

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Programa de Doctorado:  
AUTOMATIZACIÓN AVANZADA Y ROBÓTICA

Tesis Doctoral

**PLANIFICACIÓN AUTOMÁTICA Y SUPERVISIÓN  
DE OPERACIONES DE MONTAJE  
MEDIANTE ROBOTS**

Raúl Suárez Feijóo

Instituto de Cibernética

Junio de 1993

Director: Prof. Luis Basañez Villaluenga

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Programa de Doctorado:  
AUTOMATIZACIÓN AVANZADA Y ROBÓTICA

Tesis Doctoral

**PLANIFICACIÓN AUTOMÁTICA Y SUPERVISIÓN  
DE OPERACIONES DE MONTAJE  
MEDIANTE ROBOTS**

Raúl Suárez Feijóo

Instituto de Cibernética

Junio de 1993

Director: Prof. Luis Basañez Villaluenga

## Agradecimientos

Son muchas las personas que de un modo u otro han hecho posible la realización de este trabajo, tanto en los aspectos técnicos, intercambiando ideas y dando soporte a los medios utilizados para su desarrollo, como en el aspecto humano, brindándome el apoyo necesario cuando me hizo falta. A todos ellos mi más sincero agradecimiento.

No puedo, sin embargo, dejar de mencionar de manera particular:

Al profesor Luis Basañez, director de la tesis, por haberme dado la oportunidad de llevarla a cabo en el Instituto de Cibernética, por encaminarme en los problemas técnicos y por sus acertadas directrices y palabras de aliento en el momento de buscarles solución. Asimismo, el texto final de esta tesis no sería el mismo sin sus minuciosas y prolijas revisiones.

A los compañeros del Instituto de Cibernética, con los que he compartido tanto agotadoras horas de trabajo como reconfortantes minutos de recreo en el ir y venir de cada día.

A quienes han sabido imponer su amistad y tolerancia a mi mal humor e irritabilidad cuando este trabajo parecía absorber todo mi tiempo y dedicación.

Finalmente y de manera muy especial, a mi familia, que desde muchos kilómetros de distancia ha sabido estar siempre a mi lado y ha sido siempre el apoyo más sólido en los momentos difíciles. A mis padres y a mi hermana, para con quienes mis agradecimientos y sentimientos no necesitan de muchas palabras.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Planteamiento del problema . . . . .	2
1.2	Motivación . . . . .	3
1.3	Objetivo y alcance de la tesis . . . . .	5
1.4	Antecedentes . . . . .	6
1.4.1	Robots en tareas de montaje . . . . .	6
1.4.2	Planificación automática de movimientos de corto desarrollo . . . . .	10
1.5	Metodología . . . . .	14
1.6	Contenido de la Tesis . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Elementos para la representación de la tarea</b>	<b>19</b>
2.1	Consideraciones sobre los objetos . . . . .	19
2.1.1	Características de los objetos . . . . .	19
2.1.2	Modelo de los objetos . . . . .	20
2.2	Espacio de Configuraciones $\mathcal{C}$ . . . . .	22
2.2.1	Conceptos generales . . . . .	22
2.2.2	Configuración de un objeto en la pinza de un robot . . . . .	23
2.2.3	Configuraciones posibles e imposibles . . . . .	24
2.2.4	Contactos y $\mathcal{C}$ -superficies . . . . .	26

---

2.3	Movimientos en el plano: $\mathcal{C}_3$ . . . . .	27
2.3.1	Contactos en $\mathcal{C}_3$ . . . . .	28
2.3.2	$\mathcal{C}_3$ para un objeto tridimensional . . . . .	29
2.3.3	$\mathcal{C}$ -superficies en $\mathcal{C}_3$ . . . . .	30
2.3.3.1	$\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1 . . . . .	30
2.3.3.2	$\mathcal{C}$ -superficies de tipo 2 . . . . .	34
2.3.4	$\mathcal{C}$ -superficies y configuraciones de contacto . . . . .	36
2.3.5	Aristas en $\mathcal{C}_3$ . . . . .	38
2.3.6	Ajuste de la métrica de $\mathcal{C}_3$ . . . . .	44
2.4	Fuerzas de reacción en $\mathcal{C}$ . . . . .	45
2.4.1	Fuerzas en $\mathcal{C}_3$ . . . . .	46
2.4.2	Ajuste de la métrica de $\mathcal{F}_3$ . . . . .	46
2.5	Fricción . . . . .	47
2.5.1	Fricción en el mundo real . . . . .	47
2.5.2	Fricción en $\mathcal{C}_3$ . . . . .	48
2.5.2.1	Fricción en $\mathcal{C}_3$ para un punto de contacto . . . . .	48
2.5.2.2	Fricción en $\mathcal{C}_3$ para varios puntos de contacto . . . . .	54
2.6	Representación de las fuerzas de $\mathcal{F}_3$ . . . . .	54
2.6.1	Representación dual de las fuerzas . . . . .	56
2.6.2	Representación dual de fuerzas sujetas a algunas restricciones particulares . . . . .	59
2.6.2.1	Fuerzas que cuyas rectas de acción pasan por un mismo punto . . . . .	59
2.6.2.2	Fuerzas cuyas rectas de acción tienen direcciones determinadas pero no se conoce la recta soporte . . . . .	59
2.6.2.3	Fuerzas de reacción posibles en un cono de fricción . . . . .	60

2.6.2.4	Fuerzas cuyas rectas de acción cortan a un segmento dado . . . . .	61
2.6.2.5	Fuerzas cuyas rectas de acción cortan a una circunferencia dada . . . . .	61
2.6.2.6	Fuerzas cuyas rectas de acción cortan a un arco de una circunferencia centrada en el origen . . .	67
<b>3</b>	<b>Incertidumbre en el espacio físico</b>	<b>71</b>
3.1	Introducción . . . . .	71
3.1.1	Antecedentes . . . . .	71
3.1.2	Nomenclatura . . . . .	75
3.2	Incertidumbre en la posición . . . . .	76
3.2.1	Incertidumbre en la forma de los objetos . . . . .	76
3.2.2	Incertidumbre en el posicionamiento del robot . . . . .	80
3.2.3	Incertidumbre en la medición directa de la posición absoluta de un punto de un objeto estático . . . . .	82
3.2.4	Incertidumbre en la configuración de un objeto estático .	82
3.2.5	Deslizamiento del objeto en la pinza del robot . . . . .	85
3.2.6	Posición absoluta del contorno de un objeto . . . . .	85
3.2.6.1	Objeto estático . . . . .	87
3.2.6.2	Objeto aprehendido . . . . .	89
3.3	Incertidumbre en la fuerza . . . . .	94
3.4	Incertidumbre en la velocidad . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Incertidumbre en el Espacio de Configuraciones</b>	<b>97</b>
4.1	Incertidumbre en la posición . . . . .	98
4.1.1	$C$ -superficies de tipo 1 en presencia de incertidumbre . .	98
4.1.2	$C$ -superficies de tipo 2 en presencia de incertidumbre . .	99

4.1.3	Incertidumbre asociada a una $\mathcal{C}$ -superficie. Envolventes . . . . .	100
4.1.4	Incertidumbre en una $\mathcal{C}$ -superficie de tipo 1 . . . . .	101
4.1.5	Incertidumbre en una $\mathcal{C}$ -superficie de tipo 2 . . . . .	108
4.2	Incertidumbre en la fuerza generalizada . . . . .	115
4.3	Incertidumbre en la velocidad . . . . .	116
4.4	Partición de $\mathcal{C}$ en presencia de incertidumbre . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Estados de una tarea de montaje . . . . .</b>	<b>121</b>
5.1	Información de configuración y de fuerza . . . . .	122
5.2	Estados de una tarea . . . . .	126
5.2.1	Realización de un estado . . . . .	127
5.2.2	Conexidad de las realizaciones . . . . .	128
5.2.3	Contigüidad de los estados . . . . .	129
5.2.4	Caso singular de varios objetos . . . . .	129
5.3	Estados primarios en ausencia de incertidumbre . . . . .	131
5.3.1	Grafo nominal de estados primarios . . . . .	131
5.3.2	Fuerzas generalizadas de reacción . . . . .	132
5.4	Realizaciones de los estados . . . . .	135
5.4.1	Dominios de realización . . . . .	137
5.4.2	Fuerzas de reacción en los dominios de realización . . . . .	139
5.4.3	Reducción de los dominios $DR$ . . . . .	142
5.5	Observación de los estados . . . . .	144
5.5.1	Observación de la configuración . . . . .	144
5.5.2	Observación de la fuerza generalizada de reacción . . . . .	146
5.5.3	Estados confundibles . . . . .	149
5.6	Operadores de cambio de estado . . . . .	150

5.6.1	Definición de operador . . . . .	152
5.6.2	Determinación de los operadores . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Planificación y ejecución</b>	<b>155</b>
6.1	Modelado de la tarea . . . . .	155
6.1.1	Grafo de estados de la tarea . . . . .	157
6.1.2	Estado inicial . . . . .	159
6.1.3	Estado final . . . . .	161
6.1.4	Operadores . . . . .	162
6.2	Planificación de la tarea . . . . .	163
6.2.1	Criterios generales para la elaboración del plan . . . . .	164
6.2.2	El plan . . . . .	166
6.2.3	Búsqueda de una solución base . . . . .	167
6.2.3.1	Criterios para la selección de los operadores . . . . .	169
6.2.3.2	Representación de la solución base . . . . .	171
6.2.4	Búsqueda de una solución completa . . . . .	172
6.2.5	Ajuste final del plan . . . . .	174
6.3	Ejecución de la tarea . . . . .	174
6.3.1	Estimación del estado . . . . .	175
6.3.1.1	Metodología de la estimación . . . . .	176
6.3.1.2	Ambigüedad en la estimación de un estado . . . . .	176
6.3.1.3	Detección de estados complementarios . . . . .	178
6.3.2	Determinación y aplicación del operador . . . . .	182
6.3.3	Supervisión . . . . .	182
6.3.3.1	Secuencias repetitivas de estados . . . . .	183
6.3.3.2	Anomalías en la secuencia de estados . . . . .	188

<b>7</b>	<b>Ejemplo</b>	<b>191</b>
7.1	Descripción de la tarea . . . . .	191
7.1.1	Objeto estático . . . . .	192
7.1.2	Objeto manipulado por el robot . . . . .	193
7.1.3	Posición del bloque en la pinza del robot . . . . .	194
7.2	Espacio de configuraciones $\mathcal{C}_3$ . . . . .	195
7.3	Descripción de la incertidumbre en el espacio físico . . . . .	198
7.3.1	Incertidumbre en la posición . . . . .	198
7.3.1.1	Fuentes de incertidumbre . . . . .	198
7.3.1.2	Posición absoluta de los puntos de un objeto . . . . .	200
7.3.2	Incertidumbre en la fuerza . . . . .	201
7.4	Espacio de configuraciones con incertidumbre . . . . .	202
7.4.1	Incertidumbre en la posición . . . . .	202
7.4.2	Partición de $\mathcal{C}$ en presencia de incertidumbre . . . . .	206
7.4.3	Incertidumbre en la fuerza generalizada . . . . .	207
7.4.4	Incertidumbre en la velocidad generalizada . . . . .	208
7.5	Estados de la tarea . . . . .	210
7.6	Realizaciones de los estados . . . . .	210
7.6.1	Realizaciones nominales . . . . .	210
7.6.2	Dominios de realización . . . . .	210
7.6.3	Fuerzas en los dominios de realización . . . . .	212
7.7	Observación de los estados . . . . .	213
7.7.1	Dominios de observación de configuración . . . . .	213
7.7.2	Dominios de observación de fuerzas generalizadas . . . . .	214
7.8	Operadores de cambio de estado . . . . .	220
7.9	Modelado de la tarea . . . . .	227

---

7.10	Elaboración del Plan . . . . .	229
7.11	Búsqueda de una solución base . . . . .	229
7.12	Búsqueda de una solución completa . . . . .	232
7.13	Ajuste final del plan . . . . .	234
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>237</b>
8.1	Principales aportaciones . . . . .	237
8.2	Líneas abiertas de trabajo . . . . .	239
8.2.1	Incertidumbre . . . . .	239
8.2.2	Estados . . . . .	240
8.2.3	Operadores . . . . .	241
8.2.4	Complejidad . . . . .	242
	<b>Referencias</b>	<b>243</b>



# Lista de Figuras

2.1	<i>Ejemplo de Sistema de Datos asociado a un objeto. . . . .</i>	21
2.2	<i>Descripción de un objeto “plano” mediante la especificación de sus vértices. . . . .</i>	22
2.3	<i>C para un vástago y un agujero en 2 grados de libertad (traslación en el plano del dibujo). . . . .</i>	25
2.4	<i>C para un vástago y un agujero en 3 grados de libertad. . . . .</i>	26
2.5	<i>Diferentes tipos de contacto. . . . .</i>	27
2.6	<i>Combinaciones de tipos básicos de contacto en el plano. . . . .</i>	28
2.7	<i>Contacto de Tipo 1. . . . .</i>	31
2.8	<i>Contacto de Tipo 2. . . . .</i>	32
2.9	<i>Contactos imposibles no considerados en las ecuaciones generales de las C-superficies de <math>C_3</math>. . . . .</i>	37
2.10	<i>Ejemplos de contactos redundantes. . . . .</i>	37
2.11	<i>Casos de dos contactos de Tipo 1 que restringen el movimiento a desplazamientos con <math>\phi</math> constante. . . . .</i>	40
2.12	<i>Casos de dos contactos de Tipo 2 que restringen el movimiento a desplazamientos con <math>\phi</math> constante. . . . .</i>	42
2.13	<i>Casos de dos contactos de Tipo 1 y Tipo 2 que restringen el movimiento a desplazamientos con <math>\phi</math> constante. . . . .</i>	44
2.14	<i>Modelo del cono de fricción en el espacio real. . . . .</i>	48
2.15	<i>Equilibrio estático con fricción en un contacto de tipo 1. . . . .</i>	50
2.16	<i>Equilibrio estatico con fricción en un contacto de tipo 2. . . . .</i>	52

2.17	<i>Cono de fricción en el espacio de Configuraciones. . . . .</i>	55
2.18	<i>Combinación de los conos de fricción en <math>C_3</math> para el caso de 3 puntos de contacto. . . . .</i>	56
2.19	<i>Representación de fuerzas generalizadas. . . . .</i>	57
2.20	<i>Representación de la recta de acción de una fuerza mediante un punto dual. . . . .</i>	58
2.21	<i>Representación de las rectas de acción de fuerzas cuyas rectas de acción tienen direcciones entre las de <math>r_1</math> y <math>r_2</math> pero no se conoce el punto de aplicación <math>P</math>. . . . .</i>	60
2.22	<i>Representación de las fuerza de un cono de fricción: a) origen exterior al cono, b) origen interior al cono. . . . .</i>	62
2.23	<i>Combinación lineal con coeficientes positivos de dos fuerzas generalizadas con: a) <math>f_\tau</math> de igual signo, b) <math>f_\tau</math> de diferente signo. . . . .</i>	63
2.24	<i>Representación de las rectas de acción de fuerzas que cortan a un segmento dado. . . . .</i>	64
2.25	<i>Representación de una recta de acción de fuerza tangente a una circunferencia. . . . .</i>	65
2.26	<i>Representación de todas las fuerzas que cortan a una circunferencia dada: a) origen fuera de la circunferencia, b) origen sobre la circunferencia, y c) origen dentro de la circunferencia. . . . .</i>	67
2.27	<i>Representación de las rectas de acción de fuerzas que pasan por un arco de una circunferencia centrada en el origen. . . . .</i>	69
3.1	<i>Objeto poligonal en el plano (a), su MMC (b), su LMC (c), y su zona <math>Z</math> de tolerancia resultante (d). . . . .</i>	78
3.2	<i>Ejemplo de pieza válida dentro de la zona de tolerancia <math>Z</math>. . . . .</i>	79
3.3	<i>Ejemplo de perturbaciones no permitidas (a) y perturbaciones despreciadas (b) en los lados de un objeto. . . . .</i>	79
3.4	<i>Máxima variación de la normal a un lado. . . . .</i>	81
3.5	<i>Zona de incertidumbre asociada a un vértice del objeto fijo con incertidumbres <math>\epsilon_{p_p}</math> y <math>\epsilon_{\phi_p}</math> independientes. . . . .</i>	84

3.6	<i>Determinación de la posición de un punto de un objeto estático y de uno de una pieza aprehendida por el manipulador. . . . .</i>	86
3.7	<i>Posición absoluta de un punto genérico de un lado de un objeto estático en presencia de incertidumbre . . . . .</i>	88
3.8	<i>Incertidumbre en el posicionamiento de una pieza en la pinza del robot. . . . .</i>	90
3.9	<i>Posición absoluta de un vértice de un objeto aprehendido en presencia de incertidumbre . . . . .</i>	91
3.10	<i>Suma de los vectores <math>\vec{p}_{g_o}</math> y <math>\vec{v}_o</math>. . . . .</i>	92
3.11	<i>Observación de una misma fuerza de reacción con distintas orientaciones del sensor. . . . .</i>	95
4.1	<i>Incertidumbre <math>U_v</math> de un vértice del objeto aprehendido . . . . .</i>	102
4.2	<i>Circunferencias <math>CCr_M</math> y <math>CCr_m</math> . . . . .</i>	104
4.3	<i>Circunferencias <math>CCg_M</math> y <math>CCg_m</math>. . . . .</i>	106
4.4	<i>Desplazamiento de <math>CU_v</math> en función de <math>k</math>. . . . .</i>	107
4.5	<i>Sección de <math>CU</math> perpendicular al plano coordenado <math>xy</math> y a la dirección del lado <math>l_a</math> nominal (sin considerar límites en <math>\phi_{r_o}</math>). . .</i>	109
4.6	<i>Posiciones relativas de <math>l_b</math> que generan diferentes formas de <math>Ul</math>. .</i>	111
4.7	<i><math>Ul</math> para el Caso A . . . . .</i>	112
4.8	<i><math>Ul</math> para el Caso B. . . . .</i>	113
4.9	<i>Incertidumbre en la fuerza generalizada en <math>C_3</math>. . . . .</i>	116
4.10	<i>Incertidumbre en la velocidad generalizada. . . . .</i>	117
5.1	<i>Ambigüedad en la determinación del lado de contacto usando solamente información de posición. . . . .</i>	123
5.2	<i>Determinación del lado de contacto a partir de la fuerza y par de reacción. . . . .</i>	124
5.3	<i>Caso en que sólo el par de reacción permite determinar el lado de contacto. . . . .</i>	125

5.4	<i>Ambigüedad en la determinación del lado de contacto a pesar de la información de posición y de fuerza.</i> . . . . .	126
5.5	<i>Ejemplo de un mismo contacto básico en configuraciones no conexas.</i> . . . . .	130
5.6	<i>Ejemplo de dos contactos básicos simultáneos alcanzados en configuraciones no conexas.</i> . . . . .	131
5.7	<i>Conjunto de direcciones de fuerzas generalizadas de reacción posibles en un contacto de tipo 1.</i> . . . . .	134
5.8	<i>Conjunto de direcciones de fuerzas generalizadas de reacción posibles en un contacto de tipo 2.</i> . . . . .	135
5.9	<i>Conjunto de direcciones de fuerzas generalizadas de reacción en el caso de dos contactos básicos, para una determinada orientación del objeto aprehendido.</i> . . . . .	136
5.10	<i>Conjunto de direcciones que puede tener la fuerza generalizada de reacción, en presencia de incertidumbre, en un contacto básico de tipo 1 para una determinada configuración nominal.</i> . . . . .	141
5.11	<i>Reducción de incertidumbre en dominios <math>DR</math> de estados con más de un contacto básico.</i> . . . . .	143
5.12	<i>Reducción de incertidumbre en dominios <math>DR</math> de estados con un único contacto básico.</i> . . . . .	145
5.13	<i>Umbral mínimo en la medición de fuerzas generalizadas.</i> . . . . .	147
5.14	<i>Descripción de la construcción de la frontera de <math>DG</math>.</i> . . . . .	149
5.15	<i>Estados confundibles con un único contacto básico asociado. Los contactos básicos de cada estado son: (a) ambos de tipo 1 o ambos de tipo 2 según se considere uno u otro objeto como aprehendido, (b) uno de tipo 1 y otro de tipo 2.</i> . . . . .	151
5.16	<i>Descripción conceptual de las normales <math>\hat{n}_e</math> a la frontera entre las realizaciones <math>DR_i</math> y <math>DR_j</math> de dos estados contiguos.</i> . . . . .	154
6.1	<i>Elementos del modelo de la tarea utilizado para la elaboración y ejecución del plan.</i> . . . . .	158
6.2	<i>Grafos <math>G\text{-Nom}</math> y <math>DG\text{-Nom}</math> para la misma tarea.</i> . . . . .	159

6.3	<i>Transición de CII a CcI en la que se alcanza siempre el mismo estado inicial.</i>	160
6.4	<i>Ejemplo de objetivo final insuficientemente especificado por el estado final.</i>	162
6.5	<i>Estado primario final y posibles contactos básicos que den por acabada correctamente la tarea.</i>	163
6.6	<i>Redistribución de los conjuntos de operadores TS.</i>	164
6.7	<i>Elaboración del plan a partir del modelo de la tarea.</i>	168
6.8	<i>Pasos de la ejecución de la tarea en relación con el plan.</i>	175
6.9	<i>a) Objetos nominales; b) realizaciones nominales de los estados; c) dominios de realización DR; d) dominios de observación de configuraciones DC.</i>	180
6.10	<i>a) Realizaciones para unas desviaciones dadas; b) configuraciones posibles no incluidas en ningún dominio DR ni en CII; c) configuraciones observables incluidas en CiI.</i>	181
6.11	<i>Ejemplo de circuito blando.</i>	185
6.12	<i>Ejemplo de circuito duro.</i>	186
6.13	<i>Ejemplo de deslizamiento que produce un circuito duro.</i>	187
6.14	<i>Procedimiento de supervisión.</i>	189
7.1	<i>Posicionamiento de un bloque en un rincón.</i>	192
7.2	<i>Descripción del objeto estático.</i>	193
7.3	<i>Descripción del objeto aprehendido.</i>	194
7.4	<i>Sistema de referencia de la pinza del robot.</i>	195
7.5	<i>Posición del bloque en la pinza del robot.</i>	196
7.6	<i>Vectores que relacionan los vértices de <math>\mathcal{B}</math> con el punto de referencia de la pinza del robot.</i>	197
7.7	<i>C-superficie asociada al contacto básico <math>(B_1, l_1)</math>.</i>	198
7.8	<i>Espacio de configuraciones para el problema bloque-rincón descrito.</i>	199

7.9	<i>Incertidumbre en la posición de los vértices y lados de <math>\mathcal{A}</math>.</i>	201
7.10	<i>Incertidumbre en la posición de los vértices de <math>\mathcal{B}</math>.</i>	202
7.11	<i>Circunferencias que limitan <math>Uv</math> para el vértice <math>B_1</math>, para <math>p_{r_{x_0}} = -143.3</math>, <math>p_{r_{y_0}} = 125</math> y <math>\phi_{r_0} = -\pi/4</math>.</i>	204
7.12	<i>Incertidumbre <math>Uv</math> para el vértice <math>B_1</math>, para <math>p_{r_{x_0}} = -143.3</math>, <math>p_{r_{y_0}} = 125</math> y <math>\phi_{r_0} = -\pi/4</math>.</i>	205
7.13	<i>Incertidumbre <math>CUv</math> para el vértice <math>B_1</math> en contacto con el punto de <math>l_1</math> correspondiente a <math>k = 0.5</math> para: a) <math>\phi_{r_0} = -\pi/4</math> y b) <math>\phi_{r_0} = -\pi/2</math>.</i>	206
7.14	<i>Incertidumbre <math>CUI</math> de <math>(B_1, l_1)</math> para: a) <math>\phi_{r_0} = -\pi/4</math> y b) <math>\phi_{r_0} = -\pi/2</math>.</i>	207
7.15	<i>Incertidumbre <math>CU</math> de <math>(B_1, l_1)</math>.</i>	208
7.16	<i>Partición de <math>\mathcal{C}</math> en presencia de incertidumbre.</i>	209
7.17	<i>Contactos básicos entre los objetos en los diferentes estados primarios.</i>	211
7.18	<i>Grafo de estados primarios contiguos.</i>	212
7.19	<i>Dominio <math>DR</math> del estado <math>Ep_{11}</math>.</i>	213
7.20	<i>Dominio <math>DR</math> del estado <math>Ep_{11,72}</math>.</i>	214
7.21	<i>Dominio <math>DR</math> del estado <math>Ep_{11,71,72,62}</math>.</i>	215
7.22	<i>Fuerzas generalizadas de reacción <math>DGr</math> posibles en <math>Ep_{11}</math>.</i>	216
7.23	<i>Dominio <math>DC</math> del estado <math>Ep_{11,72}</math>.</i>	217
7.24	<i>Unión del origen de <math>\mathcal{F}_3</math> con los puntos que representan la frontera de <math>DGr</math> en <math>f_7 = 1</math> (sin signo) para <math>Ep_{11}</math>.</i>	218
7.25	<i>Superficie <math>M_R</math> que limita a <math>DGr</math> para <math>Ep_{11}</math>.</i>	219
7.26	<i>Superficie <math>M</math> que limita el dominio <math>DG</math> para <math>Ep_{11}</math>.</i>	220
7.27	<i>Direcciones normales a la frontera de <math>DR_{11,72}</math> contenida en <math>DR_{11}</math>.</i>	221
7.28	<i>Cortes de <math>DR_{72}</math> y <math>DR_{11}</math> para <math>\phi = -100^\circ</math>.</i>	223
7.29	<i>Operadores <math>TS(Ep_{11}; Ep_{11})</math> sin incertidumbre en la velocidad.</i>	224
7.30	<i>Normales a <math>R_{11}</math> para todas las desviaciones posibles.</i>	225

---

7.31	<i>Operadores <math>TS(E_{p_{11}};E_{p_{11}})</math> con incertidumbre en la velocidad.</i>	226
7.32	<i>Representación tridimensional de los operadores <math>TS(E_{p_{11}};E_{p_{11}})</math> con incertidumbre en la velocidad.</i>	227
7.33	<i>Grafo DG-Nom.</i>	228
7.34	a) <i>Movimientos para pasar de <math>E_{p_{11}}</math> a <math>E_{p_{11},71,72,62}</math> y</i> b) <i>grafo DG-Plan resultante.</i>	230
7.35	a) <i>Movimientos para intentar seguir la secuencia solución <math>E_{p_{11}}-E_{p_{11},72}-E_{p_{11},71,72,62}</math> y</i> b) <i>grafo DG-Plan resultante.</i>	231
7.36	a) <i>Movimientos para intentar seguir la secuencia solución <math>E_{p_{72}}-E_{p_{72,62}}-E_{p_{11},71,72,62}</math> y</i> b) <i>grafo resultante.</i>	233
7.37	<i>DG-Plan para la solución completa.</i>	234



# Capítulo 1

## Introducción

La automatización mediante robots en el entorno industrial presenta un desarrollo continuo tanto en la variedad como en la cantidad de las aplicaciones. Su uso en soldadura, manipulación o pintura, por ejemplo, es ya clásico en la robótica industrial; sin embargo, la automatización de otras tareas aún se realiza frecuentemente mediante maquinaria específica especialmente diseñada para el caso, aunque aparentemente pudieran ser llevadas a cabo con robots. Tal es el caso de las tareas de montaje cuando las piezas han de encajar de forma muy precisa, o, en el caso más general, cuando las imprecisiones, tolerancias o errores existentes en la forma y tamaño de los objetos y en su posicionamiento son del orden de la precisión requerida para asegurar el correcto encaje de las piezas.

En la industria manufacturera, las tareas de montaje ocupan con frecuencia un porcentaje destacado del coste (tiempo y dinero) del producto final. En otros ámbitos, estas tareas suelen aparecer relacionadas con la manipulación de objetos cuando éstos deben ser cuidadosamente colocados en un lugar determinado. Su ejecución mediante robots, de forma general, es un tema pendiente de la denominada “robótica inteligente”.

## 1.1 Planteamiento del problema

El problema general de automatizar totalmente las operaciones de montaje robotizadas da lugar a una serie de problemas particulares que aún requieren aportaciones significativas para su solución satisfactoria. En este trabajo se aborda uno de ellos: *la determinación automática y fuera-de-línea de los movimientos que debe realizar un robot para llevar a cabo el montaje de dos objetos cuando existe incertidumbre en la forma y dimensiones de dichos objetos y en su posición relativa.*

Los movimientos del robot en los que existe posibilidad de contacto entre los objetos implican normalmente pequeños desplazamientos, por lo que se denominan movimientos de corto desarrollo.

La consideración de la incertidumbre introduce un alto grado de dificultad en la determinación automática de los movimientos de corto desarrollo que ha de efectuar el robot para llevar uno de los objetos a encajar correctamente en el otro. En ausencia de incertidumbre, estos movimientos se reducirían al seguimiento de trayectorias geométricas fijas, establecidas a partir de la descripción geométrica de los objetos y de sus posiciones. Estas trayectorias pueden determinarse mediante técnicas de planificación de caminos que han sido objeto de numerosos estudios.

Sin embargo, en la práctica es inevitable la presencia de incertidumbre en los valores reales de los parámetros y variables que describen la posición y forma de los objetos. Cuando esta incertidumbre es significativa el seguimiento exacto de una trayectoria geométrica fija y predefinida puede llevar a situaciones indeseadas en las que los objetos no encajen correctamente, en cuyo caso un intento de forzar el montaje puede producir un atascamiento antes de llegar a la posición relativa final deseada y originar daños en las piezas en juego y en el robot.

Por lo tanto, en presencia de incertidumbre los movimientos del robot deben ser suficientemente flexibles como para adaptarse a las posibles desviaciones que sufren los valores nominales, por ejemplo, de las posiciones de los objetos. Estos movimientos, denominados acomodaticios, permiten la variación en-línea de una trayectoria geométrica nominal en función de las fuerzas de reacción entre los objetos cuando éstos entran en contacto.

Un movimiento acomodaticio está definido por dos elementos: una consigna de movimiento que indica el movimiento nominal a realizar y cuando finalizarlo, y un conjunto de parámetros que indican la modificación de la trayectoria geométrica seguida por el robot cuando los objetos entren en contacto para

las condiciones reales de la tarea (diferentes de las condiciones nominales de la misma). Este conjunto de parámetros se selecciona de forma genérica de acuerdo con el comportamiento deseado del robot y el tipo de control necesario para lograrlo.

De este modo, el problema tratado en este trabajo equivale a la determinación de forma automática, para cada tarea en particular, de un conjunto de consignas de movimiento para el tipo de control del robot previamente seleccionado.

En general, la secuencia de consignas de movimiento que llevará a cabo el montaje no puede precisarse fuera-de-línea, ya que depende de la evolución real del montaje ante unas determinadas desviaciones de las variables y parámetros involucrados. Por ello, fuera-de-línea se determinará un conjunto de consignas de movimiento cuya aplicación, durante la ejecución del montaje, dependerá de las condiciones en que se encuentre el montaje en cada momento, es decir, dependerá de la información sensorial obtenida en-línea.

Este problema de planificación de movimientos no ha sido resuelto todavía de forma general, aunque se han formulado algunas propuestas de solución. Fundamentalmente existen tres aspectos que generan las mayores dificultades en la resolución del problema y establecen las limitaciones de las propuestas existentes: *la consideración de grados de libertad de rotación en los objetos, la inclusión de las fuerzas de fricción y la consideración de las diferentes fuentes de incertidumbre que afectan a las tareas de montaje robotizadas.*

Un aspecto adicional, a tener en cuenta en la planificación automática de los movimientos de corto desarrollo del robot, es que las soluciones que se propongan sean compatibles con algún procedimiento de seguimiento y supervisión de la ejecución de la tarea que permita detectar anomalías en-línea e intentar su corrección, o dar cabida a un nuevo proceso de planificación acorde con las condiciones reales del problema.

## 1.2 Motivación

En los procesos industriales de manufactura los resultados favorables de la *automatización industrial* en términos económicos, de seguridad de los operarios en tareas peligrosas y de la calidad del producto industrial final, han sido ampliamente constatados.

Estos resultados han sido aún mejorados, desde un punto de vista funcional

y económico, por la introducción del concepto de *flexibilidad* en la manufactura, que, para una amplia gama de productos, ha llevado al reemplazo de las máquinas de secuencia fija por máquinas multifuncionales programables y, en particular, por robots.

El paso siguiente en esta evolución consiste ahora en automatizar las tareas no sólo a nivel de su ejecución sino también a nivel de su análisis y programación, es decir, automatizar la programación de las máquinas que han de realizar la tarea de forma automática. Este juego de palabras da paso al concepto de *robótica inteligente*. Se pretende alcanzar la *automatización total* de las tareas, de forma que el operario sólo deba dar indicaciones de alto nivel y fácil comprensión intuitiva para que un sistema robotizado inteligente sea capaz de interpretarlas y de ejecutar las tareas.

Con este enfoque son numerosos los trabajos de investigación que se están llevando a cabo en todo el mundo y, en muchos casos, con resultados experimentales satisfactorios, al menos para determinadas tareas y condiciones de ejecución. Un ejemplo de ello es el problema de búsqueda de trayectorias libres de colisión para robots móviles.

En las tareas de montaje en las que la incertidumbre es significativa los resultados son más pobres, ya que presentan serias dificultades para su automatización total, y no existen aún soluciones prácticas generales. Igualmente, las soluciones teóricas propuestas tienen bastantes limitaciones.

La descomposición del montaje de un producto en operaciones elementales del robot (del tipo: buscar\_pieza, asir\_pieza, desplazar\_pieza, insertar\_pieza, etc) es un aspecto resuelto (aunque se continúa trabajando en su optimización), pero cuando llega el momento de efectuar la operación elemental de ensamblar una pieza en otra (con frecuencia se suele denominar también operación de *inserción*) su planificación automática sólo está resuelta si no existe incertidumbre. A lo sumo, si se admite que la incertidumbre está adecuadamente limitada, se puede resolver de forma semi-automática, utilizando estrategias de montaje preprogramadas por un operario.

Esta situación justifica la realización de un esfuerzo para intentar aportar nuevas soluciones al problema de la automatización total de las tareas de montaje y, por tanto, a la programación automática del robot para dichas tareas.

## 1.3 Objetivo y alcance de la tesis

El objetivo de la tesis es el siguiente:

Proponer un *sistema automático de planificación de movimientos de corto desarrollo para tareas de montaje mediante robots* que posea las siguientes características generales:

- Elaboración del plan a partir de la descripción geométrica de las piezas.
- Inclusión de las incertidumbres existentes en las tareas de montaje robotizadas.
- Consideración de grados de libertad de rotación.
- Consideración de fuerzas de fricción.
- Posibilidad de supervisar la ejecución del plan.
- Viabilidad real de implementación.

El planteamiento del sistema será independiente de los grados de libertad de la tarea, sin embargo los desarrollos de detalle se particularizarán para el caso de movimientos en el plano, es decir, con tres grados de libertad, uno de ellos de rotación. Esta simplificación facilita la implementación experimental sin dejar de cumplir con las características generales impuestas. Por otra parte, existen problemas reales que pueden ser resueltos mediante movimientos en un plano.

No se pretende construir un prototipo completo del sistema, pero sí realizar las pruebas experimentales necesarias para corroborar la validez de los conceptos teóricos que se desarrollen.

Un sistema de planificación capaz de considerar simultáneamente las características generales mencionadas (en particular, las fuentes de incertidumbre que pueden afectar una tarea de montaje, los grados de libertad de rotación y las fuerzas de fricción) supone un claro avance respecto a trabajos previos en este tema.

## 1.4 Antecedentes

### 1.4.1 Robots en tareas de montaje

Una interesante exposición de la problemática existente en la automatización de tareas de montaje y un enfoque de los caminos a seguir para su solución se encuentra en el trabajo de Nevins y Whitney (1977), en el que el robot es ya considerado como herramienta alternativa a las máquinas de secuencia fija.

A fin de posibilitar las operaciones de montaje robotizadas se han propuesto diversas medidas que, si bien no son generales, han facilitado la utilización de robots en este tipo de operaciones, aunque con las limitaciones propias de cada caso.

La primera y más evidente medida consiste en incrementar la precisión con que se realiza la operación de montaje, lo que equivale a reducir todas las incertidumbres que la afectan de un modo u otro. En la práctica esto implica básicamente la utilización de un robot de mayor precisión y una localización más precisa de los objetos (alimentadores o sistemas sensoriales de gran precisión). En esta línea, Day (1988) y Koçekali y col. (1991) describen las causas que afectan a la precisión de los robots, y Day sugiere además diferentes métodos para mejorarla. Lógicamente los avances tecnológicos permiten mejoras en esta dirección, pero siempre existirá un límite si se han de mantener unos costes competitivos.

Un segundo enfoque que permite facilitar el montaje robotizado, para una precisión determinada del robot, consiste en adecuar la forma geométrica de las piezas teniendo en cuenta en la fase de diseño la manera de llevar a cabo su montaje en el dispositivo que corresponda. Como ejemplo más típico y elemental de esta solución puede citarse la incorporación de biseles en las piezas a ensamblar, aunque los estudios llevan también a diseños de mayor complejidad. Whitney (1982) y Whitney y col. (1983) han trabajado en esta línea, estableciendo, entre otros estudios, las relaciones geométricas que hacen posible que un vástago se atasque durante su inserción en un agujero, con diferentes orientaciones. En general existe un compromiso entre la función que debe cumplir la pieza, la resistencia mecánica de la misma, la simplificación de su forma de cara a su manufactura y el diseño de su forma de cara al montaje automático.

Un paso más allá en la automatización de operaciones de montaje es la utilización de "acomodación pasiva". Consiste en la incorporación de dispositivos deformables (por ejemplo: resortes o muelles) capaces de

compensar un error de posición mediante la acumulación de energía mecánica cuando se aplica una fuerza sobre él. En robótica, la flexibilidad de los segmentos de un manipulador permite una acomodación pasiva muy rudimentaria. Cuando se trabaja con robots rígidos esta flexibilidad no es deseada debido a otros aspectos tales como la precisión del posicionamiento del elemento terminal y el control de movimientos del robot. Esto lleva a que se utilicen elementos especiales para realizar acomodación pasiva, situados normalmente entre el último segmento del manipulador y el elemento terminal o garra.

El más difundido de estos dispositivos es el RCC (Remote Center Compliance) del que se han comercializado numerosos modelos con diferentes soluciones técnicas (Whitney y Nevins, 1979). Este dispositivo define un punto en el espacio, denominado centro de acomodación (Mason, 1981), de forma que una fuerza cuya recta de acción pasa por ese punto produce un efecto de traslación pura y un par produce una rotación pura alrededor del mismo. Estos dispositivos son conceptualmente sencillos y realmente útiles en las operaciones de inserción con bordes biselados, ya que pueden compensar errores tanto de posicionamiento como de orientación del objeto sujeto en la garra cuando éste entra en contacto con otros objetos. Si el robot está dotado de un sistema de control de fuerza también pueden colaborar de forma significativa en su estabilidad cuando se establece o se pierde el contacto entre los objetos (Whitney, 1987).

La desventaja de un sistema de acomodación pasiva es evidente: un elemento deformable diseñado o ajustado para una tarea puede no ser útil para otra. Es decir, un dispositivo diseñado o ajustado para compensar errores en un marco de acomodación determinado (sistema de referencia en el que se expresan las restricciones al movimiento) (Mason, 1981) no necesariamente es válido en otro marco.

La búsqueda de métodos que permitan realizar acomodación independientemente de la tarea lleva al concepto de "acomodación activa".

En la acomodación activa (Basañez y Suárez, 1986) la compensación de errores de posición/orientación se lleva a cabo mediante elementos activos (motores, actuadores) que realizan movimientos específicos para ello. Estos dispositivos están guiados por un sistema de control de las fuerzas reacción entre los objetos, corrigiendo la posición para lograr mantener una relación preestablecida entre las fuerzas de reacción y las desviaciones referidas a la posición nominal. Requieren por lo tanto del uso de sensores de fuerza/par. La ventaja de la acomodación activa sobre la pasiva es que puede, para unos mismos elementos sensores y actuadores, programarse el tipo de respuesta y

el marco de acomodación necesario. La desventaja es que requiere un sistema de control de fuerza cuya realización puede ser compleja.

La acomodación activa puede llevarse a cabo básicamente de dos maneras. Una de ellas consiste en agregar dispositivos específicos que normalmente incluyen tanto los sensores como los actuadores y se colocan entre el último segmento del manipulador y el elemento terminal (también pueden colocarse independientemente del manipulador, por ejemplo en una mesa posicionadora, y modificar la posición/orientación del objeto que entra en contacto con el sujeto por el robot). Estos dispositivos agregan grados de libertad al manipulador, que son utilizados para compensar errores en su posición/orientación con respecto a los objetos estáticos. Un ejemplo de estos dispositivos se describe en el trabajo de Kazerooni (1988).

La segunda forma de realizar acomodación activa consiste en incorporar en el robot los sensores de fuerza (Shimano y Roth, 1978) y utilizar los propios actuadores del manipulador para compensar los errores de posición/orientación con respecto a los objetos estáticos utilizando un sistema de control adecuado. De esta manera se evita el uso de actuadores adicionales, aunque se complica el sistema de control del robot. Conceptualmente parece ser la solución óptima, y en esta línea se orientan las soluciones más generales. En este caso, la acomodación pasiva no es totalmente eliminada, sino que se transforma en un complemento de la activa. Por ejemplo, De Fazio, Seltzer y Whitney (1984) presentan un dispositivo para ser colocado en la muñeca del robot que trabaja como sensor de fuerza y como RCC simultáneamente.

Esta forma de realizar acomodación activa exige un control de posición/fuerza adecuado en el manipulador, lo que conlleva una problemática particular tal como se describe en el trabajo de Suárez (1988). Los trabajos sobre esquemas de control de posición/fuerza en robótica son numerosos, sin embargo todos ellos tienen su base en alguno de los siguientes tipos de control: de articulación libre (Paul y Shimano, 1976), de amortiguamiento (*damping*) (Whitney, 1977), de elasticidad (*stiffness*) (Salisbury, 1980), de impedancia (Hogan, 1980), o híbrido cartesiano (original de Raibert y Craig (1981) que ha sido recientemente reformulado por Fisher y Mujtaba (1992)). La estabilidad de estos sistemas de control es crítica cuando se toma o se pierde el contacto entre los objetos. Un detallado estudio de este tema y una recopilación de la literatura fundamental sobre el mismo se encuentra en los trabajos de Mills (1990) y Waibel y Kazerooni (1991).

El uso de acomodación activa permite, al menos teóricamente, resolver correctamente una gran cantidad de tareas afectadas de incertidumbre sin utilizar ningún dispositivo adicional. Ahora bien, para realizar un montaje

con acomodación activa es necesario determinar, por un lado, los parámetros que definen el marco de acomodación y el comportamiento del robot en cada uno de grados de libertad, y, por otro, los movimientos del manipulador que resuelven la tarea. Esto requiere que un operario conocedor del tema analice cuidadosamente la tarea para determinar la estrategia de montaje a seguir.

Debido a que los parámetros que rigen la acomodación y los movimientos del robot están mutuamente relacionados para una tarea determinada, en la práctica se fija uno de los items y en función de él se determina el otro considerando las características particulares de la tarea. En cualquiera de los casos, para realizar la programación del robot con acomodación activa es necesario un trabajo de análisis de la tarea por parte de un operario suficientemente cualificado. De este modo pueden resolverse tareas de montaje con estrategias particularizadas previamente elaboradas por un operario, aunque esto restringe la flexibilidad que podría alcanzar un sistema con automatización total. No obstante, el uso de estrategias preprogramadas dió lugar a interesantes trabajos desde el de Inoue (1974) para guiar una inserción cilíndrica y el de Will y Grossman (1975) introduciendo la idea de *guarded moves* (movimientos cuya finalización depende de una condición sensorial) hasta, por ejemplo, los de Strip (1987) que sugiere heurísticas para guiar la inserción de vástagos prismáticos utilizando control híbrido sobre un robot PUMA, o Caine, Lozano Perez y Seering (1989) que describen estrategias para ensamblar objetos sin biselados en dos y tres dimensiones.

El paso siguiente en el avance hacia la automatización total de una tarea consiste, por lo tanto, en desarrollar un sistema que sea capaz de determinar automáticamente los parámetros que rigen la acomodación y los movimientos del robot. Los trabajos en este campo también enfocan el problema fijando uno de los items e intentando determinar automáticamente el otro.

Un método de determinación automática del conjunto de parámetros que rige el comportamiento acomodaticio del manipulador de cara a compensar los errores de posición en montaje ha sido propuesto por Peshkin (1990) en un trabajo sumamente interesante. Desde un punto de vista práctico el mayor atractivo de este enfoque es que muchas tareas de montaje pueden resolverse nominalmente con un único movimiento cuya determinación puede ser muy sencilla.

La determinación automática de los movimientos del manipulador que llevan a ejecutar correctamente la tarea una vez fijado su comportamiento acomodaticio es el enfoque que más atención ha recibido. A pesar de ello aún no existen soluciones generales.

El tema en sí mismo, planificación de movimientos de corto desarrollo en presencia de incertidumbre, está íntimamente ligado a otros temas clave de la robótica avanzada, como son la programación automática de robots y el aprendizaje de tareas en robótica. De cara a una automatización total de la tarea, genera además la necesidad de profundizar en otros temas, aparte de los expuestos, que por su importancia o dificultad toman entidad propia, como por ejemplo los siguientes:

- La determinación automática de las secuencias óptimas de montaje cuando intervienen varios componentes, en la línea del trabajo de De Fazio y Whitney, (1987).
- La determinación automática de la forma óptima de aprehender el objeto a ensamblar, considerando conceptos tales como accesibilidad del objeto, viabilidad del montaje, estabilidad del objeto en la pinza, y técnicas de re-aprehensión cuando no existe una solución válida para las posiciones actuales de los objetos. Sobre este tema existe abundante bibliografía; una buena descripción del problema y un compendio de las referencias más relevantes puede encontrarse en Pertin-Troccaz (1989).
- El modelado y tratamiento de incertidumbre, tema que por su ingerencia directa en la planificación es tratado con detalle más adelante en este trabajo.

#### **1.4.2 Planificación automática de movimientos de corto desarrollo**

Los trabajos sobre planificación de movimientos de corto desarrollo en presencia de incertidumbre han sido llevados a cabo mediante diferentes enfoques.

En los primeros trabajos, el problema se aborda elaborando inicialmente un plan de movimientos sin considerar incertidumbre (esqueleto), para luego hacerle las modificaciones necesarias (refinamiento) cuando ésta es incluida, ya sea simulando diferentes realizaciones del plan (Lozano-Pérez, 1976) o propagando la incertidumbre a través de cada uno de sus pasos (Taylor, 1976). Esta tendencia ha perdido peso debido a que pequeñas variaciones en la geometría de los objetos obliga a realizar grandes cambios en la estrategia final de montaje.

Entre las propuestas más recientes cabe citar las de Gottschlich y Kak (1989, 1991). En la primer propuesta el plan nominal se realiza en base

a movimientos rectilíneos y luego se deben aplicar estrategias en-línea de recuperación de errores cuando el plan es ejecutado. Estas estrategias sólo se describen para el caso de la inserción de un vástago cilíndrico. El trabajo presta especial atención a los efectos dinámicos del sensor de fuerza en los movimientos acomodaticios. En su segunda propuesta, el plan nominal se genera utilizando campos de potenciales y luego se adapta para trabajar en presencia de incertidumbre recurriendo a una tabla de estrategias de acomodación predefinidas. El acceso a la tabla se realiza según los grados de libertad en que la incertidumbre puede causar una colisión, y con la estrategia de acomodación correspondiente se construye un subplan especial para esa situación. La unión de todos los subplanes resultantes genera el plan completo para una ejecución real.

Un enfoque diferente es el desarrollado por Dufay y Latombe (1984) cuya propuesta consta de dos fases. En la primera, llamada de aprendizaje, se realizan varias ejecuciones de la tarea resolviéndola mediante la aplicación de estrategias locales basadas en reglas y se almacena el procedimiento seguido en cada caso; en la segunda fase, denominada de inducción, se fusionan los procedimientos utilizados en cada ejecución para generar una estrategia global o plan final de movimientos que incluye movimientos condicionales. Esta fusión de procedimientos elimina algunas acciones redundantes. La robustez del plan aumenta lógicamente con el número de ejecuciones realizadas en la primera fase, ya que pueden utilizarse mayor número de estrategias locales que serán reflejadas luego en la estrategia global. Sin embargo, independientemente del número de ejecuciones de “entrenamiento” de la tarea, no existe garantía alguna de que el plan final sea válido para unas desviaciones cualesquiera dentro de los rangos permitidos por la incertidumbre.

Lozano-Pérez, Taylor y Mason (1984) proponen una idea distinta, cuyo enfoque, más riguroso que los anteriores, genera el plan considerando la incertidumbre desde un primer momento. La nueva propuesta, que utiliza el Espacio de Configuraciones y asume un control de amortiguamiento, tiene como base el concepto de *preimage* (conjunto de configuraciones desde las que con seguridad se puede alcanzar un objetivo mediante una cierta consigna de velocidad considerando incertidumbre en la posición y control de robot). La estrategia se elabora a partir del objetivo deseado y retrocediendo hasta la posición inicial mediante un encadenamiento hacia atrás de *preimages*. Este trabajo teórico es complementado por Mason (1984) que prueba que el procedimiento propuesto es “correcto” y “completo” (es decir, si se encuentra una estrategia ésta es válida, y, si existe una solución al problema el procedimiento la encuentra). Shekhar y Latombe (1991) trabajan en el reconocimiento del objetivo deseado para determinar las *preimages*.

Siguiendo esta teoría aparecen varios trabajos que van haciendo aportaciones prácticas al respecto. Erdmann (1984, 1985 y 1986) profundiza sobre el concepto de *preimage* e introduce el de *backprojection* (conjunto de configuraciones desde las que se puede alcanzar el objetivo mediante una cierta consigna de velocidad en presencia de incertidumbre, pero sin garantías de que se pueda detectar cuándo se alcanza el objetivo). Las *backprojections* son utilizadas para calcular *preimages* mediante algoritmos concretos, aunque limitados a dos grados de libertad. Erdmann también trata con cierto detalle el problema de representación y análisis de las fuerzas de fricción en el Espacio de Configuraciones, considerando dos grados de libertad de traslación y uno de rotación. Otro trabajo interesante en lo referente a fuerzas de fricción en movimientos en el plano es el de Rajan, Burridge y Schwartz (1987).

En la misma línea se encuentra el trabajo de Buckley (1987, 1989b), que extiende los conceptos antes descritos a movimientos gobernados por un control de elasticidad. En su trabajo presenta un sistema interactivo para la evaluación de planes, así como la realización de un planificador de estrategias para resolver tareas sencillas trabajando con objetos poliédricos en tres grados de libertad de traslación.

Los trabajos de Buckley (1987, 1989a) también incluyen un sistema de enseñanza de movimientos acomodaticios, siempre considerando tres grados de libertad de traslación y utilizando el concepto de *backprojection*. El operario le indica al sistema un punto del espacio (o una velocidad cuando se trabaja con amortiguamiento) que el sistema toma como referencia para determinar una zona desde la cual se puede garantizar que se alcanzará el objetivo con un movimiento determinado. Las indicaciones se van dando de forma que se cubra el objetivo final y retrocediendo hasta que la zona de comienzo del movimiento englobe todas las posibles configuraciones iniciales de la tarea. Si se encuentra una solución está garantizado que ésta funciona, pero no se garantiza que siempre pueda encontrarse. En este procedimiento analítico de enseñanza se considera incertidumbre sólo en la posición y velocidad del manipulador.

Otros trabajos sobre enseñanza de movimientos acomodaticios se basan en realizaciones experimentales; por ejemplo, Asada e Izumin (1989) presentan un sistema que, partiendo de una realización experimental de la tarea por parte de un operario, deduce el programa del robot considerando un control híbrido. Mientras el operario ejecuta la tarea el sistema captura la información de configuración y fuerza, y luego hace una interpretación de esa información para generar automáticamente el programa del robot.

Aunque no hace uso de los conceptos propuestos por Lozano-Pérez, Taylor y Mason (1984) incluiremos en esta línea el trabajo de Turk (1985),

quien propone un método de planificación de movimientos de corto desarrollo considerando dos grados de libertad de traslación y objetos poligonales, y asumiendo el uso de control de amortiguamiento. En la propuesta el conjunto de configuraciones libres del Espacio de Configuraciones se divide en regiones limitadas por pares de lados (configuraciones de contacto), y luego se determinan las direcciones de movimiento para pasar de una región a otra. Posteriormente, estas direcciones se filtran para establecer un número mínimo de posibles soluciones.

Los trabajos de planificación mencionados en esta línea no consideran incertidumbre en la forma y posición de los objetos. Ésta es incluida por Donald (1988) mediante una ampliación de la dimensión del Espacio de Configuraciones. Al Espacio de Configuraciones convencional le agrega una dimensión por cada parámetro o variable afectada de incertidumbre y en ella se representan todos sus valores posibles. El Espacio de Configuraciones que se corresponde con la tarea real es por lo tanto un “corte” de este Espacio de Configuraciones extendido para un cierto conjunto desconocido de desviaciones. El plan se debe elaborar sobre el Espacio de Configuraciones extendido para garantizar la solución en presencia de incertidumbre. La solución es aplicable cuando se considera incertidumbre en un número muy reducido de parámetros, pero carece de sentido en el caso general. Más que para abordar el problema de planificación con incertidumbre, esta idea sería aplicable a problemas en los que la incertidumbre no sea significativa pero se desconozca el valor nominal de algún parámetro o variable.

Los conceptos básicos desarrollados en esta línea de trabajo han sido recopilados por Latombe (1991), como parte de su obra sobre planificación de los movimientos de un robot.

Finalmente, un enfoque más reciente del problema de planificación de movimientos de corto desarrollo para montaje en presencia de incertidumbre consiste en elaborar el plan en base a los contactos existentes entre los objetos.

En esta línea pueden mencionarse los siguientes trabajos. Laugier (1989) propone un método de planificación de movimientos de corto desarrollo trabajando sobre el espacio de contacto. Cada paso se determina mediante un análisis de la tarea realizado partiendo del estado final deseado, y desmontando el conjunto hasta llegar a estados factibles de ser considerados como iniciales cuando se realice la ejecución. Desai y Volz (1989) describen un modo de identificación de los contactos existentes durante la ejecución de movimientos de corto desarrollo; esta identificación es una condición necesaria en algunos planes para saber cuando una fase o etapa del plan ha llegado a su fin. Describen un modo de identificación pasivo en el que la identificación se lleva

a cabo a partir de la información sensorial de configuración y fuerza adquirida de forma estática, y otro activo, para cuando el primero no sea suficiente, en el que es necesario realizar un movimiento del manipulador para captar información adicional.

Xiao y Volz (1989) describen un procedimiento de replanificación de movimientos basado en la identificación de los contactos entre los objetos durante la ejecución de la tarea. Este procedimiento, denominado “replanificación dinámica” es aplicable cuando un plan elaborado sin considerar incertidumbre falla en su ejecución. La propuesta tiene las siguientes limitaciones: el objeto manipulado y la garra deben formar un sólido convexo y no incluye grados de libertad de rotación. Por otra parte debe tenerse en cuenta que se trata de un proceso de replanificación, es decir, exige la existencia de un plan previamente elaborado para iniciar la tarea.

El trabajo que aquí se presenta puede encuadrarse en la línea de planificadores de movimientos de corto desarrollo basados en los contactos entre los objetos. La primera propuesta descrita por Suárez y Basañez (1989) contempla la fusión del Espacio de Configuraciones con el Espacio de Fuerzas. En este nuevo espacio, de Posición-Fuerza, se definen estados de posición/fuerza de la tarea como subconjuntos de puntos (se establecen criterios para su definición que asignan a cada conjunto de configuraciones las direcciones de fuerza que son posibles como fuerzas de reacción) y se establecen operadores para pasar de un estado a otro. Se considera incertidumbre en la configuración y fuerza de acuerdo con un modelo general, sin contemplar la influencia de cada fuente de incertidumbre por separado y sólo se trabaja en dos grados de libertad. La evolución de esta primera propuesta y un estudio detallado de las fuentes de incertidumbre y su modelado en el Espacio de Configuraciones (Basañez y Suárez, 1991) ha dado pie al presente trabajo, en el que los estados se definen en base a los diferentes contactos posibles entre los objetos. Los primeros resultados de esta nueva propuesta han sido presentados en (Suárez y Basañez, 1991) e ilustrados mediante un ejemplo concreto en (Basañez y Suárez, 1992).

## 1.5 Metodología

Tal como se indicó en la sección 1.3, en este trabajo los conceptos teóricos de la planificación y ejecución de la tarea se plantean de forma general, pero son específicamente desarrollados para el caso de movimientos en el plano, con dos grados de libertad de traslación y uno de rotación. Por lo tanto,

las definiciones y proposiciones son válidas independientemente del número de grados de libertad del problema. Por el contrario, el desarrollo de cada aspecto mediante ecuaciones algebraicas específicas corresponde al problema particular de movimientos en el plano.

Como queda de manifiesto en el desarrollo del trabajo, el uso de información sobre la fuerzas de reacción juega un papel fundamental. Se ha asumido por lo tanto que en el equipamiento necesario para llevar a la práctica el plan se incluye un sensor capaz de indicar la fuerza y el par de reacción cuando se establece contacto entre los objetos. También se ha asumido la existencia de un control de posición/fuerza en el robot con capacidad para actuar como control de amortiguamiento.

Para desarrollar este trabajo se ha comenzado por estudiar detalladamente dos puntos básicos: cómo realizar la descripción de la tarea en lo que a posición relativa de los objetos se refiere y cuáles son las diferentes fuentes de incertidumbre que deben tenerse en cuenta. El paso siguiente ha consistido lógicamente en establecer un modelo de incertidumbre en el sistema de representación escogido.

Referente al primer punto, el hecho de tener que considerar las restricciones al movimiento de un objeto impuestas por los demás objetos existentes en el entorno llevó al uso del Espacio de Configuraciones como herramienta básica. Las dificultades existentes en la construcción de forma explícita del Espacio de Configuraciones no son despreciables cuando se usa cualquier otro sistema de representación en el que las restricciones en el movimiento de un objeto se consideren de forma implícita. En lo que respecta a las fuentes de incertidumbre, se realizó una clasificación de las mismas estableciendo no tanto su origen absoluto (en última instancia la incertidumbre siempre puede considerarse de origen sensorial) sino aquél que influye explícitamente en las tareas de montaje y que distingue una fuente de las demás. A continuación se ha buscado la forma de modelar en el Espacio de Configuraciones la incertidumbre generada por las diferentes fuentes.

Con esta representación de las posibles posiciones relativas de los objetos considerando la incertidumbre se ha abordado el problema de la planificación propiamente dicha. Dado que el número de posibles posiciones relativas de los objetos es infinito éstas no pueden considerarse de forma individual como posibles situaciones al elaborar el plan. Por lo tanto, la solución pasaba por buscar una forma de discretizar, en un número finito y relativamente bajo, las posibles situaciones en que se pueden encontrar los objetos durante el desarrollo de la tarea. A partir de allí podrían aplicarse una variedad de técnicas conocidas de planificación. Esto llevó a establecer el concepto de

estados de la tarea, definidos en base a los diferentes contactos que pueden tener lugar entre los objetos.

Considerando que es posible caracterizar la situación inicial de los objetos y su situación final deseada una vez realizado el montaje mediante sendos estados específicos, la elaboración del plan de montaje consistiría en buscar la manera de hacer evolucionar la tarea del primero de ellos al segundo. Para ello los estados se representaron como nodos en un grafo en el que un arco entre dos nodos significa que existe la posibilidad de pasar entre los estados correspondientes mediante algún movimiento del robot. La elaboración del plan se reduce, básicamente, a la búsqueda de una secuencia adecuada de estados en este grafo y a la determinación de los movimientos del robot que permiten su realización en la práctica. Los movimientos que permiten la transición entre los estados seleccionados se determinan considerando la existencia del control de posición/fuerza mencionado anteriormente y la incertidumbre pertinente.

Durante la ejecución del plan, el sistema debe ser capaz de reconocer en qué estado se encuentra la tarea para indicar el movimiento del robot que corresponde realizar. Aquí es donde la información de los sensores de fuerza/par adquiere su importancia, al ser fusionada con la información disponible sobre la configuración de los objetos. Para poder estimar cuál es el estado actual de la tarea se determinan a priori, fuera-de-línea, todas las posibles configuraciones y fuerzas de reacción que pueden tener lugar en cada uno de los estados posibles. Contrastando esta información con la obtenida en-línea de los correspondientes sensores es posible realizar una estimación del estado en curso.

La supervisión de la tarea puede realizarse almacenando la secuencia de estados reales. La ocurrencia de estados ajenos al plan o de secuencias de estados no previstas en él indica la existencia de anomalías en el desarrollo de la tarea.

## 1.6 Contenido de la Tesis

La tesis está dividida en ocho capítulos. Tras este capítulo de introducción, en el que se ha presentado el problema a resolver, el objetivo de la tesis, los antecedentes existentes en este tema de investigación y la metodología seguida, la tesis está estructurada de la siguiente manera.

En el *capítulo dos* se comienza por describir las consideraciones sobre

las características y propiedades de los objetos con los que podrá trabajar el planificador. A continuación se describe el concepto de Espacio de Configuraciones de forma general, para luego particularizar su estudio detallado al caso de movimientos en el plano. Sigue con la descripción de las fuerzas de reacción en relación al Espacio de Configuraciones, también tratadas con detalle para el caso de movimientos en el plano, haciéndose especial énfasis en las fuerzas de fricción. El capítulo finaliza con la descripción del modelo escogido para representar las fuerzas y pares de reacción simultáneamente, y de un procedimiento para determinarlos a partir de las condiciones geométricas de los contactos en el espacio físico.

Los capítulos tres y cuatro están dedicado a la incertidumbre. En el *capítulo tres* se trata la incertidumbre en el espacio físico. En la primera sección se dan los antecedentes relevantes en el modelado de la incertidumbre en relación con el tema que nos ocupa, y en las siguientes se describen los modelos de incertidumbre establecidos en el espacio físico considerando por separado cada una de las fuentes de incertidumbre que afectan a una tarea de montaje robotizada.

En el *capítulo cuatro* se trata la incertidumbre en el Espacio de Configuraciones. Los modelos de incertidumbre adoptados en el espacio físico son utilizados para modelar la incertidumbre en el Espacio de Configuraciones, donde será de utilidad al elaborar y ejecutar el plan. La sección final del capítulo describe una partición del Espacio de Configuraciones en tres zonas (espacio libre, posible contacto y acceso imposible) en presencia de las incertidumbres modeladas.

En el *capítulo cinco* se aborda el problema de descomponer la tarea en un número finito de posibles situaciones. Comienza con una introducción en la que se pone de manifiesto la importancia de las fuerzas/pares de reacción para diferenciar situaciones de contacto en presencia de incertidumbre. A continuación se definen los estados de la tarea en base a los diferentes contactos básicos que pueden tener lugar. A partir del concepto de estado se definen los dominios de realización (configuraciones en que puede tener lugar un estado) y de dominios de observación (configuraciones y fuerzas/pares de reacción que pueden ser medidas durante la ocurrencia de un estado). Estos dominios son la base del procedimiento de elaboración y ejecución del plan. El capítulo termina con la definición de los operadores de cambio de estado y su determinación.

El *capítulo seis* se centra en el procedimiento de planificación y de ejecución de la tarea. Consta de tres secciones. En la primera se describe un modelo de la tarea que incluye toda la información necesaria para su planificación y ejecución. La segunda sección trata sobre el procedimiento de planificación;

en ella se describen los criterios generales a seguir y las fases en que divide la elaboración del plan aplicando estos criterios. La tercera sección se refiere a la ejecución de la tarea. Se describen las operaciones necesarias para llevar a cabo el plan de montaje: la estimación del estado actual de la tarea y la determinación del operador de cambio de estado correspondiente. Se describe también el procedimiento propuesto de supervisión para detectar secuencias repetitivas de estados y secuencias anómalas.

En el *capítulo siete* se ilustran los conceptos expuestos en los capítulos precedentes aplicándolos a una tarea en concreto con tres grados de libertad: el posicionamiento de un bloque en un rincón. Se describen mediante ejemplos los pasos del procedimiento seguido para llegar a la elaboración del plan de montaje, tratando de mantener en todo momento una visión intuitiva de la evolución de la tarea.

Finalmente, el *capítulo ocho* se encuentra dividido en dos secciones: la primera resume las principales aportaciones realizadas en este trabajo, y la segunda describe una serie de temas que pueden dar cabida a trabajos futuros en esta línea, tratando de indicar en cada uno de ellos el posible camino a seguir.

# Capítulo 2

## Elementos para la representación de la tarea

En este capítulo se introducen los elementos necesarios para llevar a cabo la representación de la tarea en vistas a la planificación de la misma. Se comienza con la descripción de los objetos y del modelo adoptado para su representación. Las dos secciones siguientes versan sobre la expresión de la posición y orientación del objeto sujeto por la pinza del robot con respecto a los objetos fijos en el entorno de trabajo. Para ello, se expone el concepto de Espacio de Configuraciones, primero en forma general y luego en forma particular para el caso de movimientos en el plano. Las tres secciones restantes se refieren a las fuerzas de reacción. La sección cuarta está dedicada a la interpretación de la fuerza y par de reacción en el Espacio de Configuraciones, como una fuerza generalizada. En la sección siguiente, quinta, se describe un modelo de las fuerzas generalizadas de fricción. La sexta y última sección está dedicada a la representación de las fuerzas generalizadas, en ella se expone un método gráfico que facilita su realización.

### 2.1 Consideraciones sobre los objetos

#### 2.1.1 Características de los objetos

El conocimiento de los tipos y características principales de las piezas que intervienen en la tarea ayuda al sistema planificador a mejorar los resultados y simplifica su funcionamiento; este conocimiento puede ser incluido en el

proceso de elaboración del plan de forma implícita o explícita. En este trabajo se asume que los objetos son:

- *poliédricos*: los objetos nominales tienen sus caras planas, aunque los objetos reales puedan tener pequeñas curvaturas en sus caras como fruto de las tolerancias en su fabricación (apartado 3.2.1).
- *rígidos*: los objetos tienen el grado suficiente de rigidez para no deformarse cuando entran en contacto o se aplican fuerzas sobre ellos.

No se impone ninguna restricción en cuanto a convexidad.

Estas asunciones se consideran igualmente válidas para cualquier parte sólida del entorno de trabajo que intervenga en la tarea.

### Condición geométrica adicional

Para que los objetos tridimensionales reales movidos en un plano paralelo al de referencia puedan modelarse como objetos bidimensionales movidos en el plano que los contiene, tal como se describe en el apartado 2.3.2, se impone además la siguiente condición:

- Todas las aristas del objeto manipulado por el robot y/o todas las de cada objeto en reposo en el entorno de trabajo son paralelas o perpendiculares a un plano de referencia.

## 2.1.2 Modelo de los objetos

El problema de mover en un plano un objeto real tridimensional se puede descomponer en un conjunto de problemas bidimensionales en los que los objetos se modelan mediante polígonos. La correspondencia entre los polígonos de cada uno de los problemas bidimensionales y los poliedros del problema real se describe en la sección 2.3.2, haciendo uso del Espacio de Configuraciones. A continuación se introduce una forma genérica de describir los objetos “planos” correspondientes a los problemas bidimensionales.

Uno de los problemas presentes en la descripción de una pieza afectada de incertidumbre cuando se ha de indicar su posición en relación a la pinza de un robot, es la inexistencia de un punto perfectamente definido para fijar el sistema de coordenadas de referencia. Esto hace que a veces se especifiquen sistemas de referencia ligados a un objeto móvil de una manera inconsistente por la presencia de incertidumbre.

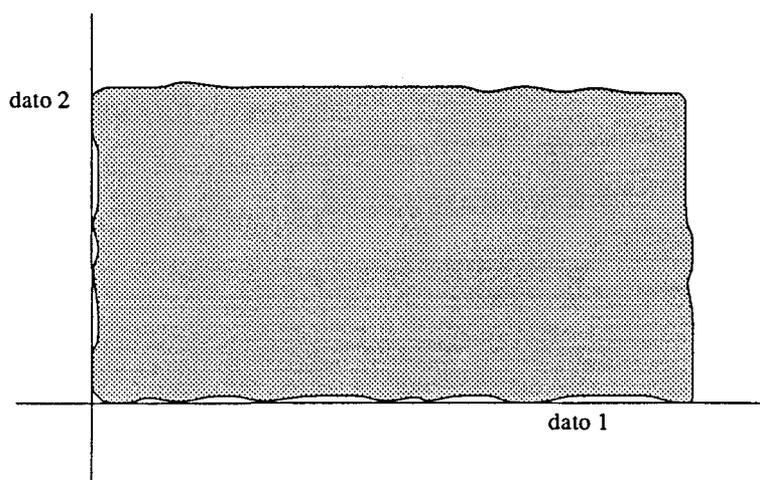


Figura 2.1: Ejemplo de Sistema de Datos asociado a un objeto.

Para definir de forma correcta un sistema de referencia ligado a un objeto, puede utilizarse el concepto de *Sistemas de Datos (Datum Systems)* (Requicha, 1983). En este contexto, un *Dato* es definido como una entidad geométrica perfecta que va asociada a una característica del objeto real inherentemente imperfecta. A partir de un Sistema de Datos se puede indicar la posición de cualquier característica de un objeto, o especificar nuevos Sistemas de Datos que permitan descripciones más claras o de mayor sencillez. Mediante un ordenamiento adecuado de Datos se puede construir un *Sistema de Datos Maestro*, que sirve como sistema básico de coordenadas, tal como se ilustra en el ejemplo de la figura 2.1. Este procedimiento es aplicable tanto a objetos bidimensionales como tridimensionales.

En este trabajo, para evitar especificaciones diferentes para cada objeto, convendremos en definir, a partir del Sistema de Datos Maestro, que sea necesario en cada caso, un Sistema de Datos que tendrá la misma estructura para todos los objetos planos: un punto  $P_g$  y un eje de referencia  $j$  que tiene su origen en  $P_g$ .

De este modo cada vértice del objeto puede indicarse mediante coordenadas polares, utilizando el módulo del vector  $\vec{v}$  desde  $P_g$  al vértice y el ángulo  $\alpha$  que  $\vec{v}$  forma con el eje  $j$ , medido por convención en sentido levógiro. La figura 2.2 muestra cómo se caracteriza un objeto especificando cada uno de sus vértices, con total independencia de su posición en el espacio real y del Sistema de Datos Maestro utilizado para fijar el punto  $P_g$  y el eje de referencia  $j$ .

La descripción geométrica del entorno de trabajo adoptada es mucho más

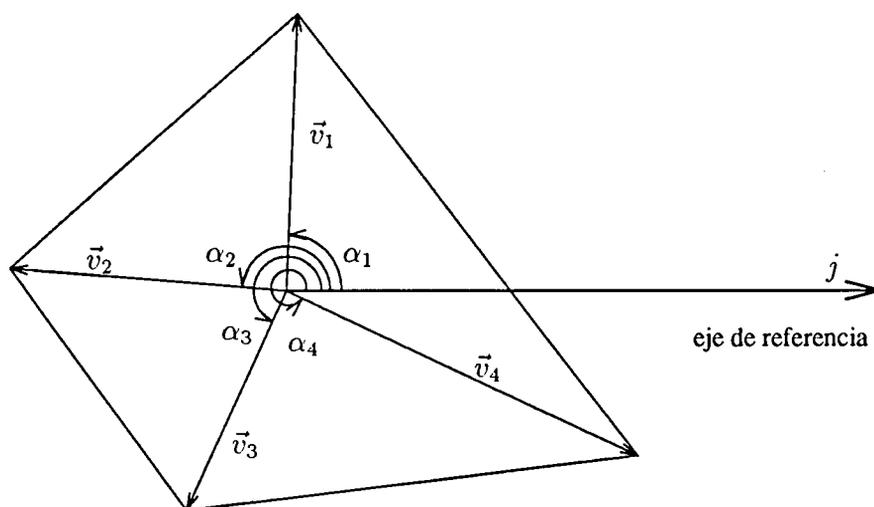


Figura 2.2: Descripción de un objeto “plano” mediante la especificación de sus vértices.

sencilla, y viene dada directamente por la posición de sus vértices en un sistema de referencia absoluto fijo en el espacio de trabajo. Un objeto estático en el entorno de trabajo también puede describirse de este modo.

## 2.2 Espacio de Configuraciones $\mathcal{C}$

El Espacio de Configuraciones es una herramienta básica ampliamente usada en la planificación en robótica. En los apartados siguientes se resumen los conceptos que sirven como base para su posterior aplicación en este trabajo.

### 2.2.1 Conceptos generales

Para fijar la posición de los puntos de un objeto rígido es necesario definir un conjunto de  $n$  variables independientes que determinen la posición y orientación del objeto. Este conjunto de variables indica la *configuración* ( $\vec{c}$ ) del objeto, y el espacio  $n$ -dimensional que ellas generan se denomina *Espacio de Configuraciones* ( $\mathcal{C}$ ) (Lozano Perez, 1981,1983).

El número  $n$  de variables independientes necesario para especificar la

configuración de un objeto coincide con el número de grados de libertad que éste posee, sean de traslación o de rotación. Para objetos de dimensión  $k$  el número de variables está dado por

$$n = k + \binom{k}{2} \quad (2.1)$$

donde  $k$  variables determinan la posición de un punto de referencia del sólido (en principio arbitrariamente elegido) y  $\binom{k}{2}$  indican la orientación del sólido alrededor de ese punto.

En el caso de objetos en el espacio real de 3 dimensiones, acorde con la expresión (2.1), son necesarias 6 variables para especificar completamente su configuración. Si la posición del punto de referencia se expresa en coordenadas cartesianas resulta,

$$\vec{c} \in (\mathbb{R}^3 \times SO(3)) \quad (2.2)$$

donde  $\mathbb{R}^3$  es el espacio de las traslaciones que representan la posición del punto de referencia del objeto, y  $SO(3)$  es el espacio de las rotaciones esféricas que indican la orientación del objeto.

De este modo, las configuraciones de un objeto en el mundo real se representan mediante puntos de  $\mathcal{C}$ . Esto significa que el problema de manipular un objeto en el espacio real puede convertirse en el problema de mover un punto en un espacio  $\mathcal{C}$  de mayor dimensión.

### 2.2.2 Configuración de un objeto en la pinza de un robot

Cuando un objeto está sujeto por la pinza de un robot, su configuración puede obtenerse aplicando una transformación constante a la configuración de la pinza.

A su vez, la configuración de la pinza del robot puede obtenerse a partir del conjunto de variables articulares que indica la posición de cada una de las articulaciones del manipulador y que define por tanto la configuración del mismo.

En el espacio físico real, si el número de articulaciones del manipulador es inferior a 6, el objeto sujeto en su pinza sólo podrá alcanzar un subconjunto de dimensión menor de configuraciones de  $\mathcal{C}$ ; si por el contrario, el número de articulaciones del manipulador es mayor o igual que 6, el objeto podrá, dentro

del espacio de trabajo del robot, alcanzar cualquier configuración, e incluso en algunos casos hacerlo con diferentes configuraciones del manipulador.

### 2.2.3 Configuraciones posibles e imposibles

Un objeto manipulado por un robot puede tener restricciones de movimiento en determinados rangos de sus grados de libertad. Esto es debido a que algunas configuraciones implican interferencia física entre el objeto o el manipulador y otros objetos del entorno de trabajo.

En  $\mathcal{C}$ , equivale a decir que sólo un subconjunto de puntos representan configuraciones posibles en las que no hay interferencia física entre los objetos considerados, incluido el robot. Se puede realizar entonces una partición de  $\mathcal{C}$  en dos conjuntos que agrupen respectivamente las configuraciones posibles y las imposibles.

Sean,

$A_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) los objetos existentes en el espacio de trabajo

$B$  el objeto sujeto en la pinza del manipulador

$B_{\vec{c}}$  el objeto  $B$  en la configuración  $\vec{c}$

entonces  $\mathcal{C}$  se divide en:

- *Conjunto de configuraciones posibles ( $C_p$ )*

$$C_p = \{\vec{c} \mid B_{\vec{c}} \cap A_j = \emptyset \quad \forall j\} \quad (2.3)$$

- *Conjunto de configuraciones imposibles ( $C_i$ )*

$$C_i = \{\vec{c} \mid \exists j \quad B_{\vec{c}} \cap A_j \neq \emptyset\} = \overline{C_p} \quad (2.4)$$

A su vez el conjunto de configuraciones posibles  $C_p$  se divide en,

- *Conjunto de configuraciones de contacto ( $C_c$ )*  
(también denominado *espacio de contacto*)

$$C_c = \{\vec{c} \mid \vec{c} \in \partial C_p\} \quad (\partial C_p \text{ representa la frontera de } C_p) \quad (2.5)$$

- *Conjunto de configuraciones libres ( $C_l$ )*

$$C_l = C_p \cap \overline{C_c} \quad (2.6)$$

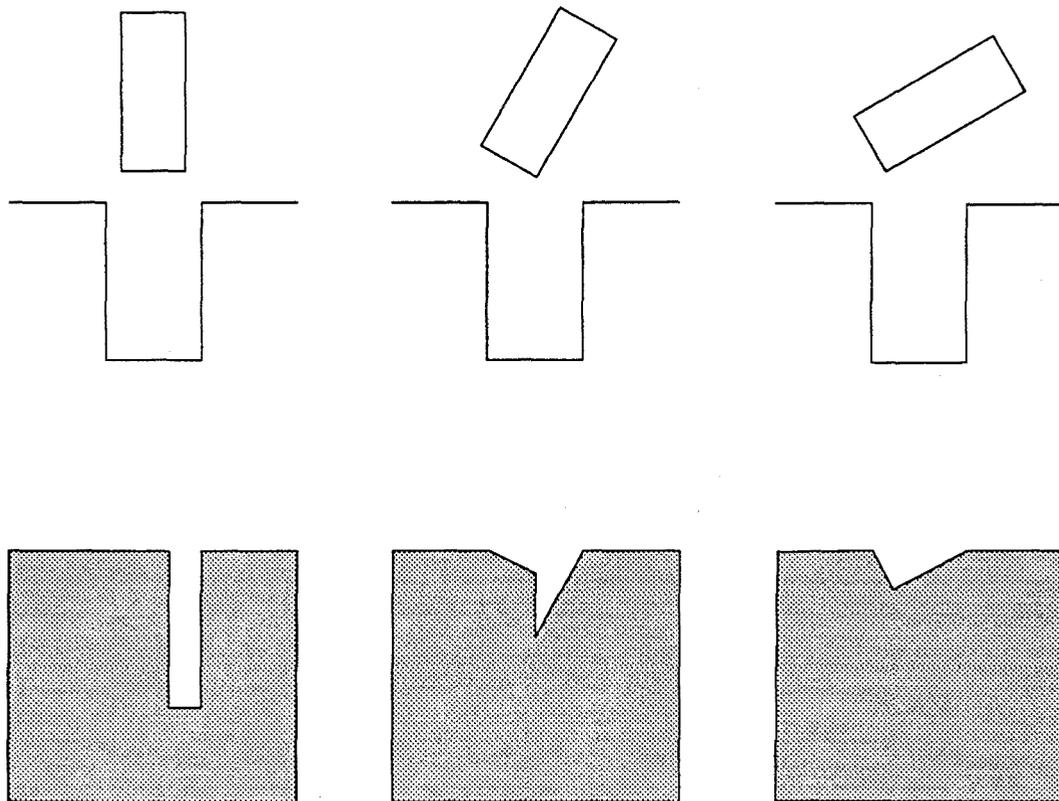


Figura 2.3:  $\mathcal{C}$  para un vástago y un agujero en 2 grados de libertad (traslación en el plano del dibujo).

Las figuras 2.3 y 2.4 ilustran dos ejemplos de  $\mathcal{C}$ , limitados a 2 y 3 grados de libertad, de forma que la visualización gráfica del resultado sea sencilla. La figura 2.3 muestra el Espacio de Configuraciones de un vástago en un entorno formado por una pieza con un agujero considerando sólo dos grados de libertad de traslación, para tres orientaciones diferentes del vástago; la zona sombreada representa a  $\mathcal{C}_i$ . Cuando se considera que el vástago además de trasladarse puede girar (tres grados de libertad en el plano), resulta el Espacio de Configuraciones ilustrado en la figura 2.4. Puede notarse que los espacios bidimensionales de la figura 2.3 equivalen a cortes, para  $\phi$  constante, del espacio tridimensional mostrado en la figura 2.4.

La principal ventaja de usar  $\mathcal{C}$  como herramienta para transformar el problema de mover un objeto real entre obstáculos reales, en el problema de mover un punto entre obstáculos modificados en  $\mathcal{C}$ , es que las restricciones de movimiento aparecen de forma explícita y son más fáciles de manejar. Sin embargo, el cálculo explícito de  $\mathcal{C}_c$ , que permite delimitar cada uno de los

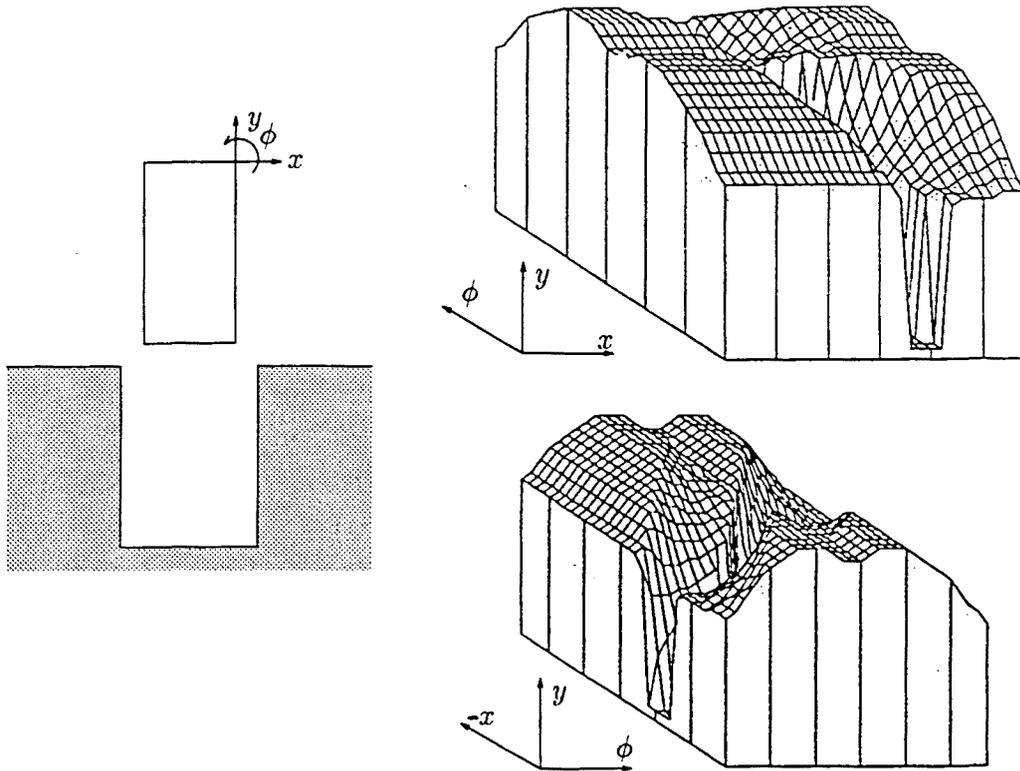


Figura 2.4:  $\mathcal{C}$  para un vástago y un agujero en 3 grados de libertad.

subconjuntos de  $\mathcal{C}$ , puede resultar una tarea considerable, sobre todo cuando existen grados de libertad de rotación.

### 2.2.4 Contactos y $\mathcal{C}$ -superficies

Los tipos básicos de contacto posibles entre dos cuerpos poliédricos son los siguientes (figura 2.5):

- A. Una cara del poliedro móvil toca un vértice del poliedro estático.
- B. Un vértice del poliedro móvil toca una cara del poliedro estático.
- C. Una arista del poliedro móvil toca una arista del poliedro estático.

Cualquier otro tipo de contacto puede obtenerse realizando una combinación de los tres tipos básicos mencionados (Thomas, 1988; Canny, 1988).

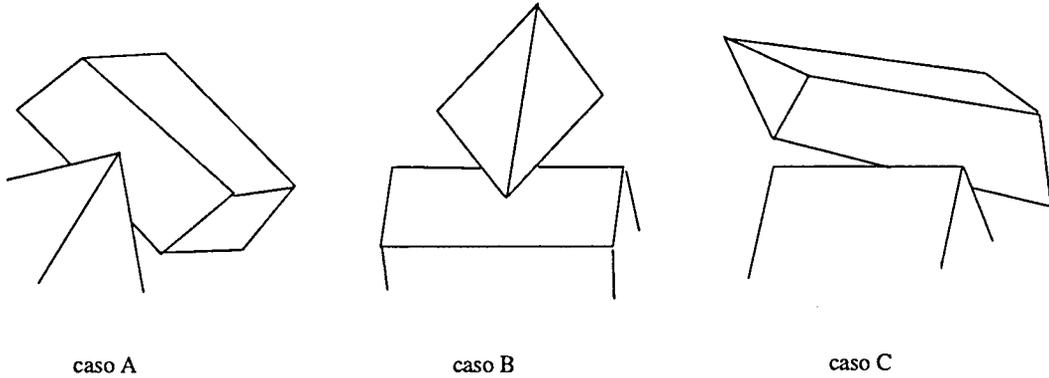


Figura 2.5: *Diferentes tipos de contacto.*

Cuando se realizan movimientos manteniendo un contacto básico, las configuraciones que se van recorriendo están sobre una hiper-superficie en  $\mathcal{C}$  denominada  $\mathcal{C}$ -superficie asociada al contacto. Estas  $\mathcal{C}$ -superficies se pueden representar mediante el núcleo de una función escalar definida sobre las configuraciones de  $\mathcal{C}$ ,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{R}$ , y  $F(\vec{c}) = 0$ .

Cuando el objeto móvil mantiene dos contactos básicos, su configuración  $\vec{c}$  pertenece a dos  $\mathcal{C}$ -superficies, es decir, cumple

$$\begin{cases} F_1(\vec{c}) = 0 \\ F_2(\vec{c}) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Dado que uno de los contactos restringirá los posibles movimientos mientras se mantiene el otro, cada una de las  $\mathcal{C}$ -superficies sirve como límite para marcar el subconjunto de puntos de la otra que son realmente alcanzables. Esta condición se extiende al caso de más de dos contactos básicos simultáneos y establece unas restricciones que permiten indicar las porciones de las  $\mathcal{C}$ -superficies que pertenecen a  $\mathcal{C}c$ . Si un contacto básico no agrega ninguna restricción en el conjunto de restricciones impuestas por otros contactos básicos se denomina contacto básico redundante. La forma de las funciones  $F(\vec{c})$  para el caso de sólidos en un espacio de 3 dimensiones así como una discusión sobre cómo realizar la combinación de restricciones se encuentra en Canny (1988).

## 2.3 Movimientos en el plano: $\mathcal{C}_3$

El problema de movimientos en el plano (3 grados de libertad) genera, acorde con la expresión (2.1), un Espacio de Configuraciones de dimensión 3 que

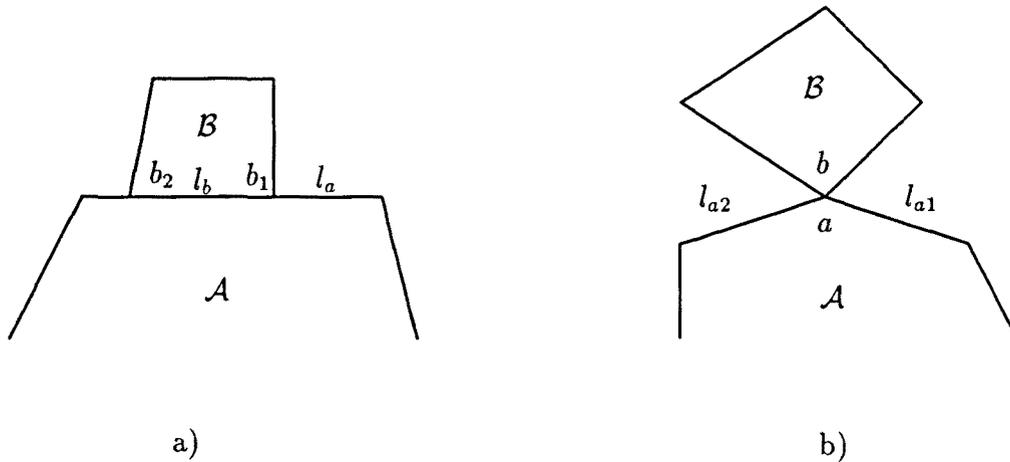


Figura 2.6: Combinaciones de tipos básicos de contacto en el plano.

denominaremos  $\mathcal{C}_3$ . Los conceptos básicos de  $\mathcal{C}_3$  son los expuestos para el caso general, teniendo en este caso las facilidades propias de trabajar en un espacio de menor dimensión y de permitir la representación gráfica de las  $\mathcal{C}$ -superficies de  $\mathcal{C}_3$  de una manera que la mente humana está acostumbrada a interpretar.

### 2.3.1 Contactos en $\mathcal{C}_3$

En el caso de movimientos en el plano, los tipos básicos de contactos que pueden establecerse entre dos objetos poligonales son sólo dos, denominados *contactos básicos*

*tipo 1:* cuando un vértice del objeto móvil toca un lado del objeto en reposo, y

*tipo 2:* cuando un lado del objeto móvil toca un vértice del objeto en reposo.

Cualquier otro tipo de contacto puede ser obtenido como combinación de estos dos. Por ejemplo, cuando el objeto móvil apoya un lado  $l_b$  completo sobre un lado  $l_a$  del objeto en reposo, el contacto puede expresarse mediante la condición de que los dos vértices que limitan el lado  $l_b$  estén en contacto con  $l_a$  (figura 2.6a); en el caso de contacto entre dos vértices, puede considerarse que el vértice del objeto móvil mantiene contacto con los dos lados ( $l_{a1}$  y  $l_{a2}$ ) que se intersectan en el vértice del objeto en reposo (figura 2.6b).

### 2.3.2 $\mathcal{C}_3$ para un objeto tridimensional

Las restricciones en el movimiento en un plano de un objeto tridimensional se alcanzan cuando se establece un contacto que elimina algún grado de libertad en dicho plano. Estos contactos pueden producirse en diferentes planos paralelos al de movimiento y ser del tipo A, B o C descritos en el apartado 2.2.4.

Cuando los objetos cumplen los requisitos mencionados en 2.1.1, las restricciones al movimiento en el plano de cada uno de estos contactos pueden ser modeladas como problemas bidimensionales. Los siguientes casos son posibles:

- *Contacto real tipo A.*  
Se modela como un contacto básico de tipo 2, considerando como polígonos las secciones del objeto manipulado y de los obstáculos según el plano paralelo al de movimiento que contiene los puntos de contacto.
- *Contacto real tipo B.*  
Se modela como un contacto básico de tipo 1, considerando como polígonos las secciones del objeto manipulado y de los obstáculos según el plano paralelo al de movimiento que contiene los puntos de contacto.
- *Contacto real tipo C.*  
Se modela según
  - *Si la arista del poliedro móvil es vertical, entonces contacto básico de tipo 1.*
  - *Si la arista del poliedro estático es vertical, entonces contacto básico de tipo 2.*

considerando en ambos casos como vértice y lado de contacto las proyecciones ortogonales de las aristas en contacto sobre un plano paralelo al de movimiento.

Las configuraciones posibles para el objeto tridimensional real son aquellas que satisfacen las restricciones impuestas por los problemas bidimensionales.

Sin pérdida de generalidad, en este trabajo se supondrá que todas las restricciones al movimiento del cuerpo poliédrico se producen sobre un mismo plano paralelo al de movimiento. Por lo tanto, el objeto móvil ( $\mathcal{B}$ ) y los objetos estáticos en el entorno de trabajo ( $\mathcal{A}$ ), se modelan directamente como polígonos, transformándose el problema real en un único problema bidimensional.

### 2.3.3 $\mathcal{C}$ -superficies en $\mathcal{C}_3$

La condición para que se produzca un contacto básico entre los objetos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  es que un punto  $\vec{a}$  del primero coincida con uno  $\vec{b}$  del segundo, es decir,

$$\vec{a} = \vec{b} \quad (2.8)$$

En los subapartados siguientes se desarrollan, a partir de esta condición, las expresiones genéricas de las  $\mathcal{C}$ -superficies generadas por los contactos básicos de tipo 1 y 2, ilustrados en las figuras 2.7 y 2.8 respectivamente.

Dado que la configuración del objeto sujeto por la pinza del robot mantiene una relación constante con la configuración de la pinza, y ésta se puede obtener directamente del controlador del robot,  $\mathcal{C}_3$  se construirá utilizando como coordenadas las variables  $p_{rx}$ ,  $p_{ry}$  y  $\phi_r$  que describen la configuración de la pinza<sup>1</sup>. No obstante, en el apartado 2.3.6 se justifica e introduce un cambio en la variable  $\phi_r$  con el fin de ajustar la métrica de  $\mathcal{C}_3$ .

#### 2.3.3.1 $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1

En un contacto básico de tipo 1 se tiene

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + k(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \quad k \in [0, 1] \quad (2.9)$$

$$\vec{b} = \vec{p}_r + \vec{p}_g + \vec{v} \quad (2.10)$$

donde  $\vec{p}_r$  indica la posición del punto de referencia de la garra del manipulador,  $P_r$ , y  $\vec{p}_g$  la posición del punto de referencia del objeto aprehendido,  $P_g$ , respecto de  $P_r$  (figura 2.7). Imponiendo la condición (2.8) y desarrollando resulta

$$\begin{cases} a_{1x} + k(a_{2x} - a_{1x}) = p_{rx} + p_g \cos(\phi_r + \phi_g) + v \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha) \\ a_{1y} + k(a_{2y} - a_{1y}) = p_{ry} + p_g \sin(\phi_r + \phi_g) + v \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha) \end{cases} \quad (2.11)$$

Eliminando el parámetro  $k$ ,

$$\begin{aligned} & (p_{rx} + p_g \cos(\phi_r + \phi_g) + v \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha) - a_{1x})(a_{2y} - a_{1y}) - \\ & (p_{ry} + p_g \sin(\phi_r + \phi_g) + v \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha) - a_{1y})(a_{2x} - a_{1x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

y reordenando se obtiene una primera expresión de una  $\mathcal{C}$ -superficie de tipo 1:

$$\lambda_1 p_{rx} + \lambda_2 p_{ry} + \lambda_3 \sin \phi_r + \lambda_4 \cos \phi_r + \lambda_5 = 0 \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>Cuando la claridad del contexto lo permita, las variables  $p_{rx}$ ,  $p_{ry}$  y  $\phi_r$  serán representadas como  $x$ ,  $y$  y  $\phi$ .



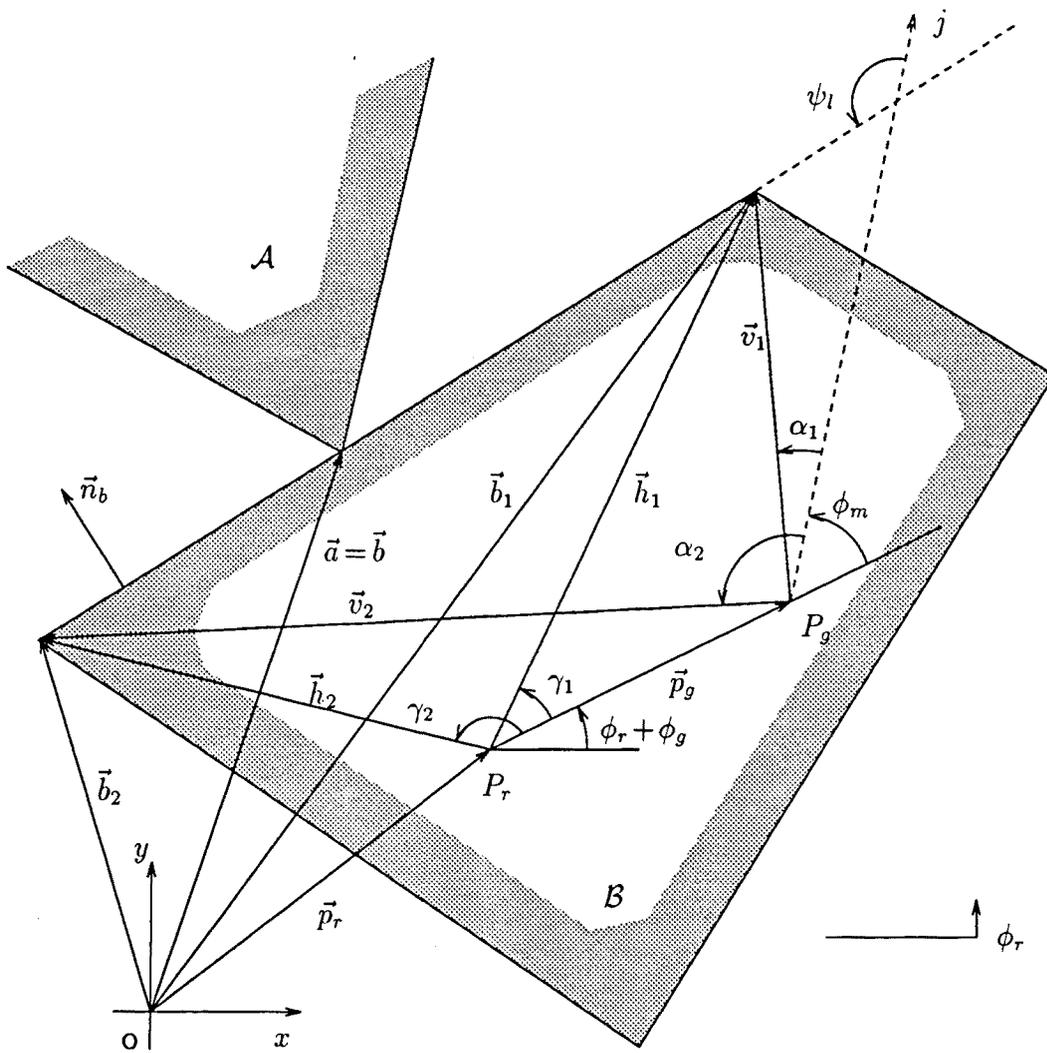


Figura 2.8: Contacto de Tipo 2.

siendo

$$\lambda_1 = a_{2y} - a_{1y} \quad (2.14)$$

$$\lambda_2 = -(a_{2x} - a_{1x}) \quad (2.15)$$

$$\lambda_3 = -(a_{2y} - a_{1y})(p_g \text{sen} \phi_g + v \text{sen}(\phi_g + \phi_m + \alpha)) - (a_{2x} - a_{1x})(p_g \cos \phi_g + v \cos(\phi_g + \phi_m + \alpha)) \quad (2.16)$$

$$\lambda_4 = (a_{2y} - a_{1y})(p_g \cos \phi_g + v \cos(\phi_g + \phi_m + \alpha)) - (a_{2x} - a_{1x})(p_g \text{sen} \phi_g + v \text{sen}(\phi_g + \phi_m + \alpha)) \quad (2.17)$$

$$\lambda_5 = (a_{2x} - a_{1x})a_{1y} - (a_{2y} - a_{1y})a_{1x} \quad (2.18)$$

Otra expresión genérica de una  $C$ -superficie de tipo 1 se obtiene a partir de la expresión (2.12) considerando<sup>2</sup>

$$(p_g \cos(\phi_r + \phi_g) + v \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha))(a_{2y} - a_{1y}) - (p_g \text{sen}(\phi_r + \phi_g) + v \text{sen}(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha))(a_{2x} - a_{1x}) = \quad (2.19)$$

$$\langle (\vec{p}_g + \vec{v}) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)^\perp \rangle \quad (2.20)$$

Escribiendo  $\vec{h} = \vec{p}_g + \vec{v}$  y el lado de contacto  $\vec{l} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ , se puede utilizar la siguiente expresión del producto escalar,

$$\langle (\vec{p}_g + \vec{v}) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)^\perp \rangle = \langle \vec{h} \odot \vec{l}^\perp \rangle = h l \cos(\phi_r + \phi_g + \gamma - \psi_{na}) \quad (2.21)$$

donde:

$$h = \sqrt{p_g^2 + v^2 - 2p_g v \cos(\phi_m + \alpha)} \quad (2.22)$$

$$|\gamma| = \arccos\left(\frac{p_g - v \cos(\phi_m + \alpha)}{h}\right) \quad \text{y } \text{signo}(\gamma) = \text{signo}(\text{sen}(\phi_m + \alpha)) \quad (2.23)$$

$$l = \sqrt{(a_{2x} - a_{1x})^2 + (a_{2y} - a_{1y})^2} \quad (\text{longitud nominal del lado de contacto}) \quad (2.24)$$

Así, la ecuación (2.13) puede expresarse también

$$\lambda_1 p_{rx} + \lambda_2 p_{ry} + \lambda_6 \cos(\phi_r + \psi) + \lambda_5 = 0 \quad (2.25)$$

donde

$$\lambda_6 = h l \quad (2.26)$$

$$\psi = \phi_g + \gamma - \psi_{na} \quad (2.27)$$

<sup>2</sup>El signo  $\perp$  indica rotación de un vector  $\pi/2$  radianes en sentido dextrógiro

Tanto la ecuación (2.13) como la (2.25) pueden normalizarse respecto a  $l$ , quedando respectivamente como

$$F(p_{rx}, p_{ry}, \phi_r) = c_1 p_{rx} + c_2 p_{ry} + c_3 \operatorname{sen} \phi_r + c_4 \cos \phi_r + c_5 = 0 \quad (2.28)$$

y

$$F(p_{rx}, p_{ry}, \phi_r) = c_1 p_{rx} + c_2 p_{ry} + c_6 \cos(\phi_r + \psi) + c_5 = 0 \quad (2.29)$$

con

$$c_1 = n_{ax} \quad (2.30)$$

$$c_2 = n_{ay} \quad (2.31)$$

$$c_3 = n_{ay}(p_g \cos \phi_g + v \cos(\phi_g + \phi_m + \alpha)) - n_{ax}(p_g \operatorname{sen} \phi_g + v \operatorname{sen}(\phi_g + \phi_m + \alpha)) \quad (2.32)$$

$$c_4 = n_{ay}(p_g \operatorname{sen} \phi_g + v \operatorname{sen}(\phi_g + \phi_m + \alpha)) + n_{ax}(p_g \cos \phi_g + v \cos(\phi_g + \phi_m + \alpha)) \quad (2.33)$$

$$c_5 = -n_{ay}a_{1y} - n_{ax}a_{1x} \quad (2.34)$$

$$c_6 = h \quad (2.35)$$

siendo

$$\vec{n}_a = \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \end{bmatrix} = \vec{l}^\perp / l \quad (2.36)$$

y por lo tanto

$$c_1^2 + c_2^2 = 1 \quad (2.37)$$

De acuerdo con la ecuación (2.29), las  $\mathcal{C}$ -superficies de Tipo 1 son superficies regladas cuyas rectas generatrices son paralelas y están incluidas en planos determinados por  $\phi_r$  constante.

### 2.3.3.2 $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 2

En un contacto básico de tipo 2 se tiene

$$\vec{a} = [a_x \ a_y]^T \quad (2.38)$$

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + k(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) \quad k \in [0, 1] \quad (2.39)$$

siendo,

$$\vec{b}_1 = \vec{p}_r + \vec{p}_g + \vec{v}_1 \quad (2.40)$$

$$\vec{b}_2 = \vec{p}_r + \vec{p}_g + \vec{v}_2 \quad (2.41)$$

Reemplazando (2.38) a (2.41) en la condición (2.8) y desarrollando resulta

$$\begin{cases} a_x = p_{rx} + p_g \cos(\phi_r + \phi_g) + v_1 \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1) + \\ \quad k(v_2 \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_2) - v_1 \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1)) \\ a_y = p_{ry} + p_g \sin(\phi_r + \phi_g) + v_1 \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1) + \\ \quad k(v_2 \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_2) - v_1 \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1)) \end{cases} \quad (2.42)$$

Eliminando el parámetro  $k$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & (a_x - p_{rx} - p_g \cos(\phi_r + \phi_g) - v_1 \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1)) \\ & (v_2 \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_2) - v_1 \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1)) - \\ & (a_y - p_{ry} - p_g \sin(\phi_r + \phi_g) - v_1 \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1)) \\ & (v_2 \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_2) - v_1 \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha_1)) = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Tomando  $\vec{h}_1 = \vec{p}_g + \vec{v}_1$  y el lado de contacto  $\vec{l} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , (2.43) puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} & (p_{rx} - a_x) l \sin(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \psi_l) - (p_{ry} - a_y) l \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \psi_l) + \\ & h_1 l \cos(\phi_m + \psi_l - \gamma_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $\psi_l$  es el ángulo que forma el lado de contacto con el eje de referencia  $j$  y,

$$h_1 = \sqrt{p_g^2 + v_1^2 - 2p_g v_1 \cos(\phi_m + \alpha_1)} \quad (2.45)$$

$$\gamma_1 = \arcsen\left(\frac{v_1}{h_1} \sin(\phi_m + \alpha_1)\right) \quad (2.46)$$

$$l = \sqrt{(v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1)^2 + (v_2 \sin \alpha_2 - v_1 \sin \alpha_1)^2} \quad (2.47)$$

La expresión general de una  $\mathcal{C}$ -superficie de tipo 2 puede ponerse entonces

$$(p_{rx} - d_1) l \sin(\phi_r + \beta) - (p_{ry} - d_2) l \cos(\phi_r + \beta) + l d_3 = 0 \quad (2.48)$$

siendo,

$$\beta = \phi_g + \phi_m + \psi_l \quad (2.49)$$

$$d_1 = a_x \quad (2.50)$$

$$d_2 = a_y \quad (2.51)$$

$$d_3 = h_1 \cos(\gamma_1 - \phi_m - \psi_l) \quad (2.52)$$

$|d_3|$  es igual a la distancia de  $P_r$  a la recta soporte del lado de contacto.

La ecuación (2.48) puede normalizarse respecto a  $l$  quedando:

$$F(p_{rx}, p_{ry}, \phi_r) = (p_{rx} - d_1)\text{sen}(\phi_r + \beta) - (p_{ry} - d_2)\text{cos}(\phi_r + \beta) + d_3 = 0 \quad (2.53)$$

De acuerdo con la ecuación (2.53), las  $\mathcal{C}$ -superficies de Tipo 2 son también superficies regladas cuyas rectas generatrices están contenidas en planos determinados por  $\phi_r$  constante; sin embargo, a diferencia de las generatrices de las  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1, estas rectas no son paralelas.

### 2.3.4 $\mathcal{C}$ -superficies y configuraciones de contacto

Las ecuaciones genéricas de las  $\mathcal{C}$ -superficies de Tipo 1 y 2 desarrolladas en el apartado anterior se satisfacen para todas las configuraciones en las que se produce un determinado contacto básico.

Sin embargo, no todos los puntos de una  $\mathcal{C}$ -superficie representan configuraciones pertenecientes a  $C_c$ , puesto que no incluyen los siguientes dos tipos de restricciones:

- Los lados de contacto de los objetos tienen una longitud finita, condición suprimida al eliminar el parámetro  $k$  en (2.11) y (2.42).
- Algunas configuraciones, aparentemente posibles para un contacto básico, no se pueden alcanzar debido a otros contactos básicos.

En ambos casos, ilustrados en la figura 2.9, se alcanza una condición límite debido a que se ha establecido un nuevo contacto básico, y por lo tanto la configuración está sobre una nueva  $\mathcal{C}$ -superficie que marca el límite de validez de la primera.

Distinguiremos los siguientes subconjuntos del conjunto de configuraciones de contacto  $C_c$ :

- *$\mathcal{C}$ -cara:* conjunto de configuraciones conexas de una  $\mathcal{C}$ -superficie que pertenecen a  $C_c$ .
- *$\mathcal{C}$ -arista:* conjunto de configuraciones conexas pertenecientes a la intersección de dos  $\mathcal{C}$ -caras.
- *$\mathcal{C}$ -vértice:* configuración resultante de la intersección de dos  $\mathcal{C}$ -aristas.

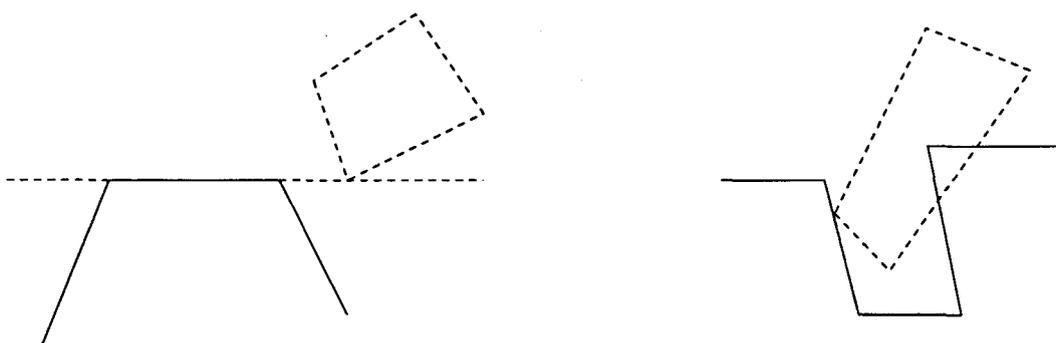


Figura 2.9: *Contactos imposibles no considerados en las ecuaciones generales de las  $C$ -superficies de  $C_3$ .*

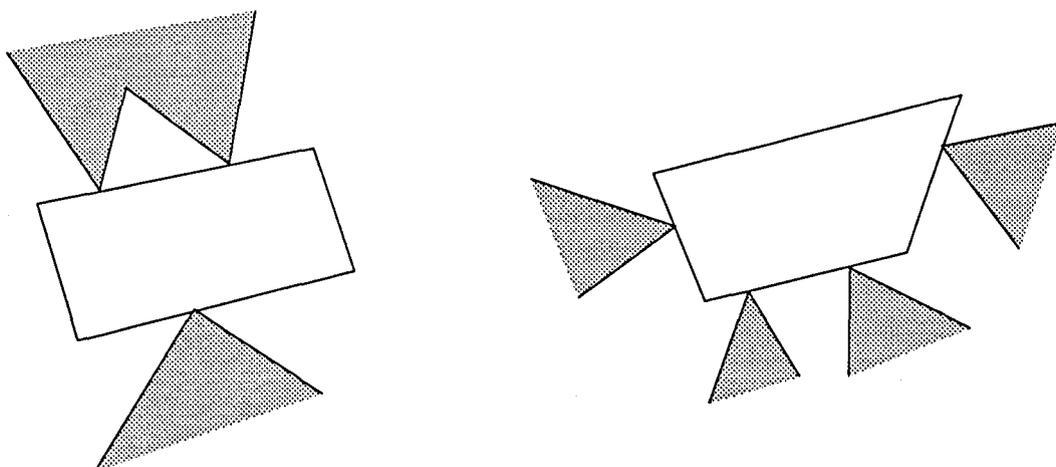


Figura 2.10: *Ejemplos de contactos redundantes.*

Una  $C$ -arista y un  $C$ -vértice de  $C_c$  representan un mínimo de 2 y 3 contactos básicos, respectivamente. En el caso de que más de dos  $C$ -superficies se intersecten en una  $C$ -arista alguna de ellas representa contactos básicos redundantes, es decir, que no eliminan ningún grado de libertad. Lo mismo sucede cuando un  $C$ -vértice pertenece a más de tres  $C$ -aristas. La figura 2.10 muestra casos de contactos redundantes.

Determinar la expresión analítica de una  $C$ -superficie o las curvas resultantes de su intersección con otra  $C$ -superficie, no representa mayor dificultad. Sin embargo, determinar las  $C$ -caras y  $C$ -aristas de  $C_c$  cuando se consideran objetos cóncavos es bastante más laborioso. Este problema ha sido ampliamente estudiado dentro del campo de la Geometría Computacional y no será detallado aquí. Soluciones a este problema pueden encontrarse en los trabajos de

Schwartz y Sharir (1983), Avnaim y Boissonnat (1988), y Brost (1989). Este último expone un algoritmo que describe las configuraciones de contacto de  $\mathcal{C}_3$  al mismo tiempo que suministra información topológica sobre los contactos representados.

De manera genérica, una  $\mathcal{C}$ -cara de  $Cc$  se puede representar mediante la ecuación de la  $\mathcal{C}$ -superficie ( $F(\vec{c}) = 0$ ) que la contiene y una serie de desigualdades. En el caso de contacto entre dos objetos convexos, las desigualdades pueden ponerse de la forma

$$\cap_i (F_i(\vec{c}) \geq 0) \quad (2.54)$$

Con objetos cóncavos, o ante la existencia de al menos tres objetos convexos en el entorno de trabajo, pueden producirse contactos que involucren lados o vértices no contiguos; esto se refleja en las desigualdades, que dan lugar en estos casos a una expresión genérica de la forma

$$[\cap_i (F_i(\vec{c}) \geq 0)] \cup [\cap_k (F_k(\vec{c}) \geq 0)] \cup [\dots] \cup \dots \quad (2.55)$$

### 2.3.5 Aristas en $\mathcal{C}_3$

En este apartado se analizan las curvas resultantes de la intersección de  $\mathcal{C}$ -superficies, que incluyen por lo tanto las aristas del espacio de contacto.

Partiendo de las ecuaciones genéricas que representan las  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1 y 2 (ecuaciones (2.29) y (2.53) respectivamente), se pueden establecer tres clases de intersecciones, a saber: tipo 1 con 1, 2 con 2, y 1 con 2. Para las tres clases de intersección se establecerá una expresión paramétrica de la curva resultante.

Dado que las  $\mathcal{C}$ -superficies son regladas con generatrices contenidas en planos determinados por  $\phi$  constante, parece conveniente elegir  $\phi$  como parámetro. La condición para que la intersección de dos superficies  $F(x, y, \phi)$  y  $F'(x, y, \phi)$  pueda parametrizarse en  $\phi$  es

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F'}{\partial x} & \frac{\partial F'}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.56)$$

Para una superficie tipo 1 — ecuación (2.29) — las derivadas parciales respecto de  $x$  e  $y$  son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = c_1 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = c_2 \quad (2.57)$$

y para una superficies tipo 2 — ecuación (2.53) —,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{sen}(\phi + \beta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\text{cos}(\phi + \beta) \quad (2.58)$$

### Intersección de $\mathcal{C}$ -superficies tipo 1

Sean dos  $\mathcal{C}$ -superficies tipo 1,

$$F(x, y, \phi) = c_1 x + c_2 y + c_3 \text{sen} \phi + c_4 \text{cos} \phi + c_5 = 0 \quad (2.59)$$

$$F'(x, y, \phi) = c'_1 x + c'_2 y + c'_3 \text{sen} \phi + c'_4 \text{cos} \phi + c'_5 = 0 \quad (2.60)$$

Si se satisface la condición de parametrización en  $\phi$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} = c_1 c'_2 - c'_1 c_2 \neq 0 \quad (2.61)$$

la expresión de la curva se obtiene resolviendo el sistema (2.59) y (2.60) para  $x$  e  $y$ :

$$x = \frac{(c_2 c'_3 - c'_2 c_3) \text{sen} \phi + (c_2 c'_4 - c'_2 c_4) \text{cos} \phi + c_2 c'_5 - c'_2 c_5}{c_1 c'_2 - c'_1 c_2} \quad (2.62)$$

$$y = \frac{(c_1 c'_3 - c'_1 c_3) \text{sen} \phi + (c_1 c'_4 - c'_1 c_4) \text{cos} \phi + c_1 c'_5 - c'_1 c_5}{c_2 c'_1 - c'_2 c_1} \quad (2.63)$$

$$\phi = \phi \quad (2.64)$$

ecuaciones de la forma

$$x = A_x \text{sen} \phi + B_x \text{cos} \phi + C_x \quad (2.65)$$

$$y = A_y \text{sen} \phi + B_y \text{cos} \phi + C_y \quad (2.66)$$

$$\phi = \phi \quad (2.67)$$

Cuando la condición (2.61) no se satisface, se cumple la relación

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c'_1}{c'_2} \quad (2.68)$$

que es condición de paralelismo de los vectores normales a los dos lados de contacto. Por lo tanto, la curva intersección no puede ser parametrizada en

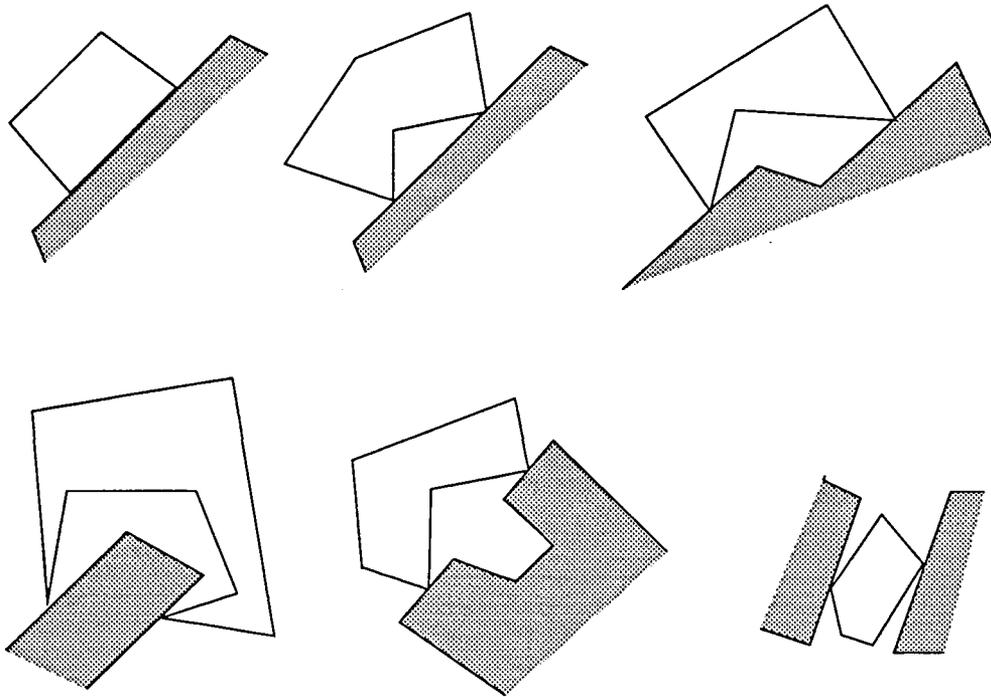


Figura 2.11: Casos de dos contactos de Tipo 1 que restringen el movimiento a desplazamientos con  $\phi$  constante.

$\phi$  cuando los lados de contacto son paralelos. En estos casos el movimiento queda restringido a un desplazamiento con  $\phi$  constante, como sucede en los ejemplos ilustrados en la figura 2.11, siendo el resultado de la intersección una recta generatriz de las  $\mathcal{C}$ -superficies.

Si los lados de contacto son paralelos, teniendo en cuenta la ecuación (2.37) se cumple que,

$$c_1 x + c_2 y = \pm(c'_1 x + c'_2 y) \quad (2.69)$$

donde el signo ( $\pm$ ) indica que las normales exteriores a los lados de contacto tienen igual u opuesto sentido, respectivamente. Con la condición dada por (2.69), de la comparación de las ecuaciones (2.59) y (2.60) se desprende

$$c_3 \text{sen} \phi + c_4 \text{cos} \phi + c_5 = \pm(c'_3 \text{sen} \phi + c'_4 \text{cos} \phi + c'_5) \quad (2.70)$$

ecuación de la forma

$$C_3 \text{sen} \phi + C_4 \text{cos} \phi + C_5 = 0 \quad (2.71)$$

donde  $C_i = c_i \pm c'_i$  con  $i = 1, \dots, 5$  y el signo ( $\pm$ ) según el sentido de las normales exteriores.

La ecuación (2.71) se satisface para dos valores de  $\phi$ , dados por las dos soluciones comunes de

$$\phi = \arcsen \left( -\frac{C_3 C_5 \pm C_4 \sqrt{C_3^2 + C_4^2 - C_5^2}}{C_3^2 + C_4^2} \right) \quad (2.72)$$

y

$$\phi = \arcsen \left( -\frac{C_4 C_5 \pm C_3 \sqrt{C_4^2 + C_3^2 - C_5^2}}{C_4^2 + C_3^2} \right) \quad (2.73)$$

### Intersección de $\mathcal{C}$ -superficies tipo 2

Sean dos  $\mathcal{C}$ -superficies tipo 2,

$$F(x, y, \phi) = (x - d_1) \sen(\phi + \beta) - (y - d_2) \cos(\phi + \beta) + d_3 = 0 \quad (2.74)$$

$$F'(x, y, \phi) = (x - d'_1) \sen(\phi + \beta') - (y - d'_2) \cos(\phi + \beta') + d'_3 = 0 \quad (2.75)$$

Si se satisface la condición de parametrización en  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \sen(\phi + \beta) & -\cos(\phi + \beta) \\ \sen(\phi + \beta') & -\cos(\phi + \beta') \end{vmatrix} = \\ &= -\sen(\phi + \beta) \cos(\phi + \beta') + \sen(\phi + \beta') \cos(\phi + \beta) \neq 0 \quad (2.76) \end{aligned}$$

la expresión de la curva se obtiene resolviendo el sistema (2.74) y (2.75) para  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} x &= \left( \sen^2 \phi (d_1 \sen \beta' \cos \beta - d'_1 \sen \beta \cos \beta' - (d_2 - d'_2) \sen \beta \sen \beta') \right. \\ &\quad + \cos^2 \phi (-d_1 \sen \beta \cos \beta' + d'_1 \sen \beta' \cos \beta - (d_2 - d'_2) \cos \beta \cos \beta') \\ &\quad + \sen \phi (d_3 \sen \beta' + d'_3 \sen \beta) \\ &\quad + \cos \phi (d_3 \cos \beta' + d'_3 \cos \beta) \\ &\quad \left. + \sen \phi \cos \phi ((d_1 - d'_1) \cos(\beta + \beta') - (d_2 - d'_2) \sen(\beta + \beta')) \right) \\ &\quad \frac{1}{\sen(\beta' - \beta)} \quad (2.77) \end{aligned}$$

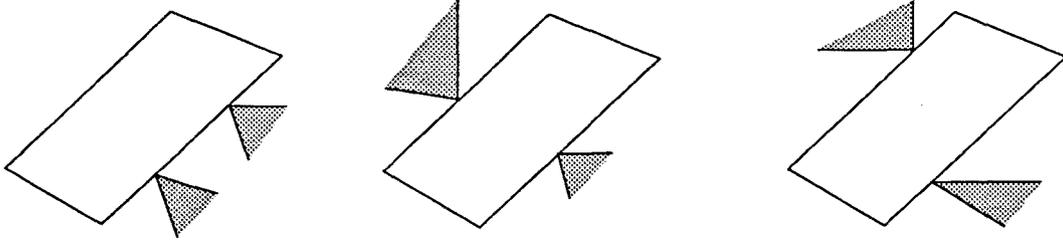


Figura 2.12: Casos de dos contactos de Tipo 2 que restringen el movimiento a desplazamientos con  $\phi$  constante.

$$\begin{aligned}
 y = & \left( \text{sen}^2 \phi (-d_2 \text{sen} \beta \cos \beta' + d_2' \text{sen} \beta' \cos \beta + (d_1 - d_1') \cos \beta \cos \beta') \right. \\
 & + \cos^2 \phi (-d_2 \text{sen} \beta' \cos \beta + d_2' \text{sen} \beta \cos \beta' + (d_1 - d_1') \text{sen} \beta \text{sen} \beta') \\
 & + \text{sen} \phi (-d_3 \cos \beta' + d_3' \cos \beta) \\
 & + \cos \phi (d_3 \text{sen} \beta' - d_3' \text{sen} \beta) \\
 & \left. + \text{sen} \phi \cos \phi (-(d_1 - d_1') \text{sen}(\beta + \beta') - (d_2 - d_2') \cos(\beta + \beta')) \right) \\
 & \frac{1}{\text{sen}(\beta' - \beta)} \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

$$\phi = \phi \quad (2.79)$$

ecuaciones de la forma,

$$x = A_x \text{sen}^2 \phi + B_x \cos^2 \phi + C_x \text{sen} \phi + D_x \cos \phi + E_x \text{sen} \phi \cos \phi \quad (2.80)$$

$$y = A_y \text{sen}^2 \phi + B_y \cos^2 \phi + C_y \text{sen} \phi + D_y \cos \phi + E_y \text{sen} \phi \cos \phi \quad (2.81)$$

$$\phi = \phi \quad (2.82)$$

Cuando la condición (2.76) no se satisface, se cumple que

$$\tan(\phi + \beta) = \tan(\phi + \beta') \quad (2.83)$$

de donde

$$\beta' = \beta + k\pi \quad \text{con } k \in \{0, 1\} \quad (2.84)$$

que es condición de paralelismo de los dos lados de contacto. Por lo tanto, la curva intersección no puede ser parametrizada en  $\phi$  cuando los lados de contacto son paralelos (figura 2.12). El movimiento queda restringido a un desplazamiento con  $\phi$  constante y el resultado de la intersección de las  $\mathcal{C}$ -superficies es una de sus rectas generatrices.

Cuando se cumple la condición (2.84), de la comparación de las ecuaciones (2.74) y (2.75) se desprende que

$$d_1 \operatorname{sen}(\phi + \beta) - d_2 \operatorname{cos}(\phi + \beta) - d_3 = d'_1 \operatorname{sen}(\phi + \beta) - d'_2 \operatorname{cos}(\phi + \beta) \pm d'_3 \quad (2.85)$$

ecuación de la forma

$$D_1 \operatorname{sen}(\phi + \beta) + D_2 \operatorname{cos}(\phi + \beta) + D_3 = 0 \quad (2.86)$$

donde  $D_1 = d_1 - d'_1$ ,  $D_2 = d'_2 - d_2$  y  $D_3 = d_3 \pm d'_3$ , con el signo ( $\pm$ ) según el sentido de las normales exteriores. La ecuación (2.86) es del mismo tipo que la (2.71) por lo que sus dos soluciones se encuentran de forma análoga a las de ésta.

### Intersección de $\mathcal{C}$ -superficies tipo 1 y 2

Sean una  $\mathcal{C}$ -superficie tipo 1 y otra tipo 2,

$$F(x, y, \phi) = c_1 x + c_2 y + c_3 \operatorname{sen} \phi + c_4 \operatorname{cos} \phi + c_5 = 0 \quad (2.87)$$

$$F'(x, y, \phi) = (x - d_1) \operatorname{sen}(\phi + \beta) - (y - d_2) \operatorname{cos}(\phi + \beta) + d_3 = 0 \quad (2.88)$$

Si se satisface la condición de parametrización en  $\phi$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ \operatorname{sen}(\phi + \beta) & -\operatorname{cos}(\phi + \beta) \end{vmatrix} = -c_1 \operatorname{cos}(\phi + \beta) + c_2 \operatorname{sen}(\phi + \beta) \neq 0 \quad (2.89)$$

las ecuaciones paramétricas de la curva se obtienen resolviendo el sistema (2.87) y (2.88) para  $x$  e  $y$ :

$$x = \frac{(c_2 (d_1 \operatorname{sen}(\phi + \beta) - d_2 \operatorname{cos}(\phi + \beta) - d_3) - \operatorname{cos}(\phi + \beta) (c_3 \operatorname{sen} \phi + c_4 \operatorname{cos} \phi + c_5))}{c_2 \operatorname{sen}(\phi + \beta) + c_1 \operatorname{cos}(\phi + \beta)} \quad (2.90)$$

$$y = \frac{(c_1 (-d_1 \operatorname{sen}(\phi + \beta) + d_2 \operatorname{cos}(\phi + \beta) + d_3) - \operatorname{sen}(\phi + \beta) (c_3 \operatorname{sen} \phi + c_4 \operatorname{cos} \phi + c_5))}{c_2 \operatorname{sen}(\phi + \beta) + c_1 \operatorname{cos}(\phi + \beta)} \quad (2.91)$$

$$\phi = \phi \quad (2.92)$$

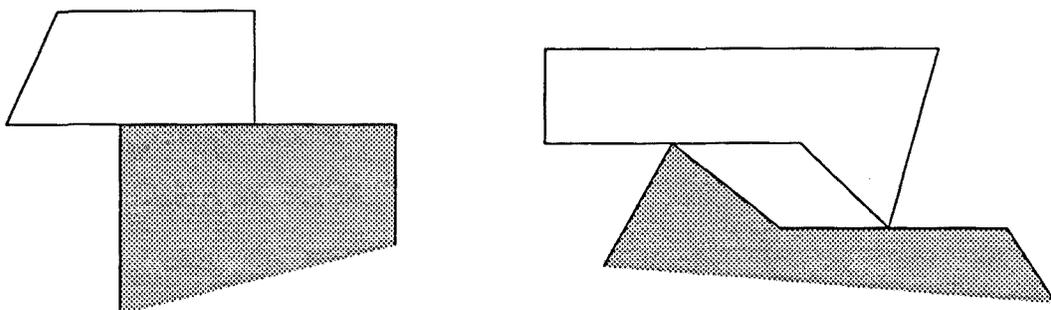


Figura 2.13: Casos de dos contactos de Tipo 1 y Tipo 2 que restringen el movimiento a desplazamientos con  $\phi$  constante.

ecuaciones de la forma,

$$x = \frac{A_x \text{sen}^2 \phi + B_x \cos^2 \phi + C_x \text{sen} \phi + D_x \cos \phi + E_x \text{sen} \phi \cos \phi + G_x}{G_x \text{sen} \phi + H_x \cos \phi} \quad (2.93)$$

$$y = \frac{A_y \text{sen}^2 \phi + B_y \cos^2 \phi + C_y \text{sen} \phi + D_y \cos \phi + E_y \text{sen} \phi \cos \phi + G_y}{G_y \text{sen} \phi + H_y \cos \phi} \quad (2.94)$$

$$\phi = \phi \quad (2.95)$$

Cuando la condición (2.89) no se satisface se cumple

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\text{sen}(\phi + \beta)}{\cos(\phi + \beta)} = \tan(\phi + \beta) \quad (2.96)$$

que es nuevamente condición de paralelismo entre los dos lados de contacto. Por lo tanto, como en los casos anteriores, la curva intersección no puede ser parametrizada en  $\phi$  cuando los lados de contacto son paralelos (figura 2.13); en tal situación el movimiento queda restringido a un desplazamiento con  $\phi$  constante, y el resultado de la intersección es una recta generatriz de ambas  $\mathcal{C}$ -superficies.

La expresión del  $\phi$  de intersección puede obtenerse directamente a partir de (2.96),

$$\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right) - \beta \quad (2.97)$$

dando dos soluciones separadas  $\pi$  radianes entre sí.

### 2.3.6 Ajuste de la métrica de $\mathcal{C}_3$

De cara a describir los conjuntos de configuraciones posibles e imposibles en el plano, la elección del espacio definido por las variables  $x$ ,  $y$  y  $\phi$  que describen la

posición y orientación de un objeto en el entorno de trabajo es perfectamente válida.

Sin embargo, no ocurre lo mismo cuando se trata de planificar movimientos. En estos casos son necesarios los conceptos de distancia euclídea y ortogonalidad, y por lo tanto, la definición del producto escalar. Esta definición se enfrenta a una inconsistencia de unidades en el espacio  $\mathcal{C}_3$  definido por  $x$ ,  $y$  y  $\phi$ . La inconsistencia se supera realizando un ajuste de la métrica de  $\mathcal{C}_3$ , en el que la variable que representa los desplazamientos angulares se multiplica por una constante  $\rho_p$  con dimensión de longitud. Un vector de  $\mathcal{C}_3$  se expresa entonces como

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \rho_p \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ q \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

El valor numérico de  $\rho_p$  no es relevante desde el punto de vista de un análisis geométrico, lo que permite tomar un valor unitario que simplifica las expresiones. Este ajuste de la métrica de  $\mathcal{C}_3$  elimina los problemas descritos en Duffy (1990).

Las fórmulas de las  $\mathcal{C}$ -superficies y de las curvas resultantes de sus intersecciones desarrolladas en los apartados anteriores usando la variable  $\phi$ , siguen siendo válidas con sólo realizar el cambio  $\phi = q/\rho_p$ .

## 2.4 Fuerzas de reacción en $\mathcal{C}$

Cuando se manipulan piezas en contacto deben evitarse impactos que puedan dañar alguna de las partes. Esto conlleva velocidades de movimiento suficientemente bajas como para que el problema pueda tratarse como si fuera estático.

En el caso de los contactos Tipo-A y Tipo-B de la figura 2.5, la dirección<sup>3</sup> de la fuerza de reacción depende de la dirección de la normal al plano sobre el que se realiza el contacto, y en el caso de contactos Tipo-C de la normal al plano que definen las aristas en contacto de ambos objetos.

Al considerar grados de libertad de rotación también deben tenerse en cuenta los momentos, normalmente más complicados de calcular por cuanto

---

<sup>3</sup>El término *dirección* será utilizado para indicar, salvo expresa aclaración, tanto la *dirección* propiamente dicha como el *sentido* de una fuerza o dirección de movimiento.

dependen del punto de aplicación de las fuerzas. Por otra parte, cuando existe más de un punto de contacto se debe plantear un sistema de equilibrio estático que, si existe fricción, puede no tener solución única.

Las fuerzas en  $\mathcal{C}$  tienen un comportamiento similar a las fuerzas en el mundo físico real en el sentido de que, en ausencia de fricción, las fuerzas de reacción tienen la dirección de las normales a las  $\mathcal{C}$ -superficies (Erdmann, 1984), con las ventajas derivadas de que el objeto móvil sea puntual: siempre existe un único punto de contacto y no se generan momentos.

### 2.4.1 Fuerzas en $\mathcal{C}_3$

En el caso de movimientos en un plano hay que considerar como variables el módulo y la dirección de las fuerzas y sólo el módulo y el signo de los momentos, ya que la dirección de éstos es fija y perpendicular al plano de movimiento. Las fuerzas se representarán mediante dos componentes ortogonales, es decir  $\vec{f} = [f_x \ f_y]^T$ , y los pares, al tener la dirección fija, se representarán mediante un escalar  $\tau$  indicativo de su módulo, afectado del signo correspondiente.

La descripción de la fuerza y el par en  $\mathcal{C}_3$  se realiza mediante un vector de la forma  $\vec{g} = [f_x \ f_y \ \tau]^T$ , denominado *fuerza generalizada*. El espacio generado por los vectores  $\vec{g}$  se denomina *Espacio de Fuerzas ( $\mathcal{F}_3$ )* asociado a  $\mathcal{C}_3$ .

### 2.4.2 Ajuste de la métrica de $\mathcal{F}_3$

De manera equivalente al problema planteado en el apartado 2.3.6 para  $\mathcal{C}_3$ , es necesario realizar un ajuste de la métrica de  $\mathcal{F}_3$  que evite la inconsistencia de unidades y permita definir el producto escalar convencional. Para ello se divide la componente que indica el par por una constante  $\rho_f$  con dimensión de longitud. Los vectores de fuerza generalizada quedan entonces de la forma

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ \tau/\rho_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_\tau \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Para que las fuerzas generalizadas de  $\mathcal{F}_3$  establezcan en  $\mathcal{C}_3$  un campo de fuerzas de efecto equivalente al de las fuerzas y pares en el problema real debe cumplirse que  $\rho_f = \rho_p$ ; de esta forma, el trabajo realizado en un movimiento en  $\mathcal{C}_3$  es análogo al realizado en el movimiento real correspondiente.

En adelante se considerará  $\rho_f = \rho_p = \rho$  sin restricción alguna en su valor numérico, por cuanto el análisis que se lleva a cabo es estático debido a las bajas velocidades a las que se deben realizar los movimientos.

## 2.5 Fricción

### 2.5.1 Fricción en el mundo real

La fuerza de fricción sólo aparece cuando existe (o tiende a existir) traslación del punto de contacto entre los objetos. Por el contrario, cuando las fuerzas aplicadas son tales que el objeto móvil realiza un movimiento de rotación puro alrededor del punto de contacto la fuerza de fricción es nula.

La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal ejercida sobre la superficie de contacto. La constante de proporcionalidad  $\mu$  varía según la velocidad relativa de los objetos en contacto; esta variación se suele aproximar comúnmente mediante dos valores, uno para velocidad nula, denominado coeficiente de fricción estático, y otro para velocidades distintas de cero, denominado coeficiente de fricción dinámico y que suele ser ligeramente menor que el primero. En nuestro caso, y dado que los movimientos serán muy lentos, se considera como único valor de  $\mu$  el estático.

Con esta consideración sobre el coeficiente de fricción, se construye un *cono de fricción*<sup>4</sup> que engloba el rango de direcciones en el que se puede encontrar la fuerza de reacción. El eje del cono coincide con la normal a la superficie de contacto y su origen con el punto de contacto; el ángulo entre el eje y el lado del cono es  $\phi_c = \arctan \mu$ . Si la fuerza aplicada cae dentro del cono de fricción es totalmente cancelada por la fuerza de reacción; por el contrario, si cae fuera del cono de fricción entonces sólo es parcialmente cancelada, quedando una fuerza neta resultante. La figura 2.14 ilustra este comportamiento.

---

<sup>4</sup>Tanto para un contacto en el plano de movimiento como para su equivalente en  $\mathcal{C}_3$ , la palabra *cono* usada para referenciar el conjunto de posibles direcciones de las fuerzas de reacción no representa un cono en el estricto sentido geométrico, sino un sector angular ya que todas las direcciones son coplanares; el cono propiamente dicho aparece cuando se consideran 3 grados de libertad de traslación.

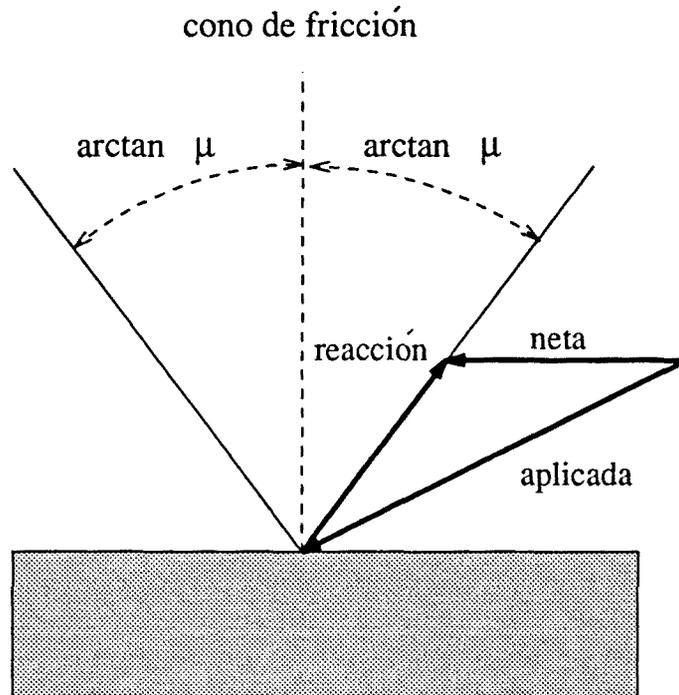


Figura 2.14: Modelo del cono de fricción en el espacio real.

## 2.5.2 Fricción en $\mathcal{C}_3$

La determinación del cono de fricción en  $\mathcal{C}_3$  no es inmediata, debido al diferente comportamiento que tiene la fricción en los grados de libertad de traslación y de rotación.

Tomando como base el estudio realizado por Erdmann (1984) se establecerá a continuación una expresión del cono de fricción en  $\mathcal{C}_3$ . Se parte para ello del modelo de fricción en el plano de movimiento, considerando inicialmente un único punto de contacto entre los objetos y estableciendo las ecuaciones de equilibrio estático para contactos de tipo 1 y 2; a partir de ellas se infiere una expresión general del cono de fricción en  $\mathcal{C}_3$ . Posteriormente el resultado se generaliza al caso de varios puntos de contacto.

### 2.5.2.1 Fricción en $\mathcal{C}_3$ para un punto de contacto

La aplicación de una fuerza  $[f_x \ f_y]^T$  y un par  $\tau$  sobre el punto de referencia del objeto móvil en el plano de movimiento, equivale a la aplicación de una fuerza generalizada  $\vec{g} = [f_x \ f_y \ \tau]^T$  en  $\mathcal{C}_3$ . Tanto para contactos de tipo 1

o de tipo 2 (figuras 2.15 y 2.16 respectivamente) las ecuaciones de equilibrio estático son

$$f_x + \langle \vec{f}_n \cdot \hat{i} \rangle + \langle \vec{f}_t \cdot \hat{i} \rangle = 0 \quad (2.100)$$

$$f_y + \langle \vec{f}_n \cdot \hat{j} \rangle + \langle \vec{f}_t \cdot \hat{j} \rangle = 0 \quad (2.101)$$

$$\tau + \|\langle \vec{f}_n \times \vec{r} \rangle\| - \|\langle \vec{f}_t \times \vec{r} \rangle\| = 0 \quad (2.102)$$

donde

$\vec{r}$  : vector desde el punto de contacto al punto de referencia

$\vec{f}_n$  : componente normal al lado de contacto de la fuerza de reacción

$\vec{f}_t$  : componente paralela al lado de contacto de la fuerza de reacción

siendo para el caso extremo que marca los límites de equilibrio estático,

$$\|\vec{f}_t\| = f_t = \mu \|\vec{f}_n\| = \mu f_n \quad (2.103)$$

Seguidamente se desarrollan estas ecuaciones para los contactos de tipo 1 y tipo 2.

### Contacto tipo 1

Para un contacto tipo 1 se tienen las expresiones

$$\vec{f}_n = f_n \vec{n}_a \quad (2.104)$$

$$\vec{n}_a^\perp = [-n_{ay} \quad n_{ax}]^T \quad (2.105)$$

Aplicadas a las ecuaciones (2.100) a (2.102) se obtiene

$$f_x + f_n \langle \vec{n}_a \cdot \hat{i} \rangle + \langle -\mu f_n \vec{n}_a^\perp \cdot \hat{i} \rangle = 0 \quad (2.106)$$

$$f_y + f_n \langle \vec{n}_a \cdot \hat{j} \rangle + \langle \mu f_n \vec{n}_a^\perp \cdot \hat{j} \rangle = 0 \quad (2.107)$$

$$\tau + f_n \|\langle \vec{n}_a \times \vec{r} \rangle\| - \mu f_n \|\langle \vec{n}_a^\perp \times \vec{r} \rangle\| = 0 \quad (2.108)$$

y desarrollando los productos escalares y vectoriales resulta

$$f_x + f_n (n_{ax} - \mu n_{ay}) = 0 \quad (2.109)$$

$$f_y + f_n (n_{ay} + \mu n_{ax}) = 0 \quad (2.110)$$

$$\tau + f_n (n_{ax} r_y - n_{ay} r_x + \mu (n_{ay} r_y + n_{ax} r_x)) = 0 \quad (2.111)$$

Por otro lado, la normal  $\vec{n} = [n_x \quad n_y \quad n_q]^T$  exterior a una  $\mathcal{C}$ -superficie  $F(x, y, q) = 0$  de tipo 1 está dada por

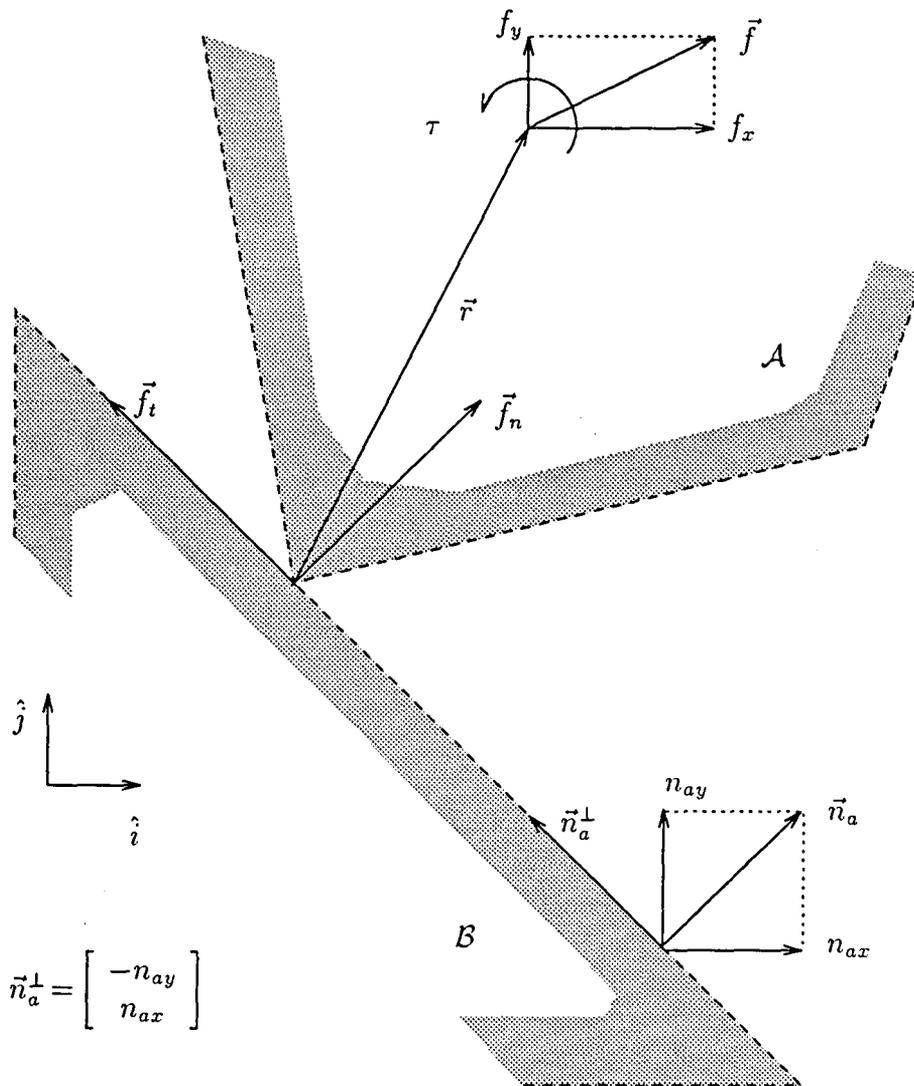


Figura 2.15: Equilibrio estático con fricción en un contacto de tipo 1.

$$n_x = \frac{\delta F}{\delta x} = c_1 = n_{ax} \quad (2.112)$$

$$n_y = \frac{\delta F}{\delta y} = c_2 = n_{ay} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} n_q &= \frac{\delta F}{\delta q} = \frac{-h}{\rho} \text{sen}\left(\frac{q}{\rho} + \psi\right) = \frac{-h}{\rho} \text{sen}(\phi_r + \phi_g + \gamma - \psi_{n_a}) = \\ &= \frac{1}{\rho} \|\langle \vec{h} \times \vec{n}_a \rangle\| = \frac{1}{\rho} (h_x n_{ay} - h_y n_{ax}) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Teniendo en cuenta que en las  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1 se cumple  $\vec{h} = -\vec{r}$  las ecuaciones (2.112), (2.113) y (2.114) permiten reescribir las (2.109), (2.110) y (2.111) como

$$f_x + f_n(n_x - \mu n_y) = 0 \quad (2.115)$$

$$f_y + f_n(n_y + \mu n_x) = 0 \quad (2.116)$$

$$f_\tau + f_n\left(\frac{n_x r_y - n_y r_x}{\rho} + \mu \frac{n_y r_y + n_x r_x}{\rho}\right) = 0 \quad (2.117)$$

y definiendo

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} -n_y \\ n_x \\ (n_x r_x + n_y r_y)/\rho \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

pueden ponerse de forma vectorial como

$$\vec{f} + f_n(\vec{n} + \mu \vec{m}) = 0 \quad (2.119)$$

### Contacto tipo 2

Para un contacto tipo 2 se tienen las expresiones

$$\vec{f}_n = -f_n \vec{n}_b \quad (2.120)$$

$$\vec{n}_b^\perp = [-n_{by} \quad n_{bx}]^T \quad (2.121)$$

Aplicadas a las ecuaciones (2.100) a (2.102) se obtiene

$$f_x + f_n \langle -\vec{n}_b \cdot \hat{i} \rangle + \langle -\mu f_n \vec{n}_b^\perp \cdot \hat{i} \rangle = 0 \quad (2.122)$$

$$f_y + f_n \langle -\vec{n}_b \cdot \hat{j} \rangle + \langle \mu f_n \vec{n}_b^\perp \cdot \hat{j} \rangle = 0 \quad (2.123)$$

$$\tau + f_n \|\langle -\vec{n}_b \times \vec{r} \rangle\| - \mu f_n \|\langle -\vec{n}_b^\perp \times \vec{r} \rangle\| = 0 \quad (2.124)$$

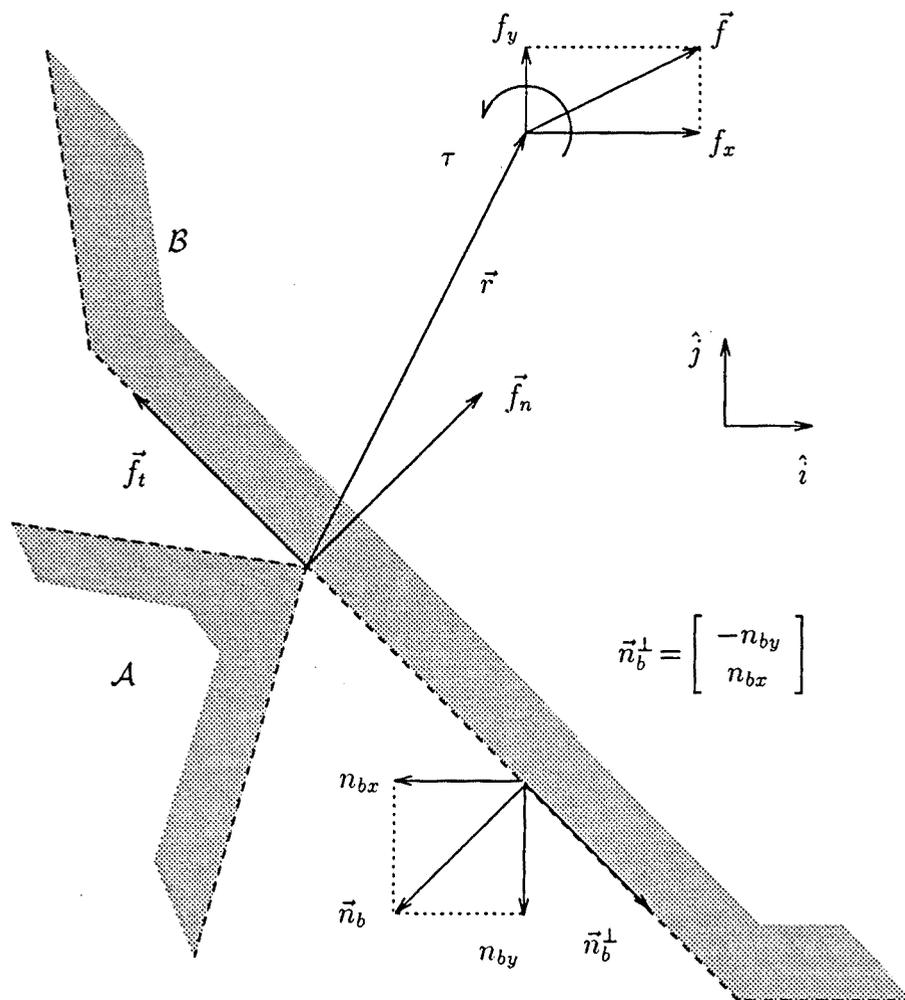


Figura 2.16: Equilibrio estático con fricción en un contacto de tipo 2.

y desarrollando los productos escalares y vectoriales resulta

$$f_x + f_n(-n_{bx} + \mu n_{by}) = 0 \quad (2.125)$$

$$f_y + f_n(-n_{by} - \mu n_{bx}) = 0 \quad (2.126)$$

$$\tau + f_n(n_{by}r_x - n_{bx}r_y - \mu(n_{by}r_y + n_{bx}r_x)) = 0 \quad (2.127)$$

Por otro lado, la normal  $\vec{n} = [n_x \quad n_y \quad n_q]^T$  exterior a una  $\mathcal{C}$ -superficie  $F(x, y, q) = 0$  de tipo 2 está dada por

$$n_x = \frac{\delta F}{\delta x} = \text{sen}\left(\frac{q}{\rho} + \beta\right) = -n_{bx} \quad (2.128)$$

$$n_y = \frac{\delta F}{\delta y} = -\text{cos}\left(\frac{q}{\rho} + \beta\right) = -n_{by} \quad (2.129)$$

$$n_q = \frac{\delta F}{\delta q} = \frac{1}{\rho} \left( (x - d_1) \text{cos}\left(\frac{q}{\rho} + \beta\right) + (y - d_2) \text{sen}\left(\frac{q}{\rho} + \beta\right) \right) \quad (2.130)$$

Teniendo en cuenta que en las  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 2 se cumple  $\vec{r} = [x - d_1 \quad y - d_2]^T$ , la ecuación (2.130) puede escribirse

$$n_q = \frac{1}{\rho} (r_x n_{by} - r_y n_{bx}) \quad (2.131)$$

Las ecuaciones (2.128), (2.129) y (2.131) permiten reescribir las (2.125), (2.126) y (2.127) como

$$f_x + f_n(n_x - \mu n_y) = 0 \quad (2.132)$$

$$f_y + f_n(n_y + \mu n_x) = 0 \quad (2.133)$$

$$f_\tau + f_n\left(\frac{-n_y r_x + n_x r_y}{\rho} + \mu \frac{n_y r_y + n_x r_x}{\rho}\right) = 0 \quad (2.134)$$

expresiones equivalentes a las (2.115), (2.116) y (2.117), por lo que también para las  $\mathcal{C}$ -superficies tipo 2 es válida la ecuación (2.119).

De este análisis se desprende que, de una manera genérica, el cono de fricción en  $\mathcal{C}_3$ , tanto para  $\mathcal{C}$ -superficies tipo 1 como tipo 2, viene dado por la composición del vector  $\vec{n}$  con el vector  $\vec{m}$  afectado del factor de escala  $\mu$ .

La expresión de  $\vec{m}$  fué definida suponiendo un sentido arbitrario de la fuerza de fricción  $f_t$ , por lo que el cono completo queda descrito considerando  $\pm\vec{m}$ , es decir, sus direcciones extremas están dadas por

$$\vec{n} \pm \mu \vec{m} \quad (2.135)$$

En la figura 2.17 se muestra el cono de fricción en  $\mathcal{C}_3$  para un único punto de contacto. La normal al plano definido por los vectores  $\vec{n}$  y  $\vec{m}$  indica la dirección tangente a la  $\mathcal{C}$ -superficie según la cual no existe fuerza de fricción; un movimiento según esta dirección representa en el plano de trabajo una rotación del objeto alrededor del punto de contacto.

### 2.5.2.2 Fricción en $\mathcal{C}_3$ para varios puntos de contacto

El resultado obtenido en el apartado anterior para un único punto de contacto es aplicable individualmente en todos y cada uno de los puntos de contacto cuando existen varios. De este modo se tiene una serie de conos de fricción en  $\mathcal{C}_3$  que representan todas las posibles fuerzas de reacción que pueden generarse en cada uno de los contactos por separado.

La fuerza de reacción total resultante será la suma vectorial de las fuerzas de reacción en cada contacto. Por lo tanto, si para cada contacto  $i$  la fuerza de reacción generalizada se considera indicada por

$$\vec{g}_i = K_i(\vec{n}_i + k_i \vec{m}_i) \quad \text{con} \quad |k_i| \leq \mu \quad \text{y} \quad K_i \geq 0 \quad (2.136)$$

entonces la fuerza de reacción total resultante cuando existen  $n$  contactos es

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^n K_i (\vec{n}_i \pm k_i \vec{m}_i) \quad (2.137)$$

La ecuación (2.137) muestra que las posibles direcciones de la fuerza de reacción total pueden obtenerse realizando una combinación lineal, con coeficientes positivos ( $K_i$ ), de un vector genérico del cono de fricción asociado a cada contacto.

La figura 2.18 ilustra conceptualmente como se delimitan el rango de direcciones posibles de la fuerza de reacción total resultante para el caso de tres puntos de contacto, a partir de sus correspondientes conos de fricción.

## 2.6 Representación de las fuerzas de $\mathcal{F}_3$

Como se verá oportunamente, de las fuerzas generalizadas de reacción sólo será de interés su dirección, independientemente del módulo que posean. Por lo tanto, la información sobre una fuerza generalizada dada por tres parámetros (sus tres componentes) puede condensarse en sólo dos, indicativos de su dirección.

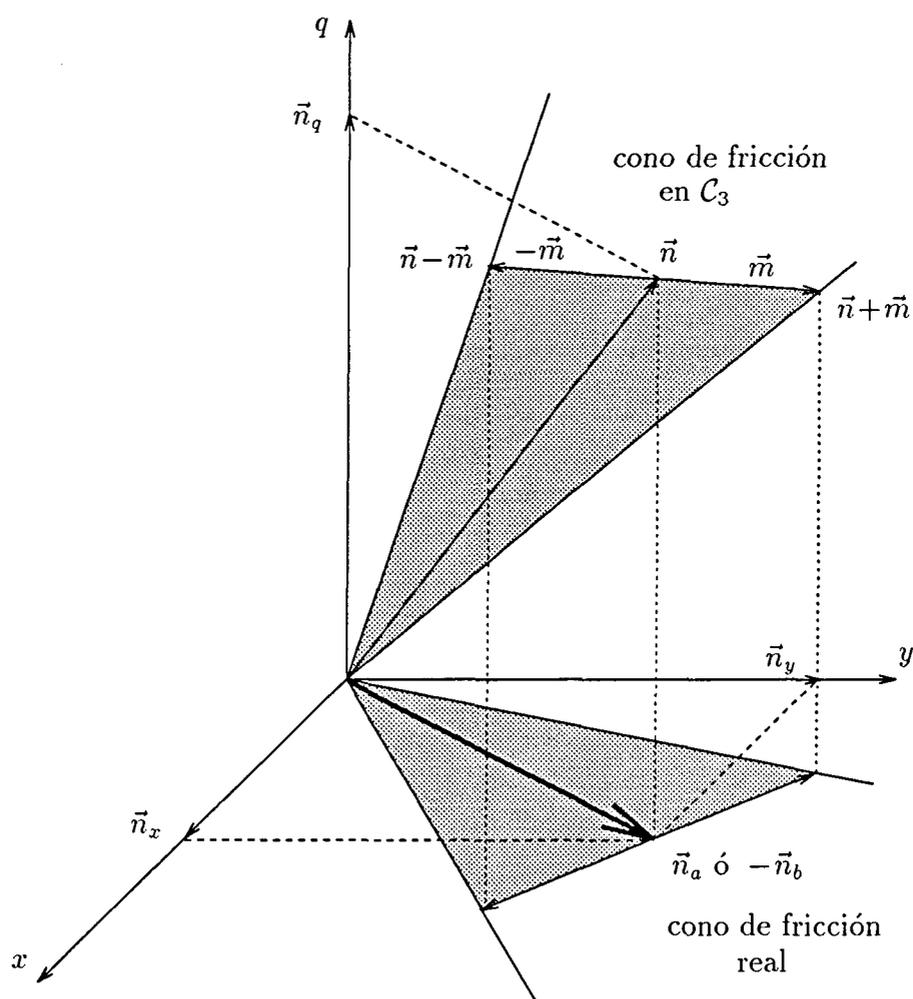


Figura 2.17: Cono de fricción en el espacio de Configuraciones.

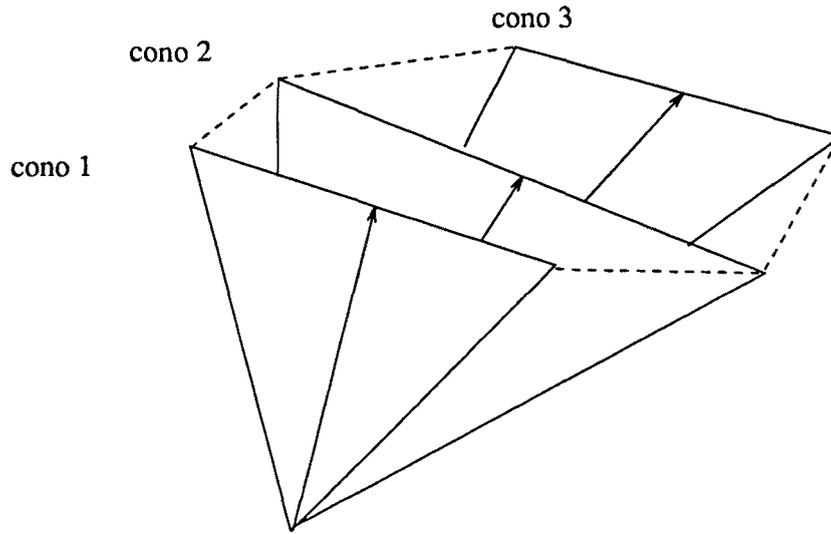


Figura 2.18: Combinación de los conos de fricción en  $\mathcal{C}_3$  para el caso de 3 puntos de contacto.

Pueden utilizarse diferentes modelos para representar la dirección de una fuerza generalizada  $\vec{g} = [f_x \ f_y \ f_\tau]^T \in \mathcal{F}_3$ . En este trabajo se utilizará el punto intersección de la recta que define la fuerza generalizada en  $\mathcal{F}_3$  con el plano determinado por  $f_\tau = 1$ , más una variable discreta que indique el sentido de la componente  $f_\tau$ . Esta representación puede interpretarse como una normalización de la fuerza generalizada  $\vec{g}$  respecto a  $f_\tau$ , es decir

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{f_x}{f_\tau} & \frac{f_y}{f_\tau} & \text{signo}(f_\tau) \end{array} \right]^T \quad (2.138)$$

donde  $\text{signo}(f_\tau) \in \{-1, 0, 1\}$ . La figura 2.19 ilustra esta representación para el caso de una fuerza generalizada  $\vec{g}_1$  con componente  $f_\tau > 0$  y otra  $\vec{g}_2$  con componente  $f_\tau < 0$ . En el caso de que  $f_\tau = 0$ , el punto de intersección se sitúa en el infinito.

### 2.6.1 Representación dual de las fuerzas

La representación de las direcciones de las fuerzas generalizadas adoptada permite una construcción gráfica y una interpretación relativamente sencillas a partir de las fuerzas reales que actúan sobre un objeto en el espacio físico (Brost y Mason, 1989), tal como se muestra a continuación.

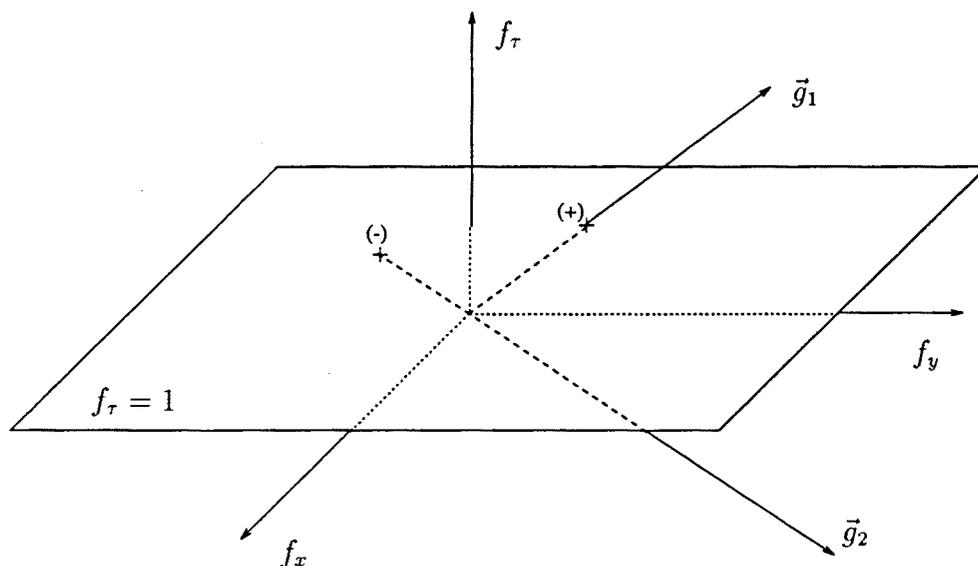


Figura 2.19: Representación de fuerzas generalizadas.

En el plano de trabajo, la recta de acción de una fuerza  $\vec{f}$  descrita por  $ax + by + c = 0$  puede representarse mediante el punto dual dado por  $f' = (a/c, b/c)$ . Geométricamente, el punto dual está ubicado sobre la recta perpendicular a la que representa que pasa por el origen de referencia  $O$ , y si  $d$  es la distancia de la recta de acción de la fuerza al origen, entonces la distancia del origen al punto dual es  $1/d$ . Agregando un signo a  $f'$  se puede indicar también el sentido de la fuerza además de su recta de acción, y por lo tanto el signo del par que produce. En la figura 2.20 se muestra esta representación.

Físicamente puede hacerse la siguiente interpretación: si se considera como origen  $O$  el baricentro de un objeto, el punto  $f'$  representa el *centro de aceleración* del objeto cuando se le aplica una fuerza  $\vec{f}$ , lo que significa que  $f'$  es el único punto del objeto que instantáneamente tiene aceleración lineal nula. Puede observarse que una fuerza cuya recta de acción pase por  $O$  produce una aceleración de traslación pura, que es equivalente a considerar una rotación respecto a un punto  $f'$  en el infinito.

La relación entre esta construcción geométrica en el plano de trabajo y las fuerzas generalizadas es la siguiente. Considerando que el origen  $O$  utilizado en esta construcción coincide con el origen de coordenadas del sensor de fuerza y par, entonces el punto  $f'$  más su signo asociado, indican la dirección de la fuerza generalizada que produce  $\vec{f}$ . El plano de trabajo real, en el que se

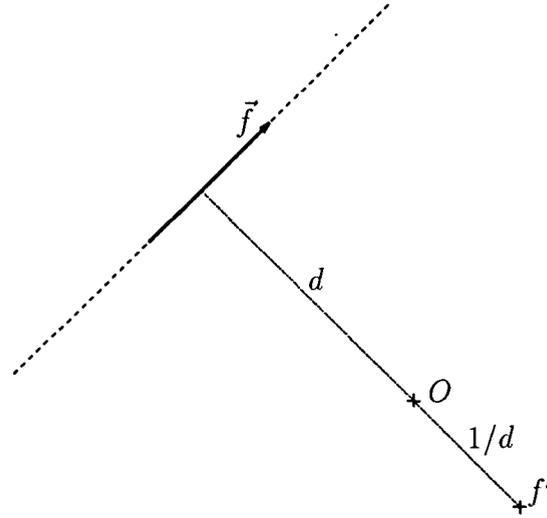


Figura 2.20: Representación de la recta de acción de una fuerza mediante un punto dual.

expresan los puntos duales, coincide con el plano determinado por  $f_\tau = 1$  en  $\mathcal{F}_3$  rotado  $\pi/2$ .

Para verificar esta relación, considérese la fuerza  $\vec{f} = [f_x \ f_y]^T$  cuya recta de acción puede expresarse como  $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - d = 0$  (figura 2.20). La fuerza generalizada equivalente es  $\vec{g} = [f_x \ f_y \ -\|\vec{f}\|d]^T$ , que al normalizar según  $f_\tau$  sus dos primeras componentes quedan,

$$\begin{bmatrix} \frac{-f_x}{\|\vec{f}\|d} & \frac{-f_y}{\|\vec{f}\|d} \end{bmatrix}^T \quad (2.139)$$

Por otra parte el punto dual  $f'$  de la recta soporte de  $\vec{f}$  es

$$f' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -d & -d \end{bmatrix}^T \quad (2.140)$$

Dado que

$$\cos \alpha = \frac{-f_y}{\|\vec{f}\|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{f_x}{\|\vec{f}\|} \quad (2.141)$$

$f'$  puede ponerse como

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{f_y}{\|\vec{f}\|d} & \frac{-f_x}{\|\vec{f}\|d} \end{bmatrix}^T \quad (2.142)$$

que resulta ser una rotación en  $\pi/2$  del punto expresado en (2.139).

## 2.6.2 Representación dual de fuerzas sujetas a algunas restricciones particulares

En los subapartados siguientes, cuando no se especifique el signo asociado a un punto en la representación dual significa que éste puede ser tanto positivo como negativo dependiendo del sentido de la fuerza correspondiente.

### 2.6.2.1 Fuerzas que cuyas rectas de acción pasan por un mismo punto

La familia de rectas de acción de fuerzas que pasan por el punto  $[x_0 \ y_0]^T$  y tiene como parámetro la pendiente  $m$  es

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (2.143)$$

El punto dual de una recta de esta familia es

$$[x \ y]^T = \left[ \frac{m}{y_0 - m x_0} \quad \frac{-1}{y_0 - m x_0} \right]^T \quad (2.144)$$

eliminado el parámetro  $m$  entre las dos coordenadas del punto resulta

$$x - \frac{y_0}{x_0} y + \frac{1}{x_0} = 0 \quad (2.145)$$

que es la ecuación de una recta.

Así, la representación dual tiene la siguiente propiedad: todas las fuerzas cuya recta de acción pasa por un punto dado del plano de trabajo se representan mediante puntos duales pertenecientes a una misma recta, con independencia del signo asociado a cada punto dual. En particular, cuando el punto de intersección de las fuerzas tiende a infinito y por lo tanto las rectas de acción de las fuerzas son paralelas, la recta que forman sus puntos duales es perpendicular a ellas y pasa por el origen.

### 2.6.2.2 Fuerzas cuyas rectas de acción tienen direcciones determinadas pero no se conoce la recta soporte

Este es el caso general en que se conocen las direcciones incluidas en un cono de fricción pero no se conoce el punto de contacto y por lo tanto el punto de aplicación de las fuerzas.

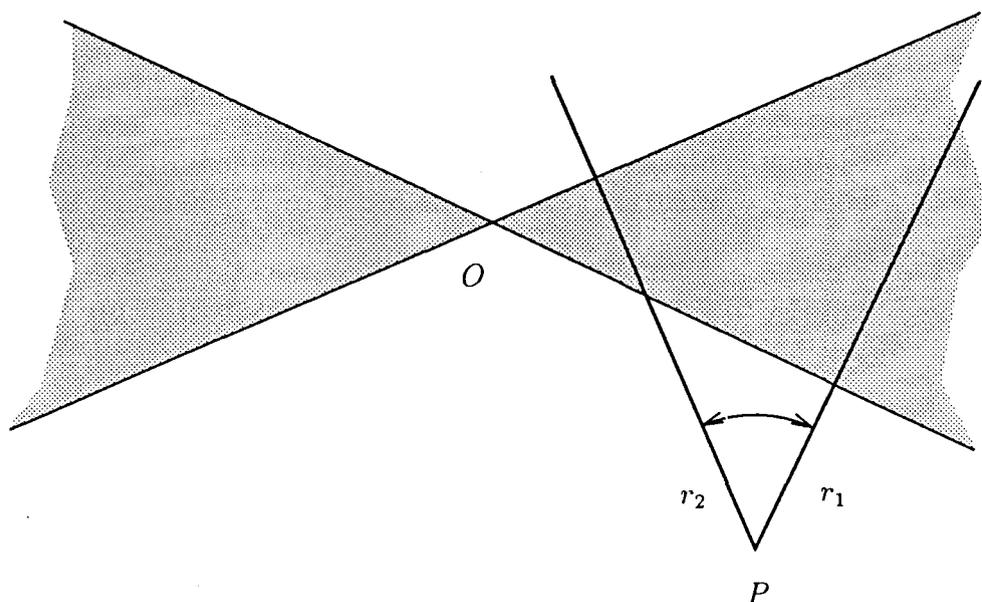


Figura 2.21: Representación de las rectas de acción de fuerzas cuyas rectas de acción tienen direcciones entre las de  $r_1$  y  $r_2$  pero no se conoce el punto de aplicación  $P$ .

Se trata de determinar el conjunto de puntos duales de todas las rectas de acción de fuerzas con unas direcciones determinadas, para ello se usa la propiedad de la representación dual descrita en el subapartado 2.6.2.1. Así, todas las rectas de acción con direcciones contenidas entre dos rectas dadas  $r_1$  y  $r_2$  tienen su representación dual entre las rectas perpendiculares a  $r_1$  y  $r_2$  que pasan por el origen, tal como se ilustra en la figura 2.21.

### 2.6.2.3 Fuerzas de reacción posibles en un cono de fricción

Las fuerzas incluidas dentro de un cono de fricción son un subconjunto de todas las que pasan por el punto de contacto determinado por un rango de direcciones específico. Se obtienen entonces aplicando los resultados obtenidos en los subapartados 2.6.2.1 y 2.6.2.2.

Pueden distinguirse dos casos dependiendo de si el origen de referencia está dentro o fuera del cono de fricción. Si el origen está fuera del cono, todas las fuerzas incluidas en él producirán pares con igual signo (sea positivo o negativo), y serán representadas por el segmento de recta que une los puntos

duales de las rectas límites del cono de fricción (figura 2.22a).

Si el origen está dentro del cono de fricción, las fuerzas incluidas en él producen pares tanto positivos como negativos, existiendo una fuerza cuya recta de acción pasa por el origen y cuyo par resulta nulo. Por lo tanto, los puntos duales de las rectas límites del cono de fricción tienen diferente signo, y la representación de las fuerzas del cono está dada por las dos ramas exteriores al segmento que sendos puntos definen, teniendo cada una de ellas asignado un signo diferente (figura 2.22b).

Para facilitar la interpretación de este resultado en  $\mathcal{F}_3$ , puede considerarse que el cono de fricción es el conjunto de fuerzas obtenido mediante una combinación lineal con coeficientes positivos de las fuerzas que marcan sus límites. Si  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  son las fuerzas generalizadas correspondientes a las fuerzas extremas del cono, el efecto de esta combinación lineal es el mostrado en la figura 2.23, donde puede apreciarse los resultados de que las fuerzas  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  tengan componente  $f_\tau$  de igual o distinto signo.

#### 2.6.2.4 Fuerzas cuyas rectas de acción cortan a un segmento dado

De la propiedad descrita en el subapartado 2.6.2.1, las rectas  $r_i$  que pasan por un punto  $P \in l$  se representan mediante puntos  $R_i^*$  de una recta  $p^*$ . Si se consideran todos los puntos  $P \in l$  se obtiene una familia de rectas  $p^*$ . Dado que existe una recta  $r_j$  que pasa por todos los puntos  $P \in l$  (la recta que contiene a  $l$ ) entonces existe un punto  $R_j^*$  que pertenece a todas las rectas  $p^*$ , es decir, todas las rectas  $p^*$  se intersectan en  $R_j^*$ . Los límites de la familia de rectas  $p^*$  son las rectas  $a$  y  $b$  formadas por los puntos duales de las rectas de acción que pasan por los puntos extremos de  $l$ ,  $A$  y  $B$  respectivamente.

La figura 2.24 muestra un ejemplo, la zona sombreada representa los puntos duales de las fuerzas cuya recta de acción corta al segmento  $l$ . Un caso particular ocurre cuando la recta  $r_j$  que contiene a  $l$  pasa por el origen de referencia, entonces el punto  $R_j^*$  está en el infinito y por lo tanto las rectas  $p^*$  resultan ser paralelas.

#### 2.6.2.5 Fuerzas cuyas rectas de acción cortan a una circunferencia dada

Si la recta de acción  $r$  de una fuerza corta a una circunferencia dada, dicha recta se encuentra necesariamente entre dos rectas paralelas tangentes a la circunferencia,  $t_1$  y  $t_2$ , o coincide con alguna de ellas. Por lo tanto,

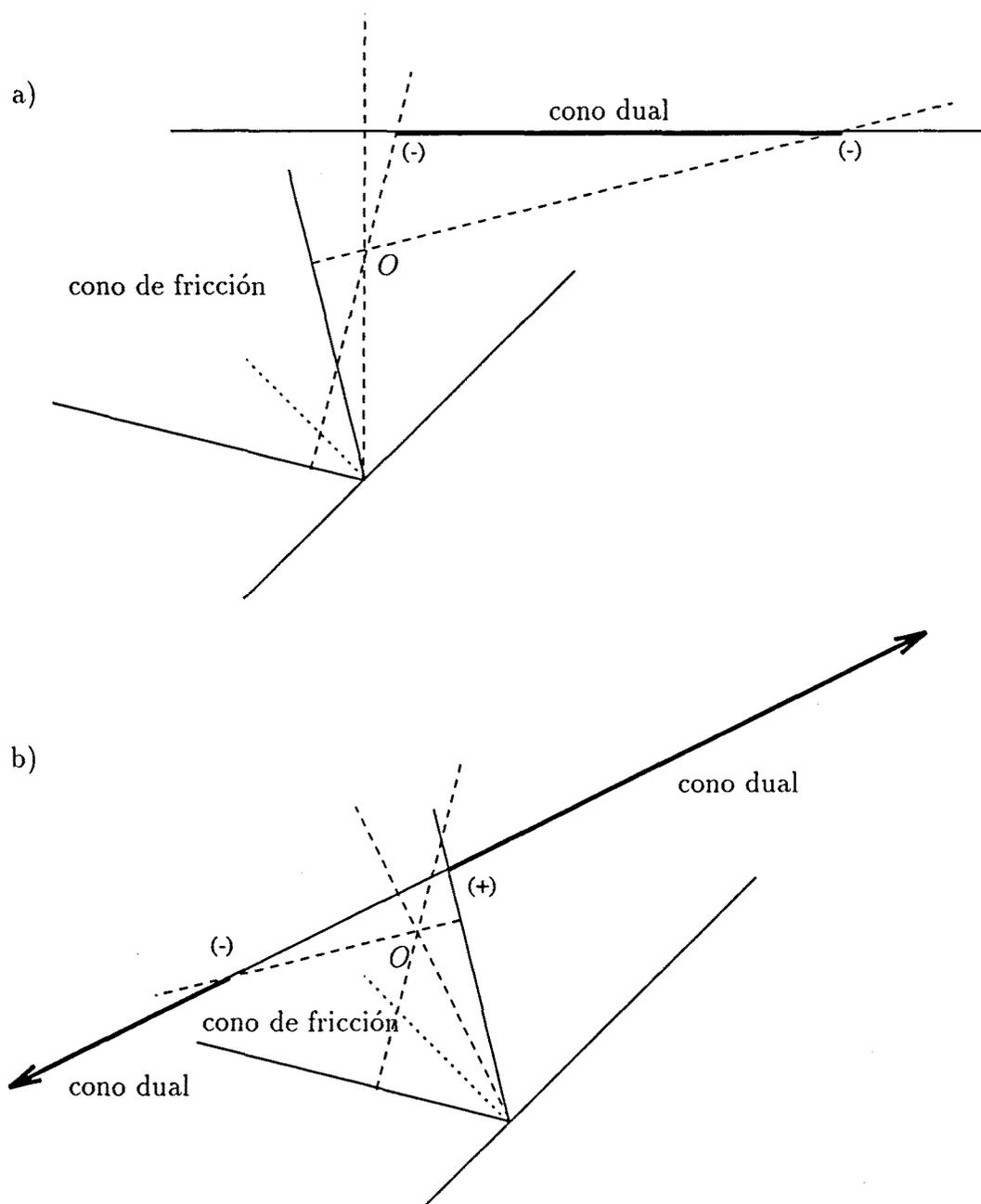


Figura 2.22: Representación de la fuerza de un cono de fricción: a) origen exterior al cono, b) origen interior al cono.

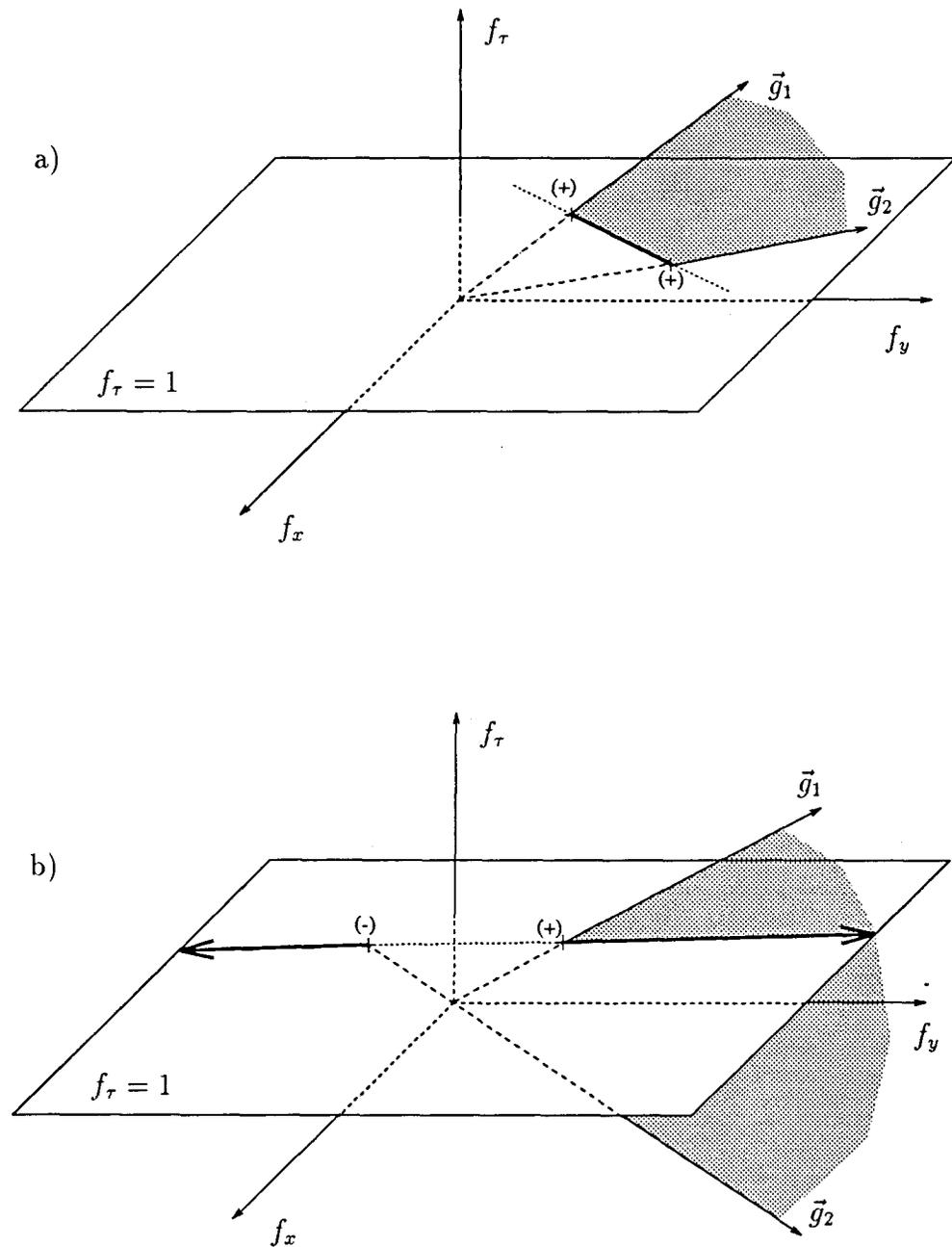


Figura 2.23: Combinación lineal con coeficientes positivos de dos fuerzas generalizadas con: a)  $f_\tau$  de igual signo, b)  $f_\tau$  de diferente signo.

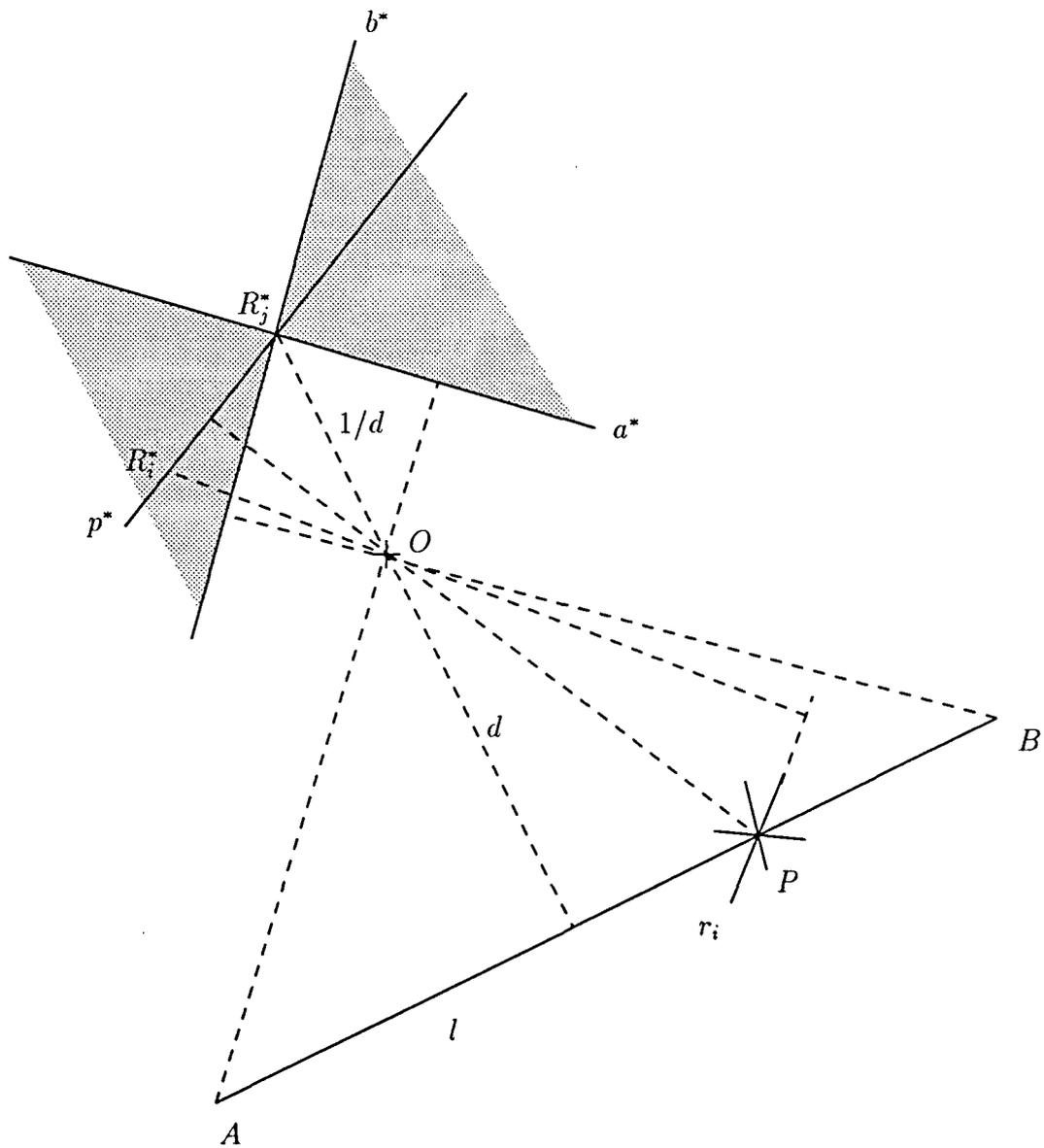


Figura 2.24: Representación de las rectas de acción de fuerzas que cortan a un segmento dado.

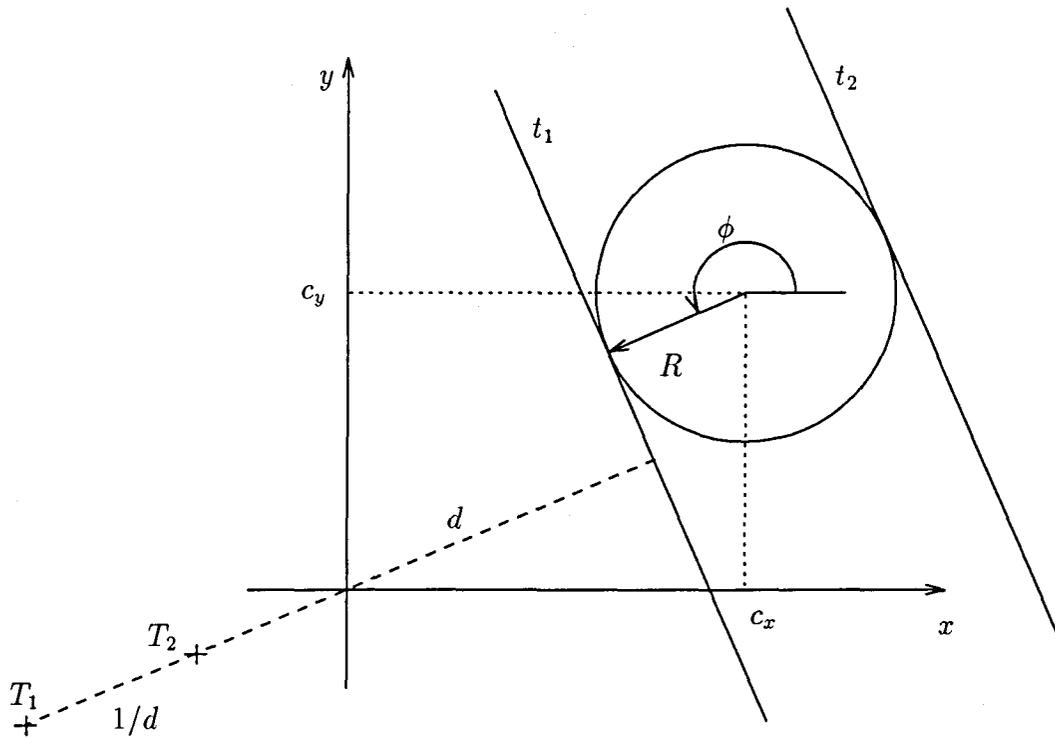


Figura 2.25: Representación de una recta de acción de fuerza tangente a una circunferencia.

la representación dual de las fuerzas cuyas rectas de acción cortan a una circunferencia dada puede obtenerse determinando la zona delimitada por la representación dual de las rectas tangentes a la circunferencia.

Sea la circunferencia de centro en  $[c_x, c_y]^T$  y radio  $R$  (figura 2.25),

$$\begin{cases} x = c_x + R \cos \theta \\ y = c_y + R \sin \theta \end{cases} \quad (2.146)$$

La ecuación de una recta genérica  $t_1$  tangente a la circunferencia es

$$x \cos \theta + y \sin \theta = h \quad (2.147)$$

donde  $h$  está determinado por el punto de tangencia,

$$h = (c_x + R \cos \theta) \cos \theta + (c_y + R \sin \theta) \sin \theta = c_x \cos \theta + c_y \sin \theta + R \quad (2.148)$$

La distancia de la recta al origen es  $d = |h|$ . El punto dual de esta recta tangente está dado entonces por las coordenadas

$$x = -\frac{\cos \theta}{h} = \frac{\cos \theta}{c_x \cos \theta + c_y \operatorname{sen} \theta + R} \quad (2.149)$$

$$y = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{h} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{c_x \cos \theta + c_y \operatorname{sen} \theta + R} \quad (2.150)$$

y eliminando entre ambas el parámetro  $\theta$  se obtiene

$$x^2(R^2 - c_x^2) + y^2(R^2 - c_y^2) - 2xyc_y c_x - 2xc_x - 2yc_y - 1 = 0 \quad (2.151)$$

ecuación de una cónica con representación genérica:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (2.152)$$

Los invariantes de esta ecuación de segundo grado son:

*Primer invariante:*

$$S = a_{11} + a_{22} = 2R^2 - c_x^2 - c_y^2 \quad (2.153)$$

*Segundo invariante (discriminante menor):*

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R^2 - c_x^2 & -c_y c_x \\ -c_y c_x & R^2 - c_y^2 \end{vmatrix} = R^2(R^2 - c_x^2 - c_y^2) \quad (2.154)$$

*Tercer invariante (discriminante mayor):*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R^2 - c_x^2 & -c_y c_x & -c_x \\ -c_y c_x & R^2 - c_y^2 & -c_y \\ -c_x & -c_y & -1 \end{vmatrix} = -R^4 \quad (2.155)$$

El tipo de cónica resultante depende de la posición de la circunferencia con referencia al origen. Considerando  $R \neq 0$  y por tanto  $\Delta \neq 0$ , resultan los siguientes casos:

1. *El origen es exterior a la circunferencia.* Entonces  $\delta < 0$  y por lo tanto la cónica resultante es una hipérbola. La representación dual buscada es el conjunto de puntos contenidos entre las dos ramas de la hipérbola.
2. *El origen está sobre la circunferencia.* Entonces  $\delta = 0$  y por lo tanto la cónica resultante es una parábola. La representación dual buscada es el conjunto de puntos limitado por la parábola que no contiene al origen.

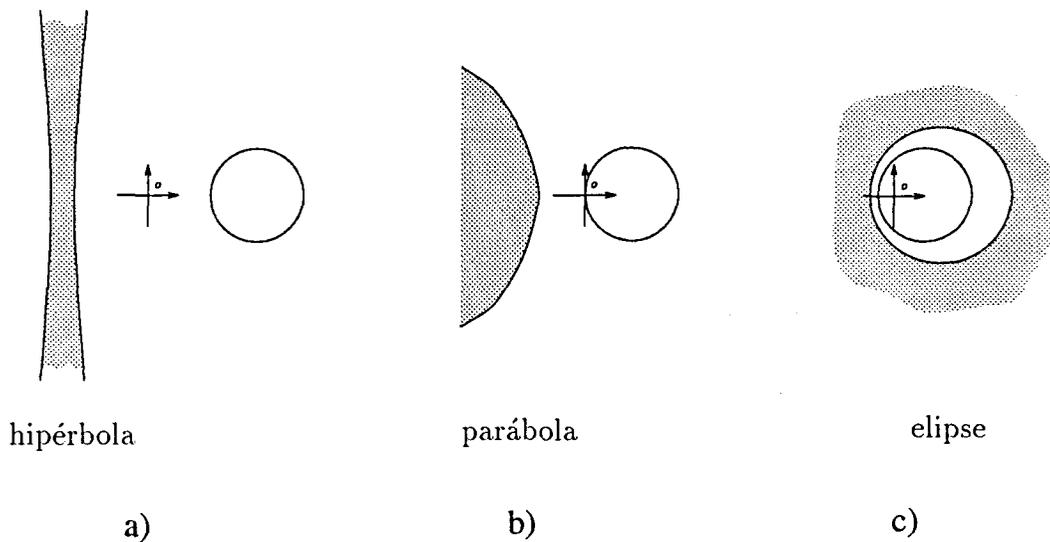


Figura 2.26: Representación de todas las fuerzas que cortan a una circunferencia dada: a) origen fuera de la circunferencia, b) origen sobre la circunferencia, y c) origen dentro de la circunferencia.

3. El origen es interior a la circunferencia. Entonces  $\delta > 0$  y por lo tanto la cónica resultante es una elipse. Como caso particular cuando el origen coincide con el centro de la circunferencia la cónica resultante es también una circunferencia. La representación dual buscada es el conjunto de puntos exteriores a la elipse.

La figura 2.26 ilustra los tres casos posibles. Las zonas sombreadas representan el conjunto de puntos duales de todas las fuerzas cuyas rectas de acción cortan a la circunferencia dada.

#### 2.6.2.6 Fuerzas cuyas rectas de acción cortan a un arco de una circunferencia centrada en el origen

La figura 2.27 ilustra, en sombreado, los puntos duales de rectas que cortan a un arco  $m$  de una circunferencia centrada en el origen. A continuación se describe como determinar este conjunto de puntos.

Las rectas de acción que cortan a  $m$  pueden dividirse en dos conjuntos, uno formado por rectas que cortan la cuerda  $l$  correspondiente al arco  $m$ , y el otro

formado por rectas con direcciones (pendientes) comprendidas entre las de las tangentes a  $m$  en sus extremos  $A$  y  $B$ , que no cortan a  $l$ .

Los puntos duales para el primer conjunto se obtienen aplicando los resultados del subapartado 2.6.2.4. Es decir, los puntos duales de las rectas que pasan por el segmento  $l$  incluido en la recta  $r_j$  están en la zona limitada por las rectas  $a^*$  y  $b^*$  (duales de todas las rectas por  $A$  y  $B$  respectivamente) que se intersectan en el punto  $R_j^*$ .

Llamando  $A'$  y  $B'$  a los puntos duales de las rectas tangentes a  $m$  en  $A$  y  $B$  respectivamente, los puntos duales para las rectas del segundo conjunto quedan determinados por los segmentos  $\overline{A'R_j^*}$  y  $\overline{R_j^*B'}$  y el arco  $\widehat{A'B'}$  ya que:

- las rectas pasan por la circunferencia que contiene a  $m$ , entonces los puntos duales son externos a la circunferencia con centro en el origen que pasa por  $A'$  y  $B'$  (subapartado 2.6.2.5),
- las rectas tienen pendientes comprendidas entre las de las tangentes a  $m$  en sus extremos  $A$  y  $B$ , entonces los puntos duales están en el ángulo definido por  $\widehat{A'OB'}$ ,
- para cada pendiente, las rectas de este conjunto más cercanas al origen coinciden, en el límite, con una recta de igual pendiente que pasa por los puntos  $A$  ó  $B$  de  $l$ , entonces los puntos duales están en el ángulo definido por  $\widehat{A'R_j^*B'}$ .

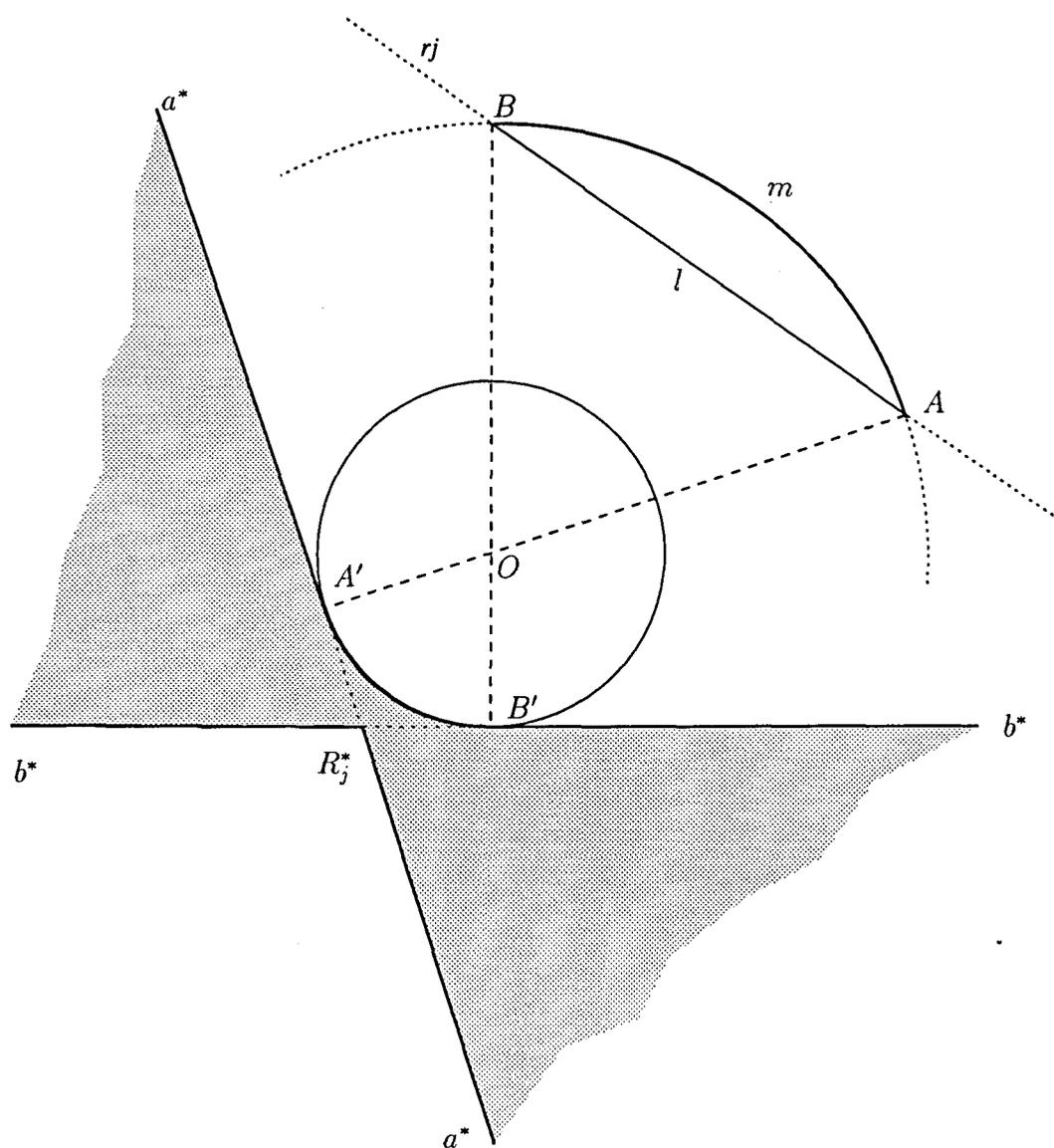


Figura 2.27: Representación de las rectas de acción de fuerzas que pasan por un arco de una circunferencia centrada en el origen.



## Capítulo 3

# Incertidumbre en el espacio físico

En este capítulo se introduce la idea de incertidumbre y su modelado en el espacio físico. En cada caso se ha adoptado un modelo consecuente con las condiciones reales del problema, relajando esta condición sólo cuando su complejidad sea excesiva para ser tratados con criterio práctico. Dado que el movimiento del objeto sujeto por el robot está restringido al plano de trabajo, no se tienen en cuenta las incertidumbres que afectan a las componentes de cualquier magnitud física perpendiculares a dicho plano.

El capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera, de introducción, se define el concepto de incertidumbre y se describen algunos trabajos previos que proponen diferentes enfoques para su modelado en el ámbito de la robótica. Las tres secciones siguientes detallan los modelos adoptados de incertidumbre de posición, fuerza y velocidad en el espacio de físico.

### 3.1 Introducción

#### 3.1.1 Antecedentes

Los valores de todos los parámetros y variables que describen los objetos, o el comportamiento de éstos, en el espacio físico real no se conoce de forma exacta. A pesar de ello, en gran cantidad de trabajos se utilizan solamente *valores nominales*, tomando como tales los ideales o los que *deberían* tener las variables

o parámetros, sin considerar que en la práctica no coinciden necesariamente con los reales. En otros casos, aunque se incluya incertidumbre en los modelos con los que se trabaja, muy frecuentemente se hace de forma poco consistente.

La descripción de la incertidumbre fue inicialmente estudiada con el objetivo de especificar piezas mecánicas (tolerancias), fundamentalmente para lograr piezas equivalentes cuyas características permitiesen el reemplazo directo de una por otra. En este contexto se han llegado a establecer normativas que indican de una manera más o menos efectiva como describir las tolerancias en las dimensiones de las piezas mecánicas (ISO, 1982).

Otro tema de estrecha relación con el tratamiento de la incertidumbre y que también ha sido ampliamente estudiado es la Teoría de Errores (Szidarovszky, 1978). En ella se establecen normas para limitar la incertidumbre en las variables no directamente mensurables y cuyos valores se obtienen mediante operaciones algebraicas sobre los valores de otras variables con límites de incertidumbre conocidos (normalmente la precisión de su medición).

En la planificación de movimientos de corto desarrollo a realizar por un robot, no sólo hay que contemplar la incertidumbre en las variables y parámetros que describen las características y posición de los objetos, sino también la incertidumbre en la posición del robot, la existente en la medición de la fuerza de interacción entre objetos y, dependiendo del modelo de control de posición-fuerza usado, la incertidumbre en la velocidad de los objetos móviles.

En lo que sigue se mencionan diversos trabajos previos relacionados con la incertidumbre en el contexto que nos ocupa, aparte de aquellos ya indicados en el capítulo 1 centrados principalmente en la planificación de movimientos de corto desarrollo incluyendo incertidumbre.

Con el objetivo de intentar establecer una adecuada sistematización en la descripción de los objetos sujetos a incertidumbre Requicha (1983) realiza desarrollos teóricos tendentes a establecer una teoría formal sobre las especificaciones de tolerancias en los objetos. El principal objetivo es poder agregar esta información, de manera sistemática, a los modelos de los objetos, que cada son vez más frecuentemente diseñados con un computador mediante GMS (Geometric (solid) Modeling System). Básicamente, su aportación consiste en especificar una serie de restricciones sobre las entidades geométricas de la superficie de las piezas. De esta forma define la zona de tolerancia para cada entidad como la zona barrida mediante un desplazamiento de los límites nominales del objeto. Con este modelo se cubren las incertidumbres existentes en la posición, forma y tamaño de las entidades geométricas de un objeto, y por lo tanto del objeto mismo. En base a esta teoría Requicha y Chan (1986)

proponen un esquema para representar las entidades geométricas de los objetos en un modelador de sólidos basado en la Geometría Constructiva de Sólidos (CSG), asociándoles tolerancias entre otros atributos.

Más recientemente, el trabajo de Requicha ha sido continuado por Fleming (1989) y Boyer y Stewart (1991), de cara a establecer "clases de variaciones" (conjuntos que conteniendo al sólido nominal sirven para restringir los modelos válidos de sólidos reales). Boyer y Stewart (1992) tratan, en particular, el problema de establecer restricciones que eliminen las perturbaciones que producen variaciones bruscas del contorno de un objeto (*slow variation constraint*).

En la misma línea se encuadra el trabajo de Jayaraman y Srinivasan (1989) quienes realizan un minucioso análisis de los métodos de representación de tolerancias geométricas en modelos de sólidos, persiguiendo dos objetivos principales: especificar la posición relativa de dos piezas en un montaje y mantener el espesor de las piezas en algunas partes críticas, ambos en presencia de incertidumbre en la forma, tamaño, y posición de las entidades geométricas de los objetos. Introducen para ello el concepto de requerimientos de límites virtuales (VBR= virtual boundary requirements), consistentes en un conjunto de superficies virtuales que son usadas para establecer restricciones que limitan las zonas de tolerancia.

Un enfoque diferente de la manipulación de la incertidumbre es el descrito por Durrant-Whyte (1988), que propone un modelo en el que la descripción de las entidades geométricas de un objeto con incertidumbre se realiza mediante familias de hiper-superficies parametrizadas en un espacio asociado. A cada parámetro se le asocia además una función de distribución de probabilidad para indicar su probabilidad de ocurrencia. El objetivo de esta técnica es poder operar sobre las entidades geométricas de un objeto, así como poder cambiar el sistema de referencia en el que son descritas, de una manera consistente y eficaz.

En lo referente a la incertidumbre producida estrictamente por el posicionamiento del robot, Benhabib, Fenton y Goldenberg (1987) analizan distintos modelos expresados en el sistema de coordenadas asociado a la tarea, y su relación con la incertidumbre en la posición de las articulaciones del manipulador, tanto en el sentido directo como en el inverso. Dado que esta relación es dependiente de la configuración del robot, se aplica un procedimiento estadístico utilizando un gran número de configuraciones generadas de forma aleatoria. Las tolerancias en el sistema de referencia de la tarea son descritas mediante pseudo-envolventes geométricas asociadas a cada punto, variando su forma según el modelo adoptado.

Pai y Leu (1991) estudian de forma detallada la influencia que tiene que tiene la incertidumbre en las articulaciones del manipulador en cada configuración del mismo; como resultado obtienen un mapa de incertidumbre sobre el espacio de trabajo que permite seleccionar configuraciones óptimas para realizar una determinada tarea de montaje o ciertos movimientos con acomodación.

En los trabajos de Day (1988) y Koçekali y col. (1991) puede encontrarse, sin llegar a tratar el problema de su modelado, una interesante y completa exposición de las fuentes de incertidumbre que afectan al posicionamiento de un manipulador, así como una serie de métodos para minimizarla.

Dentro del campo específico de la robótica referido a la ejecución de un plan de movimientos cuando existe incertidumbre, también existen diferentes enfoques. Brooks (1982) propone un método de propagación de incertidumbre de manera simbólica que trabaja sobre un plan previamente elaborado. La propagación puede ser tanto *hacia adelante* como *hacia atrás*; cuando se realiza hacia adelante permite probar si un plan es robusto, es decir, si se puede asegurar su éxito a pesar de la incertidumbre. La propagación hacia atrás permite, partiendo de unas especificaciones finales de incertidumbre, fijar las tolerancias máximas admisibles al iniciar la tarea, así como indicar, si se da el caso, en qué situaciones se deben realizar mediciones tendentes a reducir la incertidumbre. Los planes sobre los que trabaja incluyen sólo condiciones geométricas, y en la propagación de incertidumbre no se tiene en cuenta información alguna sobre las fuerzas de interacción. El método que propone requiere la división conceptual del sistema en tres bloques: planificador, evaluador de planes propuestos, y controlador del robot, división ésta que no siempre está perfectamente definida.

También trabajando sobre planes previamente elaborados, Xiao y Volz (1988, 1989) proponen un sistema para desarrollar restricciones que permitan modificar un plan de movimientos del robot para incluir incertidumbre; el plan inicial se considera elaborado teniendo en cuenta el uso de información sensorial de posición y fuerza sin incertidumbre. El sistema que proponen agrega incertidumbre en las lecturas de los sensores de posición y de fuerza, y en la velocidad de movimiento del robot; no se considera incertidumbre en la forma o tamaño de las piezas. Las incertidumbres consideradas se modelan mediante una esfera centrada en el extremo de cada uno de los vectores de posición, orientación, fuerza, par, velocidad de traslación y velocidad de rotación. Su estudio se centra básicamente en el típico problema de inserción vástago-agujero.

Una forma totalmente diferente de contemplar la incertidumbre existente

en los modelos geométricos de los objetos y del robot, es la descrita por Donald (1988), que también incluye estrategias de movimiento considerando incertidumbre en la velocidad y en la lectura de los sensores. Su propuesta, ya comentada en el apartado 1.4.2 al mencionar los trabajos previos sobre planificación de tareas de ensamblado en presencia de incertidumbre, implica un aumento en el número de grados de libertad del Espacio de Configuraciones al considerar como tales los parámetros afectados con incertidumbre. La propuesta es formalmente interesante pero pierde toda practicidad cuando son muchos los parámetros con incertidumbre, lo que implica una gran dimensión del Espacio de Configuraciones extendido.

Otros enfoques recurren a modelos probabilísticos de incertidumbre, como por ejemplo Su y Lee (1991), que afectan con un modelo de este tipo a las transformaciones homogéneas utilizadas para describir las relaciones espaciales de los objetos y realizan una propagación de incertidumbre al operar con dichas transformaciones.

Sobre propagación de incertidumbre a través de las transformaciones geométricas utilizada para describir la tarea también cabe citar los trabajos de Mazon y Alami (1989) y de Drift y Heemskerk (1989); ambos proponen reflejar los resultados de esta propagación en un nivel de primitivas de programación a nivel tarea del robot, sin que quede clara su posible integración en un planificador de movimientos para tareas de montaje.

### 3.1.2 Nomenclatura

Según cual sea el tipo de descripción que se realice, la incertidumbre en una variable o parámetro suele estar asociada a otros conceptos, como por ejemplo, *error*, *imprecisión* o *tolerancia*. La diferencia entre ellos es sutil, y muchas veces estos términos son usados como sinónimos. Aunque de uso menos frecuente son sinónimos de incertidumbre los términos: *incerteza*, *incertinidad* e *incertitud*.

En este trabajo se preferirá el término *incertidumbre*, y su interpretación será acorde a las siguientes definiciones:

**Definición 3.1** *Se denomina desviación de una variable o parámetro a la diferencia entre su valor medido o calculado y su valor verdadero.*

**Definición 3.2** *Se denomina incertidumbre en una variable o parámetro al dominio que, para un cierto valor observado o calculado, contiene todos los valores reales posibles debido a sus desviaciones.*

La incertidumbre refleja por lo tanto el grado de desconocimiento de las magnitudes con las que se trabaja.

Las desviaciones se indicarán mediante  $\delta$  y las incertidumbres mediante  $U$ , agregándose en ambos casos un subíndice indicativo de la variable o parámetro en cuestión. Los parámetros utilizados para indicar las desviaciones máximas se describirán mediante  $\epsilon$  y el subíndice correspondiente. El subíndice  $o$  se utilizará para indicar los valores nominales de las variables o parámetros con que se elabora el plan; estos valores pueden ser teóricamente esperados o resultantes de mediciones realizadas a priori.

## 3.2 Incertidumbre en la posición

Por incertidumbre en la posición se entiende, salvo expresa aclaración en contra, la referente a la posición absoluta de cualquier punto de un objeto, entendiéndose como tal la expresada en un sistema de referencia fijo en el plano de trabajo.

La incertidumbre siempre proviene de un proceso de medición, y posteriormente se propaga al calcular nuevos valores a partir de aquellos ya conocidos (teoría de errores). Por lo tanto, en un sentido estricto, su origen es sensorial. No obstante, con frecuencia es posible considerar y modelar a más alto nivel las fuentes de incertidumbre; tal es el caso de la incertidumbre en la posición.

En los subapartados siguientes se describen las fuentes de incertidumbre que afectan a la posición de un punto cualquiera de un objeto, estableciéndose un modelo para su representación. Posteriormente, estas fuentes de incertidumbre se agregan para el caso de un objeto sujeto en la pinza de un robot, denominado en adelante *objeto aprehendido*, y para el caso de objetos en reposo en el entorno de trabajo, denominados en adelante *objetos estáticos*. Finalmente se desarrollan las expresiones algebraicas que relacionan la posición real de un punto cualquiera de un objeto, aprehendido o estático, con su posición observada (medida o calculada).

### 3.2.1 Incertidumbre en la forma de los objetos

La incertidumbre en la forma de un objeto se debe a las tolerancias en su manufactura, cuya especificación limita los objetos reales que pueden ser considerados como realizaciones de un objeto nominal. El modelo que aquí

se describe sigue los conceptos desarrollados por Requicha (1983) para el caso de sólidos en el espacio tridimensional real.

La distancia de un punto  $p$  a un subconjunto  $S$  del espacio de trabajo, se define como

$$\text{dist}(p, S) = \min_{q \in S} \text{dist}(p, q), \quad q \in S \quad (3.1)$$

en la que  $\text{dist}(p, q)$  representa la distancia euclídea entre  $p$  y  $q$ .

Sea  $S$  un sólido, y  $D_p$  un número positivo; se define como *Sólido Compensado positivo*  $O(D_p; S)$ ,

$$O(D_p; S) = \{p \mid \text{dist}(p, S) \leq D_p\} \quad (3.2)$$

Para  $D_n \leq 0$  se define como *Sólido Compensado negativo*  $O(D_n; S)$ ,

$$O(D_n; S) = S - O(|D_n|; \bar{S}), \quad (3.3)$$

donde  $\bar{S}$  indica complemento de  $S$ .

Las definiciones de Sólido Compensado positivo y negativo dan lugar a los conceptos de *Condición de Material Máximo* (MMC: *Maximun Material Condition*) y *Condición de Material Mínimo* (LMC: *Least Material Condition*) en un espacio de trabajo de tres dimensiones (Requicha, 1983). Estos conceptos no serán desarrollados con más detalle aquí, pero se usarán las expresiones (3.2) y (3.3) para especificar la incertidumbre en la forma y tamaño de objetos en el plano.

Considerando  $D_n = -D_p = D$ , y aplicando las expresiones (3.2) y (3.3) a un objeto nominal  $S$  en  $\mathbb{R}^2$  se obtienen las figuras representativas de MMC y LMC respectivamente (figuras 3.1b y 3.1c). La zona de tolerancia  $Z$  asociada a  $S$  es por definición

$$Z = \text{MMC} - \text{LMC} \quad (3.4)$$

Cualquier objeto real observado  $S_o$  puede considerarse como una realización válida de  $S$  en presencia de incertidumbre si satisface,

$$\partial S_o \subset Z \quad (3.5)$$

donde  $\partial S_o$  representa el contorno de  $S_o$ .

$S_o$  puede obtenerse como una ampliación, reducción o deformación limitadas de  $S$  (o combinaciones de estas 3 operaciones), con lo que se limita la incertidumbre en la forma, tamaño y posición relativa de cada parte del objeto. Con el procedimiento y consideraciones seguidas,  $Z$  resulta ser

$$Z = \{p \mid \text{dist}(p, \partial S) \leq D\} \quad (3.6)$$

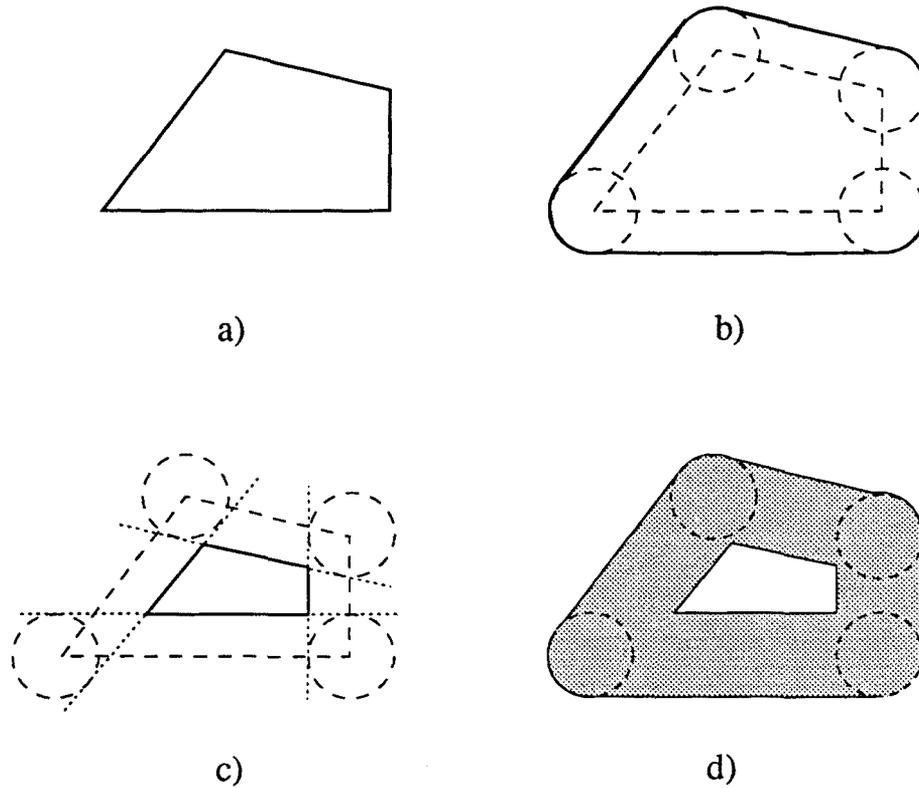


Figura 3.1: Objeto poligonal en el plano (a), su MMC (b), su LMC (c), y su zona  $Z$  de tolerancia resultante (d).

Esta restricción permite asumir que si  $q \in \partial S$  y  $q_o \in \partial S_o$ , entonces  $q_o$  puede ser una realización de  $q$  en presencia de incertidumbre si

$$\text{dist}(q, q_o) \leq D \quad (3.7)$$

La figura 3.2 ilustra un perfil real válido para el objeto representado en la figura 3.1.

Como consideración final, en la especificación de la incertidumbre que afecta a los objetos de manufactura industrial, aunque no se impone la condición de que los lados sean perfectamente rectos dentro de los rangos permitidos por  $Z$ , se asume que no existen variaciones bruscas en la dirección de sus normales que introduzcan perturbaciones de magnitud comparable a  $D$ ; tampoco se discute aquí el efecto producido por variaciones en la “rugosidad” del material en valores muy por debajo de  $D$  (Boyer y Stewart, 1992). La figura 3.3 ejemplifica el tipo de casos excluidos por esta asunción, y el tipo de perturbaciones no consideradas.

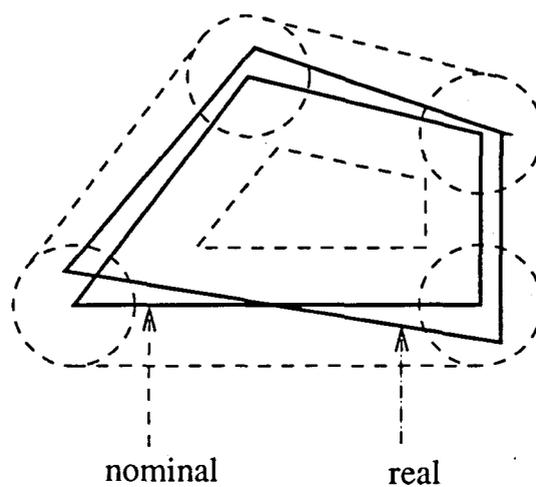


Figura 3.2: Ejemplo de pieza válida dentro de la zona de tolerancia  $Z$ .

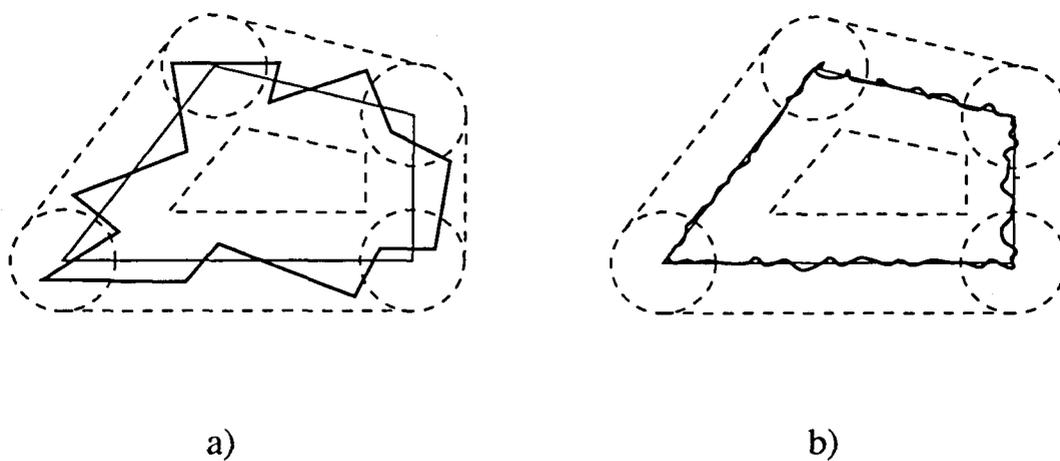


Figura 3.3: Ejemplo de perturbaciones no permitidas (a) y perturbaciones despreciadas (b) en los lados de un objeto.

Un objeto poligonal queda perfectamente caracterizado si se indica la posición nominal de cada uno de sus vértices en un sistema de referencia fijo en el objeto, tal como se describió en el apartado 2.1.2. La incertidumbre en su forma y tamaño queda fijada por la incertidumbre que afecta la posición de cada uno de sus vértices, que puede expresarse como

$$U_v = \{\vec{v} \mid \|\vec{v} - \vec{v}_o\| \leq \epsilon_v\} \quad (3.8)$$

donde  $\vec{v}$  representa la posición real del vértice,  $\vec{v}_o$  la posición prevista en el modelo nominal (equivalente a la observada) y  $U_v$  la incertidumbre correspondiente. Esta expresión es válida tanto para el objeto aprehendido por el robot como para los objetos estáticos, ya que los vectores  $\vec{v}$  no varían sus posiciones relativas al moverse el objeto. La condición (3.8) surge como consecuencia directa de la (3.7).

Con esta especificación de la incertidumbre en la forma y tamaño de un objeto, mediante un sencillo análisis geométrico es posible establecer la máxima desviación que puede sufrir la normal a cada uno de sus lados, expresada en el sistema de referencia dado por  $P_g$  y  $j$ . Tal como se muestra en la figura 3.4, la máxima desviación en el ángulo  $\psi_n$  que indica la dirección de la normal exterior nominal a un lado de longitud nominal  $l$  es

$$\epsilon_{\psi_n} = \arcsen\left(\frac{2\epsilon_v}{l}\right) \quad (3.9)$$

Se considera que  $\epsilon_{\psi_n}$  es la desviación máxima de la normal exterior al lado correspondiente del objeto, aún cuando se permita que sus lados no sean absolutamente rectos.

### 3.2.2 Incertidumbre en el posicionamiento del robot

La incertidumbre en el posicionamiento del elemento terminal de un robot depende de numerosos factores (Day, 1988; Koçekali y col., 1991) pero, sin duda, el más influyente es el incorrecto posicionamiento de cada una de las articulaciones del manipulador.

La incertidumbre en la posición de cada articulación del manipulador puede determinarse individualmente considerando el tipo de servomecanismo, el sistema de transmisión de movimiento, la forma de medir y realimentar su posición, etc. No obstante, la determinación de la incertidumbre global en la posición y orientación del elemento terminal a partir de la incertidumbre en la posición de cada articulación supone la utilización de expresiones no

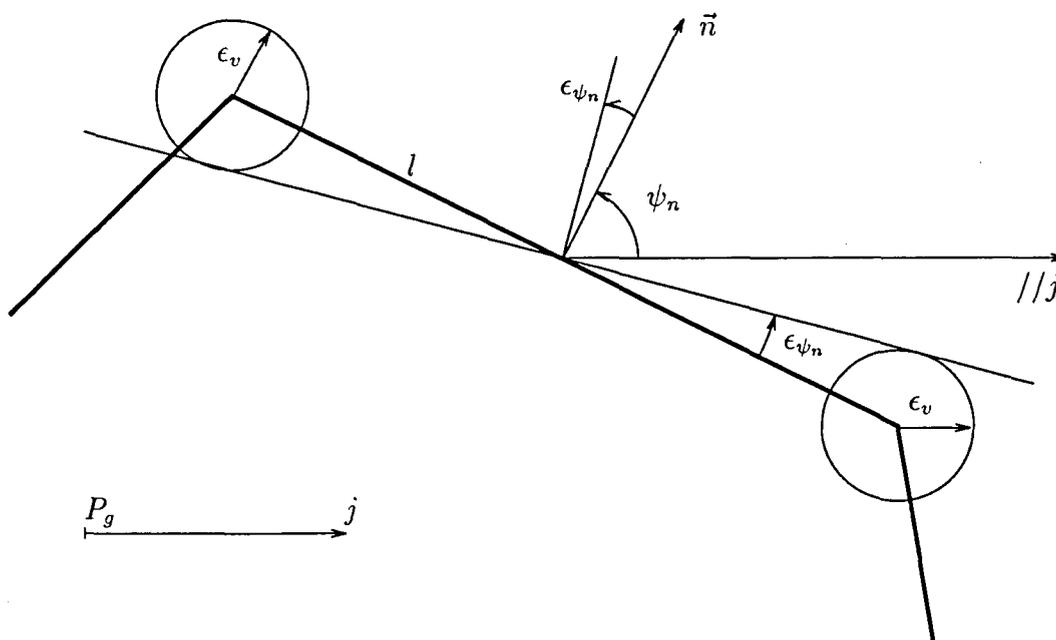


Figura 3.4: Máxima variación de la normal a un lado.

lineales, dependientes de la estructura y de la configuración del manipulador (Benhabib, Fenton y Goldenberg, 1987; Pai y Leu, 1991).

Dado que las desviaciones máximas en la posición de cada articulación son del mismo orden que la resolución en su posicionamiento y, por tanto, pequeñas, puede utilizarse el Jacobiano del manipulador (Craig, 1986) para aproximar la incertidumbre en la posición y orientación del elemento terminal. De cualquier modo, esta aproximación no elimina la dependencia de la configuración del manipulador.

A fin de obviar la dependencia tanto de la estructura del manipulador como de su configuración, el modelo considerado no será construido a partir de la incertidumbre en la posición de las articulaciones, sino especificado directamente para la posición y orientación de la pinza.

La precisión de un robot se indica normalmente mediante dos parámetros que representan la máxima distancia y el máximo ángulo en que la posición y orientación reales del elemento terminal pueden diferir de los correspondientes valores nominales. Estos parámetros pueden utilizarse para especificar las incertidumbres que afectan a la posición y orientación de la pinza, de modo

que

$$U_{p_r} = \{\vec{p}_r \mid \|\vec{p}_r - \vec{p}_{r_o}\| \leq \epsilon_{p_r}\} \quad (3.10)$$

$$U_{\phi_r} = \{\phi_r \mid |\phi_r - \phi_{r_o}| \leq \epsilon_{\phi_r}\} \quad (3.11)$$

donde  $\vec{p}_r$  y  $\phi_r$  representan la posición y orientación reales de la pinza del robot, y  $\vec{p}_{r_o}$  y  $\phi_{r_o}$  sus correspondientes valores observados.

En este modelo las incertidumbres correspondientes a la posición y la orientación de la pinza se consideran independientes, aunque ambas sean función de la incertidumbre de las variables articulares del manipulador.

### 3.2.3 Incertidumbre en la medición directa de la posición absoluta de un punto de un objeto estático

En este caso la incertidumbre es directa y exclusivamente dependiente del sistema de medición utilizado para determinar las posiciones absolutas de los puntos del objeto. No obstante, puede establecerse el siguiente modelo de incertidumbre cualquiera que sea el tipo de sensores utilizados,

$$U_m = \{\vec{a} \mid \|\vec{a} - \vec{a}_o\| \leq \epsilon_m\} \quad (3.12)$$

donde  $\vec{a}$  representa la posición absoluta real del punto,  $\vec{a}_o$  la posición absoluta observada y  $U_m$  su incertidumbre.

Con este modelo, la máxima desviación posible en la orientación de la normal a un lado de un objeto estático se determina mediante una expresión análoga a la (3.9). Así, si  $\psi_{n_a}$  es el ángulo que indica la dirección normal exterior a un lado de longitud nominal  $l$ , su máxima desviación posible es

$$\epsilon_{\psi_{n_a}} = \arcsen\left(\frac{2\epsilon_m}{l}\right) \quad (3.13)$$

### 3.2.4 Incertidumbre en la configuración de un objeto estático

La incertidumbre en la configuración de un objeto estático es análoga a la correspondiente a la configuración inicial del objeto aprehendido antes de ser asido por el robot. Puede tener tres orígenes diferentes según:

1) *La configuración del objeto se supone conocida fuera-de-línea.* En este caso se asume que el objeto es colocado en el entorno de trabajo por algún sistema

de alimentación de piezas (entendiéndose como tal cualquier dispositivo que deposite las piezas en un sitio preestablecido con una orientación determinada).

El modelo exacto de incertidumbre depende del tipo de alimentador utilizado. Dado que es deseable evitar esta dependencia, puede plantearse un modelo general basado en la suposición de que el objeto es ubicado de forma que la posición absoluta real de cada uno de sus vértices esté dentro de un círculo de radio  $\epsilon_{pp}$  centrado en la posición nominal correspondiente.

Esta condición garantiza que cada punto del objeto, incluido el de referencia, esté también dentro de un círculo de iguales características. Esto es evidente para desviaciones que consistan sólo en una traslación. En el caso de desviaciones que incluyan rotación del objeto, la demostración es sencilla: el ángulo máximo de rotación posible lo fija el vértice del objeto más distante del punto de rotación, que recorre un arco de circunferencia totalmente incluido dentro de su círculo de incertidumbre; cualquier punto más cercano al centro de rotación (incluido el punto de referencia) recorre para el mismo ángulo un arco menor, y por lo tanto se garantiza su permanencia dentro de un círculo de incertidumbre análogo al del vértice.

En este modelo se cumple entonces que,

$$\|\vec{p}_p - \vec{p}_{po}\| \leq \epsilon_{pp} \quad (3.14)$$

donde  $\vec{p}_{po}$  indica la posición absoluta nominal del punto de referencia del objeto, y  $\vec{p}_p$  su posición absoluta real. La desviación máxima en la orientación del objeto resulta

$$\epsilon_{\phi_p} = \arcsen\left(\frac{2\epsilon_{pp}}{d_M}\right) \quad (3.15)$$

siendo  $d_M$  la distancia máxima entre vértices del objeto. Las desviaciones en la orientación del objeto no aumentan la incertidumbre de posición de un punto genérico del objeto, y por lo tanto pueden ignorarse a ese fin.

Dado que este modelo puede aplicarse totalmente fuera de línea, será el adoptado en este trabajo.

2) *La configuración del objeto se observa en-línea.* Las incertidumbres en la posición y en la orientación del objeto se describen mediante sendos parámetros  $\epsilon_{pp}$  y  $\epsilon_{\phi_p}$ . Ambos parámetros resultan independientes cuando la configuración del objeto se determina por algún procedimiento que no identifique de forma particular ninguno de sus puntos, como, por ejemplo, cuando mediante un sistema de visión por computador se determina la posición del objeto a partir del cálculo de su baricentro y su orientación a partir de los momentos de primer orden máximo y mínimo. La incertidumbre de posición que resulta

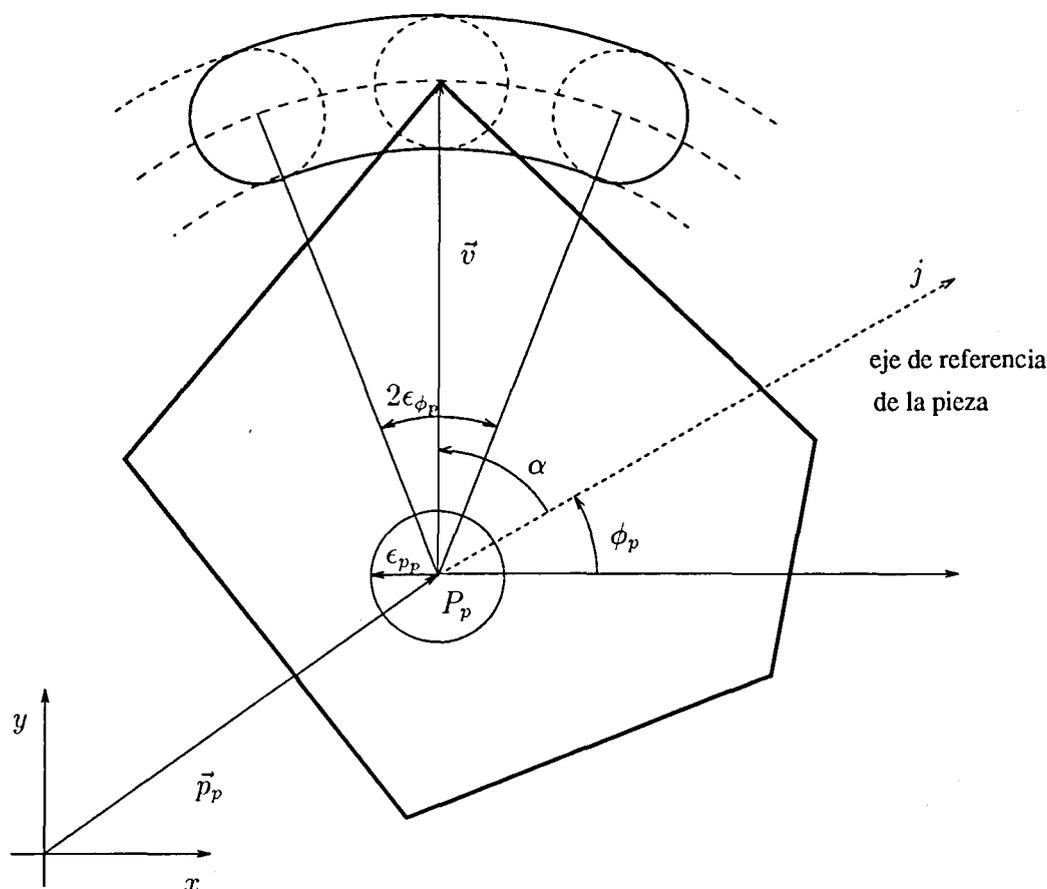


Figura 3.5: Zona de incertidumbre asociada a un vértice del objeto fijo con incertidumbres  $\epsilon_{pp}$  y  $\epsilon_{\phi_p}$  independientes.

para cualquier punto del objeto es del tipo de la mostrada en la figura 3.5 para el caso de un vértice.

Por el contrario, cuando la configuración se determina a partir de la observación de un conjunto de puntos específicos (normalmente en la práctica un conjunto de vértices) los parámetros  $\epsilon_{pp}$  y  $\epsilon_{\phi_p}$  son dependientes. La incertidumbre en la posición que resulta para cualquier punto no observado del objeto es función de cómo se relacionan las desviaciones de la posición y de la orientación, pudiendo dar formas irregulares y dependientes de la posición del punto en el objeto. En el trabajo de Dakin y Popplestone (1989) puede encontrarse un procedimiento para aproximar mediante hiperplanos la incertidumbre en la configuración de un objeto determinada a partir de varias

observaciones sensoriales.

3) *La configuración del objeto es conocida por que éste fue dejado en ella por el robot.* Si el objeto ha sido manipulado una sola vez por el robot el modelo que describe la incertidumbre en su posición y orientación está definido mediante dos parámetros independientes  $\epsilon_{p_p}$  y  $\epsilon_{\phi_p}$ , donde a diferencia de los casos anteriores  $\epsilon_{\phi_p}$  representa el valor máximo de una desviación en la orientación generada por una rotación alrededor del punto de aprehensión. Los valores de  $\epsilon_{p_p}$  y  $\epsilon_{\phi_p}$  se determinan a partir de la incertidumbre en la configuración de un objeto aprehendido en la pinza del robot. Si el objeto es manipulado varias veces por el robot, la incertidumbre final en su configuración se obtiene aplicando de forma acumulativa este modelo.

### 3.2.5 Deslizamiento del objeto en la pinza del robot

Los movimientos no controlados del objeto tienen mayor probabilidad de ocurrencia en el acto mismo de la aprehensión. En la práctica pueden reducirse considerablemente, sino eliminarse, mediante el uso de elementos de sujeción adecuados (por ejemplo, uso de pinzas con diseños especiales para acomodar los objetos o provistas de sensores específicos de tacto o proximidad) y realizando una correcta planificación de la aprehensión (por ejemplo, considerando las partes de la pieza con mayor superficie de agarre, sus posiciones estables, distribución de masa, etc). Esto no sólo lleva a la supresión de deslizamientos de la pieza en la pinza, sino que puede incluso reducir la parte de la incertidumbre global debida a la existente en la configuración inicial de la pieza y en el posicionamiento del manipulador.

Con independencia del tipo de pinza utilizada y de los factores considerados al planificar la aprehensión, en este trabajo se supondrá que el deslizamiento del objeto en la pinza del robot tiene un valor máximo  $\epsilon_{p_d}$  en cuanto a traslación, y un valor máximo  $\epsilon_{\phi_d}$  en cuanto a la rotación del objeto alrededor del punto de aprehensión.

### 3.2.6 Posición absoluta del contorno de un objeto

Cuando se pretende predecir una posible configuración de contacto es necesario considerar la incertidumbre en la posición del contorno de los objetos. Esto puede realizarse considerando la incertidumbre en la posición absoluta de cada punto del contorno. Las fuentes que generan esta incertidumbre son diferentes para un objeto estático y para un objeto aprehendido por el robot.

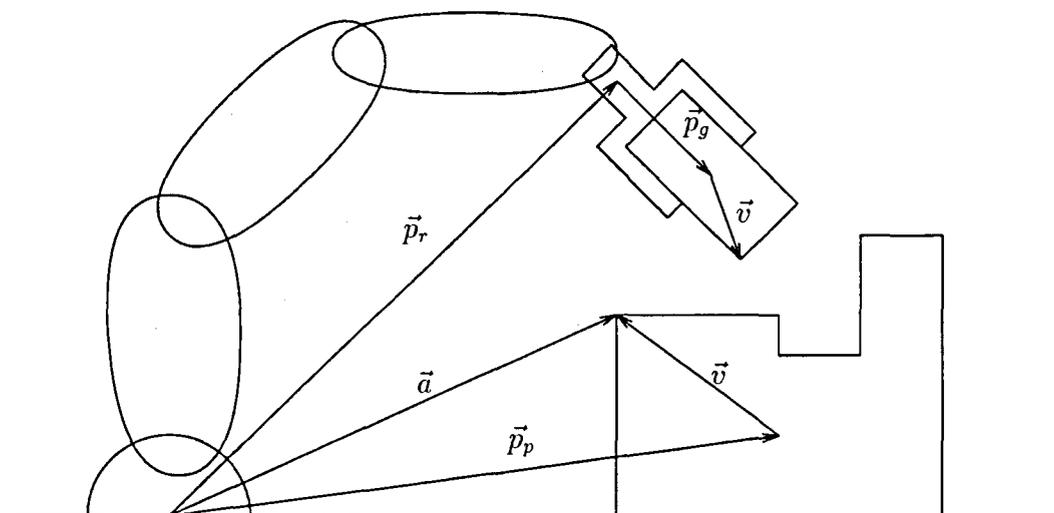


Figura 3.6: Determinación de la posición de un punto de un objeto estático y de uno de una pieza aprehendida por el manipulador.

En la figura 3.6 se ilustran los valores relativos que pueden utilizarse para determinar la posición absoluta de puntos de un objeto aprehendido por el robot y de un objeto en reposo en el entorno de trabajo.

La nomenclatura utilizada es la siguiente:

- cada variable vectorial  $\vec{z}$  afectada de incertidumbre que satisface una expresión del tipo:

$$\|\vec{z} - \vec{z}_o\| \leq \epsilon_z \quad (3.16)$$

donde  $\vec{z}$  es el vector real y  $\vec{z}_o$  el vector observado, implica que

$$\vec{z} = \vec{z}_o + \vec{\delta}_z \quad (3.17)$$

donde  $\vec{\delta}_z$ , que representa la desviación de  $\vec{z}_o$  respecto de  $\vec{z}$ , es de la forma

$$\vec{\delta}_z = \begin{bmatrix} \delta_{z_x} \\ \delta_{z_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_z \cos \theta_z \\ \delta_z \text{sen} \theta_z \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

con

$$\|\vec{\delta}_z\| = \delta_z \leq \epsilon_z \quad (3.19)$$

$$0 \leq \theta_z \leq 2\pi \quad (3.20)$$

- cada variable escalar  $z$  afectada de incertidumbre que satisface una expresión del tipo:

$$|z - z_o| \leq \epsilon_z \quad (3.21)$$

donde  $z$  es el valor real y  $z_o$  el valor observado, implica que

$$z = z_o + \delta_z \quad (3.22)$$

donde  $\delta_z$ , que representa la desviación de  $z_o$  respecto de  $z$ , satisface

$$\delta_z \leq \epsilon_z \quad (3.23)$$

A continuación, tras recopilar en cada caso las fuentes de incertidumbre correspondientes, se desarrollan las expresiones algebraicas que describen la posición de un punto del contorno de un objeto estático y de uno aprehendido por el robot.

### 3.2.6.1 Objeto estático

Dependiendo de cómo se determina la posición absoluta del punto pueden diferenciarse los dos casos siguientes:

1) *Determinación a partir de la configuración del objeto y de su modelo nominal.* La incertidumbre en la posición se debe a:

- La incertidumbre en la forma y tamaño del objeto (desviación  $\vec{\delta}_v$ ).
- La incertidumbre en la configuración del objeto (desviación  $\vec{\delta}_{pp}$ ).

Con los modelos propuestos ambas desviaciones pueden sumarse como  $\vec{\delta}_a = \vec{\delta}_v + \vec{\delta}_{pp}$ , con módulo máximo

$$\epsilon_a = \epsilon_v + \epsilon_{pp} \quad (3.24)$$

2) *Determinación mediante observación directa con un sensor ajeno al robot.* La incertidumbre en la posición se debe a:

- La incertidumbre que introduce el sistema de medición utilizado (desviación  $\vec{\delta}_m$ ).

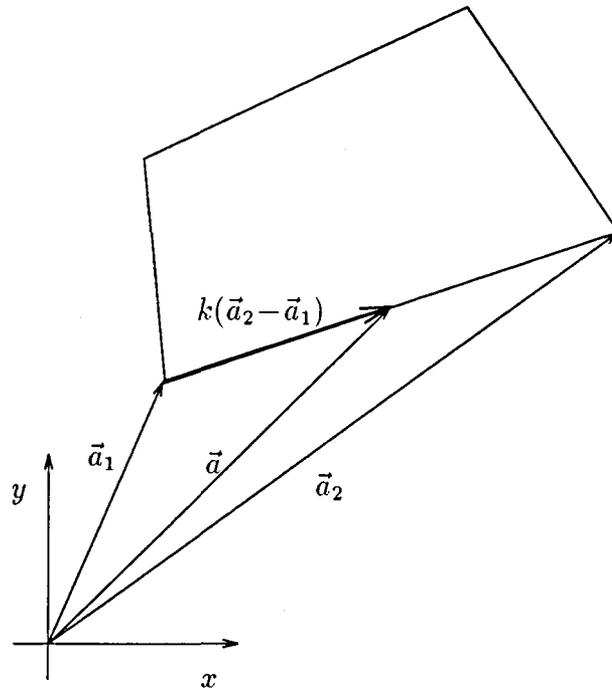


Figura 3.7: Posición absoluta de un punto genérico de un lado de un objeto estático en presencia de incertidumbre

En este caso  $\vec{\delta}_a = \vec{\delta}_m$ , con módulo máximo

$$\epsilon_a = \epsilon_m \quad (3.25)$$

### Posición absoluta real de un vértice

La posición absoluta real de un vértice de un objeto estático se determina directamente a partir de su posición absoluta nominal y de la desviación  $\vec{\delta}_a$ ,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \vec{a}_o + \vec{\delta}_a = \begin{bmatrix} a_{xo} + \delta_a \cos \theta_a \\ a_{yo} + \delta_a \text{sen} \theta_a \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

### Posición absoluta real de un punto genérico del contorno

La posición absoluta real de un punto genérico del contorno de un objeto estático perteneciente al lado limitado por los vértices  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  es (figura 3.7),

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}_1 + k(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \\
&= \vec{a}_{1o} + \vec{\delta}_{a1} + k(\vec{a}_{2o} + \vec{\delta}_{a2} - \vec{a}_{1o} - \vec{\delta}_{a1}) = \\
&= \vec{a}_{1o} + k(\vec{a}_{2o} - \vec{a}_{1o}) + \vec{\delta}_{a1} + k(\vec{\delta}_{a2} - \vec{\delta}_{a1}) = \\
&= \vec{a}_{1o} + k(\vec{a}_{2o} - \vec{a}_{1o}) + \vec{\delta}_a
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde  $k \in [0, 1]$ . El vector  $\vec{\delta}_a = \vec{\delta}_{a1} + k(\vec{\delta}_{a2} - \vec{\delta}_{a1})$  representa la desviación de  $\vec{a}$ , y satisface

$$\delta_a \leq \text{máximo}(\delta_{a1}, \delta_{a2}) \tag{3.28}$$

Debido a que  $\delta_{a1}$  y  $\delta_{a2}$  están limitados por  $\epsilon_a$ , éste será también el valor máximo de  $\delta_a$ .

### 3.2.6.2 Objeto aprehendido

La incertidumbre de posición de un punto de un objeto aprehendido se debe a la acumulación de incertidumbre proveniente de las tres fuentes que seguidamente se enumeran:

- La incertidumbre en la forma y tamaño del objeto (desviación  $\vec{\delta}_v$ ).
- La incertidumbre en la posición y orientación del elemento terminal del manipulador (desviaciones  $\vec{\delta}_{pr}$  y  $\delta_{\phi_r}$ ).
- La incertidumbre en el posicionamiento del objeto en la pinza del robot, originada a su vez por 3 causas:
  - La incertidumbre en la configuración del objeto antes de ser aprehendido (considerado como objeto estático) (desviación  $\vec{\delta}_{pp}$ ).
  - La incertidumbre en la posición y orientación del elemento terminal del manipulador al asir el objeto (desviaciones  $\vec{\delta}_{pr}$  y  $\delta_{\phi_r}$ ).
  - Los posibles deslizamientos del objeto en la pinza del robot (desviaciones  $\vec{\delta}_{pd}$  y  $\delta_{\phi_d}$ ).

Con los modelos propuestos, la desviación de la posición del objeto en la pinza puede resumirse como  $\vec{\delta}_{pg} = \vec{\delta}_{pr} + \vec{\delta}_{pp} + \vec{\delta}_{pd}$ , con módulo máximo

$$\epsilon_{pg} = \epsilon_{pr} + \epsilon_{pp} + \epsilon_{pd} \tag{3.29}$$

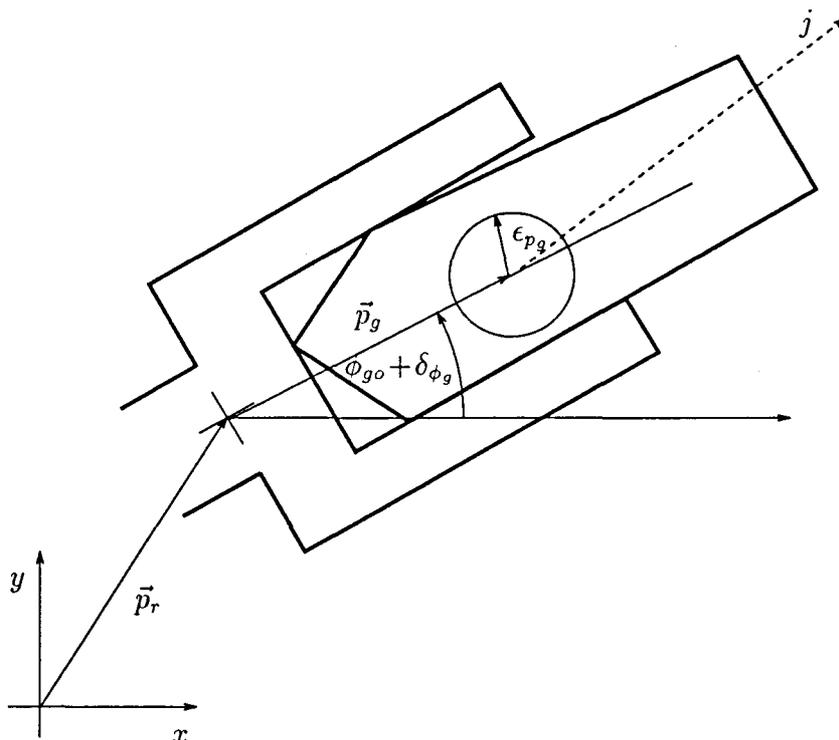


Figura 3.8: Incertidumbre en el posicionamiento de una pieza en la pinza del robot.

De igual modo, dado que  $\delta_{\phi_r}$  y  $\delta_{\phi_d}$  están referidos a un mismo punto de rotación, la desviación de la orientación del objeto en la pinza puede resumirse como  $\delta_{\phi_g} = \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_d}$ , con valor máximo (figura 3.8)

$$\epsilon_{\phi_g} = \epsilon_{\phi_r} + \epsilon_{\phi_d} \quad (3.30)$$

### Posición absoluta real de un vértice

La posición absoluta real de un vértice del objeto aprehendido viene dada por (figura 3.9)

$$\vec{b} = \vec{p}_p + \vec{v} \quad (3.31)$$

donde, debido a la incertidumbre,

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\delta}_v = \begin{bmatrix} v \cos(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha) \\ v \text{sen}(\phi_r + \phi_g + \phi_m + \alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_v \cos \theta_v \\ \delta_v \text{sen} \theta_v \end{bmatrix} =$$

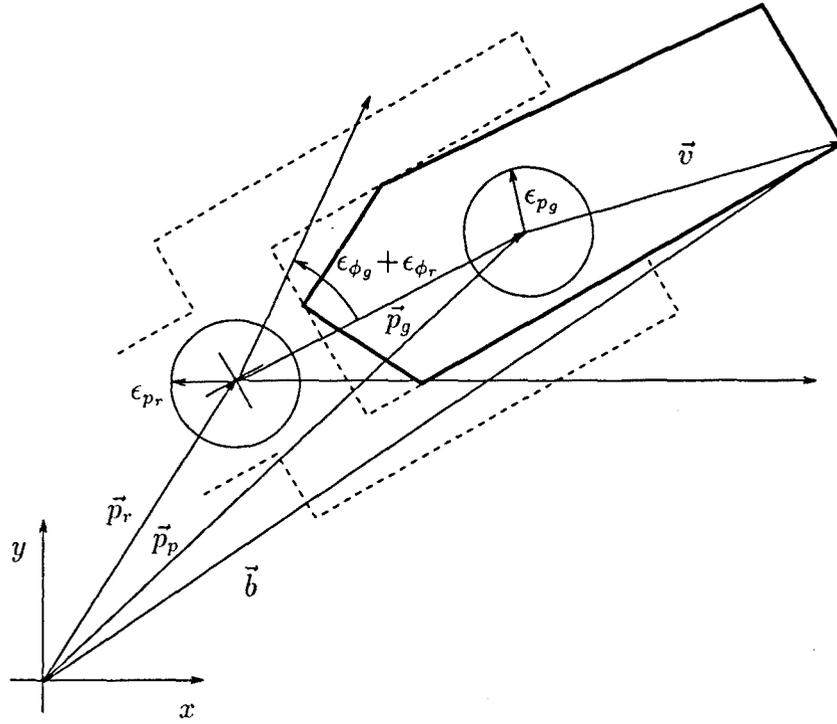


Figura 3.9: Posición absoluta de un vértice de un objeto aprehendido en presencia de incertidumbre

$$= \begin{bmatrix} v \cos(\phi_{r0} + \phi_{g0} + \phi_m + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g} + \alpha) + \delta_v \cos \theta_v \\ v \sin(\phi_{r0} + \phi_{g0} + \phi_m + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g} + \alpha) + \delta_v \sin \theta_v \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{p}_p &= \vec{p}_r + \vec{p}_g = \vec{p}_{r0} + \vec{p}_{g0} + \vec{\delta}_{p_r} + \vec{\delta}_{p_g} = \\ &= \begin{bmatrix} p_{rx0} \\ p_{ry0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{p_r} \cos \theta_{p_r} \\ \delta_{p_r} \sin \theta_{p_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_g \cos(\phi_{r0} + \phi_{g0} + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g}) \\ p_g \sin(\phi_{r0} + \phi_{g0} + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g}) \end{bmatrix} + \\ &\qquad\qquad\qquad \begin{bmatrix} \delta_{p_g} \cos \theta_{p_g} \\ \delta_{p_g} \sin \theta_{p_g} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p_{rx0} + p_{gx} + \delta_{p_r} \cos \theta_{p_r} + \delta_{p_g} \cos \theta_{p_g} \\ p_{ry0} + p_{gy} + \delta_{p_r} \sin \theta_{p_r} + \delta_{p_g} \sin \theta_{p_g} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

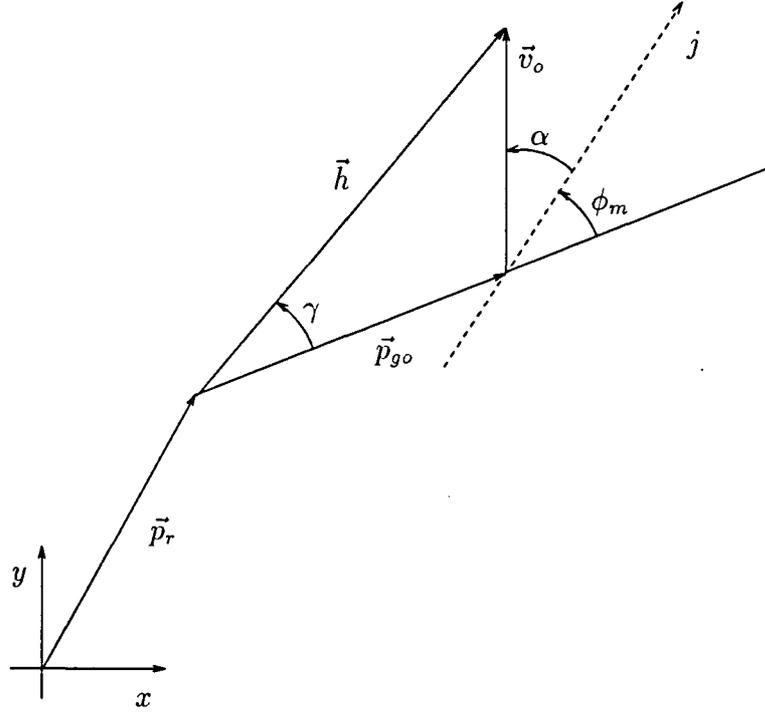


Figura 3.10: Suma de los vectores  $\vec{p}_{g0}$  y  $\vec{v}_o$

con lo que

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{rx0} + p_g \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g}) + \delta_{p_r} \cos \theta_{p_r} + \delta_{p_g} \cos \theta_{p_g} + \\ v \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \phi_m + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g} + \alpha) + \delta_v \cos \theta_v \\ p_{ry0} + p_g \text{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g}) + \delta_{p_r} \text{sen} \theta_{p_r} + \delta_{p_g} \text{sen} \theta_{p_g} + \\ v \text{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \phi_m + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g} + \alpha) + \delta_v \text{sen} \theta_v \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Otra expresión útil de  $\vec{b}$  se obtiene utilizando  $\vec{h}$  y  $\gamma$  (figura 3.10), tal que

$$\vec{h} = \vec{p}_{g0} + \vec{v}_o \quad (3.35)$$

y por lo tanto

$$h = \|\vec{h}\| = \sqrt{p_g^2 + v^2 + 2p_g v \cos(\phi_m + \alpha)} \quad (3.36)$$

y

$$\gamma = \arcsen\left(\frac{v}{h} \text{sen}(\phi_m + \alpha)\right) \quad (3.37)$$

Entonces  $\vec{b}$  puede ponerse como

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} p_{rx0} + h \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g} + \gamma) + \delta_{p_r} \cos \theta_{p_r} + \delta_{p_g} \cos \theta_{p_g} + \delta_v \cos \theta_v \\ p_{ry0} + h \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r} + \delta_{\phi_g} + \gamma) + \delta_{p_r} \sin \theta_{p_r} + \delta_{p_g} \sin \theta_{p_g} + \delta_v \sin \theta_v \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

En las expresiones (3.34) y (3.38) las desviaciones pueden agruparse, quedando respectivamente,

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} p_{rx0} + p_g \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g}) \\ \quad + v \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \phi_m + \delta_{\phi_r \phi_g} + \alpha) + \delta_{p_r p_g v} \cos \theta_{p_r p_g v} \\ p_{ry0} + p_g \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g}) \\ \quad + v \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \phi_m + \delta_{\phi_r \phi_g} + \alpha) + \delta_{p_r p_g v} \sin \theta_{p_r p_g v} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

y

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} p_{rx0} + h \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma) + \delta_{p_r p_g v} \cos \theta_{p_r p_g v} \\ p_{ry0} + h \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma) + \delta_{p_r p_g v} \sin \theta_{p_r p_g v} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

donde los valores máximos de  $\delta_{p_r p_g v}$  y  $\delta_{\phi_r \phi_g}$  son respectivamente,

$$\epsilon_{p_r p_g v} = \epsilon_{p_r} + \epsilon_{p_g} + \epsilon_v \quad (3.41)$$

$$\epsilon_{\phi_r \phi_g} = \epsilon_{\phi_r} + \epsilon_{\phi_g} \quad (3.42)$$

y como en todas las desviaciones de carácter vectorial

$$0 \leq \theta_{p_r p_g v} < 2\pi \quad (3.43)$$

### Posición absoluta real de un punto genérico del contorno

La posición absoluta real de un punto genérico del contorno de un objeto aprehendido perteneciente al lado limitado por los vértices  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  viene dada por

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + k(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) \quad (3.44)$$

con  $k \in [0, 1]$ . Reemplazando  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  por sus correspondientes expresiones según (3.40) resulta,

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} p_{rx0} + h_1 \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) + \delta_{p_r p_g v} \cos \theta_{p_r p_g v} + \\ \quad k(h_2 \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) - h_1 \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1)) \\ p_{ry0} + h_1 \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) + \delta_{p_r p_g v} \sin \theta_{p_r p_g v} + \\ \quad k(h_2 \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) - h_1 \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1)) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

donde de forma análoga a como se resolvió la desviación de la posición de un punto genérico de un lado de un objeto estático, en este caso los términos

$$\vec{\delta}_{p_r p_g v_1} + k(\vec{\delta}_{p_r p_g v_2} - \vec{\delta}_{p_r p_g v_1}) \quad (3.46)$$

han sido reemplazados por  $\vec{\delta}_{p_r p_g v}$  que satisface

$$\delta_{p_r p_g v} \leq \text{máximo}(\delta_{p_r p_g v_1}, \delta_{p_r p_g v_2}) \quad (3.47)$$

y por lo tanto, si  $\epsilon_{v_1} = \epsilon_{v_2} = \epsilon_v$  se cumple que el valor máximo de  $\delta_{p_r p_g v}$  es  $\epsilon_{p_r p_g v}$ , satisfaciéndose las expresiones (3.41) y (3.43).

### 3.3 Incertidumbre en la fuerza

La dirección de la fuerza de reacción es función de las características geométricas de los objetos en contacto. Para un único punto de contacto, la fuerza de reacción está necesariamente dentro del cono de fricción centrado en la dirección normal al lado de contacto. Cuando existen varios puntos de contacto la fuerza de reacción total es la suma vectorial de las fuerzas de reacción en cada contacto (secciones 2.4 y 2.5).

Debido a la incertidumbre en la posición, las direcciones de las normales a los lados de contacto así como la distancia de los puntos de contacto al punto de referencia pueden sufrir desviaciones. Esto amplía el rango de direcciones posibles de la fuerza de reacción con respecto al obtenido a partir del cono de fricción determinado usando posiciones y modelos nominales de los objetos. El conjunto de posibles direcciones reales de la fuerza de reacción es fruto, por tanto, de la fricción y de la incertidumbre en la posición.

Cuando se ejecute la tarea, la fuerza y el par de reacción se medirán usando sensores apropiados y, como sucede en toda medición, los valores observados estarán afectados de incertidumbre. Esto hace que el conjunto de direcciones de fuerzas y valores de par que pueden ser observados sea una ampliación del conjunto de posibilidades reales.

El modelo de incertidumbre que afecta la medición de la fuerza y par depende del tipo y localización del sensor utilizado. En este trabajo se asumirá el uso de un sensor colocado en la muñeca del robot, que indica la fuerza de reacción mediante su descomposición en dos componentes ortogonales (dependientes de la orientación del sensor como se ilustra en la figura 3.11), e indica también el valor del par de reacción respecto a un punto de referencia.

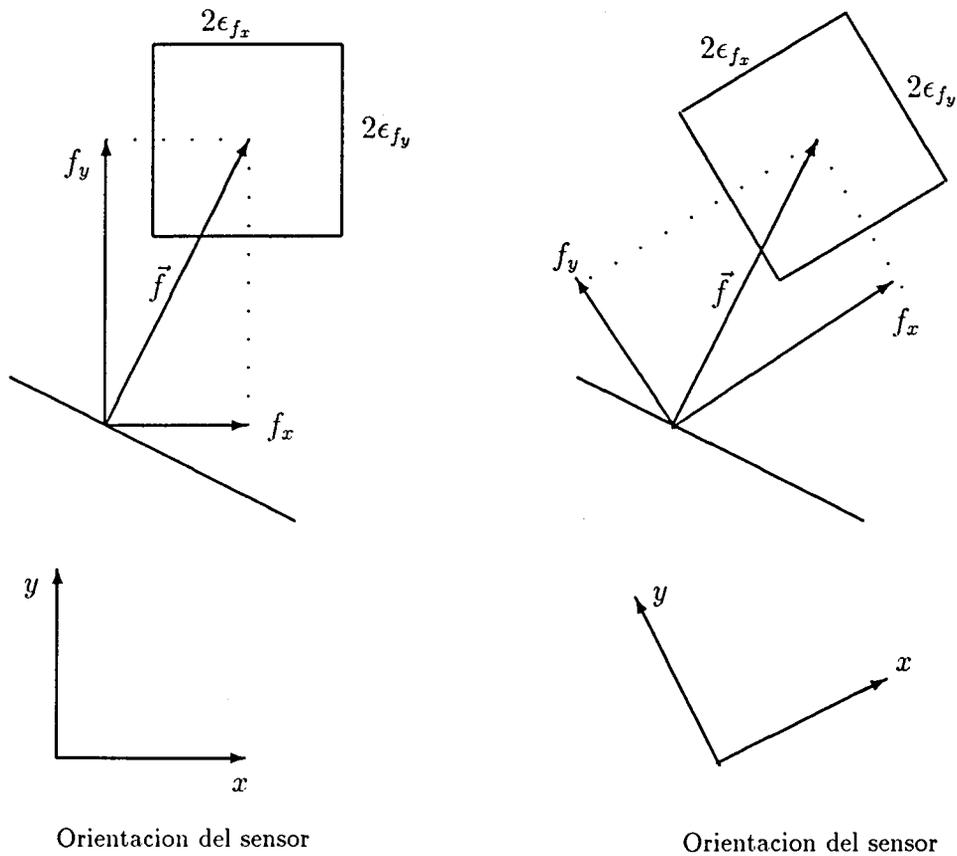


Figura 3.11: Observación de una misma fuerza de reacción con distintas orientaciones del sensor.

La incertidumbre de medición está ligada a la precisión con que se realizan las medidas, que depende normalmente de la resolución del sensor. Esta resolución puede considerarse como la desviación máxima de cada medida. Dado que el sensor indica la fuerza de reacción  $\vec{f}$  mediante los módulos de dos componentes ortogonales independientes,  $f_x$  y  $f_y$ , medidos con resoluciones  $\Delta f_x$  y  $\Delta f_y$ , y el par  $\tau$  mediante una medida con resolución  $\Delta \tau$ , las desviaciones máximas de  $f_x$ ,  $f_y$  y  $\tau$  son respectivamente

$$\epsilon_{f_x} = \Delta f_x \quad (3.48)$$

$$\epsilon_{f_y} = \Delta f_y \quad (3.49)$$

$$\epsilon_{\tau} = \Delta \tau \quad (3.50)$$

De este modo, la incertidumbre en la medición de la fuerza de reacción

queda expresada por

$$U_{f_x} = \{f_x \mid |f_x - f_{x0}| \leq \epsilon_{f_x}\} \quad (3.51)$$

$$U_{f_y} = \{f_y \mid |f_y - f_{y0}| \leq \epsilon_{f_y}\} \quad (3.52)$$

donde  $f_{x0}$  y  $f_{y0}$  son las componentes observadas y  $f_x$  y  $f_y$  las componentes reales; y la incertidumbre en la medición del par queda expresada por

$$U_\tau = \{\tau \mid |\tau - \tau_0| \leq \epsilon_\tau\} \quad (3.53)$$

donde  $\tau_0$  es el par observado y  $\tau$  el par real.

### 3.4 Incertidumbre en la velocidad

La incertidumbre en la velocidad con que se mueve el objeto aprehendido en la pinza del robot tiene su principal origen en el sistema de control del robot.

Cuando se utiliza un control de amortiguamiento (Whitney, 1977), los movimientos tienen una consigna de velocidad. Se debe establecer entonces un modelo de incertidumbre en la velocidad que indique, dada una velocidad nominal, cuales son las velocidades reales con que puede realizarse el movimiento.

La incertidumbre en la velocidad depende del control de cada una de las articulaciones. Esto hace que sea dependiente de la configuración del manipulador y que las incertidumbre en las velocidades lineal y angular no sean independientes, siendo complicado establecer la relación exacta de dependencia entre ambas velocidades. Por otra parte, tanto la limitación en el módulo de la velocidad lineal como en el valor de la velocidad angular conviene que sean expresadas como un porcentaje del valor de consigna para evitar que el modelo tolere "derivadas" de la configuración del robot cuando la consigna de velocidad es nula.

En este trabajo se adopta un modelo de incertidumbre de velocidad en el que las incertidumbres en las velocidades lineal y angular no son independientes, y por ello se describe el modelo directamente para la velocidad en el Espacio de Configuraciones (sección 4.3).

## Capítulo 4

# Incertidumbre en el Espacio de Configuraciones

Los modelos de incertidumbre en el plano de trabajo en el espacio físico descritos en el capítulo anterior son utilizados ahora para modelar la incertidumbre en el Espacio de Configuraciones, donde deberá tenerse en cuenta para la planificación.

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. Las tres primeras tratan la incertidumbre de posición, fuerza y velocidad respectivamente. En la sección dedicada a la incertidumbre de posición se desarrolla un modelo de incertidumbre para las  $\mathcal{C}$ -superficies del Espacio de Configuraciones en el que se fusionan todas las incertidumbres de índole geométrico que afectan a una tarea de montaje. El modelo de incertidumbre de fuerza se obtiene a partir del adoptado en el espacio físico, y el de incertidumbre de velocidad se establece directamente para el Espacio de Configuraciones. La cuarta sección de este capítulo establece una nueva partición del Espacio de Configuraciones en presencia de incertidumbre, en la que se diferencian las configuraciones que con seguridad son libres, las que con seguridad son imposibles debido a los objetos estáticos en el entorno de trabajo y aquellas en las que cabe la posibilidad de establecer contacto entre los objetos.

## 4.1 Incertidumbre en la posición

El Espacio de Configuraciones se utiliza fundamentalmente para representar, mediante las  $\mathcal{C}$ -superficies, las configuraciones del robot en las que se producirá contacto entre el objeto aprehendido y alguno de los objetos estáticos en el entorno de trabajo. Deben, por tanto, considerarse las incertidumbres en la posición que pueden hacer variar las configuraciones de contacto, es decir, generan incertidumbre en las mismas.

En los subapartados siguientes se desarrollan las ecuaciones de las  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1 y de tipo 2 en presencia de incertidumbre.

### 4.1.1 $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1 en presencia de incertidumbre

La condición para que exista contacto de tipo 1 es que un vértice del objeto aprehendido coincida con un punto de un lado de un objeto estático. Esta condición puede establecerse algebraicamente igualando el vector  $\vec{b}$ , que indica la posición de un vértice del objeto aprehendido, con el vector  $\vec{a}$ , que indica la posición de un punto genérico del lado de contacto de un objeto fijo limitado por los vértices  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$ , es decir,

$$\vec{a} = \vec{b} \quad (4.1)$$

Usando la expresiones (3.27) y (3.40) resulta

$$\begin{cases} p_{rx0} + h \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) + \delta_{p_r p_g v} \cos \theta_{p_r p_g v} = \\ \quad a_{1x0} + k(a_{2x0} - a_{1x0}) + \delta_a \cos \theta_a \\ p_{ry0} + h \sin(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) + \delta_{p_r p_g v} \sin \theta_{p_r p_g v} = \\ \quad a_{1y0} + k(a_{2y0} - a_{1y0}) + \delta_a \sin \theta_a \end{cases} \quad (4.2)$$

Eliminando  $k$  entre las dos ecuaciones se obtiene la expresión de una familia de superficies, parametrizadas en las desviaciones, que representan todas las posibles  $\mathcal{C}$ -superficies para este contacto en presencia de incertidumbre,

$$\begin{aligned}
& (p_{rx_o} (-a_{1y_o} + a_{2y_o}) + p_{ry_o} (a_{1x_o} - a_{2x_o})) \\
& + \text{sen}(\phi_{ro}) h (\text{sen}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{1y_o} - \text{sen}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{2y_o}) \\
& + \text{cos}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{1x_o} - \text{cos}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{2x_o}) \\
& + \text{cos}(\phi_{ro}) h (\text{sen}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{1x_o} - \text{sen}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{2x_o}) \\
& - \text{cos}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{1y_o} + \text{cos}(\phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma) a_{2y_o}) \\
& + \text{sen}(\theta_{prp_gv}) \delta_{prp_gv} a_{1x_o} - \text{sen}(\theta_{prp_gv}) \delta_{prp_gv} a_{2x_o} \\
& - \text{sen}(\theta_a) \delta_a a_{1x_o} + \text{sen}(\theta_a) \delta_a a_{2x_o} \\
& - \text{cos}(\theta_{prp_gv}) \delta_{prp_gv} a_{1y_o} + \text{cos}(\theta_{prp_gv}) \delta_{prp_gv} a_{2y_o} \\
& + \text{cos}(\theta_a) \delta_a a_{1y_o} - \text{cos}(\theta_a) \delta_a a_{2y_o} \\
& - a_{1x_o} a_{2y_o} + a_{2x_o} a_{1y_o}) / (a_{1x_o} - a_{2x_o}) = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

#### 4.1.2 $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 2 en presencia de incertidumbre

De forma similar al caso de contactos de tipo 1, la condición de contacto puede establecerse algebraicamente igualando el vector  $\vec{a}$ , que indica la posición de un vértice de un objeto estático, con el vector  $\vec{b}$ , que indica la posición de un punto genérico del lado de contacto del objeto aprehendido limitado por los vértices  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$ , es decir,

$$\vec{a} = \vec{b} \tag{4.4}$$

Usando la expresiones (3.26) y (3.45) resulta

$$\begin{cases}
a_{x_o} + \delta_a \cos \theta_a = p_{rx_o} + h_1 \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma_1) + \delta_{prp_gv} \cos \theta_{prp_gv} + \\
\quad k(h_2 \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma_2) - h_1 \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma_1)) \\
a_{y_o} + \delta_a \text{sen} \theta_a = p_{ry_o} + h_1 \text{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma_1) + \delta_{prp_gv} \text{sen} \theta_{prp_gv} + \\
\quad k(h_2 \text{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma_2) - h_1 \text{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \delta_{\phi_r\phi_g} + \gamma_1))
\end{cases} \tag{4.5}$$

Eliminando  $k$  entre las dos ecuaciones se obtiene la expresión de una familia de superficies, parametrizadas en las desviaciones, que representan en este caso todas las posibles  $\mathcal{C}$ -superficies para un determinado contacto de tipo 2 en presencia de incertidumbre,

$$\begin{aligned}
& (p_{r_{y0}} \cos(\phi_{r0}) - p_{r_{x0}} \sin(\phi_{r0})) \\
& (\cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1 - \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) h_2) \\
& + (p_{r_{x0}} \cos(\phi_{r0}) + p_{r_{y0}} \sin(\phi_{r0})) \\
& (\sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) h_2 - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1) \\
& + \sin(\phi_{r0}) 2 h_1 h_2 (-\sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \\
& + \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1)) \\
& + \sin(\phi_{r0}) (\sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \sin(\theta_a) \delta_a h_1 \\
& - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \sin(\theta_{p_r p_g v}) h_1 \delta_{p_r p_g v} \\
& + \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1 a_{y0} - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \sin(\theta_a) \delta_a h_2 \\
& + \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \sin(\theta_{p_r p_g v}) \delta_{p_r p_g v} h_2 \\
& - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) h_2 a_{y0} + \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \cos(\theta_a) \delta_a h_1 \\
& - \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \cos(\theta_{p_r p_g v}) h_1 \delta_{p_r p_g v} \\
& + \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) a_{x0} h_1 - \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \cos(\theta_a) \delta_a h_2 \\
& + \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \cos(\theta_{p_r p_g v}) \delta_{p_r p_g v} h_2 - \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) a_{x0} h_2) \\
& + \cos(\phi_{r0}) 2 h_1 h_2 (-\sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \\
& + \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1)) \\
& + \cos(\phi_{r0}) (\sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \cos(\theta_a) \delta_a h_1 \\
& - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \cos(\theta_{p_r p_g v}) h_1 \delta_{p_r p_g v} + \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) a_{x0} h_1 \\
& - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \cos(\theta_a) \delta_a h_2 \\
& + \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \cos(\theta_{p_r p_g v}) \delta_{p_r p_g v} h_2 - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) a_{x0} h_2 \\
& - \sin(\theta_a) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) \delta_a h_1 + \sin(\theta_a) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \delta_a h_2 \\
& + \sin(\theta_{p_r p_g v}) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1 \delta_{p_r p_g v} \\
& - \sin(\theta_{p_r p_g v}) \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) \delta_{p_r p_g v} h_2 \\
& - \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1 a_{y0} + \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) h_2 a_{y0})) \\
& / (\sin(\phi_{r0}) (\sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1 - \sin(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) h_2) \\
& + \cos(\phi_{r0}) (\cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_2) h_2 - \cos(\phi_{g0} + \delta_{\phi_r \phi_g} + \gamma_1) h_1)) = 0 \quad (4.6)
\end{aligned}$$

### 4.1.3 Incertidumbre asociada a una $\mathcal{C}$ -superficie. Envoltentes

Tanto en contactos de tipo 1 como de tipo 2, la  $\mathcal{C}$ -superficie real es alguna de las representadas por la correspondiente familia de  $\mathcal{C}$ -superficies (ecuaciones (4.3) y (4.6)). Por lo tanto, las envoltentes de estas familias de  $\mathcal{C}$ -superficies

encierran una zona de  $\mathcal{C}_3$  que incluye todas las configuraciones en las que se puede producir el contacto considerado y que denominaremos *incertidumbre asociada a la  $\mathcal{C}$ -superficie*.

El procedimiento convencional para determinar estas envolventes (imponiendo la condición de derivada nula respecto de cada parámetro) da lugar a expresiones algebraicas difíciles de manipular. Este es el caso, por ejemplo, de la familia de  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 2, donde aparecen ecuaciones de cuarto grado cuyas soluciones algebraicas, si bien existen, no son expresables de una manera práctica. Debido a ello, en los subapartados siguientes se determinan las envolventes mediante el tratamiento particular de cada tipo de contacto con el apoyo de un análisis gráfico. Se hará uso de la siguiente nomenclatura:

$Uv$  : incertidumbre en la posición de un punto del objeto aprehendido, dados  $\vec{p}_{ro}$  y  $\phi_{ro}$ .

$Ul$  : incertidumbre en la posición de un lado del objeto aprehendido, dados  $\vec{p}_{ro}$  y  $\phi_{ro}$ .

$CUv$  : incertidumbre en la configuración de contacto entre un punto dado del objeto aprehendido y un punto dado de un objeto estático, dado  $\phi_{ro}$ .

$CUI$  : incertidumbre en las configuraciones de contacto para un cierto par vértice-arista, dado  $\phi_{ro}$ .

$CU$  : incertidumbre en las configuraciones de contacto para un cierto par vértice-arista.

#### 4.1.4 Incertidumbre en una $\mathcal{C}$ -superficie de tipo 1

Considerando que el vértice  $\vec{b}$  está en contacto con el lado  $l_a$  ( $\mathcal{C}$ -superficie de tipo 1), el procedimiento para obtener la incertidumbre asociada consta de cuatro pasos que consisten en determinar:

1.  $Uv$  de  $\vec{b}$ .
2.  $CUv$  de  $\vec{b}$  y  $\vec{a} \in l_a$ .
3.  $CUI$  de  $\vec{b}$  y  $l_a$ .
4.  $CU$  de  $\vec{b}$  y  $l_a$ .

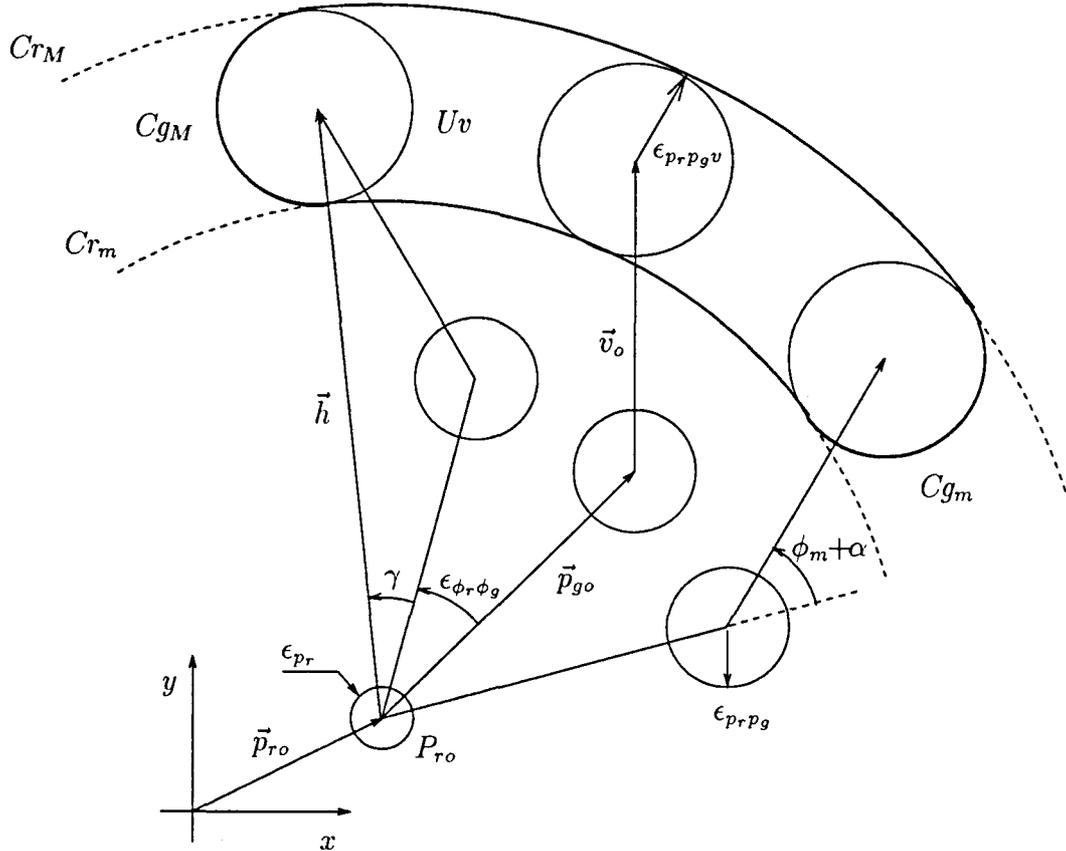


Figura 4.1: Incertidumbre  $Uv$  de un vértice del objeto aprehendido

1) La incertidumbre  $Uv$  de  $\vec{b}$  está limitada, para un caso genérico, por cuatro arcos de circunferencia (figura 4.1).

Dos de estas circunferencias tienen su centro en el punto de referencia de la pinza  $P_r$  (equivalente al TCP: *Tool Center Point*), y radios

$$R_r = h + \eta \epsilon_{p_r p_g v} \quad (4.7)$$

con  $\eta \in \{1, -1\}$ , denominados respectivamente radio máximo,  $R_{rM}$ , y mínimo,  $R_{rm}$ . Las circunferencias correspondientes, denominadas respectivamente  $Cr_M$  y  $Cr_m$ , son por lo tanto,

$$\begin{cases} x = p_{rx0} + R_r \cos \theta_{R_r} \\ y = p_{ry0} + R_r \sin \theta_{R_r} \end{cases} \quad (4.8)$$

donde  $R_r$  es el radio máximo o mínimo en cada caso y  $\theta_{R_r}$  el parámetro que determina el punto de la circunferencia. El radio máximo  $R_{rM}$  es siempre

positivo, pero el radio mínimo  $R_{r_m}$  puede resultar negativo para ciertas combinaciones de  $p_g$ ,  $v$  y  $(\phi_m + \alpha)$ , en cuyo caso la circunferencia  $Cr_m$  carece de sentido físico y no existe como frontera de  $Uv$ .

Las dos circunferencias restantes no son más que las posiciones extremas que puede alcanzar el vértice para,

$$\delta_{\phi_r\phi_g} = \eta(\epsilon_{\phi_r} + \epsilon_{\phi_g}) = \eta(\epsilon_{\phi_r\phi_g}) \quad (4.9)$$

donde igualmente  $\eta \in \{1, -1\}$ . Denominadas  $Cg_M$  y  $Cg_m$ , las expresiones algebraicas de estas circunferencias están directamente dadas por la expresión (3.40) para los valores máximos de  $\delta_{\phi_r\phi_g}$  indicadas en (4.9), es decir,

$$\begin{cases} x = p_{r_{x0}} + h \cos(\phi_{r0} + \phi_{g0} + \eta \epsilon_{\phi_r\phi_g} + \gamma) + \epsilon_{p_r p_g v} \cos \theta_{p_r p_g v} \\ y = p_{r_{y0}} + h \text{sen}(\phi_{r0} + \phi_{g0} + \eta \epsilon_{\phi_r\phi_g} + \gamma) + \epsilon_{p_r p_g v} \text{sen} \theta_{p_r p_g v} \end{cases} \quad (4.10)$$

Los arcos de las cuatro circunferencias que son frontera de  $Uv$  satisfacen las condiciones:

$$|\phi_{r0} + \phi_{g0} + \gamma - \theta_{R_r}| < \epsilon_{\phi_r\phi_g} \quad \text{para } Cr_M \text{ y } Cr_m \quad (4.11)$$

$$-\pi < \phi_{r0} + \phi_{g0} + \gamma + \epsilon_{\phi_r\phi_g} - \theta_{p_r p_g v} < 0 \quad \text{para } Cg_M \quad (4.12)$$

$$0 < \phi_{r0} + \phi_{g0} + \gamma - \epsilon_{\phi_r\phi_g} - \theta_{p_r p_g v} < \pi \quad \text{para } Cg_m \quad (4.13)$$

2)  $CUv$  se obtiene aplicando una condición de contacto entre los puntos de  $Uv$  y un punto  $\vec{a}$  de  $l_a$ . En particular, la expresión algebraica de la frontera de  $CUv$  se obtiene igualando las coordenadas de los puntos de la frontera de  $Uv$  con la expresión de  $\vec{a}$  dada por la ecuación (3.27), y resolviendo para la posición del punto de referencia  $\vec{p}_{r0}$ . Dado que  $\vec{a}$  está afectado de incertidumbre, el resultado es un conjunto de configuraciones cuya envolvente exterior es la frontera de  $CUv$ .

Aunque su tamaño es mayor debido a la incertidumbre en la posición de  $\vec{a}$ ,  $CUv$  tiene la misma forma que  $Uv$  y por lo tanto su frontera también está formada por cuatro arcos de circunferencia, derivados de aquellos que forman la frontera de  $Uv$ .

Para las circunferencias  $Cr_M$  y  $Cr_m$ , a partir de las ecuaciones (3.27) y (4.8), se tiene

$$\begin{cases} p_{r_{x0}} = a_{1x0} + k(a_{2x0} - a_{1x0}) + \delta_a \cos \theta_a - (h + \eta \epsilon_{p_r p_g v}) \cos \theta_{R_r} \\ p_{r_{y0}} = a_{1y0} + k(a_{2y0} - a_{1y0}) + \delta_a \text{sen} \theta_a - (h + \eta \epsilon_{p_r p_g v}) \text{sen} \theta_{R_r} \end{cases} \quad (4.14)$$

ecuaciones que representan, para  $\eta \in \{1, -1\}$ , dos familias de circunferencias parametrizadas en  $\delta_a$  y  $\theta_a$ . La región que barre cada familia de circunferencias

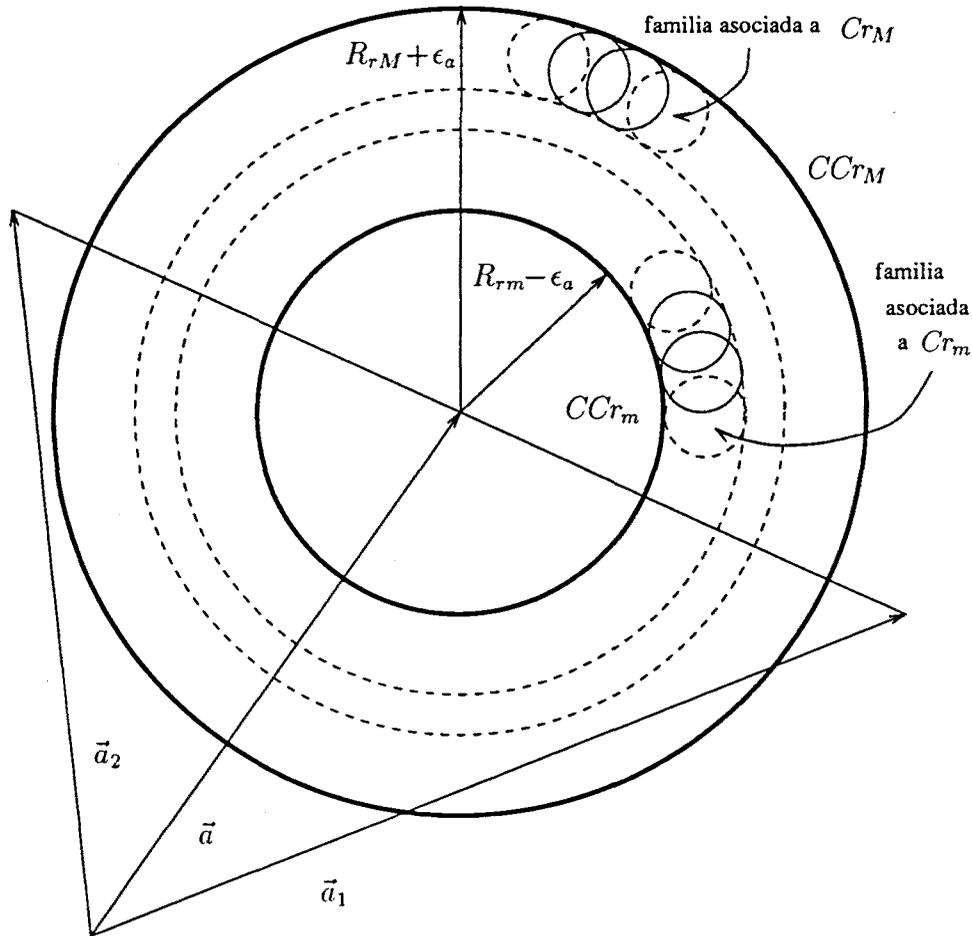


Figura 4.2: Circunferencias  $CCr_M$  y  $CCr_m$

tiene como frontera dos circunferencias concéntricas, de las cuales una es frontera de  $CUv$  (figura 4.2) y está expresada por

$$\begin{cases} p_{rx0} = a_{1x0} + k(a_{2x0} - a_{1x0}) + (h + \eta(\epsilon_{prp_{gv}} + \epsilon_a)) \cos \theta_{R_{ra}} \\ p_{ry0} = a_{1y0} + k(a_{2y0} - a_{1y0}) + (h + \eta(\epsilon_{prp_{gv}} + \epsilon_a)) \sin \theta_{R_{ra}} \end{cases} \quad (4.15)$$

y se denomina respectivamente  $CCr_M$  ó  $CCr_m$  de acuerdo con el valor de  $\eta$ . Es posible que el radio de  $CCr_m$  sea negativo, en cuyo caso carece de sentido físico y no es frontera de  $CUv$ .

Para las circunferencias  $Cg_M$  y  $Cg_m$ , de las ecuaciones (3.27) y (4.10) se tiene

$$\begin{cases} p_{rxo} = a_{1xo} + k(a_{2xo} - a_{1xo}) + \delta_a \cos \theta_a - \\ \quad h \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g} + \gamma) - \epsilon_{prp_{gv}} \cos \theta_{prp_{gv}} \\ p_{ryo} = a_{1yo} + k(a_{2yo} - a_{1yo}) + \delta_a \operatorname{sen} \theta_a - \\ \quad h \operatorname{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g} + \gamma) - \epsilon_{prp_{gv}} \operatorname{sen} \theta_{prp_{gv}} \end{cases} \quad (4.16)$$

ecuaciones que nuevamente representan, para  $\eta \in \{1, -1\}$ , dos familias de circunferencias parametrizadas en  $\delta_a$  y  $\theta_a$ . La región barrida por cada familia tiene por frontera dos circunferencias concéntricas; la exterior de cada familia (las interiores puede que no existan) forma parte de la frontera de  $CUv$  (figura 4.3) y está expresada por

$$\begin{cases} p_{rxo} = a_{1xo} + k(a_{2xo} - a_{1xo}) - h \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g} + \gamma) + \\ \quad (\epsilon_{prp_{gv}} + \epsilon_a) \cos \theta_{prp_{gva}} \\ p_{ryo} = a_{1yo} + k(a_{2yo} - a_{1yo}) - h \operatorname{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g} + \gamma) + \\ \quad (\epsilon_{prp_{gv}} + \epsilon_a) \operatorname{sen} \theta_{prp_{gva}} \end{cases} \quad (4.17)$$

y se denomina respectivamente  $CCg_M$  ó  $CCg_m$  de acuerdo con el valor de  $\eta$ .

Los arcos de las cuatro circunferencias que son frontera de  $CUv$  satisfacen las condiciones:

$$|\phi_{ro} + \phi_{go} + \gamma + \pi - \theta_{Rra}| < \epsilon_{\phi_r \phi_g} \quad \text{para} \quad CCr_M \text{ y } CCr_m \quad (4.18)$$

$$0 < \phi_{ro} + \phi_{go} + \gamma + \epsilon_{\phi_r \phi_g} - \theta_{prp_{gva}} < \pi \quad \text{para} \quad CCg_M \quad (4.19)$$

$$-\pi < \phi_{ro} + \phi_{go} + \gamma - \epsilon_{\phi_r \phi_g} - \theta_{prp_{gva}} < 0 \quad \text{para} \quad CCg_m \quad (4.20)$$

**3)** Cuando el objeto aprehendido se desplaza manteniendo su orientación ( $\phi_{ro} = cte$ ) y cambiando el punto de contacto sobre el lado del objeto fijo (variación de  $k$ ) la zona  $CUv$  se desplaza en una dirección paralela al lado de contacto sin cambiar su forma (figura 4.4). La zona barrida por  $CUv$  cuando  $k$  varía desde 0 hasta 1 es  $CUI$ .

La frontera de  $CUI$  está formada por partes de la frontera de las incertidumbres  $CUv$  para los dos vértices de  $l_a$  ( $k = 0$  y  $k = 1$ ) y por dos segmentos de recta. Las rectas soporte de ambos segmentos son tangentes a  $CUv$  para cualquier punto de  $l_a$  y paralelas a  $l_a$  (figura 4.4). Esta última condición permite determinar las rectas mediante los parámetros  $d_e$  y  $d_i$ ; respectivamente, tales que  $|d_e|$  y  $|d_i|$  indican las distancias de ambas rectas a  $l_a$  y sus signos indican a que lado de  $l_a$  se encuentran (por convención, signo negativo indica el lado de  $l_a$  interior al objeto y signo positivo el lado de  $l_a$  exterior al mismo).

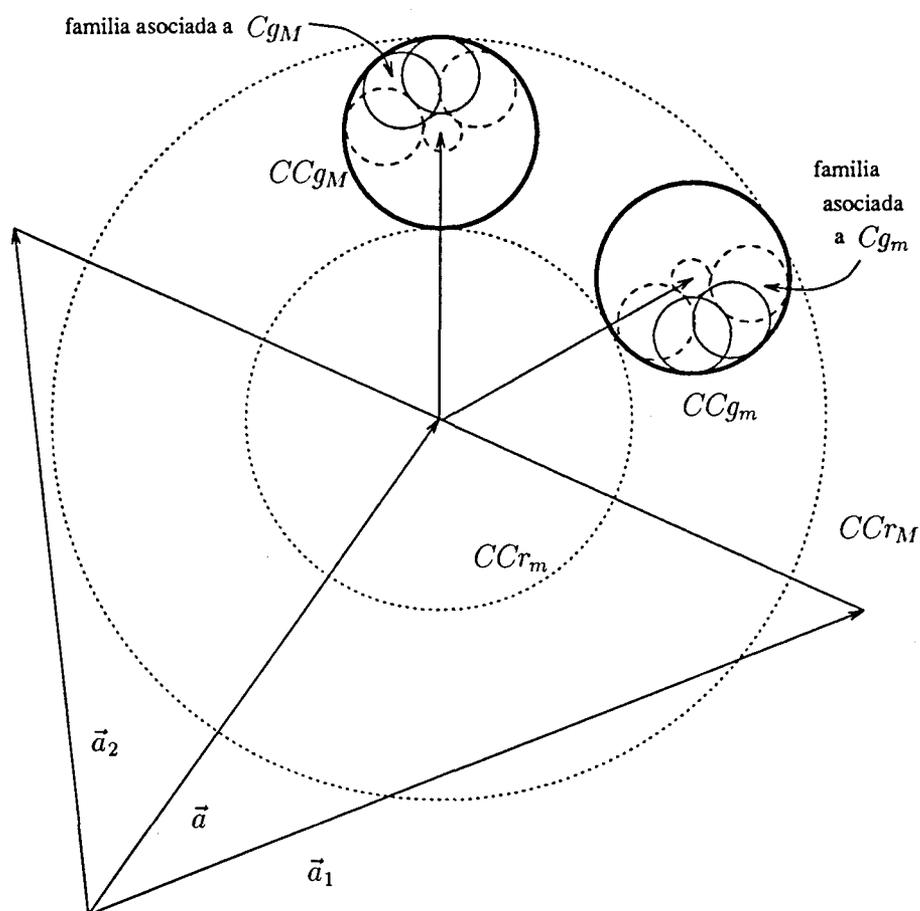


Figura 4.3: Circunferencias  $CCg_M$  y  $CCg_m$ .

Representando mediante  $\psi_{n_a}$  el ángulo de la normal exterior a  $l_a$ ,  $d_e$  y  $d_i$  están dados por

$$d_e = h \cos(\psi_{n_a} - \phi_{r_o} - \phi_{g_o} - \gamma + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g}) + \epsilon_{p_r p_g v_a} \quad (4.21)$$

$$d_i = h \cos(\psi_{n_a} - \phi_{r_o} - \phi_{g_o} - \gamma - \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g}) - \epsilon_{p_r p_g v_a} \quad (4.22)$$

con

$$\eta = 1 \quad \text{si} \quad 0 < \psi_{n_a} - \phi_{r_o} - \phi_{g_o} - \gamma < \pi \quad (4.23)$$

$$\eta = -1 \quad \text{si} \quad -\pi < \psi_{n_a} - \phi_{r_o} - \phi_{g_o} - \gamma < 0 \quad (4.24)$$

excepto en los siguientes casos:

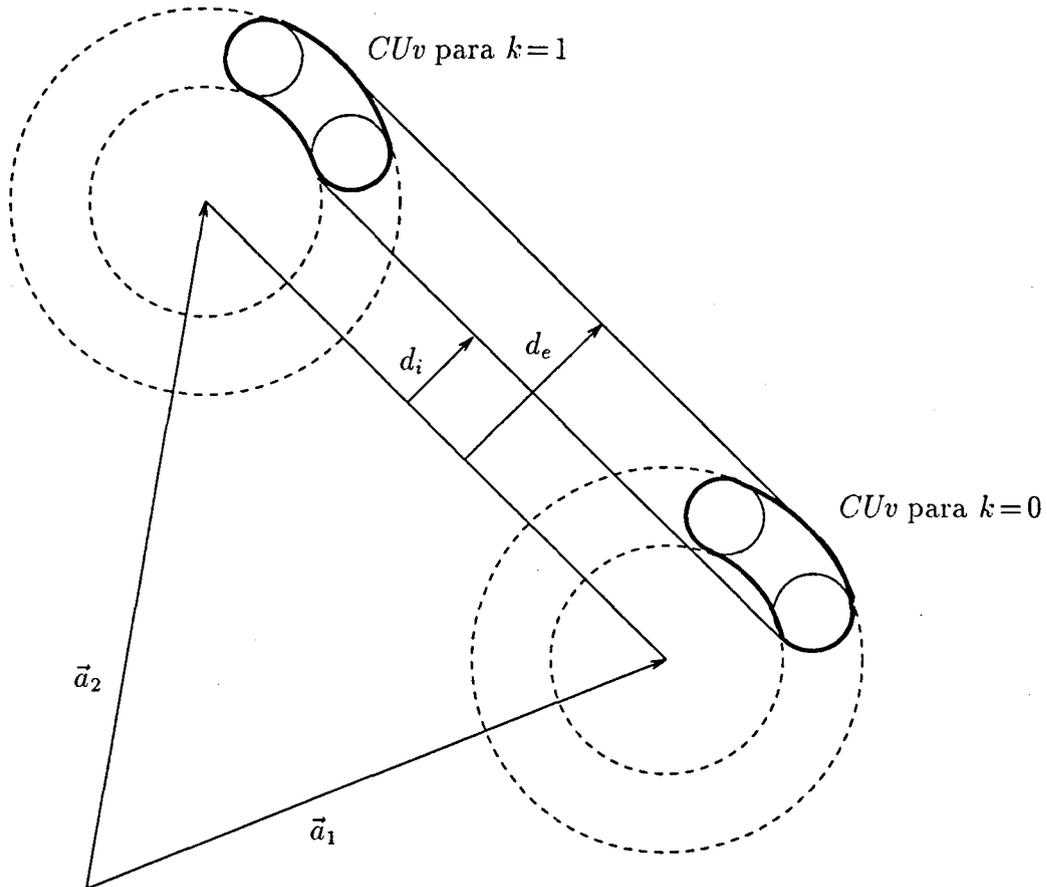


Figura 4.4: Desplazamiento de  $CUv$  en función de  $k$ .

$$\text{si } |\phi_{ro} + \phi_{go} + \gamma - \psi_{na} + \pi| < \epsilon_{\phi_r \phi_g} \text{ entonces } d_e = h + \epsilon_{p_r p_g v} + \epsilon_a \quad (4.25)$$

$$\text{si } |\phi_{ro} + \phi_{go} + \gamma - \psi_{na}| < \epsilon_{\phi_r \phi_g} \text{ entonces } d_i = -(h + \epsilon_{p_r p_g v} + \epsilon_a) \quad (4.26)$$

Estos casos ocurren cuando una de las rectas es tangente a las  $CUv$  en el arco de circunferencia de  $CCr_M$ .

4)  $CUI$  no es más que un corte bidimensional de  $CU$  para un cierto  $\phi_{ro}$ , por lo tanto, la frontera de  $CU$  puede obtenerse a partir de la frontera de  $CUI$  haciendo variar  $\phi_{ro}$  en el rango apropiado.

Representando por  $L_a$ ,  $L_{b1}$  y  $L_{b2}$  las longitudes nominales de los lados  $l_a$ ,  $l_{b1}$  y  $l_{b2}$  (siendo  $l_{b1}$  y  $l_{b2}$  los lados que se intersectan en  $\vec{b}$  siguiendo el contorno

del objeto en sentido antihorario), las máximas desviaciones en las direcciones de sus correspondientes normales exteriores serán

$$\epsilon_{\psi_{na}} = \arcsen(2\epsilon_a/L_a) \quad (4.27)$$

$$\epsilon_{\psi_{nb1}} = \arcsen(2\epsilon_v/L_{b1}) \quad (4.28)$$

$$\epsilon_{\psi_{nb2}} = \arcsen(2\epsilon_v/L_{b2}) \quad (4.29)$$

Si  $\phi_{roM}$  y  $\phi_{rom}$  son los valores máximo y mínimo predichos para  $\phi_r$  en ausencia de incertidumbre, el rango de variación de  $\phi_{ro}$  se extenderá, debido a la incertidumbre, a

$$\phi_{rom} - \epsilon_{\psi_{nb1}} - \epsilon_{\psi_{na}} - \epsilon_{\phi_r} - \epsilon_{\phi_g} < \phi_{ro} < \phi_{roM} + \epsilon_{\psi_{nb2}} + \epsilon_{\psi_{na}} + \epsilon_{\phi_r} + \epsilon_{\phi_g} \quad (4.30)$$

En la figura 4.5 se muestra una sección de  $CU$  perpendicular al plano coordenado  $xy$  y a la dirección del lado  $l_a$  nominal, con lo que pueden apreciarse las variaciones de  $d_e$  y  $d_i$  en función de  $\phi_{ro}$ .

Si un valor extremo de  $\phi_{ro}$  ( $\phi_{roM}$  ó  $\phi_{rom}$ ) se producen debido a un contacto básico con un lado o vértice que no sea contiguo de  $l_a$ ,  $l_{b1}$  ó  $l_{b2}$ , la extensión del rango de  $\phi_{ro}$  se realiza cambiando, según corresponda,  $\epsilon_{\psi_{na}}$ ,  $\epsilon_{\psi_{nb1}}$ , ó  $\epsilon_{\psi_{nb2}}$  en la expresión (4.30) por  $\epsilon_{\psi}$  calculado según:

- si el contacto es de tipo 1:

$$\epsilon_{\psi} = \arcsen(2\epsilon_v/L_{v_1v_2}) \quad (4.31)$$

siendo  $L_{v_1v_2}$  la distancia entre los dos vértices de contacto del objeto aprehendido.

- si el contacto es de tipo 2:

$$\epsilon_{\psi} = \arcsen(\epsilon_v + \epsilon_a/L_{lv}) \quad (4.32)$$

siendo  $L_{lv}$  la mínima distancia entre  $l_a$  y el vértice de contacto del objeto estático.

#### 4.1.5 Incertidumbre en una $C$ -superficie de tipo 2

La incertidumbre en una  $C$ -superficie de tipo 2 se determina de forma similar a la de tipo 1; considerando que el lado  $l_b$  del objeto aprehendido está en contacto con el vértice  $\vec{a}$  del objeto estático, el procedimiento consiste en determinar:

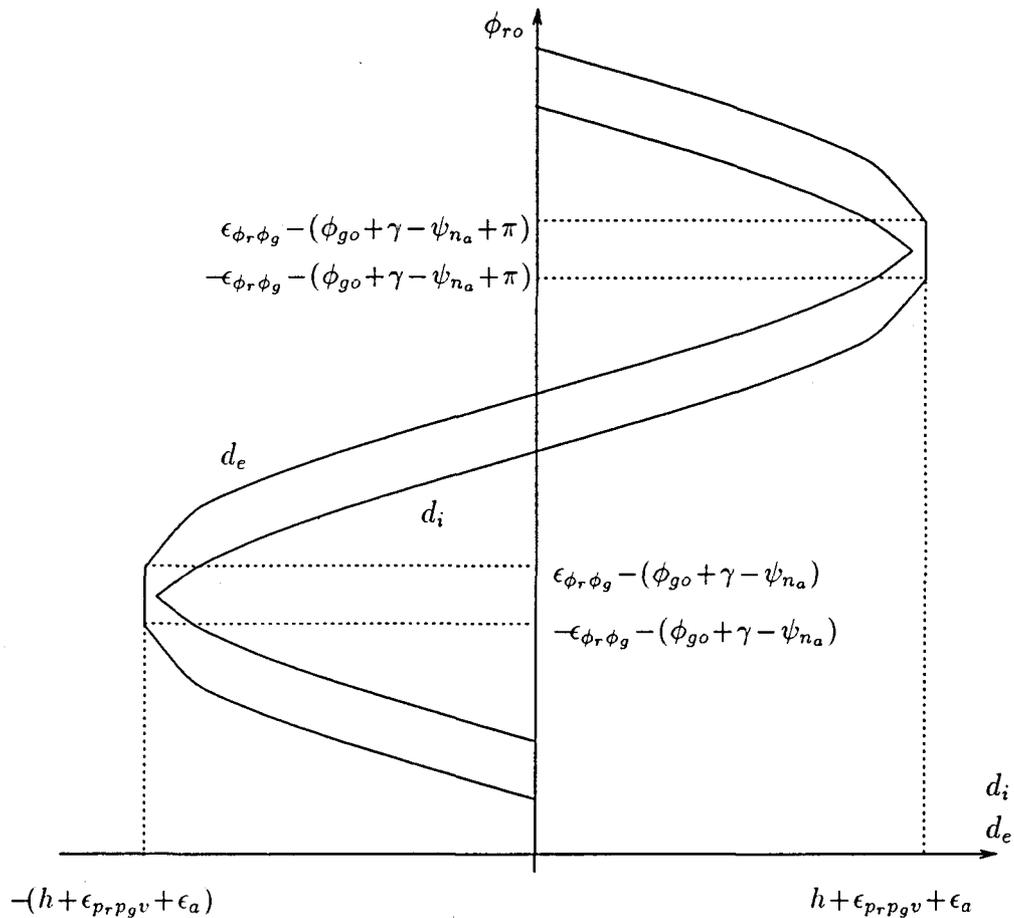


Figura 4.5: Sección de CU perpendicular al plano coordenado  $xy$  y a la dirección del lado  $l_a$  nominal (sin considerar límites en  $\phi_{ro}$ ).

1.  $Uv$  de los vértices  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  de  $l_b$ .
2.  $Ul$  de  $l_b$ .
3.  $CUL$  de  $\vec{a}$  y  $l_b$ .
4.  $CU$  de  $\vec{a}$  y  $l_b$ .

1) Las incertidumbres  $Uv$  para ambos vértices de  $l_b$  se obtienen del mismo modo que para el vértice  $\vec{b}$  en las  $C$ -superficies de tipo 1 (apartado 4.1.4). En este caso se usarán los subíndices 1 y 2 para indicar las  $Uv$  de  $\vec{b}_1$  y

$\vec{b}_2$  respectivamente, así como las circunferencias que contienen los arcos que forman sus correspondientes fronteras.

2)  $Ul$  puede tomar dos formas genéricas diferentes dependiendo de la posición nominal del lado de contacto en relación a  $P_r$ . La condición que distingue ambos casos, que denominaremos respectivamente A y B, es que la perpendicular a  $l_b$  por  $P_r$  interseque o no a  $l_b$ , tal como se ilustra en la figura 4.6.

En la figura 4.7 se muestra la forma genérica de  $Ul$  para el caso A. Puede verse que la frontera de  $Ul$  está formada por seis arcos de circunferencia (tres por cada vértice) y dos segmentos rectilíneos. Los arcos de circunferencia son porciones de los que forman la frontera de  $Uv_1$  y  $Uv_2$ . Las rectas soporte de los segmentos son tangentes a  $Uv_1$  y  $Uv_2$  y pueden expresarse

$$x \frac{b_{2y} - b_{1y}}{L_b} - y \frac{b_{2x} - b_{1x}}{L_b} = \frac{b_{1x}(b_{2y} - b_{1y}) - b_{1y}(b_{2x} - b_{1x})}{L_b} + \eta \epsilon_{p_r p_g v} \quad (4.33)$$

donde  $L_b$  es la longitud nominal de  $l_b$  y las componentes de  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  se calculan a partir de la ecuación (3.40) considerando  $\delta_{p_r p_g v} = 0$ , y  $\delta_{\phi_r \phi_g}$  y  $\eta$  tal como se describe a continuación. Una de las rectas se obtiene haciendo  $\delta_{\phi_r \phi_g} = \epsilon_{\phi_r \phi_g}$  y seleccionando  $\eta$  igual a 1 ó  $-1$  de forma que la recta resulte tangente a las fronteras de  $Uv_1$  y  $Uv_2$ ; los puntos de tangencia son los extremos del segmento correspondiente. La otra recta se obtiene de forma similar haciendo  $\delta_{\phi_r \phi_g} = -\epsilon_{\phi_r \phi_g}$ .

En la figura 4.8 se muestra la forma genérica de  $Ul$  para el caso B. Puede apreciarse que ahora, además de los seis arcos de circunferencia aportados por las fronteras de  $Uv_1$  y  $Uv_2$ , la frontera de  $Ul$  incluye cuatro segmentos rectilíneos y un arco de circunferencia adicional. Las rectas soporte de los segmentos también pueden expresarse mediante la ecuación (4.33), aunque en este caso, las componentes de  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son calculadas considerando  $\delta_{\phi_r \phi_g}$  y  $\eta$  del siguiente modo. Un par de rectas se obtiene para  $\delta_{\phi_r \phi_g} = \epsilon_{\phi_r \phi_g}$  y  $\eta = 1, -1$ , y el otro para  $\delta_{\phi_r \phi_g} = -\epsilon_{\phi_r \phi_g}$  y nuevamente  $\eta = 1, -1$ . Una recta de cada par es tangente al arco de circunferencia adicional (descrito más adelante) y al contorno de  $Uv_1$  o al de  $Uv_2$ ; los puntos de tangencia son los límites de los segmentos correspondientes. Los otros dos segmentos intersecan entre sí y pertenecen a rectas respectivamente tangentes a los contornos de  $Uv_1$  y  $Uv_2$ ; el punto en que se intersecan y cada punto de tangencia son los límites de los dos segmentos correspondientes.

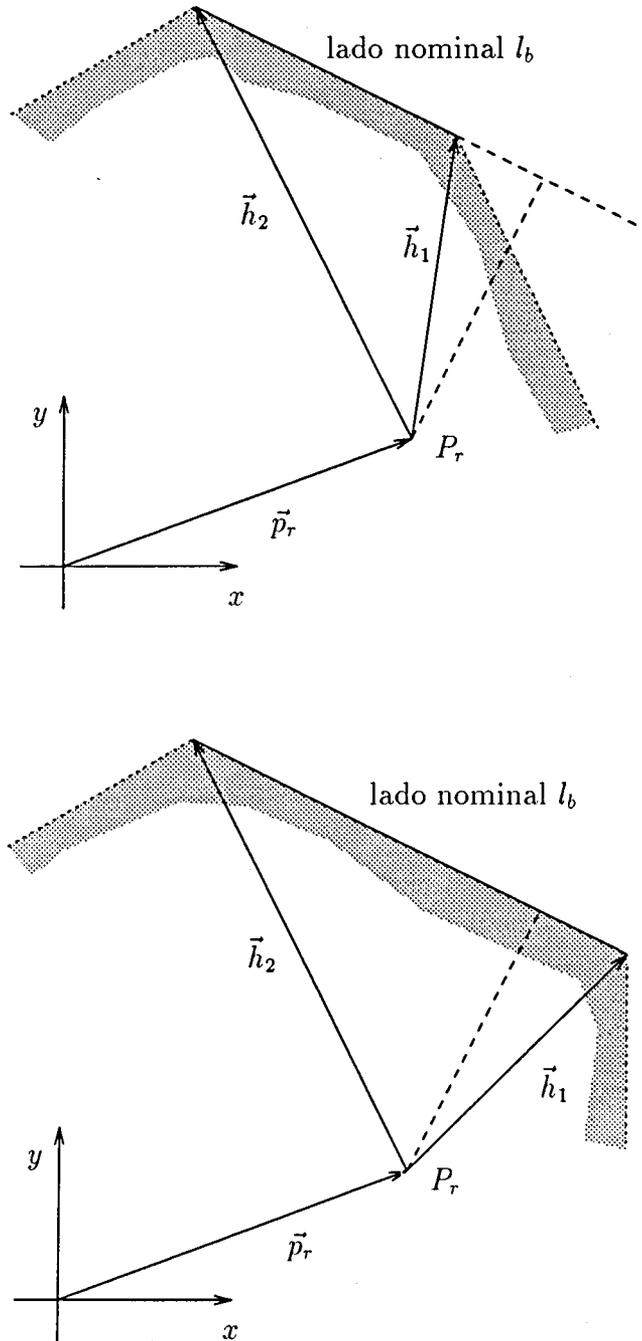
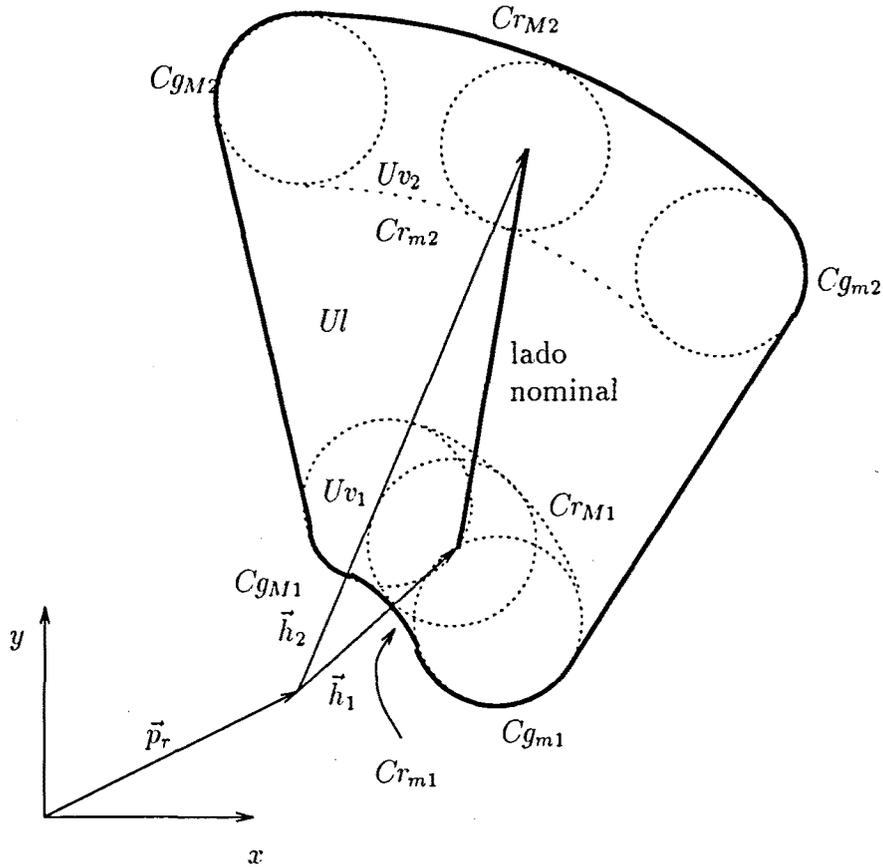


Figura 4.6: Posiciones relativas de  $l_b$  que generan diferentes formas de  $U_l$ .

Figura 4.7:  $Ul$  para el Caso A

Llamando  $d_n$  a la distancia (en ausencia de incertidumbre) de  $P_r$  a  $l_b$ , el arco adicional mencionado pertenece a la circunferencia

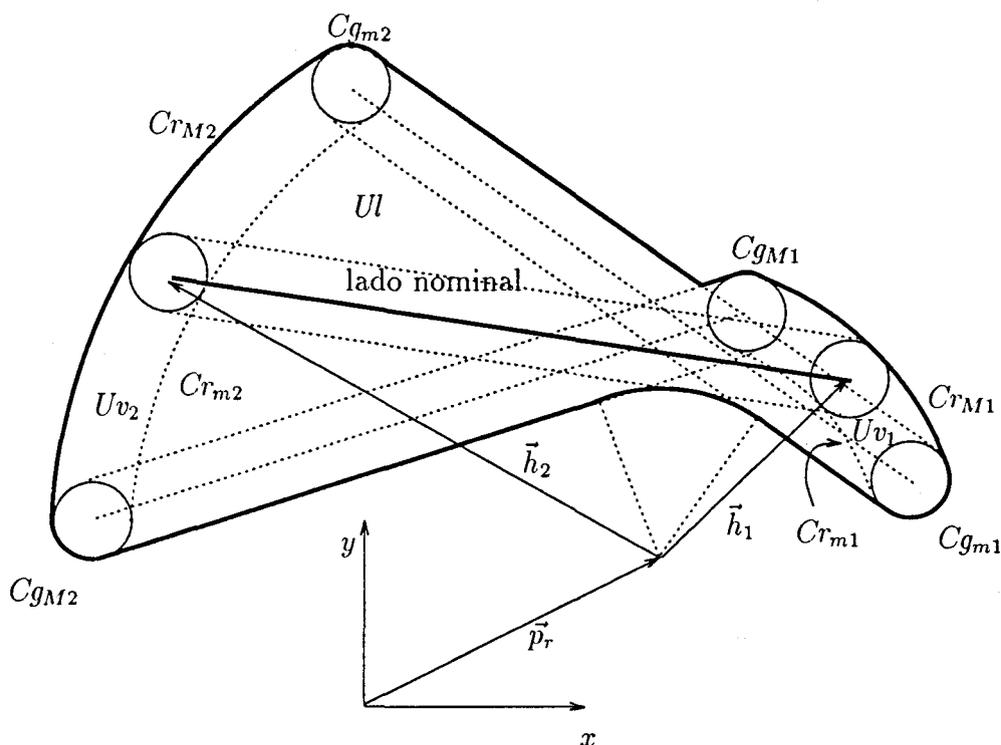
$$\begin{cases} x = p_{rx0} + (d_n - \epsilon_{prp_gv}) \cos \theta_n \\ y = p_{ry0} + (d_n - \epsilon_{prp_gv}) \sin \theta_n \end{cases} \quad (4.34)$$

y satisface la condición

$$|\theta_n - \psi_{nb}| < \epsilon_{\phi_g\phi_r} \quad (4.35)$$

donde  $\psi_{nb}$  indica la dirección normal a  $l_b$  exterior al objeto. El ángulo que define el arco válido de esta circunferencia es por lo tanto  $\epsilon_{\phi_g\phi_r}$ , y su bisectriz está sobre la perpendicular al lado de contacto nominal.

**3)**  $CUI$  se obtiene aplicando una condición de contacto entre los puntos de  $Ul$  y el vértice  $\vec{a}$ . La expresión algebraica de la frontera de  $CUI$  se obtiene igualando

Figura 4.8:  $UI$  para el Caso B.

las coordenadas de los puntos de la frontera de  $UI$  a la expresión de  $\vec{a}$  dada por la ecuación (3.26). Debido a la incertidumbre en  $\vec{a}$  el resultado es un conjunto de configuraciones cuya envolvente exterior es la frontera de  $CUI$ .

$CUI$  tiene la misma forma, aunque no el mismo tamaño, que  $UI$ , por lo que su frontera está formada por un conjunto similar de arcos de circunferencia y segmentos de recta, tanto para el caso A como para el B. Así, los arcos pertenecen a las circunferencias

$$\begin{cases} p_{rx0} = a_{1x0} + k(a_{2x0} - a_{1x0}) + (h + \eta(\epsilon_{prp_gv} + \epsilon_a)) \cos \theta_{Rra} \\ p_{ry0} = a_{1y0} + k(a_{2y0} - a_{1y0}) + (h + \eta(\epsilon_{prp_gv} + \epsilon_a)) \text{sen} \theta_{Rra} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} p_{rx0} = a_{1x0} + k(a_{2x0} - a_{1x0}) - h \cos(\phi_{ro} + \phi_{go} + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g} + \gamma) + \\ \quad (\epsilon_{prp_gv} + \epsilon_a) \cos \theta_{prp_gva} \\ p_{ry0} = a_{1y0} + k(a_{2y0} - a_{1y0}) - h \text{sen}(\phi_{ro} + \phi_{go} + \eta \epsilon_{\phi_r \phi_g} + \gamma) + \\ \quad (\epsilon_{prp_gv} + \epsilon_a) \text{sen} \theta_{prp_gva} \end{cases} \quad (4.37)$$

Para  $\eta = 1, -1$  la ecuación (4.36) representa dos circunferencias (denominadas  $CCr_M$  y  $CCr_m$  respectivamente), y la ecuación (4.37) otras dos (denominadas

$CCg_M$  y  $CCg_m$  respectivamente). Las dos ecuaciones se particularizan para el vértice  $\vec{b}_i$  ( $i = 1, 2$ ) mediante  $h_i$  y  $\gamma_i$ .

Las rectas, tangentes a estas circunferencias, que contienen los segmentos frontera de  $CUI$  están expresadas por

$$x \frac{b_{2y} - b_{1y}}{L} - y \frac{b_{2x} - b_{1x}}{L} = \frac{b_{1x}(b_{2y} - b_{1y}) - b_{1y}(b_{2x} - b_{1x})}{L} + \eta (\epsilon_{prp_{gv}} + \epsilon_a) \quad (4.38)$$

donde  $\eta$  se elige con el mismo criterio utilizado para la ecuación (4.33) tanto para el caso A como para el B.

Finalmente, la circunferencia que contiene el arco adicional mencionado en el paso anterior da origen a

$$\begin{cases} x = p_{rxo} + (d_n - \epsilon_{prp_{gv}} - \epsilon_a) \cos \theta_n \\ y = p_{ryo} + (d_n - \epsilon_{prp_{gv}} - \epsilon_a) \text{sen} \theta_n \end{cases} \quad (4.39)$$

circunferencia que puede tener radio negativo, en cuyo caso no forma parte de la frontera de  $CUI$ .

4) Como en el caso de  $\mathcal{C}$ -superficies de tipo 1,  $CUI$  es un corte bidimensional de  $CU$  para un cierto  $\phi_{ro}$ , por lo que la frontera de  $CU$  puede obtenerse a partir de la frontera de  $CUI$  haciendo variar  $\phi_{ro}$  en el rango adecuado.

Representando por  $L_{a1}$ ,  $L_{a2}$  y  $L_b$  las longitudes nominales de  $l_{a1}$ ,  $l_{a2}$  y  $l_b$  (siendo  $l_{a1}$  y  $l_{a2}$  los lados que se intersectan en el vértice  $\vec{a}$  siguiendo el contorno del objeto en sentido antihorario), las máximas desviaciones en las direcciones de sus correspondientes normales exteriores serán

$$\epsilon_{\psi_{na1}} = \arcsen(2\epsilon_a/L_{a1}) \quad (4.40)$$

$$\epsilon_{\psi_{na2}} = \arcsen(2\epsilon_a/L_{a2}) \quad (4.41)$$

$$\epsilon_{\psi_{nb}} = \arcsen(2\epsilon_v/L_b) \quad (4.42)$$

Si  $\phi_{roM}$  y  $\phi_{rom}$  son los valores máximo y mínimo predichos para  $\phi_r$  en ausencia de incertidumbre, el rango de variación de  $\phi_{ro}$  se extenderá, debido a la incertidumbre, a

$$\phi_{rom} - \epsilon_{\psi_{na1}} - \epsilon_{\psi_{nb}} - \epsilon_{\phi_r} - \epsilon_{\phi_g} < \phi_{ro} < \phi_{roM} + \epsilon_{\psi_{na2}} + \epsilon_{\psi_{nb}} + \epsilon_{\phi_r} + \epsilon_{\phi_g} \quad (4.43)$$

El efecto que produce la variación de  $\phi_{ro}$  es sencillamente el de girar  $CUI$  alrededor de  $P_r$  sin producir deformaciones.

Si un valor extremo de  $\phi_{ro}$ ,  $\phi_{roM}$  ó  $\phi_{rom}$ , se produce debido a un contacto básico con un lado o vértice que no sea contiguo de  $l_{a1}$ ,  $l_{a2}$  ó  $l_b$ , la extensión del rango de  $\phi_{ro}$  se realiza cambiando, según corresponda,  $\epsilon_{\psi_{na1}}$ ,  $\epsilon_{\psi_{na2}}$  ó  $\epsilon_{\psi_{nb}}$  en la expresión (4.43) por  $\epsilon_{\psi}$  calculado según:

- si el contacto es de tipo 1:

$$\epsilon_{\psi} = \arcsen(\epsilon_v + \epsilon_a/L_{lv}) \quad (4.44)$$

siendo  $L_{lv}$  la mínima distancia entre  $\vec{a}$  y el lado de contacto del objeto estático.

- si el contacto es de tipo 2:

$$\epsilon_{\psi} = \arcsen(2\epsilon_a/L_{a_1a_2}) \quad (4.45)$$

siendo  $L_{a_1a_2}$  la distancia entre los dos vértices de contacto del objeto estático.

## 4.2 Incertidumbre en la fuerza generalizada

La dirección de una fuerza generalizada de reacción en  $\mathcal{C}_3$  depende de la dirección de la normal a la  $\mathcal{C}$ -superficie de contacto. Por lo tanto, la incertidumbre en la dirección de esta normal, debida a la existente en la posición, da lugar a una incertidumbre en la dirección de la fuerza de reacción.

La incertidumbre en la observación de una fuerza generalizada es exclusivamente de origen sensorial (sección 3.3), y su modelado en  $\mathcal{C}_3$  se deduce de las expresiones (3.51), (3.52) y (3.53).

Para las dos primeras componentes de la fuerza generalizada en  $\mathcal{C}_3$  se mantienen las condiciones expresadas en (3.51) y (3.52). La especificación de incertidumbre para la tercera componente se obtiene dividiendo por  $\rho$  la condición de (3.53), quedando,

$$\frac{1}{\rho} |\tau - \tau_o| \leq \frac{\epsilon_{\tau}}{\rho} \quad (4.46)$$

de donde se obtiene

$$|f_{\tau} - f_{\tau o}| \leq \epsilon_{f_{\tau}} \quad (4.47)$$

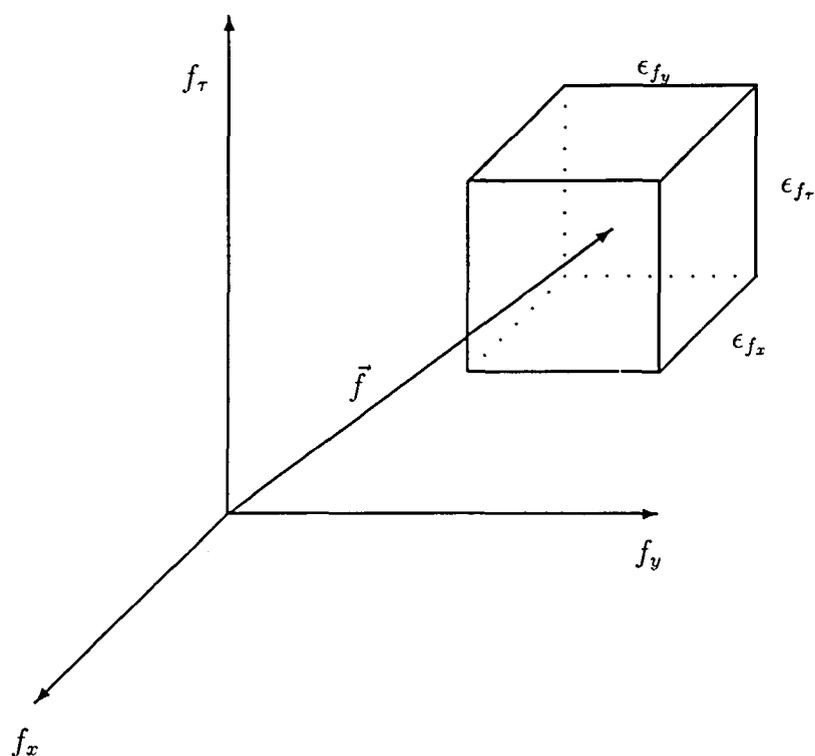


Figura 4.9: Incertidumbre en la fuerza generalizada en  $C_3$ .

donde  $f_\tau$  es el valor real de la tercer componente de la fuerza generalizada,  $f_{\tau o}$  es su valor observado y

$$\epsilon_{f_\tau} = \frac{\epsilon_\tau}{\rho} \quad (4.48)$$

La incertidumbre en la fuerza generalizada,  $U_g$ , viene representada por un cubo de lados  $\epsilon_{f_x}$ ,  $\epsilon_{f_y}$  y  $\epsilon_{f_\tau}$ , centrado en la fuerza nominal, como se muestra en la figura 4.9.

### 4.3 Incertidumbre en la velocidad

La velocidad en el Espacio de Configuraciones, o *velocidad generalizada*, es la variación en el tiempo del vector configuración, es decir

$$\vec{V} = [V_x \quad V_y \quad V_q]^T = \left[ \frac{dp_{rx}}{dt} \quad \frac{dp_{ry}}{dt} \quad \rho \frac{d\phi_r}{dt} \right]^T \quad (4.49)$$

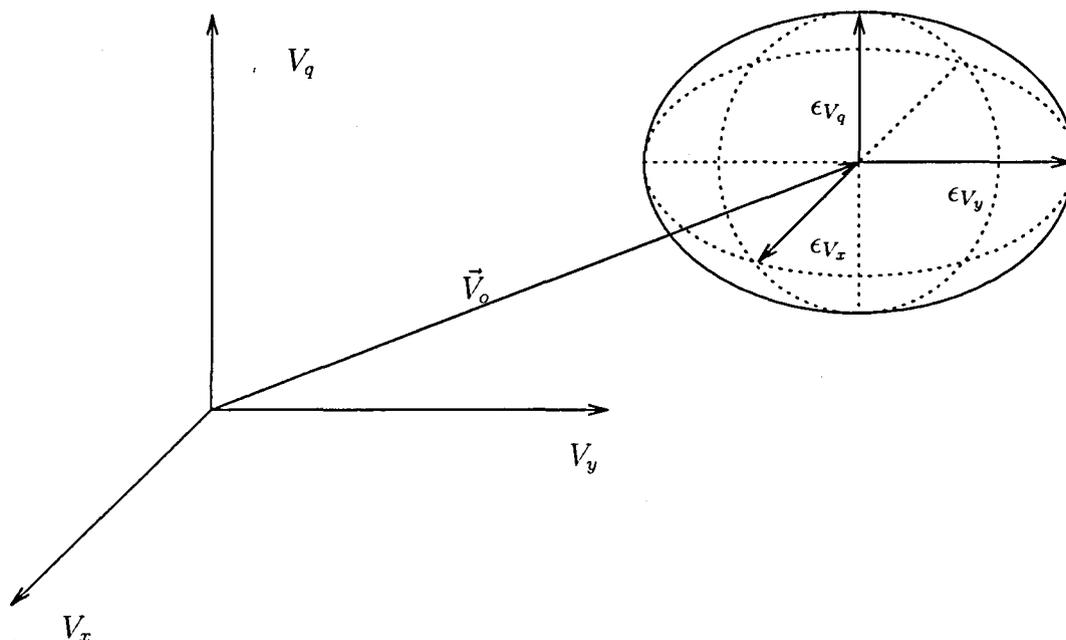


Figura 4.10: Incertidumbre en la velocidad generalizada.

El modelo de incertidumbre adoptado para la velocidad generalizada consiste en que el extremo del vector velocidad se encuentre dentro de un elipsoide de la forma (figura 4.10)

$$\frac{(V_x - V_{xo})^2}{\epsilon_{V_x}^2} + \frac{(V_y - V_{yo})^2}{\epsilon_{V_y}^2} + \frac{(V_q - V_{qo})^2}{\epsilon_{V_q}^2} < 1 \quad (4.50)$$

donde  $\vec{V}_o = [V_{xo} \ V_{yo} \ V_{qo}]^T$  es la velocidad generalizada nominal, con módulo  $V_o$ ,  $\vec{V} = [V_x \ V_y \ V_q]^T$  la velocidad generalizada real, y  $\epsilon_{V_x}$ ,  $\epsilon_{V_y}$  y  $\epsilon_{V_q}$  son las desviaciones máximas posibles según cada una de las componentes de  $\vec{V}_o$  que, a su vez, son proporcionales a  $V_o$ , es decir

$$\epsilon_{V_x} = p_x V_o \quad (4.51)$$

$$\epsilon_{V_y} = p_y V_o \quad (4.52)$$

$$\epsilon_{V_q} = p_q V_o \quad (4.53)$$

donde  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_q$  varían entre 0 y 1 e indican el error relativo por unidad admitido según cada componente de  $\vec{V}_o$ .

De cara a la planificación de la tarea es importante determinar la incertidumbre de la dirección de  $\vec{V}$ . Para el modelo de incertidumbre

definido por la expresión 4.50, las direcciones posibles de la velocidad  $\vec{V}$  están contenidas en el cono elíptico dado por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} V_x^2 (V_o^2 p_y^2 p_q^2 - p_q^2 V_{yo}^2 - p_y^2 V_{qo}^2) + V_y^2 (V_o^2 p_x^2 p_q^2 - p_q^2 V_{xo}^2 - p_x^2 V_{qo}^2) + \\ V_q^2 (V_o^2 p_x^2 p_y^2 - p_x^2 V_{yo}^2 - p_y^2 V_{xo}^2) + V_x V_y 2V_{xo} V_{yo} p_q^2 + \\ V_x V_q 2V_{xo} V_{qo} p_y^2 + V_y V_q 2V_{yo} V_{qo} p_x^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Un caso particular de este modelo se produce cuando  $p_x = p_y = p_q$ , condición que transforma el elipsoide de incertidumbre (expresión 4.50) en una esfera, y el cono elíptico que determina la incertidumbre de dirección (ecuación 4.54), en un cono circular. En cualquier caso, el elipsoide de incertidumbre puede convertirse en una esfera mediante un cambio de escala. Por ejemplo, en la situación más frecuente en que  $p_x = p_y \neq p_q$  la reducción a una incertidumbre esférica se realiza mediante el cambio de variable

$$V'_q = \frac{p_x}{p_q} V_q \quad (4.55)$$

## 4.4 Partición de $\mathcal{C}$ en presencia de incertidumbre

Así como en el apartado 2.2.3 se dividió  $\mathcal{C}$  en los conjuntos  $C_i$  y  $C_p$  y este último a su vez en  $C_c$  y  $C_l$ , puede realizarse ahora una partición similar considerando la incertidumbre:

*Configuraciones de posible contacto en presencia de incertidumbre:*

$$CcI = \{\vec{c} \mid \exists i, \vec{c} \in CU_i\} \quad (4.56)$$

*Configuraciones que con seguridad son imposibles en presencia de incertidumbre:*

$$CiI = Ci \cap \overline{CcI} \quad (4.57)$$

*Configuraciones que con seguridad son libres en presencia de incertidumbre:*

$$CII = Cl \cap \overline{CcI} \quad (4.58)$$

<sup>1</sup>La ecuación del cono elíptico se obtiene resolviendo el haz de rectas que pasan por el origen y son tangentes al elipsoide de incertidumbre.

Esta partición de  $\mathcal{C}$  en presencia de incertidumbre permite definir formalmente qué se entiende por movimientos de corto o de largo desarrollo, conceptos estos frecuentemente utilizados sin una definición precisa.

**Definición 4.1** Movimientos de corto desarrollo o finos *son aquellos movimientos del robot cuyas trayectorias geométricas incluyen configuraciones de  $CcI$ .*

En este tipo de movimientos existe la posibilidad de que se produzca contacto entre el objeto manipulado por el robot y aquellos estáticos en el entorno de trabajo, por lo que es altamente recomendable el uso de algún tipo de control de posición/fuerza para gobernar el robot. Se conocen en inglés como *fine-motion*.

**Definición 4.2** Movimientos de largo desarrollo o gruesos *son aquellos movimientos del robot cuyas trayectorias geométricas están totalmente incluidas en  $CI$ .*

En este tipo de movimientos no existe la posibilidad de que se produzca contacto entre objetos, y por lo tanto pueden ser ejecutados gobernados por un control únicamente de posición. Se conocen en inglés como *gross-motion*.



## Capítulo 5

# Estados de una tarea de montaje

Para realizar una tarea de montaje deben determinarse las acciones a ejecutar a partir de la posición relativa de los objetos. Las posiciones relativas que los objetos pueden alcanzar manteniendo contacto son infinitas, y por lo tanto es imposible especificar de forma particular para cada una de ellas la acción a ejecutar. La solución a este problema pasa por dividir este conjunto infinito de posiciones relativas en un número finito de conjuntos caracterizados por algún elemento relevante para la tarea a realizar. En este trabajo la división se realiza en función de los contactos básicos que pueden producirse, y a partir de ellos se definen los estados de una tarea de montaje. Cada estado se caracteriza entonces por un conjunto de contactos básicos, que implican a su vez unos conjuntos de configuraciones y de fuerzas de reacción posibles.

En este capítulo, tras una sección de introducción al uso de información de posición y fuerza para reducir incertidumbre, se definen formalmente los estados de una tarea de montaje y algunas propiedades específicas. Posteriormente se analiza el efecto de la incertidumbre en las realizaciones de los estados y en la información sensorial de posición y fuerza que puede obtenerse cuando se alcanza cada uno de ellos. En la última sección del capítulo se definen operadores para cambiar de un estado a otro de la tarea y se dan las pautas para su determinación.

## 5.1 Información de configuración y de fuerza

Desde un punto de vista puramente geométrico, el grado de desarrollo de una tarea de montaje se puede indicar mediante el punto del Espacio de Configuraciones que representa la posición y orientación reales del objeto móvil en el instante considerado.

Ante la inevitable presencia de incertidumbre en la forma de los objetos y en su posicionamiento, resulta muy difícil, si no imposible, determinar exactamente el punto  $P \in \mathcal{C}$  correspondiente a la configuración real del objeto. En particular, cuando existe contacto y por lo tanto  $P$  está sobre una  $\mathcal{C}$ -superficie, es posible que información puramente geométrica sea insuficiente para determinar cuál es el contacto que realmente se está produciendo, es decir, para determinar qué vértice(s) y qué lado(s) está(n) en contacto. El sencillo caso mostrado en la figura 5.1 sirve como ejemplo; cuando el objeto aprehendido  $\mathcal{B}$  se halla en una configuración tal que el vértice de contacto está dentro de la zona común de incertidumbre geométrica asociada a dos lados contiguos,  $l_{a1}$  y  $l_{a2}$ , del objeto estático  $\mathcal{A}$ , no es posible determinar con cuál de estos lados mantiene contacto usando solamente información de posición.

Esta ambigüedad en la determinación del contacto real, puede reducirse integrando la información sensorial de la posición y orientación con la información sensorial de la fuerza y el par de reacción que se producen durante el contacto. Es común el uso de información referente a las fuerzas de reacción con este fin, aunque a veces se haga de forma implícita.

En el ejemplo mostrado en la figura 5.1, el problema de determinar de qué contacto básico se trata puede resolverse midiendo la fuerza de reacción; el contacto se habrá producido con el lado  $l_{a1}$  ó con el  $l_{a2}$  según que la dirección de la fuerza de reacción esté dentro del cono de fuerzas  $c_1$  ó  $c_2$ , asociado respectivamente a cada lado, como se muestra en la figura 5.2.

En otros casos, la configuración y la fuerza de reacción son insuficientes para identificar el contacto, pero combinadas con la información sobre el par es posible dicha identificación. Este caso se ilustra en la figura 5.3, donde un par positivo es indicativo de contacto sobre  $l_{a1}$  y un par negativo de contacto sobre  $l_{a2}$ . Las informaciones sobre la fuerza y el par de reacción quedan reunidas al trabajar con fuerzas generalizadas (sección 2.4).

No obstante, existen casos cuya ambigüedad es irresoluble aún mediante el uso de información sobre la fuerza generalizada de reacción. Esto sucede cuando las incertidumbres en la configuración y en la fuerza generalizada de reacción (más el efecto de la fricción) hacen que las posibles mediciones de

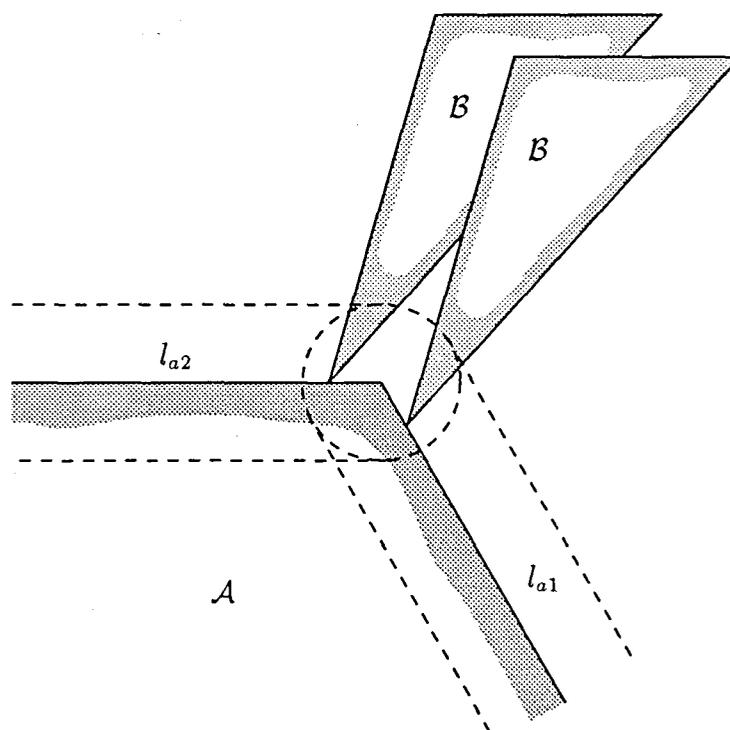


Figura 5.1: *Ambigüedad en la determinación del lado de contacto usando solamente información de posición.*

ambas magnitudes cubran rangos respectivamente comunes para dos contactos distintos. Esto se ilustra en la figura 5.4, en la que se muestra el caso de un vértice del objeto aprehendido en contacto con dos lados contiguos de un objeto estático cuyas normales difieren en un ángulo menor que el cubierto por el cono de fricción (el efecto de la incertidumbre en la medida de la fuerza generalizada y la incertidumbre de posición amplían aún más este ángulo), es decir, los conos  $c_1$  y  $c_2$  se solapan en un rango común de direcciones.

En estos casos la ambigüedad no puede eliminarse mediante un análisis de información estática, aún conociendo la fuerza generalizada de reacción. Una posible solución consiste en realizar un pequeño movimiento de prueba y a partir del mismo hacer algún tipo de análisis. Uno de ellos consistiría en estudiar conjuntamente las variaciones en la configuración, la fuerza generalizada de reacción y la velocidad (lineal y angular) durante el movimiento, lo cual es complicado y no siempre garantiza una solución. Otra

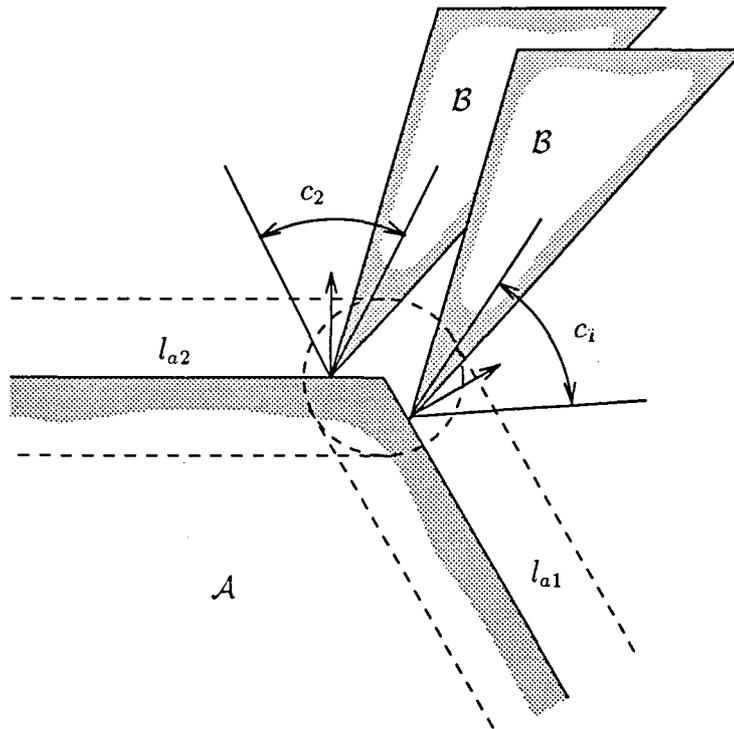


Figura 5.2: Determinación del lado de contacto a partir de la fuerza y par de reacción.

posibilidad es alejarse lo suficiente como para que un nuevo análisis estático permita identificar sin dudas el contacto en curso, y a partir de él y del conocimiento de la topología del Espacio de Configuraciones determinar el contacto original. Este método, utilizado por Desai y Volz (1989) con el nombre de "verificación activa", tiene un claro inconveniente: cuando se logra dilucidar de qué contacto se trataba puede que éste ya no se produzca, encontrándose la tarea en una fase diferente; además, debe tenerse en cuenta la complejidad de la determinación de movimientos de prueba óptimos en algún sentido y el tiempo que pueden requerir, todo ello suponiendo que la tarea real permita realizar estos movimientos.

El enfoque propuesto en este trabajo utiliza un análisis de tipo estático, y no hace uso de ningún movimiento especial con el fin de determinar un determinado contacto. El método de planificación y ejecución de la tarea que se propone no tiene como impedimento que, en ciertas circunstancias, no se

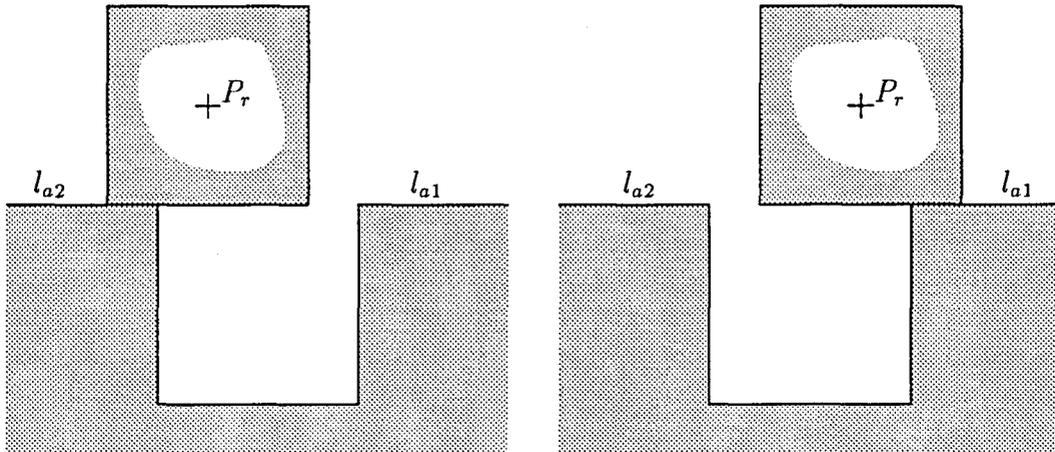


Figura 5.3: Caso en que sólo el par de reacción permite determinar el lado de contacto.

conozca exactamente cuál es la situación real de un objeto. Tanto el proceso de planificación como el de ejecución de la tarea se basan en información sobre la configuración y sobre la fuerza generalizada *estática* de reacción.

Debe tenerse en cuenta que cuando puede producirse contacto entre dos objetos rígidos es prácticamente obligado el uso de velocidades relativamente bajas en los movimientos del robot; por otra parte, el tratamiento de la información sensorial, que se realiza en-línea durante la ejecución de la tarea, también puede imponer restricciones en la velocidad. El uso de elementos pasivos capaces de deformarse con constantes de elasticidad bajas permite aumentar en alguna medida las velocidades de trabajo al actuar como amortiguadores de impactos. No obstante, en las tareas de montaje, la posibilidad de que los impactos puedan dañar las piezas o alguna de las herramientas de trabajo obliga a velocidades suficientemente bajas como para que las fuerzas dinámicas puedan despreciarse.

El planteamiento que aquí se propone es el siguiente. Se definen los estados de la tarea de montaje en función de los contactos básicos que pueden producirse durante el desarrollo de la misma. Considerando los efectos de las diversas fuentes de incertidumbre que afectan la tarea, se establece un modelo sensorial para el conjunto de configuraciones y para el conjunto de fuerzas de reacción factibles de ser observadas cuando se está en un determinado estado. La información obtenida en-línea de los sensores de configuración y de fuerza/par se fusiona para intentar, de acuerdo con el

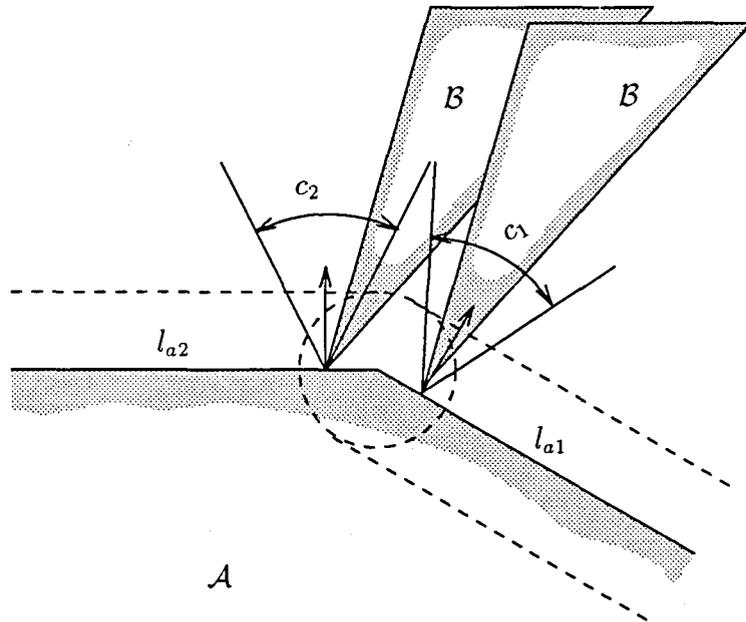


Figura 5.4: Ambigüedad en la determinación del lado de contacto a pesar de la información de posición y de fuerza.

modelo, identificar en cada instante el estado en que se encuentra la tarea y, por lo tanto, el correspondiente conjunto de contactos básicos. Si bien no puede asegurarse siempre la identificación precisa del estado en curso, la fusión de la información sensorial de configuración y de fuerza generalizada permite realizar una estimación del mismo que es suficiente para hacer viable el procedimiento de planificación, ejecución y supervisión de la tarea que se propone.

## 5.2 Estados de una tarea

**Definición 5.1** Estado de una tarea  $E$  es la ocurrencia simultánea de un conjunto  $CB$  de contactos básicos determinados y sólo de ellos.

Esta definición asocia a cada estado  $E$  un conjunto de contactos básicos, cada uno de los cuales puede ser de tipo 1 ó 2, cuya ocurrencia da idea de cómo se relacionan físicamente los objetos. El conjunto  $CB$  puede incluir

contactos básicos redundantes, en cuyo caso puede escribirse  $CB = CBnr \cup CBr$  donde  $CBnr$  indica un conjunto de contactos básicos no redundantes y  $CBr$  el correspondiente conjunto de contactos básicos redundantes. El rango de un conjunto  $CBnr$  de un estado  $E$  se denominará *orden* del estado y se representará como  $Ord(E)$ .

Resulta evidente que cualquier conjunto de contactos básicos no da necesariamente origen a un estado de la tarea, ya que aquellos deben poder alcanzarse de forma simultánea. A partir de los modelos y de las posiciones nominales de los objetos, puede establecerse una serie de conjuntos de contactos básicos que cabe esperar sean simultáneamente compatibles; sin embargo, en la ejecución de la tarea donde las desviaciones de los valores nominales son inevitables, algunos de estos conjuntos de contactos pueden ser inalcanzables, al mismo tiempo que pueden alcanzarse otros no previstos a partir del modelo nominal. Esto lleva a dividir los estados en dos grupos de acuerdo con la siguiente definición:

**Definición 5.2** Estados primarios  $E_p$  de una tarea son los estados posibles cuando no existen desviaciones.

Los estados no primarios se denominarán en adelante *estados complementarios* y son todos aquellos definidos por contactos básicos que sólo pueden producirse simultáneamente cuando existen desviaciones en la forma, tamaño y posición de los objetos.

### 5.2.1 Realización de un estado

El hecho conceptual de estar en un determinado estado significa que, en el espacio físico, el objeto aprehendido por el robot está en una posición y orientación perteneciente al conjunto de todas aquellas en las que se producen determinados contactos básicos para las desviaciones existentes; en el Espacio de Configuraciones esto equivale a estar en una configuración perteneciente a un cierto conjunto función de dichas desviaciones. La siguiente definición liga los estados, como ocurrencia de conjuntos de contactos, con las configuraciones en que tienen lugar.

**Definición 5.3** Realización  $R$  de un estado  $E$  es el conjunto de configuraciones en que tiene lugar  $E$  para unas determinadas desviaciones en la forma y tamaño de los objetos y en las posiciones de los objetos estáticos.

En adelante, la  $\mathcal{C}$ -superficie y la  $\mathcal{C}$ -cara asociadas a un contacto básico  $h$  se indicarán por  $\mathcal{C}$ -superficie $_h$  y  $\mathcal{C}$ -cara $_h$  respectivamente.

De la definición 5.3 se desprenden los dos corolarios siguientes:

**Corolario 5.1** *La realización  $R$  de un estado  $E$  satisface:*

$$R \subset \left( \bigcap_{h \in CB} \mathcal{C}\text{-superficie}_h \right)$$

**Corolario 5.2** *Las realizaciones, para unas mismas desviaciones, de dos estados diferentes no tienen configuraciones comunes:  $R_i \cap R_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ .*

Dado que en presencia de incertidumbre las desviaciones no son predecibles, la realización de un estado no pueden ser prevista, sino sólo contemplada como posible entre todas aquellas compatibles con los límites de las desviaciones.

No obstante, existe un punto de partida para buscar la solución a la tarea, que es el modelo nominal de la misma, independientemente de que se incluya o no incertidumbre. Esto lleva a definir de forma particular las realizaciones de los estados primarios para los valores nominales de las variables.

**Definición 5.4** *Realización nominal  $R_n$  de un estado primario  $E_p$ , es la realización de  $E_p$  cuando no existen desviaciones.*

## 5.2.2 Conexidad de las realizaciones

**Definición 5.5** *Un conjunto de configuraciones  $Z$  es conexo si  $\forall \vec{c}_i, \vec{c}_j \in Z$  existe una transformación continua  $T : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $T(0) = \vec{c}_i$ ,  $T(1) = \vec{c}_j$  y  $T(k) \in Z$ ,  $\forall k \in [0, 1]$ .*

**Corolario 5.3** *Si  $R_i$  y  $R_j$  son realizaciones de dos estados  $E_i$  y  $E_j$  para unas mismas desviaciones tales que  $R_i \cup R_j$  es un conjunto de configuraciones conexo entonces*

$$\exists \vec{c} \in \left[ \bigcap_{h \in CB_i \cup CB_j} \mathcal{C}\text{-cara}_h \right] \mid \vec{c} \in R_i \cup R_j$$

Es decir, existe una configuración  $\vec{c}$  perteneciente sólo a una de las realizaciones ( $\vec{c} \in R_i$  ó  $\vec{c} \in R_j$ ) en la que se satisfacen los contactos de ambos estados.

### 5.2.3 Contigüidad de los estados

**Definición 5.6** *Dos estados de una tarea son contiguos si se puede pasar de uno a otro sin hacerlo por un tercero.*

**Proposición 5.1** *Dos estados de una tarea,  $E_i$  y  $E_j$ , son contiguos si y sólo si para las mismas desviaciones en la forma, tamaño y posición de los objetos se cumple que  $R_i \cup R_j$  es un conjunto de configuraciones conexo.*

**Demostración:**

La transición de  $E_i$  a  $E_j$  implica pasar de una configuración  $\vec{c}_i \in R_i$  a una  $\vec{c}_j \in R_j$ . Si los dos estados son contiguos, el camino seguido puede describirse mediante una transformación continua  $\mathcal{T} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  con  $\mathcal{T}(0) = \vec{c}_i$  y  $\mathcal{T}(1) = \vec{c}_j$ . La condición para que no se pase por otro estado es que  $\forall k \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{T}(k) \in R_i$  ó  $\mathcal{T}(k) \in R_j$ , es decir,  $\mathcal{T}(k) \in R_i \cup R_j$ . Luego de la definición 5.5 resulta que  $R_i \cup R_j$  es conexo.

La relación inversa se demuestra de forma similar. Si  $R_i \cup R_j$  es conexo, entonces de la definición 5.5 resulta que existe una transformación continua  $\mathcal{T} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  con  $\mathcal{T}(0) = \vec{c}_k$  y  $\mathcal{T}(1) = \vec{c}_l \quad \forall \vec{c}_k, \vec{c}_l \in R_i \cup R_j$ . Por tanto, eligiendo  $\vec{c}_k \in R_i$  y  $\vec{c}_l \in R_j$  se asegura la existencia de un camino desde  $\vec{c}_k$  a  $\vec{c}_l$  totalmente contenido en  $R_i \cup R_j$ . Por lo tanto se puede ir de  $E_i$  a  $E_j$  sin pasar por configuraciones pertenecientes a la realización de un tercer estado.  $\diamond$

### 5.2.4 Caso singular de varios objetos

Cuando existe más de un objeto estático en el entorno de trabajo, es posible que algún contacto básico no pueda realizarse nominalmente de forma continua, es decir, el conjunto de configuraciones en que se produce tal contacto básico no es conexo. La figura 5.5 ilustra uno de estos casos: aunque en las dos configuraciones mostradas se establece el mismo contacto básico, no se puede pasar de una a otra sin perderlo en alguna configuración intermedia. Lo mismo puede suceder para varios contactos básicos simultáneos, tal como se muestra en la figura 5.6.

De cara a la resolución de la tarea puede existir una diferencia significativa entre alcanzar las configuraciones de uno u otro de los subconjuntos resultantes de la partición de una realización no conexas en un número mínimo de subconjuntos de configuraciones conexas. Por este motivo conviene considerar de forma diferenciada cada uno de estos subconjuntos, para lo cual se

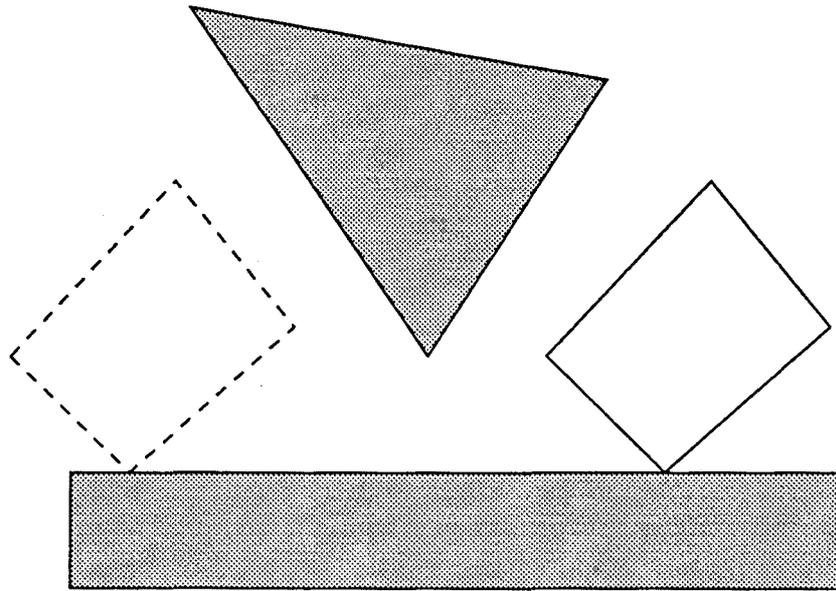


Figura 5.5: *Ejemplo de un mismo contacto básico en configuraciones no conexas.*

considerarán como realizaciones de estados diferentes. A cada uno de estos “estados” les son aplicables las definiciones 5.2, 5.3 y 5.4, es decir, son primarios, admiten diferentes realizaciones en presencia de incertidumbre y tienen una realización nominal. Por lo tanto, en adelante se considerará, sin pérdida de generalidad, que todos los estados primarios tienen realización nominal conexas.

De este modo, para el caso de tres grados de libertad, con Espacio de Configuraciones sin incertidumbre  $\mathcal{C}_3$ , resulta que cada  $\mathcal{C}$ -cara (sin sus  $\mathcal{C}$ -aristas), cada  $\mathcal{C}$ -arista (sin sus  $\mathcal{C}$ -vértices) y cada  $\mathcal{C}$ -vértice del espacio de contacto,  $Cc$ , conforma siempre la realización nominal de un estado primario. La obtención de las realizaciones  $Rn$  es inmediata a partir de  $Cc$ .

Con esta consideración, de la definición 5.3 se desprende el siguiente corolario:

**Corolario 5.4** *La realización  $R$  de un estado  $E$  con contactos básicos  $CB$  satisface:  $R \subset (\bigcap_{h \in CB} \mathcal{C}\text{-cara}_h)$ .*

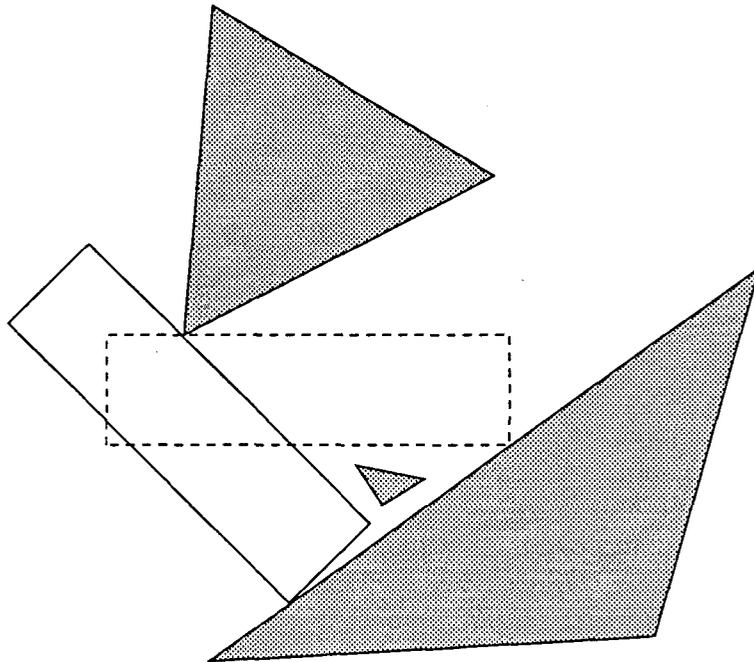


Figura 5.6: *Ejemplo de dos contactos básicos simultáneos alcanzados en configuraciones no conexas.*

## 5.3 Estados primarios en ausencia de incertidumbre

La planificación de la tarea se realizará en base a los estados primarios de la misma, por lo tanto se prestará especial atención a la contigüidad de sus realizaciones nominales y a las fuerzas de reacción que en ellas se pueden producir.

### 5.3.1 Grafo nominal de estados primarios

Debido a que durante la planificación de la tarea los valores reales de las desviaciones no son conocidos, en muchos casos no puede garantizarse la contigüidad de algunos estados, aunque ésta después exista. Sin embargo, las realizaciones nominales son conocidas, y por ende pueden determinarse con exactitud los estados primarios que son contiguos en ausencia de incertidumbre, lo que permite realizar una descripción nominal de la tarea.

Esta descripción nominal se lleva a cabo mediante un grafo, que denominaremos *grafo nominal*,  $G\text{-Nom}$ . En él, los nodos representan los estados primarios y los arcos unen aquéllos cuyas realizaciones nominales son contiguas.

$G\text{-Nom}$  es análogo al grafo que describe la topología de  $Cc$ , pudiendo, por lo tanto, obtenerse directamente durante el cálculo de  $Cc$  (Brost, 1989).

### 5.3.2 Fuerzas generalizadas de reacción

De las fuerzas generalizadas de reacción sólo se tienen en cuenta sus direcciones, por lo que para determinar el conjunto de fuerzas de reacción posibles en la realización nominal de un estado primario en  $\mathcal{C}_3$  basta con determinar el correspondiente conjunto de direcciones en  $\mathcal{F}_3$ . El procedimiento utilizado para ello depende del número y tipo de contactos básicos implicados en el estado primario de que se trate:

#### A) Estados con un único contacto básico.

Las direcciones que puede tomar la fuerza generalizada de reacción están contenidas en el ángulo sólido formado por la unión de los conos de fricción en cada punto de la  $C$ -cara correspondiente.

Este conjunto de direcciones puede obtenerse haciendo uso de la representación dual de las fuerzas generalizadas (sección 2.6). El procedimiento seguido depende del tipo de contacto de que se trate.

*Caso de contacto tipo 1.* Las direcciones posibles de la fuerza de reacción en el plano de trabajo son aquellas que pasan por el vértice de contacto de  $\mathcal{B}$  y están incluidas en el cono de fricción que con origen en este vértice tiene por eje a la normal al lado de contacto de  $\mathcal{A}$ . Para expresar las fuerzas en un sistema de referencia fijo en el objeto aprehendido  $\mathcal{B}$ , debe tenerse en cuenta que la dirección de la normal al lado de contacto de  $\mathcal{A}$  varía con la orientación de  $\mathcal{B}$ . Por lo tanto, el cono de fricción gira sobre su vértice barriendo el ángulo comprendido entre su límite superior (dado por  $\psi_{n_a} + \arctan \mu$ ) en la orientación mínima ( $\phi_m$ ) que puede alcanzar el objeto, y su límite inferior (dado por  $\psi_{n_a} - \arctan \mu$ ) en la orientación máxima ( $\phi_M$ ) que puede alcanzar el objeto. Así, las direcciones de las posibles fuerzas generalizadas de reacción, para cualquier orientación de  $\mathcal{B}$ , son las correspondientes a fuerzas que en el plano de trabajo pasan por el vértice de contacto y están contenidas en el ángulo barrido por el cono de fricción al variar la orientación de  $\mathcal{B}$ . En términos de la representación dual de fuerzas este procedimiento se resume en:

- DETERMINAR la recta dual  $r$  del vértice de contacto
- DETERMINAR el punto  $P_M \in r$ , más el signo correspondiente, dual de las fuerzas con dirección:  $\phi_M - \psi_{n_a} + \arctan \mu$
- DETERMINAR el punto  $P_m \in r$ , más el signo correspondiente, dual de las fuerzas con dirección  $\phi_m - \psi_{n_a} - \arctan \mu$
- DETERMINAR la porción de la recta  $r$  que definen los puntos  $P_M$  y  $P_m$  de acuerdo a sus correspondientes signos.

La figura 5.7 muestra la representación del cono de fricción para las orientaciones extremas y del conjunto de direcciones de todas las fuerzas de reacción posibles para un contacto tipo 1 establecido por el vértice  $b$  de  $\mathcal{B}$ .

*Caso de contacto tipo 2.* Se comienza por determinar el segmento  $s$  del lado del objeto aprehendido que puede entrar en contacto con el vértice del objeto estático. A continuación se determinan dos conjuntos de direcciones de fuerzas generalizada correspondientes a fuerzas en el plano de trabajo que, para el primer conjunto, sus rectas de acción intersecten a  $s$ , y para el segundo, que sus direcciones estén incluidas entre las del cono de fricción. La intersección de estos dos conjuntos de direcciones en  $\mathcal{F}_3$  da por resultado el conjunto de direcciones buscado. En términos de la representación dual de fuerzas este procedimiento puede describirse:

- DETERMINAR el segmento  $s$  del lado de contacto.
- DETERMINAR el haz de rectas limitado por las rectas  $r_{b1}$  y  $r_{b2}$  duales respectivamente de los puntos extremos de  $s$ .
- DETERMINAR el haz de rectas limitado por las rectas  $r_{ci}$  y  $r_{cs}$  duales respectivamente de fuerzas  $\vec{f}$  con direcciones  $\psi_{n_b} + \pi \pm \arctan \mu$  (límites del cono de fricción  $cs$  y  $ci$  respectivamente).
- DETERMINAR la intersección de los dos haces de rectas obtenidos en los dos pasos anteriores.

La figura 5.8 muestra el conjunto de direcciones de todas las fuerzas de reacción posibles para un contacto tipo 2 en el que el segmento  $s$  abarca todo el lado de contacto.

#### B) Estados con más de un contacto básico.

Las direcciones que puede tomar la fuerza de reacción están contenidas en

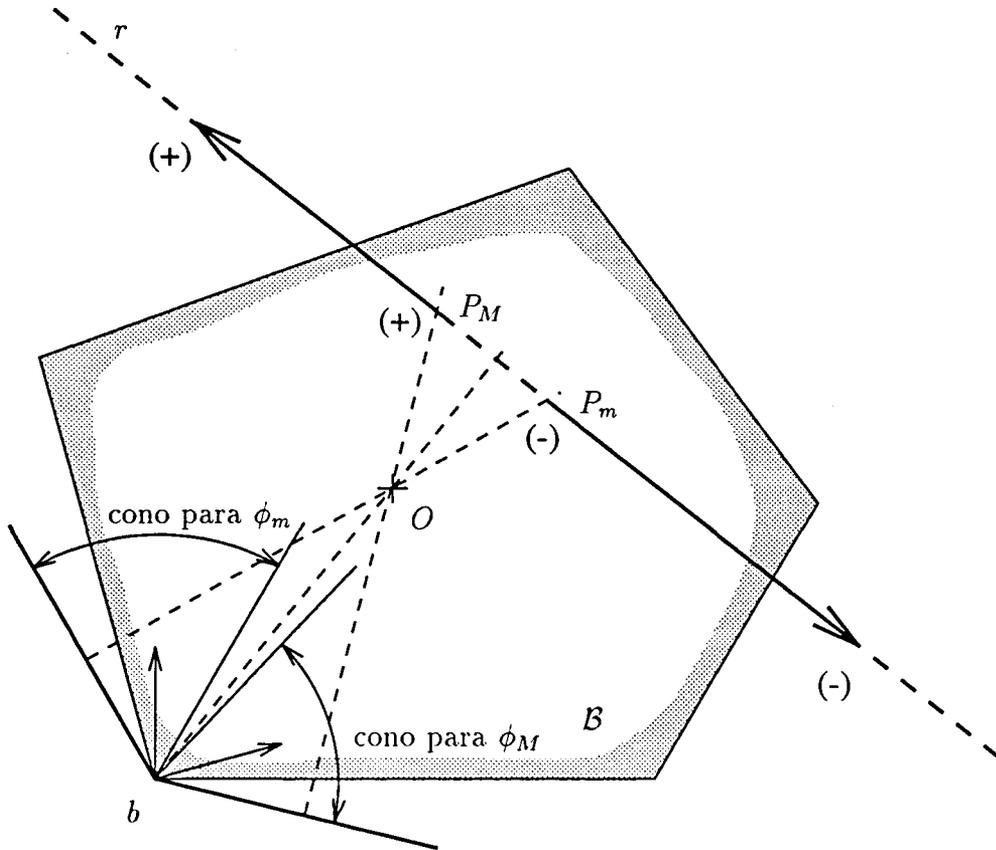


Figura 5.7: Conjunto de direcciones de fuerzas generalizadas de reacción posibles en un contacto de tipo 1.

el ángulo sólido determinado por la unión de los siguientes conjuntos de direcciones:

1. Las direcciones contenidas en los conos de fricción calculados en cada configuración de la realización nominal del estado (es decir, en los puntos de las  $\mathcal{C}$ -aristas o  $\mathcal{C}$ -vértices según corresponda) para las  $\mathcal{C}$ -caras asociadas a cada contacto básico involucrado.
2. Las direcciones obtenidas como combinación lineal con coeficientes positivos de los conos de fricción calculados en el paso anterior.

Estos conjuntos de direcciones pueden obtenerse de forma simple para cada orientación del objeto, siendo su representación dual una región limitada por

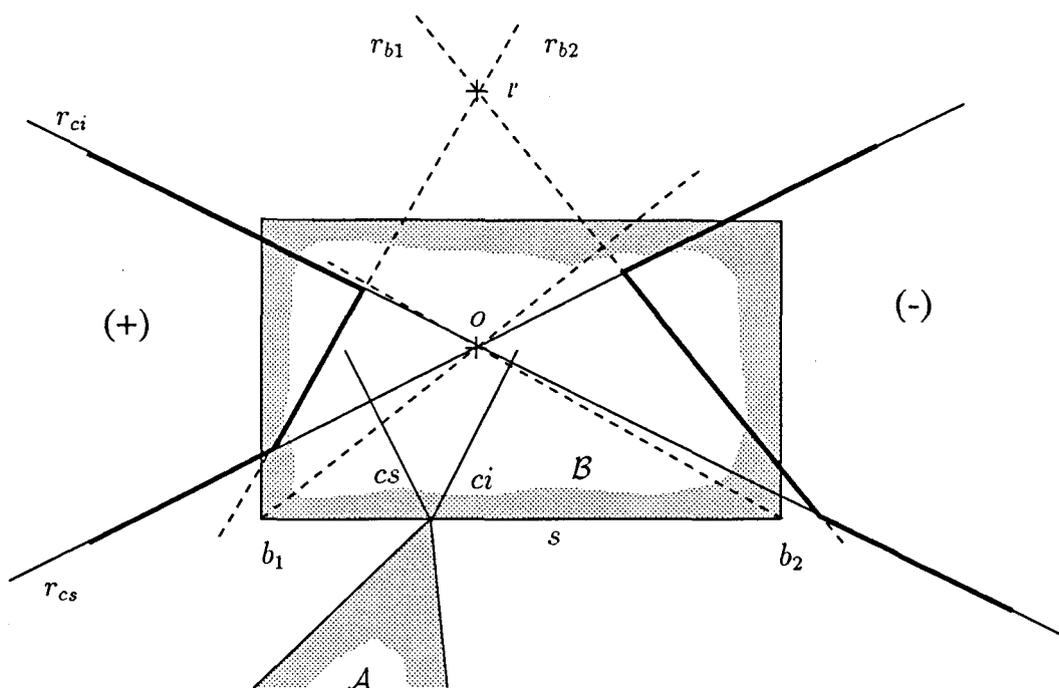


Figura 5.8: Conjunto de direcciones de fuerzas generalizadas de reacción posibles en un contacto de tipo 2.

segmentos rectilíneos (figura 5.9). Al variar la orientación del objeto, la región barrida estará en general limitada además por curvas de segundo orden.

## 5.4 Realizaciones de los estados

Las configuraciones en que se produce uno u otro estado están unívocamente definidas para el modelo nominal de la tarea. Sin embargo, en el desarrollo real de la misma, estas configuraciones no son predecibles con exactitud debido a la incertidumbre. Puede suceder que algún estado primario no sea físicamente alcanzable, es decir, que su realización sea el conjunto vacío para unas desviaciones determinadas, así como también es posible que se alcancen estados complementarios. Ambos casos pueden alterar las condiciones de contigüidad entre estados primarios establecidas a partir de sus realizaciones nominales.

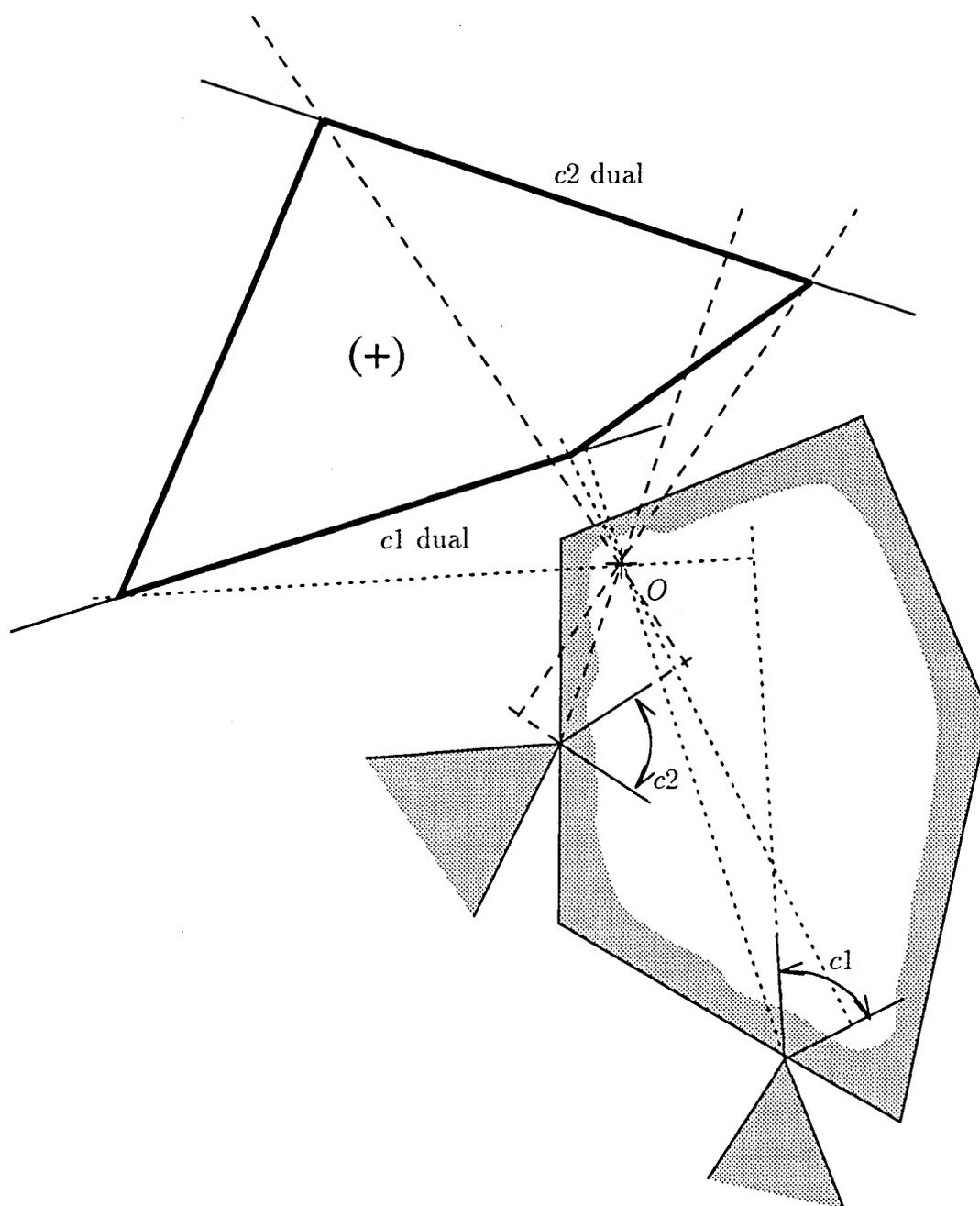


Figura 5.9: Conjunto de direcciones de fuerzas generalizadas de reacción en el caso de dos contactos básicos, para una determinada orientación del objeto aprehendido.

Se hace necesario por tanto, estudiar las realizaciones posibles de los estados durante el desarrollo real de la tarea, en particular, las de los estados primarios usados como base para su resolución. Para ello se tiene en cuenta la incertidumbre en el tamaño y forma de todos los objetos y la incertidumbre en la posición de los objetos estáticos, no así la incertidumbre en las observaciones que se realizarán en-línea, como es el caso de la configuración del objeto aprehendido.

### 5.4.1 Dominios de realización

**Definición 5.7** Dominio de realización  $DR$  de un estado  $E$ , es el conjunto de configuraciones formado por la reunión de las realizaciones  $R$  de  $E$  para todos los valores posibles de las desviaciones.

En  $\mathcal{C}_3$ , para determinar los dominios de realización de los estados primarios en presencia de incertidumbre se hace uso de los resultados obtenidos en el capítulo 4, donde se estudió la influencia de la incertidumbre en los contactos básicos de tipo 1 y 2, y se obtuvo la incertidumbre  $CU$  para cada caso.

La incertidumbre  $CU$  calculada considerando nulas las desviaciones en la observación de la posición y orientación del objeto móvil, es decir  $\delta_{p_r} = 0$  y  $\delta_{\phi_r} = 0$  (y por lo tanto  $\epsilon_{p_r} = 0$  y  $\epsilon_{\phi_r} = 0$  en las expresiones correspondientes), se denominará en adelante  $CU_r$ , y su particularización para un determinado contacto básico  $h$  se representará  $CU_{r_h}$ .

**Proposición 5.2** En presencia de incertidumbre, el dominio de realización  $DR$  de un estado  $E$  satisface  $DR \subseteq (\bigcap_{h \in CB} CU_{r_h})$ .

**Demostración:**

Para unas desviaciones cualesquiera en la posición, forma y tamaño de los objetos,  $\mathcal{C}\text{-cara}_h \subset CU_{r_h}$  y, del corolario 5.4,  $R \subset (\bigcap_{h \in CB} \mathcal{C}\text{-cara}_h)$ , luego

$$R \subset \left( \bigcap_{h \in CB} CU_{r_h} \right)$$

por tanto, considerando todas las desviaciones posibles resulta

$$DR \subseteq \left( \bigcap_{h \in CB} CU_{r_h} \right)$$

◇

**Proposición 5.3** *Si dos estados  $E_i$  y  $E_j$  son contiguos, entonces*

$$\text{Ord}(E_i) \neq \text{Ord}(E_j)$$

**Demostración:**

Sean  $R_i$  y  $R_j$  realizaciones de  $E_i$  y  $E_j$  respectivamente para unas mismas desviaciones dadas. De acuerdo con el corolario 5.4,  $R_i \subset (\bigcap_{h \in CB_i} \mathcal{C}\text{-cara}_h)$  y  $R_j \subset (\bigcap_{k \in CB_j} \mathcal{C}\text{-cara}_k)$ , y de la proposición 5.1  $R_i \cup R_j$  es un conjunto de configuraciones conexo.

Entonces, del corolario 5.3:

$$\exists \vec{c} \in \left[ \bigcap_{h \in CB_i \cup CB_j} \mathcal{C}\text{-cara}_h \right] \mid \vec{c} \in R_i \cup R_j$$

Dado que  $R_i \cap R_j = \emptyset$  (corolario 5.2), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\vec{c} \in R_i$ , y dado que en  $\vec{c}$  se satisfacen todos los contactos básicos de  $CB_i$  y de  $CB_j$ , se cumplirá:

$$CB_i \supset CB_j$$

y por lo tanto

$$CBnr_i \supset CB_j = CBnr_j \cup CBr_j$$

Dado que  $CB_i$  es un conjunto de contactos básicos no redundantes, su inclusión en  $CB_j$  implica que existe  $CBnr_i$  tal que

$$CBnr_i \supseteq CBnr_j$$

Si se considera que  $CBnr_i = CBnr_j$  entonces  $E_i$  y  $E_j$  tienen asociadas las mismas restricciones y por ende  $R_i = R_j$ , absurdo! Luego sólo puede ser

$$CBnr_i \supset CBnr_j$$

de donde se desprende que  $\text{Ord}(E_i) \neq \text{Ord}(E_j)$ . ◇

**Corolario 5.5** *Si en un problema con  $n$  grados de libertad existe un estado  $Ep_i$  con contactos básicos no redundantes  $CBnr_i$  y  $\text{Ord}(Ep_i) < n$  entonces existe un estado  $Ep_j$  contiguo a  $Ep_i$  con contactos básicos no redundantes  $CBnr_j$  que cumplen  $CBnr_i \subset CBnr_j$ .*

**Proposición 5.4** Si  $E_i$  y  $E_j$  son dos estados contiguos con  $Ord(E_i) > Ord(E_j)$ , entonces  $\overset{\circ}{DR}_i \subset DR_j$

**Demostración:**

Sean  $R_i$  y  $R_j$  realizaciones de  $E_i$  y  $E_j$  respectivamente para unas mismas desviaciones dadas. De la proposición 5.1  $R_i \cup R_j$  es conexo, y del corolario 5.2  $R_i \cap R_j = \emptyset$ . Luego, dado que  $Ord(E_i) > Ord(E_j)$  resulta  $R_i \subset \partial R_j$ .

Sean ahora:

$$R_j' = \partial R_j \cup \overset{\circ}{R}_j \text{ y}$$

$DR_j'$  el conjunto de configuraciones formado por la unión de todos los conjuntos como el  $R_j'$  para todas las desviaciones posibles

se cumple que  $R_i \subset R_j'$  ;  $DR_i \subset DR_j'$  y  $\overset{\circ}{DR}_i \subset \overset{\circ}{DR}_j'$

Ahora bien,  $\overset{\circ}{DR}_j' = \overset{\circ}{DR}_j$ , luego

$$\overset{\circ}{DR}_i \subset \overset{\circ}{DR}_j$$

y dado que  $\overset{\circ}{DR}_j \subset DR_j$  resulta

$$\overset{\circ}{DR}_i \subset DR_j$$

◊

### 5.4.2 Fuerzas de reacción en los dominios de realización

Las normales a las  $\mathcal{C}$ -caras pueden tener diferentes orientaciones debido a la incertidumbre, por lo que las posibles fuerzas generalizadas de reacción, que dependen de ellas, pueden tener también diferentes direcciones. Los conjuntos que agrupan todas estas posibles direcciones para cada dominio  $DR$ , denominados  $DGr$ , son expansiones de aquellos obtenidos para las realizaciones nominales (apartado 5.3.2). De acuerdo con el número de contactos básicos asociados a un estado, el correspondiente conjunto  $DGr$  queda determinado por las direcciones indicadas a continuación:

A) *Estado con un único contacto básico:*  $DGr$  está formado por las direcciones contenidas en el ángulo sólido formado por la reunión de los conos de fricción calculados en las configuraciones  $\vec{c} \in DR$  para cada realización posible del estado.

B) *Estado con más de un contacto básico:*  $DGr$  está formado por las direcciones determinadas por los conos de fricción de cada contacto básico y por combinaciones lineales de las mismas, estando los conos calculados en las configuraciones  $\vec{c} \in DR$  para cada realización posible del estado.

Para tres grados de libertad,  $DGr$  puede determinarse en ambos casos haciendo uso de la representación dual de las fuerzas generalizadas.

### Determinación de $DGr$ para un contacto básico utilizando la representación dual de fuerzas

Los puntos que representan las fuerzas generalizadas de reacción que pueden tener lugar en un contacto básico en presencia de incertidumbre se obtienen como intersección de dos conjuntos de puntos duales, correspondientes a las rectas de acción de:

- las fuerzas cuyas rectas de acción intersectan la zona geométrica donde puede producirse el contacto (*restricciones en el punto de aplicación*)
- las fuerzas cuyas rectas de acción tienen direcciones dentro del cono de fricción correspondiente (*restricciones en la dirección*).

Para una orientación dada del objeto aprehendido, los conjuntos de direcciones buscados dejan de estar, como en ausencia de incertidumbre, representados por un segmento (contactos básicos tipo 1, figura 5.7) o delimitados por un polígono (contactos básicos tipo 2, figura 5.8) (apartado 5.3.2), para pasar a estar delimitados por una combinación de líneas rectas y curvas de segundo orden (cónicas), tanto para contactos básicos de tipo 1 como de tipo 2 en presencia de incertidumbre. Como ejemplo, en la figura 5.10 se muestra el conjunto de posibles direcciones de la fuerza de reacción en un contacto de tipo 1 para una configuración nominal dada del objeto  $\mathcal{B}$ .

Se describe a continuación cómo obtener estos conjuntos para contactos básicos de tipo 1 y 2 haciendo uso de los resultados del apartado 2.6.2.

#### a) Contacto básico tipo 1

*Restricciones en el punto de aplicación.* La zona geométrica donde puede producirse un contacto básico de tipo 1 está dada por la incertidumbre  $Uv$  del vértice de contacto (apartado 4.1.4) considerando  $\delta_{p_r} = 0$  y  $\delta_{\phi_r} = 0$ . Las fuerzas cuyas rectas de acción intersectan a  $Uv$  se determinan mediante la unión de los siguientes conjuntos de fuerzas:

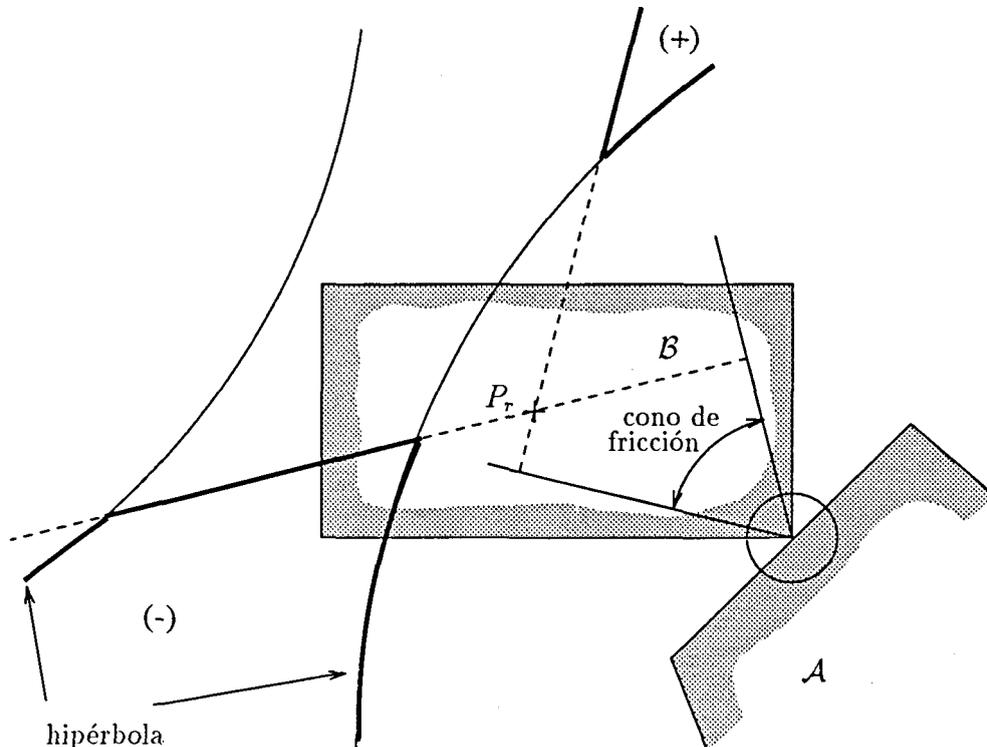


Figura 5.10: Conjunto de direcciones que puede tener la fuerza generalizada de reacción, en presencia de incertidumbre, en un contacto básico de tipo 1 para una determinada configuración nominal.

- con rectas de acción que cortan a las circunferencias  $Cg_M$  y  $Cg_m$  (subapartado 2.6.2.5)
- con rectas de acción que cortan al arco de la circunferencia  $Cr_M$  (subapartado 2.6.2.6)

*Restricciones en la dirección.* Las direcciones que puede tener la fuerza de reacción están dadas por el cono de fricción centrado en la normal al lado de contacto, considerando las desviaciones en la dirección de la normal (apartado 3.2.1), para todas las orientaciones posibles de este lado respecto al objeto manipulado por el robot. Se determinan según se describió en el subapartado 2.6.2.2.

#### b) Contacto básico tipo 2

*Restricciones en el punto de aplicación.* La zona geométrica donde puede

producirse un contacto básico de tipo 2 está dada por la incertidumbre  $Ul$  del lado de contacto (apartado 4.1.5) considerando  $\delta_{pr} = 0$  y  $\delta_{\phi_r} = 0$ . Las fuerzas con rectas de acción que intersectan a  $Ul$  se determinan mediante la unión de los siguientes conjuntos de fuerzas:

- con rectas de acción que cortan a las circunferencias  $Cg_{M1}$ ,  $Cg_{m1}$ ,  $Cg_{M2}$  y  $Cg_{m2}$  (subapartado 2.6.2.5)
- con rectas de acción que cortan a los arcos de las circunferencia  $Cr_{M1}$  y  $Cr_{M2}$  (subapartado 2.6.2.6)
- con rectas de acción que cortan a los segmentos de recta que delimitan  $Ul$  (subapartado 2.6.2.4)

*Restricciones en la dirección.* Las direcciones que puede tener la fuerza de reacción están dadas por el cono de fricción centrado en la normal al lado de contacto, considerando las desviaciones en la dirección de esta normal (apartado 3.2.1). Se determinan según se describió en el subapartado 2.6.2.2.

### 5.4.3 Reducción de los dominios $DR$

Los dominios  $DR$  de estados con más de un contacto básico han sido obtenidos intersectando la incertidumbre  $CUr$  de cada contacto básico. Aunque en este trabajo no se profundiza sobre ello, en  $\mathcal{C}_3$ , podría plantearse una reducción de  $DR$  si se impone la condición de que coincida con la intersección de las incertidumbres  $CUv$  de cada contacto básico del estado calculadas en las configuraciones de la realización  $Rn$  del estado.

La figura 5.11 ilustra esta reducción de incertidumbre, en ella se muestra, para una determinada orientación del objeto manipulado por el robot, la incertidumbre  $CUI$  para dos contactos básicos y las incertidumbres  $CUv$  de ambos contactos para la posición nominal en que los dos son posibles para la orientación dada. Si para cada orientación del objeto aprehendido se realiza esta reducción de incertidumbre, el dominio  $DR$  resulta más restrictivo.

Esta posible reducción de incertidumbre no sería aplicable cuando la realización  $Rn$  del estado es un segmento de recta con  $q$  constante en  $\mathcal{C}_3$ .

Con los dominios  $DR$  de estados con más de un contacto básico así obtenidos y recordando la asunción de que los objetos con que se trabaja son poliédricos, podría realizarse ahora una reducción de los dominios  $DR$  de estados con un único contacto básico. La forma de hacerlo es reduciendo, para cada

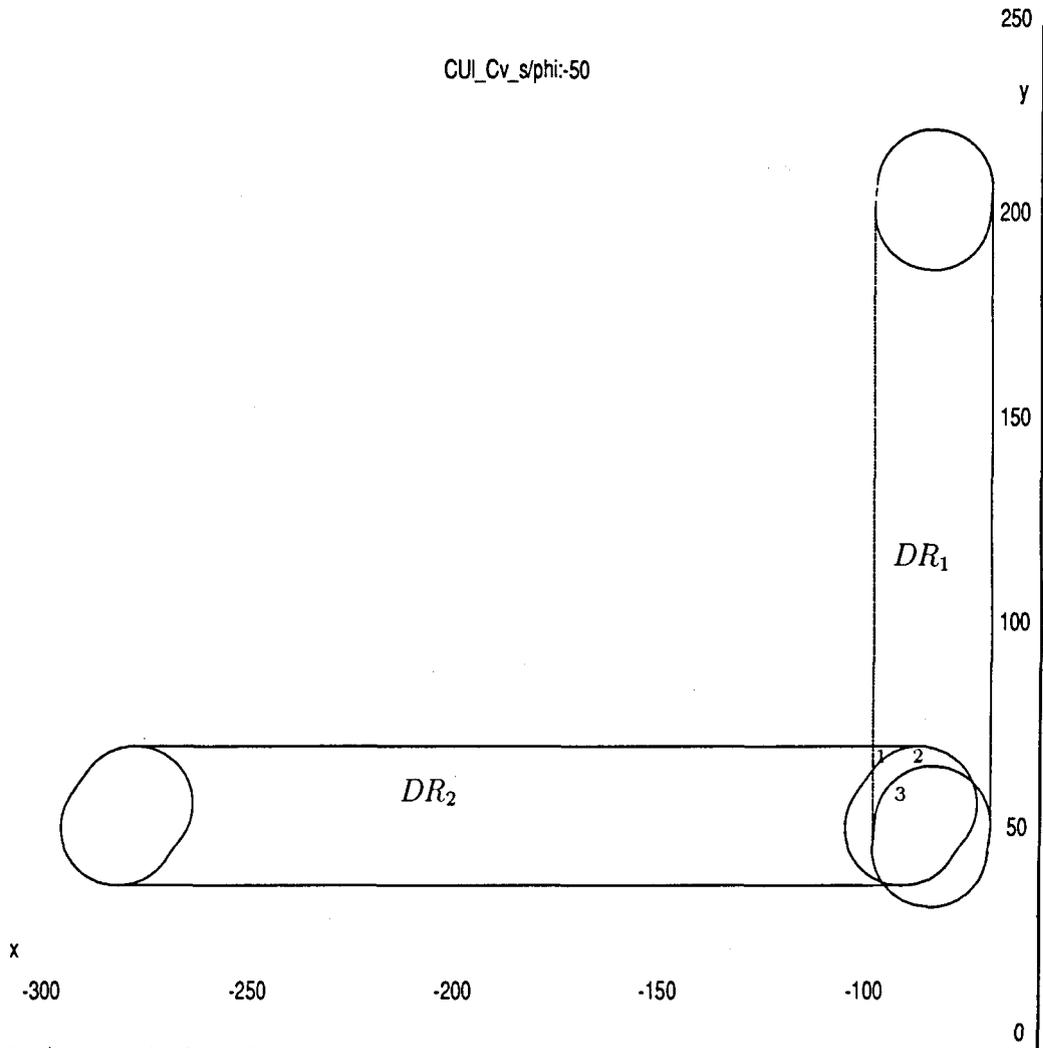


Figura 5.11: Reducción de incertidumbre en dominios  $DR$  de estados con más de un contacto básico.

La intersección de los dos dominios  $DR_1$  y  $DR_2$  da por resultado, para  $\phi_r = -50^\circ$ , la unión de las zonas marcadas (1),(2) y (3), sin embargo el dominio  $DR_{1,2}$  debería restringirse solamente a la zona (3).

orientación del objeto aprehendido, la incertidumbre  $CU$  del contacto básico correspondiente a la zona comprendida entre dos tangentes a los dominios  $DR$  de los dos estados contiguos para la orientación dada, tal como se ilustra en la figura 5.12.

## 5.5 Observación de los estados

Como se vió en la sección anterior, las configuraciones y las fuerzas de reacción que pueden tener lugar en un estado  $E$  deben pertenecer a  $DR$  y  $DGr$  respectivamente. Sin embargo, durante la ejecución de la tarea, sus observaciones, mediante los correspondientes sensores, pueden estar fuera de estos conjuntos debido a la incertidumbre existente en las mediciones. Por lo tanto,  $DR$  y  $DGr$  deben combinarse con los modelos de incertidumbre de los sensores para determinar los conjuntos de configuraciones y de fuerzas generalizadas de reacción que pueden ser observadas en cada estado  $E$ .

### 5.5.1 Observación de la configuración

**Definición 5.8** *El dominio de observación de configuración  $DC$  de un estado es el conjunto de las configuraciones que pueden ser indicadas por los sensores correspondientes cuando tiene lugar dicho estado.*

En  $\mathcal{C}_3$ , el dominio  $DC$  de un estado primario en presencia de incertidumbre se delimita mediante las incertidumbres  $CU$  correspondientes (capítulo 4) sin suprimir ninguna fuente de incertidumbre. La particularización de  $CU$  para un determinado contacto básico  $h$  se representará  $CU_h$ .

**Proposición 5.5** *En presencia de incertidumbre, el dominio de observación  $DC$  de un estado primario  $E_p$  satisface  $DC \subseteq (\bigcap_{h \in CB} CU_h)$*

**Demostración:**

Del corolario 5.4,  $R \subset (\bigcap_{h \in CB} \mathcal{C}\text{-cara}_h)$

Considerando todas las fuentes de incertidumbre y representando como  $\vec{c}_o$  la configuración observada correspondiente a la configuración real  $\vec{c}$  se tiene:

$$\vec{c} \in R \Rightarrow \vec{c} \in \left( \bigcap_{h \in CB} \mathcal{C}\text{-cara}_h \right) \Rightarrow \vec{c}_o \in \left( \bigcap_{h \in CB} CU_h \right) \Rightarrow DC \subseteq \left( \bigcap_{h \in CB} CU_h \right)$$

◇

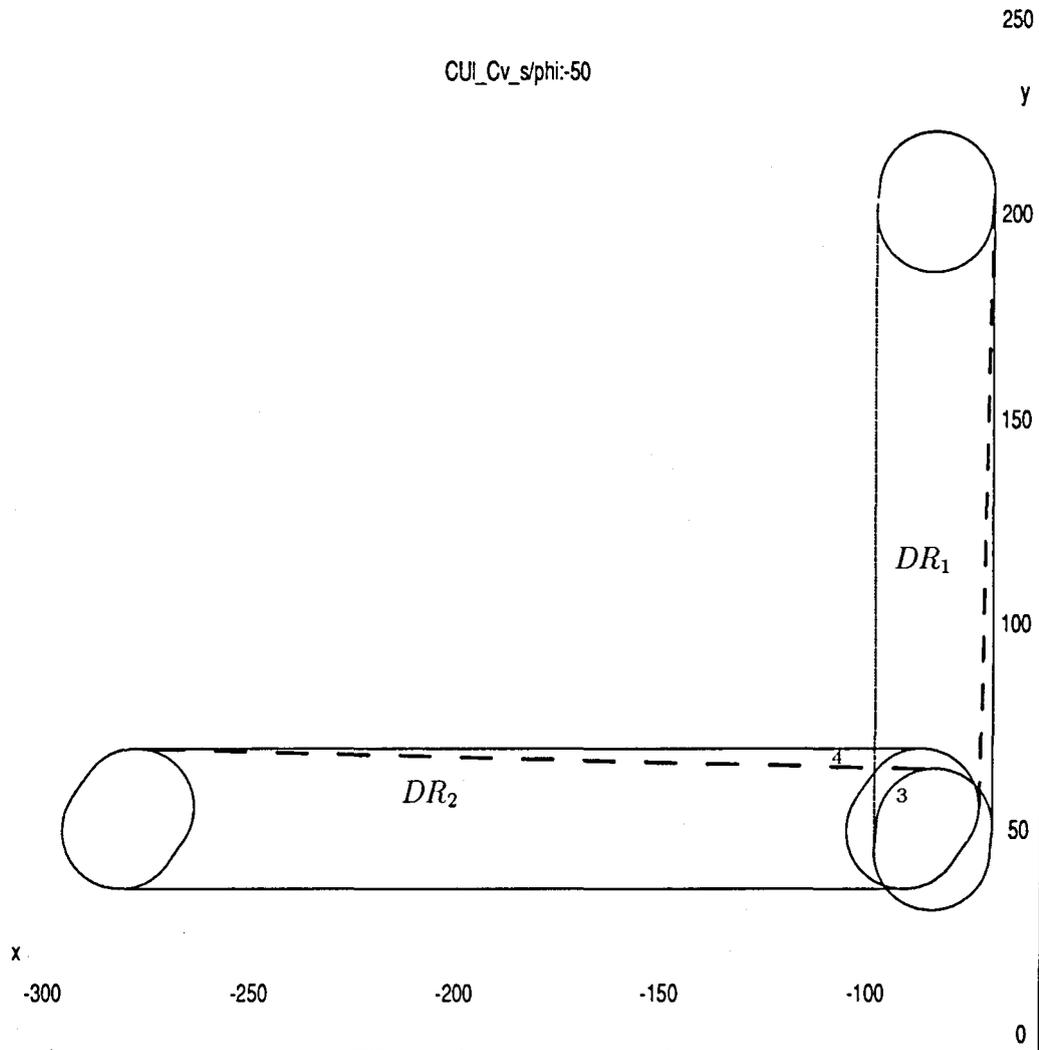


Figura 5.12: Reducción de incertidumbre en dominios  $DR$  de estados con un único contacto básico.

Una vez establecido el dominio  $DR_{1,2}$  como la zona etiquetada (3) y considerando que los lados de los objetos son rectilíneos, el dominio  $DR_2$  puede reducirse eliminando la zona (4). De igual modo puede reducirse  $DR_1$ .

**Proposición 5.6** *Si  $E_i$  y  $E_j$  son dos estados contiguos con  $\text{Ord}(E_i) > \text{Ord}(E_j)$  entonces  $\overset{\circ}{DC}_i \subset DC_j$*

**Demostración:**

De la proposición 5.4 resulta  $\overset{\circ}{DR}_i \subset DR_j$ .

Sea  $B(\vec{c})$  la incertidumbre en la observación de una configuración  $\vec{c}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bigcup_{\forall \vec{c} \in \overset{\circ}{DR}_i} B(\vec{c}) = \overset{\circ}{DC}_i \\ \bigcup_{\forall \vec{c} \in DR_j} B(\vec{c}) = DC_j \end{array} \right\} \Rightarrow \text{si } \overset{\circ}{DR}_i \subset DR_j \text{ resulta } \overset{\circ}{DC}_i \subset DC_j$$

◇

### 5.5.2 Observación de la fuerza generalizada de reacción

**Definición 5.9** *El dominio de observación de fuerza generalizada  $DG$  de un estado es el conjunto de fuerzas generalizadas de reacción que pueden ser indicadas por los sensores correspondientes cuando tiene lugar dicho estado.*

A diferencia de los conjuntos de fuerzas generalizadas de reacción descritos anteriormente, el dominio de fuerza  $DG$  de un estado no puede caracterizarse mediante un conjunto de direcciones. Esto es debido a que en el modelo de incertidumbre del sensor de fuerza y por la incertidumbre  $U_g$  es función combinada de la dirección y del módulo de la fuerza (sección 4.2).

Un efecto inmediato del citado modelo es que en el caso de una fuerza generalizada con módulo suficientemente pequeño, la incertidumbre en su medición permitiría observar una fuerza con dirección prácticamente opuesta a la real, lo cual carece de cualquier sentido práctico. Para evitar este efecto, se establece un umbral mínimo en el módulo de la fuerza generalizada observada por debajo del cual se considerará nula.

Este umbral mínimo cumple también otro objetivo: tener en cuenta únicamente los contactos claros que hacen posible un correcto análisis estático, ya que desde un punto de vista práctico conviene ignorar situaciones en las que el objeto aprehendido se mueve rozando muy ligeramente algún obstáculo.

El umbral de fuerza en  $\mathcal{F}_3$  está definido por las condiciones:

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2} > H_f \quad (5.1)$$

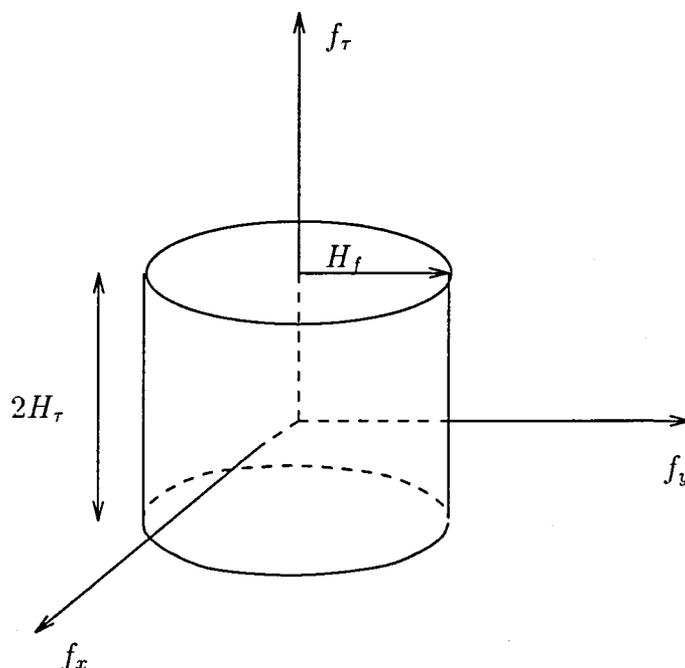


Figura 5.13: Umbral mínimo en la medición de fuerzas generalizadas.

$$f_\tau > H_\tau \quad (5.2)$$

donde  $H_f$  y  $H_\tau$  se determinan para cada sistema concreto en función la resolución de los sensores, los valores de fuerzas permitidos, las velocidades máximas de movimiento, etc.

La condición geométrica impuesta por este umbral para que las fuerzas medidas sean consideradas como significativas, es que el vector que las representa en  $\mathcal{F}_3$  tenga su extremo fuera del cilindro de radio  $H_f$  y altura  $2H_\tau$  centrado en el origen y cuyo eje coincide con el eje coordenado  $f_\tau$ , que se ilustra en la figura 5.13.

Al margen de este umbral, el dominio  $DG$  de un estado  $E$  se obtiene como resultado de añadir la incertidumbre  $U_g$  a las fuerzas  $\vec{g}$  con direcciones en el conjunto  $DGr$  correspondiente. A partir de la representación de  $DGr$  como una región del plano  $f_\tau = 1$  y de la forma de cubo de  $U_g$  en  $\mathcal{F}_3$  (sección 4.2), esta operación puede realizarse mediante los dos pasos siguientes.

En el primer paso se determina la superficie reglada  $M_R$  resultante de unir mediante rectas el origen de  $\mathcal{F}_3$  con los contornos de  $DGr$  en el plano  $f_\tau = 1$ .

El ángulo sólido que define  $M_R$  en  $\mathcal{F}_3$  contiene todas las fuerzas de reacción posibles en el dominio  $DR$  de  $E$ .

El segundo paso consiste en ampliar este conjunto de fuerzas añadiendo a cada una de ellas (es decir, a cada punto dentro del ángulo sólido definido por  $M_R$ ), la incertidumbre en la medición de las fuerzas  $U_g$ ; el conjunto de fuerzas resultante es  $DG$  y también está limitado por una superficie reglada,  $M$ . Debido a la forma cúbica de  $U_g$ ,  $M$  puede obtenerse a partir de  $M_R$  mediante una transformación que cambie cada punto  $P \in M_R$  por un vértice del cubo de incertidumbre centrado en  $P$ , salvo cuando la normal a  $M_R$  en  $P$  sea paralela a un eje o a un plano coordenado en cuyo caso el cambio será por una cara o una arista del cubo, respectivamente.

Este procedimiento queda plasmado en el siguiente algoritmo:

Sean:

$$P \in M_R$$

$\hat{e}$ : el versor según la normal a  $M_R$  en  $P$  exterior a  $DGr$

$\hat{g}_i$ : el versor según el eje coordenado  $i$  de  $\mathcal{F}_3$

$U_g(P)$ : el cubo de incertidumbre de fuerza en  $P$

$U_g(0)$ : el cubo de incertidumbre de fuerza en el origen

DETERMINAR la superficie reglada  $M_R$  resultante de unir mediante rectas el origen de  $\mathcal{F}_3$  con los contornos de  $DGr$  en el plano  $f_\tau = 1$

DETERMINAR la superficie  $M$  que delimita a  $DG$  mediante la transformación  $T : M_R \rightarrow M$  definida  $\forall P \in M_R$  de la siguiente forma:

PARA  $i = 1, 2, 3$  (para cada eje coordenado)

SI  $\langle \hat{e} \times \hat{g}_i \rangle = 0$  ( $\hat{e}$  paralelo a un eje coordenado)

ENTONCES  $T(P)$  es la cara de  $U_g(P)$  hacia la que apunta  $\hat{e}$

SINO SI  $\langle \hat{e} \cdot \hat{g}_i \rangle = 0$  ( $\hat{e}$  paralelo a un plano coordenado)

ENTONCES  $T(P)$  es la arista de  $U_g(P)$  homóloga a la arista de  $U_g(0)$  que atraviesa los dos octantes entre los que está  $\hat{e}$ .

SINO  $T(P)$  es el vértice de  $U_g(P)$  que está en el mismo octante que  $\hat{e}$ .

La transformación  $T$  hace que  $M$  esté formada por regiones de superficies regladas. La figura 5.14 muestra esta transformación para el caso general de que  $\hat{e}$  esté en un único octante, es decir, no sea paralelo a ningún plano coordenado.



En el espacio físico, determinar si dos estados tienen configuraciones confundibles equivale a determinar si cada par de zonas de incertidumbre  $Uv$  y  $Ul$ , de los vértices y aristas de cada contacto básico asociado a uno u otro estado, tienen simultáneamente intersección no nula para todas las orientaciones posibles del objeto aprehendido. Esta operación es equivalente a intersectar los dominios  $DC$  de ambos estados.

Evidentemente, dos estados contiguos cualesquiera tienen sus realizaciones nominales suficientemente cercanas como para que sus dominios  $DC$  no sean disjuntos, lo que en principio implica siempre un conjunto de configuraciones en que son confundibles.

Para que los dominios de observación de fuerza  $DG$  de dos estados primarios diferentes no sean disjuntos sus correspondientes conjuntos de contactos básicos asociados deben ser capaces de generar sendas fuerzas generalizadas de reacción con igual dirección en  $\mathcal{F}_3$ .

En el espacio físico esto equivale a decir que las fuerza de reacción resultantes tienen la misma recta de acción. En efecto, la proporcionalidad de las componentes de fuerza,  $f_x$  y  $f_y$ , implica que sus rectas de acción deben ser paralelas y que las fuerzas tienen el mismo sentido, y la correspondiente proporcionalidad del par,  $f_\tau$ , implica que ambas rectas deben estar a la misma distancia del punto de referencia del sensor y del mismo lado.

En la figura 5.15 se muestran algunos ejemplos de estados confundibles, cada uno de ellos con un único contacto básico asociado. Para ilustrar que los estados tienen configuraciones posibles comunes, los objetos se representan para unas desviaciones dadas que hacen posibles ambos contactos simultáneamente. En todos los casos, dado que las fuerzas de reacción pasan por los vértices de contacto, la condición para que éstas puedan ser confundibles es que la recta que une ambos vértices pase por los conos de fricción de cada contacto; en esta condición geométrica debe tenerse en cuenta la incertidumbre de posición.

## 5.6 Operadores de cambio de estado

Para llevar a cabo la tarea es necesario, una vez estimado el estado actual en que ésta se encuentra, seleccionar un movimiento del manipulador que tienda a desplazar el objeto aprehendido hacia el estado final deseado. Esta selección puede realizarse a partir de los conjuntos de direcciones que permiten la transición entre estados contiguos.

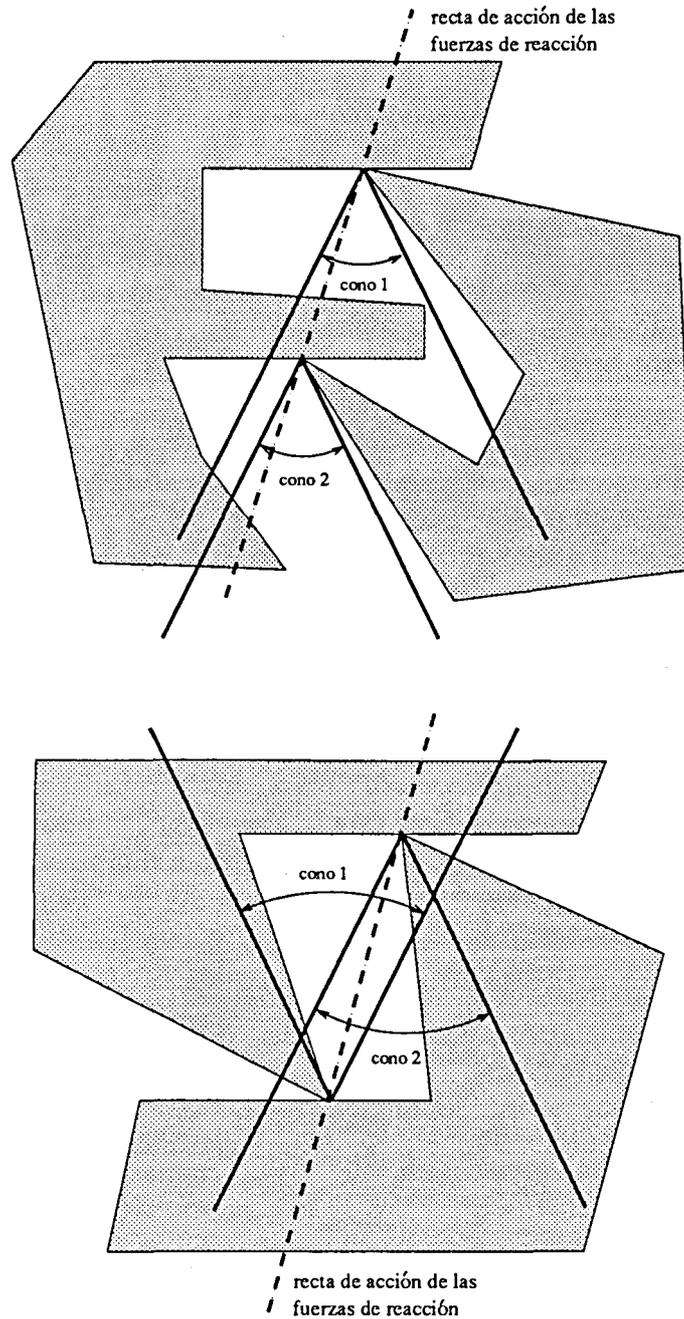


Figura 5.15: Estados confundibles con un único contacto básico asociado. Los contactos básicos de cada estado son: (a) ambos de tipo 1 o ambos de tipo 2 según se considere uno u otro objeto como aprehendido, (b) uno de tipo 1 y otro de tipo 2.

### 5.6.1 Definición de operador

**Definición 5.10** *Un operador  $T$  es una consigna del sistema de control del robot para producir un movimiento del manipulador equivalente a un desplazamiento rectilíneo en  $C_3$ .*

Debe hacerse notar que esta definición no impone restricción alguna sobre la velocidad con que se realice el movimiento, por lo tanto un operador  $T$  está caracterizado en  $C_3$  solamente por una dirección, que será representada mediante el versor  $\hat{t}$ .

Los operadores  $T$  pueden producir tres tipos diferentes de efecto:

- A La transición de un estado a otro.
- B La permanencia en equilibrio estático en el estado actual.
- C La pérdida de contacto.

Cuando sea necesario especificar explícitamente los estados entre los que un cierto operador del grupo A puede permitir la transición, se utilizará la nomenclatura  $T(E_i; E_j)$  siendo  $E_i$  el estado actual y  $E_j$  el posible estado final. Asimismo, un conjunto de operadores que permitan una misma transición se indicará como  $TS$  y la indicación explícita de los estados inicial y posible final será  $TS(E_i; E_j)$ .

Para los operadores del grupo B se utilizará la misma nomenclatura considerando el mismo estado como inicial y posible final,  $T(E_i; E_i)$  ó  $TS(E_i; E_i)$ ; igualmente para los operadores del grupo C, con la única particularidad de que el estado final es reemplazado por el símbolo  $\emptyset$ , es decir, los operadores que posibiliten la pérdida de contacto en un estado  $E_i$  se indicarán  $T(E_i; \emptyset)$  ó  $TS(E_i; \emptyset)$ .

### 5.6.2 Determinación de los operadores

En la determinación de los operadores  $T$  pueden distinguirse dos fases: en la primera, se determinan sus direcciones considerando la incertidumbre en la posición, forma y tamaño de los objetos; en la segunda, se les agrega la incertidumbre en la dirección del movimiento debida a la incertidumbre en la velocidad.

### Primera fase

La determinación de las direcciones en esta primera fase depende del grupo al que pertenezcan los operadores.

**Grupo A.** Los operadores  $T(E_i; E_j)$  han de permitir la transición de  $R_i$  a  $R_j$ , que implica alcanzar  $DR_j$  desde  $DR_i$ , y por lo tanto pueden establecerse mediante la condición

$$\langle \hat{t} \cdot \hat{n}_e \rangle > 0 \quad (5.3)$$

donde  $\hat{n}_e$  se determina de forma diferente según:

a)  $Ord(E_i) < Ord(E_j)$

De la proposición 5.4 resulta  $\overset{\circ}{DR}_j \subset DR_i$ . En este caso  $\hat{n}_e$  pertenece al conjunto de direcciones normales a la frontera de  $DR_j$  contenida en  $DR_i$  orientadas hacia el interior de  $DR_j$  (figura 5.16a).

b)  $Ord(E_i) > Ord(E_j)$

De la proposición 5.4 resulta  $\overset{\circ}{DR}_i \subset DR_j$ . En este caso  $\hat{n}_e$  pertenece al conjunto de direcciones normales a la frontera de  $DR_i$  contenida en  $DR_j$  orientadas hacia el exterior de  $DR_i$  (figura 5.16b).

**Grupo B.** Para permanecer en equilibrio estático en un determinado estado  $E_i$  la fuerza generalizada de reacción debe cancelar exactamente la fuerza aplicada sobre el objeto manipulado por el robot. Esto sólo es posible si el objeto es forzado a moverse en una dirección opuesta a alguna de las posibles direcciones que puede tomar la fuerza de reacción en la configuración en que se encuentre. Debido a la incertidumbre no pueden conocerse con precisión las direcciones del cono de fricción en cada configuración de contacto, pero sin embargo sí se conocen todas las posibles direcciones de la fuerza de reacción en el estado, dadas por  $DGr$ . Un movimiento en una dirección opuesta a una de las direcciones en  $DGr$  puede llevar a un equilibrio estático en alguna configuración de contacto, pero no se sabe en cual. Por lo tanto, un movimiento en estas direcciones tiene posibilidades de llevar el manipulador a una situación de equilibrio estático pero no garantía absoluta, pudiendo incluso realizar un movimiento dentro del estado hasta alcanzar el equilibrio.

Así, debido a la incertidumbre, el conjunto  $TS(E_i; E_i)$  queda determinado por la condición

$$-\hat{t} \in DGr_i \quad (5.4)$$

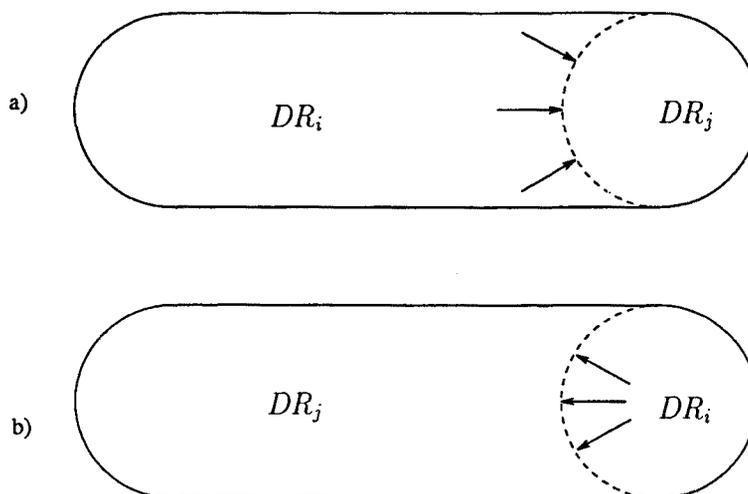


Figura 5.16: Descripción conceptual de las normales  $\hat{n}_e$  a la frontera entre las realizaciones  $DR_i$  y  $DR_j$  de dos estados contiguos.

**Grupo C.** La pérdida total de contacto en un estado  $E_i$  es posible cuando se realiza un movimiento cuya representación en  $\mathcal{C}_3$  tiene una componente positiva en la dirección de la normal exterior a cada una de las  $\mathcal{C}$ -superficies generadas por los contactos asociados a  $E_i$ .

Sean:

$N_h$ : el conjunto de las direcciones normales exteriores a  $\mathcal{C}$ -superficie $_h$  en  $R_i$

$NP_h = \{\hat{m} \mid \exists \hat{n} \in N_h \text{ que cumple } \langle \hat{m} \cdot \hat{n} \rangle > 0\}$

El conjunto  $TS(E_i; \emptyset)$  queda determinado por la condición

$$\hat{i} \in \bigcap_{h \in CB_i} NP_h \quad (5.5)$$

### Segunda fase

La segunda fase es común para los tres grupos de operadores. Consiste simplemente en ampliar los conjuntos de direcciones obtenidos en la primera fase agregándoles la incertidumbre de velocidad (sección 4.3).