

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**CONTRIBUCION AL DESARROLLO  
DE SISTEMAS DE CONTROL DE  
ESTRUCTURAS DE EDIFICACION  
MEDIANTE CABLES ACTIVOS**

Autor: Francisco López Almansa  
Director: José Julián Rodellar Benedé

Barcelona, Enero de 1988

**SIMULACION EN TIEMPO DISCRETO  
DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL**

En el presente capítulo se desarrolla un procedimiento numérico de simulación del comportamiento dinámico de una estructura sometida a una excitación arbitraria en presencia de unas fuerzas de control activo. El algoritmo que resulta de implementar dicho procedimiento se denomina mediante las siglas **SSP**, que corresponden en idioma inglés a Structural State Procedure.

En el contexto del esquema de control activo digital de estructuras mostrado en la figura 1.11 se pretende desarrollar el algoritmo SSP como un procedimiento para calcular la respuesta a partir de los valores de la excitación y de las fuerzas de control. En el capítulo 6 se muestra un esquema de simulación en ordenador digital del lazo cerrado de control descrito en la figura 1.11 en el cual se utiliza el algoritmo SSP para representar en tiempo discreto el movimiento de la estructura.

El procedimiento numérico que se propone en el presente capítulo se formula en tiempo discreto (para simular con fidelidad un proceso digital) y en espacio de estado (puesto que la mayor parte de las estrategias de control han sido planteadas en dicho espacio). En el contexto de la dinámica de estructuras no se han desarrollado procedimientos numéricos que satisfagan simultáneamente las exigencias anteriores y por dicha razón se propone un algoritmo original.

El algoritmo SSP no es únicamente aplicable al campo del control de estructuras puesto que es capaz de simular en tiempo discreto la evolución dinámica de cualquier

estructura sometida a una excitación arbitraria.

En el apartado 3.1 se enmarca el algoritmo propuesto en el contexto de los métodos numéricos de cálculo de la respuesta dinámica de estructuras y se justifica la necesidad de desarrollar un procedimiento original por sus ventajas, las cuales se manifiestan en los dos campos de aplicación del algoritmo SSP: el análisis dinámico tradicional y la simulación de procesos de control activo de estructuras.

En el apartado 3.2 se muestra la descripción general del algoritmo y en el apartado 3.4 se detalla su implementación en un ordenador digital.

En el apartado 3.3 se analiza la relación del algoritmo propuesto con los ya existentes y se muestra que puede ser considerado como una generalización de los procedimientos basados en las integrales de Duhamel.

En el apartado 3.5 se describe la aplicación del algoritmo SSP en coordenadas modales.

En los apartados 3.6 y 3.7 se estudian exhaustivamente las características de estabilidad y precisión del algoritmo.

En el apartado 3.8 se muestra, a título de ejemplo, la aplicación del algoritmo al cálculo de la respuesta sísmica de edificios en ausencia de fuerzas de control.

En el apartado 3.9 se resumen las conclusiones más relevantes que pueden extraerse del presente capítulo.

## INDICE

3.1 Métodos numéricos de resolución de las ecuaciones del movimiento. ....	3.5
3.2 Formulación del procedimiento SSP.....	3.7
3.3 Relación con otros procedimientos.....	3.12
3.4 Implementación del algoritmo de cálculo.....	3.14
3.4.1 Esquema general.	
3.4.2 Cálculo de $\mathbf{A}$ por desarrollo en serie de Taylor de $\Delta t \mathbf{F}$ .	
3.4.3 Cálculo de $\mathbf{A}$ mediante la forma reducida de Jordan de $\mathbf{F}$ .	
3.4.4 Número de operaciones.	
3.5 Algoritmo SSP en coordenadas modales. ....	3.33
3.5.1 Formulación del algoritmo SSP en coordenadas modales.	
3.5.2 Número de operaciones.	
3.6 Estabilidad del algoritmo SSP.....	3.47
3.6.1 Estabilidad externa.	
3.6.2 Estabilidad del equilibrio.	
3.6.3 Verificación de las condiciones de estabilidad.	



3.6.4 Estabilidad incondicional.	
3.7 Precisión del algoritmo SSP. ....	3.62
3.7.1 Error debido al cálculo aproximado de la matriz <b>A</b> .	
3.7.2 Error debido a la interpolación de la excitación.	
3.7.3 Verificación de las condiciones de precisión.	
3.7.4 Comparación con otros algoritmos.	
3.8 Aplicación a edificios. Sin control. ....	3.75
3.8.1 Particularización del procedimiento SSP.	
3.8.2 Número de operaciones.	
3.8.3 Ejemplos.	
3.9 Conclusiones. ....	3.94
Referencias .....	3.98

### 3.1 METODOS NUMERICOS DE RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.

El movimiento de una estructura sometida a unas cargas dinámicas en presencia de fuerzas de control activo y representada por un modelo espacialmente discreto con  $n$  grados de libertad, es regido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_c(t) + \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

Si los materiales que constituyen la estructura tienen un dominio elástico y lineal de deformación y no se superan los límites de dicho dominio,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices constantes de masa, amortiguamiento y rigidez. El vector  $\mathbf{d}$  contiene los desplazamientos de los  $n$  grados de libertad y los vectores  $\mathbf{f}_c$  y  $\mathbf{f}$  contienen, respectivamente, las fuerzas de control y de excitación expresadas por sus componentes sobre los grados de libertad.

Las fuerzas contenidas en los vectores  $\mathbf{f}_c(t)$  y  $\mathbf{f}(t)$  suelen conocerse frecuentemente por valores en instantes discretos no ajustables a ninguna expresión analítica de forma que (3.1) debe resolverse por métodos numéricos. Los procedimientos numéricos existentes están fuertemente condicionados por el tipo de matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  considerada, puesto que un amortiguamiento de tipo clásico permite un desacoplamiento en coordenadas modales de las ecuaciones del movimiento (3.1), mientras que con una matriz  $\mathbf{C}$  arbitraria, las ecuaciones en coordenadas modales quedan acopladas a través de la propia matriz de amortiguamiento.

Para sistemas con matriz de amortiguamiento de tipo no clásico (no desacoplables) se han propuesto diversos procedimientos de integración directa, algunos basados en esquemas explícitos (método de las diferencias centrales, etc.) y otros en esquemas implícitos (método de Hoùbolt, método  $\theta$  de Wilson, método de Newmark, etc.) [1]. Todos ellos parten de la hipótesis de variación lineal de la aceleración  $\ddot{\mathbf{d}}$  de respuesta del sistema durante el intervalo básico de discretización  $\Delta t$  para resolver (3.1) en los instantes de muestreo. Los procedimientos citados pueden conducir a una respuesta inestable e imprecisa si el incremento de tiempo  $\Delta t$  considerado no es suficientemente

pequeño con respecto a los períodos de los modos propios de vibración del sistema. Puesto que la respuesta en cada instante se calcula recurrentemente a partir de la obtenida en el instante anterior los errores son acumulativos y pueden ser importantes en análisis de duración elevada. Todos los algoritmos de integración directa citados pueden aplicarse en coordenadas generales o en coordenadas modales, incluyendo en el cálculo en este caso el número de modos con influencia significativa en la respuesta global del sistema. En esta última situación, a la imprecisión generada por el propio algoritmo se suma la debida a los modos superiores no tomados en consideración.

Otro procedimiento aplicable a sistemas con amortiguamiento no clásico es el desacoplamiento modal en el campo complejo [2-4] cuyo principal inconveniente radica en el notable tiempo de cálculo que se precisa, por la propia configuración del algoritmo y por la necesidad de operar con números complejos.

También suele utilizarse en sistemas no desacoplables un sistema altamente impreciso consistente en efectuar un desacoplamiento ficticio mediante relaciones de amortiguamiento ponderadas en cada modo propio [5].

Un último procedimiento capaz de determinar la respuesta dinámica de sistemas no desacoplables es el análisis en el campo de la frecuencia [6]. En dicho caso es necesario efectuar una doble transformación discreta de Fourier (directa e inversa), la cual es fuente de inexactitudes y precisa un tiempo de cálculo importante.

En sistemas desacoplables (o en sistemas con un solo grado de libertad) pueden resolverse las ecuaciones escalares resultantes de desacoplar el sistema general mediante algunos de los algoritmos citados para sistemas no desacoplables: métodos de integración directa y obtención de la respuesta en el dominio de la frecuencia. Las ecuaciones escalares en coordenadas modales pueden además ser resueltas por aplicación de las integrales de Duhamel [6] las cuales son capaces de proporcionar resultados muy precisos.

El algoritmo que se propone es un método de integración directa de la ecuación diferencial resultante de formular (3.1) en espacio de estado [7]. Por no prejuzgar el comportamiento de la aceleración de respuesta  $\ddot{d}$  en el interior del intervalo de discretización y no discretizar directamente la ecuación (3.1) sino su solución analítica

en espacio de estado, proporciona resultados de una gran precisión. Puede aplicarse en coordenadas generales o en coordenadas modales, tomando en consideración en dicho caso únicamente los modos propios que influyen de manera apreciable en la respuesta. Si el algoritmo propuesto se aplica a sistemas con un solo grado de libertad el proceso de cálculo coincide con el que resulta de utilizar las integrales de Duhamel, por lo que dicho algoritmo puede ser considerado como una generalización para sistemas con varios grados de libertad de los procedimientos basados en las integrales de Duhamel.

### 3.2 FORMULACION DEL PROCEDIMIENTO SSP.

El algoritmo que se propone parte de la formulación en espacio de estado de las ecuaciones del movimiento (3.1). Considerando a los desplazamientos  $\mathbf{d}$  y a las velocidades  $\dot{\mathbf{d}}$  de los grados de libertad como variables de estado, se introduce un **vector de estado**  $\mathbf{x}$  definido por:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

La expresión (3.1) se transforma en espacio de estado en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden [7]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la **matriz del sistema** de tamaño  $2n \times 2n$  cuyos elementos pueden ordenarse en cuatro bloques  $n \times n$  de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (3.3a)$$

$\mathbf{v}_c$  es el **vector de control** y  $\mathbf{v}$  es el **vector de excitación**, definidos por:

$$\mathbf{v}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1} \mathbf{f}_c \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1} \mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (3.3b)$$

A partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , la solución de la ecuación diferencial (3.3) puede expresarse analíticamente [8,9] en la forma siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{F}(t - t_0)] \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{F}(t - \tau)] [\mathbf{v}_c(\tau) + \mathbf{v}(\tau)] d\tau \quad (3.4)$$

Discretizando temporalmente con un período de discretización constante  $\Delta t$ , puede expresarse (3.4) entre dos instantes consecutivos haciendo  $t_0 = k \Delta t$  y  $t = (k + 1) \Delta t$ . Con ello resulta la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k \Delta t + \Delta t) &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \\ &+ \int_{k \Delta t}^{(k+1) \Delta t} \exp\{[(k + 1) \Delta t - \tau] \mathbf{F}\} [\mathbf{v}_c(\tau) + \mathbf{v}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

El desarrollo de la integral contenida en (3.5) permite conocer el valor de la respuesta en el instante  $k + 1$ ,  $\mathbf{x}(k \Delta t + \Delta t)$  a partir de la respuesta  $\mathbf{x}(k \Delta t)$  en el instante anterior y hallar así recurrentemente la respuesta en todos los instantes de muestreo. Sin embargo no es posible resolver dicha integral sin conocer la evolución de los vectores de excitación  $\mathbf{v}$  y de control  $\mathbf{v}_c$  entre los instantes  $k$  y  $k + 1$ .

La variación del vector de control  $\mathbf{v}_c$  en el interior del intervalo  $[k \Delta t, k \Delta t + \Delta t]$  depende del dispositivo de retención utilizado en la conversión digital-analógica de la señal de control. Los convertidores D/A utilizados habitualmente incorporan un dispositivo de orden 0 que genera una secuencia de vectores de control escalonada de acuerdo con:

$$\mathbf{v}_c(\tau) = \mathbf{v}_c(k \Delta t) \quad k \Delta t \leq \tau < (k + 1) \Delta t \quad (3.6a)$$

Para el vector de excitación  $\mathbf{v}$  ha de elegirse también un criterio numérico de interpolación. Un criterio sencillo puede ser considerar  $\mathbf{v}(t)$  constante en el interior del intervalo de discretización, es decir:

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}(k \Delta t) \quad k \Delta t \leq \tau < (k + 1) \Delta t \quad (3.6b)$$

Sustituyendo las expresiones (3.6) en la ecuación (3.5) y utilizando el cambio de variable  $\mu = (k + 1) \Delta t - \tau$ , puede resolverse la integral y se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k \Delta t + \Delta t) &= \\ &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) [\mathbf{v}_c(k \Delta t) + \mathbf{v}(k \Delta t)] d\mu = \\ &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \mathbf{F}^{-1} [\exp(\Delta t \mathbf{F}) - \mathbf{I}] [\mathbf{v}_c(k \Delta t) + \mathbf{v}(k \Delta t)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

La expresión anterior tiene siempre sentido porque la matriz del sistema  $\mathbf{F}$  es inversible ya que su matriz inversa  $\mathbf{F}^{-1}$  es:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La aplicación recurrente de (3.7) a partir de condiciones iniciales conocidas permite calcular la respuesta  $\mathbf{x}$ , en desplazamientos y velocidades, en cada instante de muestreo. Las aceleraciones se pueden determinar por derivación numérica utilizando la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{d}}(k \Delta t + \Delta t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(k \Delta t + \Delta t) - \dot{\mathbf{d}}(k \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Si se considera interpolación lineal en vez de interpolación constante para la excitación exterior, pueden obtenerse en general resultados más precisos. En dicho caso debe sustituirse la expresión (3.6b) por la siguiente fórmula de interpolación lineal:

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}(k \Delta t) + (\tau - k \Delta t) \frac{\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) - \mathbf{v}(k \Delta t)}{\Delta t} \quad k \Delta t \leq \tau < (k + 1) \Delta t \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.6a) y (3.10) en (3.5) y utilizando nuevamente el cambio de variable  $\mu = (k + 1) \Delta t - \tau$ , se concluye que el vector de estado en el instante  $k + 1$  obedece ahora a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k \Delta t + \Delta t) &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) (\Delta t - \mu) \left[ \frac{\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) - \mathbf{v}(k \Delta t)}{\Delta t} + \mathbf{v}(k \Delta t) \right] d\mu + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) \mathbf{v}_c(k \Delta t) d\mu = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k \Delta t) + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) + \mathbf{P}_2 [\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) - \mathbf{v}(k \Delta t)] + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_c(k \Delta t) \end{aligned}$$

Omitiendo en la escritura el incremento de tiempo  $\Delta t$  la expresión anterior se escribe en la forma:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(k + 1) + \mathbf{P}_2 [\mathbf{v}(k + 1) - \mathbf{v}(k)] + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_c(k) \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  son matrices constantes de dimensión  $2n \times 2n$  definidas por:

$$\mathbf{A} = \exp(\Delta t \mathbf{F}) \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}^{-1} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_1 - \mathbf{A} \right) \quad (3.11c)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  se denomina **matriz del sistema en tiempo discreto**.

En la presente Tesis se utilizará preferentemente la expresión (3.11) en lugar de (3.7) para obtener los desplazamientos y las velocidades en cada instante de muestreo. Las aceleraciones se determinan en ambos casos por derivación numérica a partir de (3.9).

Es interesante señalar que las dos únicas fuentes de error intrínsecas al procedimiento descrito son el criterio de interpolación elegido para la excitación (inevitablemente arbitrario) en (3.6b) o (3.10) y el cálculo necesariamente aproximado de la matriz  $\mathbf{A}$  en (3.11a). En el resto del proceso de cálculo intervienen únicamente operaciones algebraicas que pueden ser consideradas teóricamente exactas.



### 3.3 RELACION CON OTROS PROCEDIMIENTOS.

El algoritmo propuesto tiene, en ciertas situaciones particulares, puntos de contacto con otros métodos numéricos ya conocidos. En este apartado se estudia su relación con las integrales de Duhamel [6] propuestas para sistemas con un grado de libertad.

Particularizando la solución general descrita en (3.4), en el caso en que no hay control, para el instante  $t = 0$  y para un único grado de libertad  $n = 1$  se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{F}) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[(t - \tau)\mathbf{F}] \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

Llamando  $d$  al desplazamiento,  $f(t)$  a la fuerza de excitación y  $m$ ,  $c$  y  $k$  a la masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, las expresiones (3.2), (3.3a) y (3.3b) se transforman respectivamente en:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} d(0) \\ \dot{d}(0) \end{pmatrix} \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{pmatrix} \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t)/m \end{pmatrix} \quad (3.12c)$$

Las matrices exponenciales contenidas en (3.12) pueden ser determinadas analíticamente utilizando los valores propios complejos de  $\mathbf{F}$ . Se introducen las siguientes notaciones propias de sistemas dinámicos con un solo grado de libertad:

$$\omega = \sqrt{k/m} \text{ (frecuencia de vibración del sistema no amortiguado)} \quad (3.13a)$$

$$\nu = 1/m\omega \text{ (fracción del amortiguamiento crítico)} \quad (3.13b)$$

$$\omega_c = \omega \sqrt{1 - \nu^2} \text{ (frecuencia de vibración del sistema amortiguado)} \quad (3.13c)$$

La función exponencial de la matriz  $\lambda \mathbf{F}$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \exp(\lambda \mathbf{F}) &= \\ &= \frac{\exp(-\lambda\omega\nu)}{m\omega_c} \begin{pmatrix} \omega_c \cos(\lambda\omega_c) + \omega\nu \sin(\lambda\omega_c) & \sin(\lambda\omega_c) \\ -\omega^2 \cos(\lambda\omega_c) & \omega_c \cos(\lambda\omega_c) - \omega\nu \sin(\lambda\omega_c) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

La igualdad (3.14) permite resolver analíticamente la ecuación (3.12), obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix} &= \frac{\exp(-\omega\nu t)}{m\omega_c} \begin{pmatrix} \omega_c \cos(\omega_c t) + \omega\nu \sin(\omega_c t) & \sin(\omega_c t) \\ -\omega^2 \cos(\omega_c t) & \omega_c \cos(\omega_c t) - \omega\nu \sin(\omega_c t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0) \\ \dot{d}(0) \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \frac{e^{-\omega\nu(t-\tau)}}{m\omega_c} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \omega_c \cos \omega_c(t-\tau) + \omega\nu \sin \omega_c(t-\tau) & \sin \omega_c(t-\tau) \\ -\omega^2 \cos \omega_c(t-\tau) & \omega_c \cos \omega_c(t-\tau) - \omega\nu \sin \omega_c(t-\tau) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau \end{aligned} \quad (3.15)$$

Separando la primera de las dos ecuaciones escalares contenidas en (3.15) se obtiene la clásica integral de Duhamel:

$$d(t) = \frac{\exp(-\omega\nu t)}{m\omega_c} \{[\omega_c \cos(\omega_c t) + \omega\nu \sin(\omega_c t)]d(0) + \sin(\omega_c t)\dot{d}(0)\} +$$

$$+\frac{1}{m\omega_c} \int_0^t f(\tau) \exp[-\omega\nu(t-\tau)] \sin[\omega_c(t-\tau)] d\tau \quad (3.16)$$

El valor de la velocidad  $\dot{d}(t)$  puede ser obtenido a partir de (3.15) o derivando bajo el signo integral en (3.16).

La expresión (3.16) muestra que para sistemas con un grado de libertad el algoritmo SSP responde a la misma formulación que los procedimientos basados en las integrales de Duhamel. Consecuentemente, el algoritmo SSP puede ser considerado como una generalización de éstos para sistemas con varios grados de libertad.

### 3.4 IMPLEMENTACION DEL ALGORITMO DE CALCULO.

En este apartado se describe la implementación en ordenador digital del procedimiento SSP.

En el subapartado 3.4.1 se muestra un esquema global de las operaciones que se ejecutan en un ordenador digital al implementar el algoritmo SSP. En los subapartados 3.4.2 y 3.4.3 se describe el cálculo de la matriz del sistema en tiempo discreto  $\mathbf{A}$  por dos procedimientos distintos. En el subapartado 3.4.4 se determina el número total de operaciones que se invierten en el proceso de cálculo.

### 3.4.1 Esquema general.

Una secuencia de operaciones que puede seguirse en la implementación es la siguiente:

- a) Obtención de la matriz del sistema  $F$  a partir de las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  según la expresión (3.3a).
- b) Cálculo de la matriz  $F^{-1}$  a partir de (3.8).
- c) Determinación de la matriz del sistema en tiempo discreto  $A$  de acuerdo con la expresión (3.11a).
- d) Cálculo de las matrices  $P_1$  y  $P_2$  definidas, respectivamente, en (3.11b) y (3.11c).
- e) Consideración de las condiciones iniciales  $x_0$ .
- f) Obtención del vector de excitación  $v$  en cada instante.
- g) Obtención del vector de control  $v_c$  en cada instante.
- h) Aplicación recurrente de (3.11) y (3.9) para conocer los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en cada instante de muestreo.

En la secuencia anterior intervienen solamente operaciones algebraicas con la única excepción del cálculo de la matriz  $A$  en el punto c) puesto que dicha matriz se halla a partir de la función exponencial de otra matriz. Consecuentemente, dicha operación es la más delicada del proceso de cálculo y en ella se concentran todas las inexactitudes inherentes a las operaciones matemáticas comprendidas en el mismo.

Para programar en un ordenador el cálculo de la función exponencial de una matriz existen dos tipos de procedimientos generales: aquellos que utilizan aproximaciones tomando un número finito de términos en series enteras (especialmente Taylor y Padé) y los que determinan la función exponencial de una matriz determinando previamente la de su forma reducida de Jordan y efectuando posteriormente un cambio de base.

### 3.4.2 Cálculo de $\mathbf{A}$ por desarrollo en serie de Taylor de $\Delta t \mathbf{F}$ .

La función exponencial de una matriz cuadrada  $\mathbf{X}$  se define mediante la siguiente serie potencial:

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{X}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \frac{\mathbf{X}^i}{i!} = \\ &= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{X}}{1!} + \frac{\mathbf{X}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{X}^p}{p!} + \cdots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si se toma únicamente un número finito  $p$  de términos de la serie anterior se tiene el siguiente resultado aproximado:

$$\exp(\mathbf{X}) \simeq \mathbf{I} + \frac{\mathbf{X}}{1!} + \frac{\mathbf{X}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{X}^p}{p!} = T_p(\mathbf{X}) \quad (3.18)$$

Para que la expresión (3.17) tenga sentido es preciso considerar una norma para las matrices que en ella intervienen. Al aproximar  $\exp(\mathbf{X})$  mediante  $T_p(\mathbf{X})$  es importante disponer de un criterio de medida del error cometido y para ello también es necesario elegir una norma. En el presente subapartado se considera la norma euclídea ordinaria. Siendo  $\mathbf{X}$  una matriz cuadrada e  $\mathbf{y}$  un vector columna de la misma dimensión, la norma euclídea  $\|\mathbf{X}\|$  se define mediante:

$$\|\mathbf{X}\| = \sup_{\|\mathbf{y}\|=1} \|\mathbf{X} \cdot \mathbf{y}\| \quad (3.19)$$

La norma  $\|\mathbf{X}\|$  puede calcularse de forma más cómoda teniendo en cuenta que es también igual a la raíz cuadrada del mayor valor propio de la matriz simétrica y definida no negativa  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$ .

El error cometido al aproximar  $\exp(\mathbf{X})$  por  $T_p(\mathbf{X})$  puede acotarse respecto de la norma euclídea anterior mediante la siguiente expresión [10]:

$$\|T_p(\mathbf{X}) - \exp(\mathbf{X})\| \leq \frac{\|\mathbf{X}\|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1 - \|\mathbf{X}\|/(p+2)} \leq \varepsilon \quad (3.20)$$

En las desigualdades (3.20)  $\varepsilon$  representa una cota máxima del error cometido en el cálculo aproximado de  $\exp(\mathbf{X})$ .

Si la norma de la matriz  $\mathbf{X}$  toma valores elevados, la desigualdad (3.20) se convierte en inoperante porque es necesario considerar un número  $p$  demasiado elevado de términos para poder garantizar una cota de error  $\varepsilon$  razonablemente pequeña. En este caso puede ser útil aplicar la siguiente propiedad de la función exponencial:

$$\exp(\mathbf{X}) = \exp\left(\frac{\mathbf{X}}{m}\right)^m \quad (3.21)$$

La expresión (3.21) muestra como para calcular  $\exp(\mathbf{X})$  es suficiente hallar  $\exp(\mathbf{X}/m)$  y posteriormente multiplicar el resultado por sí mismo  $m$  veces. Ello tiene la ventaja de que al sustituir  $\mathbf{X}$  por  $\mathbf{X}/m$  en (3.20) la norma de la matriz  $\mathbf{X}/m$  es  $m$  veces menor que la de  $\mathbf{X}$  y puede garantizarse un error razonablemente pequeño con un número  $p$  de términos no excesivo.

Si se elige  $m$  como una potencia entera de dos ( $m = 2^q$ ) la operación de multiplicar  $m$  veces una matriz por sí misma (contenida en (3.21)) se sustituye por la operación de elevar  $q$  veces una matriz al cuadrado tal como se muestra a continuación:

$$m = 2^q \quad \exp(\mathbf{X}) = \left[ \cdots \exp\left(\frac{\mathbf{X}}{2^q}\right)^{2 \cdots (q \cdots)} \right]^2 \quad (3.21a)$$

La operación anterior es más rápida que multiplicar  $m$  veces una matriz por sí

misma puesto que  $q$  es mucho menor que  $m$ .

La igualdad (3.21a) puede ser utilizada para evaluar numéricamente la matriz  $\mathbf{A}$  (definida en 3.11a) sustituyendo en dicha expresión  $\mathbf{X} = \Delta t \mathbf{F}$ . Eligiendo el valor del entero  $q$  tal que la norma de la matriz  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  sea menor que la unidad, al sustituir  $\mathbf{X} = (\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  en la acotación (3.20) se obtiene una cota de error  $\varepsilon$  pequeña sin necesidad de considerar un número  $p$  de términos excesivamente grande. Sin embargo, al multiplicar  $q$  veces la matriz  $\exp[(\Delta t/2^q)\mathbf{F}]$  por sí misma en (3.21a) el error acotado por (3.20) (siendo  $\mathbf{X} = (\Delta t/2^q)\mathbf{F}$ ) resulta, en general, amplificado y para conocer una cota de error de la norma de  $\exp(\mathbf{X})$  se introduce una matriz de error  $\mathbf{E}$  que verifica las propiedades [10]:

$$\mathbf{X} \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{X} \quad T_p \left( \frac{\mathbf{X}}{2^j} \right)^{2^j} = \exp(\mathbf{X} + \mathbf{E}) = \exp(\mathbf{X}) \exp(\mathbf{E}) \quad (3.22a)$$

$$\|\mathbf{X}\| \leq 2^{j-1} \Rightarrow \|\mathbf{E}\| \leq \frac{1}{(p+1)2^{p-3}} \quad (3.22b)$$

$$\|\exp(\mathbf{X} + \mathbf{E}) - \exp(\mathbf{X})\| \leq \|\exp(\mathbf{X})\| \|\mathbf{E}\| \exp(\|\mathbf{E}\|) \quad (3.22c)$$

Las expresiones (3.22) permiten acotar el error cometido al evaluar de forma aproximada  $\exp(\Delta t \mathbf{F})$  a través de  $[T_p(\Delta t/2^q)\mathbf{F}]^{2^q}$ .

En el caso en que  $\mathbf{X} = \Delta t \mathbf{F}$  la matriz exponencial de  $\mathbf{X}$  es  $\mathbf{A}$  y los parámetros  $p$ ,  $\varepsilon$  y  $q$  introducidos, respectivamente, en las expresiones (3.18), (3.20) y (3.21a) influyen en la precisión del cálculo de  $\mathbf{A}$  de forma distinta. El valor de  $\varepsilon$  debe fijarse previamente mientras que los valores de  $p$  y  $q$  se determinan posteriormente. El valor del exponente  $q$  se obtiene a partir de la condición  $\|(\Delta t/2^q)\mathbf{F}\| \leq 1$  de forma que depende únicamente de la norma de la matriz de estado  $\mathbf{F}$  y, consecuentemente, el número  $p$  de términos necesario para garantizar una cota de error  $\varepsilon$  se halla a partir de (3.20) independientemente de la norma de  $\mathbf{F}$ . Un valor menor de  $\varepsilon$  se traduce en un cálculo más preciso de  $\mathbf{A}$ .

La cota de error  $\varepsilon$  dada por (3.20) sustituyendo  $\mathbf{X}$  por  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  no es aplicable a  $\Delta t\mathbf{F}$  pero las expresiones (3.22) señalan que un valor más alto de  $p$  proporciona un error más pequeño.

Las operaciones necesarias para calcular el valor de la matriz  $\mathbf{A}$  pueden ser ordenadas descomponiendo el punto c) del subapartado 3.4.1 en la siguiente secuencia de operaciones:

- c.1) Elección del mayor error  $\varepsilon$  permitido en la norma de la matriz  $\mathbf{A}$ .
- c.2) Cálculo de la norma euclídea de la matriz  $\Delta t\mathbf{F}$ .

Se trata de hallar la raíz cuadrada del mayor valor propio de la matriz  $(\Delta t\mathbf{F})^t \Delta t\mathbf{F}$ , la cual puede expresarse según:

$$\begin{aligned}
 (\Delta t\mathbf{F})^t (\Delta t\mathbf{F}) &= \\
 &= (\Delta t)^2 \begin{pmatrix} (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^t (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) & (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^t (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) \\ (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})^t (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) & \mathbf{I} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})^t (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) \end{pmatrix} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

- c.3) Determinación del menor exponente  $q$  tal que:

$$\|\Delta t\mathbf{F}\| \leq 2^q \quad (3.24)$$

- c.4) Cálculo del número  $p$  de términos que deben considerarse en el desarrollo en serie de Taylor de  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  para poder asegurar que el error en la norma de la matriz  $\mathbf{A}$  no supera un valor prefijado. Sustituyendo  $\mathbf{X} = (\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  en (3.20) resulta que  $p$  puede tomarse como el menor entero que satisface la desigualdad siguiente:



$$\frac{\left\| \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right\|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1 - \left\| \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right\| \frac{1}{p+2}} \leq \varepsilon \quad (3.25)$$

c.5) Se halla  $\exp[(\Delta t/2^q) \mathbf{F}]$  de forma aproximada utilizando (3.18):

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right) &\simeq \\ &\simeq \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p!} \left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right)^p = T_p\left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La igualdad (3.26) se expresa en forma de producto para minimizar los errores de redondeo y para poder ser programada en ordenador con mayor facilidad. Se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} T_p\left(\frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F}\right) &= \\ &= \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{\mathbf{F}}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{\mathbf{F}}{3} \left( \mathbf{I} + \dots \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{\mathbf{F}}{p-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{\mathbf{F}}{p} \right) \right) \dots \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

El cálculo de esta expresión puede implementarse en cualquier lenguaje de programación mediante un bucle en el cual la operación fundamental consiste en premultiplicar en cada iteración una matriz variable  $\mathbf{Y}$  por  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$ . Llamando  $\mathbf{Y}_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) a los cuatro bloques cuadrados que configuran la matriz  $\mathbf{Y}$ , a partir de la expresión de  $\mathbf{F}$  en (3.3a) se deduce inmediatamente la siguiente formulación del producto  $\mathbf{FY}$ :

$$\mathbf{FY} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_{21} & Y_{22} \\ -M^{-1}KY_{11} - M^{-1}CY_{21} & -M^{-1}KY_{12} - M^{-1}CY_{22} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Si se tiene en cuenta la expresión particular del producto  $\mathbf{F}\mathbf{Y}$  mostrada en (3.28) al programar el cálculo de (3.27), se obtiene una notable reducción del número de operaciones con respecto a las que se precisan si se programa el producto de las matrices  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Y}$  sin tomar en consideración la constitución de  $\mathbf{F}$  en bloques indicada en (3.3a).

c.6) La matriz  $\mathbf{A}$  se obtiene finalmente por aplicación de la igualdad (3.21):

$$\mathbf{A} \simeq \left[ \dots T_p \left( \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \right)^{2 \dots (q \dots)} \right]^2 \quad (3.29)$$

### 3.4.3 Cálculo de $\mathbf{A}$ mediante la forma reducida de Jordan de $\mathbf{F}$ .

Puesto que  $\mathbf{F}$  es una matriz real cuadrada, siempre es posible realizar la siguiente descomposición:

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}\mathbf{F}_J\mathbf{S}^{-1} \quad (3.30a)$$

donde  $\mathbf{F}_J$  es la forma reducida de Jordan de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  la matriz de cambio de base. Multiplicando por  $\Delta t$  se obtiene el siguiente resultado:

$$\Delta t \mathbf{F} = \mathbf{S}(\Delta t \mathbf{F}_J)\mathbf{S}^{-1} \quad (3.30b)$$

Esta descomposición permite simplificar el cálculo de la función exponencial de  $\Delta t \mathbf{F}$  si se utiliza la siguiente propiedad:

$$\exp(\Delta t \mathbf{F}) = \mathbf{S} \exp(\Delta t \mathbf{F}_J) \mathbf{S}^{-1} \quad (3.31)$$

En los casos en que la matriz  $\mathbf{F}$  es diagonalizable la implementación de la igualdad (3.31) es particularmente sencilla pues la matriz  $\exp(\Delta t \mathbf{F})$  es también diagonal y contiene en su diagonal principal las funciones exponenciales de los valores propios de  $\mathbf{F}$  multiplicados por  $\Delta t$ . Se demuestra a continuación que cuando las frecuencias de los modos propios de vibración del sistema no amortiguado son todas diferentes y los valores de los coeficientes de amortiguamiento no son excesivamente grandes es una hipótesis suficientemente plausible suponer que la matriz  $\mathbf{F}_J$  es diagonal. Para justificar dicha afirmación se calculan en primer lugar los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$  en el caso en que el amortiguamiento es nulo ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) a través de su polinomio característico  $Q_F$ :

$$Q_F(\lambda) = \det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\lambda \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Los cuatro bloques cuadrados del determinante de la matriz anterior conmutan entre ellos y consecuentemente puede escribirse [11]:

$$\begin{aligned} Q_F(\lambda) &= \det[(-\lambda \mathbf{I})^2 - (-\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})] = \det(\lambda^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) = \\ &= \det[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}(\lambda^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})] = \det(\mathbf{M}^{-1}) \det(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Las raíces del polinomio mostrado en (3.33) son:

$$\pm j \omega_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.33a)$$

donde  $j = \sqrt{-1}$  y  $\omega_1, \dots, \omega_n$  son raíces del polinomio  $\det(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M})$ , es decir, las frecuencias de los modos propios de vibración del sistema sin amortiguamiento. Si todas las frecuencias son diferentes, los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$  sin amortiguamiento son también distintos y consecuentemente dicha matriz es diagonalizable. En sistemas con un solo grado de libertad o en sistemas desacoplables en coordenadas modales los  $2n$  valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$  con un amortiguamiento no nulo pueden expresarse analíticamente en las siguientes igualdades:

$$\lambda_{i_1} = -\omega_i(\nu_i + j\sqrt{1 - \nu_i^2}) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.33b)$$

$$\lambda_{i_2} = -\omega_i(\nu_i - j\sqrt{1 - \nu_i^2}) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.33c)$$

En las expresiones (3.33b) y (3.33c)  $\lambda_{i_1}$  y  $\lambda_{i_2}$  son los valores propios de una matriz de estado  $\mathbf{F}$  de dimensiones  $2 \times 2$ ,  $\omega_i$  son las frecuencias propias de vibración del sistema sin amortiguamiento y  $\nu_i$  son los coeficientes de amortiguamiento.

La comparación entre las igualdades (3.33a) cuando  $n = 1$  y (3.33b) y (3.33c) para  $i = 1$  muestra que si el valor del coeficiente de amortiguamiento  $\nu_i$  no es excesivamente grande, las partes imaginarias de los dos valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$  con amortiguamiento nulo son prácticamente iguales a las de los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$  sin amortiguamiento. Consecuentemente, si  $\mathbf{F}$  es la matriz de un sistema con varios grados de libertad y con matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  no nula, extrapolando las conclusiones formuladas en el párrafo anterior puede afirmarse que si los coeficientes de amortiguamiento  $\nu_i$  no tienen valores excesivamente elevados los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$  tienen partes imaginarias aproximadamente iguales a  $\pm j\omega_i$  y, si las frecuencias propias  $\omega_1, \dots, \omega_n$  del sistema no amortiguado son distintas, los valores propios de  $\mathbf{F}$  son todos diferentes. En dicho caso la matriz  $\mathbf{F}$  es diagonalizable.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores es posible establecer una secuencia de operaciones que desarrollan el punto c) del subapartado 3.4.1 para calcular  $\exp[(\Delta t/2^q)\mathbf{F}]$  a través de la forma reducida de Jordan de  $\mathbf{F}$ . Las operaciones se ordenan en los siguientes puntos:

c.i) Cálculo de los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}$ .

Es necesario comprobar que no hay dos valores propios excesivamente próximos porque en dicho caso el proceso de cálculo de la matriz de cambio de base  $\mathbf{S}$  es muy impreciso y puede conducir a resultados erróneos.

c.ii) Llamando  $\mathbf{F}_J$  a la matriz diagonal que contiene los valores propios de  $\mathbf{F}$ , se halla  $\exp(\Delta t \mathbf{F}_J)$  calculando la función exponencial (en general, con valores complejos) de los valores propios de  $\mathbf{F}$  multiplicados por  $\Delta t$ .

c.iii) Se halla la matriz compleja de cambio de base  $\mathbf{S}$  cuyas columnas son los vectores propios de  $\mathbf{F}$ .

c.iv) Cálculo de la matriz  $\mathbf{S}^{-1}$  inversa de  $\mathbf{S}$ .

c.v) La matriz  $\mathbf{A}$  se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$\mathbf{A} = \exp(\Delta t \mathbf{F}) = \mathbf{S} \exp(\Delta t \mathbf{F}_J) \mathbf{S}^{-1} \quad (3.34)$$

Aunque  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}^{-1}$  y  $\exp(\Delta t \mathbf{F})$  son matrices en general complejas, su producto  $\mathbf{A}$  es siempre real.

Una ventaja importante de calcular  $\mathbf{A}$  a partir de la matriz  $\mathbf{F}_J$  es que si se precisa obtener la función exponencial de  $\exp(\Delta t \mathbf{F})$  para la misma matriz  $\mathbf{F}$  y diferentes valores de  $\Delta t$ , la expresión (3.34) permite un importante ahorro de tiempo de cálculo ya que las matrices  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}^{-1}$  no dependen del valor de  $\Delta t$ .

### 3.4.4 Programación. Número de operaciones.

En el algoritmo que resulta de implementar el procedimiento SSP, la mayor parte de las operaciones que intervienen son productos de matrices y, consecuentemente, es adecuado utilizar como unidad de medida del número total de operaciones el tiempo necesario para ejecutar una sentencia matemática del tipo:

$$X(I, J) = X(I, J) + P * X(I, K)$$

que involucra una suma y una multiplicación en coma flotante y varias búsquedas de índice. El tiempo invertido en ejecutar esta operación se suele denominar *flop* [10].

Se detalla a continuación el cálculo del número total de *flops* necesarios para implementar el algoritmo SSP en un ordenador digital en el caso en que la matriz  $\mathbf{A}$  se halla a partir de la serie de Taylor de  $\Delta t \mathbf{F}$ . El cálculo se desarrolla determinando el número de *flops* necesario para ejecutar las operaciones comprendidas en cada uno de los puntos descritos en los subapartados 3.4.1 y 3.4.2:

- a) Cálculo de la matriz del sistema  $\mathbf{F}$ .

Para determinar la matriz  $\mathbf{M}^{-1}$  utilizando el método de inversión de matrices de Gauss y teniendo en cuenta la simetría de  $\mathbf{M}$  se precisan:

$$n(n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + 2 \cdot 1 = \frac{n(n^2-1)}{3} \text{ flops}$$

Las dos multiplicaciones  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$  que intervienen en la constitución de  $\mathbf{F}$  en la expresión (3.3a) precisan  $n^3$  *flops* cada una de ellas. El resto de operaciones no precisan un tiempo de cálculo importante. El número total de operaciones invertidas en este punto es la suma de los valores anteriores:

$$\frac{7n^3}{3} - \frac{n}{3} \text{ flops}$$

b) Cálculo de  $\mathbf{F}^{-1}$ .

La matriz  $\mathbf{F}^{-1}$  se determina a partir de la expresión (3.8). Esta operación es similar a la anterior y consecuentemente el número de operaciones es también:

$$\frac{7n^3}{3} - \frac{n}{3} \text{ flops}$$

c) Cálculo de la matriz del sistema en tiempo discreto  $\mathbf{A}$ .

Se descompone la determinación del número de *flops* necesarios para calcular la matriz  $\mathbf{A}$  según la secuencia de operaciones descrita en el subapartado 3.4.2. Se consideran únicamente los puntos en que el tiempo de cálculo es apreciable.

c.2) Para calcular el valor de la matriz  $(\Delta t)^2 \mathbf{F}^t \mathbf{F}$  en la expresión (3.23) es necesario multiplicar 4 matrices  $n \times n$  en cuya operación se invierte un total de  $4n^3$  *flops*. Para constituir la matriz  $(\Delta t)^2 \mathbf{F}^t \mathbf{F}$  el número total de *flops* es  $4n^2$ . El mayor valor propio de dicha matriz puede hallarse mediante el método de las potencias u otro algoritmo equivalente y puesto que en esta operación no es necesaria una gran precisión ni por tanto un elevado número de iteraciones el tiempo de cálculo no es relevante. El número total de operaciones invertido en este punto es igual a la suma de los valores anteriormente deducidos:

$$4n^3 + 4n^2 \text{ flops}$$

c.5) Para calcular el valor de la matriz  $T_p(\Delta t \mathbf{F}/2^q)$  en (3.27) es preciso reiterar  $p$  veces la operación (3.28) y multiplicar en cada ocasión el resultado por

$\Delta t/i$  (siendo  $i$  un número entero que varia entre  $p$  y 1) y sumar la matriz identidad  $\mathbf{I}$ . Cada operación  $\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F} \mathbf{Y}/i$  comprende, de acuerdo con (3.28), 4 multiplicaciones de matrices  $n \times n$  que precisan  $4n^3$  flops. La constitución de la matriz  $\mathbf{F} \mathbf{Y}$ , su producto por  $\Delta t/i$  y la suma de la matriz identidad  $\mathbf{I}$  precisa aproximadamente  $4n^2$  flops. El número total de operaciones en este punto es, pues:

$$p4n^2(n+1) \text{ flops}$$

c.6) El cálculo de la matriz  $\mathbf{A}$  se realiza en la expresión (3.29) multiplicando  $q$  veces una matriz de dimensión  $2n \times 2n$  por sí misma, lo que requiere  $(2n)^3$  flops cada vez. Por tanto, el total invertido en este punto es:

$$8n^3q \text{ flops}$$

d) Cálculo de  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ .

Para calcular el valor de la matriz  $\mathbf{P}_1$  en la expresión (3.11b) es necesario multiplicar dos matrices  $2n \times 2n$  lo que totaliza  $(2n)^3$  flops. El cálculo de  $\mathbf{P}_2$  en (3.11c) comprende especialmente la operación  $\mathbf{P}_1/\Delta t - \mathbf{A}$  que comporta  $(2n)^2$  flops y la multiplicación por  $\mathbf{F}^{-1}$  que precisa  $(2n)^3$  flops. El número total total de operaciones es:

$$16n^3 + 4n^2 \text{ flops}$$

f) Cálculo de  $\mathbf{v}$ .

La obtención del vector de excitación  $\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t)$  que interviene en (3.11) puede estimarse de forma aproximada que equivale a  $n$  flops pues en su constitución



no intervienen multiplicaciones. Si el tiempo de duración de la excitación es  $T_e = K_e \Delta t$ , esta operación se repite  $K_e$  veces y en número total de operaciones es:

$$K_e n \text{ flops}$$

donde

$K_e$  = número de instantes de excitación

El valor anterior es únicamente aplicable si la excitación exterior proviene de un acelerograma del que se conoce su valor en cada instante de muestreo. Si se considera un acelerograma con otro intervalo de discretización debe hacerse previamente una interpolación. Si la excitación proviene de un sistema de fuerzas, es preciso además premultiplicar por  $M^{-1}$  en la expresión (3.3b). En el caso de que se considere la vibración libre del sistema a partir de unas condiciones iniciales impuestas no es necesario calcular el vector de excitación  $v$  en cada instante ni obtener el valor de las matrices  $P_1$  y  $P_2$ .

g) Cálculo de  $v_c$ .

La obtención del vector de control  $v_c$  en cada instante debe hacerse a partir del algoritmo de control considerado y, consecuentemente, el número de operaciones depende de la naturaleza de dicho algoritmo y no pertenece al proceso de implementación del procedimiento SSP.

h) Cálculo de la respuesta.

En cada instante de muestreo los desplazamientos y las velocidades se obtienen a partir de la expresión (3.11) y las aceleraciones a partir de (3.9). Cada vez que se desarrolla (3.11) se invierten  $4(2n)n \text{ flops}$  y en (3.9)  $n \text{ flops}$ . Si el tiempo total de cálculo de la historia de la respuesta es  $T_i = K_i \Delta t$ , el número de operaciones es:

$$K_t n(8n + 1) \text{ flops}$$

donde

$K_t$  = número de instantes de cálculo

Sumando los valores parciales anteriores resulta el número total  $N$  de *flops* invertido en desarrollar el algoritmo SSP cuando la matriz  $\mathbf{A}$  se calcula mediante la serie de Taylor de  $\Delta t \mathbf{F}$ . Dicho número se descompone en los siguientes sumandos:

$$N = N_1 + N_2 \quad (3.35)$$

$$N_1 = n^3 \left( \frac{74}{3} + 4p + 8q \right) + n^2(8 + 4p) - \frac{2n}{3} \quad (3.35a)$$

$$N_2 = 8n^2 K_t + n(K_e + K_t) = \frac{8n^2 T_t + n(T_e + T_t)}{\Delta t} \quad (3.35b)$$

donde

$N$  = número total de *flops* invertido en el algoritmo SSP en el caso en que  $\mathbf{A}$  se obtiene a través del desarrollo en serie de Taylor de  $\Delta t \mathbf{F}$ .

$N_1$  = número de *flops* necesario para hallar las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  a partir de la expresión (3.11).

$N_2$  = número de *flops* invertido en conocer la respuesta en cada instante de muestreo.

Si se considera la actuación de distintas excitaciones sobre un mismo sistema no es necesario repetir cada vez las operaciones incluidas en el sumando  $N_1$  y ello da lugar a una notable reducción del tiempo de cálculo especialmente para grandes valores del número de grados de libertad  $n$  puesto que las expresiones (3.35) muestran que  $N_1$  es aproximadamente proporcional al cubo de  $n$  y  $N_2$  a su cuadrado.

La expresión (3.35b) pone de manifiesto que una discretización más fina representa más tiempo de ordenador. En el apartado 3.7 se muestra que un valor más pequeño de  $\Delta t$  proporciona un cálculo más preciso.

En las figuras 3.1a, 3.1b y 3.1c se representa la variación de  $N_1$  y  $N_2$  con el número de grados de libertad  $n$ . Se consideran los siguientes valores para los parámetros que intervienen en (3.35):

$$p = 3 \quad q = 9 \quad K_e = 600 \quad K_t = 600$$

Para otros valores de  $p$  y de  $q$  se obtienen resultados similares a los que se presentan a continuación para  $p = 3$  y  $q = 9$ .

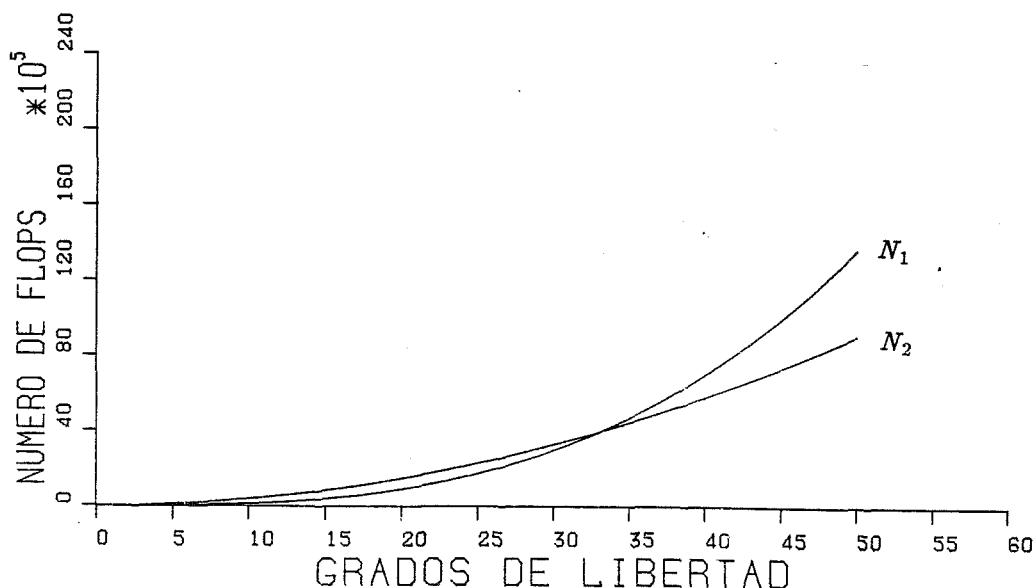
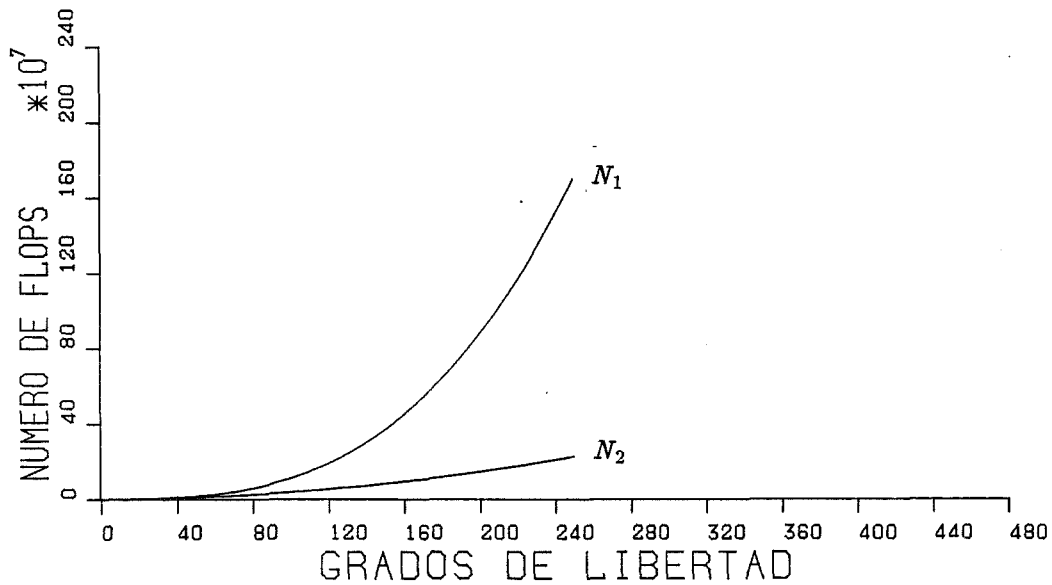


Figura 3.1a Número de flops  $N_1$  para hallar  $A$ ,  $P_1$  y  $P_2$  y número de flops  $N_2$  para hallar la respuesta. Hasta 50 grados de libertad.



**Figura 3.1b** Número de flops  $N_1$  para hallar  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  y número de flops  $N_2$  para hallar la respuesta. Hasta 250 grados de libertad.

En las figuras 3.1 puede comprobarse que la diferencia entre  $N_1$  y  $N_2$  aumenta con el número de grados de libertad  $n$ . Ello indica que, en sistemas complejos que se representan mediante modelos con un elevado número de grados de libertad, las operaciones notablemente más costosas en tiempo de cálculo son aquellas que no es preciso repetir en cada proceso de determinación de la respuesta de un sistema cuando sobre el mismo se considera la actuación de diferentes excitaciones.

Si no se utiliza el desarrollo en serie de Taylor de  $\Delta t \mathbf{F}$  para hallar  $\mathbf{A}$  y dicha matriz se obtiene a través de la forma reducida de Jordan de  $\mathbf{F}$  por aplicación de la igualdad (3.34), el número de operaciones necesarias para el cálculo de  $\mathbf{A}$  no es fácilmente expresable en unidades equivalentes a flops. Puesto que la matriz del sistema  $\mathbf{F}$  no es simétrica, el tiempo de ordenador invertido en calcular el valor de  $\mathbf{A}$  en la expresión (3.34) es elevado y es mayor que el que se precisa para obtener  $\mathbf{A}$  a partir de (3.29) si en dicha expresión no se consideran unos valores excesivamente grandes de los parámetros

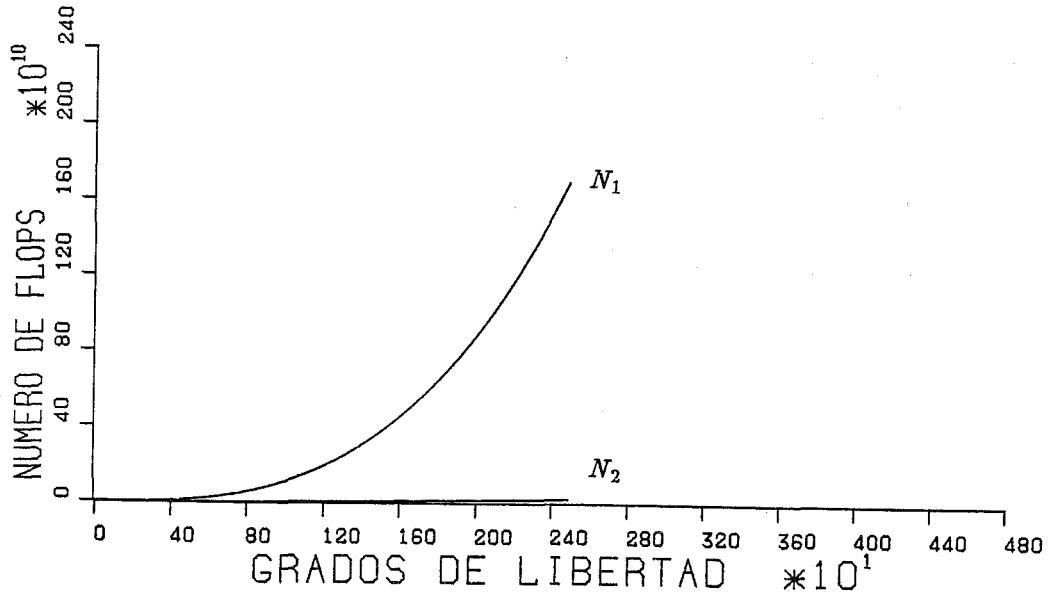


Figura 3.1c Número de flops  $N_1$  para hallar  $A$ ,  $P_1$  y  $P_2$  y número de flops  $N_2$  para hallar la respuesta. Hasta 2.500 grados de libertad.

$p$  y  $q$ .

### 3.5 ALGORITMO SSP EN COORDENADAS MODALES.

El análisis del movimiento en coordenadas modales es útil porque en muchos casos, con la consideración de un número relativamente pequeño de modos propios de vibración del sistema, puede describirse su movimiento con suficiente aproximación y porque bajo ciertas condiciones el sistema de ecuaciones que describe el movimiento en coordenadas modales está formado por ecuaciones independientes, lo cual facilita su resolución. En dicho caso se dice que las ecuaciones son desacopladas.

La aplicación del algoritmo SSP en coordenadas modales permite tomar en consideración el número de modos propios que se desee y, consecuentemente, puede obtenerse una importante reducción del número de operaciones y por tanto del tiempo de ordenador. Si las ecuaciones en coordenadas modales son desacopladas la aplicación de dicha propiedad al algoritmo SSP permite una formulación más simple del mismo.

En el subapartado 3.5.1 se desarrolla la formulación general del algoritmo SSP en coordenadas modales y en el subapartado 3.5.2 se calcula el número de operaciones necesarias comparando los valores que resultan con los hallados en el subapartado 3.4.4 para la implementación en coordenadas generales.

### 3.5.1 Formulación del algoritmo SSP en coordenadas modales.

Después de elegir el número  $r$  de modos propios que se desea incluir en el análisis, el proceso de cálculo de la respuesta se ordena en las tres operaciones siguientes: cambio de coordenadas generales a coordenadas modales, obtención de la respuesta en coordenadas modales utilizando el algoritmo SSP y nuevo cambio a coordenadas generales para conocer la respuesta en cada instante en dichas coordenadas. Dichas operaciones se describen, respectivamente, en los tres puntos a), b) y c) que se presentan a continuación.

a) *Cambio de coordenadas generales  $\mathbf{d}$  a coordenadas modales  $\boldsymbol{\eta}$ .*

Las  $r$  coordenadas modales que se incluyen en el cálculo son  $\eta_1, \dots, \eta_r$  y se obtienen a partir de las  $n$  coordenadas generales  $d_1, \dots, d_n$  en las expresiones (3.37) mediante una matriz modal de cambio de base  $\Phi_r$ . Las  $r$  columnas  $\phi_1, \dots, \phi_r$  de dicha matriz son las soluciones vectoriales de la ecuación:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

que corresponden a los  $r$  menores valores escalares positivos  $\omega_1, \dots, \omega_r$  que la satisfacen. Dichos valores son las frecuencias naturales de oscilación de los  $r$  primeros modos propios de vibración del sistema. Los vectores modales  $\phi_i$  y las frecuencias propias  $\omega_i$  se ordenan en la **matriz espectral**  $\Omega_r$  y en la **matriz modal**  $\Phi_r$  de la siguiente manera:

$$\Omega_r = \begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \omega_r \end{pmatrix} \quad \Phi_r = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1r} \\ & \dots & \\ & \dots & \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nr} \end{pmatrix} \quad (3.36a)$$

donde

$r =$  número de modos propios que se incluyen en el cálculo

$\Omega_r =$  matriz espectral de las  $r$  primeras frecuencias propias.

$\Phi_r =$  matriz modal de los  $r$  primeros modos propios.

Si los vectores modales  $\phi_1, \dots, \phi_r$  están normalizados se cumplen las siguientes igualdades:

$$\phi_i^t M \phi_j = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.36b)$$

Las  $n^2$  relaciones escalares contenidas en (3.36b) pueden ser formuladas equivalentemente en forma matricial en la siguiente expresión:

$$\Phi_r^t M \Phi_r = I \quad (3.36c)$$

Finalmente, el cambio de coordenadas generales  $d_1, \dots, d_n$  a coordenadas modales  $\eta_1, \dots, \eta_r$  se efectúa a través de la matriz modal  $\Phi_r$  de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$d = \Phi_r \eta \quad (3.37a)$$

$$\dot{d} = \Phi_r \dot{\eta} \quad (3.37b)$$

$$\ddot{d} = \Phi_r \ddot{\eta} \quad (3.37c)$$

Premultiplicando (3.1) por  $\Phi_r^t$  y utilizando (3.37) se obtiene la ecuación del movimiento en coordenadas modales:



$$\Phi_r^t M \Phi_r \ddot{\eta} + \Phi_r^t C \Phi_r \dot{\eta} + \Phi_r^t K \Phi_r \eta = \Phi_r^t f_c(t) + \Phi_r^t f(t)$$

La expresión anterior puede formularse equivalentemente en los siguientes términos:

$$\ddot{\eta} + C^* \dot{\eta} + \Omega_r^2 \eta = f_c^*(t) + f^*(t) \quad (3.38)$$

donde

$$C^* = \Phi_r^t C \Phi_r \quad (3.38a)$$

$$\Omega_r^2 = K^* = \Phi_r^t K \Phi_r \quad (3.38b)$$

$$f_c^*(t) = \Phi_r^t f_c(t) \quad (3.38c)$$

$$f^*(t) = \Phi_r^t f(t) \quad (3.38d)$$

Siendo:

$C^*$  = matriz de amortiguamiento en coordenadas modales del sistema formado por los  $r$  primeros modos propios de vibración.

$K^*$  = matriz de rigidez en coordenadas modales del mismo sistema.

$f_c^*(t)$  = vector  $f_c(t)$  expresado en coordenadas modales.

$f^*(t)$  = vector  $f(t)$  expresado en coordenadas modales.

b) *Obtención de la respuesta en coordenadas modales.*

Puesto que la implementación del algoritmo SSP en un sistema acoplado es distinta a la implementación en uno desacoplado, en los puntos b.1) y b.2) se analizan, respectivamente, ambos aspectos por separado.

b.1) Algoritmo SSP en coordenadas modales. Ecuaciones acopladas.

Para determinar la respuesta del sistema en cada instante en coordenadas modales se expresa la ecuación (3.38) en espacio de estado y se resuelve la ecuación resultante en tiempo discreto. Dicho proceso es el mismo que se describe en el apartado 3.2 para la ecuación (3.1) formulada en coordenadas generales.

La ecuación (3.38) se formula en espacio de estado mediante la siguiente expresión:

$$\dot{z} = F^* z + v_c^*(t) + v^*(t) \quad (3.39)$$

donde  $z$  es el vector de estado en coordenadas modales,  $F^*$  es la matriz del sistema en coordenadas modales y  $v_c^*$  y  $v^*$  son los vectores de excitación en dichas coordenadas. Los elementos anteriores obedecen a las siguientes expresiones:

$$z = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad (3.39a)$$

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Omega_r^2 & -C^* \end{pmatrix} \quad (3.39b)$$

$$v_c^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_c^*(t) \end{pmatrix} \quad v^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f^*(t) \end{pmatrix} \quad (3.39c)$$

El resto del proceso de obtención del vector de estado  $z$  en coordenadas

modales en cada instante es análogo al desarrollo del algoritmo SSP descrito en el apartado 3.2.

b.2) Algoritmo SSP en coordenadas modales. Ecuaciones desacopladas.

Se describe la implementación del algoritmo SSP en coordenadas modales para un sistema desacoplado. Se supone que la matriz de amortiguamiento en coordenadas modales  $C^*$  se define en cada modo propio  $i$  como una fracción  $\nu_i$  de la frecuencia propia  $\omega_i$  [12].

En dicho caso, la citada matriz  $C^*$  obedece a las siguientes expresiones:

$$C^* = 2N\Omega_r = 2 \begin{pmatrix} \nu_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \nu_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \omega_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\nu_1\omega_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 2\nu_r\omega_r \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

donde

$N =$  matriz diagonal de las fracciones de amortiguamiento  $\nu_i$

Si la matriz de amortiguamiento se calcula de acuerdo con (3.40), el sistema de ecuaciones (3.38) que describe el movimiento en coordenadas modales es desacoplado y se descompone en las  $r$  ecuaciones escalares siguientes:

$$\ddot{\eta}_i + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \phi_i^t f_c(t) + \phi_i^t f(t) = f_{c_i}^*(t) + f_i^*(t) \quad i = 1, \dots, r \quad (3.41)$$

Cada una de las ecuaciones mostradas en (3.41) puede formularse en espacio de estado resultando las siguientes  $r$  ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{z}_i = \mathbf{F}_i^* z_i + \mathbf{v}_{c_i}^*(t) + \mathbf{v}_i^*(t) \quad i = 1, \dots, r \quad (3.42)$$

donde  $z_i$  es el vector de estado del modo propio  $i$ ,  $\mathbf{F}_i^*$  es la matriz del sistema del modo  $i$  y  $\mathbf{v}_{c_i}^*$  y  $\mathbf{v}_i^*$  son los vectores de control y de excitación que actúan sobre dicho modo. Los elementos anteriores responden a las siguientes expresiones:

$$z_i = \begin{pmatrix} \eta_i \\ \dot{\eta}_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, r \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{F}_i^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\nu_i\omega_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, r \quad (3.42b)$$

$$\mathbf{v}_{c_i}^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{c_i}^*(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_i^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_i^*(t) \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, r \quad (3.42c)$$

La implementación del algoritmo SSP en este caso en que hay un sólo grado de libertad es especialmente sencilla ya que los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}_i^*$  pueden hallarse analíticamente a partir de su polinomio característico y, consecuentemente, la matriz  $\mathbf{A}_i^* = \exp(\Delta t \mathbf{F}_i^*)$  puede calcularse utilizando una expresión similar a (3.31).

El polinomio característico de  $\mathbf{F}_i^*$  se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$Q_{F_i^*}(\lambda) = \lambda^2 + 2\omega_i \nu_i \lambda + \omega_i^2 = (\lambda - \lambda_{i_1})(\lambda - \lambda_{i_2}) \quad (3.43)$$

Las raíces  $\lambda_{i_1}$  y  $\lambda_{i_2}$  del polinomio  $Q_{F_i^*}$  son los valores propios de la matriz  $\mathbf{F}_i^*$  y tienen los siguientes valores:

$$\lambda_{i1} = -\omega_i (\nu_i + j \sqrt{1 - \nu_i^2}) \quad (3.43a)$$

$$\lambda_{i2} = -\omega_i (\nu_i - j \sqrt{1 - \nu_i^2}) \quad (3.43b)$$

donde  $j$  es la unidad imaginaria  $j = \sqrt{-1}$ .

Las expresiones de los valores propios de  $\mathbf{F}_i^*$ ,  $\lambda_{i1}$  y  $\lambda_{i2}$  en (3.43a) y (3.43b) muestran que si el coeficiente de amortiguamiento  $\nu_i$  es distinto de la unidad ambos son diferentes y, consecuentemente la matriz  $\mathbf{F}_i^*$  admite expresión diagonal en una base de vectores propios definida por una matriz inversible de cambio de base  $\mathbf{S}_i$  cuyas columnas son los vectores propios de  $\mathbf{F}_i^*$ . La matriz  $\mathbf{S}_i$  y su matriz inversa  $\mathbf{S}_i^{-1}$  obedecen a las siguientes expresiones:

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} \begin{pmatrix} \lambda_{i2} & -1 \\ \lambda_{i1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.43c)$$

La matriz diagonal  $\mathbf{D}_i$  que contiene en su diagonal principal los valores propios de  $\mathbf{F}_i^*$  es:

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} \end{pmatrix} \quad (3.43d)$$

El cálculo de  $\mathbf{A}_i^* = \exp(\Delta t \mathbf{F}_i^*)$  puede hacerse analíticamente utilizando los resultados (3.43) en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^* &= \exp(\Delta t \mathbf{F}_i^*) = \mathbf{S}_i \exp(\Delta t \mathbf{D}_i) \mathbf{S}_i^{-1} = \\ &= \frac{1}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(\Delta t \lambda_{i1}) & 0 \\ 0 & \exp(\Delta t \lambda_{i2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{i2} & -1 \\ \lambda_{i1} & 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\exp(-\Delta t \omega_i \nu_i)}{\omega_{c_i}} \begin{pmatrix} \omega_{c_i} \cos(\Delta t \omega_{c_i}) - \omega_i \nu_i \sin(\Delta t \omega_{c_i}) & \sin(\Delta t \omega_{c_i}) \\ \omega_i^2 \cos(\Delta t \omega_{c_i}) & \omega_{c_i} \cos(\Delta t \omega_{c_i}) - \omega_i \nu_i \sin(\Delta t \omega_{c_i}) \end{pmatrix} \quad (3.44a)$$

A partir del valor de  $\mathbf{A}_i^*$  hallado en (3.44a) el resto de operaciones es similar a las correspondientes al algoritmo SSP en coordenadas generales descrito en el apartado 3.2. Las matrices  $\mathbf{P}_{1_i}^*$  y  $\mathbf{P}_{2_i}^*$  se hallan a partir de las expresiones

$$\mathbf{P}_{1_i}^* = \mathbf{F}_i^{*-1} (\mathbf{A}_i^* - \mathbf{I}) \quad (3.44b)$$

$$\mathbf{P}_{2_i}^* = \mathbf{F}_i^{*-1} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{1_i}^* - \mathbf{A}_i^* \right) \quad (3.44c)$$

El valor de la matriz  $\mathbf{F}_i^{*-1}$  es:

$$\mathbf{F}_i^{*-1} = \begin{pmatrix} -2\nu_i/\omega_i & -1/\omega_i^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44d)$$

Cuando se conoce el valor de las matrices  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{P}_{1_i}^*$  y  $\mathbf{P}_{2_i}^*$  es posible formular la siguiente expresión:

$$\mathbf{z}_i(k+1) = \mathbf{A}_i^* \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{P}_{1_i}^* \mathbf{v}_i^*(k+1) + \mathbf{P}_{2_i}^* [\mathbf{v}_i^*(k+1) - \mathbf{v}_i^*(k)] + \mathbf{P}_{1_i}^* \mathbf{v}_{c_i}^*(k+1) \quad i = 1, \dots, r \quad (3.45)$$

La aplicación recurrente de la expresión (3.45) permite hallar el vector de estado  $\mathbf{z}_i$  en cada instante de muestreo. El vector de estado en coordenadas modales  $\mathbf{z}$  se obtiene ensamblando los vectores  $\mathbf{z}_i$  correspondientes a cada modo propio  $i$ . Las aceleraciones  $\ddot{\eta}_i$  en coordenadas modales se hallan por derivación numérica de acuerdo con una expresión similar a (3.9).

c) Cambio de coordenadas modales  $\boldsymbol{\eta}$  a coordenadas generales  $\mathbf{d}$ .

La respuesta del sistema en coordenadas generales  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  y  $\ddot{\mathbf{d}}$  en cada instante se obtiene a partir de la respuesta  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  y  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$  en el mismo instante en coordenadas modales utilizando las ecuaciones de cambio de base contenidas en (3.37).

### 3.5.2 Número de operaciones.

En el presente subapartado se determina el número de *flops* necesarios para ejecutar en un ordenador digital las operaciones implicadas en la implementación del algoritmo SSP en coordenadas modales. En el cálculo del citado número de operaciones se respeta la descomposición en los puntos a), b.1), b.2) y c) descritos en el subapartado anterior.

#### a) Cambio de coordenadas generales a modales.

Es necesario plantear la ecuación del movimiento en coordenadas modales (3.38). Se supone que los valores de las matrices espectral y modal  $\boldsymbol{\Omega}_r$  y  $\boldsymbol{\Phi}_r$  se han determinado en un cálculo previo y, consecuentemente, para formular la ecuación (3.38) es preciso únicamente obtener el valor de  $\mathbf{C}^*$ , de  $\mathbf{f}_c^*(t)$  y de  $\mathbf{f}^*(t)$  mediante las expresiones (3.38a), (3.38c) y (3.38d). Dichas operaciones equivalen a  $2n^2r$  y  $nr^2$  *flops*, respectivamente. El número total de operaciones es pues

$$nr(2n+r) \text{ flops} \quad (3.46)$$

#### b.1) Algoritmo SSP en coordenadas modales sin desacoplamiento.

El proceso de cálculo es similar al descrito en el apartado 3.2 correspondiente al algoritmo SSP en coordenadas generales y, consecuentemente, el número de *flops* se obtiene sustituyendo  $n = r$  en (3.35). Resulta el siguiente valor:

$$r^3 \left( \frac{74}{3} + 4p + 8q \right) + r^2 (8 + 4p) - \frac{2}{3}r + 8r^2 K_t + r(K_e + K_t) \text{ flops} \quad (3.47a)$$

Las magnitudes  $p$ ,  $q$ ,  $K_e$  y  $K_t$  que intervienen en la expresión anterior tienen el mismo significado que en el subapartado 3.4.4.

b.2) Algoritmo SSP en coordenadas modales con desacoplamiento.

Para cada modo propio  $i$  es preciso plantear la ecuación (3.45) hallando los valores de las matrices  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{P}_{1i}^*$  y  $\mathbf{P}_{2i}^*$ . La matriz  $\mathbf{A}_i^*$  se define en (3.44a) y, a partir de ella, se obtienen  $\mathbf{P}_{1i}^*$  y  $\mathbf{P}_{2i}^*$  en (3.44b) y (3.44c), respectivamente. Puesto que las matrices  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{P}_{1i}^*$  y  $\mathbf{P}_{2i}^*$  tienen tamaño  $2 \times 2$  en las operaciones anteriores se invierten  $16 \times 2^3 + 4 \times 2^2 = 144$  *flops*. La respuesta de un modo  $i$  en cada instante se obtiene a partir de la expresión (3.45) y, consecuentemente, el número de operaciones se halla sustituyendo  $n = 2$  en el resultado (3.35b), obteniéndose  $2^2 \times 8K_t + 2(K_t + K_e) = 32K_t + 2K_e$  *flops*. El número total de operaciones en los  $r$  modos propios considerados se calcula multiplicando por  $r$  los valores anteriores, resultando

$$r(144 + 32 K_t + 2 K_e) \text{ flops} \quad (3.47b)$$

c) Cambio de coordenadas modales a generales.

El número de *flops* necesario para realizar los productos contenidos en las expresiones (3.37a), (3.37b) y (3.37c) es  $3 K_t n r^2$ . Si no se desea conocer la respuesta de los  $n$  grados de libertad sino únicamente la respuesta de un número  $l$  de grados  $n_1, \dots, n_l$  no es preciso determinar todos los valores  $d_1, \dots, d_n$  y sus derivadas, sino únicamente  $d_{n_1}, \dots, d_{n_l}$  (y sus derivadas). En este caso el número de operaciones es:

$$3 K_t l r^2 \text{ flops} \quad (3.48)$$

donde



$l =$  número de grados de libertad cuya respuesta se desea conocer

En sistemas acoplados, el número total de operaciones es la suma de los valores contenidos en (3.46), (3.47a) y (3.48), es decir:

$$N_{r_a} =$$

$$= 2n^2r + nr^2 + r^3 \left( \frac{62}{3} + 4p + 8q \right) + r^2 \left( \frac{14}{3} + 4p \right) + 8r^2 K_t + r(K_e + K_t) + 3K_t l r^2 \text{ flops}$$

(3.49a)

donde

$N_{r_a} =$  número de *flops* en el algoritmo SSP en coordenadas modales con  $r$  modos propios y ecuaciones acopladas.

En sistemas desacoplados, el número total de operaciones es la suma de (3.46), (3.47b) y (3.48), es decir:

$$N_{r_d} = 2n^2r + nr^2 + r(144 + 32K_t + 2K_e) + 3K_t l r^2 \text{ flops}$$

(3.49b)

donde

$N_{r_d} =$  número de *flops* en el algoritmo SSP en coordenadas modales con  $r$  modos propios y ecuaciones desacopladas.

En las figuras 3.2a, 3.2b y 3.2c se muestra la variación de  $N_{r_a}$  y de  $N_{r_d}$  en función del número de grados de libertad  $n$ . Para construir dichas figuras se han considerado los siguientes valores:

$$r = 5 \quad p = 3 \quad q = 9 \quad K_e = 600 \quad K_t = 600 \quad l = 2$$

La comparación de las gráficas contenidas en las figuras 3.2 muestra que la diferencia entre los valores de  $N_{ra}$  y de  $N_{rd}$  solamente es importante cuando el número de grados de libertad  $n$  es pequeño. Ello significa que en sistemas complejos desacoplables no se obtiene una reducción apreciable del tiempo de cálculo al utilizar dicha propiedad de desacoplamiento en la implementación del algoritmo SSP. No obstante, si al crecer el número de grados de libertad se incluyesen también más modos propios en el cálculo, la diferencia entre  $N_{ra}$  y  $N_{rd}$  sería mayor.

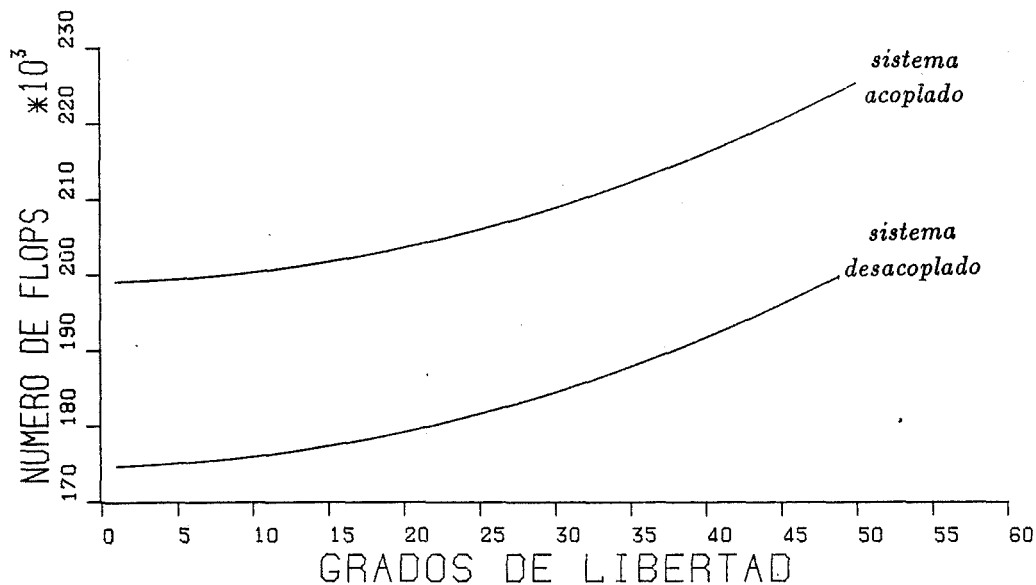
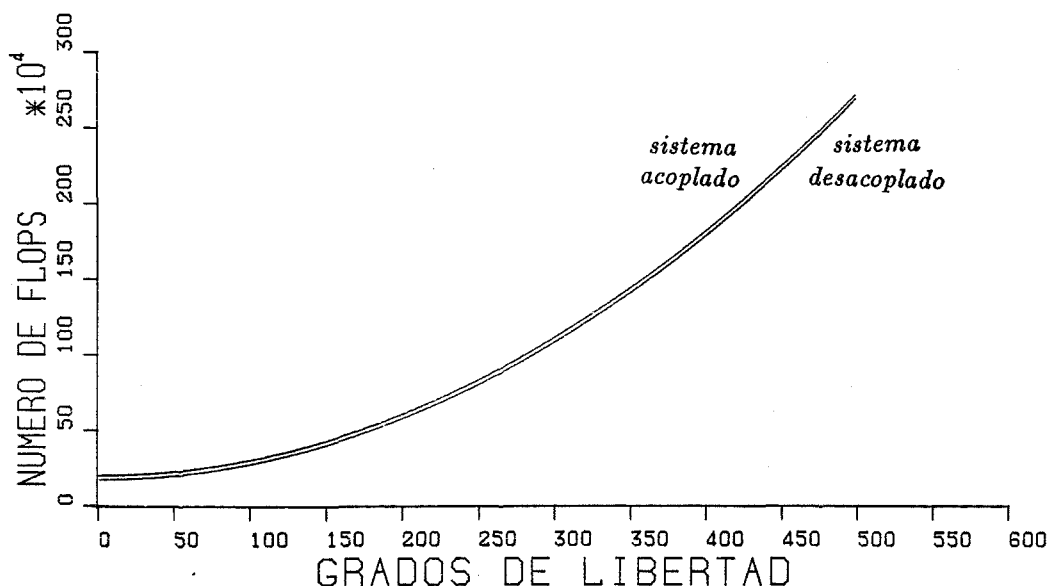


Figura 3.2a Número de operaciones en el algoritmo SSP con reducción modal en el caso de sistemas acoplados y desacoplados. Hasta 50 grados de libertad.

En las Figuras 3.3a y 3.3b se representa la variación del número de operaciones del



**Figura 3.2b** Número de operaciones en el algoritmo SSP con reducción modal en el caso de sistemas acoplados y desacoplados. Hasta 500 grados de libertad.

algoritmo SSP en coordenadas generales  $N$  dado en las expresiones (3.35) y del número de operaciones en coordenadas modales sin desacoplamiento  $N_{r_a}$  dado en (3.49b) con el número de grados de libertad  $n$ . Las gráficas contenidas en las figuras 3.3 se han generado a partir de los mismos valores de los parámetros  $r$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $K_e$ ,  $K_t$  y  $l$  que las contenidas en las figuras 3.1 y 3.2.

Las figuras 3.3 muestran que la diferencia entre  $N$  y  $N_{r_a}$  es notable especialmente para valores grandes del número de grados de libertad  $n$ . Ello significa que la reducción modal representa un ahorro apreciable de tiempo de cálculo sobre todo en sistemas complejos.

En  $N_{r_a}$  no se ha incluido el tiempo invertido en hallar la matriz modal unitaria  $\Phi_r$  ni la matriz espectral de frecuencias propias  $\Omega_r$ .

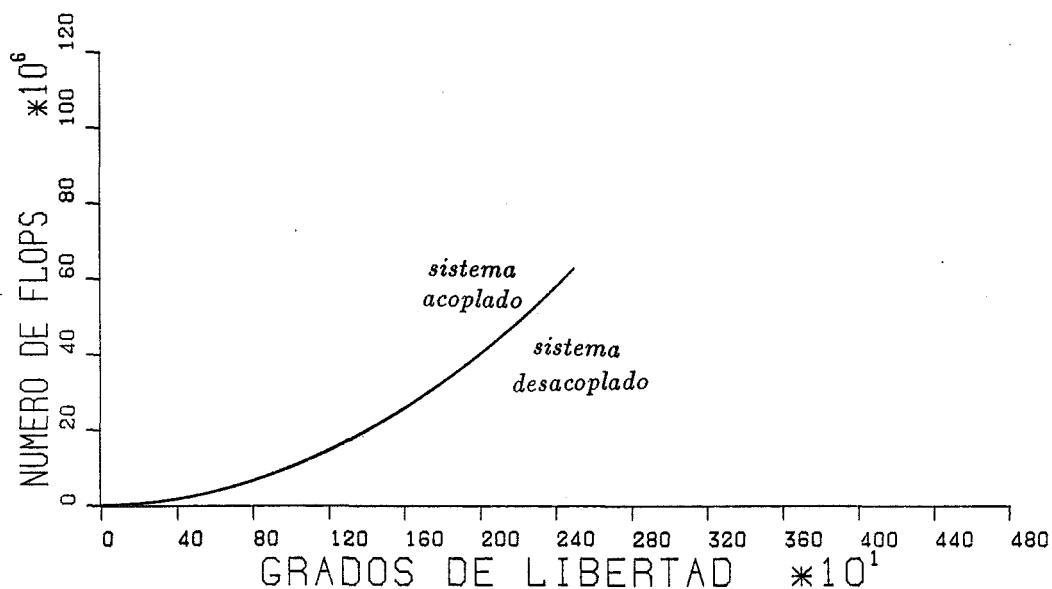
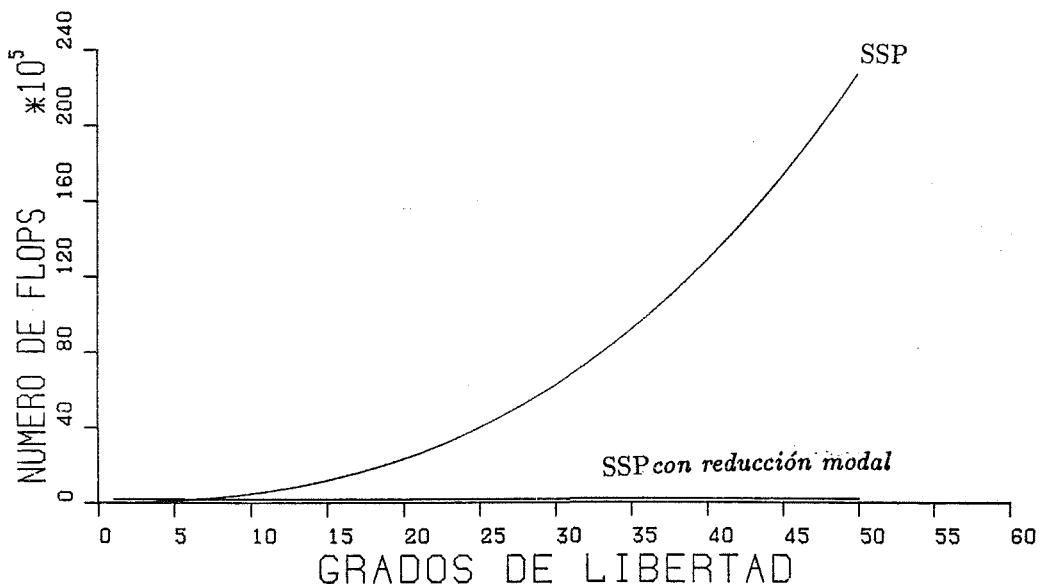


Figura 3.2c Número de operaciones en el algoritmo SSP con reducción modal en el caso de sistemas acoplados y desacoplados. Hasta 2.500 grados de libertad.

### 3.6 ESTABILIDAD DEL ALGORITMO SSP.

El procedimiento SSP se traduce en el modelo en tiempo discreto (3.11) que describe la respuesta de la estructura en los sucesivos instantes de cálculo. Consecuentemente, la estabilidad del algoritmo SSP puede analizarse mediante conceptos propios de estabilidad de sistemas dinámicos lineales en tiempo discreto aplicados a la expresión (3.11). En dicho sistema pueden considerarse dos tipos de definiciones de estabilidad: las que están relacionadas intrínsecamente con la existencia de perturbaciones exteriores y las que se refieren a la estabilidad de la posición nula de equilibrio en ausencia de perturbaciones.

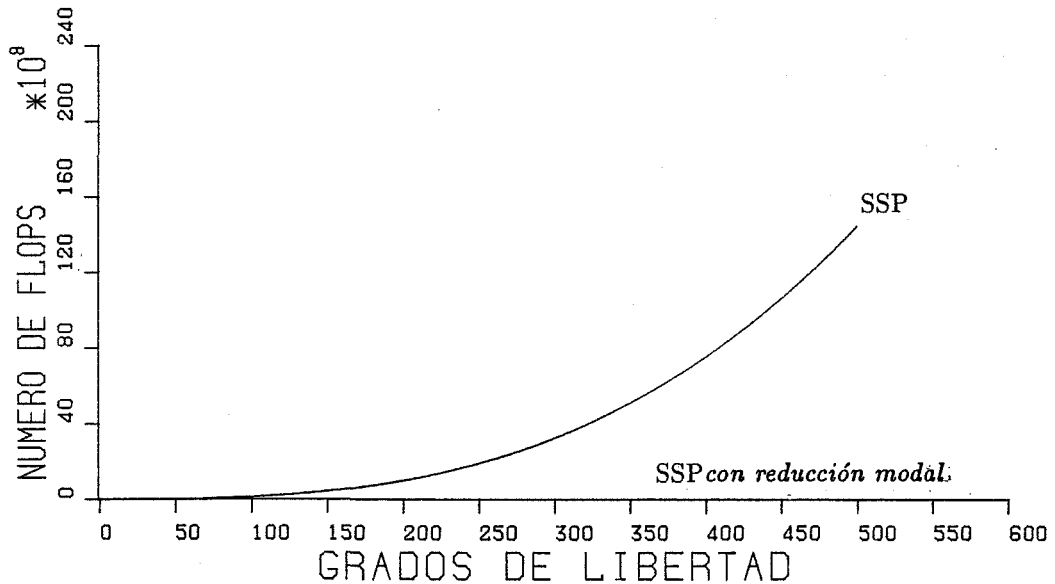
Cuando en el sistema (3.11) actúan una excitación y unas fuerzas de control se define la **estabilidad externa** como la propiedad que garantiza que a una entrada acotada corresponde una respuesta también acotada, incluyéndose en la entrada los



**Figura 3.3a** Número de operaciones en el algoritmo SSP en coordenadas generales y en coordenadas modales considerando únicamente cinco modos propios de vibración. Hasta 50 grados de libertad.

vectores  $v$  de excitación y  $v_c$  de control. Es importante asegurar que un algoritmo es estable externamente porque ello implica la ausencia de amplificaciones artificiales de la respuesta.

En ausencia de excitación y de control se consideran especialmente tres tipos distintos de estabilidad de la posición nula de equilibrio: la estabilidad según Lyapunov, la estabilidad global y la estabilidad asintótica. En ausencia de perturbación exterior, si se separa inicialmente el sistema de su posición de equilibrio se dice que es **estable según Lyapunov** si su respuesta permanece acotada, y se dice que es **asintóticamente estable** si el sistema tiende a retornar a su posición inicial de equilibrio. Si el sistema tiende a volver a dicha posición de equilibrio independientemente del valor de la distorsión inicial introducida se dice que es además **globalmente estable**. Es importante verificar que un algoritmo es estable según Lyapunov para poder asegurar la ausencia de amplificaciones artificiales de perturbaciones iniciales o de errores en el



**Figura 3.3b** Número de operaciones en el algoritmo SSP en coordenadas generales y en coordenadas modales considerando únicamente cinco modos propios de vibración. Hasta 500 grados de libertad.

cálculo y, si el algoritmo es además asintóticamente estable, puede garantizarse que dichas desviaciones tienden a amortiguarse en el proceso de cálculo. En algoritmos globalmente estables dicho amortiguamiento se produce independientemente de la cuantía de las desviaciones.

Para cada uno de los anteriores tipos de estabilidad se define el concepto de estabilidad incondicional: se dice que un algoritmo es **incondicionalmente estable** [1] si sus condiciones de estabilidad no dependen del período temporal de discretización  $\Delta t$  utilizado, es decir, si para cualquier  $\Delta t$  puede efectuarse un cálculo estable de acuerdo con la definición de estabilidad considerada.

En el subapartado 3.6.1 se analiza la estabilidad externa del algoritmo SSP y se estudian las condiciones suficientes que aseguran dicho tipo de estabilidad. Se muestra que pueden formularse condiciones que dependen únicamente de los valores propios de

la matriz  $A$ .

En el subapartado 3.6.2 se analiza la estabilidad de la posición nula de equilibrio del sistema (3.11) definiéndose la estabilidad según Lyapunov, la estabilidad asintótica y la estabilidad global y se muestran condiciones suficientes para dichos tipos de estabilidad. Se concluye que las mismas condiciones que garantizan la estabilidad externa descritas en el subapartado 3.6.1 aseguran también la estabilidad asintótica y la estabilidad global.

En el subapartado 3.6.3 se determinan los valores de los parámetros  $\Delta t$ ,  $p$  y  $q$  que deben ser utilizados en cada aplicación del algoritmo SSP para poder garantizar el cumplimiento de las condiciones halladas en los subapartados anteriores y, por tanto, poder asegurar que el cálculo es estable.

En el subapartado 3.6.4 se muestra como el algoritmo SSP es incondicionalmente estable respecto de todos los tipos de estabilidad considerados en el presente apartado.

### 3.6.1 Estabilidad externa.

La definición de estabilidad externa del procedimiento SSP se establece a partir de la expresión (3.11) que define el sistema dinámico que resulta de implementar dicho procedimiento.

Se dice que el sistema (3.11) es externamente estable si para cualesquiera  $t_0$ ,  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{v}_c(t)$  tales que  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \delta$ ,  $\|\mathbf{v}(t)\| \leq \delta$  y  $\|\mathbf{v}_c(t)\| \leq \delta$  para todo  $t \geq t_0$ , existe una constante positiva  $\varepsilon$  que solamente depende de  $t_0$ ,  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{v}_c(t)$  y tal que  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ . La condición anterior puede formularse equivalentemente en los siguientes términos: si toda entrada acotada produce una salida acotada, el sistema es estable externamente. En la entrada se incluyen las características de la excitación exterior y de las fuerzas de control.

En el presente subapartado se muestra que una condición suficiente de estabilidad externa para el algoritmo SSP es que todos los valores propios de la matriz del sistema en tiempo discreto  $A$  estén en el interior del círculo unidad.

Si se parte de un instante inicial  $t_0 = 0$ , para analizar la estabilidad externa del algoritmo SSP se establece una expresión que relaciona la respuesta  $\mathbf{x}(k \Delta t)$  en un instante arbitrario  $k$  con las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0)$  y los vectores de excitación y de control en los instantes anteriores  $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(\Delta t), \dots, \mathbf{v}(k \Delta t)$  y  $\mathbf{v}_c(0), \mathbf{v}_c(\Delta t), \dots, \mathbf{v}_c(k \Delta t)$ . Dicha relación se obtiene por aplicación reiterada de (3.11) desde el instante inicial. Resulta la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k \Delta t) = & \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{l=1}^k \mathbf{A}^{k-l} \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(l \Delta t) + \\ & + \sum_{l=1}^k \mathbf{A}^{k-l} \mathbf{P}_2 [\mathbf{v}(l \Delta t) - \mathbf{v}(l \Delta t - \Delta t)] + \sum_{l=1}^k \mathbf{A}^{k-l} \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_c(l \Delta t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Considerando la norma euclídea ordinaria para las matrices y vectores que intervienen en (3.50) y teniendo en cuenta que ambas normas son compatibles puede escribirse la siguiente acotación para la norma  $\|\mathbf{x}(k \Delta t)\|$  del vector de estado en el instante  $k$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(k \Delta t)\| \leq & \|\mathbf{A}^k\| \|\mathbf{x}(0)\| + \sum_{l=1}^k \|\mathbf{A}^{k-l}\| \|\mathbf{P}_1\| \|\mathbf{v}(l \Delta t)\| + \\ & + \sum_{l=1}^k \|\mathbf{A}^{k-l}\| \|\mathbf{P}_2\| \|\mathbf{v}(l \Delta t) - \mathbf{v}(l \Delta t - \Delta t)\| + \sum_{l=1}^k \|\mathbf{A}^{k-l}\| \|\mathbf{P}_1\| \|\mathbf{v}_c(l \Delta t)\| \end{aligned} \quad (3.51)$$

Si todos los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  tienen módulo menor que la unidad su radio espectral  $\rho(\mathbf{A})$  es menor que 1 y puede escribirse la siguiente desigualdad para la norma euclídea de  $\mathbf{A}^j$  [13]:

$$\|\mathbf{A}^j\| \leq C \lambda^j \quad (3.52a)$$



donde el exponente  $j$  es un número entero no negativo y  $C$  y  $\lambda$  son números constantes tales que

$$0 \leq C < \infty \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (3.52b)$$

Teniendo en cuenta la definición de estabilidad externa dada al inicio del presente subapartado y aplicando las relaciones (3.52) a la desigualdad (3.51), pueden escribirse las siguientes acotaciones para la norma euclídea  $\|\mathbf{x}(k \Delta t)\|$  del vector de estado en el instante  $k$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(k \Delta t)\| &\leq \delta \left[ C\lambda^k + 2(\|\mathbf{P}_1\| + \|\mathbf{P}_2\|)C \sum_{l=1}^k \lambda^{k-l} \right] = \\ &= \delta C \left[ \lambda^k + 2(\|\mathbf{P}_1\| + \|\mathbf{P}_2\|) \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda} \right] \leq \\ &\leq \delta C \left( 1 + 2 \frac{\|\mathbf{P}_1\| + \|\mathbf{P}_2\|}{1 - \lambda} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dado un valor de  $\delta$  en la definición de estabilidad externa, la expresión (3.53) muestra que puede hallarse un valor de  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \delta C \left( 1 + 2 \frac{\|\mathbf{P}_1\| + \|\mathbf{P}_2\|}{1 - \lambda} \right) \quad (3.54)$$

que no depende de  $k$  y satisface todas las condiciones exigidas. Consecuentemente, si el radio espectral de la matriz  $\mathbf{A}$  es menor que la unidad, el sistema (3.11) es estable de forma externa.

### 3.6.2 Estabilidad del equilibrio.

En el sistema (3.11) pueden definirse en ausencia de excitación distintos tipos de estabilidad del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ . Un sistema es **estable en el sentido de Lyapunov** si para un instante cualquiera  $t_0 = k_0 \Delta t$  y un valor  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe un escalar  $\delta$  que depende de  $\varepsilon$  y  $t_0$  y tal que  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$  implica que  $\|\mathbf{x}(k \Delta t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$  para todo  $k \geq k_0$  siendo  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  la posición nula de equilibrio. Un sistema estable según Lyapunov se dice además que es **asintóticamente estable** si para un  $k_0$  arbitrario existe un valor  $\delta$  que depende de  $k_0$  tal que  $\|\mathbf{x}(k_0 \Delta t) - \mathbf{x}_e\| < \delta$  implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| = 0$ . Si además  $\delta(k_0)$  puede ser arbitrariamente grande, se dice que el sistema es **globalmente estable**.

En ausencia de excitación externa y de fuerzas de control la ecuación (3.50) que relaciona la respuesta en un instante  $k$  con las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0)$  se reduce a la expresión siguiente:

$$\mathbf{x}(k \Delta t) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \quad (3.55)$$

La ecuación (3.55) representa la formulación del algoritmo SSP cuando no hay perturbación exterior y, consecuentemente, las condiciones de estabilidad según Lyapunov, estabilidad asintótica y estabilidad global del algoritmo SSP se estudian sobre el sistema definido por dicha expresión.

A partir de (3.55) se comprueba inmediatamente [13] que, si todos los valores propios de la matriz del sistema en tiempo discreto  $\mathbf{A}$  tienen módulo menor o igual que la unidad y únicamente los valores propios que corresponden a bloques de Jordan de tamaño unidad tienen módulo 1, el algoritmo SSP y su posición nula de equilibrio son estables en el sentido de Lyapunov. Si los valores propios de  $\mathbf{A}$  tienen todos módulo estrictamente menor que la unidad, el algoritmo SSP y el punto de equilibrio son estables global y asintóticamente.

Los análisis desarrollados en el presente subapartado y en el subapartado 3.6.1

anterior demuestran que la condición de pertenecer al interior del círculo unidad todos los valores propios de  $\mathbf{A}$  es una condición suficiente de estabilidad externa, asintótica y global.

### 3.6.3 Verificación de las condiciones de estabilidad.

En el presente subapartado se determinan los valores de los parámetros  $\Delta t$ ,  $p$  y  $q$  que en cada aplicación del algoritmo SSP generan una matriz  $\mathbf{A}$  cuyos valores propios tienen módulo menor que la unidad lo cual es condición suficiente, según se ha visto en los subapartados 3.6.1 y 3.6.2, de estabilidad externa y global.  $\Delta t$  es el período básico de discretización temporal,  $p$  es el número de términos de la serie de Taylor de  $\Delta t \mathbf{F}$  que se toma en el cálculo aproximado de  $\mathbf{A}$  y  $q$  es el exponente de 2, valores que se introducen en el proceso de cálculo de  $\mathbf{A}$  en (3.21a). En cada aplicación del algoritmo SSP se elige un valor del máximo error  $\varepsilon$  admitido en la norma de la matriz  $\mathbf{A}$  y el algoritmo proporciona unos valores de  $p$  y de  $q$  a partir, respectivamente, de las desigualdades (3.25) y (3.24). No se considera el caso en que  $\mathbf{A}$  se obtiene a partir de la expresión (3.34).

El cálculo aproximado de  $\mathbf{A}$  mediante series de Taylor de  $\mathbf{F}$  se efectúa en la igualdad (3.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \exp(\Delta t \mathbf{F}) &\simeq T_p \left( \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right)^{2^q} = \\ &= \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p!} \left( \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right)^p \right]^{2^q} \end{aligned}$$

La expresión anterior permite analizar la influencia de  $\Delta t$ ,  $p$  y  $q$  en el cálculo de  $\mathbf{A}$ .

Se muestra en primer lugar que el valor de  $q$  no altera las condiciones de estabilidad. En efecto, al elevar a la  $m$  -ésima potencia (siendo  $m = 2^q$ ) la matriz

$T_p \left( \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \right)$ , sus valores propios resultan a su vez elevados a dicha potencia y no se altera la relación entre su módulo y la unidad, es decir, si los valores propios de  $T_p \left( \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \right)$  tienen módulo menor que 1, lo tienen también los de  $T_p \left( \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \right)^{2^q}$ . Análoga afirmación puede hacerse si el módulo es mayor que la unidad. Puesto que la condición de estabilidad del algoritmo SSP depende únicamente de que los valores propios de  $\mathbf{A}$  tengan módulo menor que la unidad puede afirmarse que  $q$  no tiene influencia en la estabilidad. Consecuentemente, la estabilidad del algoritmo SSP depende exclusivamente de los valores de  $\Delta t$  y de  $p$ .

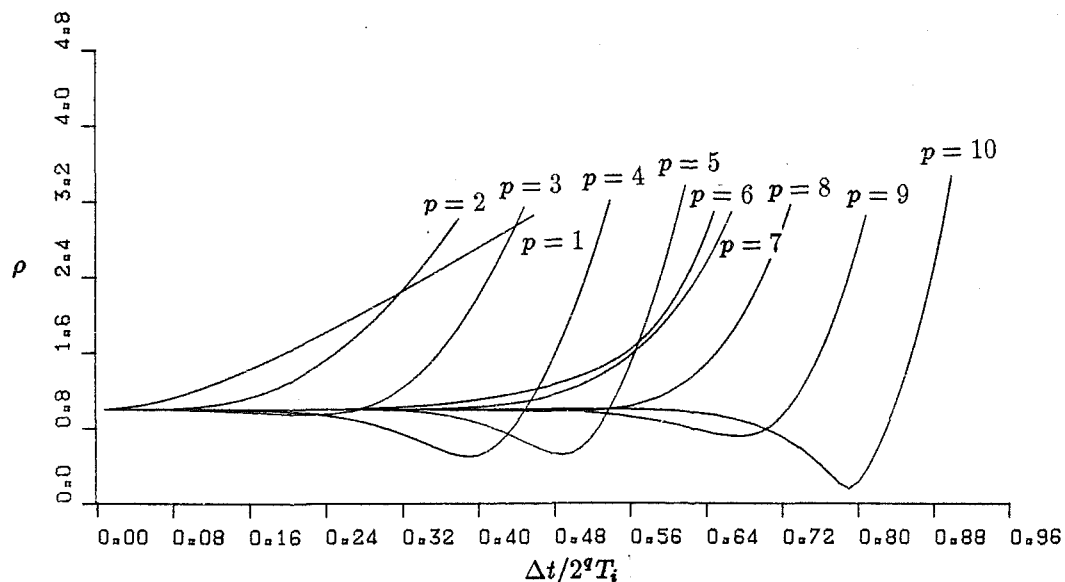
Para analizar la influencia de  $\Delta t$  y de  $p$  en la estabilidad es preciso determinar, en función de las características del sistema contenidas en sus matrices de masa  $\mathbf{M}$ , amortiguamiento  $\mathbf{C}$  y rigidez  $\mathbf{K}$ , los valores de dichos parámetros que generan una matriz  $\mathbf{A}$  cuyos valores propios tienen módulo estrictamente menor que la unidad. Dichos valores de  $\Delta t$  y  $p$  definen un algoritmo SSP estable de forma externa, asintótica y global. Dicho estudio se desarrolla en primer lugar para un sistema sin amortiguamiento.

En un sistema no amortiguado el cambio a coordenadas modales conduce a un sistema de ecuaciones desacopladas y, si se incluyen en el cálculo todos los modos propios (es decir  $r = n$ ), el estudio de las ecuaciones del movimiento (3.1) es equivalente al de (3.41) o (3.42). Cuando es  $\nu_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), es decir  $\mathbf{C}^* = \mathbf{0}$ , la matriz del sistema en coordenadas modales de un modo propio  $i$ ,  $\mathbf{F}_i^*$ , responde según (3.42b) a la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_i^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Los valores propios de  $\mathbf{F}_i^*$  son  $\pm j\omega_i$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) y los de  $\mathbf{A}_i^*$  son  $\exp(\pm j\omega_i \Delta t)$  de módulo unidad, lo que garantiza la estabilidad según Lyapunov en el modo  $i$  si la matriz  $\mathbf{A}_i^*$  se calcula exactamente. Si  $\mathbf{A}_i^*$  se calcula truncando la serie de Taylor correspondiente mediante una expresión similar a (3.29) sustituyendo en ella  $\mathbf{F}$  por  $\mathbf{F}_i^*$ , los valores propios de  $\mathbf{A}_i^*$  ya no tienen exactamente módulo unidad y es preciso considerar la influencia de  $p$  y de  $\Delta t$  tal como se ha indicado anteriormente.

En las figuras 3.4a, 3.4b y 3.4c se representa la variación del módulo máximo de los valores propios de la matriz  $A_i^*$  (ordenada  $\rho$ ) con respecto a  $\Delta t/(T_i 2^q)$  (siendo  $T_i = 2\pi/\omega_i$  el período natural de vibración del modo  $i$ ) para diferentes valores del número de términos  $p$ .



**Figura 3.4a** Módulo máximo de los valores propios de  $A_i^*$  al tomar un número  $p$  de términos de la serie de Taylor. Valores de  $p$  de 1 a 10.

Las figuras 3.4a, 3.4b y 3.4c muestran que para cualquier valor de  $p$  existe un valor de  $\Delta t/(T_i 2^q)$  hasta el cual los valores propios de  $A_i^*$  sin amortiguamiento tienen módulo unidad. En cada aplicación del algoritmo SSP es preciso conocer los períodos  $T_1, \dots, T_n$  de los modos propios de vibración del sistema y, puesto que dichos períodos están ordenados de forma que  $T_1 > \dots > T_n$ , pueden elegirse los valores del incremento de tiempo  $\Delta t$  y del número de términos  $p$  de forma que para el modo superior  $n$  la relación  $\Delta t/(T_n 2^q)$  pertenezca en la curva correspondiente a  $p$  al tramo horizontal izquierdo. Puesto que en muchos casos únicamente un número relativamente pequeño de modos propios influye sensiblemente en la respuesta del sistema es posible determinar los valores

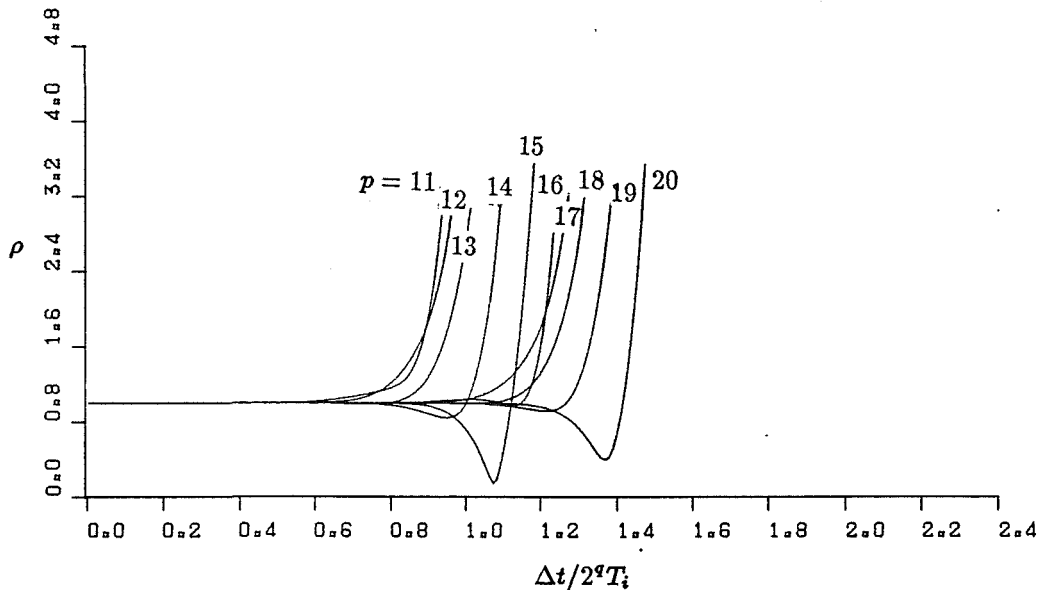


Figura 3.4b Módulo máximo de los valores propios de  $A_i^*$  al tomar un número  $p$  de términos de la serie de Taylor. Valores de  $p$  de 11 a 20.

de  $\Delta t$ , y  $p$  mediante la sustitución de  $T_n$  por  $T_i$  correspondiente al modo más alto  $i$  cuya influencia en la respuesta es aún apreciable. Ello conduce a exigencias menos restrictivas al determinar  $\Delta t$ , y  $p$  en las figuras 3.4 por ser, en general,  $T_i$  mucho mayor que  $T_n$ . Esta forma de proceder suele representar un notable ahorro en el tiempo de cálculo pero presenta un grave riesgo de proporcionar resultados incorrectos pues las respuestas de los modos superiores  $i + 1, \dots, n$  pueden resultar amplificadas artificialmente ya que las relaciones  $\Delta t/(T_l 2^q)$  (siendo  $l > i$ ) pueden corresponder a valores propios de la matriz  $A_i^*$  de módulo mayor que la unidad tal como muestran las figuras 3.4. Las respuestas inestables de dichos modos superiores pueden distorsionar la respuesta global del sistema. Este peligro es especialmente relevante en sistemas con un número elevado de grados de libertad.

Si se trabaja en coordenadas modales y se considera únicamente un número  $r$  de modos propios en el cálculo, los valores de  $\Delta t$  y  $p$  se obtienen de las figuras 3.4

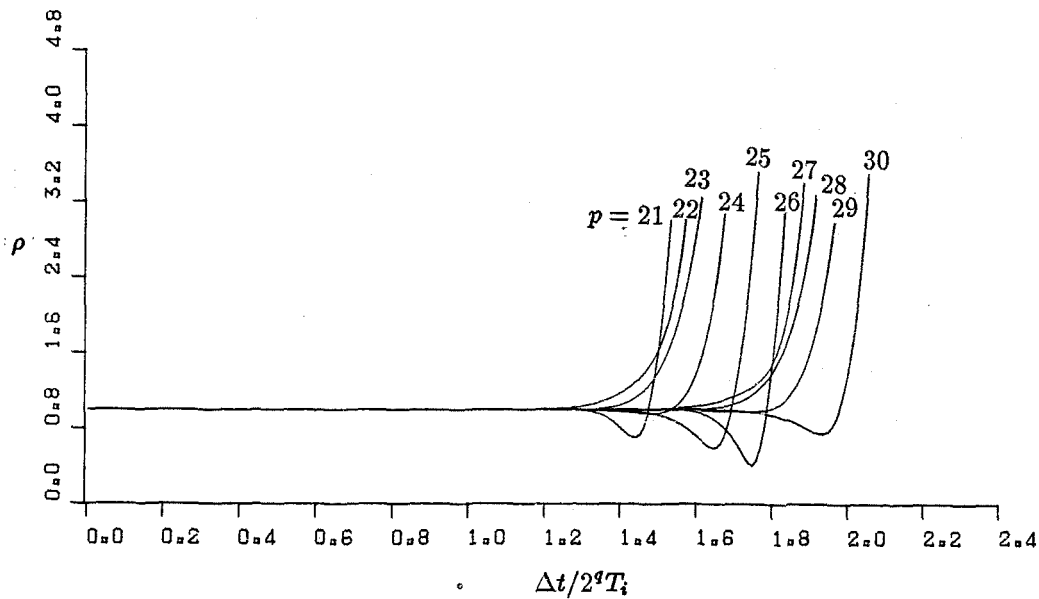


Figura 3.4c Módulo máximo de los valores propios de  $A_i^*$  al tomar un número  $p$  de términos de la serie de Taylor. Valores de  $p$  de 21 a 30.

utilizando  $T_i = T_r$ , sin que exista en este caso amplificación artificial de los modos superiores puesto que éstos ya no intervienen en el cálculo.

Si en el modo  $i$  existe una relación de amortiguamiento  $\nu_i$  no nula, la matriz  $F_i^*$  está definida en la igualdad (3.42b) y sus valores propios se muestran en (3.43a) y (3.43b), siendo los valores propios de  $A_i^* = \exp(F_i^*)$  iguales a  $\exp[-\omega_i(\nu_i \pm j\sqrt{1 - \nu_i^2})]$  cuyo módulo  $|\exp(-\omega_i \nu_i)|$  es menor que la unidad. Consecuentemente la existencia de amortiguamiento en el modo  $i$  contribuye a la estabilidad de forma que, si en un modo no amortiguado se tiene estabilidad según Lyapunov, en un modo de las mismas características con un amortiguamiento no nulo se tiene estabilidad externa y global. Generalizando esta propiedad al caso en que la matriz  $A_i^*$  se calcula de forma aproximada, las figuras 3.4 son útiles para analizar la estabilidad en cualquier sistema desacoplable en coordenadas modales. Generalizando para un sistema con matriz de amortiguamiento  $C$  cualquiera, las figuras 3.4 son aplicables al análisis de la estabilidad

de un sistema arbitrario formulado en (3.11). Para obtener los valores de  $\Delta t$  y  $p$  que generan sobre un sistema amortiguado un cálculo estable de forma externa y global, se determinan en las figuras 3.4 los valores de dichos parámetros que producen un cálculo estable según Lyapunov en el modo propio superior no amortiguado.

La figura 3.4a muestra que, si se toma  $q = 0$  y  $p > 2$ , la recomendación habitual [1]  $\Delta t/T \leq 0.1$  resulta, en la aplicación del algoritmo SSP, excesivamente restrictiva, lo que puede considerarse como una muestra significativa de la correcta estabilidad inherente al procedimiento.

### 3.6.4 Estabilidad incondicional.

Un algoritmo numérico se dice que es incondicionalmente estable cuando su condición de estabilidad no depende del intervalo de discretización temporal  $\Delta t$  elegido [1]. Se muestra en este subapartado como el algoritmo SSP se comporta como incondicionalmente estable en el sentido que más adelante se precisa.

Considerando un sistema no amortiguado y desacoplado en coordenadas modales, puesto que las condiciones de estabilidad dependen exclusivamente del módulo de los valores propios de  $\mathbf{A}$ , para verificar que el algoritmo SSP es incondicionalmente estable es preciso mostrar que la diferencia entre el módulo de los valores propios de las matrices  $\mathbf{A}_i^*$  determinadas de forma aproximada y su valor exacto 1 puede ser acotada por una expresión que tiende a cero si el número de términos  $p$  aumenta indefinidamente. En dicho caso podrá afirmarse que para cualquier valor de  $\Delta t$  puede hallarse un valor de  $p$  que genera un cálculo estable.

Para obtener el valor de  $\mathbf{A}_i^*$  se determinan en primer lugar las potencias sucesivas de la matriz del modo  $i$  en coordenadas modales  $\mathbf{F}_i^*$  introducida en (3.57). Las potencias de  $\mathbf{F}_i^*$  se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{F}_i^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_i^{*2} = \begin{pmatrix} -\omega_i^2 & 0 \\ 0 & -\omega_i^2 \end{pmatrix} = -\omega_i^2 \mathbf{I}$$



$$\mathbf{F}_i^{*2j+1} = (-1)^j \omega_i^{2j} \mathbf{F}_i^* \quad \mathbf{F}_i^{*2j+1} = (-1)^j \omega_i^{2j} \mathbf{I} \quad (3.57)$$

Los resultados anteriores se sustituyen en la expresión de  $T_p(\Delta t \mathbf{F}_i^*/m)^m$  en (3.29) siendo  $m = 2^q$  para aproximar  $\mathbf{A}_i^*$ . En dicha expresión se elige un número impar  $p$  de términos para que el número de sumandos afectados por  $\mathbf{I}$  y por  $\mathbf{F}_i^*$  sea el mismo. Si  $p = 2s + 1$ , el valor de  $\mathbf{A}_i^*$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^* &= \exp(\Delta t \mathbf{F}_i^*) \simeq \\ &\simeq \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta t \mathbf{F}_i^*}{2^q} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta t \mathbf{F}_i^*}{2^q} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p!} \left( \frac{\Delta t \mathbf{F}_i^*}{2^q} \right)^p \right]^{2^q} = \\ &= \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{\omega_i \Delta t}{2^q} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\omega_i \Delta t}{2^q} \right)^4 + \dots + (-1)^s \frac{1}{(2s)!} \left( \frac{\omega_i \Delta t}{2^q} \right)^{2s} \right] \mathbf{I} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega_i} \left[ \left( \frac{\omega_i \Delta t}{2^q} \right) - \frac{1}{3!} \left( \frac{\omega_i \Delta t}{2^q} \right)^3 + \dots + (-1)^s \frac{1}{(2s+1)!} \left( \frac{\omega_i \Delta t}{2^q} \right)^{2s+1} \right] \mathbf{F}_i^* \right\}^{2^q} \quad (3.58) \end{aligned}$$

En la expresión (3.58) los coeficientes que multiplican a  $\mathbf{I}$  y a  $\mathbf{F}_i^*$  son sumas parciales de las series alternadas que definen  $\cos(\omega_i \Delta t / 2^q)$  y  $\sin(\omega_i \Delta t / 2^q)$  y, consecuentemente, el valor absoluto del error cometido al truncar dichas series es menor o igual que el primer término despreciado. Llamando  $\varepsilon_{lj}$  al error cometido en el término  $a_{lj}$  de  $\mathbf{A}_i^*$  ( $1 \leq l, j \leq 2$ ) y tomando por sencillez  $q = 0$  en (3.58), se obtienen las siguientes acotaciones:

$$|\varepsilon_{11}| \leq \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+2}}{(2s+2)!} \quad |\varepsilon_{12}| \leq \frac{1}{\omega_i} \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+3}}{(2s+3)!} \quad (3.59a)$$

$$|\varepsilon_{21}| \leq \omega_i \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+3}}{(2s+3)!} \quad |\varepsilon_{22}| \leq \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+2}}{(2s+2)!} \quad (3.59b)$$

Los valores propios de  $\mathbf{A}_i^*$  son:

$$\frac{1}{2} \left( \text{tr } \mathbf{A}_i^* \pm j \sqrt{4 \det \mathbf{A}_i^* - (\text{tr } \mathbf{A}_i^*)^2} \right) \quad (3.60)$$

El módulo al cuadrado de los valores propios de  $\mathbf{A}_i^*$  es  $\det(\mathbf{A}_i^*)$  y, conociendo los valores exactos de  $a_{11}$  y  $a_{22}$ :  $\cos(\omega_i \Delta t)$  y de  $a_{12}$  y  $a_{21}$ :  $(1/\omega_i) \sin(\omega_i \Delta t)$ , puede asegurarse que el valor absoluto del error cometido en la evaluación de  $\det(\mathbf{A}_i^*)$  está acotado superiormente por el siguiente valor:

$$\begin{aligned} & 2 \cos(\omega_i \Delta t) \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+2}}{(2s+2)!} + 2 \sin(\omega_i \Delta t) \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+3}}{(2s+3)!} + \\ & + \left( \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+2}}{(2s+2)!} \right)^2 + \left( \frac{(\omega_i \Delta t)^{2s+3}}{(2s+3)!} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

El valor anterior tiende a cero al hacer crecer indefinidamente  $p$  ( $p = 2s + 1$ ) para cualquier valor de  $\Delta t$  y ello justifica que, independientemente de  $\Delta t$ , puede tomarse un número  $p$  de términos de la serie de Taylor de forma que el error cometido en el módulo de los valores propios sea menor que cualquier valor prefijado. El algoritmo SSP es, en este sentido, incondicionalmente estable.

La figura 3.4c corrobora las conclusiones anteriores puesto que, al aumentar el valor del número  $p$  de términos considerados en el cálculo de  $\mathbf{A}_i^*$ , las curvas que representan el módulo máximo de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}_i^*$  tienden a aproximarse a una línea horizontal situada a altura unidad.

### 3.7 PRECISION DEL ALGORITMO SSP.

Un algoritmo numérico es preciso si puede conseguirse que su respuesta se aproxime tanto como se desee a una respuesta exacta conocida. Un parámetro que incide particularmente en la precisión de un procedimiento en diferencias finitas es el período básico de discretización  $\Delta t$  considerado en el cálculo y, utilizando este parámetro como baremo de comparación, puede afirmarse que el algoritmo SSP es muy preciso por ser capaz de proporcionar resultados suficientemente aproximados sin necesidad de considerar un  $\Delta t$  excesivamente pequeño. Puesto que la existencia de un amortiguamiento y de unas fuerzas de control no es fuente intrínseca de errores, en este apartado las características de precisión se estudian en ausencia de control [1] sobre un sistema sin amortiguamiento y desacoplado en coordenadas modales, tomándose en consideración en el análisis un modo propio genérico  $i$ .

Las únicas fuentes de error intrínsecas al procedimiento SSP se centran en las inexactitudes cometidas en la evaluación necesariamente aproximada de la matriz del sistema en tiempo discreto  $\mathbf{A}$  en las expresiones (3.29) o (3.34) y en los errores provenientes de la inevitable arbitrariedad de cualquier criterio de interpolación de la excitación en el interior del intervalo básico de discretización. En los subapartados 3.7.1 y 3.7.2 se analiza, respectivamente, la influencia de ambas fuentes de error.

En el subapartado 3.7.1 se estudia la respuesta del sistema (un modo propio  $i$  no amortiguado) a un desplazamiento inicial unidad en ausencia de de excitación para que el error se centre únicamente en el cálculo de la matriz  $\mathbf{A}$ . Tomando como criterio de error [1] la diferencia entre el desplazamiento proporcionado por el algoritmo SSP al cabo de un ciclo completo y su valor exacto 1, se dispone de un índice de medida de la imprecisión introducida en la respuesta por la evaluación inexacta de  $\mathbf{A}$ .

En el subapartado 3.7.2 se analiza la respuesta del mismo sistema no amortiguado y con un solo grado de libertad a una excitación sinusoidal. Conociendo, a partir del subapartado 3.7.1, la influencia en la respuesta de la inexactitud de  $\mathbf{A}$ , puede delimitarse la influencia del error cometido en la interpolación de la excitación en (3.6b) o (3.10). Se toma como criterio de error la media cuadrática de la diferencia entre la solución numérica proporcionada por el algoritmo SSP y la analítica exacta a lo largo de un

intervalo de tiempo de duración fija.

En el subapartado 3.7.3 se muestran los valores de los parámetros  $\Delta t$ ,  $p$  y  $q$  que, en cada aplicación del algoritmo SSP, proporcionan un cálculo preciso. Se utilizan los resultados obtenidos en los subapartados anteriores 3.7.1 y 3.7.2.

En el subapartado 3.7.4 se compara (a igualdad de  $\Delta t$ ) la precisión del procedimiento SSP con la de los métodos de las diferencias centrales, de Newmark y de Wilson. Se consideran dos situaciones diferentes: desplazamiento inicial unidad (sin excitación) y excitación sinusoidal, tomándose en ambos casos como criterio de error la media cuadrática definida en 3.7.2.

### 3.7.1 Error debido al cálculo aproximado de la matriz $A$ .

Puesto que la matriz del sistema en tiempo discreto  $A$  se calcula en (3.11a) mediante la función exponencial de otra matriz, su evaluación numérica debe hacerse necesariamente por procedimientos aproximados que introducen ineludiblemente una imprecisión en la respuesta. Para poder separar este fenómeno de la otra fuente de errores intrínsecos al procedimiento (interpolación de la excitación dentro de cada intervalo de discretización) se considera una situación sin excitación continuada en la que se estudia la evolución libre del sistema a partir de unas condiciones iniciales impuestas. Es habitual [1] estudiar las características de precisión sobre un sistema no amortiguado y, puesto que un sistema sin amortiguamiento es siempre desacoplable en coordenadas modales, puede reducirse su análisis al de sus modos propios independientes. Se considera la evolución libre de un modo propio  $i$  no amortiguado (descrito por la ecuación (3.42) cuando  $\nu_i = 0$ ) a partir de un desplazamiento inicial unidad, comparándose la respuesta proporcionada por el algoritmo SSP con la respuesta analítica exacta conocida.

En el instante inicial  $t_0$  es  $\eta_i(t_0) = 1$  y  $\dot{\eta}_i(t_0) = 0$  y la respuesta exacta en desplazamientos es:

$$\eta_i(t) = \cos[\omega_i(t - t_0)] \quad (3.62)$$

Una medida adecuada del error puede ser [1] la diferencia entre la amplitud predicha al cabo de un ciclo completo (es decir,  $t = t_0 + 2\pi\omega_i = t_0 + T_i$ ) y su valor exacto hallado en (3.62). Para un cálculo correcto se divide el período  $T_i$  en un número exacto de partes y se toma cada parte igual al intervalo de discretización  $\Delta t$  utilizado en el algoritmo SSP; de esta forma, si  $k_i = T_i/\Delta t$  es el número de partes en que resulta dividido  $T_i$ , la diferencia entre el desplazamiento calculado al cabo de un ciclo completo y el valor exacto 1 tiene el siguiente valor:

$$1 - \eta_i(k_i\Delta t) \tag{3.63}$$

donde  $\eta_i(k_i\Delta t)$  es la respuesta proporcionada por el procedimiento SSP a partir de la expresión (3.45).

En las figuras 3.5a a 3.5n se representan, para diferentes valores de  $p$  y  $q$ , en abcisas el cociente  $\Delta t/T_i$  y en ordenadas el porcentaje de error en la amplitud (PORT. AMPL.) después de un ciclo completo, es decir, el valor:

$$100[1 - \eta_i(k_i\Delta t)] \tag{3.63a}$$

En dichas figuras se han considerado únicamente números impares de términos ( $p = 1, 3, 5, 7$  y  $9$ ) para conseguir una mayor homogeneidad en la evaluación numérica de la matriz  $\mathbf{A}_i^*$  en la expresión (3.58) puesto que en dicho caso el número de sumandos que afectan a las matrices  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{F}_i^*$  es el mismo. Analizando las sumas que multiplican a dichas matrices se observa que, por ser ambas alternadas y siendo  $p = 2s + 1$ , si  $s$  es un número impar el error cometido es por defecto y si  $s$  es par es por exceso; ello implica que los términos de la matriz  $\mathbf{A}_i^*$  son, respectivamente, mayores o menores que su valor exacto. Este hecho influye significativamente en el valor del error dado en (3.63a) puesto que, particularizando la expresión (3.55) para  $\mathbf{x} = \mathbf{z}_i^*$ ,  $k = k_j$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_i^*$  y  $\mathbf{x}(0) = (1 \ 0)^t$ , se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \eta_i(k_j \Delta t) \\ \dot{\eta}_i(k_j \Delta t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_i^{*k_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

La ecuación anterior muestra que si la matriz  $\mathbf{A}_i^*$  es mayor (término a término) que su valor exacto el error en la evaluación de  $\eta_i(k \Delta t)$  es por exceso. Análogo resultado en el caso contrario. Estas afirmaciones se corroboran en todas las figuras 3.5 pues cuando  $p$  toma los valores 3 y 7 (y  $s$  vale, respectivamente, 1 y 3) los errores son por defecto y cuando  $p$  es 1, 5 y 9, (y  $s$  es, respectivamente, 0, 2 y 4) el error es por exceso.

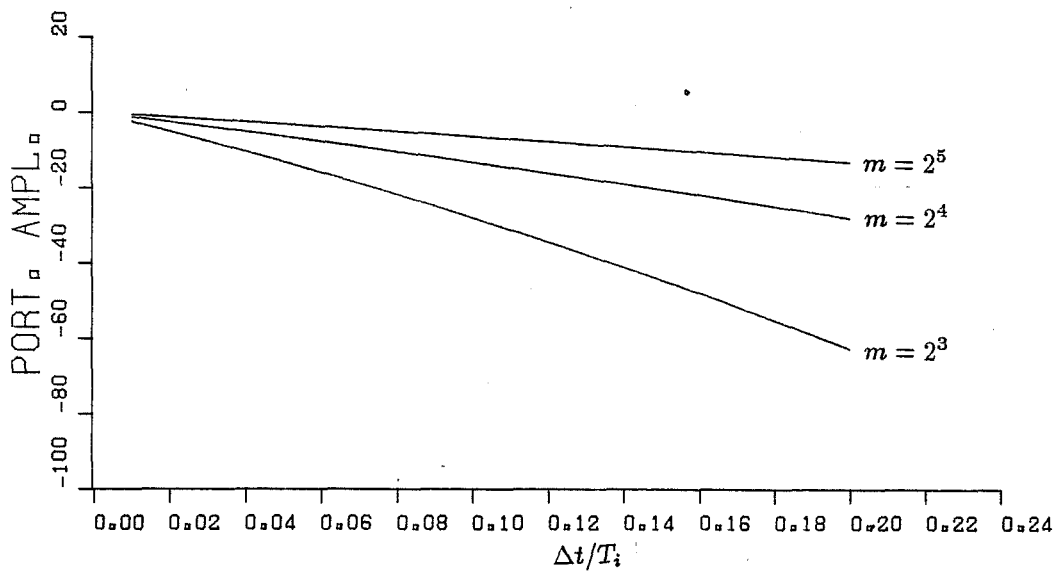


Figura 3.5a Error en la amplitud si  $p = 1$ .

Las figuras 3.5 muestran que es posible elegir los parámetros  $\Delta t$ ,  $p$  y  $q$  de forma que el cálculo sea tan preciso como se desee.

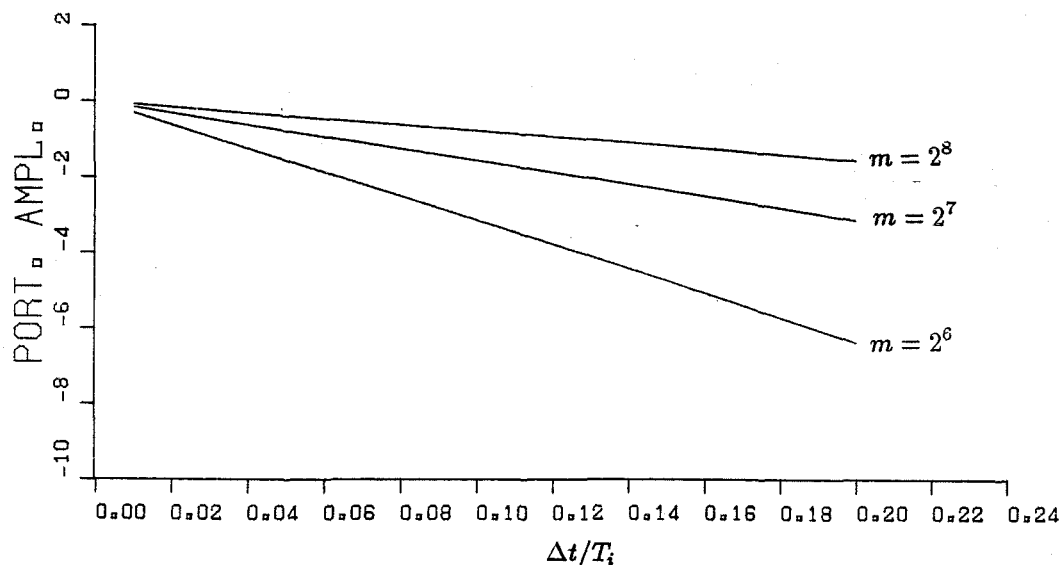


Figura 3.5b Error en la amplitud si  $p = 1$ .

### 3.7.2 Error debido a la interpolación de la excitación.

Para poder resolver en el desarrollo del algoritmo SSP la integral contenida en la expresión (3.5) es preciso efectuar alguna hipótesis sobre la evolución del vector de excitación en el interior del intervalo limitado por dos instantes consecutivos  $k \Delta t$  y  $(k + 1) \Delta t$ . En la hipótesis elegida se ha adoptado un criterio de interpolación lineal (descrita en (3.10)) y ello introduce inevitablemente en el cálculo una inexactitud que se evalúa en el presente subapartado.

Se considera un sistema con un grado de libertad y frecuencia natural de vibración  $\omega_i = 1 \text{ rad/s}$  sometido a un acelerograma sinusoidal de amplitud igual a la aceleración de la gravedad  $g$ . Puesto que es posible determinar analíticamente la respuesta a dicha excitación, se adopta como criterio de error  $e_i$  la media cuadrática de la diferencia entre la solución numérica y la analítica a lo largo de un intervalo de 25 segundos.

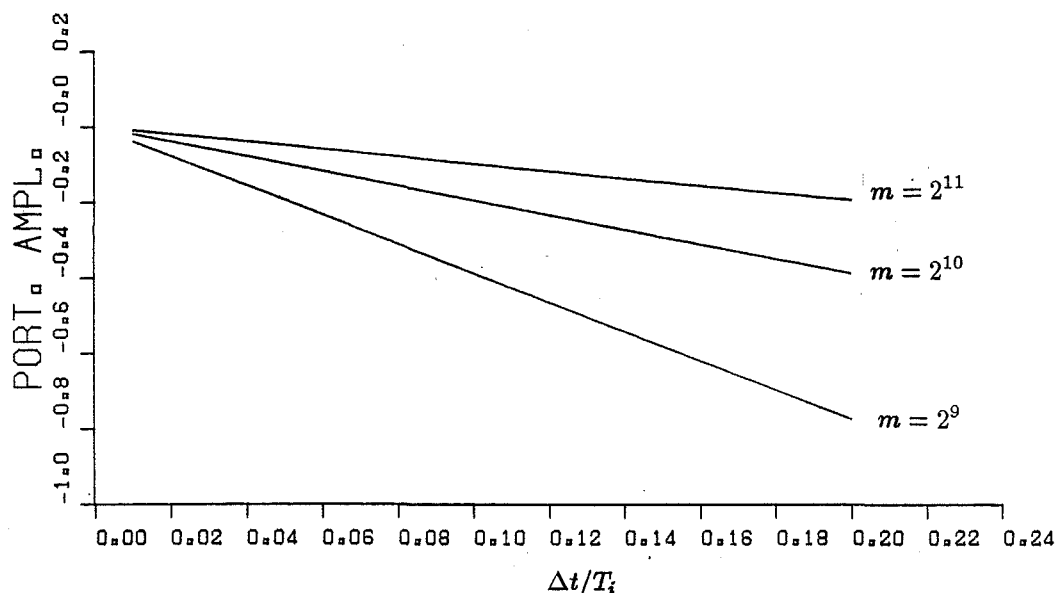


Figura 3.5c Error en la amplitud si  $p = 1$ .

Para poder garantizar que el error que aparece en la respuesta se debe únicamente a la inexactitud de la interpolación de la excitación y no al cálculo aproximado de la matriz  $\mathbf{A}$ , se eligen en la aplicación del algoritmo SSP los valores de los parámetros  $p$  y  $q$  de forma que en las figuras 3.5 resulte un error inapreciable. Tomando  $p = 9$  y  $q = 0$  se observa en la figura 3.5n que el error introducido en la respuesta por el cálculo aproximado de  $\mathbf{A}$  es muy pequeño dentro del rango de valores del cociente  $\Delta t/T$  allí considerados.

En la figura 3.6 se representa la variación de la media cuadrática de error  $e_i$  en función del cociente entre el intervalo básico de discretización  $\Delta t$  y el período  $T_s$  (en segundos) de la excitación.

La figura 3.6 muestra el aumento del error al crecer la relación  $\Delta t/T_s$ ; este hecho se interpreta por la menor exactitud de la aproximación de la curva senoide por tramos rectos en la interpolación descrita en (3.10) si disminuye el número de subdivisiones de



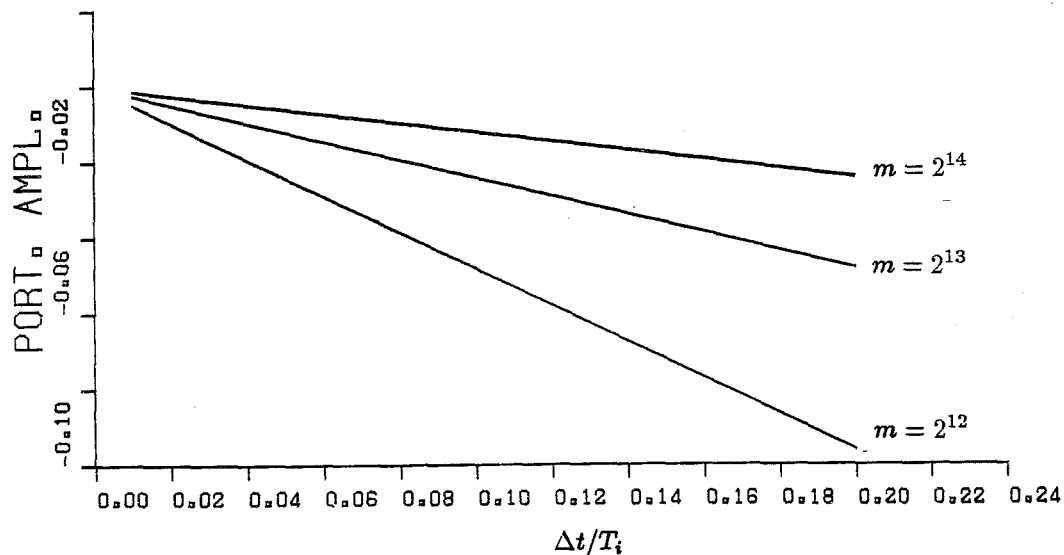


Figura 3.5d Error en la amplitud si  $p = 1$ .

cada ciclo.

Si se dibujan curvas semejantes a la representada en la figura 3.6 para otros valores de  $p$  y  $q$ , puede resultar un error  $e_i$  mayor (si los valores de  $p$  y  $q$  producen un error apreciable en la matriz  $A$ ) pero dicho error ya no es totalmente atribuible a la inexactitud de la interpolación de la excitación; por el contrario, si los valores de  $p$  y  $q$  permiten un cálculo aún más preciso de  $A$  que  $p = 9$  y  $q = 0$ , al no modificarse por dicho motivo la bondad de la interpolación de la excitación en cada intervalo de muestreo, la media cuadrática de error  $e_i$  no es inferior a la resultante de la figura 3.6. En consecuencia, la curva representada en la figura 3.6 define un criterio de medida del error introducido en la respuesta por la inexactitud de la interpolación lineal del vector de excitación en el interior de cada intervalo de discretización, aunque los valores de  $p$  y  $q$  considerados en el cálculo no coincidan con los indicados en dicha figura.

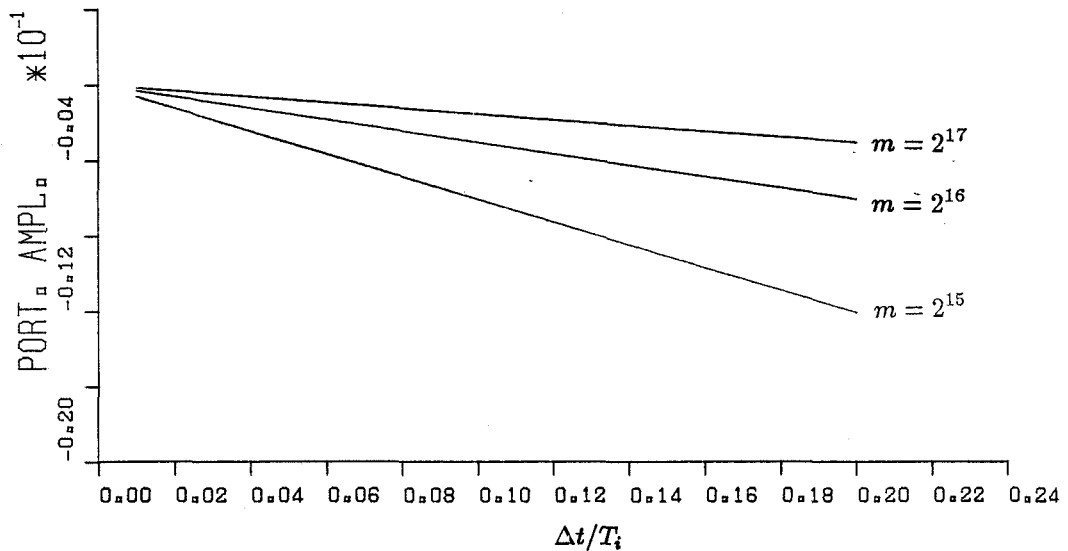


Figura 3.5e Error en la amplitud si  $p = 1$ .

### 3.7.3 Verificación de las condiciones de precisión.

En cada aplicación del algoritmo SSP un cálculo estable no implica necesariamente un cálculo preciso. Consecuentemente, después de verificar que el cumplimiento de las condiciones de estabilidad garantiza la ausencia de amplificación artificial de los modos superiores es necesario comprobar que, para los modos cuya influencia en la respuesta es apreciable, el cálculo es preciso.

Para los valores de los parámetros  $\Delta t$ ,  $p$  y  $q$  utilizados en el cálculo deben hacerse dos verificaciones independientes: en la figura 3.6 respecto del error producido por la interpolación lineal de la excitación y en las figuras 3.5 respecto del error en el cálculo aproximado de  $\mathbf{A}$  a partir de (3.29).

En la figura 3.6 es necesario comprobar que para el valor de la relación  $\Delta t/T_0$  que se considera en el cálculo, la media cuadrática de error  $e_i$  es pequeña. Se tiene de

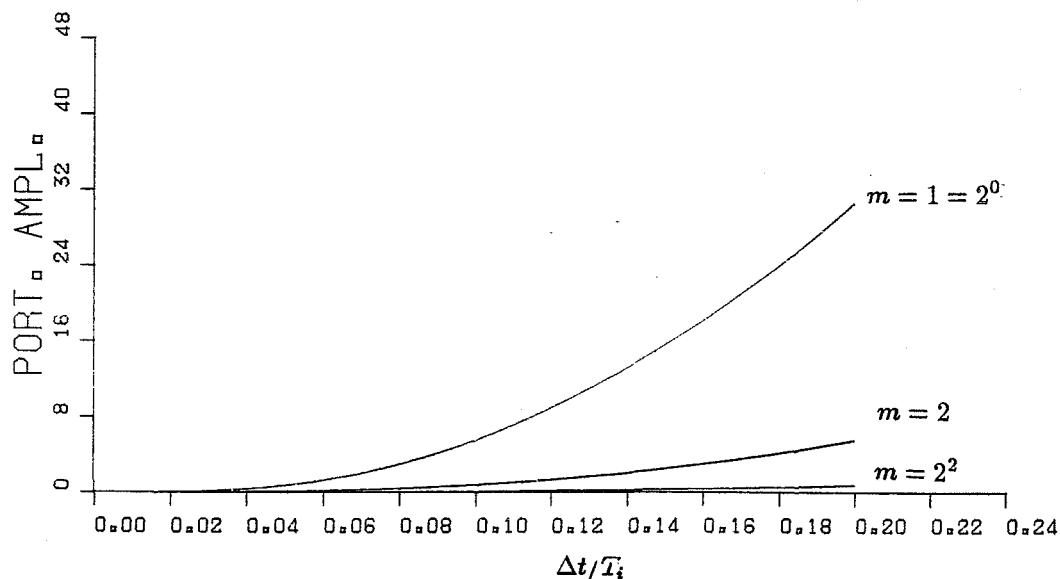


Figura 3.5f Error en la amplitud si  $p = 3$ .

esta forma una medida del error cometido al interpolar linealmente la excitación. Si la excitación dinámica no es sinusoidal el valor del período  $T_s$  puede obtenerse a partir de la transformación de Fourier que muestra el contenido en frecuencias de la excitación. Está del lado de la seguridad considerar  $T_s$  igual al menor período que corresponde a un contenido en frecuencias importante.

En todas las figuras 3.5 un valor más grande de  $\Delta t/T_i$  corresponde a un error mayor y, puesto que los períodos naturales de vibración están ordenados de forma que  $T_1 > T_2 > T_3 > \dots$ , la situación más crítica es siempre la del modo propio de orden más alto que se incluye en el cálculo. Por tanto, es suficiente verificar en la figura 3.5 correspondiente a los valores de  $p$  y  $q$  utilizados en el cálculo que el porcentaje de error en la amplitud es prácticamente nulo para el valor de  $\Delta t/T_i$  correspondiente al modo superior que se considera. El valor de la ordenada produce una estimación del error cometido al aproximar el valor de la matriz  $A$  en (3.29). Al tratarse de errores al cabo de un solo ciclo es conveniente garantizar un error muy pequeño para evitar

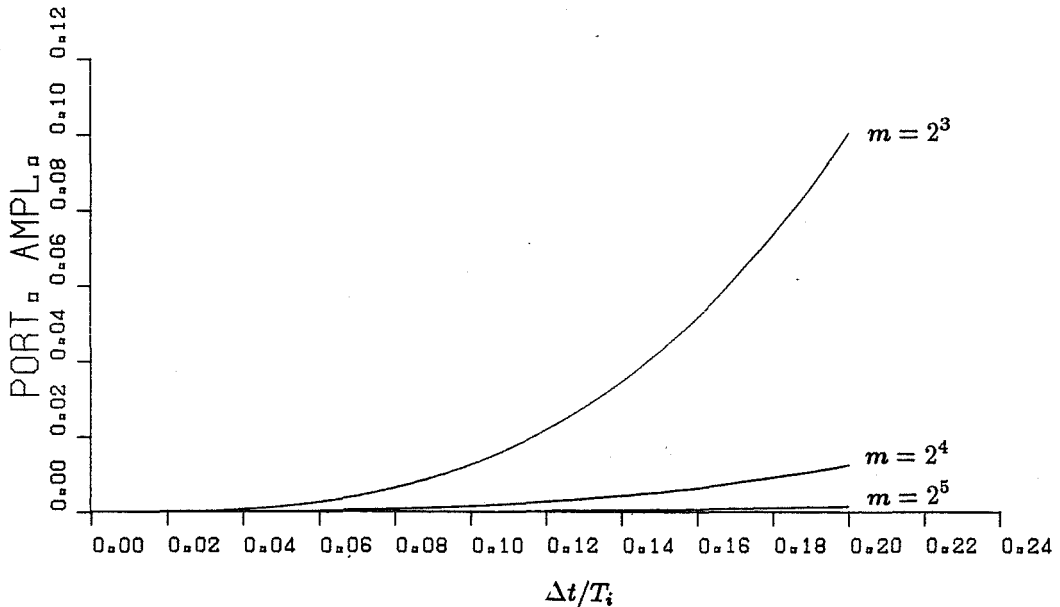


Figura 3.5g Error en la amplitud si  $p = 3$ .

amplificaciones después de varios ciclos.

Si se incluyen en el cálculo todos los modos propios pero únicamente se comprueba que el cálculo es preciso para un modo  $i$ , si el cálculo es estable para todos los modos, la respuesta de los modos de orden superior a  $i$  no resulta amplificada artificialmente y, aunque su cálculo no sea preciso, no distorsiona apreciablemente la respuesta general del sistema. Consecuentemente, si bien es necesario comprobar que el proceso es estable para todos los modos propios incluidos en el cálculo, únicamente es preciso verificar la precisión del cálculo de la matriz  $A$  en el modo  $i$  de orden más alto cuya influencia en la respuesta es apreciable, aunque se incluyan en el cálculo modos de orden superior a  $i$ .

Ambas verificaciones garantizan la obtención de una respuesta precisa.

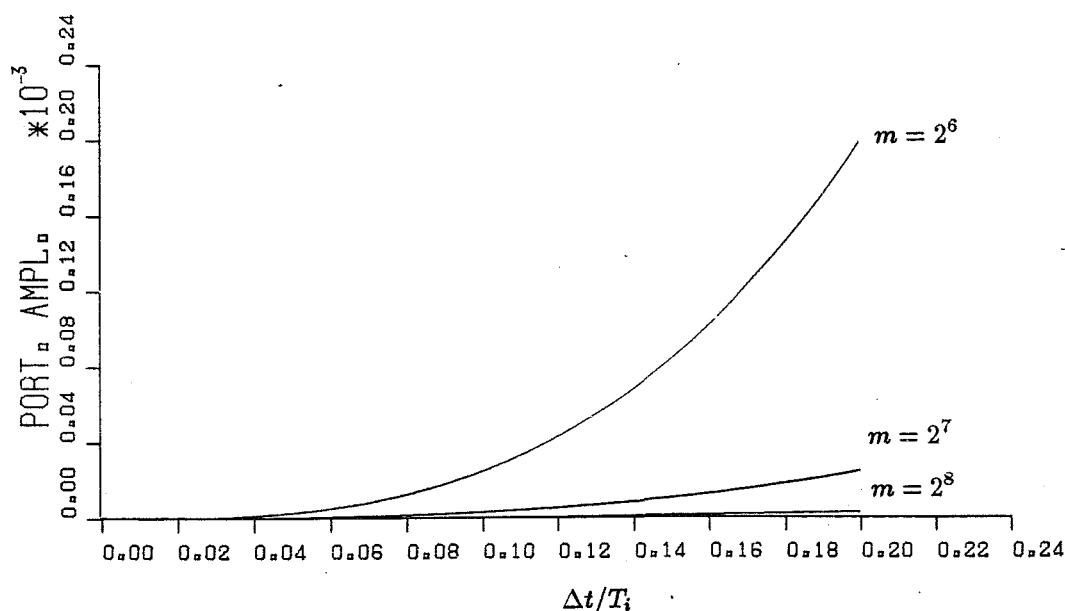


Figura 3.5h Error en la amplitud si  $p = 3$ .

### 3.7.4 Comparación con otros procedimientos.

Se compara en este subapartado la precisión del procedimiento SSP con la del método de las diferencias centrales, el método de Newmark y el de Wilson [14].

Efectuando un paralelismo con respecto al estudio de precisión realizado en los subapartados 3.7.1 y 3.7.2 para el algoritmo SSP, se estudian dos situaciones distintas: evolución libre del sistema a partir de unas condiciones iniciales impuestas y movimiento bajo excitación sinusoidal. En ambos casos se considera un sistema no amortiguado y con un solo grado de libertad, y se elige como criterio de medida del error cometido la media cuadrática  $e_i$  definida en el subapartado 3.7.2.

En la figura 3.7a se compara el error  $e_i$  del procedimiento SSP con el de los métodos citados, cuando el sistema se somete inicialmente a un desplazamiento unidad y no existe después excitación. El error del algoritmo SSP se debe únicamente a la

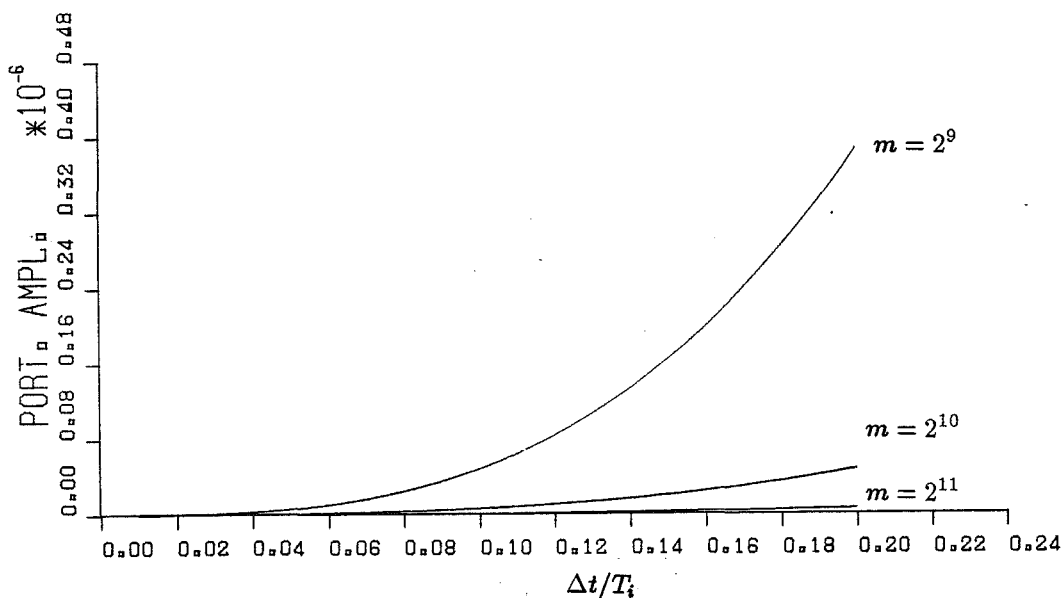


Figura 3.5i Error en la amplitud si  $p = 3$ .

aproximación en el cálculo de la matriz  $A$ . Se toman para su aplicación los valores  $p = 9$  y  $q = 0$  por lo que la curva de error para el SSP es semejante a la representada en la figura 3.5n para idénticos valores de los parámetros  $p$  y  $q$ , aunque con un índice de medida de error diferente.

La figura 3.7a muestra que en ausencia de excitación la precisión del procedimiento SSP es superior a la de los otros algoritmos comparados.

En la figura 3.7b se efectúa la misma comparación que en la figura 3.7a para un sistema no amortiguado y con frecuencia natural de vibración  $\omega_i = 1 \text{ rad/s}$  sometido a una excitación sinusoidal de período  $T_s$  y amplitud igual a  $g$ . Para la aplicación del algoritmo SSP se toman los valores  $p = 9$  y  $q = 0$  por lo que la curva de la figura 3.7b correspondiente al algoritmo SSP es igual a la curva de precisión representada en la figura 3.6.

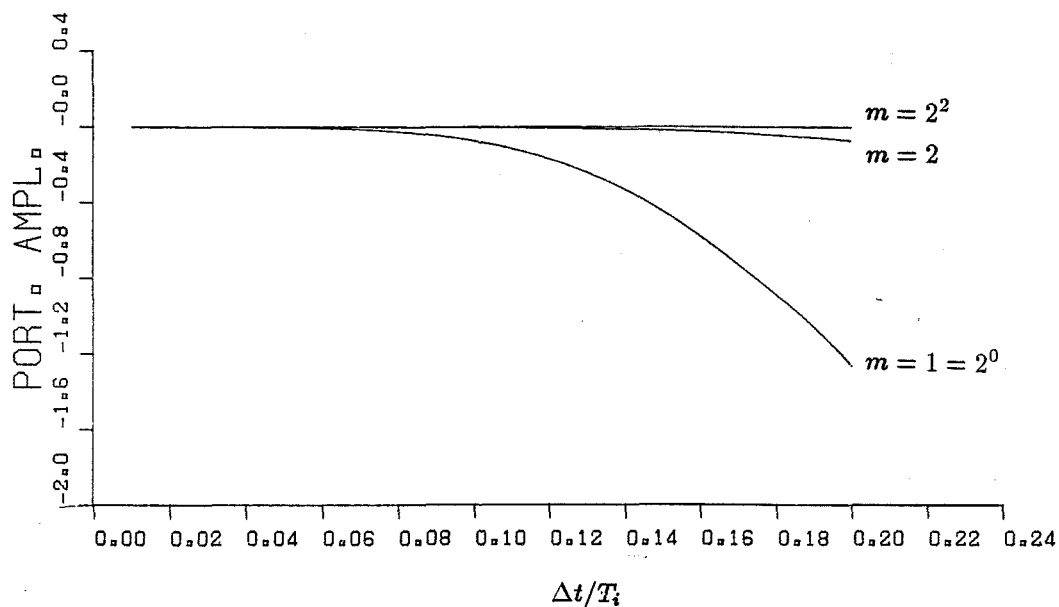


Figura 3.5j Error en la amplitud si  $p = 5$ .

Las curvas de la figura 3.7b muestran que en presencia de excitación la precisión del procedimiento SSP continúa siendo sensiblemente superior a la de los otros procedimientos considerados.

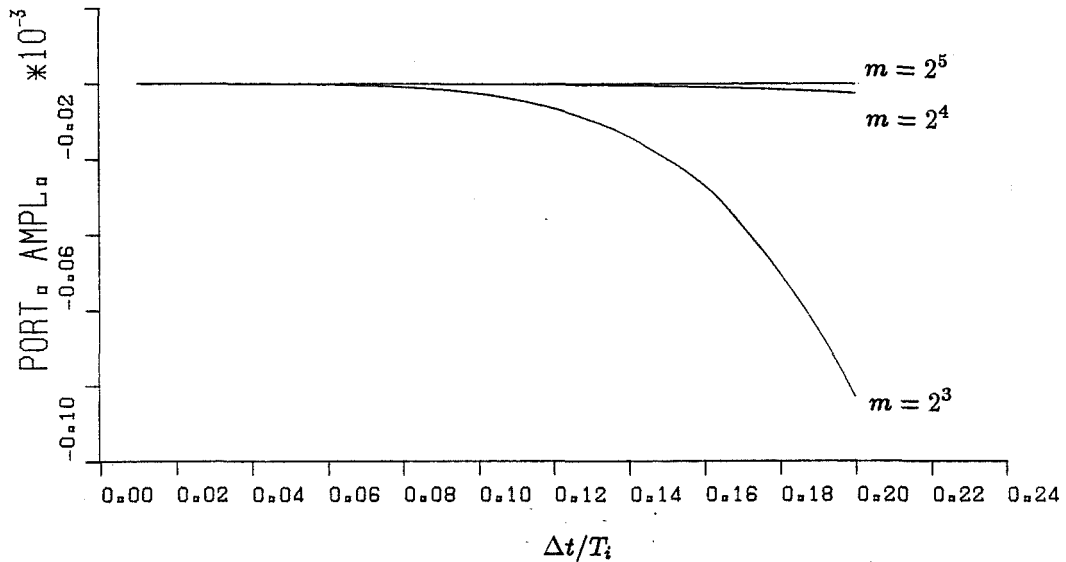


Figura 3.5k Error en la amplitud si  $p = 5$ .

### 3.8 APLICACION A EDIFICIOS. SIN CONTROL.

El algoritmo SSP descrito en el apartado 3.2 es capaz de determinar la respuesta dinámica de cualquier sistema lineal y, consecuentemente, puede ser utilizado para el análisis dinámico de edificios si su comportamiento se representa mediante un modelo discreto lineal.

Si la excitación proviene de un sistema de fuerzas dinámicas el procedimiento SSP se aplica de acuerdo con el desarrollo mostrado en el apartado 3.2. Si la excitación es una aceleración sísmica transmitida por el terreno de cimentación en la aplicación del algoritmo SSP es preciso modificar previamente la expresión (3.1) (cuando  $f_c = 0$ ) de acuerdo con:

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = -Mj a(t) \quad (3.65)$$



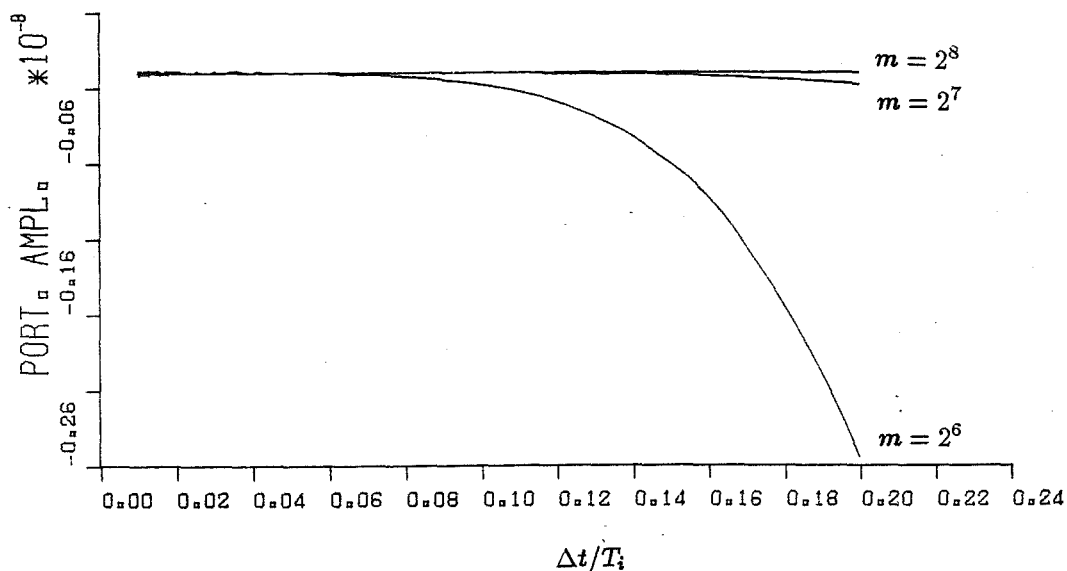


Figura 3.51 Error en la amplitud si  $p = 5$ .

donde  $a(t)$  es la aceleración horizontal del terreno,  $j$  es un vector columna cuyas componentes son 1 o 0 según correspondan a grados de libertad de desplazamiento horizontal o no y los vectores  $d$ ,  $\dot{d}$  y  $\ddot{d}$  contienen los desplazamientos, velocidades y aceleraciones relativos respecto del terreno de los grados de libertad del modelo.

En el subapartado 3.8.1 se describen las simplificaciones que pueden hacerse en el procedimiento SSP cuando dicho algoritmo se utiliza para determinar la respuesta dinámica de edificios. En el subapartado 3.8.2 se estudia, en dicho caso, la reducción del número de operaciones con respecto al valor hallado en 3.4.4 para el caso general.

En el subapartado 3.8.3 se desarrollan ejemplos de cálculo de respuestas dinámicas de edificios sometidos a acelerogramas sísmicos y sinusoidales.

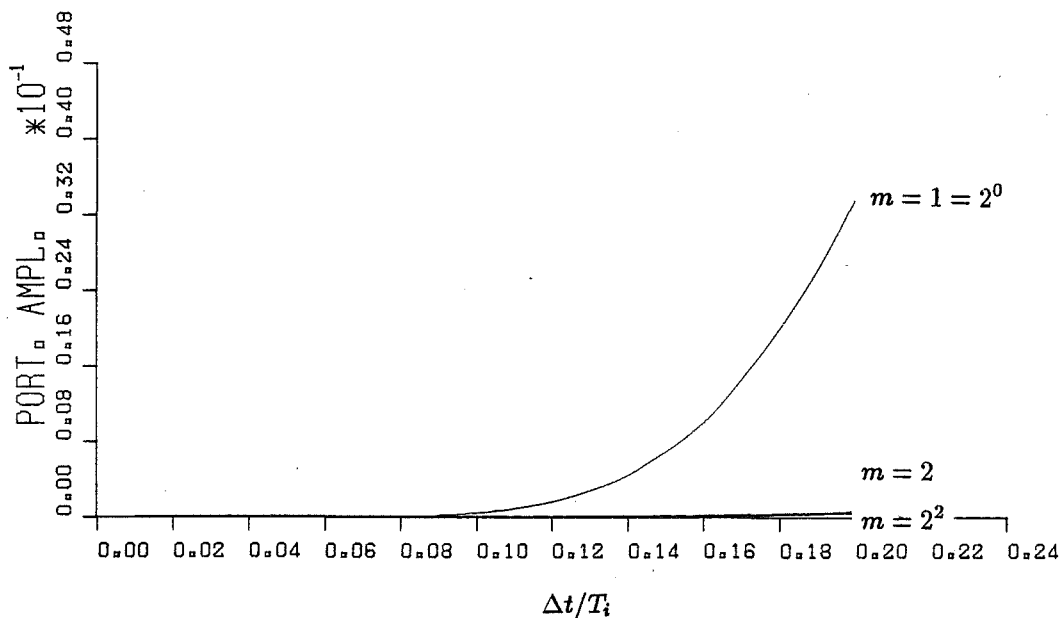


Figura 3.5m Error en la amplitud si  $p = 5$ .

### 3.8.1 Particularización del procedimiento SSP.

El procedimiento SSP formulado en el apartado 3.2 permite hallar la respuesta dinámica de un edificio si su comportamiento se asimila al de un modelo lineal. En el caso de que todos los elementos de la matriz diagonal de masa  $M$  sean iguales y la matriz de amortiguamiento  $C$  [12] se calcule en coordenadas modales como una fracción de la matriz espectral  $\Omega$  pueden introducirse, además, importantes simplificaciones en el proceso general de cálculo descrito en el subapartado 3.4.1.

Se describe en primer lugar la obtención de la matriz de amortiguamiento  $C^*$  en coordenadas modales. Dicha matriz se define mediante la siguiente expresión:

$$C^* = 2N\Omega =$$

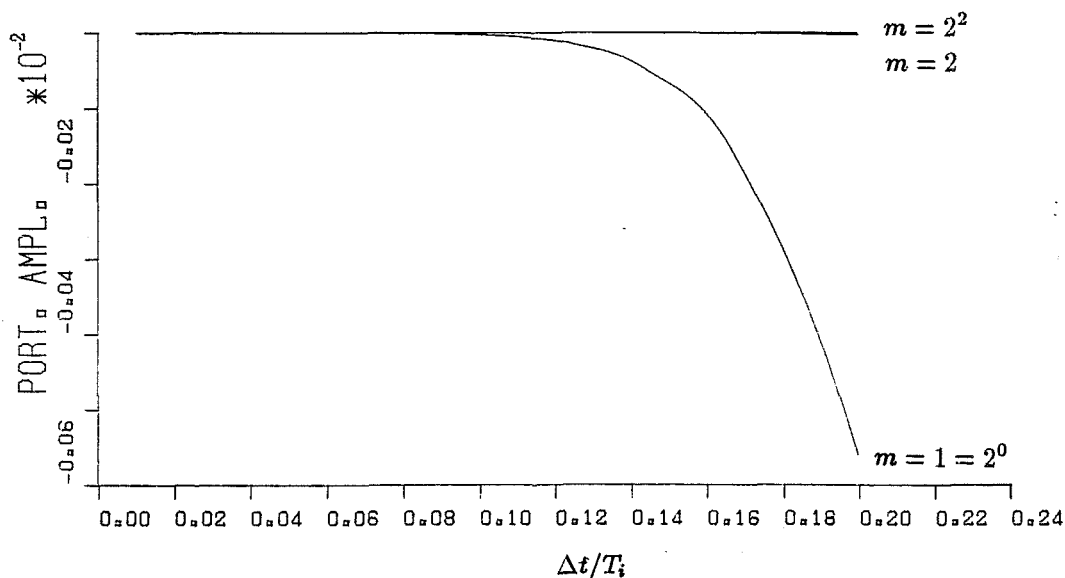


Figura 3.5n Error en la amplitud si  $p = 5$ .

$$= 2 \begin{pmatrix} \nu_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\nu_1\omega_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 2\nu_n\omega_n \end{pmatrix} \quad (3.66a)$$

Los significados de las matrices que intervienen en (3.66a) son los siguientes:

$C^*$  = matriz de amortiguamiento en coordenadas modales.

$N$  = matriz diagonal de las fracciones de amortiguamiento de los modos propios.

$\Omega$  = matriz espectral diagonal de las frecuencias naturales de vibración de los modos propios.

La matriz de amortiguamiento  $C$  en coordenadas generales se obtiene a partir de la matriz en coordenadas modales  $C^*$  mediante el siguiente cambio de base:

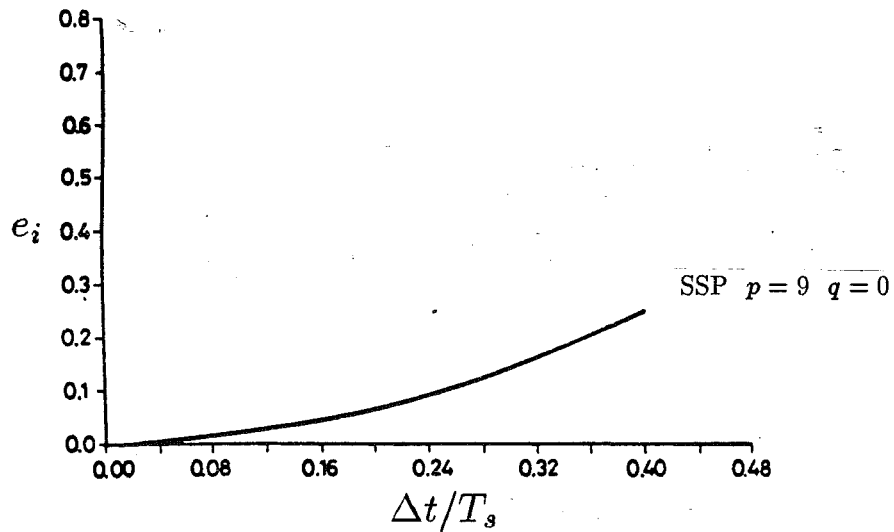


Figura 3.6 Curva de precisión para excitación sinusoidal.

$$C = M\Phi C^* \Phi^t M = 2M\Phi N\Omega\Phi^t M \quad (3.66b)$$

El significado de la matriz  $\Phi$  es:

$\Phi$  = matriz modal normalizada (es decir,  $\Phi^t M \Phi = I = \Phi M \Phi^t$ )

La matriz de rigidez  $K$  en coordenadas modales se expresa mediante la siguiente igualdad:

$$K^* = \Phi^t K \Phi = \Omega^2 \quad (3.67)$$

Se demuestra a continuación que las matrices  $C$  y  $K$  conmutan, es decir,  $CK = KC$ . Se tiene en cuenta que la matriz de masa  $M$  es proporcional a la

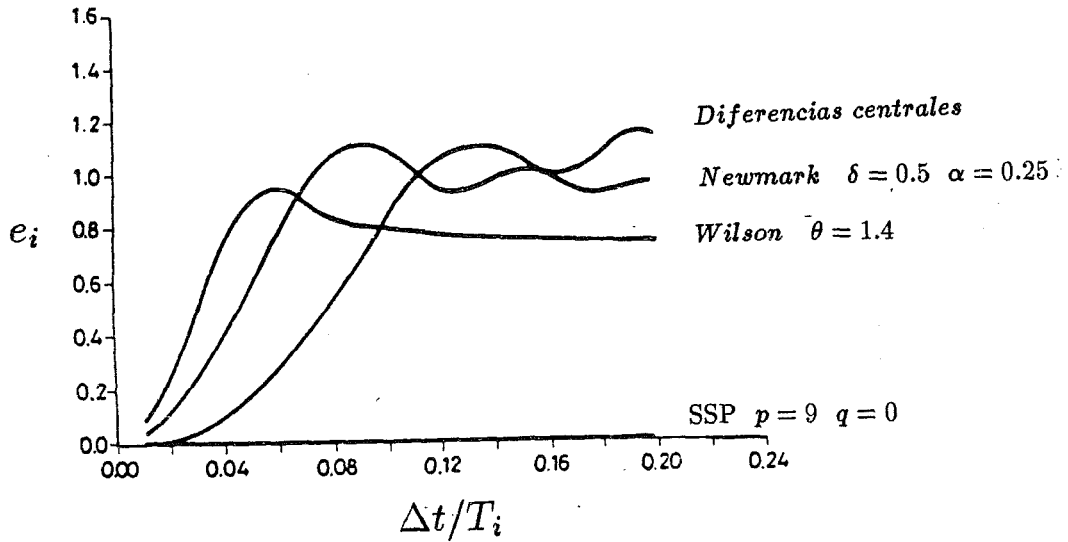


Figura 3.7a Estudio comparado de precisión para vibración libre.

matriz identidad y, consecuentemente, conmuta con cualquier matriz.

$$\begin{aligned}
 KC &= (\Phi^t)^{-1} \Phi^t K \Phi M \Phi^t C \Phi \Phi^{-1} = (\Phi^t)^{-1} K^* M C^* \Phi^{-1} = \\
 &= 2(\Phi^t)^{-1} \Omega^2 M N \Omega \Phi^{-1} = 2(\Phi^t)^{-1} N \Omega M \Omega^2 \Phi^{-1} = \\
 &= (\Phi^t)^{-1} C^* M K^* \Phi^{-1} = (\Phi^t)^{-1} \Phi^t C \Phi M \Phi^t K \Phi \Phi^{-1} = CK
 \end{aligned}$$

Se demuestra análogamente que  $K^{-1}C = CK^{-1}$  teniendo en cuenta que  $K^{-1} = M\Phi^t(\Omega^2)^{-1}M\Phi$ .

En resumen, se han obtenido los siguientes resultados:

$$MX = XM \quad M^{-1}X = XM^{-1} \quad (\forall X \in M_n(\mathbb{R})) \quad (3.68a)$$

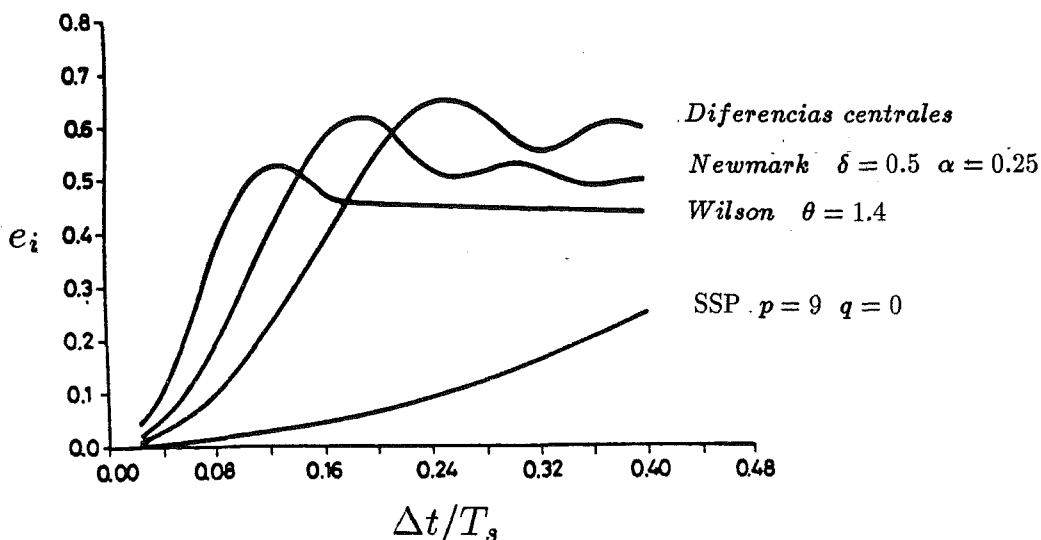


Figura 3.7b Estudio comparado de precisión para excitación sinusoidal.

$$K C = C K \quad K^{-1} C = C K^{-1} \quad (3.68b)$$

A partir de las igualdades contenidas en (3.68b) se deduce que cualquier potencia de  $K$  (o de  $K^{-1}$ ) conmuta con cualquier potencia de  $C$ , es decir:

$$K^a C^b = C^b K^a \quad (K^{-1})^a C^b = C^b (K^{-1})^a \quad \forall a, b \in \mathbf{N} \quad (3.68c)$$

Las expresiones (3.68) permiten simplificar las operaciones descritas en los subapartados 3.4.1 y 3.4.2. Se relacionan a continuación las principales simplificaciones que pueden establecerse, ordenadas de acuerdo con las secuencias de operaciones consideradas en dichos subapartados:

- a) La obtención de la matriz de masa  $M$  es inmediata. Las multiplicaciones  $M^{-1} K$  y  $M^{-1} C$  necesarias para definir  $F$  en (3.3a) son conmutativas y dan, pues, como

resultado matrices simétricas lo que permite agilizar la programación.

b) Las multiplicaciones  $K^{-1}C$  y  $K^{-1}M$  en (3.8) dan, también, como resultado matrices simétricas.

c.2) La expresión (3.23) puede escribirse ahora:

$$(\Delta t \mathbf{F})^t (\Delta t \mathbf{F}) = (\Delta t)^2 \begin{pmatrix} (M^{-1})^2 K^t K & (M^{-1})^2 K^t C \\ (M^{-1})^2 C^t K & I + (M^{-1})^2 C^t C \end{pmatrix}$$

La aplicación del resultado anterior al programar el cálculo de la expresión (3.23) permite reducir el tiempo de ordenador necesario.

c.5) En éste punto es donde pueden hacerse modificaciones que implican un mayor ahorro de tiempo de cálculo. En la programación de la expresión (3.27) los productos de matrices  $2n \times 2n$  se descomponen en productos de matrices  $n \times n$  de acuerdo con la igualdad (3.28). Todas las matrices que se multiplican en (3.28) pueden expresarse como combinación lineal de las matrices que aparecen en las expresiones (3.68) y cuyos productos son conmutativos. Consecuentemente, todas las multiplicaciones comprendidas en (3.28) son conmutativas y proporcionan resultados simétricos. Si se tiene en cuenta dicha propiedad al implementar la expresión (3.28) se obtiene una importante disminución del tiempo de cálculo.

c.6) La matriz  $T_p(\Delta t \mathbf{F}/2^q)$  hallada en el punto c.5) anterior está constituida por cuatro bloques simétricos formados por combinaciones lineales de productos de las matrices contenidas en las expresiones (3.68). Consecuentemente, cada multiplicación de matrices  $2n \times 2n$  de (3.29) se descompone en ocho productos simétricos y conmutativos de matrices  $n \times n$ . La aplicación de la propiedad anterior permite reducir notablemente el tiempo de cálculo.

d) La determinación de  $P_1$  en (3.11b) y de  $P_2$  en (3.11c) puede simplificarse teniendo en cuenta que todas las matrices que se multiplican están formadas por cuatro

bloques simétricos que conmutan entre sí proporcionando resultados que son también matrices simétricas.

### 3.8.2 Número de operaciones.

En el presente subapartado se pretende determinar el número de operaciones que resultan de implementar el algoritmo descrito en el subapartado 3.8.1. Únicamente es necesario modificar los valores indicados en 3.4.4 en los puntos señalados en 3.8.1 y no tomar en consideración las operaciones que se refieren a control. El cálculo del número de operaciones se ordena de acuerdo con la secuencia considerada en el subapartado 3.8.1:

- a) El número de *flops* invertido en un producto simétrico de matrices  $n \times n$  es  $n \times n(n + 1)/2$  y, consecuentemente, el número total de operaciones necesarias para generar  $\mathbf{F}$  es:

$$n^3 + n^2 \text{ flops}$$

- b) El número de operaciones necesarias para obtener el valor de  $\mathbf{K}^{-1}$  y para generar  $\mathbf{F}^{-1}$  es:

$$\frac{4}{3}n^3 + n^2 - \frac{n}{3} \text{ flops}$$

- c.5) En cada ejecución de (3.28) hay 4 productos simétricos de matrices  $n \times n$  que equivalen a  $4n^2(n + 1)/2 \text{ flops}$ . Puesto que la operación (3.28) se ejecuta  $p$  veces el número total de operaciones es:

$$2pn^2(n + 1) \text{ flops}$$



c.6) En este punto es preciso multiplicar  $q$  veces una matriz  $2n \times 2n$  por sí misma y cada multiplicación puede descomponerse en ocho multiplicaciones simétricas  $n \times n$  cada una de las cuales equivale a  $(n^3 + n^2)/2$  *flops*. Consecuentemente, el número total de operaciones en este punto es:

$$4(n^3 + n^2)q \text{ flops}$$

d) Las expresiones (3.11b) y (3.11c) representan productos de matrices  $2n \times 2n$  que equivalen a  $4(n^3 + n^2)$  *flops* cada uno. El número total de operaciones en este punto es:

$$8n^3 + 12n^2 \text{ flops}$$

El número total de operaciones  $N$  es la suma de  $N_1$  y  $N_2$ :

$$N = N_1 + N_2 \quad (3.69)$$

$$N_1 = n^3 \left( \frac{43}{3} + 2p + 4q \right) + 2n^2(9 + 6p + 2q) - \frac{n}{3} \quad (3.69a)$$

$$N_2 = 6n^2 K_t + n(K_e + K_t) \quad (3.69b)$$

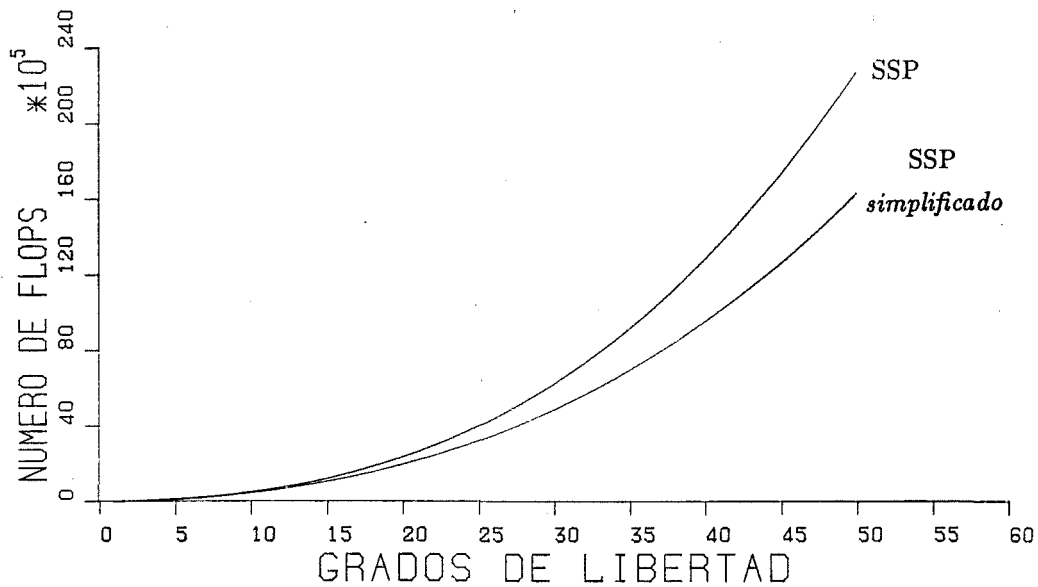
$N$  = número total de operaciones (*flops*) necesarias para aplicar el algoritmo SSP al cálculo de la respuesta dinámica de un edificio en las condiciones descritas en el subapartado 3.8.1 cuando la matriz  $A$  se calcula a partir de la expresión (3.29).

$N_1$  y  $N_2$  tienen el mismo significado que en 3.4.4.

En las figuras 3.8a y 3.8b se muestran las representaciones gráficas de  $N$  en el caso general descrito en el apartado 3.4 y en el caso de un edificio modelizado según las

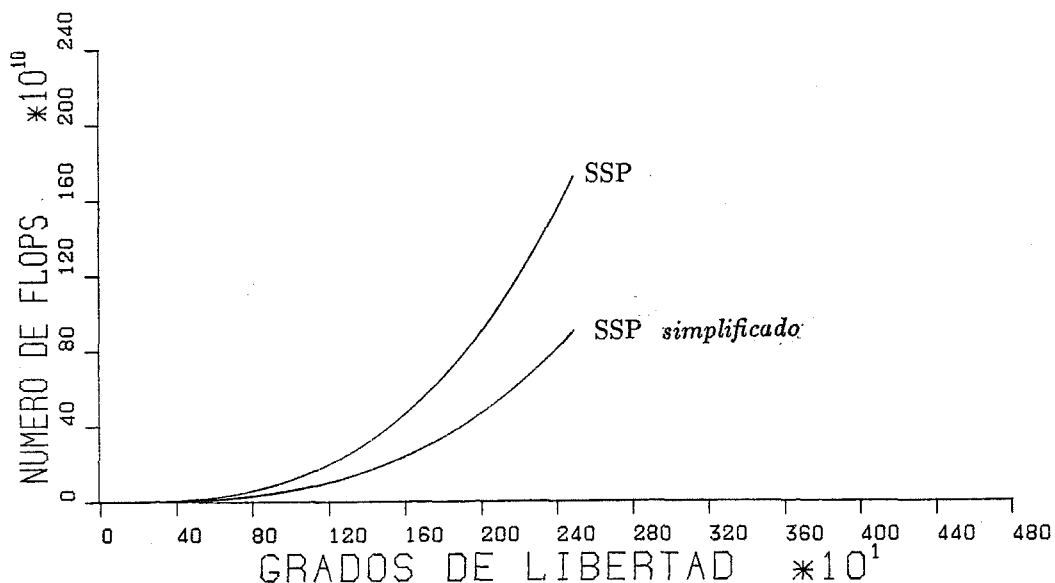
condiciones señaladas en 3.8.1. Los valores de los parámetros  $p$ ,  $q$ ,  $K_e$  y  $K_t$  que se han considerado en (3.68) son:

$$p = 3 \quad q = 9 \quad K_e = 600 \quad K_t = 600$$



**Figura 3.8a** Comparación entre el número de operaciones en el algoritmo SSP normal y en el simplificado (Edificios). Hasta 50 grados de libertad.

Las figuras 3.8 muestran que la disminución del tiempo de cálculo al utilizar el algoritmo SSP modificado únicamente es importante cuando el número de grados de libertad es grande. La comparación entre las expresiones (3.35) y (3.69) muestra que el ahorro del número de operaciones se produce solamente en los sumandos  $N_1$ .



**Figura 3.8b** Comparación entre el número de operaciones en el algoritmo SSP normal y en el simplificado (Edificios). Hasta 2500 grados de libertad.

### 3.8.3 Ejemplos.

En el presente subapartado se muestran dos ejemplos de aplicación del método SSP al cálculo de la respuesta dinámica de los Edificios A y B descritos en el Anejo A. En el primer ejemplo se considera la actuación sobre el edificio B de un acelerograma generado artificialmente [15] y en el segundo ejemplo se analiza el efecto de un acelerograma sinusoidal sobre ambos edificios A y B.

El acelerograma artificial ha sido generado a partir de los siguientes datos:

Duración total : 30 segundos.

Período de discretización :  $\Delta t = 0.05$  s.

Aceleración máxima esperada : 0.1 g.

Coefficiente de amortiguamiento : 0.3 (*valor adimensional*).

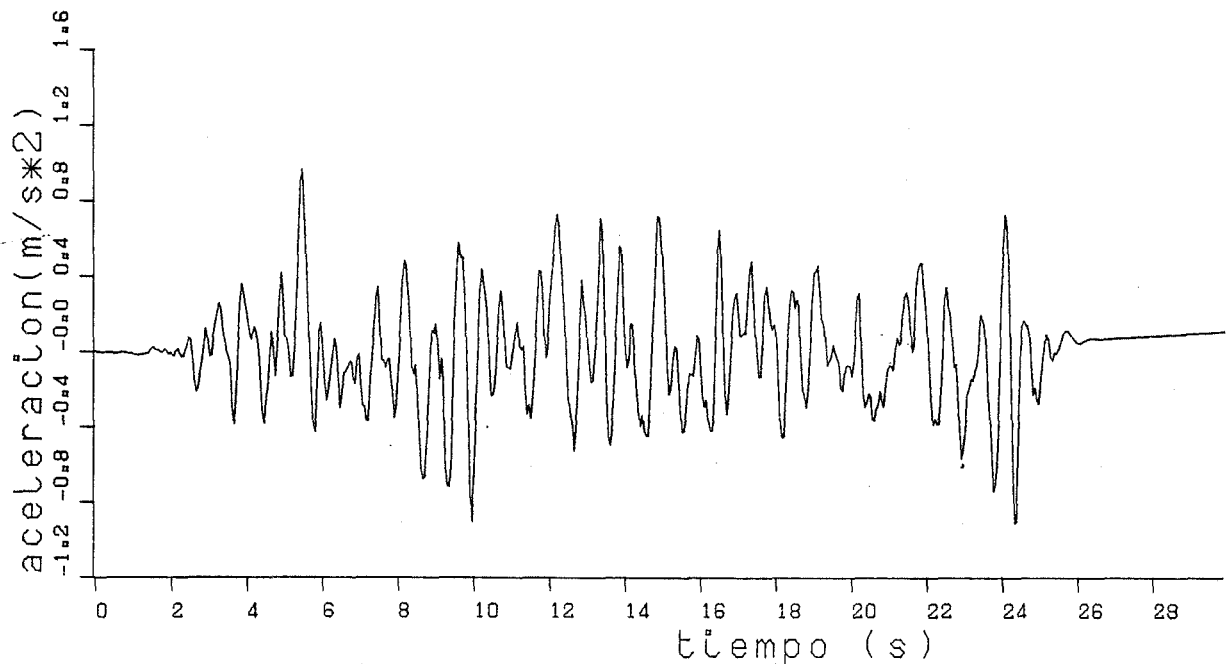
Frecuencia predominante : 1.667 Hz (Período predominante 0.6 segundos).

Intervalo de crecimiento : 5 segundos.

Fase de meseta : 20 segundos.

Exponente de la curva de decrecimiento : 5 (*valor adimensional*).

En la figura 3.9 se muestra una representación gráfica del acelerograma de excitación.



**Figura 3.9** *Acelerograma artificial.*

En la aplicación del algoritmo SSP para el cálculo de la respuesta dinámica del edificio B al acelerograma anterior, la matriz **A** se halla a partir de la igualdad (3.29) y

se consideran los valores  $\Delta t = 0.0125$  s y  $\varepsilon = 0.01$  los cuales corresponden a  $p = 3$  y  $m = 1024$  ( $q = 10$ ). Es preciso comprobar que dichos valores permiten un cálculo estable y preciso.

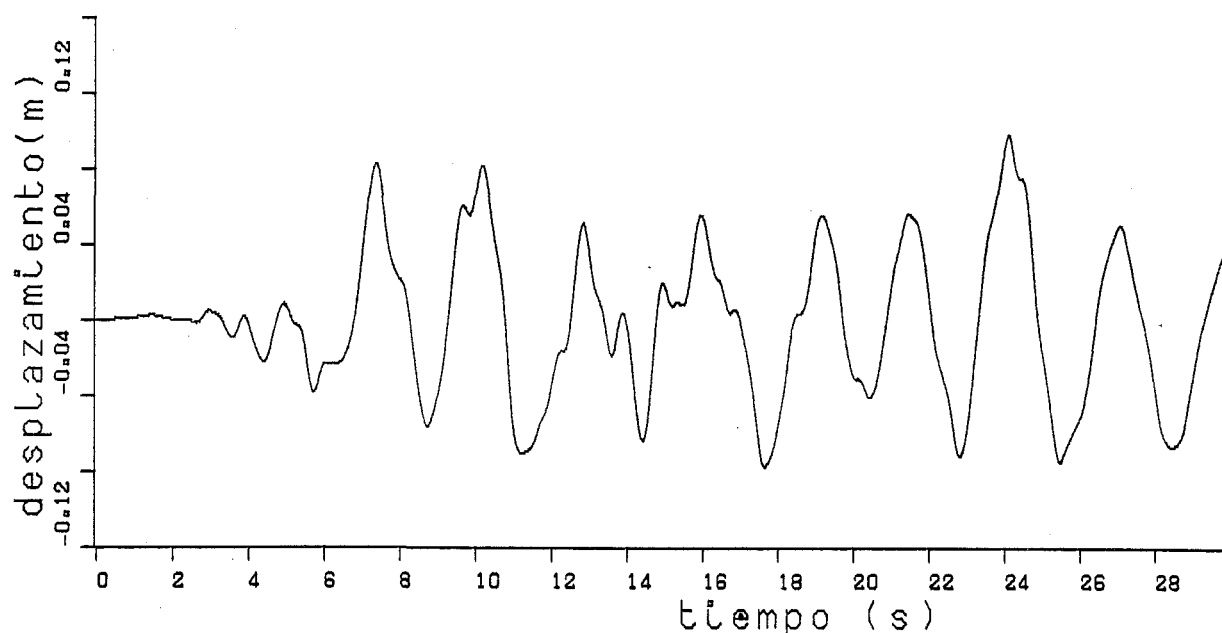
Para verificar que se satisfacen las condiciones de estabilidad es necesario comprobar que los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  sin amortiguamiento tienen módulo menor o igual que la unidad. De acuerdo con las consideraciones expuestas en el subapartado 3.6.3 dicha comprobación puede hacerse en las figuras 3.4 para el modo propio superior 23. El período natural de vibración de dicho modo es, según la tabla A.4,  $T_{23} = 0.029$  s y el cociente  $\Delta t/mT_{23} = 0.0004$  corresponde en la figura 3.4a a un punto en que la curva para  $p = 3$  es horizontal. Ello garantiza la ausencia de amplificaciones artificiales de los modos superiores.

Es necesario verificar dos condiciones distintas relativas a la precisión: que el cálculo de la matriz  $\mathbf{A}$  a partir de (3.29) es suficientemente aproximado y que el error introducido por la interpolación lineal de la excitación en el interior del intervalo de discretización no influye sensiblemente en la respuesta. La primera comprobación se hace a partir de las figuras 3.5 y la segunda a partir de la figura 3.6.

De acuerdo con las consideraciones expuestas en el subapartado 3.7.3 la verificación de precisión en el cálculo de  $\mathbf{A}$  en las figuras 3.5 se hacen sobre el modo propio de orden más alto que influye de forma apreciable en la respuesta. Se considera en la presente aplicación del algoritmo SSP que dicho modo propio es el quinto. El valor del cociente  $\Delta t/T_5$  es, según la tabla A.4, 0.034 y dicho valor corresponde en la curva para  $p = 3$  y  $q = 10$  de la figura 3.5i a un error inapreciable. Ello garantiza la precisión del cálculo de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Considerando para  $T_s$  un valor igual a la mitad del período predominante de la excitación, el valor del cociente  $\Delta t/T_s = 0.021$  s corresponde en la figura 3.6 a un error inapreciable y, consecuentemente, el error introducido por la interpolación de la excitación es muy pequeño.

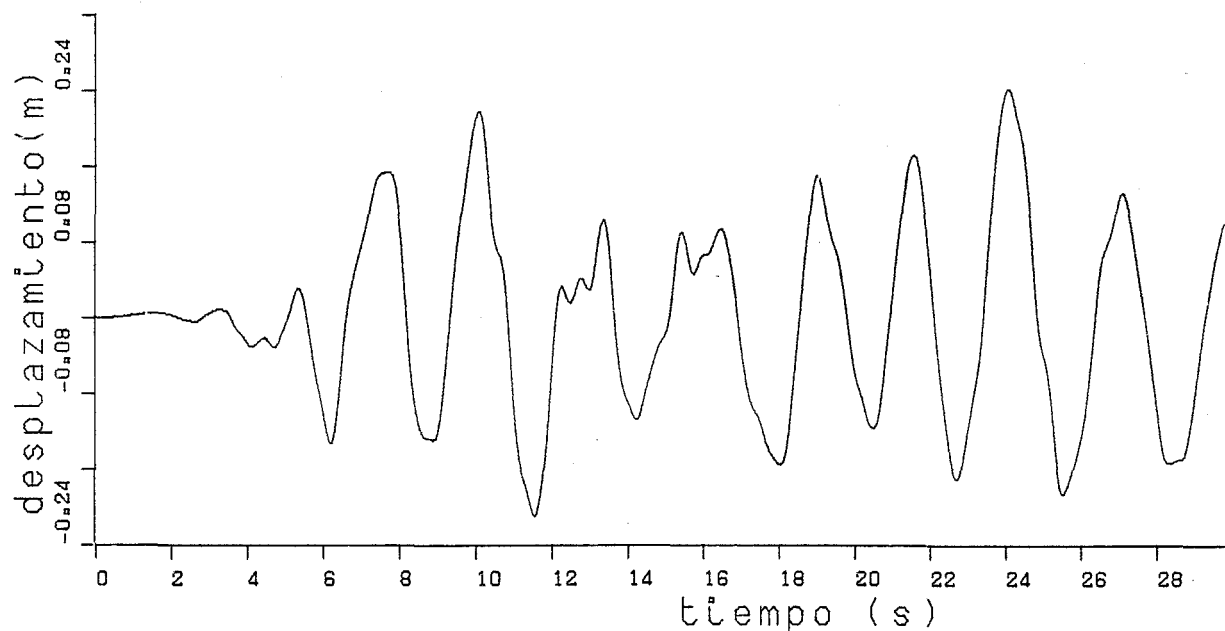
En las figuras 3.10 se dibujan gráficas correspondientes a la respuesta en desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los pisos 11 y 23.



**Figura 3.10a** Respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9. Desplazamiento horizontal del piso 11.

Se ha determinado también la respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9 efectuando un cambio a coordenadas modales y tomando únicamente en consideración los cinco primeros modos. En la aplicación del algoritmo SSP al sistema en coordenadas modales con cinco grados de libertad, se ha utilizado un valor del incremento de tiempo  $\Delta t = 0.05$  segundos y un error máximo admisible en la norma de la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\varepsilon = 0.05$  que corresponde a un número de términos  $p = 3$  y un exponente  $m = 2$  ( $q = 1$ ). Estos valores proporcionan un algoritmo estable y preciso tal como se muestra a continuación.

La expresión  $\Delta t/mT_5$  correspondiente al modo superior considerado toma el valor 0.004 (el valor de  $T_5$  se indica en la Tabla A.4) que pertenece al tramo horizontal de la curva para  $p = 3$  en la figura 3.4a de forma que queda asegurada la estabilidad del cálculo para todos los modos propios considerados.

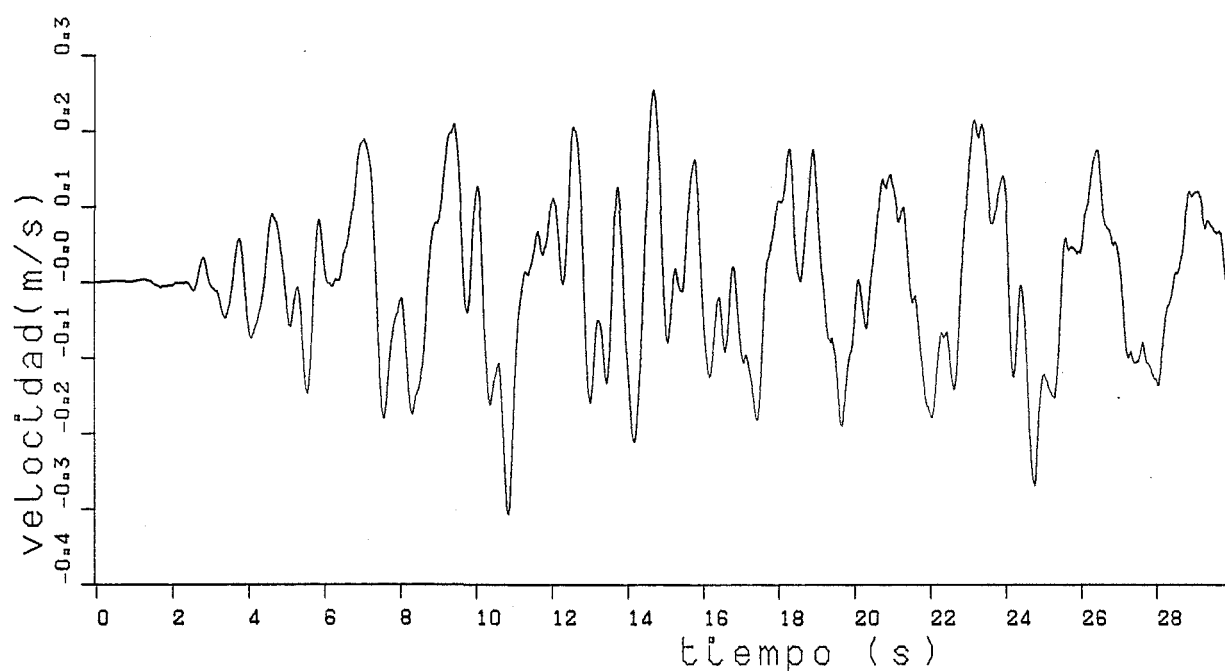


**Figura 3.10b** Respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9. Desplazamiento horizontal del piso 23.

Para estudiar la precisión referente a la interpolación lineal de la excitación se determina en la figura 3.6 la media cuadrática de error  $e$ ; para el cociente  $\Delta t/T_s = 0.083$  que es inferior a 0.01, valor suficientemente pequeño.

En la figura 3.5f aparece la curva de error en la amplitud para  $p = 3$  y  $q = 1$ , la cual para el cociente  $\Delta t/T_s = 0.136$  da un porcentaje de error en la amplitud al cabo de un ciclo suficientemente pequeño.

El cálculo es preciso y estable y se obtienen valores totalmente concordantes con los que resultan de considerar todos los modos propios, salvo pequeñas desviaciones que son atribuibles a los modos no incluidos en el cálculo pues nuevas aplicaciones del algoritmo SSP al sistema reducido con valores más pequeños de  $\Delta t$  no proporcionan resultados diferentes. No obstante, la concordancia entre los resultados obtenidos incluyendo en el cálculo los 23 modos propios y los resultados obtenidos a partir de los 5 primeros modos



**Figura 3.10c** Respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9. Velocidad del piso 11.

es excelente pues, considerando la media cuadrática de la respuesta del piso superior, la divergencia en desplazamientos es del 0%, en velocidades del 0.4% y en aceleraciones del 3.1%.

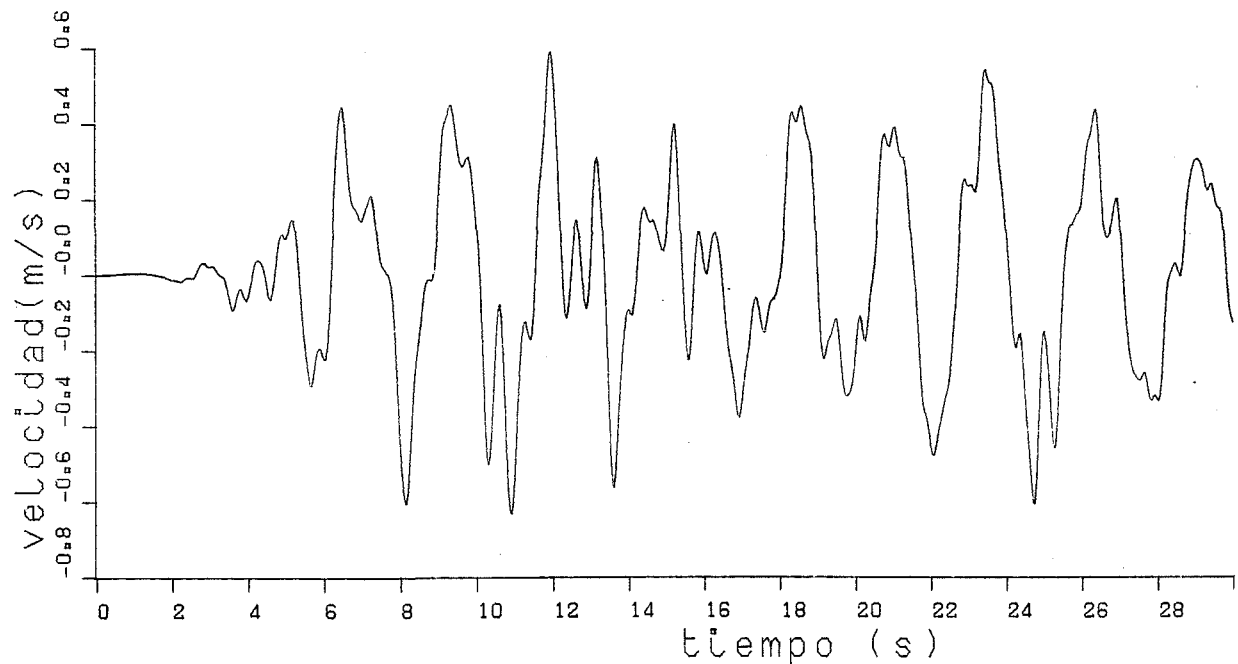
Se muestra a continuación una nueva aplicación del algoritmo SSP para hallar la respuesta de los Edificios A y B a una excitación sinusoidal en resonancia con el primer modo propio del Edificio B. En la figura 3.11 se representa el acelerograma sinusoidal considerado.

El acelerograma anterior ha sido generado a partir de los siguientes datos:

Período :  $T_s = 2.8328$  segundos ( $\omega_s = 2.218$  rad/s).

Intervalo de discretización : 0.05segundos.





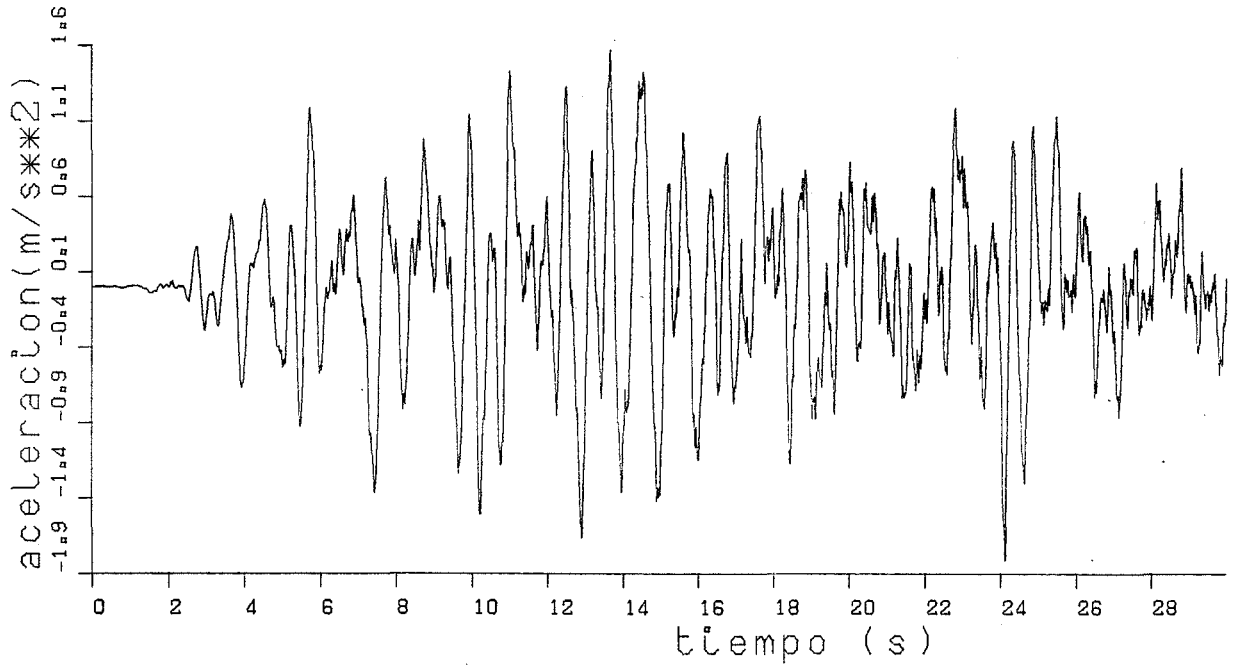
**Figura 3.10d** Respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9. Velocidad del piso 23.

Aceleración máxima : 0.01 g.

Duración total : 30 segundos.

Para hallar la respuesta se utiliza el algoritmo SSP con los siguientes valores de los parámetros generales:  $\Delta t = 0.0125$  segundos y  $\epsilon = 0.01$ . En el cálculo de la respuesta del Edificio A ambos valores corresponden a  $p = 5$  y  $q = 8$  y en el cálculo de la respuesta del Edificio B corresponden a  $p = 3$  y  $q = 10$ . En ambos casos, las curvas de las figuras 3.4a, 3.6 y 3.5 (3.5l para el Edificio A y 3.5i para el Edificio B) muestran que el cálculo es estable y preciso tal como se ha detallado en los ejemplos anteriores.

En las figuras 3.12 se comparan las respuestas de los pisos superiores de ambos Edificios, pudiendo constatarse que la resonancia del primer modo del Edificio B produce



**Figura 3.10e** Respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9. Aceleración del piso 11.

en él mayores desplazamientos, velocidades y aceleraciones a pesar de ser más rígido que el Edificio A.

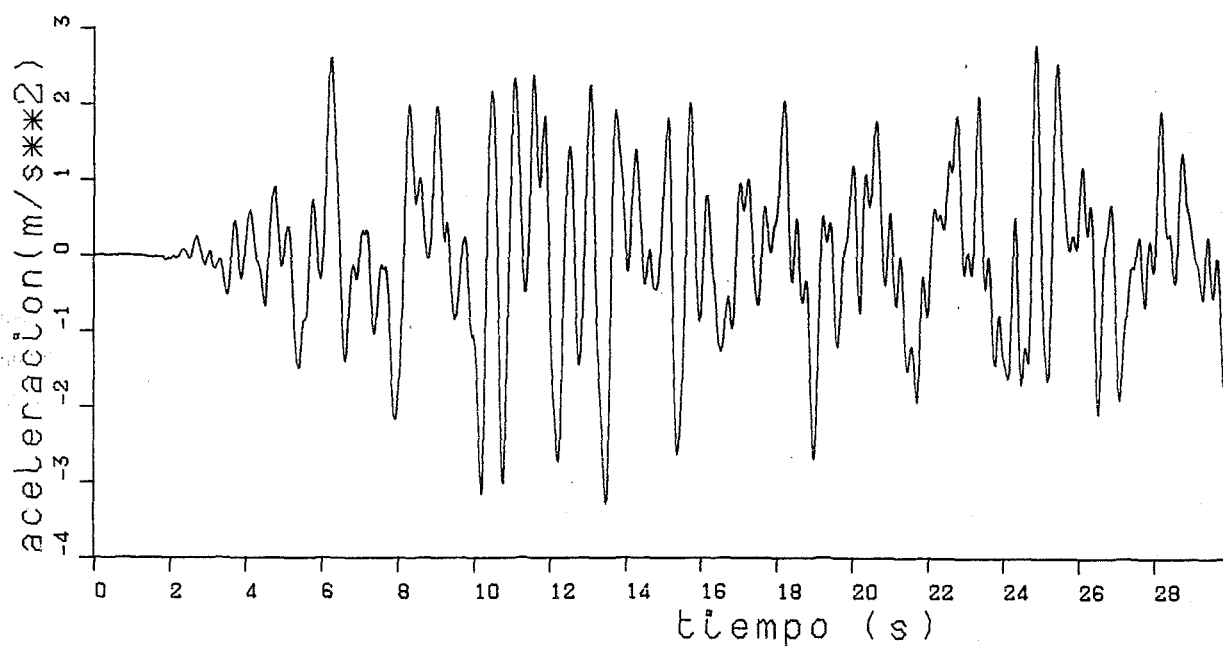


Figura 3.10f Respuesta dinámica del Edificio B al acelerograma representado en la figura 3.9. Aceleración del piso 23.

### 3.9 CONCLUSIONES.

Se ha presentado en este capítulo un algoritmo numérico (denominado SSP) de cálculo de la respuesta dinámica de un sistema lineal elástico sometido a una excitación y a unas fuerzas de control activo. Consecuentemente, dicho algoritmo puede ser utilizado para simular lazos cerrados de control activo de estructuras y para resolver problemas de análisis dinámico tradicional.

Se parte de una discretización temporal y de la formulación en espacio de estado (3.3) de las ecuaciones del movimiento (3.1) para resolver analíticamente las integrales (3.5) allí planteadas entre dos instantes consecutivos de muestreo suponiendo un criterio lineal de interpolación (3.10) de la excitación entre dichos instantes. Resulta una expresión iterativa (3.11) en la que la respuesta en desplazamientos y velocidades en cada instante se obtiene a partir de la respuesta en el instante anterior, de la excitación

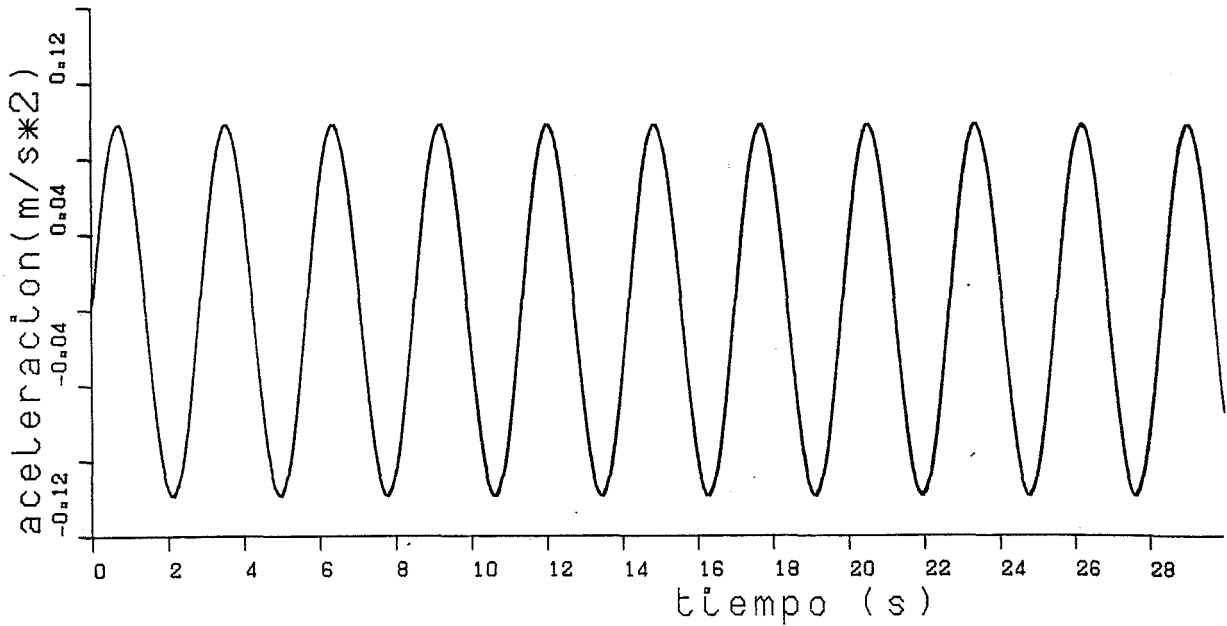
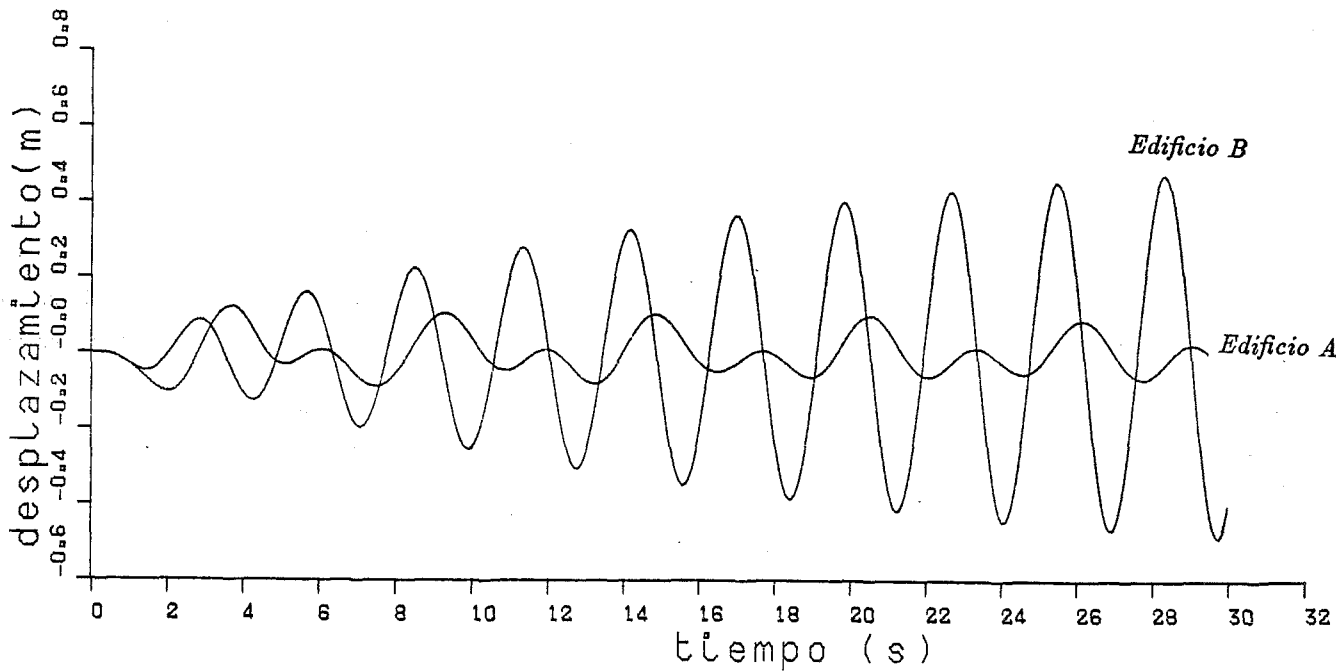


Figura 3.11 Acelerograma sinusoidal.

y de las fuerzas de control en dichos instantes. Las aceleraciones pueden obtenerse por derivación numérica en (3.9).

El algoritmo SSP propuesto puede considerarse una generalización de las integrales de Duhamel (3.16) para sistemas con varios grados de libertad.

El algoritmo SSP se ha presentado en el presente capítulo como un método numérico alternativo de cálculo de la respuesta dinámica de una estructura. La principal ventaja del nuevo procedimiento frente a los procedimientos ya existentes radica en su elevado grado de precisión. Las fuentes de inexactitudes inherentes al proceso de implementación se concentran en dos puntos: el cálculo necesariamente aproximado de la matriz del sistema en tiempo discreto en (3.11a) y la interpolación lineal de la excitación en (3.10) en el interior de cada intervalo de muestreo. La exactitud del algoritmo SSP se ha comparado ventajosamente con la de otros algoritmos de cálculo.

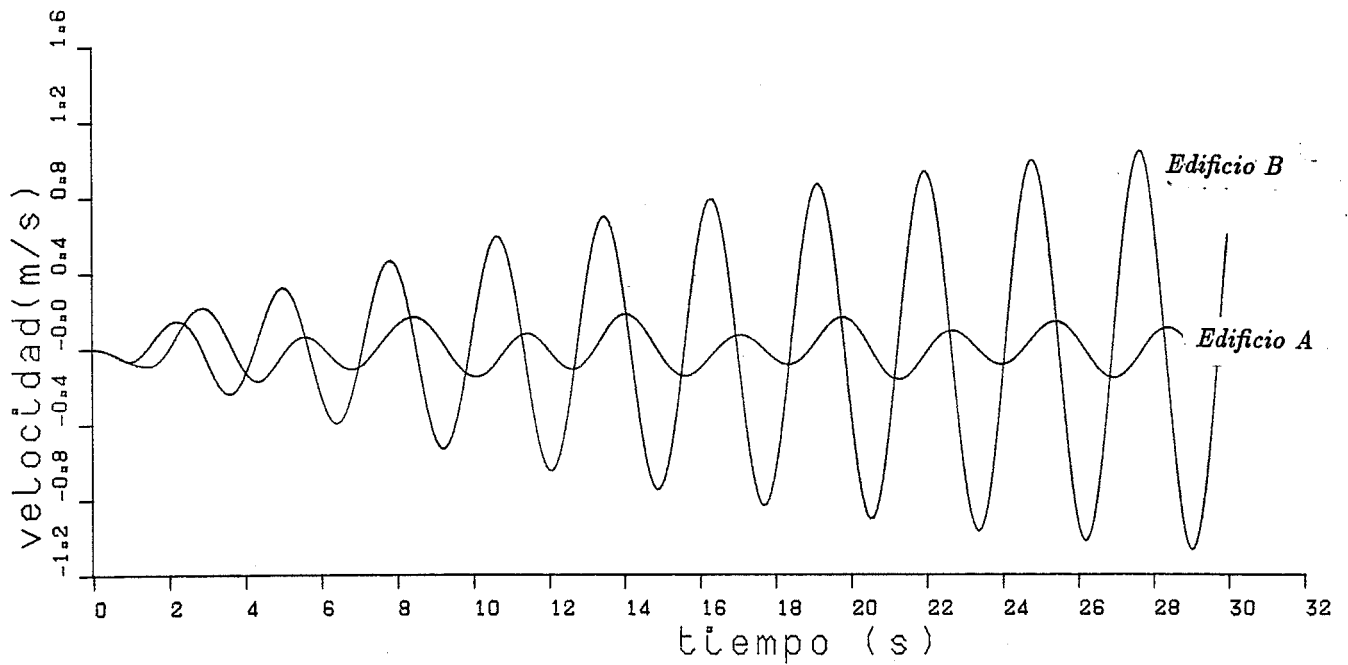


**Figura 3.12a** Respuesta de los Edificios A y B a una excitación sinusoidal. Desplazamiento del piso superior.

Cuando se utiliza el algoritmo SSP para determinar la respuesta dinámica de una estructura a distintas excitaciones, las operaciones más costosas en tiempo de cálculo no precisan ser repetidas para cada nueva excitación, lo cual reduce notablemente en dicho caso el número de operaciones.

El algoritmo SSP puede aplicarse en coordenadas generales o en coordenadas modales, tomando en este caso en consideración únicamente los modos propios de vibración que influyen apreciablemente en la respuesta y resultando así una importante reducción del número de operaciones necesarias.

Eligiendo adecuadamente en cada situación los valores de los parámetros generales que se utilizan en el cálculo, el algoritmo SSP es estable de forma externa, asintótica, global e incondicional.



**Figura 3.12b** Respuesta de los Edificios A y B a una excitación sinusoidal.  
Velocidad del piso superior.

En la aplicación del algoritmo SSP al cálculo de la respuesta de edificios sometidos a sollicitaciones sísmicas (u otras excitaciones dinámicas) pueden hacerse simplificaciones que permiten reducir el número total de operaciones necesarias.

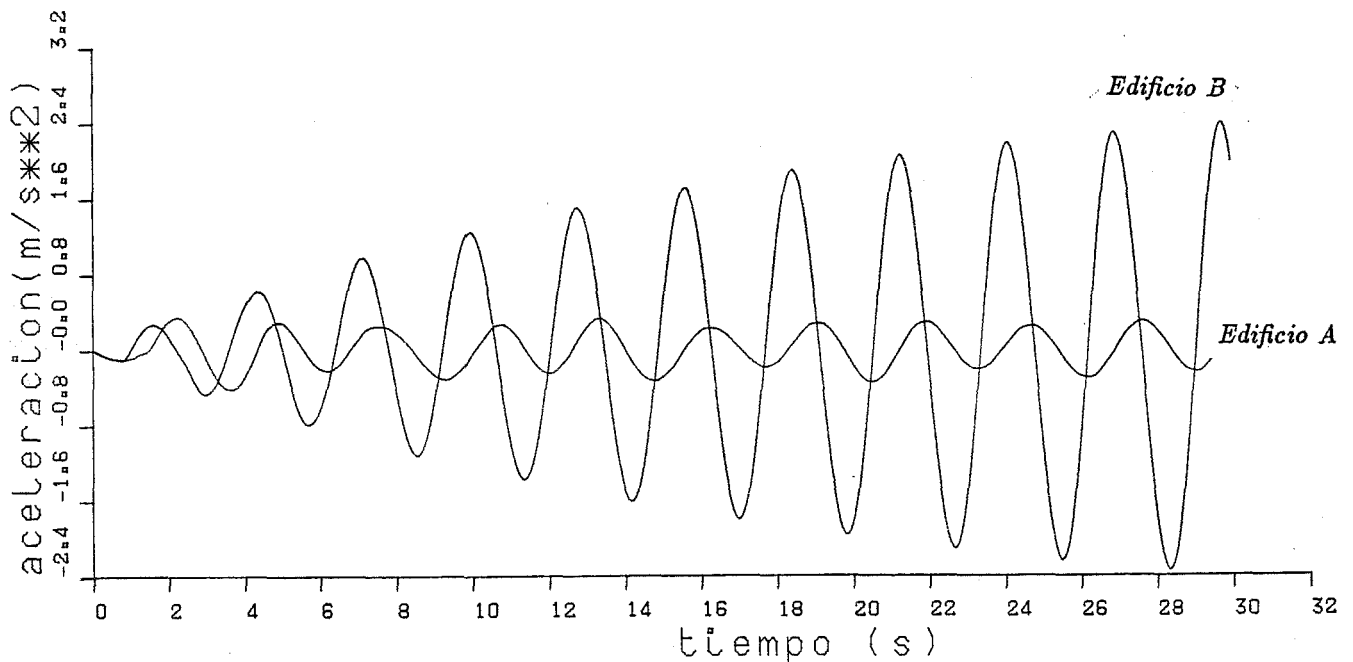


Figura 3.12c Respuesta de los Edificios A y B a una excitación sinusoidal. Aceleración del piso superior.

#### REFERENCIAS.

- 1 Bathe, K.J. y Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall. Inc., (1976).
- 2 Hurty, W.C y Rubinstein, M.F., "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, Clifton, N.J., (1964).
- 3 Itoh, T., "Damped vibration mode superposition method for dynamic response analysis", *Int. J. Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 2, pp. 47-57 (1973).
- 4 Yamada Y., "Dynamic analysis of structures", *Second U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, Berkeley, California, University of Alabama Press, Hunstville, Alabama, (1972).

- 5 Roesset, J., Whitman, R.V. y Dobry R., "Modal analysis for structures with foundation interaction", *J.Struct. Div., ASCE*, 99, pp. 399-416 (1973).
- 6 Clough, W. y Penzien, J., "Dynamics of Structures", Mc. Graw-Hill (1975).
- 7 Rodellar, J. y Barbat, A.H., "Numerical analysis of the seismic response. A state space approach", *Proceedings of the NUMETA'85 Conference*, Swansea, A.A., Balkema Publ., pp 273-279, (1985).
- 8 Lefschetz, S., "Differential Equations: Geometric Theory", New York Interscience Publishers, (1957).
- 9 Ogata, K., "State Space Analysis of Control Systems", Prentice-Hall, (1967).
- 10 Moler, C. y Van Loan, C., "Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix", *SIAM Review*, Vol.20, N<sup>o</sup> 4, pp. 801-836 (1978).
- 11 Gantmacher, F.R., "The Theory of Matrices", Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., (1959).
- 12 Wilson, E.L. y Penzien, J., "Evaluation of orthogonal damping matrices", *Int. Journal Num. Meth. in Eng.*, Vol. 4, pp. 5-10 (1972).
- 13 Willems, J.L., "Stability Theory of Dynamical Systems", Thomas Nelson, Waton - on - Thames, Surrey, England, (1970).
- 14 Barbat, A.H., Rodellar, J. y Carrera, J., "Procedimiento de espacio de estado para el cálculo de la respuesta dinámica de modelos de elementos finitos", *Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería*, U.P.C. Edicions, Barcelona, Vol.3, pp. A-273, A-285, (1986).
- 15 Ruiz, P. y Penzien, J., "Artificial Generation of Earthquake Accelerograms", *College of Engrg.*, Univ. of California, Berkeley, California, Report. PSEQGN, (1969).