaulay amb $\mu(I_{(\mathfrak{p})}) \leq \mathrm{ht}\,(\mathfrak{p})$ per a tot ideal primer $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\ (A)$ que conté I. Aleshores, existeix un enter positiu f tal que $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a $e > 0$ i $c \geq ef$.*

Les tècniques emprades en l'estudi de les diagonals d'una àlgebra de Rees també permeten estudiar la regularitat de les potències d'ideals homogenis així com les seves propietats asimptòtiques. Aquests problemes havien estat considerats prèviament usant altres mètodes. Sigui $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ l'anell de polinomis en n variables, i sigui I un ideal homogeni de A. I. Swanson [Swa] ha provat que existeix un enter B tal que $\mathrm{reg}\,(I^e) \leq Be$, $\forall e$. El problema és determinar aquest B. En alguns casos particulars aquest B ja era conegut. A. Geramita, A. Gimigliano i Y. Pitteloud [GGP] i K. Chandler [Cha] havien demostrat que per a ideals amb $\dim(A/I) = 1$, $\mathrm{reg}\,(I^e) \leq \mathrm{reg}\,(I)\,e$. Per altra banda, R. Sjögren [Sjo] havia donat un altre tipus de fita: si I és un ideal generat per formes de grau $\leq d$ amb $\dim(A/I) \leq 1$, $\mathrm{reg}\,(I^e) < (n-1)de$. També A. Bertram, L. Ein i R. Lazarsfeld [BEL] han donat una fita per a la regularitat de les potències d'un ideal en termes dels graus dels seus generadors: si I és l'ideal d'una subvarietat complexa no singular X de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ de codimensió c generada per formes de graus $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_r$, aleshores

$$H^i(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}, \mathcal{I}^e(k)) = 0, \ \ \forall i \geq 1, \forall k \geq ed_1 + d_2 + \ldots + d_c - (n-1).$$

Referent a les propietats asimptòtiques de les potències d'ideals, expliquem a continuació alguns dels resultats coneguts. Sigui $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anell local i sigui $I \subset A$ un ideal. M. P. Brodmann [Bro] prova que depth A/I^j pren un valor asimptòtic constant C per a $j >> 0$, i a més $C \leq \dim A - l(I)$. Aquest valor C va ser determinat per D. Eisenbud i C. Huneke [EH] per a ideals amb certes restriccions: si I és un ideal d'alçada positiva i $G_A(I)$ és Cohen-Macaulay, $\inf\{\operatorname{depth} A/I^j\} = \dim A - l(I)$, i si $\operatorname{depth} A/I^s = \inf\{\operatorname{depth} A/I^j\}$, llavors $\operatorname{depth} A/I^{s+1} = \operatorname{depth} A/I^s$. Finalment, V. Kodiyalam [Ko1] ha provat que per qualsevol $p \geq 0$ i j prou gran, el nombre de Betti $\beta_p^A(I^j) = \dim_k \operatorname{Tor}_p^A(I^j, k)$ i el nombre de Bass $\mu_A^p(I^j) = \dim_k \operatorname{Ext}_A^p(k, I^j)$ són polinomis en j de grau $\leq l(I) - 1$.

A.2 Objectius

A continuació, anem a motivar i situar els problemes considerats en aquesta memòria.

La restricció d'A. Simis et al. [STV] al cas d'àlgebres de Rees d'ideals equigenerats es deu principalment al fet que en aquest cas l'àlgebra de Rees es pot bigraduar de forma que sigui estàndard. Per a àlgebres bigraduades estàndard tenim definit el seu esquema biprojectiu (veure [STV], [Hy]) i es coneixen resultats sobre el seu polinomi de Hilbert (veure [HHRT], [KMV]). Si I és un ideal generat per formes $f_1, \ldots, f_r$ de graus $d_1, \ldots, d_r$ respectivament, l'àlgebra de Rees de I admet una presentació com a quocient de l'anell de polinomis $S = k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r]$ bigraduat mitjançant $\deg(X_i) = (1, 0)$, $\deg(Y_j) = (d_j, 1)$. Un dels primers problemes que considerarem a la memòria és l'extensió de definicions i resultats coneguts per a mòduls bigraduats definits sobre k-àlgebres bigraduades estàndard a la categoria de mòduls bigraduats definits sobre S.

L'estudi de les propietats aritmètiques d'un anell tals com la propietat Cohen-Macaulay i la propietat Gorenstein es poden caracteritzar en funció de la seva cohomologia local. Aquesta és la raó per la qual ens interessa estudiar quan la cohomologia local i el functor diagonal commuten, cas en què podem concloure que certes propietats aritmètiques de l'àlgebra de Rees són heretades per les seves diagonals. En aquesta commutació hi tenen un paper important els *shifts* (a, b) que apareixen en la resolució lliure bigraduada minimal de $R_A(I)$ sobre S. El següent problema que tractarem és l'estudi i afitació d'aquests shifts relacionant-los amb la cohomologia local de l'àlgebra de Rees. A continuació, estudiarem les obstruccions per a la commutativitat de la cohomologia local i el functor diagonal.

Fets aquests preàmbuls, passarem ja a aprofundir en l'estudi de la propietat Cohen-Macaulay dels anells $k[(I^e)_c]$. Considerarem diferents qüestions com ara l'existència i determinació de les diagonals (c,e) per a les quals $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay, problemes tractats en [STV], [CHTV] i [CH]. El següent objectiu serà l'estudi de la propietat Gorenstein de les k-àlgebres $k[(I^e)_c]$, que només ha estat estudiada en un cas molt particular en [CHTV].

Alguns dels criteris que obtindrem per a la propietat Cohen-Macaulay dels anells $k[(I^e)_c]$ venen donats en funció dels mòduls de cohomologia local de les potències de l'ideal I. Això ens portarà a l'estudi dels a-invariants de les potències d'un ideal. A la part final de la memòria veurem com la bigraduació que hem definit en l'àlgebra de Rees pot ser utilitzada per a l'estudi dels a-invariants i les propietats asimptòtiques de les potències d'un ideal.

Resumint, els principals problemes considerats en la memòria són:

(1) Estendre les definicions i resultats sobre l'esquema biprojectiu i el polinomi de Hilbert de mòduls bigraduats finitament generats definits sobre k-àlgebres bigraduades estàndard a mòduls bigraduats finitament generats sobre S, amb $S = k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r]$ l'anell de polinomis bigraduat mitjançant $\deg(X_i) = (1,0)$, $\deg(Y_j) = (d_j, 1)$, $d_1, \ldots, d_r \geq 0$.

(2) Relacionar els shifts que apareixen en la resolució lliure bigraduada minimal d'un S-mòdul bigraduat finitament generat amb els seus a-invariants.

(3) Estudiar els mòduls de cohomologia local de les diagonals d'un mòdul bigraduat finitament generat sobre S.

(4) Estudiar la propietat Cohen-Macaulay dels anells $k[(I^e)_c]$.

(5) Estudiar la propietat Gorenstein dels anells $k[(I^e)_c]$.

(5) Estudiar els a-invariants de les potències d'un ideal homogeni.

(6) Estudiar les propietats asimptòtiques de les potències d'un ideal homogeni.

A.3 Conclusions

A continuació, anem a descriure els resultats obtinguts en la memòria.

En el **Capítol 1** introduïm les notacions i definicions que necessitarem al llarg de la memòria. Comencem el capítol definint la categoria de mòduls multigraduats sobre un anell multigraduat, i recordant alguns resultats coneguts referents a la cohomologia local multigraduada i el mòdul canònic seguint M. Herrmann, E. Hyry i J. Ribbe [HHR] i S. Goto i K. Watanabe [GW1] bàsicament. A continuació, definim els a-invariants multigraduats d'un mòdul i estudiem la relació que hi ha entre aquests a-invariants i els shifts que apareixen en la seva resolucio minimal. Obtindrem una fórmula que estén [BH1, Example 3.6.15], on va ser provada en el cas graduat i només per a mòduls Cohen-Macaulay. Aquest resultat serà una eina molt útil que usarem al llarg de tota la memòria. A fi de precisar-ho, notem per S una k-àlgebra Cohen-Macaulay $\mathbb{N}^r$-graduada de dimensió d amb maximal homogeni $\mathcal{M}$, i per M un S-mòdul r-graduat finitament generat de dimensió m i profunditat ρ. Per a $i = 0, \dots, m$, lligat al mòdul de cohomologia local i-èsim de M definim l'a_i-invariant multigraduat de M com $\mathbf{a}_i(M) = (a_i^1(M), \dots, a_i^r(M))$, on

$$a_i^j(M) = \max\{n \mid \exists \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) : \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathcal{M}}(M)_{\mathbf{n}} \neq 0, n_j = n\}$$

si $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathcal{M}}(M) \neq 0$ i $a_i^j(M) = -\infty$ en cas contrari. Notarem per $\mathbf{a}(M) = (a^1(M), \dots, a^r(M)) = \mathbf{a}_m(M)$. Finalment, l'$a_*$-invariant multigraduat de M és $\mathbf{a}_*(M) = (a_*^1(M), \dots, a_*^r(M))$, on $a_*^j(M) = \max_{i=0,\dots,m}\{a_i^j(M)\}$.

Considerem d'altra banda la resolució lliure minimal r-graduada de M sobre S, i suposem que és finita. Escrivim-la

$$0 \to D_l \to \dots \to D_1 \to D_0 \to M \to 0,$$

amb $D_p = \bigoplus_q S(a_{pq}^1, ..., a_{pq}^r)$. Per a $p \in \{0, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, denotem per

$$t_p^j(M) = \max_q\{-a_{pq}^j\},$$
$$t_*^j(M) = \max_{p,q}\{-a_{pq}^j\} = \max_p t_p^j(M),$$
$$\mathbf{t}_*(M) = (t_*^1(M), \dots, t_*^r(M)).$$

A més, donada una permutació σ del conjunt $\{1, ..., r\}$, considerem $\leq_\sigma$ l'ordre en $\mathbb{Z}^r$ definit per: $(u_1, ..., u_r) \leq_\sigma (v_1, ..., v_r)$ si i només si $(u_{\sigma(1)}, ..., u_{\sigma(r)}) \leq_{lex} (v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)})$, on $\leq_{lex}$ és l'ordre lexicogràfic. Sigui

$\mathbf{M}_p^\sigma = \max_{\leq_\sigma}\{\ (-a_{pq}^1, ..., -a_{pq}^r)\}$. Aleshores podem provar la següent fórmula que relaciona els shifts i els a-invariants de M.

Teorema 1 [Theorem 1.3.4] *Per a* $j = 1, \ldots, r$,

(i) $a_{d-p}^j(M) \leq t_p^j(M) + a^j(S)$, *per a* $p = d-m, \ldots, d-\rho$.

(ii) Suposem que per algun p existeix σ *tal que* $\sigma(1) = j$ *i* $M_p^\sigma >_\sigma M_{p+1}^\sigma$. *Llavors* $a_{d-p}^j(M) = t_p^j(M) + a^j(S)$.

(iii) $a_*^j(M) = t_*^j(M) + a^j(S)$. *És a dir,* $\mathbf{a}_*(M) = \mathbf{t}_*(M) + \mathbf{a}(S)$.

A continuació, estenem la definició i alguns dels resultats sobre l'esquema multiprojectiu associat a un anell r-graduat estàndard fets en [Hy] i [HHRT] a anells amb un tipus de graduació més general que inclouran també l'àlgebra de Rees d'un ideal homogeni amb la bigraduació definida anteriorment. Sigui S un anell $\mathbb{N}^r$-graduat noetherià generat sobre S_0 per elements homogenis $x_{11}, \ldots, x_{1k_1}, \ldots, x_{r1}, \ldots, x_{rk_r}$ de graus $\deg(x_{ij}) = (d_{ij}^1, \ldots, d_{ij}^{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$, amb $d_{ij}^l \geq 0$. Per a $j = 1, \ldots, r$, sigui I_j l'ideal de S generat per les components homogènies de S de grau $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ tal que $n_j > 0, n_{j+1} = \ldots = n_r = 0$. L'ideal irrelevant de S és $S_+ = I_1 \cdots I_r$. Associem a S l'esquema r-projectiu $\operatorname{Proj}^r(S)$, que com a conjunt està format per tots els ideals primers homogenis de S que no contenen S_+. La dimensió relevant de S ve definida per

$$\text{rel.dim}\, S = \begin{cases} r-1 & \text{si } \operatorname{Proj}^r(S) = \emptyset \\ \max\{\dim S/P \mid P \in \operatorname{Proj}^r(S)\} & \text{si } \operatorname{Proj}^r(S) \neq \emptyset \end{cases}.$$

Es prova que $\dim \operatorname{Proj}^r(S) = \text{rel.dim}\, S - r$ estenent [Hy, Lemma 1.2] on el cas r-graduat estàndard va ser considerat. Aquest càlcul, juntament amb els isomorfismes d'esquemes $\operatorname{Proj}^r(S) \cong \operatorname{Proj}(S_\Delta)$ que tenim per a una família de diagonals ens permet llavors calcular la dimensió de S_Δ sempre que S_0 sigui artinià, estenent [STV, Proposition 2.3] on aquesta dimensió fou calculada per a la diagonal $(1,1)$ d'una k-àlgebra bigraduada estàndard per mètodes diferents.

Així mateix, també estendrem a la categoria de mòduls r-graduats definits sobre les k-àlgebres r-graduades que acabem d'introduir els resultats bàsics referents a funcions de Hilbert i polinomis de Hilbert. Alguns d'aquests resultats han estat demostrats en [HHRT] i [KMV] en el cas r-graduat estàndard.

En el **Capítol 2** estudiem el functor diagonal a la categoria de mòduls bigraduats definits sobre S, on S és l'anell de polinomis $S =$

$k[X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_r]$ amb la bigraduació determinada definint $\deg X_i = (1,0)$, $\deg Y_j = (d_j,1)$, per a $d_1,\ldots,d_r \geq 0$. En la primera secció, comparem els mòduls de cohomologia local d'un S-mòdul bigraduat finitament generat L amb els mòduls de cohomologia local de les seves diagonals. En particular, recuperarem els principals resultats provats en [CHTV] per una aproximació diferent inspirada en tècniques que han estat usades per E. Hyry [Hy]. A més, aquesta aproximació ens donarà informació més detallada sobre els problemes relacionats amb el comportament de la cohomologia local quan prenem diagonals. Sigui $d = \max\{d_1,\ldots,d_r\}$, i sigui $\Delta = (c,e)$ una diagonal amb $c \geq de+1$. Considerem les següents subàlgebres de S: $S_1 = k[X_1,\ldots,X_n]$, $S_2 = k[Y_1,\ldots,Y_r]$, amb ideals maximals homogenis $\mathfrak{m}_1 = (X_1,...,X_n)$ i $\mathfrak{m}_2 = (Y_1,\ldots,Y_r)$. Notem $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ els ideals de S generats per $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ respectivament, i sigui $\mathcal{M}$ l'ideal maximal homogeni de S. Aleshores:

Proposició 2 [Proposition 2.1.3] *Sigui L un S-mòdul bigraduat finitament generat. Existeix una successió exacta natural*

$$\ldots \to H^q_{\mathcal{M}}(L)_\Delta \to H^q_{\mathcal{M}_1}(L)_\Delta \oplus H^q_{\mathcal{M}_2}(L)_\Delta \to H^q_{\mathcal{M}_\Delta}(L_\Delta) \xrightarrow{\varphi^q_L} H^{q+1}_{\mathcal{M}}(L)_\Delta \to \ldots$$

La resta de la secció està dedicada a estudiar les obstruccions per a que φ^q_L sigui un isomorfisme. Aquest problema el relacionarem primer amb l'anul.lació de la cohomologia local respecte els ideals $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ dels mòduls $S(a,b)$ que apareixen en la resolució lliure bigraduada minimal de L sobre S. Això ens permet com ja hem dit recuperar els resultats de [CHTV]. Després, estudiarem directament l'anul.lació dels mòduls de cohomologia local de L respecte els ideals $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$.

En la Secció 2.2 estudiem el cas particular de les k-àlgebres bigraduades estàndard. Donada una k-àlgebra bigraduada estàndard R, considerem les subàlgebres graduades $\mathcal{R}_1 = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_{(i,0)}$, $\mathcal{R}_2 = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} R_{(0,j)}$. Usant el Teorema 1, podem obtenir una caracterització de resolució bona per a R en funció dels a_*-invariants de $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$, que en particular dóna un criteri per a la propietat Cohen-Macaulay de les seves diagonals. També donem condicions necessàries i suficients sobre la cohomologia local de $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ per a l'existència de diagonals Cohen-Macaulay d'una k-àlgebra bigraduada estàndard Cohen-Macaulay R. Aquest resultat estén [CHTV, Corollary 3.12].

Proposició 3 [Proposition 2.2.7] *Sigui R una k-àlgebra bigraduada estàndard Cohen-Macaulay de dimensió relevant δ. Aleshores, existeix Δ tal que R_Δ és Cohen-Macaulay si i només si $H^q_{\mathfrak{m}_1}(\mathcal{R}_1)_0 = H^q_{\mathfrak{m}_2}(\mathcal{R}_2)_0 = 0$ per qualsevol $q < \delta - 1$.*

Considerem ara un anell bigraduat estàndard R definit sobre un anell local amb $a^1(R), a^2(R) < 0$. En [Hy, Theorem 2.5] es prova que si R és Cohen-Macaulay llavors la diagonal $\Delta = (1,1)$ de R també ho és. Aquest resultat pot ser estés a qualsevol diagonal d'una k-àlgebra bigraduada estàndard:

Proposició 4 [Proposition 2.2.6] *Sigui R una k-àlgebra bigraduada estàndard Cohen-Macaulay amb $a^1(R), a^2(R) < 0$. Llavors R_Δ és Cohen-Macaulay per a qualsevol diagonal Δ.*

Al final del capítol, els resultats anteriors sobre k-àlgebres bigraduades s'apliquen a l'estudi de l'àlgebra de Rees d'un ideal homogeni. Introduïm ara la notació que farem servir. Sigui A una k-àlgebra graduada noetheriana de dimensió $\overline{n}$ generada per elements de grau 1 i sigui $\mathfrak{m}$ l'ideal homogeni maximal de A. Donat un ideal homogeni I de A, l'àlgebra de Rees $R = R_A(I)$ de I està bigraduada per $R_{(i,j)} = (I^j)_i$. Si I ve generat per formes de grau $\leq d$, per a qualsevol diagonal $\Delta = (c, e)$ amb $c \geq de + 1$ tenim:

$$R_A(I)_\Delta = k[(I^e)_c].$$

Les diagonals $k[(I^e)_c]$ són k-àlgebres graduades de dimensió $\overline{n}$ si no hi ha primers associats a A que continguin I. D'ara en endavant sempre suposarem aquesta hipòtesi. Els resultats obtinguts fins ara ens permeten relacionar la cohomologia local de les k-àlgebres $k[(I^e)_c]$ i la de les potències de l'ideal I.

Proposició 5 [Corollary 2.3.5] *Per a $c \geq de + 1$, $e > a^2_*(R)$, $s > 0$, tenim isomorfismes*

$$H^q_m(k[(I^e)_c])_s \cong H^q_{\mathfrak{m}}(I^{es})_{cs}, \forall q \geq 0.$$

En el cas $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, A. Conca et al. [CHTV] conjecturen que si l'àlgebra de Rees d'un ideal homogeni I de A és Cohen-Macaulay, aleshores existeix alguna diagonal amb aquesta propietat. Els resultats provats per a k-àlgebres bigraduades estàndard donen una resposta afirmativa per a ideals equigenerats. De fet, podem provar-la també en el cas general.

Teorema 6 [Theorem 2.3.12] *Sigui I un ideal homogeni de l'anell de polinomis $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Si $R_A(I)$ és un anell Cohen-Macaulay, aleshores $R_A(I)$*

té una resolució bona. En particular, $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay per a* $c \gg e \gg 0$.

A més, obtenim condicions necessàries i suficients sobre l'anell A per a l'existència de diagonals Cohen-Macaulay d'una àlgebra de Rees $R_A(I)$ amb aquesta propietat.

Teorema 7 [Theorem 2.3.13] *Si* $R_A(I)$ *és Cohen-Macaulay, són equivalents:*

(i) Existeixen c, e *tals que* $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay.*

(ii) $H^i_{\mathfrak{m}}(A)_0 = 0$ *per a* $i < \overline{n}$.

En el **Capítol 3** ens proposem estudiar en detall la propietat Cohen-Macaulay dels anells $k[(I^e)_c]$, primer la seva existència i a continuació la determinació de les diagonals (c, e) per a les quals $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay. Els següents isomorfismes d'esquemes tindran un paper important:

Proposició 8 [Proposition 3.1.2] *Sigui* X *l'explosió de* Proj (A) *al llarg de* $\mathcal{I} = \widetilde{I}$, *on* I *és un ideal homogeni de* A *generat per formes de grau* $\leq d$. *Per a* $c \geq de + 1$, *tenim isomorfismes d'esquemes*

$$X \cong \text{Proj }^2(R_A(I)) \cong \text{Proj }(k[(I^e)_c]).$$

Primer aquests isomorfismes ens permetran donar un criteri per a l'existència de diagonals $k[(I^e)_c]$ que siguin mòduls Cohen-Macaulay generalitzats, provant així una conjectura plantejada en [CHTV].

Proposició 9 [Proposition 3.2.6] *Són equivalents:*

(i) $H^i_{\mathcal{M}}(R_A(I))_{(p,q)}=0$ *per a* $i < \overline{n} + 1$, $p \ll 0$ *relatiu a* $q \ll 0$.

(ii) $k[(I^e)_c]$ *és un mòdul Cohen-Macaulay generalitzat per a* $c \gg e \gg 0$.

(iii) Existeixen c, e *tals que* $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay generalitzat.*

(iv) $k[(I^e)_c]$ *és un anell Buchsbaum per a* $c \gg e \gg 0$.

(v) Existeixen c, e *tals que* $k[(I^e)_c]$ *és un anell Buchsbaum.*

(vi) Existeixen enters q_0, t *tals que* $H^i_{\mathcal{M}}(R_A(I))_{(p,q)} = 0$ *per a* $i < \overline{n} + 1$, $q < q_0$, $p < dq + t$.

Després, la Proposició 8 és usada per a donar condicions necessàries i suficients sobre l'àlgebra de Rees per a que tingui diagonals amb la propietat Cohen-Macaulay.

Teorema 10 [Theorem 3.2.3, Corollary 3.2.5] *Són equivalents:*

(i) Existeixen c, e *tals que* $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay.*

(ii) (1) Existeixen $q_0, t \in \mathbb{Z}$ *tals que* $H^i_{\mathcal{M}}(R_A(I))_{(p,q)} = 0$ *per a* $i < \overline{n}+1$, $q < q_0$, $p < dq + t$.

(2) $H^i_{R_A(I)_+}(R_A(I))_{(0,0)} = 0$ *per a* $i < \overline{n}$.

(iii) (1) X *és Cohen-Macaulay.*

(2) $\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) = k$, $H^i(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) = 0$ *per a* $0 < i < \overline{n} - 1$.

En aquest cas, $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay per a* $c \gg e \gg 0$.

Aquest teorema ens permet mostrar situacions molt generals en què podem assegurar l'existència d'anells de coordenades Cohen-Macaulay per a X. Per exemple,

Proposició 11 [Proposition 3.3.3] *Sigui* X *l'explosió de* $\mathbb{P}^{n-1}_k$ *al llarg d'un subesquema tancat, on* k *té característica zero. Suposem que* X *és no singular o amb singularitats racionals. Aleshores* X *és aritmèticament Cohen-Macaulay.*

El següent problema que tractarem en el capítol és la determinació de les diagonals amb la propietat Cohen-Macaulay una vegada en podem assegurar la seva existència. Aquest és un problema difícil, que només ha estat completament solventat en el cas d'ideals intersecció completa de l'anell de polinomis [CHTV, Theorem 4.6]. En el cas equigenerat, només amb la hipòtesi que l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay podem donar un criteri per a la propietat Cohen-Macaulay de les diagonals en funció de la cohomologia local de les potències de l'ideal. Tenim:

Proposició 12 [Proposition 3.4.1] *Sigui* $I \subset A$ *un ideal generat per formes de grau* d *amb àlgebra de Rees Cohen-Macaulay. Per a* $c \geq de + 1$, $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay si i només si*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(A)_0 = 0$, *per a* $i < \overline{n}$.

(ii) $H^i_{\mathfrak{m}}(I^{es})_{cs} = 0$, *per a* $i < \overline{n}$, $s > 0$.

Sense la restricció que l'ideal sigui equigenerat, veurem que si l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay la propietat Cohen-Macaulay d'una diagonal pot ser caracteritzada via la cohomologia local de les potències de l'ideal i la cohomologia local de les peces graduades del mòdul canònic de l'àlgebra de Rees. Notem per $K = K_{R_A(I)} = \bigoplus_{(i,j)} K_{(i,j)}$ el mòdul canònic de l'àlgebra de Rees, i per cada $e \in \mathbb{Z}$, considerem l'A-mòdul graduat $K^e = \bigoplus_i K_{(i,e)}$. Aleshores:

Teorema 13 [Theorem 3.4.3] *Sigui I un ideal homogeni d'A generat per formes de grau $\leq d$ amb àlgebra de Rees Cohen-Macaulay. Per a $c \geq de+1$, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay si, i només si,*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(A)_0 = 0$ *per a* $i < \overline{n}$.

(ii) $H^i_{\mathfrak{m}}(I^{es})_{cs} = 0$ *per a* $i < \overline{n}$, $s > 0$.

(iii) $H^{\overline{n}-i+1}_{\mathfrak{m}}(K^{es})_{cs} = 0$ *per a* $1 \leq i < \overline{n}$, $s > 0$.

Aquest criteri es pot expressar només en funció de la cohomologia local de les potències de l'ideal en el cas en què el graduat associat és quasi-Gorenstein.

Teorema 14 [Corollary 3.4.4] *Sigui I un ideal homogeni de A generat per formes de grau $\leq d$. Suposem que $R_A(I)$ és Cohen-Macaulay i $G_A(I)$ és quasi-Gorenstein. Sigui $a = -a^2(G_A(I))$, $b = -a(A)$. Per a $c \geq de+1$, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay si, i només si,*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(A)_0 = 0$ *per a* $i < \overline{n}$.

(ii) $H^i_{\mathfrak{m}}(I^{es})_{cs} = 0$ *per a* $i < \overline{n}$, $s > 0$.

(iii) $H^i_{\mathfrak{m}}(I^{es-a+1})_{cs-b} = 0$ *per a* $1 < i \leq \overline{n}$, $s > 0$.

Es pot usar el Teorema 14 per a determinar exactament les diagonals Cohen-Macaulay de l'àlgebra de Rees d'un ideal intersecció completa en qualsevol anell Cohen-Macaulay. En particular, això ens dóna una nova prova de [CHTV, Theorem 4.6], on el cas $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ va ser estudiat.

Aquests criteris també seran aplicats en el Capítol 5, una vegada haguem estudiat la cohomologia local de les potències dels ideals de diferents famílies, com els ideals equimúltiples o els ideals fortament Cohen-Macaulay.

A més, els resultats i tècniques emprades fins ara també ens permeten mostrar el comportament de l'a_*-invariant de les potències d'un ideal homogeni. Aquest fet ha estat obtingut independentment per S.D. Cutkosky, J. Herzog i N. V. Trung [CHT] i V. Kodiyalam [Ko2] per mètodes diferents.

Teorema 15 [Theorem 3.4.6] *Sigui L un S-mòdul bigraduat finitament generat. Aleshores existeix α tal que per a qualsevol e*

$$a_*(L^e) \leq de + \alpha.$$

A continuació, en el cas en què l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay, i gràcies a l'afitació dels shifts de la resolució lliure bigraduada minimal de l'àlgebra de Rees que ens dóna el Teorema 1, podem donar una família de diagonals que conserven aquesta propietat.

Teorema 16 [Theorem 3.4.12] *Sigui I un ideal homogeni de A generat per r formes de graus $d_1 \leq \ldots \leq d_r = d$. Suposem que $H^i_{\mathfrak{m}}(A)_0 = 0$ per a $i < \overline{n}$. Sigui $u = \sum_{j=1}^r d_j$. Si l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay, aleshores*

(i) $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a $c > \max\{d(e-1)+u+a(A), d(e-1)+u-d_1(r-1)\}$.

(ii) Si I és equigenerat per formes de grau d, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a $c > d(e-1+l(I))+a(A)$.

Els nostres resultats es poden aplicar també a l'estudi de les immersions de l'explosió d'un espai projectiu al llarg d'un ideal I de fat points mitjançant els sistemes lineals $(I^e)_c$ sempre que aquests siguin molt amples, estenent [GGP, Theorem 2.4] on només els sistemes lineals I_c van ser considerats.

Teorema 17 [Theorem 3.4.15] *Sigui $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal de fat points, amb k un cos de característica 0. Aleshores*

(i) $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay si i només si $H^i_{\mathfrak{m}}(I^{es})_{cs} = 0$ per a $s > 0$, $i < n$.

(ii) Per a $c > \operatorname{reg}(I)e$, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay amb $a(k[(I^e)_c]) < 0$. En particular, $\operatorname{reg}(k[(I^e)_c]) < n-1$.

El capítol acaba amb l'estudi de condicions suficients per a l'existència d'una constant f tal que els anells $k[(I^e)_c]$ siguin Cohen-Macaulay per a $c \geq ef$ i $e > 0$, problema considerat per S.D. Cutkosky i J. Herzog [CH]. El resultat principal, que recobreix i millora Corol.laris 4.2, 4.3 i 4.4 en [CH], és el següent:

Teorema 18 [Theorem 3.5.3] *Suposem que $H^i_{\mathfrak{m}}(A)_0 = 0$ per a $i < \overline{n}$. Sigui I un ideal homogeni de A tal que $R_{A_\mathfrak{p}}(I_\mathfrak{p})$ és Cohen-Macaulay per a tot $\mathfrak{p} \in$*

Proj (A). *Aleshores existeix un enter* α *tal que* $k[(I^e)_c]$ *és Cohen-Macaulay per a* $c \geq de + \alpha$ *i* $e > 0$.

En el **Capítol 4** estudiem la propietat Gorenstein de les k-àlgebres $k[(I^e)_c]$. Per a la propietat Cohen-Macaulay, vèiem en el capítol anterior que l'existència d'una diagonal amb aquesta propietat implicava que infinites diagonals ho eren. Veurem que la propietat Gorenstein es comporta totalment diferent. Per exemple, per a l'anell de polinomis $S = k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_r]$ amb $\deg X_i = (1,0)$, $\deg Y_j = (d_j, 1)$, $d_1, \dots, d_r \geq 0$, sabem que S_Δ és Cohen-Macaulay per a qualsevol diagonal Δ. Veiem en canvi que només un nombre finit de diagonals són Gorenstein:

Proposició 19 [Proposition 4.1.1] S_Δ *és Gorenstein si, i només si,* $\frac{r}{e} = \frac{n+u}{c} = l \in \mathbb{Z}$. *Aleshores* $a(S_\Delta) = -l$.

Per a determinar els anells $k[(I^e)_c]$ amb la propietat Gorenstein, ens interessa relacionar el mòdul canònic de l'àlgebra de Rees i els mòduls canònics de les seves diagonals. Per a ideals intersecció completa de l'anell de polinomis, va ser provat en [CHTV, Proposition 4.5] la commutació entre el mòdul canònic i la diagonal. Aquest resultat pot ser estés a situacions més generals.

Proposició 20 [Proposition 4.1.4, Remark 4.1.5] *Sigui* $A = k[X_1, \dots, X_n]$, *amb* $n \geq 2$, *i* I *un ideal homogeni de* A *amb* $\mu(I) \geq 2$.

(i) Si $\mu(I) \leq n$, $K_{R_\Delta} \cong (K_R)_\Delta$.

(ii) Si I *és equigenerat i* R *és Cohen-Macaulay,* $K_{R_\Delta} \cong (K_R)_\Delta$.

Tot i que aquest isomorfisme també es pot estendre a anells més generals, nosaltres ens restringirem a aquests dos casos que ja ens permetran estudiar les superfícies obtingudes per explosió del pla projectiu en un conjunt de punts.

Primerament, considerarem el problema d'estudiar com la propietat Gorenstein de l'àlgebra de Rees es comporta per pas a les diagonals. Si l'àlgebra de Rees és Gorenstein sabem que el graduat és Gorenstein. Amb aquesta hipòtesi sobre el graduat molt menys restrictiva, provem:

Teorema 21 [Theorem 4.1.9] *Sigui* $I \subset A = k[X_1, \dots, X_n]$ *un ideal homogeni amb* $1 < \operatorname{ht}(I) < n$ *i graduat associat* $G_A(I)$ *Gorenstein. Sigui* $a = -a^2(G_A(I))$. *Aleshores,* $k[(I^e)_c]$ *és quasi-Gorenstein si i només si* $\frac{n}{c} = \frac{a-1}{e} = l_0 \in \mathbb{Z}$. *En aquest cas,* $a(k[(I^e)_c]) = -l_0$.

En el cas d'ideals I no principals amb $\mathrm{ht}\,(I) = 1$, l'anell $k[(I^e)_c]$ no és mai Gorenstein. En el cas $\mathrm{ht}\,(I) = n$, les condicions del teorema són suficients però no necessàries. Com a corol.lari podem resoldre completament el problema de la determinació de les diagonals de l'àlgebra de Rees amb la propietat Gorenstein en el cas dels ideals intersecció completa i el cas d'ideals generats per menors maximals de matrius genèriques.

Corol.lari 22 [Corollary 4.1.12] *Sigui $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal intersecció completa generat minimalment per r formes de graus $d_1 \leq \ldots \leq d_r = d$, amb $r < n$. Per a $c \geq de + 1$, $k[(I^e)_c]$ és Gorenstein si i només si $\frac{n}{c} = \frac{r-1}{e} = l_0 \in \mathbb{Z}$. En aquest cas, $a(k[(I^e)_c]) = -l_0$.*

Corol.lari 23 [Example 4.1.13] *Sigui $\mathbf{X} = (X_{ij})$ una matriu genèrica, amb $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ i $m \leq n$. Considerem $I \subset A = k[\mathbf{X}]$ l'ideal generat pels menors maximals de $\mathbf{X}$, on k és un cos. Aleshores:*

(i) Si $m < n$, aleshores $k[(I^e)_c]$ és Gorenstein si i només si $\frac{nm}{c} = \frac{n-m}{e} \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si $m = n$, la única diagonal Gorenstein és $\Delta = (n(n+1), 1)$.

Sota la hipòtesi que el graduat és Gorenstein, hem vist que només un nombre finit de diagonals són quasi-Gorenstein. Es pot provar que aquest fet val sota les hipòtesis generals del capítol:

Proposició 24 [Proposition 4.2.1] *Existeixen com a molt un nombre finit de diagonals $\Delta = (c, e)$ tals que $k[(I^e)_c]$ és quasi-Gorenstein.*

Suposant que l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay, també podem afitar les diagonals $\Delta = (c, e)$ que satisfaran que $k[(I^e)_c]$ és Gorenstein.

Proposició 25 [Proposition 4.2.2] *Sigui I un ideal homogeni amb $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$ tal que $R_A(I)$ és Cohen-Macaulay. Sigui $a = -a^2(G_A(I))$. Si $k[(I^e)_c]$ és quasi-Gorenstein, llavors $e \leq a - 1$, $c \leq n$. A més, si $\dim(A/I) > 0$ llavors $\lceil \frac{a}{e} \rceil - 1 = \frac{n}{c} = l \in \mathbb{Z}$. En particular, si $a = 1$ no existeixen diagonals (c, e) tals que $k[(I^e)_c]$ és quasi-Gorenstein.*

Finalment, mostrem que en certs casos l'existència d'una diagonal (c, e) tal que $k[(I^e)_c]$ és quasi-Gorenstein força l'anell graduat a ser Gorenstein. Per aquests casos, pot ser vist com un recíproc del Teorema 21.

Teorema 26 [Theorem 4.2.3] *Sigui I un ideal equigenerat amb $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$, $l(I) < n$. Suposem que $R_A(I)$ és Cohen-Macaulay. Si existeix alguna diagonal $k[(I^e)_c]$ quasi-Gorenstein, llavors $G_A(I)$ és Gorenstein.*

Acabem el capítol aplicant els resultats anteriors a l'estudi de les superfícies de Room, provant que la única superfície de Room que és Gorenstein és la *Del Pezzo sestic surface* a $\mathbb{P}^6$.

En el **Capítol 5** estudiem l'a-invariant i la regularitat d'un mòdul bigraduat finitament generat L definit sobre l'anell de polinomis $S = k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_r]$ amb $\deg X_i = (1,0)$, $\deg Y_j = (0,1)$. Aquesta classe de mòduls comprèn tota k-àlgebra bigraduada estàndard R.

Per a un S-mòdul bigraduat finitament generat L, considerem la seva resolució lliure bigraduada minimal sobre S

$$0 \to D_t \to \dots \to D_0 \to L \to 0,$$

amb $D_p = \bigoplus_{(a,b)\in\Omega_p} S(a,b)$. La regularitat de L és $\mathbf{reg}(L) = (\mathrm{reg}_1 L, \mathrm{reg}_2 L)$, amb

$$\mathrm{reg}_1 L = \max_p\{-a-p \mid (a,b) \in \Omega_p\},$$
$$\mathrm{reg}_2 L = \max_p\{-b-p \mid (a,b) \in \Omega_p\}.$$

Per a cada $e \in \mathbb{Z}$, definim el S_1-mòdul graduat $L^e = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L_{(i,e)}$ i el S_2-mòdul graduat $L_e = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} L_{(e,j)}$. El primer resultat dóna una nova descripció de l'a_*-invariant $\mathbf{a}_*(L)$ de L i la regularitat $\mathbf{reg}(L)$ de L en funció dels a_*-invariants i les regularitats dels mòduls graduats L^e i L_e.

Teorema 27 [Theorem 5.1.1, Theorem 5.1.2] *Sigui L un S-mòdul bigraduat finitament generat. Aleshores:*

(i) $a_*^1(L) = \max_e\{a_*(L^e)\} = \max_e\{a_*(L^e) \mid e \le a_*^2(L) + r\}$.

(ii) $a_*^2(L) = \max_e\{a_*(L_e)\} = \max_e\{a_*(L_e) \mid e \le a_*^1(L) + n\}$.

(iii) $\mathrm{reg}_1 L = \max_e\{\mathrm{reg}\,(L^e)\} = \max_e\{\mathrm{reg}\,(L^e) \mid e \le a_*^2(L) + r\}$.

(iv) $\mathrm{reg}_2 L = \max_e\{\mathrm{reg}\,(L_e)\} = \max_e\{\mathrm{reg}\,(L_e) \mid e \le a_*^1(L) + n\}$.

Aquest teorema serà usat per a estudiar l'a_*-invariant i la regularitat de les potències d'un ideal I de l'anell de polinomis $A = k[X_1, \dots, X_n]$. Pel Teorema 15, ja sabíem que existeix un enter α tal que $a_*(I^e) \le de + \alpha$, $\forall e$. El primer propòsit és determinar aquest α explícitament i això ho farem per a qualsevol ideal equigenerat en funció d'un a-invariant adequat de l'àlgebra de Rees. Per a un ideal I, notem per R, G i F l'àlgebra de Rees de I, el garduat associat i el *fiber cone* respectivament. Si I és un ideal generat per formes de grau d, notem R^φ l'àlgebra de Rees bigraduada estàndard mitjançant $[R^\varphi]_{(i,j)} = (I^j)_{i+dj}$. Aleshores tenim:

Teorema 28 [Theorem 5.2.1] *Sigui I un ideal homogeni de A generat per formes de grau d amb dispersió analítica l. Aleshores*

(i) $a_*^1(R^\varphi) = \max_e\{\, a_*(I^e) - de\} = \max\{\, a_*(I^e) - de \mid e \leq a_*^2(R) + l\}$.

(ii) $\operatorname{reg}_1(R^\varphi) = \max_e\{\operatorname{reg}(I^e) - de\} = \max\{\operatorname{reg}(I^e) - de \mid e \leq a_*^2(R) + l\}$.

Per tant, ens cal estudiar $a_*^1(R^\varphi)$ per aconseguir fites concretes per a l'a_*-invariant de les potències d'algunes famílies d'ideals. Així, si l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay provem:

Proposició 29 [Proposition 5.2.5] *Sigui I un ideal generat per formes de grau d amb àlgebra de Rees Cohen-Macaulay. Sigui $l = l(I)$. Aleshores:*

$$d(-a^2(G) - 1) - n \leq a_*^1(R^\varphi) \leq d(l-1) - n.$$

Aquestes desigualtats s'assoleixen per a un ideal intersecció completa, i veurem que poden millorar-se per a altres famílies d'ideals. Per exemple, per als ideals equimúltiples:

Proposició 30 [Proposition 5.2.8] *Sigui I un ideal equimúltiple generat en grau d i sigui $h = \operatorname{ht}(I)$. Suposant que l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay,*

(i) $a(I^e/I^{e+1}) = de + a(A/I)$. *En particular,* $a^1(G^\varphi) = a(A/I)$.

(ii) $a_{n-h+1}(I^e) = d(e-1) + a(A/I)$. *En particular,* $a^1(R^\varphi) = a(A/I) - d$.

Per a ideals amb graduat associat Gorenstein també podem provar que la fita inferior de la Proposició 29 s'assoleix:

Proposició 31 [Proposition 5.2.9] *Sigui I un ideal equigenerat en grau d amb graduat associat Gorenstein. Sigui $l = l(I)$. Aleshores:*

(i) $a^1(R^\varphi) = d(-a^2(G) - 1) - n$.

(ii) Per a $e > a^2(G) - a(F)$, $\operatorname{depth}(A/I^e) = n - l$ *i* $a_*(I^e) = a_{n-l}(A/I^e) = d(e - a^2(G) - 1) - n$.

Aquest resultat el podem aplicar per exemple a ideals determinantals generats pels menors maximals de matrius genèriques i ideals fortament Cohen-Macaulay complint la condició $(\mathcal{F}_1)$.

El coneixement de l'a_*-invariant de les potències d'aquestes famílies d'ideals ens permetrà precisar les diagonals de l'àlgebra de Rees amb la propietat Cohen-Macaulay. Per a ideals equimúltiples tenim:

Proposició 32 [Proposition 5.2.20] *Sigui I un ideal equimúltiple de A generat en grau d amb àlgebra de Rees Cohen-Macaulay. Per a $c \geq de+1$, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay si, i només si, $c > d(e-1) + a(A/I)$.*

Per a ideals fortament Cohen-Macaulay tenim:

Proposició 33 [Proposition 5.2.21] *Sigui I un ideal fortament Cohen-Macaulay tal que $\mu(I_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ per a tot ideal primer $\mathfrak{p} \supseteq I$. Suposem que I està generat minimalment per formes de graus $d = d_1 \geq \ldots \geq d_r$, i sigui $h = \mathrm{ht}(I)$. Per a $c > d(e-1) + d_1 + \ldots + d_h - n$, $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay.*

Si l'àlgebra de Rees és Cohen-Macaulay, sabem pel Teorema 16 que existeix un enter α tal que $k[(I^e)_c]$ és Cohen-Macaulay per a $c > de + \alpha$. Per a ideals equigenerats teníem $\alpha = d(l-1)$ com a fita superior. Anem ara a determinar el mínim α.

Proposició 34 [Proposition 5.2.15, Corollary 5.2.16] *Sigui I un ideal de $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ generat per formes de grau d amb àlgebra de Rees Cohen-Macaulay. Sigui $l = l(I)$. Per a $\alpha \geq 0$, són equivalents*

(i) *Per a $c > de + \alpha$, $k[(I^e)_c]$ és CM.*

(ii) $a_i(I^e) \leq de + \alpha$, $\forall i$, $\forall e$.

(iii) $a_i(I^e) \leq de + \alpha$, $\forall i$, $\forall e \leq l-1$.

(iv) $H^{n+1}_{\mathcal{M}}(R_A(I))_{(p,q)} = 0$, $\forall p > dq + \alpha$, *és a dir,* $\alpha \geq a^1(R^\varphi)$.

(v) *La resolució lliure bigraduada minimal de $R_A(I)$ és bona per a diagonals $\Delta = (c,e)$ amb $c > de + \alpha$.*

Si el graduat associat és Gorenstein, aquestes condicions són equivalents a

(vi) $\alpha \geq d(-a^2(G_A(I)) - 1) - n$.

En la última secció, usarem el Teorema 27 per a provar una versió bigraduada del Teorema de Bayer-Stillman que ens caracteritza la regularitat d'un ideal homogeni de S per mitjà de formes homogènies genèriques. A continuació, de manera anàloga al cas graduat, definirem l'ideal inicial genèric $\mathbf{gin}\, I$ d'un ideal homogeni I de S i establim les seves propietats bàsiques. En particular, podrem usar la versió bigraduada del teorema de Bayer-Stillman per a calcular la regularitat d'un ideal Borel-fix en el cas que la característica de k sigui zero, resultat que ha estat també provat per A. Aramova et al. [ACD]. Per a $j = 1, 2$, denotem per $\delta_j(I)$ el màxim de les components j-èsimes dels graus en un sistema minimal de generadors de I. Aleshores tenim:

Proposició 35 [Proposition 5.3.10] *Sigui I un ideal Borel-fix de S. Si el cos k té característica zero, aleshores*

$$\mathrm{reg}_1(I) = \delta_1(I),$$

$$\mathrm{reg}_2(I) = \delta_2(I).$$

En el cas graduat, D. Bayer i M. Stillman [BaSt] van provar l'existència d'un ordre en l'anell de polinomis $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ de forma que per a qualsevol ideal homogeni I de A, $\mathrm{reg}\, I = \mathrm{reg}\,(\mathrm{gin} I)$. Acabem el capítol provant que el corresponent resultat bigraduat deixa de ser cert, perquè trobem un ideal homogeni I de S per al que, en qualsevol ordre, $\mathbf{reg}(I) \neq \mathbf{reg}(\mathbf{gin} I)$.

En el **Capítol 6** estudiem les propietats asimptòtiques de les potències d'un ideal homogeni I en l'anell de polinomis $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. L'estructura bigraduada de l'àlgebra de Rees de I ens donarà informació sobre els polinomis de Hilbert, les sèries de Hilbert i les resolucions lliures graduades minimals de les potències de I. Aquesta bigraduació serà usada també per a estudiar les multiplicitats mixtes de l'àlgebra de Rees i l'anell graduat d'un ideal equigenerat.

Teorema 36 [Theorem 6.1.1] *Sigui I un ideal homogeni de A, $h = \mathrm{ht}\,(I)$, $c = a_*^2(R_A(I))$. Aleshores existeixen polinomis $e_0(j), \ldots, e_{n-h-1}(j)$ a valors enters tals que per a $j \geq c+1$*

$$P_{A/I^j}(s) = \sum_{k=0}^{n-h-1} (-1)^{n-h-1-k} e_{n-h-1-k}(j) \binom{s+k}{k}.$$

A més, $\deg e_{n-h-1-k}(j) \leq n - k - 1$ *for all k.*

Aquest resultat mostra en particular que un nombre finit dels polinomis de Hilbert de les potències d'un ideal ens permet calcular-ne la resta, així com el polinomi de Hilbert de la seva àlgebra de Rees i l'anell graduat sense necessitat de tenir-ne una presentació explícita.

Corol.lari 37 [Corollary 6.1.8] *Sigui $I \subset A$ un ideal homogeni, $h = \mathrm{ht}\,(I)$, $c = a^2_*(R_A(I))$. Aleshores els polinomis de Hilbert de I^j per a $c+1 \leq j \leq c+n$ determinen*

(a) Els polinomis $e_{n-h-1-k}(j)$ per a $k = 0, \ldots, n-h-1$.

(b) Els polinomis de Hilbert de A/I^j for $j > c+n$.

(c) Els polinomis de Hilbert de $R_A(I)$ i $G_A(I)$.

(d) Si I és equigenerat i no $\mathfrak{m}$-primari, les multiplicitats mixtes de $R_A(I)$ i $G_A(I)$.

Un resultat similar pot ser provat per a les sèries de Hilbert de les potències de l'ideal I:

Proposició 38 [Theorem 6.2.1, Proposition 6.2.7] *Sigui $I \subset A$ un ideal homogeni. Notem $r = \mu(I)$, $l = l(I)$, $c = a^2_*(R_A(I))$. Aleshores:*

(i) Les sèries de Hilbert de I^j per a $j \leq c+r$ determinen les sèries de Hilbert de I^j per a $j > c+r$.

(ii) Si I és equigenerat, les sèries de Hilbert de I^j per a $c+1 \leq j \leq c+l$ ja determinen les sèries de Hilbert de I^j per a $j > c+l$.

A continuació estudiem el comportament de la dimensió projectiva de les potències d'un ideal o, equivalentment, de la seva profunditat. En aquest estudi, recuperem el resultat clàssic de M. P. Brodmann [Bro] que mostra que aquestes dimensions projectives són asimptòticament constants, així com un resultat de D. Eisenbud i C. Huneke [EH] que precisa aquest valor asimptòtic sota certes restriccions. A més, per a ideals amb anell graduat Gorenstein determinarem exactament les potències de l'ideal amb dimensió projectiva asimptòtica.

Proposició 39 [Proposition 6.3.2] *Sigui I un ideal homogeni de A amb dispersió anlítica l. Si G és Gorenstein,* $\mathrm{proj.dim}_A(I^j) \leq l-1$ *per a tot j, i* $\mathrm{proj.dim}_A I^j = l-1$ *si i només si $j > a^2(G) - a(F)$.*

Finalment, provem que les resolucions lliures graduades minimals de les potències d'un ideal també tenen un comportament uniforme. En el cas equigenerat, es prova que els shifts que apareixen en les resolucions lliures graduades minimals de les potències són funcions lineals asimptòticament i els seus nombres de Betti són polinomis asimptòticament.

Proposició 40 [Proposition 6.3.6] *Sigui I un ideal homogeni generat per formes de grau d, $l = l(I)$, $s = n - \operatorname{depth}_{(\mathfrak{m}R)}(R)$. Aleshores existeix un conjunt finit d'enters $\{\alpha_{pi} \mid 0 \leq p \leq s, 1 \leq i \leq k_p\}$ i un conjunt de polinomis $\{Q_{\alpha_{pi}}(j) : 0 \leq p \leq s, 1 \leq i \leq k_p\}$ de grau $\leq l-1$ tals que la resolució lliure graduada minimal de I^j per a $j \gg 0$ és*

$$0 \to D_s^j \to \ldots \to D_0^j \to I^j \to 0 \ ,$$

amb $D_p^j = \bigoplus_i A(-\alpha_{pi} - dj)^{\beta_{pi}^j}$ i $\beta_{pi}^j = Q_{\alpha_{pi}}(j)$.

Notem que d'aquest resultat deduïm que un nombre finit de resolucions lliures graduades minimals de les potències determinen la resta. Aquest conjunt finit de resolucions ha estat determinat per a famílies d'ideals amb un comportament molt especial. Per exemple,

Proposició 41 [Proposition 6.3.10] *Sigui I un ideal equigenerat, i $b = a_*^2(R_A(I)) + l(I)$. Si les resolucions lliures graduades minimals de $I, I^2, \ldots, I^b$ són lineals, aleshores també ho són les de I^j per a qualsevol j. A més, les resolucions lliures graduades minimals de $I, I^2, \ldots, I^b$ determinen les de les altres potències.*