

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Programa de Doctorado:
AUTOMATIZACIÓN AVANZADA Y ROBÓTICA

Tesis Doctoral

**CONTRIBUCIÓN A LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS
DINÁMICOS MEDIANTE MÉTODOS CONEXIONISTAS**

Robert Griñó Cubero

Directoras: Dra. Carme Torras, Dra. Gabriela Cembrano

T 97/17

A Yolanda

A mis padres

Aquesta tesi ha estat enregistrada
amb el núm. —185

Agradecimientos

Son muchas las personas que de un modo u otro han hecho posible la realización de este trabajo, tanto en los aspectos técnicos, intercambiando ideas y dando soporte a los medios utilizados para su desarrollo, como en el aspecto humano, brindándome el apoyo necesario cuando me hizo falta. A todos ellos mi más sincero agradecimiento.

No puedo, sin embargo, dejar de mencionar de manera particular:

A mis directoras de tesis, Dra. Carme Torras y Dra. Gabriela Cembrano, por su comprensión, aliento y guía durante este largo viaje, a veces placentero, a veces lleno de escollos.

Al Dr. Jordi Riera, que me inició en la curiosidad científica y en el estudio de la teoría y aplicaciones de la ingeniería de control en aquellos lejanos tiempos en los cuales realizaba mi Proyecto Fin de Carrera.

A los profesores Dr. Luis Basañez y Dr. Pere Caminal que tanto me han enseñado sobre la teoría de control clásico y el placer de la buena docencia.

A los compañeros del Instituto de Cibernética y del Departamento de Ingeniería de Sistemas, Automática e Informática Industrial con los cuales he compartido tanto largas jornadas de trabajo como momentos de recreo y tertulia.

Finalmente y de manera muy especial, a mi esposa Yolanda y a mis padres Robert y Rosa, por el aliento y la comprensión que han tenido conmigo durante estos largos años. Ellos saben que mi agradecimiento y mis sentimientos son difícilmente expresables con palabras.

Deseo, también, agradecer la ayuda recibida de la *Asociación / Colegio de Ingenieros Industriales de Cataluña* a través de su *Beca para la realización de tesis doctorales en ingeniería industrial* que me fue concedida en la primavera de 1993.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Planteamiento del problema	3
1.2	Motivación	5
1.3	Objetivo y alcance de la tesis	6
1.4	Antecedentes	7
1.4.1	Identificación de sistemas por métodos clásicos	7
1.4.2	Aplicación de las redes neuronales a la identificación y control de sistemas	10
1.5	Metodología	12
1.6	Contenido de la tesis	15
2	Modelos Conexionistas y Estructura de Identificación	17
2.1	Problema general de identificación de sistemas	17
2.2	Tipos de aprendizaje en redes neuronales e identificación de sistemas	18
2.2.1	Paradigmas de aprendizaje en redes neuronales	18
2.2.2	Tipos de problemas en el aprendizaje de secuencias	19
2.3	Arquitectura de los modelos conexionistas utilizados	21
2.3.1	Características requeridas a los modelos de identificación	22
2.3.2	Elementos básicos	23

2.3.3	Arquitectura de los modelos aditivos	25
2.3.4	Los modelos aditivos y la saturación por ruido	25
2.4	Estabilidad absoluta del modelo neuronal	27
2.4.1	Teoría básica	28
2.4.2	Análisis de estabilidad del modelo neuronal	31
2.4.2.1	Reformulación del modelo neuronal	31
2.4.2.2	Análisis de estabilidad	34
2.4.3	Estabilidad absoluta de un punto de equilibrio general	38
2.5	Estructura de identificación propuesta	39
3	Aprendizaje basado en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad	41
3.1	Formulación del problema de identificación	41
3.1.1	Función de coste	43
3.1.2	Ley de adaptación de parámetros	44
3.2	Análisis de sensibilidad dinámica del modelo conexionista	47
3.2.1	Definiciones previas	47
3.2.2	Desarrollo de las ecuaciones de sensibilidad	48
3.3	Ecuaciones del proceso de identificación	50
3.3.1	Valoración de las condiciones de aplicabilidad	51
3.3.2	Complejidad de cálculo del mecanismo de adaptación	52
4	Aprendizaje basado en técnicas de control óptimo e inmersión invariante	55
4.1	Formulación del problema de identificación	55
4.1.1	Función de coste	57
4.2	Una solución variacional al problema de aprendizaje	58
4.3	Operación en línea utilizando técnicas de inmersión invariante	59

4.4	Aplicación a los modelos neuronales con dinámica aditiva	62
4.5	Ecuaciones del proceso de identificación	63
4.5.1	Complejidad de cálculo del mecanismo de adaptación . .	64
5	Generación de los modelos y experimentación numérica	67
5.1	Estructura de generación e implementación de los modelos y métodos de identificación	67
5.1.1	Generación automática de código fuente	69
5.1.2	Núcleos de simulación utilizados	70
5.2	Experimentación numérica de los métodos de identificación . . .	71
5.2.1	Casos de test utilizados	72
5.2.1.1	Sistemas simulados de segundo orden no lineales	72
5.2.1.2	Conjunto de datos reales de un grupo hidroeléctrico	73
5.2.2	Indicadores de comportamiento	73
5.2.3	Resultados experimentales	74
5.2.3.1	Resultados con las plantas simuladas	74
5.2.3.2	Resultados con el conjunto de datos real	78
5.2.3.3	Comparación de prestaciones frente a identificadores del tipo red neuronal <i>feedforward</i>	82
6	Conclusiones	87
6.1	Principales aportaciones	87
6.2	Vías futuras de trabajo	90
	Referencias	93
A	Elementos de análisis matricial	101
A.1	Productos de Kronecker	101
A.2	Algunos resultados interesantes de análisis matricial	102

B	Condiciones de transversalidad	103
C	Elección de la señal de excitación	105
C.1	Señales de excitación más habituales	105
C.2	Secuencias binarias pseudoaleatorias	107
C.2.1	Generación	108
C.2.2	Propiedades	109
C.2.3	Función de autocorrelación y densidad espectral de una señal PRBS	110

Índice de Figuras

1.1	Relación entre la teoría de control y la teoría de redes neuronales (Adaptada de (Hunt <i>et al.</i> , 1992)).	14
2.1	Problema general de identificación de sistemas	18
2.2	Esquema de un nodo en una red neuronal aditiva.	23
2.3	Esquema de una red neuronal dinámica aditiva.	26
2.4	Sistema de tipo Lure: conexión en realimentación de un sistema lineal y un elemento no lineal.	29
2.5	Sector $[\alpha, \beta]$ global para la función estática no lineal $\psi(z)$	30
2.6	Diagrama de bloques del modelo neuronal con dinámica aditiva como sistema de control.	32
2.7	Diagrama de bloques del modelo neuronal con dinámica aditiva como sistema de tipo Lure.	32
2.8	Estructura del método de identificación.	39
3.1	Esquema de la estructura y el mecanismo de identificación.	42
3.2	Número de ecuaciones diferenciales en función del tamaño del modelo (\mathbf{W} adaptable).	53
4.1	Esquema de la estructura y el mecanismo de identificación.	56
4.2	Número de ecuaciones diferenciales en función del orden del modelo (\mathbf{W} adaptable).	65

-
- 5.1 Esquema de la metodología de generación, implementación y validación de los modelos. 68
- 5.2 Sistemas de segundo orden no lineales usados en las identificaciones. **Sistema A:** compuesto de dos sistemas lineales de primer orden con una saturación intercalada entre ellos. **Sistema B:** compuesto de dos sistemas lineales de primer orden con una saturación intercalada operando en lazo cerrado con una zona muerta a la salida del comparador de error. 73
- 5.3 Resultados de identificación para el Sistema A: $\tau_1 = 0.2$, $K_1 = 2$, $\tau_2 = 0.2$, límites de saturación = 3,-3. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad. . . . 75
- 5.4 Resultados de identificación para el Sistema B: mismos valores que en el Sistema A y límites de la zona muerta de +1,-1. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad. 76
- 5.5 Resultados de identificación para el Sistema B: mismos valores que en el Sistema A y límites de la zona muerta de +1,-1. Adaptación de parámetros por técnicas variacionales y de inmersión invariante. 77
- 5.6 Resultados de identificación para el Sistema B: respuesta frecuencial experimental para los datos reales y predichos. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad. 79
- 5.7 Error de identificación (arriba) y consigna (grueso), salida real y salida del modelo (fino) (abajo), para el conjunto de datos del grupo hidroeléctrico. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad. 80
- 5.8 Error de identificación (arriba) y consigna, salida real y salida del modelo (abajo), para el conjunto de datos del grupo hidroeléctrico. Adaptación de parámetros por técnicas variacionales y de inmersión invariante. 81
- 5.9 Suma de los cuadrados de los errores de la red neuronal para los primeros 100 *epoch* de la fase de aprendizaje. 83

5.10 Predicción en configuración serie-paralela sobre el conjunto de test: arriba) Consigna de potencia (puntos), potencia real de salida (continua) y potencia de salida predicha (punto-rama); abajo) Error de identificación.	84
5.11 Predicción en configuración paralela sobre el conjunto de test: arriba) Consigna de potencia (puntos), potencia real de salida (continua) y potencia de salida predicha (punto-rama); abajo) Error de identificación.	85
C.1 Generación de la señal PRBS.	108
C.2 Funcion de autocorrelación teórica.	110
C.3 Densidad espectral de potencia de la señal PRBS.	111

Índice de Tablas

3.1 Ecuaciones de adaptación de los parámetros del modelo conexionista.	46
C.1 Tabla de conexionado del registro de desplazamiento con el sumador para algunas longitudes de registro.	109

Capítulo 1

Introducción

Los modelos matemáticos de sistemas son de gran importancia en el ámbito científico-técnico y, de entre otras muchas, pueden destacarse las siguientes aplicaciones (Hunt, 1989):

- Cuantificación de las características más relevantes del comportamiento de un sistema. En estos casos, el modelo se emplea para inferir propiedades más generales y sus implicaciones.
- Predicción del comportamiento futuro de un sistema. Esta utilización es muy importante en áreas como economía y control de procesos.
- Diseño de sistemas de control por aplicación de técnicas analíticas que requieren un modelo del sistema a controlar sobre el cual trabajar.
- Diagnóstico de fallos en sistemas complejos. En estas aplicaciones el hecho de que el comportamiento medido sobre el sistema real sea significativamente diferente del comportamiento del modelo puede ser considerado como un indicio de mal funcionamiento del sistema real.
- Simulación de sistemas y entrenamiento de operadores. Este tipo de aplicaciones permite el estudio y análisis de situaciones anómalas que no pueden ser tratadas sobre sistemas reales.

Existen dos enfoques fundamentales en la construcción de un modelo matemático: a partir de un conocimiento previo sobre el sistema o por el análisis de datos experimentales obtenidos del sistema. Estos dos enfoques se conocen, respectivamente, como *modelado* e *identificación*:

Modelado: En este enfoque los mecanismos internos de funcionamiento del sistema son conocidos y puede construirse un modelo a partir de las leyes físicas que lo gobiernan.

Identificación: A diferencia del enfoque anterior, las leyes físicas no son conocidas y se debe construir el modelo matemático a partir de datos experimentales obtenidos del sistema real. Según Eykhoff (Eykhoff, 1974) se entiende por identificación *la determinación, en base a las entradas-salidas, de un sistema dentro de una clase específica de sistemas a la cual el sistema estudiado es equivalente.*

Estas dos vertientes, en general, se emplean de forma conjunta para la construcción de modelos puesto que se complementan adecuadamente.

Entrando de forma más profunda en el tema de identificación, que es el que se desea tratar en esta tesis, se puede decir que las técnicas de construcción de un modelo matemático a partir de datos medidos constan, en general, de los siguientes pasos:

1. *Diseño del experimento:* Es necesario que la entrada al sistema durante la toma de datos tenga un espectro plano en la banda pasante del sistema para asegurar que todos los modos propios del sistema son excitados dando una señal de salida con suficiente información como para caracterizar la dinámica del sistema.
2. *Elección de la estructura del modelo:* Este es un paso previo a las tareas de experimentación y debe tener en cuenta la complejidad del proceso real y de la estimación de parámetros, así como el uso final que se desee dar al modelo.
3. *Estimación de parámetros:* Una vez que se tiene la estructura del modelo y los datos experimentales, el paso siguiente es encontrar los parámetros del modelo que dan la respuesta más cercana a la experimental. Los métodos más comunes de estimación de parámetros están basados en un enfoque de optimización, donde el mejor conjunto de parámetros es aquél que hace que la respuesta del modelo sea la más cercana a la real según un criterio o función de coste.
4. *Validación del modelo:* Tras completarse los pasos anteriores es necesario asegurar que la respuesta del modelo es conforme a la que se obtendría del sistema real. Si no se cumple este requisito se debe iterar efectuando cambios tanto en la estructura del modelo como en las condiciones experimentales y la estimación de parámetros. Este paso, como puede verse,

convierte el proceso de identificación en un procedimiento de carácter iterativo.

Asimismo, las técnicas de identificación pueden subdividirse en dos grandes clases:

- *Fuera de línea:* En este caso los datos son recogidos tomando medidas durante la experimentación y, una vez terminada ésta, se procesan para producir el modelo.
- *En línea:* En este caso se emplea un algoritmo o método de actualización de parámetros de tipo recursivo que procesa los datos tal como son producidos por el sistema real. Esta técnica se emplea, principalmente, en control adaptativo y en aplicaciones de tiempo real cuando la dinámica del proceso debe ser monitorizada de forma continua.

1.1 Planteamiento del problema

El planteamiento que se seguirá en esta tesis se basa en representaciones de tiempo continuo en el espacio de estado. En especial, se considerará que la dinámica de la planta evoluciona en tiempo continuo y que las leyes adaptativas de ajuste de los parámetros de los modelos lo harán de forma continua también.

Este enfoque no es el más usual en la literatura actual sobre identificación de sistemas dinámicos mediante redes neuronales, véase (Narendra & Parthasarathy, 1990) (Narendra & Parthasarathy, 1991), puesto que en estos casos se usa el enfoque de tiempo discreto debido a la facilidad de uso de las llamadas baterías de retrasos, tanto en las entradas como en las salidas del modelo. No obstante, usar tiempo discreto en el estudio de problemas de identificación de sistemas dinámicos no lineales presenta algunas desventajas, entre ellas, que la discretización de sistemas de tiempo continuo no lineales da lugar a modelos de tiempo discreto mucho más complicados y casi imposibles de tratar de forma analítica (Nijmeijer & van der Schaft, 1990). Este aumento de complejidad puede plasmarse, por ejemplo, en que al discretizar un sistema de tiempo continuo afín en las entradas se genera un sistema de tiempo discreto que no lo es. Por todo ello, parece mucho más recomendable efectuar la identificación y el diseño de controladores en tiempo continuo y, posteriormente, estudiar el efecto del período de muestreo sobre el comportamiento dinámico del sistema.

Este enfoque está justificado si se piensa que en un futuro más bien cercano se dispondrá de realizaciones hardware que implementarán arquitecturas

analógicas de redes neuronales recurrentes (Anguita *et al.*, 1991; Chua & Yang, 1988b; Chua & Yang, 1988a; Lazzaro & Mead, 1989; DeWeerth *et al.*, 1991).

El trabajo de la tesis se extiende en tres direcciones interrelacionadas, pero con interés y entidad propia por separado:

- *Desarrollo y estudio de una arquitectura de red neuronal recurrente para tareas de identificación.* En esta línea se plantea un modelo de identificación con estructura de red neuronal con dinámica aditiva afín en los parámetros y en las entradas. Esta red neuronal, descrita en el espacio de estado, incluye dinámica interna en cada uno de los nodos que la componen y éstos se hallan completamente interconectados (Kelly, 1990). Como ecuación de salida del modelo se toma una combinación lineal de los estados de la red neuronal. Una vez planteado el modelo a utilizar se efectúa un estudio de estabilidad absoluta mediante el uso de técnicas frecuenciales. Este último apartado permite abundar en el conocimiento de la dinámica de los modelos y orientar cualitativamente su posterior utilización en las tareas de identificación.

Un hecho importante a resaltar es que toda esta línea se basa en las capacidades de aproximación de las redes neuronales sobre una gran clase de funciones, tanto estáticas como dinámicas, como puede comprobarse en los trabajos (Polycarpou & Ioannou, 1991; Ito, 1991; Kreinovich, 1991).

- *Estudio de los métodos y algoritmos de adaptación para los modelos de identificación.* Esta línea trata del estudio de los métodos para llevar a cabo la identificación paramétrica de los modelos desarrollados en la línea anterior. Los métodos y algoritmos de ajuste continuo de los parámetros de los modelos deberían tener una implementación y una operación lo suficientemente robustas como para permitir su aplicación real. Esta parte se basa en técnicas de análisis de sensibilidad (Frank, 1978; Wierzbicki, 1984), teoría de Lyapunov (Polycarpou & Ioannou, 1991), métodos de optimización (Pearlmutter, 1990) y de control óptimo (Bryson & Ho, 1969) y técnicas de inmersión invariante (Bellman & Wing, 1992).
- *Evaluación de los modelos y métodos de adaptación desarrollados frente a sistemas con no linealidades estándar.* Los modelos y métodos de adaptación desarrollados en las dos líneas de trabajo anteriores se evalúan por simulación frente a sistemas dinámicos que incluyan no linealidades típicas de los sistemas reales como, por ejemplo: zonas muertas, saturaciones, etc. y datos de sistemas reales. Esta tarea constituye una prueba

significativa del buen funcionamiento de la clase de modelos elegida y los algoritmos de ajuste de parámetros desarrollados en la tesis.

1.2 Motivación

Como se ha comentado en el inicio del capítulo, la identificación de sistemas es de gran importancia puesto que supone adquirir el comportamiento de un sistema real mediante una formulación matemática. Esto posibilita, posteriormente, el análisis y estudio fuera de línea de ese sistema y, finalmente, el desarrollo de elementos que modifiquen el comportamiento original a fin de satisfacer unas necesidades o especificaciones de operación concretas.

En particular, y desde el punto de vista de la Automática, la necesidad de modelos que describan el comportamiento dinámico de los sistemas reales es crucial para efectuar el diseño de compensadores para los mismos. Normalmente, y dado el estado de la teoría de control, en aplicaciones tecnológicas se hace uso de técnicas lineales y, por tanto, los modelos que se desarrollan son de comportamiento lineal basados en la teoría de identificación de sistemas lineales. En este punto, es justo decir que para un alto porcentaje de sistemas reales un enfoque de identificación y control lineal es más que suficiente en vista de las especificaciones que se desean. A lo sumo, y a la vista de las limitaciones de los modelos lineales, se genera una batería de modelos de identificación estructuralmente iguales pero paramétricamente diferentes para hacer uso, posteriormente, de las técnicas de control robusto que, en general, son herramientas matemáticas de carácter lineal.

Únicamente en casos especiales, los modelos lineales de sistemas son insuficientes para realizar un diseño de controlador que cumpla las especificaciones. Estos casos pueden corresponder a sistemas con unas dinámicas altamente no lineales y grandes anchos de banda. Entonces, sí que es necesario desarrollar modelos y metodologías de identificación no lineales a fin de capturar aquellos aspectos que con sus homólogos lineales no se podría. Y es en esta línea, y con este punto de vista, que se desarrolla el trabajo de esta tesis, aportando su contenido al conjunto de modelos y técnicas no lineales desarrollados en los últimos cuarenta años.

1.3 Objetivo y alcance de la tesis

El objetivo de la tesis es el siguiente:

Desarrollar una clase de modelos de identificación de sistemas basada en estructuras de tipo conexionista, así como métodos y algoritmos de adaptación en línea de los parámetros de esta clase de modelos, teniendo como fuente de información las observaciones de entrada y salida que se obtienen del funcionamiento del sistema real.

La clase de modelos elegida tiene las características siguientes:

- La estructura de los modelos es dinámica, es decir, están dotados de elementos dinámicos internos en cada uno de los nodos que los componen.
- Las ecuaciones de la dinámica de los modelos evolucionan en tiempo continuo.
- La descripción de los modelos se efectúa en el espacio de estado, de tal forma que queden formulados como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- La dinámica interna de cada uno de los nodos es de tipo aditivo.

Todas estas características son escogidas pensando en que el uso posterior que se puede hacer de los modelos es desarrollar controladores para el sistema real bajo estudio. Asimismo, a fin de profundizar en el conocimiento del tipo de modelos a emplear se realiza un estudio de su estabilidad absoluta a fin de encontrar condiciones suficientes para ella.

Los algoritmos o métodos de adaptación de parámetros que se desarrollan trabajan en tiempo continuo y en línea partiendo de modelos no configurados previamente. Estos algoritmos son desarrollados usando las dos posibles grandes vías de ataque al problema: en primer lugar, el uso de métodos de optimización que dan lugar, de forma natural, a soluciones que funcionan en línea, y en segundo lugar, la utilización de métodos de cálculo variacional que, aunque de forma natural dan lugar a soluciones fuera de línea, son complementados a fin de obtener soluciones en línea.

Desde el punto de vista práctico y dada la complejidad de las soluciones del problema de identificación, se desarrollan un conjunto de utilidades de cálculo

simbólico que permiten tanto la manipulación de las ecuaciones que forman la solución del problema como la generación automática del código necesario para obtener su solución numérica. En el desarrollo de estas herramientas se tiene en cuenta la reducción, en lo posible, de la carga computacional necesaria para resolver el problema.

Todos los elementos citados anteriormente son experimentados en algunos problemas de identificación a fin de validar su comportamiento cuidando que alguno de los casos consista en datos pertenecientes a un sistema real. Es necesario destacar que lo relevante del trabajo es la solución de un problema, por otro lado solucionable de muy diversos modos mediante técnicas ya conocidas, con una clase de modelos y unos procedimientos de identificación que permiten el uso posterior de ésta para efectuar el desarrollo de controladores, por ejemplo, mediante métodos geométricos de la teoría de control.

1.4 Antecedentes

Los antecedentes al trabajo que se lleva a cabo en esta tesis cabe buscarlos en dos grandes áreas: en primer lugar, el área de modelado e identificación de sistemas; y en segundo lugar, el área que trata de la aplicación de modelos y métodos conexionistas (redes neuronales) a la identificación y control de sistemas dinámicos, que actualmente presenta un desarrollo muy importante.

1.4.1 Identificación de sistemas por métodos clásicos

Los trabajos en el área de modelado e identificación de sistemas se enmarcan, de forma general, en las siguientes clases (Schoukens & Pintelon, 1991; Söderström & Stoica, 1989; Eykhoff, 1974; Ljung, 1987):

Algoritmos y métodos lineales fuera de línea: engloban los casos en los que la experimentación y el procesado de los datos recogidos para construir el modelo se realizan de forma secuencial. Entre la gran variedad de algoritmos posibles pueden citarse los siguientes:

1. **Métodos no paramétricos:** Estos métodos de identificación se caracterizan porque los modelos resultantes son funciones o curvas y no pueden ser expresados en función de un vector de parámetros de dimensión finita. Dentro de este grupo pueden citarse:

- (a) Análisis transitorio
 - (b) Análisis frecuencial
 - (c) Análisis de correlación
 - (d) Análisis espectral
2. Métodos paramétricos: A diferencia del grupo anterior, los modelos resultantes del proceso de identificación contienen la información relevante acerca de la dinámica del proceso real en un vector de parámetros de dimensión finita. Pueden destacarse los siguientes métodos:
- (a) Regresión lineal
 - (b) Métodos de predicción del error:
 - i. Mínimos cuadrados
 - ii. Mínimos cuadrados generalizados
 - iii. Métodos basados en la estimación de la verosimilitud máxima de los parámetros de los modelos (*Maximum Likelihood Estimation*).
 - (c) Métodos de variable instrumental
 - (d) Métodos de identificación paramétrica basados en análisis frecuencial

Algoritmos y métodos lineales en línea (o recursivos): Caracterizados por llevar a cabo la recogida de datos y el procesado de los mismos de forma simultánea, lo que permite su uso en aplicaciones de control adaptativo y de tiempo real. Entre ellos destacan:

1. Método recursivo ¹ de los mínimos cuadrados
2. Método recursivo de predicción del error
3. Método recursivo de la variable instrumental

Algoritmos y métodos para modelos no lineales: Estos métodos se caracterizan por llevar a cabo el ajuste de parámetros de modelos de identificación no lineales (a diferencia de los métodos enunciados en los dos puntos anteriores). Esta clase de métodos se halla en un estadio de desarrollo bajo frente al caso de modelos lineales y es el ámbito donde el uso de modelos conexionistas puede suponer una aportación sustancial (Ljung, 1991). Pueden destacarse de entre los métodos clásicos (Haber & Unbehauen, 1990):

¹En la literatura sobre identificación de sistemas el término recursivo se emplea como sinónimo de en línea (*on-line*)

1. Métodos de quasilinealización (Kalaba & Spingarn, 1982)
2. Métodos basados en análisis de sensibilidad (Eykhoff, 1974)
3. Métodos y modelos orientados a bloques:
 - (a) Modelos de Volterra
 - (b) Modelos de Wiener – Hammerstein
4. Métodos y modelos en cascada
5. Métodos y modelos semilineales con parámetros dependientes de una señal
6. Métodos y modelos lineales en los parámetros (NARMAX) (Korenberg & Paarmann, 1991; Mathews, 1991)
7. Métodos y modelos autoorganizativos, como por ejemplo el *Group Method of Data Handling* (GMDH) (Farlow, 1984)

Seguimiento (*tracking*) de sistemas variables con el tiempo: Dentro de esta clase de métodos y modelos existen tanto algoritmos con entidad propia, como modificaciones de algunos de los citados anteriormente. El punto más importante es asegurar la estabilidad y convergencia del conjunto “modelo más algoritmo de identificación más sistema”, cuando éste varía rápidamente (Ljung & Gunnarsson, 1990; Benveniste *et al.*, 1990).

Diseño de las señales de entrada: Los trabajos dentro de este área tratan el tema del diseño de la señal de entrada a inyectar al sistema durante la experimentación, a fin de poner de relieve de la forma más eficiente posible las características de la dinámica del sistema a identificar. De entre los posibles métodos destacan:

1. Diseño óptimo en el dominio del tiempo (Schoukens & Pintelon, 1991; Kalaba & Spingarn, 1982)
2. Diseño óptimo en el dominio de la frecuencia (Schoukens & Pintelon, 1991; Kalaba & Spingarn, 1982)
3. Señales de test del tipo ruido binario generalizado (GBN) (Tulleken, 1990)

Todos los métodos y algoritmos citados en los puntos anteriores hacen referencia, según los casos, a identificación de sistemas en lazo abierto o en lazo cerrado. Hay que poner de manifiesto que este último caso presenta una mayor complejidad puesto que entre la señal de entrada del sistema y la señal de salida existe una correlación muy acentuada que viene motivada por el lazo de realimentación.

Es necesario comentar que la mayoría de los desarrollos efectuados en identificación de sistemas se han llevado a cabo para modelos lineales, en los que se han asegurado características como la convergencia de los parámetros hacia los valores correctos, la convergencia del error de identificación hacia cero y la estabilidad del conjunto formado por la planta, el modelo y el mecanismo de ajuste de parámetros (Ljung & Gunnarsson, 1990; Benveniste *et al.*, 1990; Sastry & Bodson, 1989).

1.4.2 Aplicación de las redes neuronales a la identificación y control de sistemas

La aplicación de métodos conexionistas al área de identificación y control de sistemas dinámicos puede considerarse como un paso natural en la teoría de control puesto que suponen un intento de aportar nuevas soluciones a las tres grandes necesidades históricas de la Automática (Antsaklis, 1990):

- trabajar con sistemas cada vez más complejos
- satisfacer requerimientos de diseño cada vez más exigentes
- y cumplir el punto anterior de forma adecuada con un conocimiento anticipado de la planta y de su entorno cada vez menos preciso.

Esto se fundamenta en dos de las capacidades más importantes de los métodos conexionistas: la capacidad de aprender (típicamente basada en la minimización de una función de coste adecuada (Narendra & Parthasarathy, 1990) (Narendra & Parthasarathy, 1991)) y el buen comportamiento en la aproximación de funciones no lineales (Sanner & Slotine, 1991b; Polycarpou & Ioannou, 1991). Estas características se ven apoyadas en otras, como por ejemplo: el paralelismo masivo y la tolerancia a fallos, que podrán aprovecharse de forma completa cuando existan realizaciones analógicas hardware de uso comercial (Anguita *et al.*, 1991; DeWeerth *et al.*, 1991).

Si se considera que el área de aplicación de métodos conexionistas al control de procesos está subdividida en las subáreas de identificación, control y actividades complementarias al control; pueden citarse, entre otros muchos, los trabajos que aparecen a continuación.

Identificación: En la actualidad, la mayor parte de los trabajos en identificación de sistemas mediante redes neuronales están basados en modelos

del tipo red neuronal *feedforward* con aprendizaje por retropropagación del error (*backpropagation*), o variaciones más eficientes de este algoritmo. Estos métodos han sido aplicados a procesos reales y han mostrado un comportamiento adecuado en las tareas de identificación (Bhat *et al.*, 1990; Weerasooriya & El-Sharkawi, 1991; Loke & Cembrano, 1994; Ruiz & Torras, 1995; Cembrano *et al.*, 1997). Es importante hacer notar que la mayor parte de ellos usan modelos estáticos de tiempo discreto que capturan la dinámica del proceso real mediante el uso de líneas de retardos en las entradas y salidas del modelo (Miller *et al.*, 1990; Narendra & Parthasarathy, 1990). No obstante, en la identificación de sistemas dinámicos complejos pueden aparecer ciertos inconvenientes asociados a este tipo de modelos como, por ejemplo, dificultades para seleccionar el número necesario de retardos y, en algunos casos, predicciones pobres en operación en línea después de haberse efectuado el aprendizaje fuera de línea (Pearlmutter, 1995; Hunt *et al.*, 1992). Para evitar estas limitaciones se han empleado redes neuronales recurrentes con dinámica interna (Qin *et al.*, 1992; Sastry *et al.*, 1994; Parlos *et al.*, 1994; Piche, 1994), pero una característica común de estos trabajos es que trabajan en tiempo discreto dando lugar a modelos de tiempo discreto del sistema real de tiempo continuo. Este hecho da lugar a una gran dependencia del período de muestreo usado en el procedimiento y no aporta información sobre las trayectorias del modelo en los instantes de tiempo entre dos muestras consecutivas. Además, el soporte teórico para el posterior desarrollo de controladores para estos modelos es actualmente bastante bajo.

Todo ello, lleva a la necesidad de completar los desarrollos actuales (Sanner & Slotine, 1991a; Sanner & Slotine, 1991b; Sato, 1990) en la identificación en línea de procesos reales mediante modelos neuronales de tiempo continuo con dinámica aditiva.

Control: Esta es el área que ha despertado mayor interés y que registra el mayor número de publicaciones. Los primeros trabajos planteaban arquitecturas de control con redes multicapa *feedforward* con aprendizaje supervisado usando *backpropagation*, sirvan de ejemplo los trabajos (Psaltis *et al.*, 1988; Chen, 1990; Nguyen & Widrow, 1990). No obstante, estos primeros trabajos eran propuestas teóricas o aplicaciones de carácter académico y, no es hasta un par de años después cuando empiezan a aparecer publicaciones con ejemplos de aplicación mucho más industriales, como por ejemplo (Wu *et al.*, 1992).

Conforme ha ido madurando el tema, se ha perfilado una interrelación y un trasvase de ideas entre las áreas de control adaptativo no lineal y

de control mediante métodos conexionistas, que ha llevado a plantear arquitecturas neuronales similares a las estándar (control adaptativo por modelo de referencia y estructuras autosintonizadas) (Narendra & Parthasarathy, 1990; Narendra & Parthasarathy, 1991), y a emplear métodos de trabajo propios de la teoría de control adaptativo y control no lineal (Polycarpou & Ioannou, 1991; Sanner & Slotine, 1991b). Es importante también la incorporación de ideas de programación dinámica para llevar a cabo la adaptación en línea de los controladores conexionistas (Barto *et al.*, 1991).

Es necesario destacar, también, los trabajos que hacen uso de arquitecturas conexionistas recurrentes (Guez *et al.*, 1988; Kosko, 1992) y especiales (ART) (Kumar & Guez, 1991).

Actividades complementarias al control: En este área se integran los trabajos que, no perteneciendo de forma directa a la teoría de control, son de gran importancia en la implementación real de sistemas de control de procesos. Entre otros, pueden destacarse las aplicaciones a la detección de fallos en sensores instalados en sistemas de control (Naidu *et al.*, 1990), al filtrado e interpretación de alarmas en sistemas de distribución de energía eléctrica (Chan, 1990) y a la conversión de numérico a simbólico para llevar a cabo un control de estas características sobre el proceso (Passino *et al.*, 1990).

Por otro lado, es necesario comentar que las redes neuronales se han aplicado también en la predicción de series temporales en áreas como la economía (Varfis & Versino, 1990a; Varfis & Versino, 1990b) y los servicios (Griñó, 1991), con resultados iguales o mejores que los obtenidos con métodos clásicos como, por ejemplo, Box-Jenkins (Tang *et al.*, 1991). Asimismo, cuando los métodos conexionistas se han empleado para la predicción de series temporales altamente no lineales, o incluso caóticas, los resultados obtenidos han sido muy buenos (Weigend *et al.*, 1990). Paralelamente, se han efectuado desarrollos teóricos en el área de aproximación (Ito, 1991; Sontag, 1989; Hartman *et al.*, 1990) y en la cuantificación del número de nodos necesarios para aproximar correctamente determinadas funciones (Sanner & Slotine, 1991b; Sontag, 1990).

1.5 Metodología

Aunque en un principio, y gracias al trabajo de Norbert Wiener, las teorías de control, de información y de redes neuronales se veían como una sola bajo

el nombre de Cibernética este planteamiento no se ha mantenido a lo largo del tiempo. De hecho, se ha producido una divergencia entre las tres que ha generado una jerga y una notación propias de cada una, a pesar de algunos intentos de unificación, como por ejemplo los trabajos de Tsypkin (Tsypkin, 1971; Tsypkin, 1973) que aplicaban aprendizaje y adaptación al control y al análisis de patrones.

No obstante, tras los distintos formalismos existen muchas nociones y técnicas comunes. Concretamente, entre la teoría de control y la teoría de redes neuronales, se pueden encontrar puntos de coincidencia como los ilustrados en la figura 1.1 (Hunt *et al.*, 1992). Como puede observarse, bastantes técnicas comunes son llamadas de forma absolutamente diferente según el área de trabajo aunque la solución o el tratamiento son los mismos puesto que las herramientas que se utilizan son únicas.

Este enfoque unificador se refleja en el trabajo de tesis. Se ha puesto especial énfasis en tratar con herramientas y visión de la teoría de control las redes neuronales que se usan, desde el punto de vista de control, para identificar un sistema y, desde el punto de vista de la teoría de redes neuronales, para aprender un determinado comportamiento. En particular, la clase de modelos de identificación se formula de forma compacta usando productos de Kronecker, técnica habitual en teoría de sistemas. Asimismo, el estudio de estabilidad de los modelos se efectúa mediante el uso de métodos frecuenciales.

Los métodos de adaptación de parámetros se desarrollan también desde el punto de vista de la teoría de control usando herramientas matemáticas que le son propias. Así, el método basado en descenso por gradiente utiliza el análisis de sensibilidad para calcular una aproximación válida para el gradiente. Por otra parte, el método basado en cálculo variacional e inmersión invariante emplea técnicas habituales en las formulaciones de control óptimo.

Todos los desarrollos efectuados son puestos en operación mediante simulación numérica, a través de la generación simbólica automática del código necesario. Este procedimiento permite eliminar numerosas fuentes de error y a la vez acelerar el desarrollo de nuevos modelos codificados de forma óptima en cuanto a tiempo de ejecución, con lo que se reduce notablemente el ciclo de experimentación.

Finalmente, el diseño de las señales de excitación de los sistemas a identificar y el estudio de los resultados experimentales también sigue la operativa estándar en identificación de sistemas.

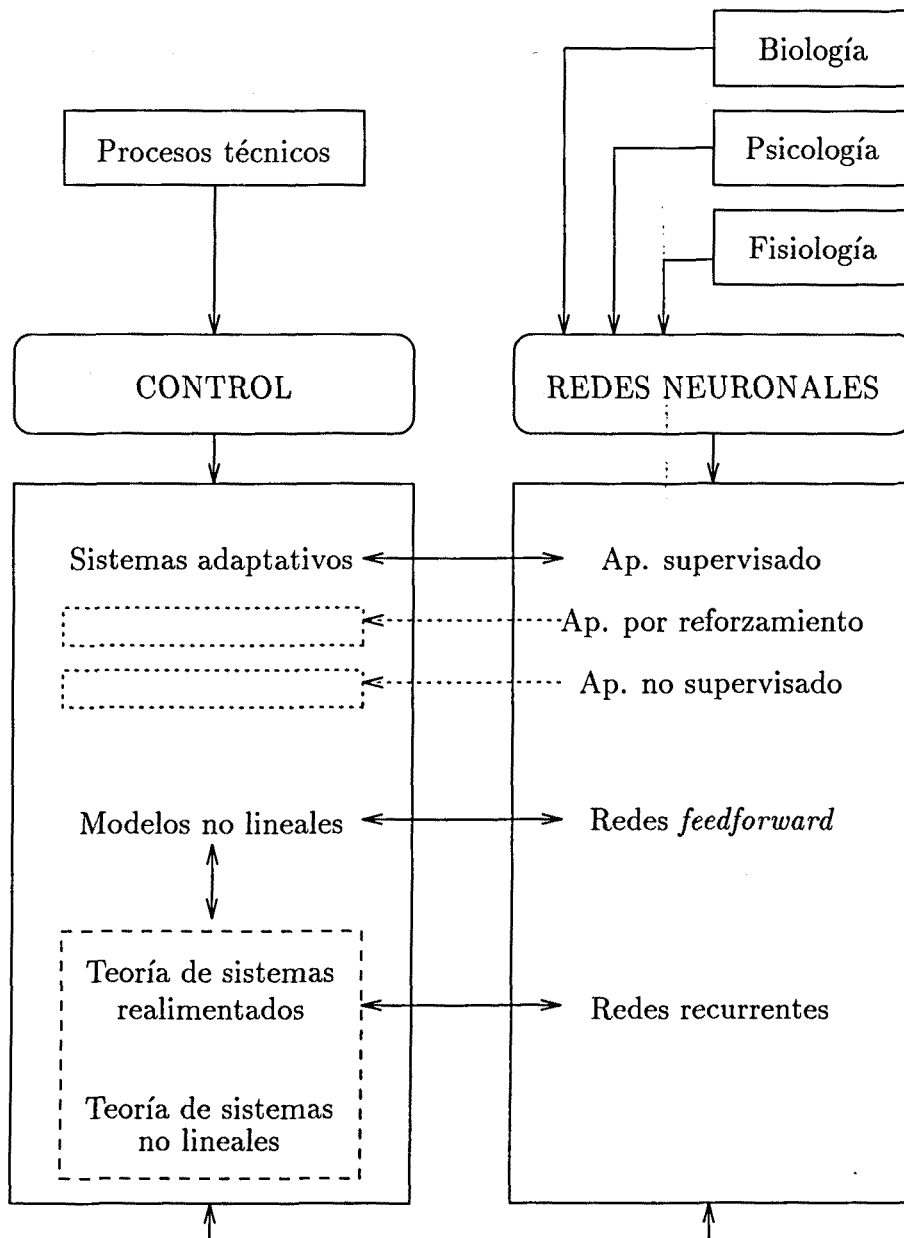


Figura 1.1: Relación entre la teoría de control y la teoría de redes neuronales (Adaptada de (Hunt *et al.*, 1992)).

1.6 Contenido de la tesis

La tesis está dividida en seis capítulos. Tras este capítulo de introducción, en el que se ha presentado el problema a resolver, el objetivo de la tesis, los antecedentes existentes en el tema y la metodología seguida, la tesis está estructurada de la siguiente manera.

En el capítulo 2 se describe, en primer lugar, el problema general de identificación de sistemas. Seguidamente, se tratan los paradigmas de aprendizaje en redes neuronales y, a continuación, se describe la clase de modelos conexionistas que se utilizará, mostrando su estructura interna. Sigue un estudio de la estabilidad absoluta, usando herramientas del dominio frecuencial, de la clase de modelos de identificación propuesta. El capítulo finaliza estableciendo la estructura de identificación que se sigue a lo largo de toda la tesis.

Los capítulos 3 y 4 están dedicados al desarrollo de técnicas de adaptación en línea de los parámetros de la clase de modelos descrita en el capítulo dos. En el capítulo 3 se desarrolla un método de aprendizaje basado en técnicas de minimización por gradiente de la función de error y análisis de sensibilidad del modelo de identificación. En esta metodología se emplea una notación compacta que permite visualizar mucho mejor la técnica empleada. Asimismo, se discute la influencia sobre el comportamiento global de ciertos parámetros ajustables presentes en las ecuaciones de adaptación.

En el capítulo 4 se aborda el tema del aprendizaje de valores adecuados para los parámetros del sistema desde un punto de vista diferente al del capítulo anterior. Concretamente, se usan técnicas de control óptimo, que dan lugar a una solución del problema fuera de línea, y se modifica ésta mediante inmersión invariante para conseguir una solución en línea. Así como en el capítulo 3 la notación empleada alivia notablemente la complejidad de los desarrollos y se efectúa también una discusión sobre el efecto de determinados parámetros libres en las ecuaciones de la solución.

En el capítulo 5 se trata la implementación de las técnicas desarrolladas y se muestra su aplicación a algunos de los casos de experimentación numérica. En particular, se describe la metodología de generación automática de los modelos y las ecuaciones asociadas a ellos necesarias para efectuar la identificación en línea. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la identificación en línea de algunas plantas a partir de datos simulados y reales: en primer lugar, y en simulación, unos sistemas de segundo orden dotados de no linealidades estándar y, en segundo lugar, datos reales pertenecientes a la operación de un grupo hidroeléctrico de la compañía eléctrica ENHER.

El capítulo 6 consta de dos secciones: la primera resume las principales aportaciones realizadas en este trabajo, y la segunda describe una serie de temas que pueden ser considerados trabajos futuros dentro de esta línea, tratando de esbozar en cada uno de ellos el posible camino a seguir.

Finalmente, se incluyen tres apéndices que incluyen aspectos complementarios y de notación necesarios para el mejor seguimiento de la tesis. El apéndice A muestra de forma resumida la formulación de productos de Kronecker y algunos enunciados de análisis matricial relevantes para los desarrollos efectuados en el cuerpo principal de la tesis. El apéndice B describe de forma resumida lo que se entiende por condiciones de transversalidad en los desarrollos de control óptimo; temática ésta utilizada en el desarrollo efectuado en el capítulo 4. Por último, el apéndice C presenta, de forma breve, las señales de excitación más comunes y enuncia las características más importantes de las secuencias binarias pseudoaleatorias que se han tomado como señal básica de excitación de los sistemas en esta tesis.

Capítulo 2

Modelos Conexionistas y Estructura de Identificación

En este capítulo se aborda la definición y estudio de la clase de modelos que se utiliza en la identificación, abundando en sus características de comportamiento, y se describe la estructura de identificación propuesta en la tesis.

En concreto, tras una primera sección que enuncia, en una forma muy general, el problema de identificación de sistemas se tratan, en la segunda sección, los paradigmas de aprendizaje en redes neuronales y los problemas tipo que aparecen cuando se trabaja con secuencias temporales. En la tercera sección se define y describe la arquitectura de la clase de modelos conexionistas que se utilizará en las tareas de identificación efectuándose un comentario acerca de las posibles saturaciones en las señales internas de los modelos. La cuarta sección trata la estabilidad absoluta de la clase de modelos propuesta desarrollándose una serie de condiciones suficientes. Finalmente, la quinta sección describe la estructura de identificación que se utiliza en los siguientes capítulos.

2.1 Problema general de identificación de sistemas

El problema general de identificación se ilustra en la figura 2.1. La solución del problema de identificación paramétrica, o lo que es equivalente, del aprendizaje de un determinado comportamiento dinámico consiste en la determinación del vector de parámetros desconocido $p(t)$ de las ecuaciones del modelo con el cual queremos representar el proceso real.

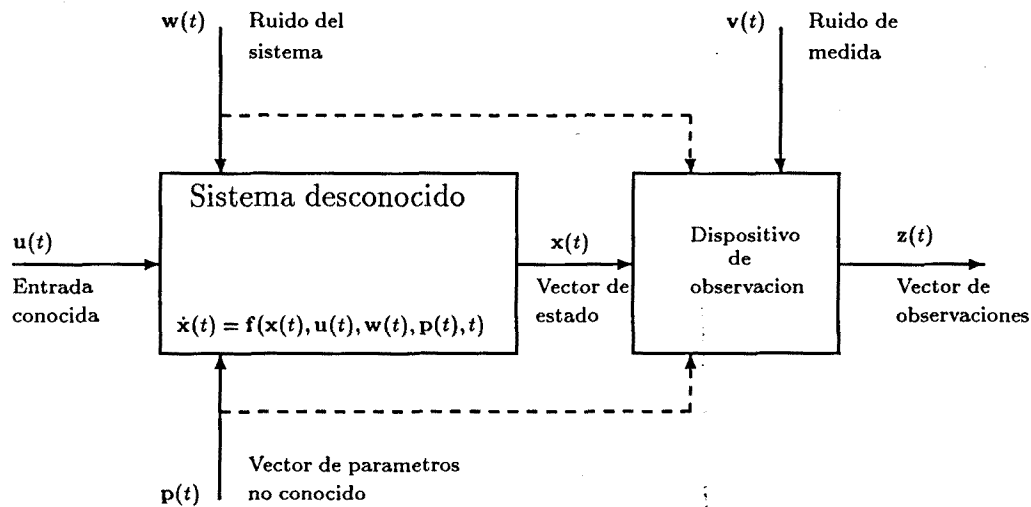


Figura 2.1: Problema general de identificación de sistemas

De esta forma, el aprendizaje de un determinado modelo es equivalente a realizar una estimación de los parámetros de este modelo a partir del comportamiento real del proceso a modelar. Existe además, otra componente incógnita que consiste en la estructura de las ecuaciones que integran el modelo. En las técnicas clásicas, y mayormente en las que se aplican a modelos lineales, esta incógnita se plasma en el orden del modelo; en el caso de modelos no lineales, hace referencia a la estructura de las ecuaciones en su conjunto. En el caso particular que nos ocupa, los modelos conexionistas, la estructura que se tomará, descrita en el apartado 2.3, presenta unas buenas capacidades aproximativas (Funahashi & Nakamura, 1993; Albertini & Sontag, 1993).

2.2 Tipos de aprendizaje en redes neuronales e identificación de sistemas

2.2.1 Paradigmas de aprendizaje en redes neuronales

Desde el punto de vista del tipo y calidad de la información suministrada a la red neuronal para efectuar el aprendizaje existen tres paradigmas:

Aprendizaje no supervisado: En este caso el objetivo a aprender no se especifica en forma de ejemplos correctos, sino que se espera que la red

neuronal cree las categorías adecuadas en función de las entradas a las que es sometida. Este paradigma es el menos informado puesto que en ningún momento se especifican las salidas deseadas.

Aprendizaje por reforzamiento: En este paradigma, a diferencia del anterior, existe una realimentación cualitativa de la calidad de funcionamiento de la red neuronal en la forma de una variable que marca si la salida es o no correcta, pero que no da información acerca de cuál es la salida deseada. Dicho de otra manera, el aprendizaje por reforzamiento sería la aplicación de una política de *premio-castigo*.

Aprendizaje supervisado: Este tipo de aprendizaje es el más informado, puesto que se proporciona a la red neuronal el valor de la salida deseada y, por tanto, el error que se genera presenta unas características vectoriales: su módulo nos informa de la bondad de la salida generada y la dirección nos muestra hacia donde nos equivocamos y, en su caso, cuál es la dirección que se debe tomar a fin de reducirlo. El aprendizaje supervisado se denomina algunas veces *aprendizaje con profesor* porque externamente se está proporcionando la respuesta correcta a fin de calcular el error.

En cierta forma, se podría considerar que el aprendizaje por reforzamiento es un caso particular del aprendizaje supervisado en el cual se ha perdido la información de dirección y se ha simplificado la información de módulo.

En la tesis se trabaja únicamente con el paradigma de aprendizaje supervisado puesto que es la forma natural de trabajar en identificación de sistemas por métodos de caja negra: la información de las salidas deseadas es proporcionada por el sistema que se desea identificar. Este aspecto supone una ventaja importante en el sentido de que se trabaja con el paradigma más informado y que, por otro lado, permite efectuar un planteamiento del problema de aprendizaje bien condicionado (funciones C^∞) para el desarrollo de la solución.

2.2.2 Tipos de problemas en el aprendizaje de secuencias

El problema de *aprender* una secuencia temporal se ha categorizado en el contexto de los métodos conexionistas en las siguientes tareas que están ordenadas por nivel de complejidad (Hertz *et al.*, 1991):

Reconocimiento de secuencias: En esta tarea se desea producir un patrón de salida específico cuando una determinada secuencia de entrada se introduce en la red neuronal. Es decir, a una entrada con temporalidad implícita se le asigna una única salida, no una secuencia; o sea, se está efectuando una clasificación de las secuencias de entrada.

Este tipo de funcionamiento puede conseguirse a través del uso de redes neuronales con baterías de retrasos en las entradas y también con redes neuronales parcialmente recurrentes como, por ejemplo, las redes del tipo propuesto por Elman (Elman, 1988).

Reproducción de secuencias: En este tipo de tarea la red neuronal debe ser capaz de generar el resto de una secuencia cuando ya ha visto una parte de ella, es decir, realiza algo parecido a una autoasociación de patrones extendida en el tiempo. Una aplicación puede ser la predicción de los valores futuros a partir del actual y los pasados en una serie temporal. Este problema, utilizando el léxico de teoría de control, constituye un subconjunto del problema de identificación de sistemas, puesto que el hecho de no tener entradas es equivalente a suponerlas constantes durante la operación.

Esta tarea de aprendizaje puede abordarse a través del uso de redes neuronales con baterías de retrasos, como por ejemplo en (Griño, 1991) donde se lleva a cabo la predicción del consumo diario de agua en una zona de la ciudad de Barcelona, o con redes neuronales parcialmente o totalmente recurrentes.

Asociación temporal: Esta es la tarea más general que nos puede aparecer en el tratamiento de secuencias temporales e incluye a las dos anteriores. Consiste en producir una secuencia de salida específica cuando se introduce en el modelo conexionista una determinada secuencia de entrada. De hecho, es la expansión a un contexto temporal de la heteroasociación de patrones característica de las redes multicapa estáticas.

El problema de identificación de sistemas, que motiva el trabajo de esta tesis, se enmarca dentro del tercer tipo de aprendizaje de secuencias: la asociación temporal. En particular, los modelos conexionistas deben ser capaces de generar una aproximación lo suficientemente buena de las señales de salida del sistema real correspondientes a las entradas utilizadas. Como se observa, esta tarea es la que presenta una mayor complejidad.

2.3 Arquitectura de los modelos conexionistas utilizados

El término red neuronal se ha aplicado a múltiples cosas en los últimos años, como por ejemplo: elementos hardware, aglomerados de células nerviosas, programas de computador, algoritmos matemáticos, etc. En este trabajo este término se emplea como sinónimo de un sistema dinámico ¹ no lineal que guarda cierta semejanza estructural con los modelos simplificados de los agregados de células nerviosas.

En realidad, las neuronas biológicas presentan un comportamiento tan complicado que es difícil realizar su análisis matemático. A pesar de ello, existen modelos de reconocida solvencia para una sola neurona, como por ejemplo, el modelo de Hodgkin-Huxley. No obstante, cuando lo que se pretende analizar es el comportamiento de agrupaciones de neuronas no se tienen aún modelos validados, y en general se trabaja con modelos que consideran el comportamiento de cada una de las neuronas que conforman la red de forma muy simple. Esto implica que se puede hacer uso de las redes así construidas para tareas de carácter práctico, por ejemplo identificar sistemas, pero a la vez desde el punto de vista biológico aparecen como juguetes poco parecidos a la realidad biológica.

Sin embargo, el presente trabajo se abstrae de las implicaciones biológicas que puedan aparecer por la nomenclatura y considera a las redes neuronales como sistemas dinámicos de elevada complejidad y configurabilidad que permiten llevar a cabo las tareas de identificación de sistemas propuestas. Por tanto, una red neuronal con los pesos fijos (equivalente a parámetros constantes) se considera como un sistema dinámico de tipo general: dado el valor inicial de las activaciones (variables de estado) de todos los nodos y la trayectoria de entradas a la red para todo tiempo mayor que el tiempo inicial, la trayectoria de las activaciones de la red queda determinada. A este modo de operación se le denomina *dinámica de activación*, y vendría a ser, salvando una inmensa distancia, equivalente a la acción de “pensar” de un ente biológico.

Asociado a este sistema dinámico, habrá otro que se encargará de efectuar las modificaciones en los pesos (parámetros) de la red neuronal a fin de ajustar su comportamiento a lo deseado. Este sistema se denomina *dinámica de aprendizaje*, y puede ser asociado, como antes salvando la distancia, a la acción de aprender de un ente biológico.

¹Expresable como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Estos dos sistemas dinámicos forman lo que se entiende por red neuronal con mecanismo de aprendizaje y hay que hacer notar que presenta dos velocidades distintas: la dinámica de activación es de evolución mucho más rápida que la dinámica de aprendizaje. Este hecho puede asimilarse a las acciones “pensar” y “aprender” que se dan en los organismos inteligentes únicamente en cuanto a la rapidez con que se desarrollan estas actividades.

2.3.1 Características requeridas a los modelos de identificación

Los sistemas físicos reales presentan, en mayor o menor medida, componentes de comportamiento no lineal, por ello la clase de modelos que se desarrolla tiene que cumplir, entre otros, los siguientes requisitos:

- Debe ser capaz de capturar dinámicas no lineales, y por ello su estructura debe ser no lineal. Cumpliendo esta condición, la forma concreta del modelo puede ser variable en complejidad, siendo lo más recomendable escoger estructuras con buenas capacidades aproximativas. Los modelos conexionistas poseen estas capacidades.
- Las salidas del modelo deben ser de rango amplio y si es posible, ilimitado (sobre \mathbb{R}), ya que de esta forma las salidas predichas no saturan por la estructura del modelo, sino porque la configuración de sus parámetros así lo indica para ajustar lo más adecuadamente las salidas del sistema real que se está identificando.
- La influencia de las entradas debe ser variable en la estructura del modelo, puesto que de esta manera se le dota de una mayor riqueza en su dinámica y se evita la presencia de saturaciones en las entradas al aplicar señales de excitación adecuadas a los rangos de operación del proceso real.
- Los parámetros del modelo deben aparecer de forma lineal ya que esto permite emplear técnicas de ajuste de parámetros de menor complejidad y utilizar las herramientas matemáticas desarrolladas para esta clase de sistemas. También es interesante notar que las estructuras lineales en los parámetros presentan un “nivel” de no linealidad más bajo que los sistemas en los que los parámetros intervienen de forma no lineal, y esto es adecuado para la mayoría de los procesos industriales.

2.3.2 Elementos básicos

El elemento de proceso básico de una arquitectura conexionista es el nodo también llamado, por analogía con la neurofisiología, neurona. Desde un punto de vista general, el modelo básico de nodo (ver figura 2.2) consta de los siguientes elementos:

1. Un sumador ponderado.
2. Un sistema dinámico lineal SISO.²
3. Una función no lineal estática.

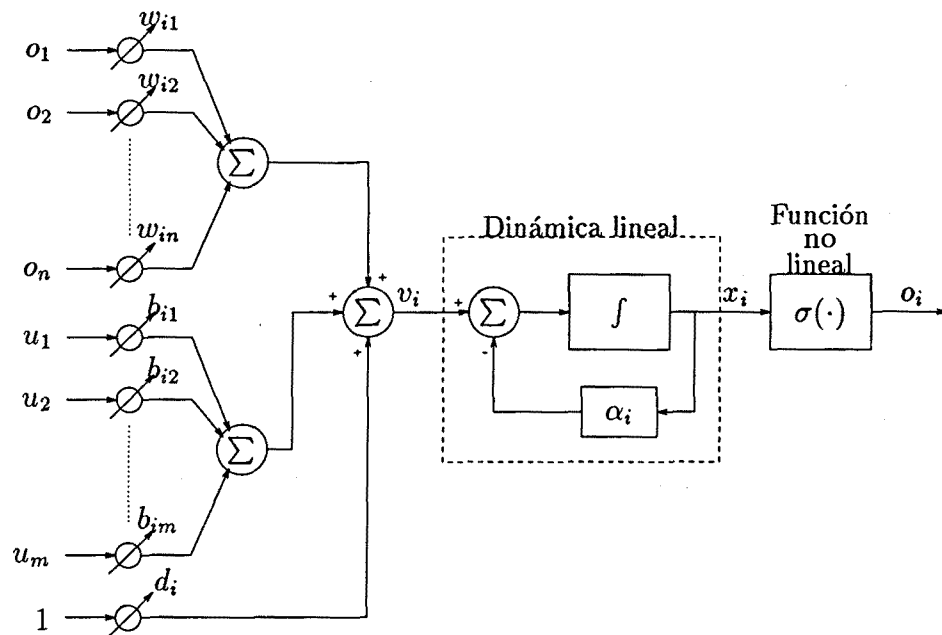


Figura 2.2: Esquema de un nodo en una red neuronal aditiva.

La formalización de los elementos que componen un nodo es la siguiente:

Sumador ponderado. El sumador ponderado está descrito por la ecuación:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} o_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k + d_i \quad (2.1)$$

²Una entrada - una salida.

donde la suma ponderada v_i viene dada como una combinación lineal de las salidas de los otros nodos de la red o_j , las entradas externas u_k y el término constante 1 (sesgo). Los coeficientes de la combinación lineal son los pesos w_{ij} , b_{ik} y d_i .

Tomando todas las ecuaciones (2.1), una para cada nodo en la red, y disponiéndolas en forma de matriz se obtiene la ecuación matricial:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{o} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{W} = [w_{ij}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{B} = [b_{ik}] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ son las matrices de pesos de la red y $\mathbf{d} = [d_i] \in \mathbb{R}^n$ el vector con los sesgos de cada nodo.

Sistema dinámico lineal. El sistema dinámico lineal SISO tiene como entrada v_i y como salida x_i . En este trabajo se consideran sistemas lineales de primer orden con una constante de tiempo $\tau_i = \frac{1}{\alpha_i}$ y una ganancia $K_i = \frac{1}{\alpha_i}$, cuya ecuación diferencial viene expresada por:

$$\dot{x}_i + \alpha_i x_i = v_i \quad (2.3)$$

y tiene como función de transferencia, obtenida por aplicación de la transformada de Laplace:

$$H(s) = \frac{X_i(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s + \alpha_i} \quad (2.4)$$

siendo s la variable de la transformada de Laplace. La respuesta impulsional de este sistema dinámico es $h(t) = \exp(-\alpha_i t)$.

Función no lineal estática. La función no lineal estática $\sigma(\cdot)$ da la salida del nodo o_i en función de la salida del sistema dinámico lineal (2.3):

$$o_i = \sigma(x_i) \quad (2.5)$$

Concretamente, en este trabajo se emplea la tangente hiperbólica ($\tanh(\cdot)$), puesto que es una función diferenciable con una forma similar al escalón y presenta simetría impar (media cero).

La función no lineal estática puede ser dependiente de un parámetro ($o_i = \sigma(x_i, \theta_i)$). En el caso de la tangente hiperbólica, una localización interesante para el parámetro puede ser

$$o_i = \tanh(\theta_i x_i) \quad (2.6)$$

puesto que así se controla la pendiente de la curva y, en cierto modo, su linealidad.

2.3.3 Arquitectura de los modelos aditivos

Los elementos básicos comentados en el apartado anterior se agrupan para formar un nodo del modelo conexionista aditivo según la ecuación:

$$\dot{x}_i = -\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} \sigma(x_j) + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k + d_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

siendo n el número de nodos del modelo. Estos modelos se denominan aditivos porque en la ecuación de cada nodo no aparecen productos entre activaciones x_i o entre funciones de éstas.

El conjunto de las ecuaciones para todos los nodos puede reescribirse de forma más compacta adoptando la estructura matricial³

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x}) + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.8)$$

donde las matrices \mathbf{W} , \mathbf{B} y el vector \mathbf{d} son los definidos en la ecuación (2.1), $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n]^T$ el vector fila formado por las inversas de las constantes de tiempo de las dinámicas lineales de los nodos y $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_N]$ el vector columna formado por las activaciones de los nodos del modelo. La matriz $\mathbf{S} = \sum_{j=1}^n (e_j \cdot e_j^T) \otimes e_j^T \in M_{n,n^2}(\{0, 1\})$, donde e_j es el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , nos permite expresar de forma compacta los términos $\alpha_i x_i$ para así agilizar los desarrollos que se efectuarán posteriormente.

Hasta ahora se tiene tan solo una ecuación de estado para el modelo conexionista y queda por especificar la ecuación de salida. En este trabajo, se toma como ecuación de salida

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.9)$$

que presupone una relación lineal entre las salidas del modelo y el vector de estado de éste. Específicamente, $\mathbf{C} = [c_{ij}] \in M_{s,n}(\mathbb{R})$ siendo s y n las dimensiones de los espacios de salida y de estado, respectivamente. El conjunto del modelo se presenta de forma gráfica en la figura 2.3.

2.3.4 Los modelos aditivos y la saturación por ruido

Los modelos conexionistas presentados en la sección anterior se denominan aditivos puesto que la dinámica que se efectúa en sus nodos comporta una adición de señales. En este sentido, esta clase de modelos puede ser vista como una

³Donde \otimes indica el producto de Kronecker (ver Anexo A).

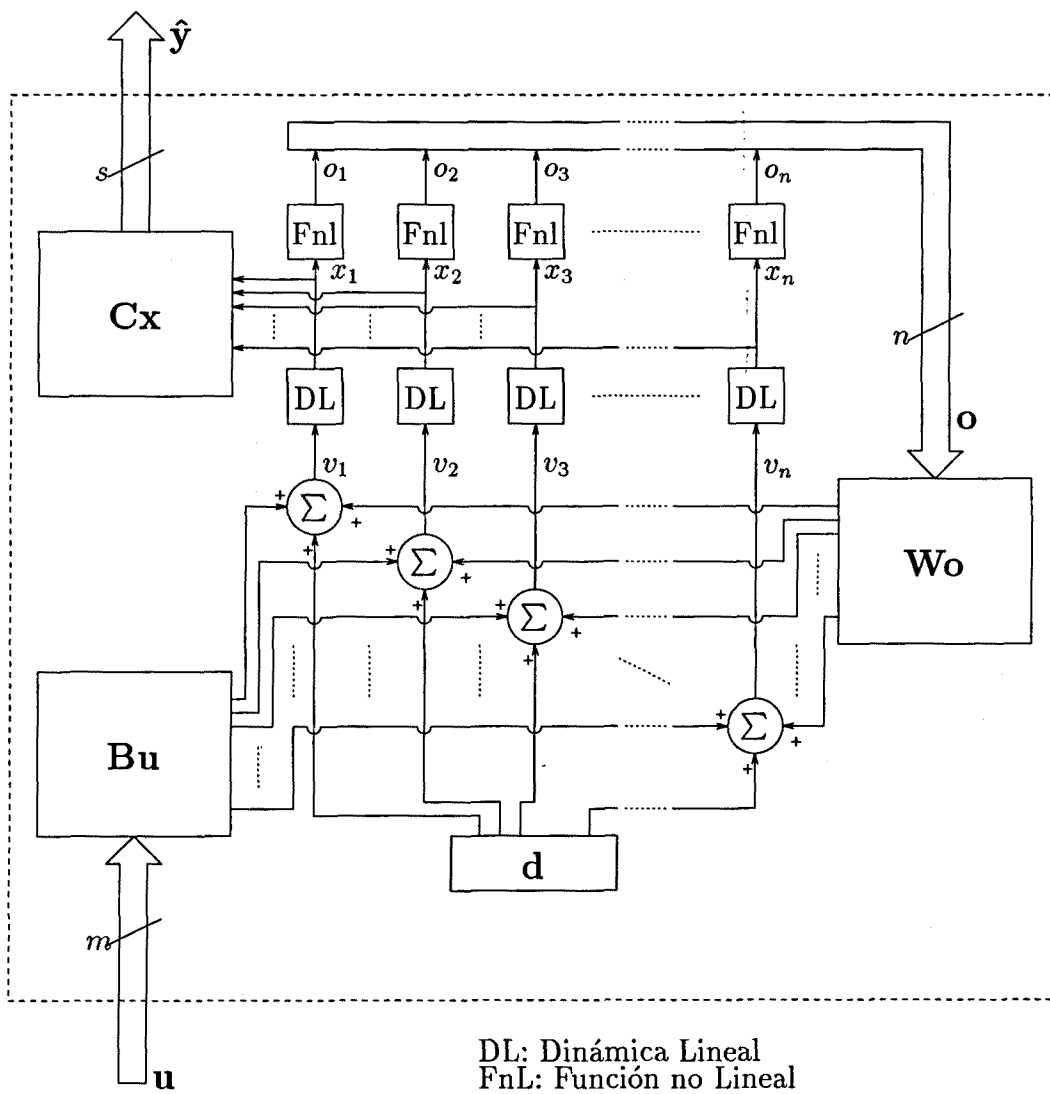


Figura 2.3: Esquema de una red neuronal dinámica aditiva.

primera extensión de los modelos lineales, máxime cuando los parámetros que aparecen en el modelo actúan de forma lineal; es decir, se puede considerar que el campo vectorial de la ecuación (2.8) es lineal con respecto a los parámetros en él presentes.

De acuerdo con el carácter aditivo de los nodos, puede darse el caso de que unas entradas de gran amplitud den lugar a un gran incremento en la activación x_i de un nodo, con lo cual la salida o_i del nodo puede llegar a saturarse tras pasar por la función no lineal $\sigma(\cdot)$.

Este planteamiento nos lleva al llamado *noise-saturation dilemma* de Grossberg (Kosko, 1992). Si una red neuronal es sensible a entradas de gran amplitud, tenderá a ignorar las entradas de baja amplitud como si fueran ruido. Y viceversa, si la red neuronal es sensible a entradas de baja amplitud, ignorará las entradas de gran amplitud puesto que entrará en saturación. Por tanto, debemos tener en cuenta la estrecha relación que hay entre la amplitud de las señales que entran y salen de la red neuronal y el rango dinámico de los nodos que la forman.

No obstante, en el modelo conexionista aditivo general que se plantea en este trabajo, este fenómeno está atenuado. La razón estriba en que se efectúa una ponderación de las entradas al modelo antes de pasarlas a los nodos y que las salidas son también ponderadas de forma lineal, minimizando así los efectos del rango dinámico limitado de las salidas internas de cada nodo. Así, tras una fase de aprendizaje con señales de una determinada amplitud, el modelo habrá adquirido unos parámetros concretos y estará configurado para funcionar con las señales que se han utilizado para el entrenamiento. Pero este hecho no es un problema relevante dentro del área de identificación de sistemas, puesto que el rango de las señales dentro de un sistema de control es generalmente fijo y conocido a priori por diseño y el entrenamiento se hace con señales que se mueven en el rango de operación del sistema.

2.4 Estabilidad absoluta del modelo neuronal

Una de las características más importantes a estudiar en cualquier sistema dinámico es su estabilidad. En particular, para las redes neuronales dinámicas es importante caracterizar la estabilidad de sus puntos fijos porque esto permite conocer la convergencia de la red hacia el punto esperado en el espacio de estado cuando recibe un determinado patrón en las entradas.

El estudio de la estabilidad de las redes neuronales dinámicas es un campo

en el que se han efectuado numerosos trabajos que, en un principio, imponían grandes restricciones al tipo de parámetros, por ejemplo, simetría en las matrices de pesos. Posteriormente, aparecieron nuevos trabajos que liberaban estas restricciones y se acercaban más a los casos reales que aparecen en el uso de las redes dinámicas. Así, aparecieron una serie de trabajos que derivaban condiciones suficientes para la estabilidad de las redes neuronales aditivas dinámicas basados en el estudio de la estabilidad a través del segundo teorema de Lyapunov como, por ejemplo (Guez *et al.*, 1988), (Hirsch, 1989), (Kelly, 1990) y (Matsuoka, 1992). En todos ellos se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad de las redes neuronales dinámicas de carácter algebraico y bajo coste computacional de verificación.

Todas ellas permiten asegurar la estabilidad asintótica global de un cierto punto de equilibrio de la red que se está considerando. No obstante, no tienen en cuenta la posibilidad de que algunos parámetros del sistema sean variables en el tiempo, lo que implicaría estudiar la estabilidad asintótica de manera global y uniforme del punto de equilibrio. Así pues, con esta finalidad, se desarrollan en este apartado, desde el punto de vista de los métodos frecuenciales de estudio de estabilidad, una serie de condiciones algebraicas suficientes para la estabilidad absoluta (asintótica de manera global y uniforme) de las redes neuronales dinámicas aditivas.

2.4.1 Teoría básica

Una amplia clase de sistemas físicos pueden ser representados como una conexión en realimentación de un sistema lineal y una función estática no lineal, tal como se muestra en la Fig. 2.4. Esta clase de sistemas se denomina sistemas de tipo Lure (Khalil, 1992; MacFarlane, 1979). Asumiendo que el sistema no está forzado, es decir, la entrada externa \mathbf{r} es cero, su descripción en el espacio de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v} = -\psi(\mathbf{z}) \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable, (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es observable, y $\psi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función no lineal estática localmente Lipchitziana en \mathbf{z} .

El sistema lineal puede también ser descrito, vease la Fig. 2.4, en formato entrada-salida mediante su función de transferencia matricial (Kailath, 1980)

(donde $s \in \mathbb{C}$ es la variable de Laplace)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (2.13)$$

la cual, en este caso, es una matriz cuadrada ($p \times p$) de funciones de transferencia estrictamente propias ⁴.

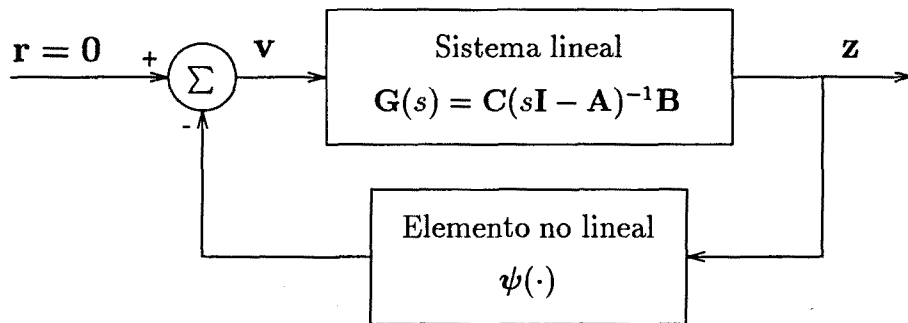


Figura 2.4: Sistema de tipo Lure: conexión en realimentación de un sistema lineal y un elemento no lineal.

A fin de clasificar la realimentación estática no lineal se establece la siguiente definición que se explica de forma gráfica para el caso monovariante en la Fig. 2.5.

Definición 2.1 (Khalil, 1992) Una no linealidad sin memoria (estática) $\psi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ se dice que satisface una condición de sector si

$$[\psi(\mathbf{z}) - \mathbf{K}_{min}\mathbf{z}]^T [\psi(\mathbf{z}) - \mathbf{K}_{max}\mathbf{z}] \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \quad (2.14)$$

para algunas matrices reales \mathbf{K}_{min} y \mathbf{K}_{max} , donde $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{max} - \mathbf{K}_{min}$ es una matriz simétrica definida positiva y el interior de Γ es conexo y contiene el origen. Si $\Gamma = \mathbb{R}^p$, entonces $\psi(\cdot)$ satisface la condición de sector globalmente, en cuyo caso se dice que $\psi(\cdot)$ pertenece al sector $[\mathbf{K}_{min}, \mathbf{K}_{max}]$. \square

Una vez que se ha establecido el concepto de condición de sector para una familia de no linealidades estáticas multivariantes, la siguiente definición enuncia qué se entiende por estabilidad absoluta.

⁴Es estrictamente propia porque no existe un camino directo entre la entrada \mathbf{v} y la salida \mathbf{z} en la ecuación de salida del sistema lineal como, por ejemplo, en $\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}$.

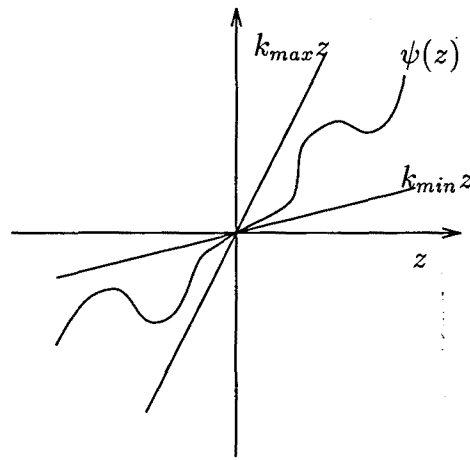


Figura 2.5: Sector $[\alpha, \beta]$ global para la función estática no lineal $\psi(z)$.

Definición 2.2 (Khalil, 1992) Considerando el sistema (2.10) – (2.12) con $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (no forzado), donde $\psi(\cdot)$ satisface una condición de sector según la Definición 2.1, el sistema es absolutamente estable si el origen es asintóticamente estable de forma global y uniforme para cualquier no linealidad en el sector dado. \square

Una vez establecido qué se entiende por estabilidad absoluta de un sistema, ésta puede ser verificada usando el siguiente Lema, que es una extensión del Criterio del Círculo (MacFarlane, 1979) para sistemas multivariables. Este enfoque para la verificación de la estabilidad está basado en aspectos frecuenciales de la teoría de sistemas (Netushil, 1987).

Lemma 2.3 (Khalil, 1992) Considerando el sistema (2.10) – (2.12) con $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (no forzado), donde \mathbf{A} es Hurwitz, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable, (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es observable, y $\psi(\cdot)$ satisface la condición de sector (2.14) globalmente, el sistema es absolutamente estable si

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{G}(s) \quad (2.15)$$

es estrictamente real positiva. \square

Esta característica de la matriz de funciones de transferencia $\mathbf{Z}(s)$ puede ser verificada, para el caso especial en el cual $\mathbf{Z}(\infty)$ es no singular, con el siguiente lema.

Lemma 2.4 (Khalil, 1992) Sea $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ una matriz $p \times p$ de funciones de transferencia, con $\det \mathbf{D} \neq 0$. Entonces $\mathbf{Z}(s)$ es estrictamente real positiva si y sólo si

- $\operatorname{Re}[\lambda_i(\mathbf{A})] < 0, \quad \forall i, \text{ and}$
- $\mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^T(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

□

Para comprobar la segunda condición del Lema 2.4 se puede usar el siguiente corolario (Horn & Johnson, 1992) como condición suficiente para establecer que una matriz hermítica sobre el campo complejo es definida positiva.

Corolario 2.5 Si $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ es hermítica y de diagonal estrictamente dominante ($|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$) y si $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces \mathbf{A} es definida positiva. □

2.4.2 Análisis de estabilidad del modelo neuronal

Este apartado desarrolla el análisis de estabilidad absoluta del modelo neuronal formulado en la Sección 2.3.3. La metodología seguida es: primero, se reformulan las ecuaciones del modelo como un sistema de tipo Lure y, segundo, se aplican las técnicas del dominio de la frecuencia del apartado anterior para el estudio de la estabilidad absoluta de esta clase de modelos.

2.4.2.1 Reformulación del modelo neuronal

Reescribiendo el modelo neuronal establecido en la Sección 2.3.3 de tal forma que el primer término del lado derecho de la ecuación (2.8) no aparezca en forma de producto de Kronecker resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{A} = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in M_n(\mathbb{R}^+)$ y los demás símbolos mantienen sus definiciones. El objetivo de este cambio de notación es simplificar los desarrollos que se efectúan a continuación.

Este modelo puede ser representado como un sistema de control con dos lazos de realimentación como puede verse en la Fig. 2.6. Sin embargo, además, el modelo puede ser reformulado como un sistema de tipo Lure tal y como se observa en la Fig. 2.7. En este caso, el sistema global se ve como un sistema dinámico lineal con una realimentación constituida por una no linealidad multivariable descentralizada estática.

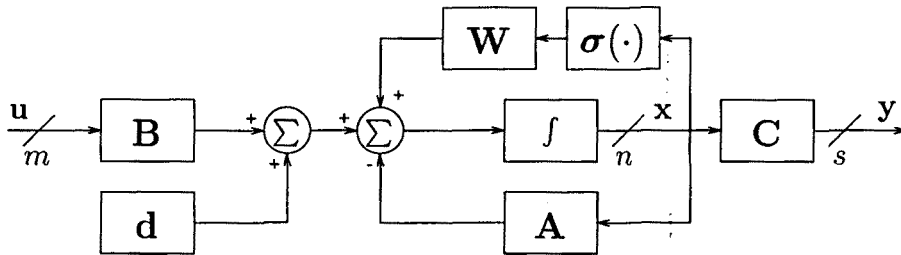


Figura 2.6: Diagrama de bloques del modelo neuronal con dinámica aditiva como sistema de control.

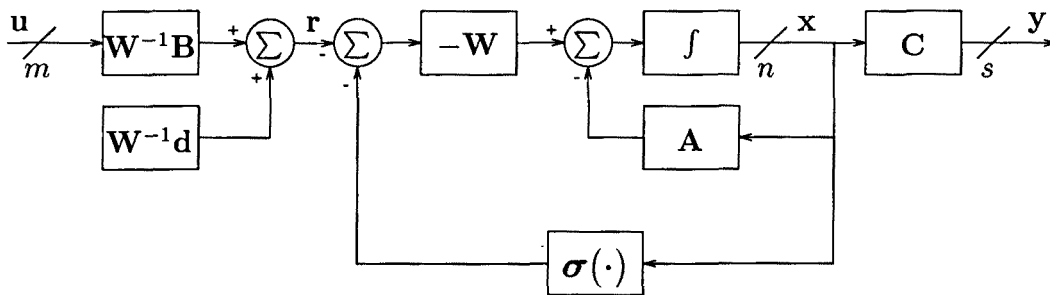


Figura 2.7: Diagrama de bloques del modelo neuronal con dinámica aditiva como sistema de tipo Lure.

De esta forma, las ecuaciones (2.16) y (2.17) pueden ser reescritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{v} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{I}_n \mathbf{x} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v} = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) - \mathbf{r} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.22)$$

con lo cual, asumiendo para el análisis de estabilidad absoluta el sistema no forzado $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ descrito por las ecuaciones (2.18)–(2.22) y tomando la parte

lineal en forma de matriz de funciones de transferencia (descripción externa con $s \in \mathbb{C}$ la variable de Laplace), resulta

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{I}_n (s\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} (-\mathbf{W}) \quad (2.23)$$

donde (\mathbf{A}, \mathbf{W}) se supone que es controlable y $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_n)$ observable. Además, tal como se muestra en la Fig. 2.7, la parte lineal se completa con la función estática descentralizada de realimentación $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las suposiciones sobre controlabilidad y observabilidad de la parte lineal son bastante razonables como se muestra en la siguiente discusión.

La observabilidad de $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_n)$, usando la condición de rango de observabilidad (Barnett & Cameron, 1993), es obvia ya que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (2.24)$$

La condición de rango de controlabilidad cuando se aplica al sistema lineal resulta

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A}\mathbf{W} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{W} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

que, evidentemente, no tiene porque ser igual a n , excepto en el caso de que la matriz de pesos del modelo neuronal sea no singular ($\text{rank } \mathbf{W} = n$). No obstante, esto se ha asumido implícitamente en la reformulación del modelo neuronal como un sistema de tipo Lure ⁵. De este modo, las suposiciones sobre controlabilidad y observabilidad son adecuadas para el estudio que se está efectuando ⁶.

El siguiente paso es la caracterización de la no linealidad del modelo neuronal aplicando la definición 2.1. Puede observarse que, debido a que el modelo es descentralizado, \mathbf{K}_{min} and \mathbf{K}_{max} pueden ser matrices diagonales. Concretamente, si se trabaja únicamente con una de las componentes de $\sigma(\cdot)$ (es decir, $\sigma_i(z_i) = \tanh(z_i)$) con $k_{min} = 0$ y $k_{max} = 1$, la Definición 2.1 se cumple

$$f_i(z_i) = \sigma_i(z_i)(\sigma_i(z_i) - z_i) = \tanh^2(z_i) - z_i \tanh(z_i) \leq 0 \quad (2.26)$$

ya que $f_i(z_i)$ alcanza su máximo global 0 en $z_i = 0$. Extendiendo este razonamiento al caso multivariable puede verificarse que el máximo global de

⁵De hecho, no es muy probable que la matriz de pesos que resulta del proceso de adaptación de parámetros del modelo neuronal empleado presente un rango no máximo.

⁶Es necesario destacar que si la red neuronal utilizada presentara una dinámica *feedforward* (matriz de pesos triangular superior con diagonal nula) no se verificaría la condición de rango de controlabilidad y, por tanto, el procedimiento no podría aplicarse.

la función escalar de variable vectorial $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^p f_i(z_i)$ es $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Cuando este procedimiento se aplica al modelo neuronal bajo estudio resulta que la no linealidad estática descentralizada pertenece al sector $[\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n], \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

2.4.2.2 Análisis de estabilidad

En este apartado se establece una condición suficiente para la estabilidad absoluta del modelo neuronal presentado al principio del capítulo. En primer lugar, para el caso más general ($\mathbf{A} = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in M_n(\mathbb{R}^+)$, $\mathbf{W} \in M_n(\mathbb{R})$) y, posteriormente, para casos particulares de la estructura del modelo neuronal: valores iguales para las α_i , matriz de pesos simétrica ($\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$) y sus combinaciones.

Proposición 2.6 El modelo neuronal con dinámica aditiva descrito por las ecuaciones (2.16) y (2.17) con una matriz de pesos no singular (es decir, $\text{rank } \mathbf{W} = n$) es absolutamente estable si se verifican las siguientes condiciones:

$$w_{ii} < \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

$$16(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i) > 8 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i| + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n | -w_{ji} + w_{ij} | \right)^2 \quad (2.28)$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

□

Dem. La demostración está basada en el Lema 2.3. Como se ha mencionado anteriormente, las condiciones previas (controlabilidad, observabilidad y \mathbf{A} Hurwitz) se verifican, y únicamente es necesario asegurar que $\mathbf{Z}(s)$ es estrictamente real positiva.

La matriz de funciones de transferencia de la parte lineal del modelo neuronal, con los valores propios de \mathbf{A} satisfaciendo la primera condición del Lema 2.4, es

$$\mathbf{G}(s) = -(j\omega\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W} \quad (2.29)$$

y, por tanto,⁷

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{I} - (j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W} \quad (2.30)$$

⁷El subíndice n en la matriz identidad no se utilizará en adelante a fin y efecto de no congestionar la notación.

Aplicando el Lema 2.4 y la relación ⁸

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}) + (\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(\mathbf{R}^{-1})^*) = \mathbf{R}^{-1} [2\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{R}\mathbf{S}^* - \mathbf{S}\mathbf{R}^*] (\mathbf{R}^{-1})^*$$

resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^*(j\omega) &= (\mathbf{I} - (j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W}) + (\mathbf{I} - (j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W})^* \\ &= (\mathbf{I} - (j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W}) + (\mathbf{I} - \mathbf{W}^* ((j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1})^*) \\ &= (j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q} ((j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1})^* \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [2(j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})(j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^* - (j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{W}^* - \mathbf{W}(j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^*] \\ &= [2(\mathbf{A}^2 + \omega^2\mathbf{I}) - \mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{W}^T + j\omega(-\mathbf{W}^T + \mathbf{W})] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Puesto que (2.31) es una forma hermítica para la matriz $((j\omega\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1})^*$, ya que la matriz \mathbf{Q} es hermítica ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*$), para poder aplicar el Lema 2.4 solamente es necesario determinar cuándo \mathbf{Q} es definida positiva usando el Corolario 2.5. Los elementos de \mathbf{Q} son

$$q_{ii} = 2(\alpha_i^2 + \omega^2) - 2w_{ii}\alpha_i \quad (2.33)$$

$$q_{ij} = -(w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i) + j\omega(w_{ji} + w_{ij}) \quad (2.34)$$

Imponiendo que los elementos de la diagonal principal (q_{ii}) sean positivos y tomando el valor más desfavorable de la frecuencia ($\omega = 0$), resulta la primera condición

$$w_{ii} < \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

La segunda condición se obtiene al imponer la dominancia estricta de la diagonal de \mathbf{Q} matrix teniendo en cuenta que (2.35) permite eliminar el valor absoluto en el lado izquierdo de la condición de dominancia estricta de la diagonal

$$2(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i + \omega^2) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n | -(w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i) + j\omega(-w_{ji} + w_{ij}) | \quad (2.36)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{(w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i)^2 + \omega^2(-w_{ji} + w_{ij})^2} \quad (2.37)$$

$\forall i = 1, \dots, n$

⁸En detalle:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}) + (\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(\mathbf{R}^{-1})^*) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{S}\mathbf{R}^*) (\mathbf{R}^{-1})^* + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{R}\mathbf{S}^*) (\mathbf{R}^{-1})^* = \mathbf{R}^{-1} [2\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{R}\mathbf{S}^* - \mathbf{S}\mathbf{R}^*] (\mathbf{R}^{-1})^*$$

En la ecuación anterior, el término (2.37) puede ser acotado superiormente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i| + |\omega| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |-w_{ji} + w_{ij}| \\ \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{(w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i)^2 + \omega^2(-w_{ji} + w_{ij})^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

insertando esta cota superior para (2.37) en el lado derecho de la desigualdad (2.36) resulta la condición suficiente más restrictiva

$$2(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i + \omega^2) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i| + |\omega| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |-w_{ji} + w_{ij}| \quad (2.39)$$

que da lugar a la desigualdad estricta

$$2\omega^2 - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |-w_{ji} + w_{ij}| \right) |\omega| + \left(2(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i| \right) > 0 \quad (2.40)$$

Como en la primera de las condiciones de la proposición, es necesario encontrar el valor más desfavorable de ω a fin de obtener una condición independiente de la frecuencia. En este caso, el lado izquierdo de la ecuación (2.40) es una función par de la frecuencia, ya que es una suma de funciones pares, y únicamente es necesario encontrar el mínimo del tramo de parábola que se halla en el semiplano derecho ($\omega > 0$). El mínimo se presenta para $\omega = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |-w_{ji} + w_{ij}|}{4}$, e imponiendo que el lado izquierdo de la desigualdad (2.40) sea positivo para este valor de frecuencia se concluye la segunda condición de la proposición:

$$16(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i) > 8 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i| + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |-w_{ji} + w_{ij}| \right)^2, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.41)$$

Corolario 2.7 El modelo neuronal con dinámica aditiva descrito por las ecuaciones (2.16) y (2.17) con una matriz de pesos no singular (es decir, $\text{rank } \mathbf{W} =$

n) y el mismo valor para todos los elementos de la diagonal principal de \mathbf{A} ($\alpha_i = \alpha, \forall i$) es absolutamente estable si se verifican las siguientes condiciones:

$$w_{ii} < \alpha, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.42)$$

$$16\alpha(\alpha - w_{ii}) > 8\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij} + w_{ji}| + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |-w_{ji} + w_{ij}| \right)^2 \quad (2.43)$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

□

Dem. Obvia a partir de la Proposición 2.6. ■

Corolario 2.8 El modelo neuronal con dinámica aditiva descrito por las ecuaciones (2.16) y (2.17) con una matriz de pesos simétrica no singular (es decir, $\text{rank } \mathbf{W} = n$ y $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$) es absolutamente estable si se verifican las siguientes condiciones:

$$w_{ii} < \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.44)$$

$$2(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}| |\alpha_j + \alpha_i|, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

□

Dem. Esta demostración sigue el procedimiento de la demostración de la Proposición 2.6 hasta la ecuación (2.36) la cual, en este caso, tiene la parte imaginaria en el módulo del lado derecho de la desigualdad igual a cero debido a la simetría de la matriz de pesos, es decir,

$$2(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i + \omega^2) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}\alpha_j + w_{ji}\alpha_i|, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

Por esta razón, no es necesario acotar el valor absoluto, como ocurría en la Proposición 2.6, y este hecho conduce a la condición menos restrictiva

$$2(\alpha_i^2 - w_{ii}\alpha_i) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}| |\alpha_j + \alpha_i|, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

que resulta de substituir el valor más desfavorable de la frecuencia, que es $\omega = 0$. ■

Corolario 2.9 El modelo neuronal con dinámica aditiva descrito por las ecuaciones (2.16) y (2.17) con una matriz de pesos simétrica no singular (es decir, $\text{rank } \mathbf{W} = n$ y $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$) y el mismo valor para todos los elementos de la diagonal principal de \mathbf{A} ($\alpha_i = \alpha, \forall i$) es absolutamente estable si se verifican las siguientes condiciones:

$$w_{ii} < \alpha, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

$$(\alpha - w_{ii}) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |w_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

□

Dem. Obvia a partir del Corolario 2.8. ■

2.4.3 Estabilidad absoluta de un punto de equilibrio general

El concepto de estabilidad absoluta está referido al punto de equilibrio de valor cero del sistema dinámico. En el caso del modelo neuronal, esto corresponde a la dinámica no forzada de la red, es decir, $\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Sin embargo, para otras clases de entradas que no verifiquen la última ecuación, el punto de equilibrio puede no ser nulo. Es más, para cada entrada constante en el tiempo existe el correspondiente punto de equilibrio. En cada uno de estos puntos, las características de la dinámica de la parte lineal no cambian, pero sí que se produce un cambio en el comportamiento de la realimentación no lineal estática. Teniendo en cuenta la ecuación (2.16), el punto de equilibrio \mathbf{x}^0 para un vector de entrada \mathbf{u}^0 satisface

$$\mathbf{0} = -\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{B}\mathbf{u}^0 + \mathbf{d} \quad (2.50)$$

Efectuando una translación de este punto $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ al origen con el cambio de variables

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^0 \quad (2.52)$$

resulta la siguiente ecuación dinámica para el modelo neuronal,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}^0) + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}^0) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\nu} + \mathbf{u}^0) + \mathbf{d} \quad (2.53)$$

$$= -\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}^0) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^0)) + \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} \quad (2.54)$$

$$= -\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{W}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} \quad (2.55)$$

Como puede observarse, la estructura de la ecuación permanece inalterada con respecto al caso anterior ya que puede considerarse la dinámica no forzada del sistema ($\nu = \mathbf{0}$). La única diferencia reside en la función no lineal estática $\eta(\cdot)$. Puede demostrarse que satisface el sector $[\mathbf{0}_n, \mathbf{K}]$ con $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\} \in M_n(\mathbb{R}^+)$ y $k_i \leq 1 \forall i$. En general, las k_i serán diferentes para cada i debido a que las componentes $\eta_i(\cdot)$ de la realimentación no lineal serán también diferentes en función de las componentes x_i^0 del punto de equilibrio. El hecho de que $k_i \leq 1$, implica que las condiciones suficientes desarrolladas anteriormente comprenden todas las situaciones que pueden derivarse para cualquiera de los puntos de equilibrio para una entrada u a la red neuronal.

2.5 Estructura de identificación propuesta

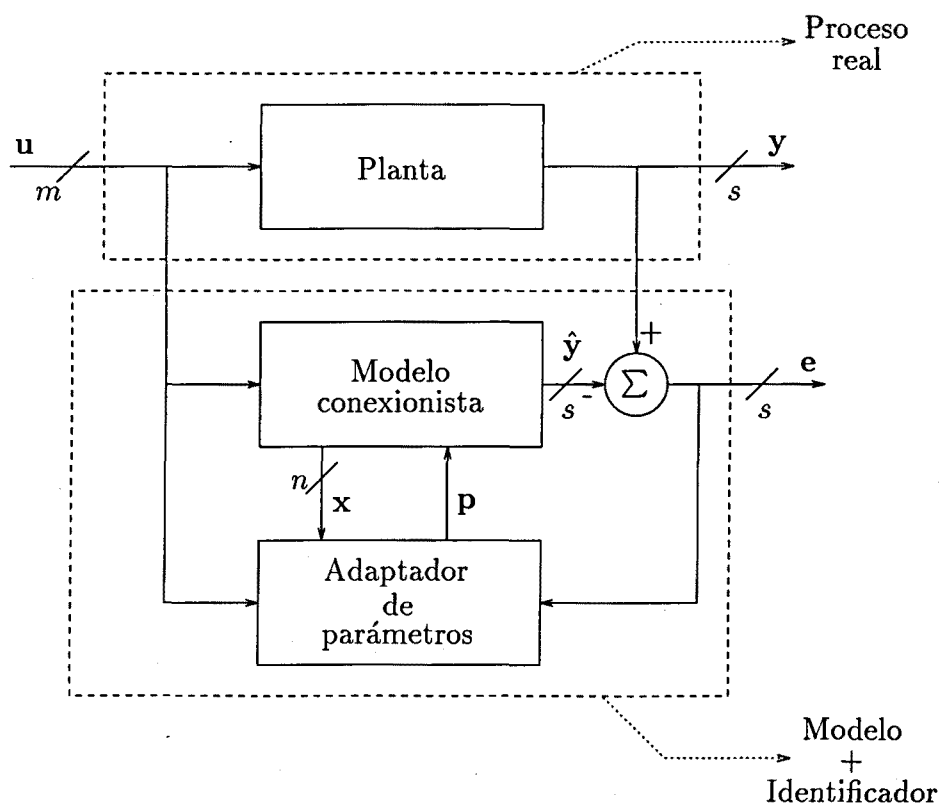


Figura 2.8: Estructura del método de identificación.

La idea básica de la identificación de sistemas dinámicos mediante modelos paramétricos, concretamente en nuestro caso modelos con arquitectura conexionista, aparece reflejada en la figura 3.1. La estrategia consiste en disponer al modelo en paralelo con el proceso real que queremos identificar; es decir, excitamos el proceso real y el modelo con las mismas señales u y observamos las salidas de los dos sistemas: y para el proceso real y \hat{y} para el modelo que lo intenta representar. Claramente, se intenta que los dos vectores de salida sean iguales para todo t , aunque esto no será posible puesto que únicamente estamos aproximando un cierto comportamiento dinámico, y no podemos reproducirlo exactamente puesto que no conocemos la estructura del sistema dinámico que lo está generando. Cabe destacar, como hipótesis básica para todo este planteamiento que los modelos conexionistas que estamos utilizando son capaces de identificar el proceso real que subyace en nuestras observaciones entrada-salida. Esta hipótesis se denomina también *identificabilidad* para una clase de modelos (Hunt *et al.*, 1992), y es un tema pendiente dentro del área de identificación de sistemas. Expresando de forma más clara que comporta esta hipótesis se puede hacer su paralelismo con el concepto de controlabilidad de sistemas y formular la afirmación siguiente:

Si un proceso real es identificable por la clase de modelos que con la que se está trabajando, entonces se podrá encontrar un adaptador de parámetros que permita a nuestro modelo identificar el comportamiento dinámico de ese proceso.

En nuestro caso, dada la peculiar arquitectura de los modelos que se emplean, que tal y como se muestra en la literatura especializada tienen unas grandes capacidades aproximativas (Funahashi & Nakamura, 1993), eludiremos el problema considerando en el trabajo que siempre nuestros modelos son capaces de identificar la dinámica del proceso real.

Capítulo 3

Aprendizaje basado en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad

Este capítulo desarrolla el aprendizaje en línea basado en técnicas de gradiente y análisis de sensibilidad para el modelo conexionista aditivo formulado en el capítulo anterior. Asimismo, se describen las peculiaridades que aparecen en la formulación del método de aprendizaje poniendo de relieve la incidencia que tienen en la operación del mismo.

En particular, en la primera sección se describe de forma genérica el problema de identificación, la función de coste utilizada y se desarrollan las leyes de adaptación de parámetros del modelo. En la segunda sección se enuncian algunas definiciones básicas para el estudio de sensibilidad y se desarrollan sus ecuaciones particularizadas para el modelo conexionista aditivo. Finalmente, en la tercera sección se efectúa un resumen de todas las ecuaciones involucradas en el mecanismo de identificación paramétrica valorándose las condiciones de aplicabilidad y la complejidad global del conjunto.

3.1 Formulación del problema de identificación

Siguiendo el marco genérico para la identificación paramétrica de sistemas propuesto al final del capítulo anterior y asumiendo que la clase de modelos empleada es capaz de identificar el sistema real bajo estudio, se propone en este apartado el esquema de identificación que aparece en la figura 3.1. La

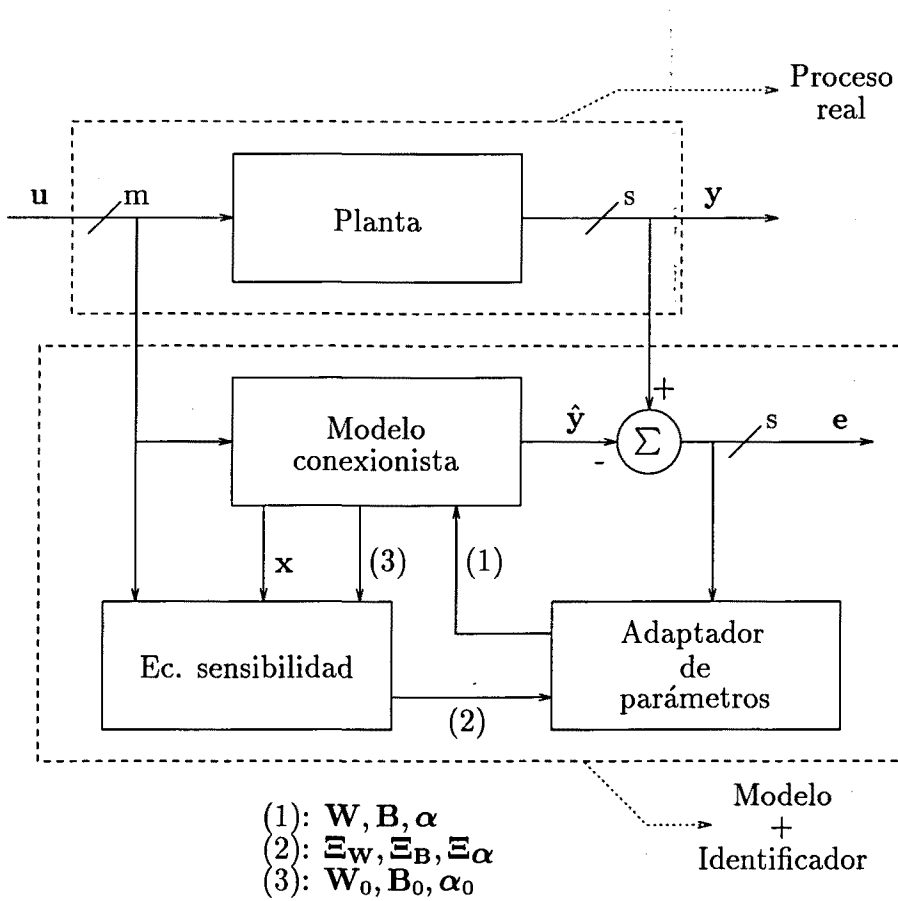


Figura 3.1: Esquema de la estructura y el mecanismo de identificación.

estrategia consiste en disponer al modelo en paralelo con el proceso real que se desea identificar; es decir, el proceso real y el modelo de identificación se excitan con la misma señal u y se capturan las salidas de los dos sistemas: y para el proceso real e \hat{y} para el modelo que lo intenta representar. Claramente, el objetivo es que los dos vectores de salida sean iguales para todo t aunque esto, obviamente, no será posible puesto que únicamente se está aproximando un cierto comportamiento dinámico en base a información entrada-salida, y no se conoce la estructura del sistema dinámico real.

En la figura 3.1 se observa, además, la presencia de un bloque de adaptación de parámetros que, a partir del error de identificación y de la sensibilidad de las trayectorias predichas frente a los parámetros actuales, calcula los nuevos valores de éstos. Estas sensibilidades se calculan mediante las ecuaciones de sensibilidad dinámica del modelo de identificación tal como se verá más adelante.

3.1.1 Función de coste

El problema de identificación consiste en ajustar los parámetros del modelo conexionista aditivo descrito por las ecuaciones (2.8-2.9) para obtener un comportamiento dinámico igual al que presenta el sistema real. Se recuerda que dichas ecuaciones son de la forma

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha, W, B) = -S(\alpha \otimes x) + W\sigma(x) + Bu + d \quad (3.1)$$

$$\hat{y} = Cx \quad (3.2)$$

en las que $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ el vector de entrada al modelo y al proceso real, $\hat{y} \in \mathbb{R}^s$ el vector de salida del modelo y $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $W \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{s,n}(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{R}^n$ los vectores y matrices de parámetros del modelo. La matriz de permutación $S \in M_{n,n^2}(\{0,1\})$ se construye como $S = \sum_{j=1}^n D_j \otimes e_j^T$ con $D_j = \text{diag}\{0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0\} \in M_n(\{0,1\})$, siendo e_j el j -ésimo vector de la base natural de \mathbb{R}^n .

Si se toma la salida del proceso real y y la del modelo \hat{y} , puede definirse el vector de error de identificación como $e = y - \hat{y}$. Este error es función únicamente del valor de los parámetros y del tiempo

$$e = e(t, \alpha, W, B) \in \mathbb{R}^s \quad (3.3)$$

y toma el valor cero cuando el modelo se ajusta de forma perfecta al comportamiento del sistema a identificar. En consecuencia, el problema de identificación

paramétrica consiste en encontrar un conjunto de parámetros tal que $\hat{y} = y$, y para ello se debe modificar de forma recursiva el conjunto de parámetros del modelo a fin de conseguir que el error de identificación tienda hacia cero o a un valor residual pequeño debido al ruido inherente al proceso real.

Para conseguirlo, se define una función de coste sobre el vector de error de identificación que pondere la bondad del mecanismo de identificación y que alcance su mínimo cuando el error de identificación sea nulo. La función escogida es

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (3.4)$$

en la que \mathbf{Q} es una matriz simétrica definida positiva que pondera las componentes del error de identificación ¹.

3.1.2 Ley de adaptación de parámetros

En cuanto al mecanismo de adaptación de parámetros, un método usual es efectuar su modificación en sentido contrario al del vector gradiente con respecto de los parámetros del modelo de la función de coste. Concretando, para el modelo adoptado se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\epsilon_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}^0 \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = -\epsilon_{\mathbf{W}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{W}}, \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}^0 \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\epsilon_{\mathbf{B}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}^0 \quad (3.7)$$

donde las constantes ϵ . son las velocidades de aprendizaje de cada conjunto de parámetros. Estas constantes también pueden ser vistas como modificadores de las tasas de cambio de los parámetros del modelo conexionista al cual pertenecen.

Las ecuaciones (3.5)-(3.7), aunque expresan de forma genérica la forma de cambio de los parámetros en el modelo, necesitan ser desarrolladas para poder llegar a ser operativas. Concretamente, es necesario desarrollar las derivadas de la función de coste V frente a todos los conjuntos de parámetros del modelo utilizando la regla de la cadena extendida para operaciones matriciales (ver apéndice A.2).

¹Un caso particular puede ser $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Con el fin de ilustrar la técnica, en los siguientes párrafos se muestran algunos desarrollos para finalmente recoger en la tabla 3.1 todos los resultados. Por ejemplo, desarrollando el término $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} (\mathbf{e}(\alpha)) = \left(\frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \alpha} \otimes \mathbf{I}_1 \right) \left(\mathbf{I}_1 \otimes \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right) = \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \quad (3.8)$$

donde el segundo término del miembro más a la derecha es

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) \mathbf{e} = \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (3.9)$$

según la definición de la función de coste V de la ecuación (3.4) y la simetría de \mathbf{Q} . En cuanto al primer término del miembro más a la derecha de la ecuación (3.8), es necesario aplicar por segunda vez la regla de la cadena obteniéndose

$$\frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \alpha} (\hat{\mathbf{y}}^T(\alpha)) = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}^T}{\partial \alpha} \otimes \mathbf{I}_1 \right) \left(\mathbf{I}_1 \otimes \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \hat{\mathbf{y}}} \right) = \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \hat{\mathbf{y}}} \quad (3.10)$$

donde según la definición del vector de error hecha anteriormente $\frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \hat{\mathbf{y}}} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \hat{\mathbf{y}}^T} \right)^T = -\mathbf{I}_s$ queda finalmente

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\epsilon \alpha \frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\epsilon \alpha \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} = -\epsilon \alpha \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \hat{\mathbf{y}}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} = \\ &= -\epsilon \alpha \left(-\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}^T}{\partial \alpha} \mathbf{I}_s \mathbf{Q} \mathbf{e} \right) = \epsilon \alpha \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}^T}{\partial \alpha} \mathbf{Q} \mathbf{e} = \epsilon \alpha \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \alpha^T} \right)^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.11)$$

siendo $\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}^T}{\partial \alpha}$ la transpuesta de la matriz de Jacobi de las trayectorias de salida del modelo frente a los parámetros, $\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \alpha^T}$. En la ecuación anterior este término no puede desarrollarse más mediante la regla de la cadena y es necesario recurrir a técnicas de análisis de sensibilidad para poder efectuar su cálculo. La aplicación del análisis de sensibilidad al modelo conexionista aditivo se lleva a cabo en el apartado siguiente para los diferentes conjuntos de parámetros que aparecen en el modelo.

Si ahora se desarrolla el término $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{W}}$ para así tener un ejemplo de parámetros organizados como vector y otro como matriz resulta

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{W}} (\mathbf{e}(\mathbf{W})) = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}^T} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{W}} \otimes \mathbf{I}_1 \right) = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}^T} \right) \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{W}} \quad (3.12)$$

donde el término del miembro más a la derecha es, por aplicación de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{W}} (\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{W})) = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \hat{\mathbf{y}}^T} \right) \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} \otimes \mathbf{I}_1 \right) = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \hat{\mathbf{y}}^T} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} \quad (3.13)$$

Substituyendo la ecuación (3.13) en la (3.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{W}} &= \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}^T} \right) \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{y}^T} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \right) \left(\mathbf{I}_n \otimes (-\mathbf{I}_s) \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} = \\ &= - \left[\left(\mathbf{I}_n \mathbf{I}_n \right) \otimes \left(\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{I}_s \right) \right] \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} = - \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \right) \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

con lo cual la ecuación de actualización del subconjunto de parámetros \mathbf{W} queda como

$$\dot{\mathbf{W}} = \epsilon_{\mathbf{W}} \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \right) \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}} \quad (3.15)$$

donde, a su vez, el término $\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}}$ no puede desarrollarse más mediante la regla de la cadena, debiéndose recurrir a las técnicas de análisis de sensibilidad dinámica de sistemas.

Parámetro	Ecuación de adaptación
α	$\dot{\alpha} = \epsilon_{\alpha} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \alpha^T} \right)^T \mathbf{Q} \mathbf{e}, \quad \alpha(0) = \alpha^0$
\mathbf{W}	$\dot{\mathbf{W}} = \epsilon_{\mathbf{W}} \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \right) \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{W}}, \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}^0$
\mathbf{B}	$\dot{\mathbf{B}} = \epsilon_{\mathbf{B}} \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \right) \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}^0$

Tabla 3.1: Ecuaciones de adaptación de los parámetros del modelo conexionista.

Como se ha visto, en las ecuaciones de adaptación de los parámetros del modelo, aparecen unas constantes ϵ . que modifican de forma clara su comportamiento dinámico, concretamente la velocidad de cambio. A estas constantes, en general, se les asignan valores positivos cercanos a cero haciendo, de este modo, que los parámetros del modelo tengan una dinámica de evolución lenta. Este hecho queda patente en numerosas referencias en la literatura especializada. No obstante, una justificación razonada de la necesidad de que las constantes ϵ . tengan valores pequeños aparece en el apartado 3.3.1 y surge de forma natural a partir del desarrollo de las ecuaciones de sensibilidad del modelo.

3.2 Análisis de sensibilidad dinámica del modelo conexionista

3.2.1 Definiciones previas

El problema matemático básico en teoría de sensibilidad es el cálculo del cambio de comportamiento en un sistema debido a las variaciones que experimentan sus parámetros. En particular, en esta tesis se utiliza la definición:

Definición 3.1 (Frank, 1978) La función de sensibilidad absoluta es

$$S_j \triangleq \left. \frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \quad (3.16)$$

donde $\zeta(\alpha)$ es cualquier función que caracterice el comportamiento del sistema y α es el vector de parámetros de dicho sistema. \square

Tal como puede deducirse de la definición anterior, la sensibilidad frente a las variaciones de los parámetros de un sistema no es un coeficiente sino una función y, concretamente en el estudio que sigue, una función temporal. Asimismo, y como también se aprecia en la definición, las variaciones que experimentan los parámetros del sistema se han llevado al límite de variaciones infinitesimales con lo cual la función de sensibilidad queda representada como derivada parcial.

No obstante, no todas las variaciones que experimentan los diferentes parámetros de un sistema son iguales. A este efecto se establece la siguiente clasificación, que puede considerarse como estándar, de las variaciones de parámetros de un sistema (Frank, 1978):

Definición 3.2 Existen tres categorías de variación de parámetros en sistemas dinámicos de tiempo continuo:

Errores de tipo α : son variaciones de parámetros alrededor de un valor nominal α_0 que no afectan al orden del modelo matemático. Es condición necesaria que $\alpha_0 \neq 0$.

Errores de tipo β : son variaciones de las condiciones iniciales del sistema dinámico alrededor de su valor nominal β_0 .

Errores de tipo λ : son variaciones de parámetros alrededor de su valor nominal $\lambda_0 = \mathbf{0}$ que afectan al orden del modelo matemático.

□

En el caso que nos ocupa, las variaciones de parámetros que experimenta el modelo de identificación son de tipo α , puesto que se asumen las siguientes hipótesis:

- las condiciones iniciales de los modelos no dependen de los parámetros del modelo.
- las condiciones iniciales de los modelos no son conocidas y el ajuste de los parámetros debe ser lo más insensible posible a éstas.
- ninguno de los parámetros del sistema se anula de forma estricta y, si lo hiciera, no daría lugar a pérdida de orden en el modelo matemático².
- las entradas al sistema y al modelo no dependen de los parámetros del sistema. Esta hipótesis se basa en que la identificación del sistema se efectúa en lazo abierto y, por tanto, las entradas al mismo son independientes de su comportamiento dinámico.

3.2.2 Desarrollo de las ecuaciones de sensibilidad

En este apartado se desarrollan las ecuaciones de sensibilidad dinámica de las trayectorias del sistema dinámico definido por las ecuaciones del modelo conexionista aditivo formulado en el capítulo 2 y recogido en las ecuaciones (3.1) y (3.2), que por claridad se vuelven a enunciar a continuación manteniendo la misma nomenclatura y significado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{W}, \mathbf{B}) = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x}) + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.18)$$

Para encontrar las ecuaciones de sensibilidad de las trayectorias del modelo conexionista con respecto a sus parámetros se lleva a cabo la derivación parcial

²Esto puede observarse en las ecuaciones del modelo dada la estructura tomada.

con respecto a los parámetros de la ecuación de estado y de salida del modelo. Como muestra, se efectúan los desarrollos para el vector α y la matriz \mathbf{B} .

Empezando por el vector α , si se toman derivadas parciales con respecto a este vector en ambos miembros de la ecuación (3.17) y se aplica la regla de la cadena (ver apéndice A.2), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^T} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha^T} + \left(\mathbf{I}_1 \otimes \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^T} \otimes \mathbf{I}_1 \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^T} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha^T}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \alpha^T} = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hay que hacer notar que la derivada de las condiciones iniciales con respecto al vector de parámetros es igual a cero puesto que estas no dependen, según se ha asumido, en absoluto de los parámetros. Si en este punto se considera que el vector de parámetros α se mantiene constante en el tiempo (α_0), puede efectuarse el intercambio de los operadores derivación frente al tiempo y derivación frente al vector de parámetros, con lo cual queda

$$\dot{\Lambda} \alpha = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\alpha_0} \Lambda \alpha + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha^T} \Big|_{\alpha_0}, \quad \Lambda \alpha(0) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

estando esta ecuación expresada en forma matricial con $\Lambda \alpha \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^T} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right] \in M_n(\mathbb{R})$.

En cuanto a la ecuación de salida (3.18), si se toman derivadas parciales resulta

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \alpha^T} = \left(\mathbf{I}_1 \otimes \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^T} \otimes \mathbf{I}_1 \right) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^T} \quad (3.21)$$

y si, igual que anteriormente, se expresa en forma matricial con $\Xi \alpha \triangleq \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \alpha^T} = \left[\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \alpha_j} \right] \in M_{s,n}(\mathbb{R})$, se obtiene

$$\Xi \alpha = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\alpha_0} \Lambda \alpha . \quad (3.22)$$

Para el caso de la matriz de parámetros $\mathbf{B} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, la ecuación de estado y la ecuación de salida de sensibilidad son de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{B}} + \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}_1 \right), \quad \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{B}} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{B}} . \quad (3.24)$$

Si estas dos últimas ecuaciones se reescriben en formato matricial, con $\Lambda_{\mathbf{B}} \triangleq \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{B}^T} \in M_{n^2, m}(\mathbb{R})$ y $\Xi_{\mathbf{B}} \triangleq \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{B}^T} \in M_{sn, m}(\mathbb{R})$, teniendo en cuenta el hecho de la conmutación de los operadores, se obtienen las ecuaciones

$$\dot{\Lambda}_{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{B}_0} \right) \Lambda_{\mathbf{B}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{B}} \Big|_{\mathbf{B}_0}, \quad \Lambda(0)_{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

$$\dot{\Xi}_{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{B}_0} \right) \Lambda_{\mathbf{B}}. \quad (3.26)$$

3.3 Ecuaciones del proceso de identificación

Disponiendo de forma conjunta las ecuaciones diferenciales y algebraicas correspondientes al modelo, al análisis de sensibilidad y a la actualización de los parámetros, resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x}) + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (3.27)$$

$$\dot{\Lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} = \left(-\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}_n) + \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \Lambda_{\boldsymbol{\alpha}} + (-\mathbf{S}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{x})) \quad (3.28)$$

$$\dot{\Lambda}_{\mathbf{W}} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(-\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}_n) + \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \right) \Lambda_{\mathbf{W}} + \bar{\mathbf{U}}_{nn}(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \quad (3.29)$$

$$\dot{\Lambda}_{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(-\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}_n) + \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \right) \Lambda_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{U}}_{nm}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{u}) \quad (3.30)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \epsilon_{\boldsymbol{\alpha}} \Xi_{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (3.31)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \epsilon_{\mathbf{W}} (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{e}^T \mathbf{Q})) \Xi_{\mathbf{W}} \quad (3.32)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \epsilon_{\mathbf{B}} (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{e}^T \mathbf{Q})) \Xi_{\mathbf{B}} \quad (3.33)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.34)$$

$$\Xi_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{C}\Lambda_{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.35)$$

$$\Xi_{\mathbf{W}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}) \Lambda_{\mathbf{W}} \quad (3.36)$$

$$\Xi_{\mathbf{B}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}) \Lambda_{\mathbf{B}} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (3.38)$$

con $\bar{\mathbf{U}}_{kl} \triangleq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mathbf{E}_{ij} \otimes \mathbf{E}_{ij} \in M_{k^2, l^2}(\{0, 1\})$ donde $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \in M_{k, l}(\{0, 1\})$ es la matriz de Kronecker siendo \mathbf{e}_i el i -ésimo vector de la base natural de \mathbb{R}^k y

e_j el j -ésimo vector de la base natural de \mathbb{R}^l ; y $\frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \text{diag}\left\{\frac{d\sigma(x_1)}{dx_1}, \dots, \frac{d\sigma(x_n)}{dx_n}\right\}$ con $\frac{d\sigma(z)}{dz} = 1 - (\tanh(z))^2$ dada la definición de $\sigma(\cdot)$.

Del conjunto de ecuaciones (3.27)-(3.38), la (3.27) corresponde a la ecuación de estado del modelo conexionista; las ecuaciones de estado de sensibilidad de los parámetros del modelo son las ecuaciones diferenciales matriciales (3.28)-(3.30); las ecuaciones de adaptación de los parámetros del modelo según el método de gradiente son las ecuaciones diferenciales matriciales (3.31)-(3.33); finalmente, las ecuaciones algebraicas (3.34)-(3.38) corresponden a la ecuación de salida del modelo, las ecuaciones de salida de sensibilidad y al error de identificación del proceso.

Las ecuaciones (3.27)-(3.38) constituyen, junto con las condiciones de inicio

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0 & \Lambda_{\alpha}(0) &= \mathbf{0} & \Lambda_{\mathbf{W}}(0) &= \mathbf{0} & \Lambda_{\mathbf{B}}(0) &= \mathbf{0} \\ \alpha(0) &= \alpha^0 & \mathbf{W}(0) &= \mathbf{W}^0 & \mathbf{B}(0) &= \mathbf{B}^0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

un problema de condiciones iniciales que puede ser, por tanto, resuelto en operación en línea; es decir, puede llevarse a cabo la adaptación de parámetros del modelo partiendo desde un conjunto de valores aleatorios en operación de tiempo real.

3.3.1 Valoración de las condiciones de aplicabilidad

En este apartado se efectúan algunas consideraciones acerca de la aplicabilidad teórica del mecanismo de adaptación desarrollado. Estos comentarios se centran en dos aspectos: en primer lugar, la discusión de la incidencia de las constantes ϵ , que aparecen en las ecuaciones de adaptación de parámetros y su relación con las ecuaciones de sensibilidad del modelo; y en segundo lugar, la incidencia de la elección de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales en el funcionamiento global del proceso de adaptación.

En cuanto a la cuestión de la repercusión de los valores de las constantes ϵ , (velocidades de aprendizaje) en el funcionamiento global, cabe decir que las ecuaciones de sensibilidad del modelo nos entregan como resultado la matriz de Jacobi de las trayectorias de salida con respecto de los parámetros únicamente en el caso de que el proceso se haga con estos fijados en un valor constante. De hecho, esto no ocurre cuando se efectúa una adaptación de parámetros en línea, puesto que estos están cambiando de forma continua con respecto al tiempo, lo cual conlleva que la información resultante de las ecuaciones de sensibilidad no sea exactamente la esperada sino una aproximación de ésta, que será tanto mejor cuanto más invariantes frente al tiempo se mantengan los parámetros del

modelo. Esta exigencia teórica en el desarrollo de las ecuaciones de sensibilidad es debida, tal como se comenta en el apartado 3.2.2, a la necesidad de efectuar una conmutación de los operadores derivada con respecto a un parámetro y derivada con respecto al tiempo, que es una operación que requiere la independencia de los parámetros con respecto al tiempo. Así pues, si se desea que el mecanismo de adaptación tenga un funcionamiento adecuado es necesario fijar las constantes ϵ . en valores bajos que den lugar a variaciones de dinámica lenta en los parámetros, pudiéndose así considerar como cuasiestacionarios.

El otro aspecto que requiere comentario son las condiciones iniciales de todas las ecuaciones implicadas en el mecanismo de adaptación. En cuanto a las ecuaciones de sensibilidad de estado, está claro que presentan condiciones de inicio nulas. No obstante, para las restantes es importante efectuar los siguientes comentarios:

- la ecuación de estado del modelo necesita unas condiciones de inicio que son desconocidas. Asimismo, dado que se está trabajando con modelos de caja negra, no es de utilidad el conocimiento de las condiciones de inicio del sistema físico a identificar. En general, y si no se dispone de mejor información, se puede tomar un vector de condiciones de inicio aleatorio o incluso cero.
- las ecuaciones de adaptación de parámetros necesitan también de unas condiciones de inicio, que en este caso no deberían ser nulas puesto que se reduciría el modelo al caso trivial. Evidentemente, cuanto más cercanos sean los valores tomados como condiciones iniciales a los valores óptimos³, más rápido será el proceso de adaptación.

3.3.2 Complejidad de cálculo del mecanismo de adaptación

La complejidad del mecanismo de adaptación de parámetros en línea, en número de ecuaciones diferenciales, es la siguiente:

- ecuaciones necesarias para la adaptación del vector de parámetros α :
 $n_{\alpha} = n^2 + n$
- ecuaciones necesarias para la adaptación de la matriz de pesos del modelo \mathbf{W} : $n_{\mathbf{W}} = n^3 + n^2$

³En el sentido de la función de error y la función de coste.

- ecuaciones necesarias para la adaptación de la matriz de entrada del modelo **B**: $n_{\mathbf{B}} = n^2m + nm$
- ecuaciones del modelo neuronal dinámico: $n_{\text{mod}} = n$

Con lo cual la complejidad total es $n_{\text{total}} = n^3 + (2 + m)n^2 + (2 + m)n$, siendo n la dimensión del vector de estado del modelo (número de nodos de la red neuronal) y m el número de entradas del mismo. Por ejemplo, en el caso típico de utilizar un modelo neuronal dinámico con el vector α y la matriz de entrada **B** fijados, la complejidad es entonces $n_{\text{total}} = n^3 + n^2 + n$, pudiéndose observar su crecimiento en la figura 3.2.

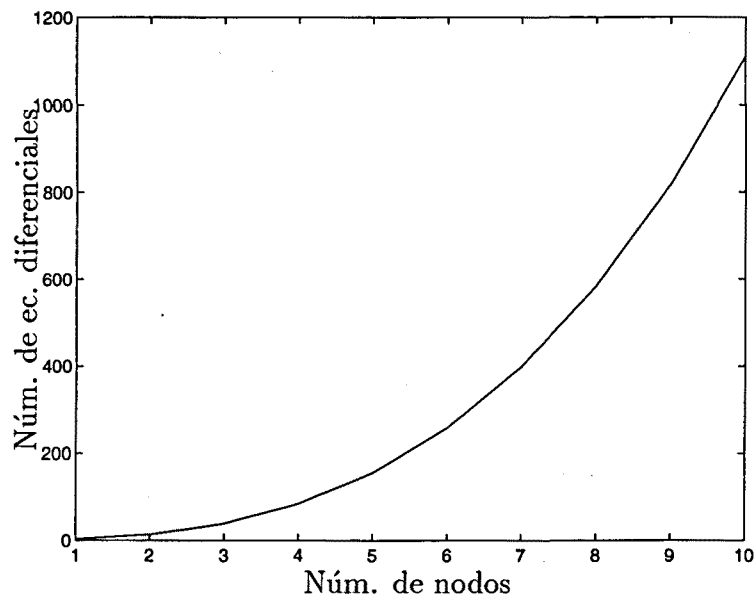


Figura 3.2: Número de ecuaciones diferenciales en función del tamaño del modelo (**W** adaptable).

Capítulo 4

Aprendizaje basado en técnicas de control óptimo e inmersión invariante

Este capítulo desarrolla la adaptación en línea de los parámetros del modelo neuronal con dinámica aditiva usando técnicas de control óptimo e inmersión invariante.

Concretamente, en la primera sección se describe el problema de identificación y la función de coste utilizada en su solución. En la segunda sección se desarrolla una solución fuera de línea al problema de identificación empleando técnicas de control óptimo, llegándose hasta sus ecuaciones constitutivas. La tercera sección describe, en un marco genérico, en qué consiste la técnica de inmersión invariante. Finalmente, la cuarta sección recoge la aplicación de esta técnica al caso particular de identificación con modelos neuronales con dinámica aditiva, valorándose la complejidad del método.

4.1 Formulación del problema de identificación

Continuando con el marco genérico para la identificación paramétrica de sistemas propuesto en el capítulo 2 y utilizado en el método desarrollado en el capítulo anterior, y teniendo en cuenta que la clase de modelos utilizada es capaz de identificar el sistema bajo estudio, se propone el esquema de identificación de la figura 4.1.

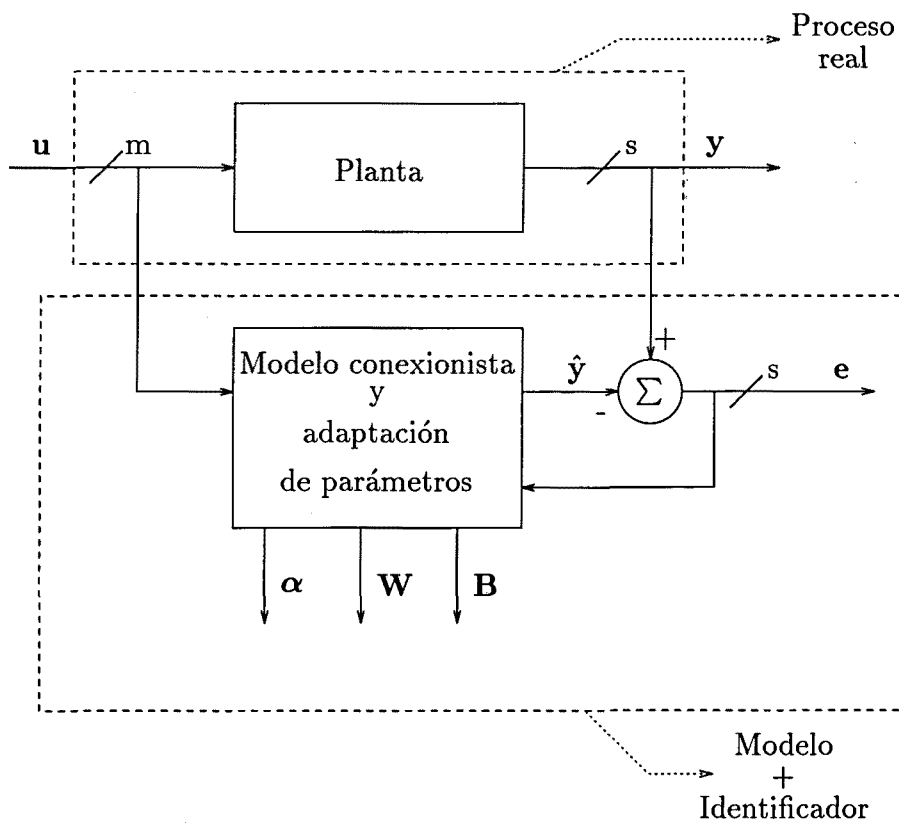


Figura 4.1: Esquema de la estructura y el mecanismo de identificación.

Tal como se planteaba en el capítulo anterior, se disponen el modelo y las ecuaciones de adaptación de parámetros en paralelo con el proceso real a identificar; esto es, tanto la planta como el modelo de identificación se excitan con la misma señal u produciendo la primera una salida y y el segundo una predicción de la salida \hat{y} . Obviamente, el objetivo que se persigue es que estos dos últimos vectores sean iguales para todo t . La diferencia entre ambos es el error de identificación e definido, al igual que en el capítulo anterior, como

$$e = y - \hat{y} \quad (4.1)$$

Este error es función del tiempo y de los parámetros del modelo $e = e(t, \alpha, W, B)$ y tomaría un valor cero si el modelo representara perfectamente el comportamiento de la planta a identificar. Por tanto, el problema reside en modificar adecuadamente, y en operación en línea, los parámetros del modelo a fin conducir el error hacia un valor nulo. Aunque cabe aclarar que este valor no se alcanzará debido a las diferencias estructurales entre la planta y el modelo y al ruido intrínseco en todo proceso real.

4.1.1 Función de coste

Para conseguir el objetivo citado en el apartado anterior es necesario, en primer lugar, definir un funcional de coste sobre el error para llevar a cabo el proceso de minimización. El funcional escogido es la integral de una forma cuadrática del error de aprendizaje, es decir

$$J = \int_0^{t_f} e^T Q e \, dt \quad (4.2)$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva, y el funcional debe ser minimizado sujeto a las siguientes restricciones:

- la dinámica del modelo neuronal (ecuaciones (2.8) y (2.9)), que se recuerda que es de la forma

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha, W, B) = -S(\alpha \otimes x) + W\sigma(x) + Bu + d \quad (4.3)$$

$$\hat{y} = Cx \quad (4.4)$$

- la estacionariedad de los parámetros del modelo: $\dot{\alpha} = 0, \dot{W} = 0, \dot{B} = 0$.

La estacionariedad de los parámetros del modelo es una hipótesis en los desarrollos que se efectúan en el presente capítulo. No obstante, y desde un

punto de vista práctico, el caso de variación muy lenta de los parámetros con respecto al tiempo puede ser tratado de la misma forma.

El problema de identificación paramétrica, tal como se acaba de formular constituye un problema de control óptimo que puede ser resuelto mediante el uso de técnicas de cálculo de variaciones como se muestra en el apartado siguiente.

4.2 Una solución variacional al problema de aprendizaje

Esta sección desarrolla una solución variacional (Bryson & Ho, 1969) al problema de optimización establecido en el apartado anterior. En primer lugar, las restricciones se adjuntan a la funcional de coste J con sus correspondientes funciones multiplicadoras λ :

$$J = \int_0^{t_f} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \lambda_{\mathbf{x}}^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{W}, \mathbf{B}) - \dot{\mathbf{x}}) + \lambda_{\boldsymbol{\alpha}}^T (-\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \lambda_{\mathbf{W}}^T (-\text{col} \dot{\mathbf{W}}^T) + \lambda_{\mathbf{B}}^T (-\text{col} \dot{\mathbf{B}}^T) \right\} dt \quad (4.5)$$

El miembro derecho de la ecuación anterior se integra por partes y entonces la variación en J debida a las variaciones en los parámetros $\{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{W}, \mathbf{B}\}$ del modelo para un tiempo final fijado t_f es

$$\begin{aligned} \delta J = & - \left\{ [\lambda_{\mathbf{x}}^T \delta \mathbf{x}]_0^{t_f} + [\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}^T \delta \boldsymbol{\alpha}]_0^{t_f} + [\lambda_{\mathbf{W}}^T \delta \text{col} \mathbf{W}^T]_0^{t_f} + [\lambda_{\mathbf{B}}^T \delta \text{col} \mathbf{B}^T]_0^{t_f} \right\} \\ & + \int_0^{t_f} \left\{ \left(-\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} + \dot{\lambda}_{\mathbf{x}}^T + \lambda_{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right) \delta \mathbf{x} \right. \\ & + \left(\lambda_{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} + \dot{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}^T \right) \delta \boldsymbol{\alpha} + \left(\lambda_{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \text{row} \mathbf{W}} + \dot{\lambda}_{\mathbf{W}}^T \right) \delta \text{col} \mathbf{W}^T \\ & \left. + \left(\lambda_{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \text{row} \mathbf{B}} + \dot{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \right) \delta \text{col} \mathbf{B}^T \right\} dt \quad (4.6) \end{aligned}$$

donde la estacionariedad de los parámetros y las ecuaciones dinámicas del modelo neuronal son utilizadas en el proceso de simplificación. Además, si la variación en J debida a las variaciones $\delta \mathbf{x}$, $\delta \boldsymbol{\alpha}$, $\delta \text{col} \mathbf{W}^T$ y $\delta \text{col} \mathbf{B}^T$ debe ser cero, es necesario que los términos entre corchetes y paréntesis de la ecuación (4.6) se anulen. Teniendo en cuenta estas aseveraciones se sigue

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x}) + \mathbf{W} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (4.7)$$

$$\dot{\alpha} = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{col} \dot{\mathbf{W}}^T = 0 \quad (4.9)$$

$$\text{col} \dot{\mathbf{B}}^T = 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{\lambda}_x = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \lambda_x - \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{W}^T \lambda_x + \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{e} \quad (4.11)$$

$$\dot{\lambda}_\alpha = \text{diag}\{x_1, \dots, x_n\} \lambda_x \quad (4.12)$$

$$\dot{\lambda}_W = -(\mathbf{I}_n \otimes \sigma(\mathbf{x})) \lambda_x \quad (4.13)$$

$$\dot{\lambda}_B = -(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}) \lambda_x \quad (4.14)$$

donde las ecuaciones (4.7)-(4.10) resultan de la estacionariedad de los parámetros y de la dinámica del modelo neuronal, y las ecuaciones (4.11)-(4.14) de la necesidad de anular los términos entre paréntesis dentro de la integral de la ecuación (4.6). Es importante también establecer las condiciones de contorno, obtenidas a partir de las condiciones de transversalidad, que toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_x(0) = \lambda_x(t_f) = 0 & & \lambda_\alpha(0) = \lambda_\alpha(t_f) = 0 \\ \lambda_W(0) = \lambda_W(t_f) = 0 & & \lambda_B(0) = \lambda_B(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Disponiendo los vectores de estado de las ecuaciones diferenciales del problema de contorno como $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \ \alpha^T \ (\text{col} \mathbf{W}^T)^T \ (\text{col} \mathbf{B}^T)^T]^T \in \mathbb{R}^{n^2+2n+nm}$ y $\zeta = [\lambda_x^T \ \lambda_\alpha^T \ \lambda_W^T \ \lambda_B^T]^T \in \mathbb{R}^{n^2+2n+nm}$, el sistema (4.7)-(4.14) puede escribirse en una forma más compacta como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \quad (4.16)$$

$$\dot{\zeta} = \mathbf{h}(\zeta, \mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad \zeta(0) = \zeta(t_f) = 0 \quad (4.17)$$

que constituye un problema de contorno, concretamente un *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP), que no puede ser resuelto en operación en línea debido al tiempo final, que está fijado, y a las condiciones de contorno.

4.3 Operación en línea utilizando técnicas de inmersión invariante

Para resolver el problema de aprendizaje en línea con un horizonte de tiempo infinito puede usarse la metodología de la Inmersión Invariante (II) (Bellman & Wing, 1992). Esta técnica consiste en transformar el problema actual en otro más general que presenta una solución más sencilla. De esta forma, si

el problema más general puede ser resuelto, el problema particular queda automáticamente solucionado.

En el TPBVP del apartado anterior, si la condición de final sobre ζ ($\zeta(t_f) = \mathbf{0}$) toma un valor genérico \mathbf{c} en lugar de $\mathbf{0}$, el TPBVP formado por las ecuaciones (4.16) y (4.17) queda contenido en otro más general ¹.

Sean $\zeta(t_f) = \mathbf{c}$ y $\zeta(t_f + \epsilon) = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$ dos trayectorias cercanas. Para la primera, puede asumirse que el valor final para \mathbf{z} es

$$\mathbf{z}(t_f) = \mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f) \quad (4.18)$$

donde la función \mathbf{r} relaciona el valor de $\zeta(t_f)$ con $\mathbf{z}(t_f)$. Si esta función fuera conocida, el problema podría resolverse sin complicaciones especiales integrando las ecuaciones a partir de las condiciones de final hacia tiempos negativos. Sin embargo, \mathbf{r} no es conocida y, por consiguiente, es la función que debe determinarse con el enfoque de inmersión invariante.

Tomando la trayectoria que finaliza en $\zeta(t_f) = \mathbf{c}$ ($\mathbf{z}(t_f) = \mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f)$) y expandiendo un poco el eje de tiempo resulta

$$\zeta(t_f + \epsilon) = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{z}(t_f + \epsilon) = \mathbf{z}(t_f) + \Delta\mathbf{z} = \mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f) + \Delta\mathbf{z} \quad (4.20)$$

con $\Delta\mathbf{c}$ y $\Delta\mathbf{z}$ de $\mathcal{O}(\epsilon)$ ². La ecuación (4.20) puede escribirse también como

$$\mathbf{z}(t_f + \epsilon) = \mathbf{r}(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}, t_f + \epsilon) \quad (4.21)$$

y, si su miembro derecho se expande por Taylor hasta los términos de primer orden en torno a \mathbf{c} y t_f , resulta

$$\mathbf{z}(t_f + \epsilon) = \mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{c}^T} \right|_{\mathbf{c}} \Delta\mathbf{c} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_f} \right|_{t_f} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.22)$$

Igualando (4.20) y (4.22) se obtiene

$$\Delta\mathbf{z} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{c}^T} \right|_{\mathbf{c}} \Delta\mathbf{c} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_f} \right|_{t_f} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.23)$$

Ahora, expandiendo $\mathbf{z}(t)$ por Taylor hasta los términos de primer orden en torno a $t_f + \epsilon$, y usando la ecuación (4.16),

$$\mathbf{z}(t_f + \epsilon) = \mathbf{z}(t_f) + \left. \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \right|_{t_f} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbf{z}(t_f) + \mathbf{g}(\mathbf{z}(t_f), \mathbf{u})\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.24)$$

¹Teniendo en cuenta que, en este caso, \mathbf{c} y t_f son variables.

² $\mathcal{O}(\epsilon^i)$ es tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\epsilon^i)}{\epsilon^i} = 0$.

y, substituyendo el miembro izquierdo por la ecuación (4.20) y $\mathbf{z}(t_f)$ por $\mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f)$, resulta

$$\Delta \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t_f), \mathbf{u})\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.25)$$

Efectuando el mismo procedimiento con ζ queda

$$\begin{aligned} \zeta(t_f + \epsilon) &= \zeta(t_f) + \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t_f} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} &= \zeta(t_f) + \mathbf{h}(\zeta(t_f), \mathbf{z}(t_f), \mathbf{u})\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \Delta \mathbf{c} &= \mathbf{h}(\mathbf{c}, \mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f), \mathbf{u})\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Finalmente, si (4.25) y (4.26) se substituyen en (4.23), lo que resulta se divide por ϵ y, posteriormente, se toma el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, queda:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f), \mathbf{u}) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{c}^T} \right|_{\mathbf{c}} \mathbf{h}(\mathbf{c}, \mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f), \mathbf{u}) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_f} \right|_{t_f} \quad (4.27)$$

Esta es la ecuación en derivadas parciales de la técnica de inmersión invariante y no tiene solución general conocida. Sin embargo, la solución puede aproximarse mediante la función lineal

$$\mathbf{r}(\mathbf{c}, t_f) = \hat{\mathbf{z}}(t_f) + \mathbf{P}(t_f)\mathbf{c} \quad (4.28)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}(t_f)$ es la solución correcta del problema, es decir, la solución cuando $\mathbf{c} = \mathbf{0} \equiv \zeta(t_f) = \mathbf{0}$. Es importante destacar que la estructura lineal escogida para la función \mathbf{z} es adecuada mientras \mathbf{c} sea pequeña ($\mathbf{c} \approx \mathbf{0}$), o sea, cerca de la solución óptima. Por esta razón, en los siguientes desarrollos se supondrá que \mathbf{c} es pequeña y, en consecuencia, los términos de $\mathcal{O}(\|\mathbf{c}\|^2)$ y superior no serán tenidos en cuenta. Tras estas observaciones y siguiendo con el desarrollo, si (4.28) se substituye en (4.27) resulta

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{P}\mathbf{c}, \mathbf{u}) = \mathbf{P}\mathbf{h}(\mathbf{c}, \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{P}\mathbf{c}, \mathbf{u}) + \dot{\hat{\mathbf{z}}} + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{c} \quad (4.29)$$

Puesto que las funciones \mathbf{g} y \mathbf{h} no son lineales, es necesario expandirlas por Taylor en torno a $\zeta = \mathbf{c}$, $t = t_f$ y $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}$ hasta primer orden, dando lugar a

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}^T}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u})\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{P}\mathbf{h}(\mathbf{c}, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}^T}(\mathbf{c}, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u})\mathbf{P}\mathbf{c} + \dot{\hat{\mathbf{z}}} + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{c} \quad (4.30)$$

El desarrollo continúa substituyendo las funciones \mathbf{g} y \mathbf{h} por sus expresiones respectivas eliminando los términos de $\mathcal{O}(\|\mathbf{c}\|^2)$ y superior y, después de esto, igualando entre ellos los términos de grado cero y grado uno en \mathbf{c} . Estas operaciones se efectúan en el siguiente apartado para el modelo neuronal de interés descrito en las ecuaciones (4.7) - (4.14).

4.4 Aplicación a los modelos neuronales con dinámica aditiva

Los resultados obtenidos en el apartado anterior se aplican, tal como se ha comentado, al TPBVP descrito por las ecuaciones (4.16)-(4.17) del problema de identificación mediante el modelo neuronal. En primer lugar, es conveniente reformular las ecuaciones de forma más explícita como :

$$\dot{z} = g(z, u) \quad (4.31)$$

$$\dot{\zeta} = H(\zeta, z, u)S\zeta + h \quad (4.32)$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} - \frac{\partial \sigma}{\partial x^T} W^T \\ \text{diag}\{x_1, \dots, x_n\} \\ -(\mathbf{I}_n \otimes \sigma(x)) \\ -(\mathbf{I}_n \otimes u) \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} C^T Q^T e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

y

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Substituyendo (4.31) y (4.32) en la ecuación (4.30), e igualando los términos de grado cero y uno entre ellos, resultan las ecuaciones siguientes ³:

- Grado cero:

$$\dot{z} = g - Ph \quad (4.35)$$

- Grado uno:

$$\dot{P} = \frac{\partial g}{\partial z^T} P - PHS - P \frac{\partial h}{\partial z^T} P \quad (4.36)$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial z^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^T} & \frac{\partial f}{\partial \alpha^T} & \frac{\partial f}{\partial (\text{col}W^T)^T} & \frac{\partial f}{\partial (\text{col}B^T)^T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n^2+(2+m)n}(\mathbb{R}) \quad (4.37)$$

³Sin considerar las variables independientes en las expresiones de los campos vectoriales.

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in M_{n^2+(2+m)n}(\mathbb{R}) \quad (4.38)$$

y \mathbf{P} puede ser descompuesta en bloques según

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} \end{pmatrix} \in M_{n^2+(2+m)n}(\mathbb{R}) \quad (4.39)$$

con $\mathbf{P}_{ij} \in M_n(\mathbb{R}), i, j \in \{1, 2\}$; $\mathbf{P}_{31}, \mathbf{P}_{32} \in M_{n^2, n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{23} \in M_{n, n^2}(\mathbb{R})$; $\mathbf{P}_{33} \in M_{n^2}(\mathbb{R})$; $\mathbf{P}_{41}, \mathbf{P}_{42} \in M_{nm, n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{P}_{14}, \mathbf{P}_{24} \in M_{n, nm}(\mathbb{R})$; $\mathbf{P}_{43} \in M_{nm, n^2}(\mathbb{R})$; $\mathbf{P}_{34} \in M_{n^2, nm}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{P}_{44} \in M_{nm, nm}(\mathbb{R})$. Siguiendo este enfoque, la complejidad de las ecuaciones anteriores es, en número de ecuaciones diferenciales, $n_t = (n^2 + 2n + nm) + (n^2 + 2n + nm)^2$. Sin embargo, sin pérdida de generalidad, es posible asumir que la matriz \mathbf{P} es simétrica ($\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji}, \forall i, j$) para reducir la complejidad del problema de aprendizaje. Esta suposición es factible porque en la ecuación (4.28) del procedimiento de inmersión invariante, la matriz \mathbf{P} puede escogerse como simétrica sin degradar la aproximación efectuada.

4.5 Ecuaciones del proceso de identificación

Con las consideraciones precedentes, las ecuaciones para el problema de identificación en línea son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{z}}}_x &= -\mathbf{U}(\hat{\mathbf{z}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{z}}_x) + (\boldsymbol{\sigma}^T(\hat{\mathbf{z}}_x) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{V}_{nn} \hat{\mathbf{z}}_w + (\mathbf{u}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{V}_{mn} \hat{\mathbf{z}}_B \\ &\quad + \mathbf{d} - \mathbf{P}_{11} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_\alpha = -\mathbf{P}_{21} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.41)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_w = -\mathbf{P}_{31} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.42)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_B = -\mathbf{P}_{41} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{11} &= -(\mathbf{H}_1^T \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{11} \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2^T \mathbf{P}_{21} + \mathbf{P}_{21}^T \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3^T \mathbf{P}_{31} + \mathbf{P}_{31}^T \mathbf{H}_3 \\ &\quad + \mathbf{H}_4^T \mathbf{P}_{41} + \mathbf{P}_{41}^T \mathbf{H}_4) + \mathbf{P}_{11} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{P}_{11} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{21} = -(\mathbf{P}_{21} \mathbf{H}_1 + \mathbf{P}_{22}^T \mathbf{H}_2 + \mathbf{P}_{32}^T \mathbf{H}_3 + \mathbf{P}_{42}^T \mathbf{H}_4) + \mathbf{P}_{21} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{P}_{11} \quad (4.45)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{31} = -(\mathbf{P}_{31} \mathbf{H}_1 + \mathbf{P}_{32}^T \mathbf{H}_2 + \mathbf{P}_{33} \mathbf{H}_3 + \mathbf{P}_{43}^T \mathbf{H}_4) + \mathbf{P}_{31} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{P}_{11} \quad (4.46)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{41} = -\left(\mathbf{P}_{41}\mathbf{H}_1 + \mathbf{P}_{42}\mathbf{H}_2 + \mathbf{P}_{43}\mathbf{H}_3 + \mathbf{P}_{44}^T\mathbf{H}_4\right) + \mathbf{P}_{41}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{11} \quad (4.47)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{22} = \mathbf{P}_{21}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{21}^T \quad (4.48)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{32} = \mathbf{P}_{31}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{21}^T \quad (4.49)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{42} = \mathbf{P}_{41}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{21}^T \quad (4.50)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{33} = \mathbf{P}_{31}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{31}^T \quad (4.51)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{43} = \mathbf{P}_{41}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{31}^T \quad (4.52)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{44} = \mathbf{P}_{41}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_{41}^T \quad (4.53)$$

donde $\mathbf{V}_{kl} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mathbf{E}_{ij} \otimes \mathbf{E}_{ij}^T \in M_{kl,kl}(\{0,1\})$ y $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \in M_{k,l}(\{0,1\})$ es la matriz de Kronecker. Este sistema de ecuaciones diferenciales matriciales tiene como condiciones iniciales $\mathbf{P}_{ii}(0) = \epsilon \mathbf{I}, i = 1, 2, 3, \epsilon > 0$ y valor absoluto pequeño, y $\hat{\mathbf{z}}(0)$ tan cercano como sea posible a los valores correctos desconocidos. Este segundo grupo de condiciones iniciales no es conocido a priori y, en consecuencia, sus valores deben ser escogidos libremente, por ejemplo de forma aleatoria. Sin embargo, cuanto más parecidos sean a los valores correctos, más rápida será la convergencia del conjunto de ecuaciones diferenciales.

4.5.1 Complejidad de cálculo del mecanismo de adaptación

La complejidad del mecanismo de adaptación en línea de parámetros del sistema, descrito por las ecuaciones diferenciales matriciales (4.40) a (4.53), es, en número de ecuaciones diferenciales, la siguiente:

- para el primer grupo ($\hat{\mathbf{z}}$) (ecuaciones (4.40) a (4.43)): $n_z = n^2 + 2n + nm$
- para el segundo grupo ($\mathbf{P}_{..}$) (ecuaciones (4.44) a (4.53)): $n_{\mathbf{P}} = n_{\mathbf{P}.1} + n_{\mathbf{P}.2} + n_{\mathbf{P}.3} + n_{\mathbf{P}.4} = \frac{n^4}{2} + (2 + m)n^3 + \frac{m^2 + 4m + 5}{2}n^2 + \frac{m+2}{2}n$. En detalle, por columnas de la matriz a bloques \mathbf{P} :
 - primera columna de \mathbf{P} ($\mathbf{P}_{.1}$): $n_{\mathbf{P}.1} = \frac{n^2+n}{2} + n^2 + n^3 + n^2m$
 - segunda columna de \mathbf{P} ($\mathbf{P}_{.2}$): $n_{\mathbf{P}.2} = \frac{n^2+n}{2} + n^3 + n^2m$
 - tercera columna de \mathbf{P} ($\mathbf{P}_{.3}$): $n_{\mathbf{P}.3} = \frac{n^4+n^2}{2} + n^3m$
 - cuarta columna de \mathbf{P} ($\mathbf{P}_{.4}$): $n_{\mathbf{P}.4} = \frac{n^2m^2+nm}{2}$

En consecuencia, para todo el conjunto, la complejidad en número de ecuaciones diferenciales es $n_{\text{total}} = \frac{n^4}{2} + (2 + m)n^3 + \frac{m^2 + 4m + 7}{2}n^2 + \frac{3m+6}{2}n$, siendo n la

dimensión del vector de estado del modelo (número de nodos de la red neuronal) y m el número de entradas al mismo. Por ejemplo, para el caso típico de utilizar un modelo neuronal dinámico con α y \mathbf{B} constantes, la complejidad es entonces $n_{\text{total}} = \frac{n^4}{2} + n^3 + n^2 + \frac{n}{2}$, pudiéndose observar su curva de crecimiento según el orden del modelo en la figura 4.2.

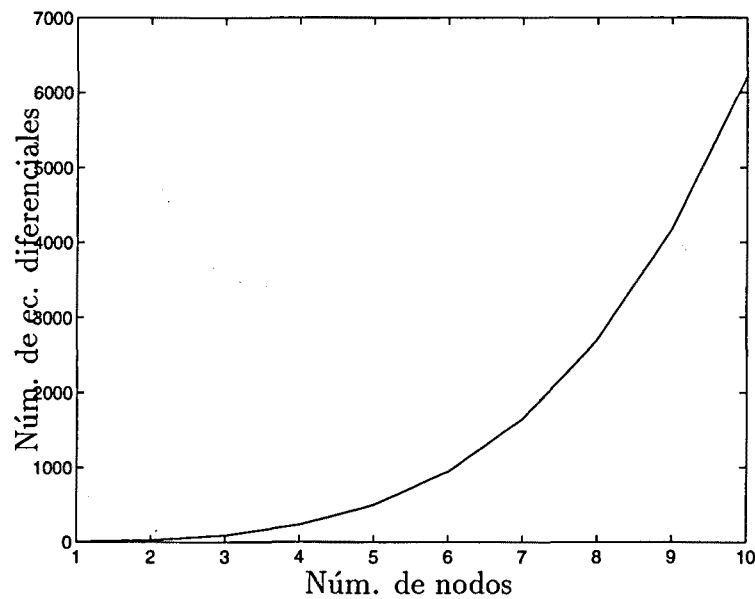


Figura 4.2: Número de ecuaciones diferenciales en función del orden del modelo (\mathbf{W} adaptable).

Es importante destacar que la complejidad de este método es de orden mucho más elevado que el enfoque del capítulo anterior basado en análisis de sensibilidad y modificación de parámetros por gradiente (Griño, 1994). No obstante, a diferencia de las técnicas utilizadas en el Capítulo 3, las empleadas en este enfoque permiten una extensión más sencilla al caso de identificación teniendo en cuenta la presencia de ruido en el sistema.

Capítulo 5

Generación de los modelos y experimentación numérica

Este capítulo presenta la metodología seguida para el desarrollo de los modelos y algoritmos de identificación, así como algunos resultados para dos tipos de casos de test: uno basado en plantas de segundo orden en simulación y otro en un conjunto de datos reales. También se efectúa, para el caso del conjunto de datos reales una comparación con los modelos basados en redes neuronales estáticas.

Concretamente, en la primera sección se trata el tema del procedimiento seguido para obtener los modelos y las ecuaciones necesarias para llevar a cabo el proceso de identificación. La segunda sección presenta algunos de los resultados obtenidos en las plantas que se toman como casos de test, usando los métodos de adaptación de parámetros desarrollados en los capítulos 3 y 4. Asimismo, se incluye una comparación con el caso de identificación mediante redes neuronales *feedforward* estáticas.

5.1 Estructura de generación e implementación de los modelos y métodos de identificación

Los dos métodos de identificación de sistemas en línea mediante modelos neuronales con dinámica aditiva desarrollados en los dos capítulos anteriores se han realizado intentando obtener un proceso completamente automático desde

la especificación del modelo hasta la obtención del código de programación necesario para llevar a cabo su labor.

Para ello, las ecuaciones para la actualización de parámetros de los modelos han sido obtenidas mediante la codificación de los métodos desarrollados en un programa de manipulación simbólica, concretamente MapleV (Char *et al.*, 1992). Para este fin, resulta muy útil el grado de abstracción y formalismo usado en los desarrollos de los capítulos 3 y 4.

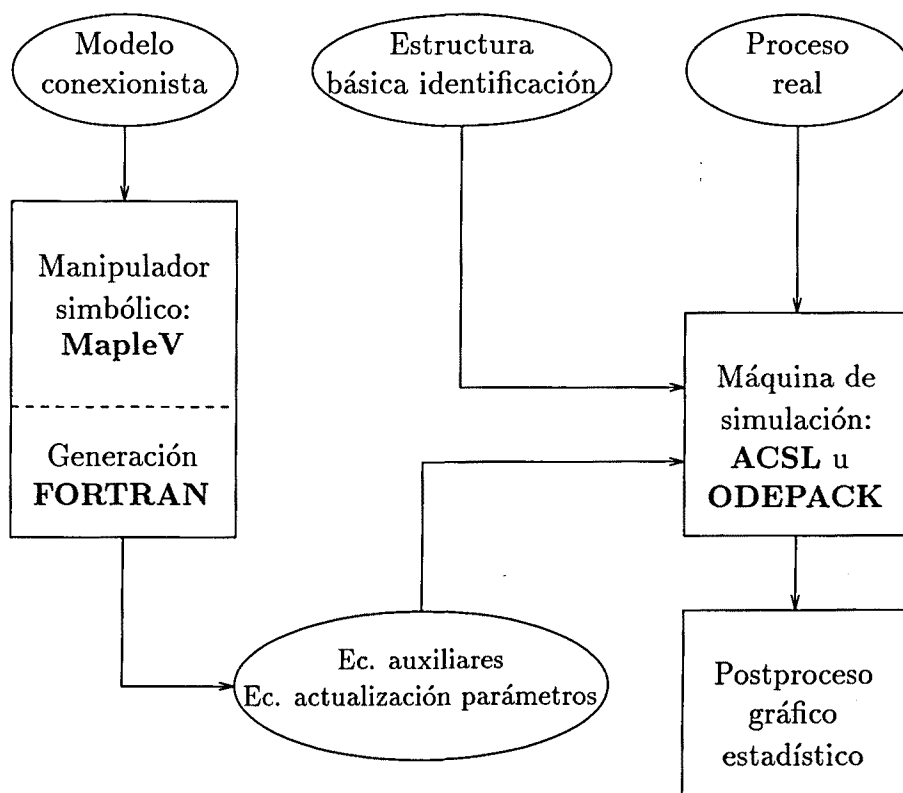


Figura 5.1: Esquema de la metodología de generación, implementación y validación de los modelos.

El procedimiento para obtener un fichero binario ejecutable a fin de efectuar la experimentación numérica puede verse en el esquema de la figura 5.1. En primer lugar, se especifica la arquitectura del modelo neuronal (número de entradas, número de salidas -estando estos valores condicionados de forma directa por el sistema bajo estudio- y número de nodos, junto con los parámetros que se suponen constantes) como información de entrada para el paquete de manipulación desarrollado para el método seleccionado. Como resultado apa-

recen un conjunto de ficheros en código fuente listos para ser compilados y enlazados con el programa principal y el núcleo de integración numérica. En segundo lugar, se especifican el caso bajo estudio y los parámetros de control de la simulación que correspondan.

Para la integración numérica se han usado dos herramientas diferentes: el lenguaje de simulación de sistemas de tiempo continuo ACSL (Mitchell & Gauthier Assoc., 1991) y el paquete de integración ODEPACK (Hindmarsh, 1983). Las razones de esta elección se comentarán en el apartado 5.1.2. Los experimentos numéricos, que se presentan en las siguientes secciones, incluyen la parte de código fuente necesaria para simular el conjunto de datos reales que debe ser identificado o el código necesario para la gestión de los datos reales.

Es importante, también, hacer notar que en el caso de aplicar los métodos desarrollados con una planta real en operación, puede ser necesario cambiar los algoritmos de integración numérica a otros que estén especialmente diseñados para operación en tiempo real como, por ejemplo, los que aparecen en (Howe, 1991).

5.1.1 Generación automática de código fuente

Siguiendo la línea de automatizar lo más posible las manipulaciones necesarias para obtener códigos de programa que permitan la operación de los métodos de identificación desarrollados, tal como se ha comentado en el apartado anterior, se han implementado éstos sobre una herramienta de manipulación simbólica. De este modo, a partir de la descripción formal y de alto nivel de los capítulos anteriores, sin efectuar expansión alguna de los resultados allí mostrados, se pueden obtener las particularizaciones para cada caso de arquitectura a considerar. Esto es, a partir de la descripción del modelo conexionista a tratar, y por aplicación del método, se obtiene como resultado unos ficheros con las rutinas (código fuente) de programación necesarias para llevar a cabo el proceso de identificación.

Este enfoque presenta las siguientes ventajas e inconvenientes:

Ventajas: pueden destacarse las siguientes:

- **Transparencia.** La operación del método que corresponda es más clara, puesto que se ha codificado a muy alto nivel, con lo cual se minimiza la posibilidad de error en su confección.
- **Sin intervención.** Los ficheros de código fuente FORTRAN que

resultan de la operación del manipulador simbólico, junto con los códigos desarrollados para cada método, están preparados para ser compilados y enlazados con el resto de módulos sin intervención ninguna. Lo que redundará en una minimización de los posibles errores de codificación.

- **Menor coste computacional.** Esta ventaja deriva de la eliminación de las operaciones que involucran operandos nulos durante el proceso de manipulación simbólica y de la generación de un código fuente de programa absolutamente lineal, es decir, sin bifurcaciones ni bucles que impliquen saltos en las instrucciones de programa. La primera de ellas también reduce de forma efectiva la complejidad teórica que podría asociarse a cada uno de los métodos, vistas sus ecuaciones.

Inconvenientes: el inconveniente de este planteamiento es el elevado tiempo de compilación para los módulos generados por el manipulador simbólico, debido a su gran tamaño.

Vistas las ventajas e inconvenientes, decididamente predominan las primeras y, por ello, se ha seguido esta línea de trabajo en la realización práctica del desarrollo de los capítulos anteriores.

5.1.2 Núcleos de simulación utilizados

Como se ha comentado anteriormente y se aprecia también en la figura 5.1, se han utilizado dos núcleos de simulación diferentes. Por un lado se ha empleado el lenguaje de simulación de sistemas de tiempo continuo ACSL y, por otro, la librería de integración numérica ODEPACK.

El entorno ACSL se ha utilizado, entre otras, por las razones siguientes:

- Es un estándar entre las herramientas de simulación, habiéndose hecho acreedor de este reconocimiento por su robustez de operación y calidad en el tratamiento numérico, así como en la gestión de eventos de estado y de tiempo.
- Presenta un conjunto de operadores de simulación muy completo que permite modelar sin problemas aquellos subsistemas que aparecen habitualmente en las plantas reales. Incluyendo las no linealidades de comportamiento no diferenciable (saturaciones ideales, zonas muertas ideales, etc.) que dan lugar a eventos de estado durante una simulación.

- Presenta operadores de integración vectorial, muy adecuados vistas las características de los métodos desarrollados.
- Su interfase con rutinas externas codificadas en lenguaje FORTRAN es muy sencilla. Lo cual se aprovecha de forma clara en el esquema global de experimentación numérica que se ha presentado.

No obstante, ACSL presenta un inconveniente notable: los algoritmos de integración numérica que incorpora efectúan el cálculo de la matriz de Jacobi del campo vectorial a integrar por aproximación por diferencias finitas. Esto da lugar a una operación lenta cuando las dimensiones del problema crecen ostensiblemente.

Esta última razón llevó a utilizar un paquete de integración numérica como ODEPACK. En este caso, la matriz de Jacobi del campo a integrar se puede codificar como una rutina más del problema, con lo que se puede efectuar su cálculo exacto sin necesidad de aproximar por diferencias finitas. Además, y dentro de ODEPACK, la rutina LSODES (utilizada en prácticamente todas las ocasiones) realiza un tratamiento disperso de dicha matriz con el consiguiente ahorro en coste computacional. No obstante, en este caso surge un problema: se asume implícitamente la diferenciabilidad del campo vectorial a integrar. Esto, por ejemplo, no se cumple en sistemas con elementos no lineales no diferenciables como los que se verán más adelante. Evidentemente, una posibilidad es hacer caso omiso del problema si el algoritmo de integración trabaja con un paso pequeño, puesto que entonces los errores acumulados no son muy grandes. Sin embargo, a fin de cuantificar el problema, se recurrió a otra de las rutinas de ODEPACK, concretamente LSODAR, que presenta la capacidad de detectar eventos de estado, para evaluar las diferencias entre ésta y LSODES para un mismo caso de estudio. Como finalmente se constató que las diferencias eran menores que 10^{-3} , se optó por utilizar LSODES, pues presentaba una ejecución considerablemente más rápida.

5.2 Experimentación numérica de los métodos de identificación

Esta sección presenta algunos de los casos de test utilizados para evaluar los métodos desarrollados, así como la aplicación de los dos enfoques desarrollados para la actualización de parámetros en línea, junto con una solución de referencia usando redes neuronales *feedforward* estáticas con líneas de retraso

en sus entradas, técnica que puede considerarse bien establecida en el contexto de la identificación de sistemas.

5.2.1 Casos de test utilizados

En esta sección se muestran tres ejemplos representativos de plantas para ser identificadas: dos sistemas simulados de segundo orden con comportamiento no lineal y un conjunto de datos reales correspondiente a la consigna de potencia y a la potencia real de un grupo de generación de una central hidroeléctrica.

5.2.1.1 Sistemas simulados de segundo orden no lineales

La figura 5.2 muestra los sistemas no lineales generados para los experimentos. El primero, Sistema A, está formado por una cascada de sistemas de primer orden lineales con un elemento no lineal estático del tipo saturación intercalado entre ellos. El segundo, Sistema B, está formado por los mismos elementos que el Sistema A más una zona muerta a la salida del comparador de error trabajando en lazo cerrado. Este tipo de sistemas es muy común en los procesos industriales, especialmente en los sistemas de control de posición.

En los experimentos numéricos llevados a cabo con estas plantas de referencia se ha utilizado, como entrada de excitación del sistema, señales pseudo-aleatorias binarias (ver apéndice C). Este tipo de señales se ha escogido porque su uso industrial está más extendido que, por ejemplo, el ruido blanco; y porque permiten un control adecuado de su banda pasante y, por tanto, de la concentración de energía en el espectro de frecuencias de interés de la planta bajo estudio. También se han efectuado, en los diversos experimentos numéricos, variaciones en la amplitud de las señales de excitación, puesto que en plantas con comportamiento no lineal es habitual una dependencia clara de la dinámica del sistema respecto de la amplitud de las entradas. Asimismo, es importante destacar que no se ha realizado sintonización alguna de las condiciones de inicio de los modelos que, además, parten de conjuntos de parámetros aleatorios en el inicio del proceso de identificación.

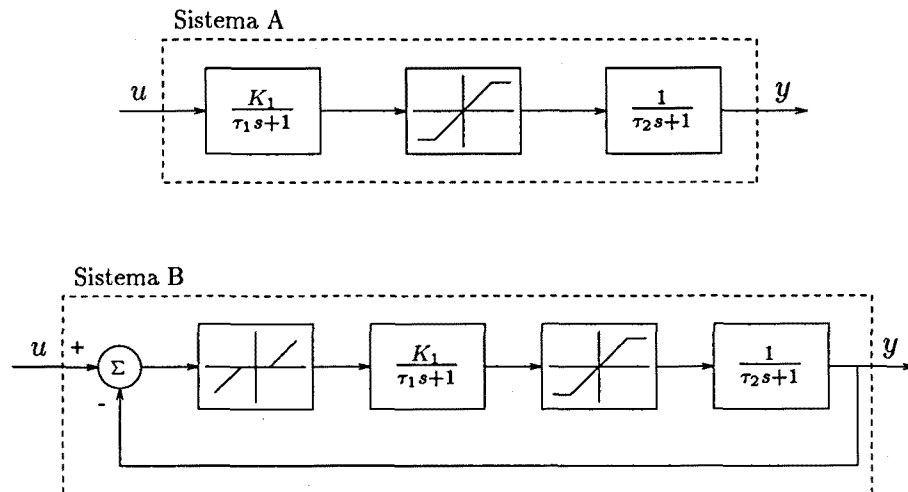


Figura 5.2: Sistemas de segundo orden no lineales usados en las identificaciones. **Sistema A:** compuesto de dos sistemas lineales de primer orden con una saturación intercalada entre ellos. **Sistema B:** compuesto de dos sistemas lineales de primer orden con una saturación intercalada operando en lazo cerrado con una zona muerta a la salida del comparador de error.

5.2.1.2 Conjunto de datos reales de un grupo hidroeléctrico

En este caso, el sistema a identificar es un grupo generador de una central hidroeléctrica de la compañía eléctrica ENHER¹. El conjunto de datos reales está compuesto por dos series temporales que corresponden a la potencia eléctrica que llega como consigna al grupo desde el sistema de control centralizado de la compañía (entrada a la planta) y a la potencia eléctrica real producida por el grupo generador (salida de la planta). El período de muestreo de las señales es de 3 segundos y el tiempo total registrado es de 18663 segundos.

5.2.2 Indicadores de comportamiento

A fin de cualificar y cuantificar el comportamiento de los algoritmos de adaptación de parámetros en su aplicación a los casos de test, se han utilizado los siguientes indicadores:

¹Empresa Nacional Hidroeléctrica Ribagorzana

- Información en el dominio temporal: en este caso se efectúa la comparación de la salida real del sistema a identificar con la salida predicha por el modelo, formando el error de identificación definido en capítulos anteriores. Este error se valora cualitativamente en función del tipo de tramo de la respuesta temporal, es decir, diferenciando entre los comportamientos en zonas transitorias y estacionarias. Asimismo, sobre él también se efectúan análisis de carácter estadístico como, por ejemplo, histogramas (a fin de observar su distribución aproximada) y diversos test de pertenencia a poblaciones normales (p. ej. Kolmogorov-Smirnov).
- Información en el dominio frecuencial: otra posibilidad que se ha tomado para la evaluación de los resultados es efectuar una visualización de éstos en el campo frecuencial. Siempre, claro, teniendo en cuenta que la valoración es de carácter cualitativo puesto que las herramientas de conversión empleadas -transformada de Fourier- son lineales. A tal efecto, se realiza un análisis espectral de los comportamientos entrada - salida de la planta real y del modelo, obteniéndose la función de transferencia isócrona empírica para los dos casos. Posteriormente, y mediante su comparación en magnitud y fase, puede obtenerse visualmente información que en el plano temporal no sería fácil de extraer.

5.2.3 Resultados experimentales

Esta sección presenta una selección de los resultados obtenidos mediante la clase de modelos propuesta junto con los algoritmos de adaptación en línea de parámetros desarrollados para ella, para ilustrar las prestaciones en las tareas de identificación. Asimismo, se incluyen, como referencia, los resultados obtenidos con los modelos neuronales estáticos para el caso del conjunto de datos reales.

5.2.3.1 Resultados con las plantas simuladas

En todos los casos de este apartado se han encontrado los modelos óptimos en dimensión (número de nodos) mediante un proceso incremental, empezando por modelos de 3 nodos y haciendo crecer su número hasta encontrar el primer modelo que daba lugar a una predicción adecuada y tenía sus parámetros estacionarios para tiempos elevados.

Para el Sistema A, la figura 5.3 muestra el error de identificación y las salidas real y predicha, para un experimento con un modelo neuronal con dinámica

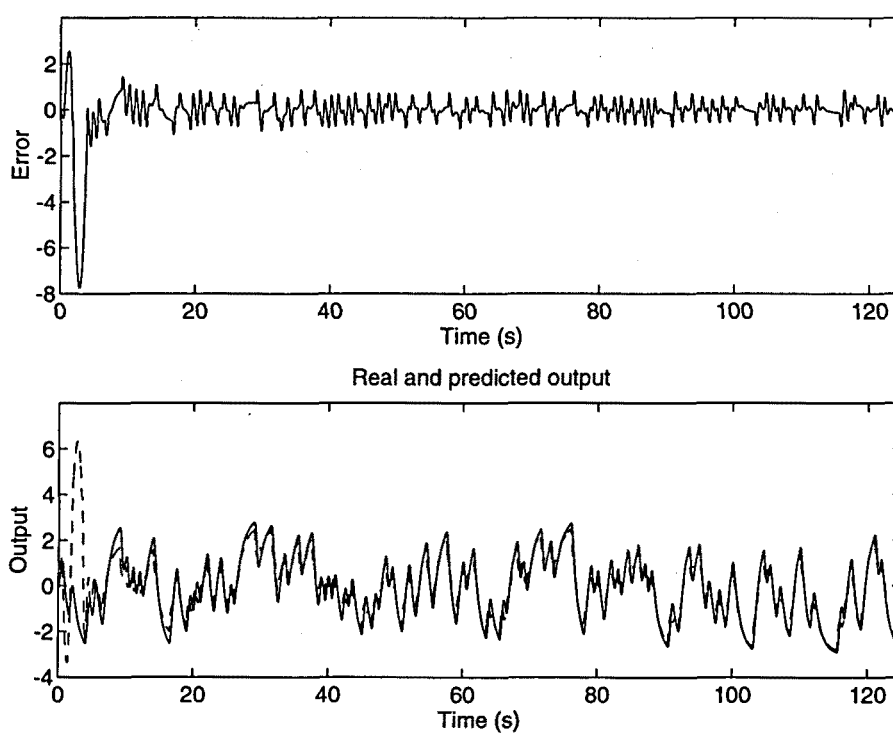


Figura 5.3: Resultados de identificación para el Sistema A: $\tau_1 = 0.2$, $K_1 = 2$, $\tau_2 = 0.2$, límites de saturación = 3,-3. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad.

aditiva de 5 nodos utilizando la actualización de parámetros basada en técnicas de gradiente y análisis de sensibilidad con un valor de velocidad de aprendizaje $\epsilon = 0.1$. Es importante destacar que, a tiempo $t = 100$ segundos el mecanismo de adaptación se paró, no habiéndose apreciado una degradación importante en la predicción del modelo. Este hecho implica que la dinámica subyacente a las señales de entrada - salida reales ha sido adquirida por el modelo neuronal, y que el buen comportamiento en predicción no es el resultado de la dinámica del adaptador de parámetros. Además, conviene resaltar el hecho de que las trayectorias de predicción siguen incluso las zonas de variación rápida (correspondientes a las altas frecuencias) de la señal de salida real una vez que el modelo ha llegado a un conjunto de parámetros estacionario. También, de una forma cualitativa se observa que al principio del proceso de identificación el modelo no sigue las zonas de variación rápida puesto que no se halla aún parametricamente configurado.

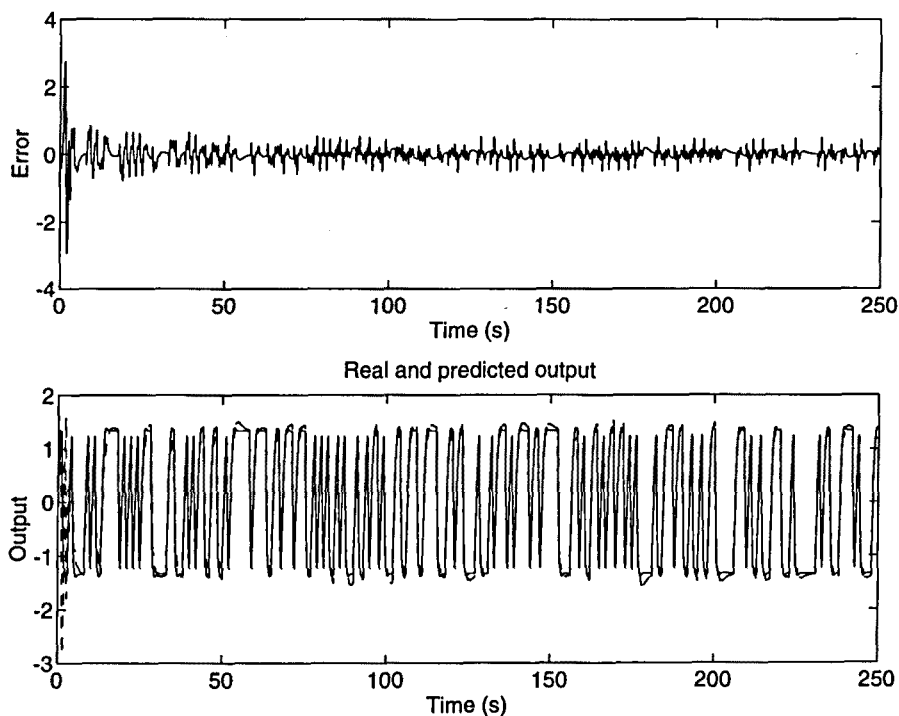


Figura 5.4: Resultados de identificación para el Sistema B: mismos valores que en el Sistema A y límites de la zona muerta de +1,-1. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad.

El modelo neuronal con 5 nodos es la configuración mínima que adquiere el comportamiento dinámico del proceso real, y esto también puede ser apre-

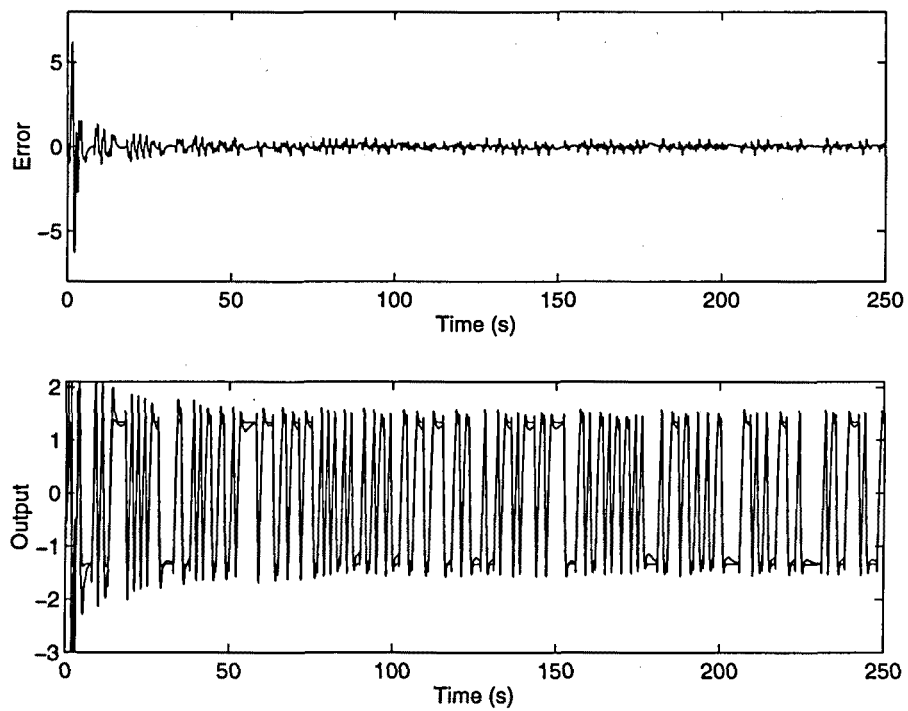


Figura 5.5: Resultados de identificación para el Sistema B: mismos valores que en el Sistema A y límites de la zona muerta de $+1,-1$. Adaptación de parámetros por técnicas variacionales y de inmersión invariante.

ciado en el hecho de que, aunque el mecanismo de adaptación de parámetros esté funcionando, los valores de éstos se encuentran casi estacionarios. Por tanto, es el modelo y no el mecanismo de adaptación, el responsable del buen comportamiento en predicción.

Para el Sistema B, la figura 5.4 muestra el error de identificación y las salidas real y predicha con un modelo neuronal de 5 nodos usando actualización de parámetros por método de gradiente con $\epsilon = 0.5$. A modo de comparación, la figura 5.5 muestra las mismas señales para un modelo neuronal de la misma complejidad, pero usando el método basado en cálculo variacional e inmersión invariante. Como puede observarse el comportamiento es cualitativamente diferente del caso de adaptación por método de gradiente para valores de tiempo bajos y bastante parecido para valores de tiempo elevados. En este caso, se produce, como anteriormente, la estabilización de los parámetros del modelo para tiempos elevados.

Otro experimento realizado con estos casos de test ha sido la pérdida de excitación del sistema, es decir, la entrada de excitación se fijaba a valor nulo después de un cierto tiempo de aprendizaje. En las pruebas efectuadas se observó una robustez notable, puesto que no apareció ninguna deriva apreciable ni en los parámetros del modelo ni en la salida del mismo.

Como ilustración de uno de los métodos de validación comentados anteriormente en la figura 5.6 pueden verse las funciones de transferencia isócronas empíricas del proceso real y del modelo, para el experimento de la figura 5.4. Como puede observarse, es destacable el buen ajuste tanto en magnitud como en fase en la zona de bajas y medias frecuencias. En particular, en cuanto a la ganancia, el buen ajuste en bajas frecuencias indica la ausencia de error de identificación en las zonas estacionarias de la respuesta temporal y la correspondencia de formas en altas frecuencias indica el parecido en las zonas transitorias. En cuanto a las fases, la correspondencia de ambas curvas indica que no hay distorsión en cuanto a forma en las respuestas temporales. Tal como se ha mencionado anteriormente, de esta forma se pueden visualizar cualitativamente algunas características de funcionamiento que serían muy difíciles de ver en el plano temporal.

5.2.3.2 Resultados con el conjunto de datos real

En este apartado se aplican los algoritmos de adaptación de parámetros en línea al conjunto de datos reales del grupo hidroeléctrico. Concretamente, se utilizan únicamente los primeros 3334 datos medidos de entrada y salida de las series

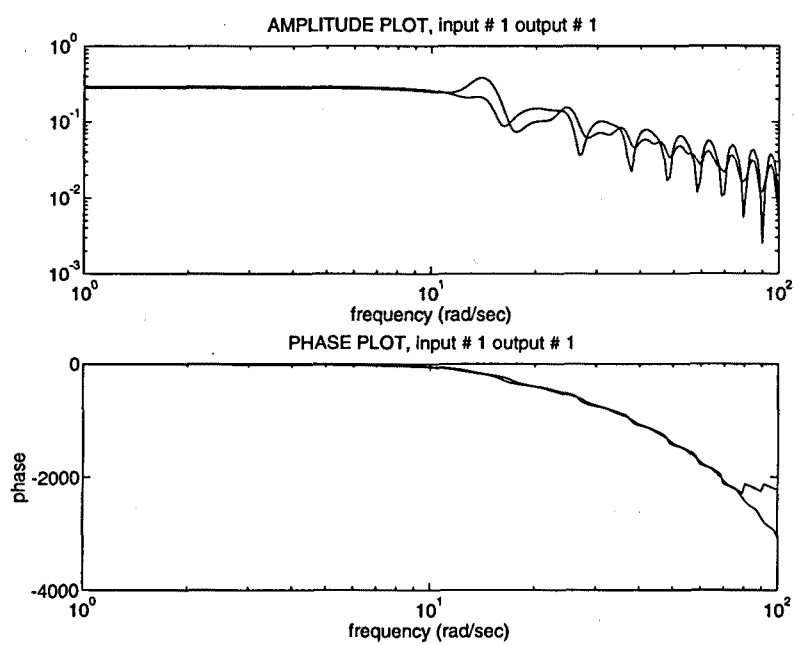


Figura 5.6: Resultados de identificación para el Sistema B: respuesta frecuencial experimental para los datos reales y predichos. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad.

temporales, lo que corresponde a los primeros 10002 segundos de estas. No se usa toda la serie temporal porque con el rango de tiempo escogido se llega a un comportamiento muy bueno y en el tramo de tiempo restante continúa igual.

La estrategia seguida para hallar la dimensión de los modelos ha sido, como en el apartado anterior, incrementar en uno el número de nodos del modelo a partir de un valor inicial de 3.

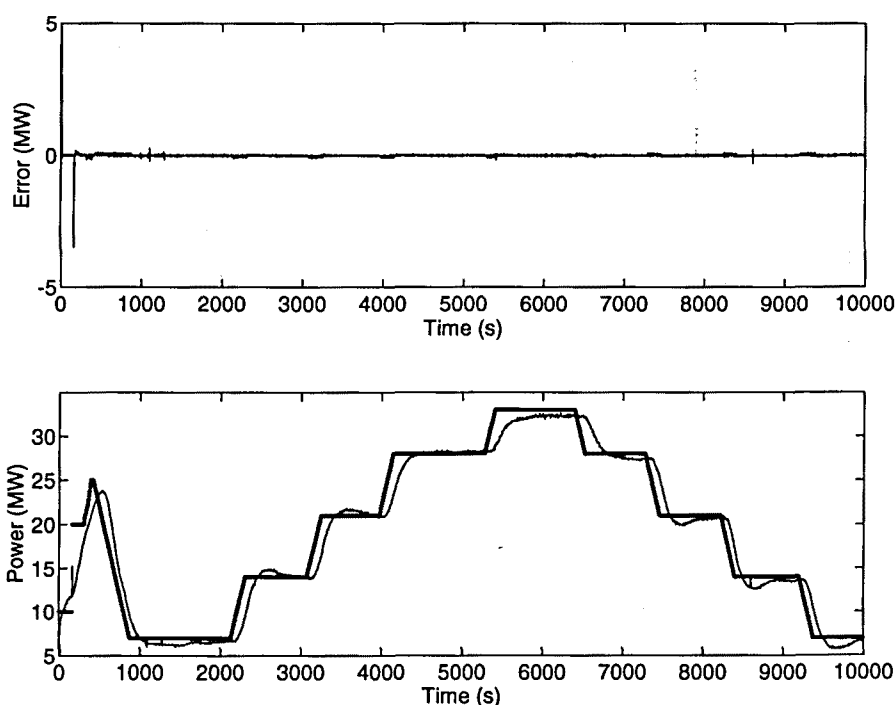


Figura 5.7: Error de identificación (arriba) y consigna (grosso), salida real y salida del modelo (fino) (abajo), para el conjunto de datos del grupo hidroeléctrico. Adaptación de parámetros basada en métodos de gradiente y análisis de sensibilidad.

La figura 5.7 muestra la potencia eléctrica de salida real y predicha (abajo), y el error de identificación (arriba), para un modelo conexionista con dinámica aditiva de 5 nodos usando la adaptación de parámetros basada en método de gradiente y análisis de sensibilidad. Como puede observarse en la gráfica, la potencia real no puede distinguirse de la predicha por el modelo, excepto en los primeros momentos del ajuste en línea.

La figura 5.8 muestra la misma información que la figura 5.7 para un mo-

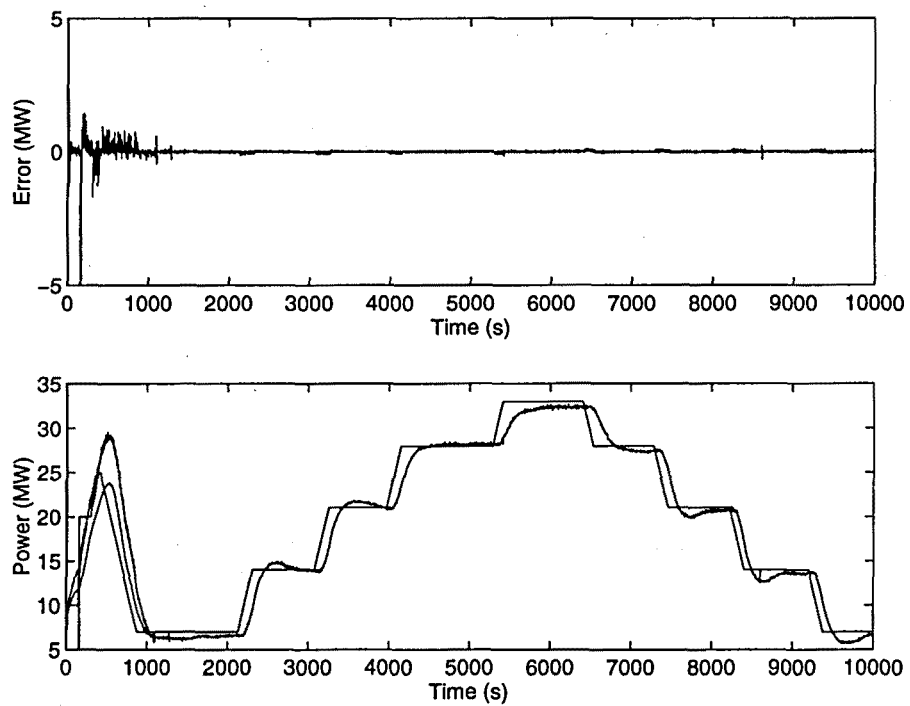


Figura 5.8: Error de identificación (arriba) y consigna, salida real y salida del modelo (abajo), para el conjunto de datos del grupo hidroeléctrico. Adaptación de parámetros por técnicas variacionales y de inmersión invariante.

delo de 5 nodos también, pero ahora utilizando la adaptación de parámetros por técnicas variacionales y de inmersión invariante. Como puede apreciarse, también en este caso, el error de identificación es bastante pequeño excepto en el inicio del ajuste en línea del modelo.

Es importante destacar que, en los dos métodos contemplados, los modelos partían de un conocimiento nulo de la planta real, es decir, sus parámetros estaban inicializados de forma aleatoria. En ambos casos, cuando la salida de predicción era muy parecida a la salida real, se ha parado el mecanismo de adaptación sin que se produjera una degradación apreciable en el error de identificación, lo que implica que el modelo neuronal había adquirido la dinámica que subyace a los datos medidos de la planta real.

5.2.3.3 Comparación de prestaciones frente a identificadores del tipo red neuronal *feedforward*

A fin de establecer un punto de referencia para la comparación de las prestaciones de los métodos desarrollados, se ha diseñado un identificador que usa modelos basados en redes estáticas *feedforward* con líneas de retrasos sobre las entradas y salidas. Este método se ha tomado como referencia porque, probablemente, es una de las formas más ampliamente aceptadas de realizar tareas de identificación de sistemas no lineales mediante redes neuronales. Se han empleado modelos de la forma:

$$\hat{y}_k = f(y_{k-1}, \dots, y_{k-s}, u_k, \dots, u_{k-m}) \quad (5.1)$$

donde el subíndice k indica una observación de la variable en cuestión a tiempo kT , siendo T el período de muestreo; s y m son los valores máximos de los retrasos en la salida y la entrada del modelo, es decir, la profundidad de la ventana histórica en las series temporales definidas por la entrada y la salida; y f es la función estática que representa el modelo neuronal.

Para la fase de aprendizaje se ha seguido un enfoque serie-paralelo: el modelo se entrena con datos reales de las entradas presente y pasadas, así como con datos reales de salidas pasadas, para predecir la correspondiente salida presente.

El enfoque serie-paralelo en identificación viene a ser, en el contexto conexionista, similar al *teacher forcing*. Esto es, la operación se lleva a cabo forzando las entradas y los valores pasados de las entradas y las salidas a unos concretos, previamente medidos y contenidos en el conjunto de datos. Por tanto, los datos retrasados no son generados por el identificador sino que corresponden a valores reales. Por el contrario, en la configuración paralela, los

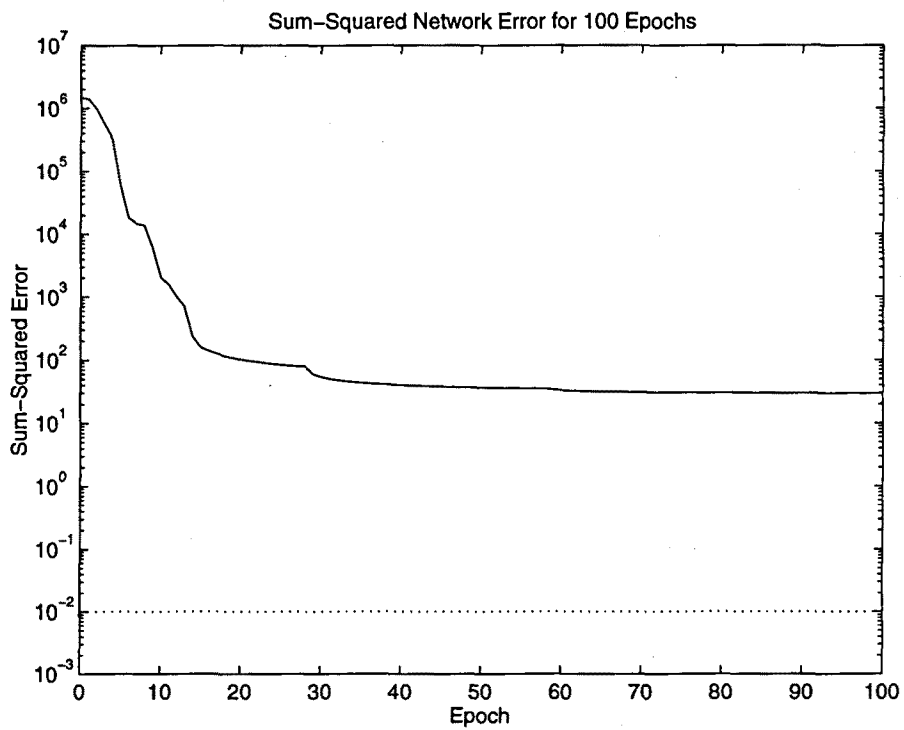


Figura 5.9: Suma de los cuadrados de los errores de la red neuronal para los primeros 100 *epoch* de la fase de aprendizaje.

valores generados por el identificador son realimentados para generar futuros valores, con lo cual se produce una predicción a infinitos pasos.

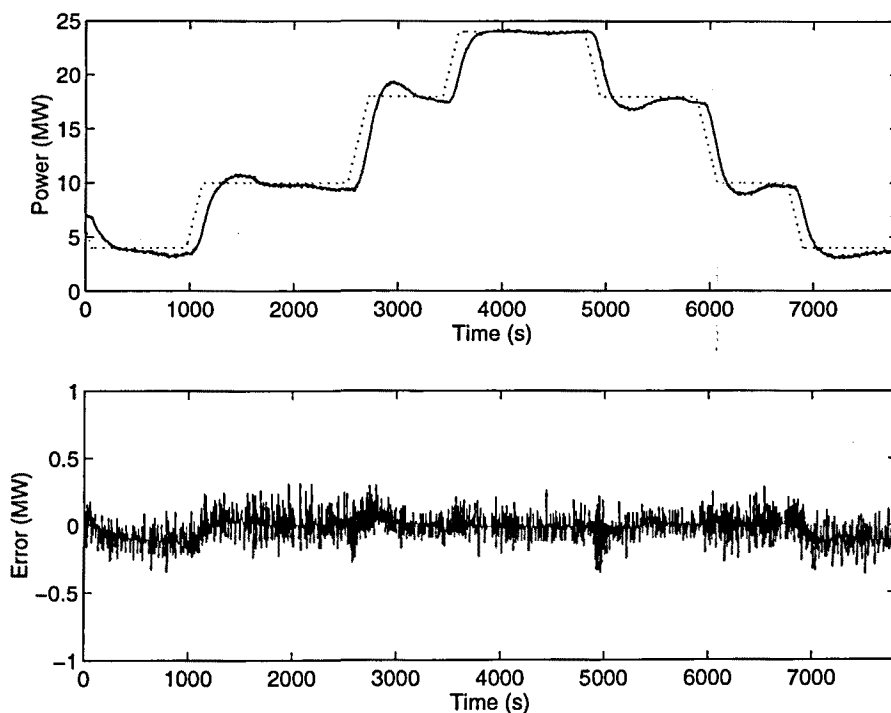


Figura 5.10: Predicción en configuración serie-paralela sobre el conjunto de test: arriba) Consigna de potencia (puntos), potencia real de salida (continua) y potencia de salida predicha (punto- raya); abajo) Error de identificación.

Cuando se emplean redes neuronales *feedforward*, generalmente el aprendizaje del modelo se efectúa en una configuración serie-paralelo. Sin embargo, para verificar el buen comportamiento del identificador, es necesario analizar su comportamiento en una configuración paralela, puesto que en ésta se pone de manifiesto de forma clara si el modelo ha adquirido o no la dinámica subyacente a los datos de identificación. Por el contrario, en la configuración serie-paralelo, las trayectorias de salida real del sistema fuerzan las trayectorias predichas hacia los valores correctos, enmascarando si el modelo ha adquirido o no la dinámica que se deseaba. Hay que tener en cuenta que, desde el punto de vista de ingeniería de control, no es tan importante efectuar buenas predicciones como modelar de forma correcta la dinámica del sistema, ya que el modelo servirá como punto de partida para efectuar el diseño de controladores para el mismo. Cuando se trabaja con modelos del tipo red neuronal estática y se hace el aprendizaje de esta misma forma, en configuración serie-paralelo,

el comportamiento en predicción paralela sobre el conjunto de test acostumbra a no ser bueno.

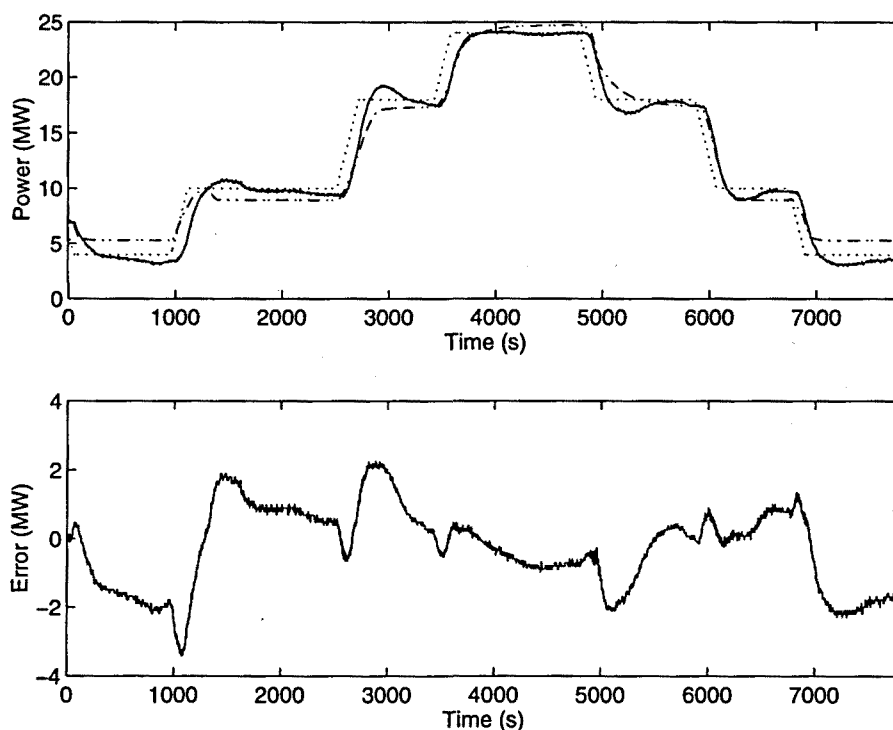


Figura 5.11: Predicción en configuración paralela sobre el conjunto de test: arriba) Consigna de potencia (puntos), potencia real de salida (continua) y potencia de salida predicha (punto-raya); abajo) Error de identificación.

En los experimentos que se muestran más adelante se ha desarrollado un modelo de identificación basado en redes neuronales estáticas. Este modelo ha sido diseñado mediante búsqueda exhaustiva entre todas las combinaciones de retrasos en la entrada y la salida y el número de nodos en la capa oculta. El aprendizaje de la red neuronal se efectuó fuera de línea (en configuración serie-paralela) y el test en línea (en configuración paralela) a fin de poder comparar con los métodos desarrollados.

El aprendizaje de los modelos (con una función no lineal en los nodos del tipo tangente hiperbólica) se efectuó sobre un conjunto de aprendizaje formado por los primeros 3364 valores de las series temporales de entrada y salida del grupo hidroeléctrico utilizando un algoritmo de optimización Levenberg-Marquardt. El criterio para seleccionar el mejor modelo fue su comportamiento en predicción sobre el conjunto de test que está constituido por el resto de

valores (2857) de las series temporales de entrada y salida.

La evolución del aprendizaje para el mejor modelo puede verse en la figura 5.9. Este modelo tiene 7 retrasos en las entradas, 7 retrasos en las salidas y 15 nodos en la capa oculta. En la figura 5.10 se muestra el comportamiento en predicción (a un solo paso) del modelo obtenido sobre el conjunto de test en configuración serie-paralela. Como puede observarse, el resultado es bueno y la salida real y la salida predicha son prácticamente iguales. Por otra parte, la figura 5.11 muestra el comportamiento de ese mismo modelo sobre el conjunto de test en una configuración paralela (predicción a infinitos pasos); como puede verse, el comportamiento es peor que en el caso anterior. Y también peor que los resultados obtenidos con los métodos desarrollados, que se recogen en las figuras 5.7 y 5.8. De ello puede concluirse que el comportamiento del modelo neuronal con dinámica aditiva presenta un comportamiento mucho más adecuado que el modelo basado en redes *feedforward* estáticas, especialmente en cuanto a la captura de la dinámica subyacente a los datos medidos en el sistema real.

Capítulo 6

Conclusiones

Este capítulo está dividido en dos apartados. En el primero, se exponen las principales aportaciones de este trabajo y, en el segundo, se describen una serie de aspectos como sugerencia para trabajos futuros en la línea de trabajo desarrollada en la tesis.

6.1 Principales aportaciones

Las aportaciones realizadas en este trabajo pueden clasificarse en dos niveles. Un primer nivel de carácter muy general es el marco tomado para el estudio y planteamiento del tema de identificación de sistemas mediante métodos conexionistas. En particular, se ha seguido un enfoque integrador entre la teoría de control y la de redes neuronales, intentando mostrar la gran interrelación que existe entre ambas, tanto desde el punto de vista de herramientas como de problemas. Y como puede existir un beneficio claro para una recogiendo y aprovechando las técnicas desarrolladas en la otra. Un segundo nivel, de características mucho más concretas, viene dado por las contribuciones realizadas en este trabajo al problema de identificación de sistemas dinámicos mediante el uso de modelos conexionistas.

En este sentido, cabe destacar las aportaciones siguientes:

- Se ha formulado una clase de modelos de identificación del tipo “caja negra” constituidos por un conjunto de ecuaciones diferenciales con estructura de red neuronal con dinámica aditiva dotada de entradas evolucionando en tiempo continuo. Asimismo, esta clase de modelos ha

sido formulada y estructurada de tal modo que los desarrollos necesarios a posteriori para los métodos de adaptación de parámetros resulten en una formulación lo más compacta posible. Para así, posteriormente, poder llevar a cabo una implementación automática de los algoritmos desarrollados mediante herramientas de cálculo simbólico.

- Para la clase de modelos desarrollada, se ha efectuado un estudio de estabilidad absoluta mediante el uso de técnicas frecuenciales. Este enfoque se ha seguido porque los modelos desarrollados presentan una estructura, oculta en una primera instancia, de sistema de tipo Lure que hace posible la aplicación de dicha teoría, concretamente a través del uso del criterio del círculo para sistemas multivariantes. Es importante hacer notar que a modelos conexionistas de características similares se les había asociado siempre una clase de funciones de Lyapunov muy particular en su estructura sin haberse mencionado, en la literatura conocida, que esta clase de funciones corresponde a los sistemas de tipo Lure, como son denominados en teoría de control. Además, debe destacarse el hecho que el estudio efectuado contempla la posible variación frente al tiempo de los parámetros del sistema, a diferencia de otros trabajos basados en teoría de estabilidad de Lyapunov.
- Se han desarrollado dos métodos de adaptación de parámetros en línea para la clase de modelos conexionistas propuesta:
 - El primero de ellos basado en adaptación de parámetros por técnicas de gradiente, siendo éste calculado a través de un análisis de sensibilidad de las trayectorias del modelo respecto de sus parámetros constituyentes. Esto supone una reformulación de métodos ya usados en la teoría de redes neuronales reclamando el uso reconocido de la teoría de sensibilidad de sistemas, que es una disciplina muy asentada dentro de la teoría de control. Esto permite, entre otras cosas, discutir hechos como, por ejemplo, la necesidad de tomar valores pequeños para las velocidades de aprendizaje, lo cual siempre ha sido mencionado pero no justificado en los trabajos de redes neuronales que lo comentan.
 - El segundo método desarrollado hace uso de técnicas de control óptimo para obtener una solución fuera de línea al problema de adaptación de parámetros. Esta solución, que constituye un problema de contorno, se convierte, mediante la aplicación de técnicas de inmersión invariante, en un problema de valores iniciales que puede ser resuelto en operación en línea, dando lugar así a una solución en línea al problema de adaptación de parámetros que era el objetivo

perseguido. De este modo se consigue tener otro posible algoritmo de adaptación en línea de los parámetros del modelo, lo cual hasta el momento únicamente podía realizarse mediante métodos de tipo gradiente.

- Los modelos y métodos de adaptación de parámetros desarrollados han sido implementados mediante el uso de herramientas de manipulación simbólica de tal forma que, la experimentación numérica y su utilización sea lo más eficiente posible a través de la generación automática del código fuente necesario. Además, la realización mediante cálculo simbólico de gran parte de las operaciones involucradas en los algoritmos de adaptación de parámetros desarrollados, permite una reducción añadida de la complejidad de cálculo del proceso de identificación debido a la eliminación de las operaciones que incluyen algún operando nulo. También es interesante destacar que el código de programación así generado presenta una velocidad de ejecución más elevada al ser absolutamente lineal.
- La clase de modelos propuesta, junto con los dos algoritmos de adaptación de parámetros desarrollados para ella, ha sido evaluada en tareas de identificación en línea sobre dos tipos de sistemas: dos sistemas sintetizados a partir de bloques lineales y no linealidades estándar, y un conjunto de datos reales captado de un grupo hidroeléctrico en una operación que recorría todo su rango de funcionamiento. Los resultados obtenidos, parte de ellos mostrados en el capítulo 5, permiten observar el buen funcionamiento de los identificadores. Partiendo de modelos con parámetros aleatorios, después de un tiempo inicial en el cual se produce el ajuste de éstos, el modelo efectúa una predicción precisa incluso en zonas de variación rápida. Merece la pena destacar que cuando el comportamiento en predicción es adecuado el modelo tiene sus parámetros en valores estacionarios, lo cual indica que el modelo ha capturado la dinámica del proceso a identificar. Este hecho se verificó por una segunda vía que consistió en parar el adaptador de parámetros en esas circunstancias sin observarse una degradación apreciable en la predicción. Es importante también hacer notar que para el conjunto de datos reales del grupo hidroeléctrico no se excitó el sistema con ninguna señal de espectro especialmente diseñado para la tarea de identificación, y los resultados obtenidos son buenos aún tratándose de una variación de la entrada de gran amplitud.

El comportamiento en predicción en la identificación del conjunto de datos reales se ha comparado con el comportamiento de un identificador

basado en modelos neuronales estáticos obteniéndose un peor comportamiento en este último. Esto se observa especialmente cuando se dispone el modelo, ya configurado, en una disposición paralela con la planta que es la homologable con los desarrollos efectuados en esta tesis y supone, de hecho, una operación con predicción a infinitos pasos. La cual, como se ha comentado, supone en caso de buen funcionamiento que el modelo ha adquirido toda la dinámica del proceso a identificar y no es el adaptador de parámetros el responsable del buen funcionamiento.

6.2 Vias futuras de trabajo

El trabajo realizado en esta tesis abre considerables posibilidades de desarrollo futuro y profundización en algunos aspectos de la línea de identificación de sistemas mediante modelos conexionistas dinámicos. En particular, se enumeran a continuación los principales temas que, en esta fase del trabajo, parecen más atractivos para su desarrollo futuro. En cada uno de estos casos se esboza muy brevemente cuál podría ser el camino a seguir.

- Un trabajo pendiente, de gran complejidad y resultado incierto, es la determinación de criterios para la estabilidad del conjunto formado por el modelo y el adaptador de parámetros. En este ámbito, parece más adecuado para este estudio el aprendizaje basado en técnicas de gradiente y análisis de sensibilidad.
- No menos importante sería la continuación del estudio de condiciones suficientes, menos restrictivas, para la estabilidad de la clase de modelos propuesta. Esta búsqueda debería basarse tanto en criterios más ajustados en el dominio frecuencial, como en acotaciones menos holgadas de la teoría de matrices, a fin de obtener dichos resultados menos restrictivos.
- También presentaría un gran interés la extensión del trabajo hacia procesos estocásticos, permitiendo y estudiando la incorporación de ruido en el esquema de identificación. Los análisis y desarrollos teóricos de un método de adaptación de parámetros podrían seguir técnicas de filtrado óptimo y, concretamente, expandir el alcance del segundo de los métodos desarrollados, adaptación de parámetros mediante cálculo variacional e inmersión invariante.
- La batería de algoritmos de aprendizaje podría ampliarse mediante el desarrollo de algoritmos basados en la teoría de observadores no lineales

adaptativos. Este punto sería razonablemente asequible, puesto que la clase de modelos desarrollada incorpora sus parámetros de forma lineal, con lo cual podrían utilizarse gran parte de los desarrollos teóricos que se tienen en la actualidad.

- En vista a su posterior utilización, sería muy interesante desarrollar estructuras de control que hicieran uso de los modelos de identificación obtenidos. Por ejemplo, usando la teoría de control para sistemas no lineales basada en temas de geometría diferencial o un enfoque al diseño de controladores basado en pasividad.
- Una extensión de gran importancia sería la puesta en operación de la clase de modelos y métodos de adaptación en paralelo con el proceso real a identificar. De esta forma, se tendría un sistema formado, por un lado, por la planta física real y por otro, el modelo y su adaptador de parámetros funcionando sobre un computador, comunicándose ambos mediante las interfases adecuadas. Esta aplicación supondría usar y adaptar algoritmos de integración en tiempo real para realizar la tarea de identificación en línea.

Referencias

- Albertini, Francesca, & Sontag, Eduardo D. 1993. For Neural Networks, Function Determines Form. *Neural Networks*, 6, 975–990.
- Anguita, M., Prieto, A., Pelayo, F.J., Ortega, J., & Diaz, A. 1991. CMOS Implementation of a Cellular Neural Network with Dynamically Alterable Cloning Templates. In: Prieto, A. (ed), *Artificial Neural Networks. International Workshop on Artificial Neural Networks*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 540. New York–Heidelberg–Berlin New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag Springer-Verlag.
- Antsaklis, Panos J. 1990. Neural Networks in Control Systems. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 3–5.
- Barnett, Stephen, & Cameron, R.G. 1993. *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Oxford Univ. Press.
- Barto, Andrew G., Bradtke, Steven J., & Singh, Satinder P. 1991 (Aug.). *Real-time Learning and Control using Asynchronous Dynamic Programming*. Technical Report 91-57. University of Massachusetts at Amherst.
- Bellman, Richard, & Wing, George Milton. 1992. *An Introduction to Invariant Imbedding*. Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM.
- Benveniste, Albert, Métivier, Michel, & Priouret, Pierre. 1990. *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*. Applications of Mathematics, vol. 22. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag.
- Bhat, Naveen V., Minderman, Peter A., McAvoy, Thomas J., & Wang, Nam Sun. 1990. Modeling Chemical Process Systems via Neural Computation. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 24–29.
- Bryson, A.E., & Ho, Y. 1969. *Applied Optimal Control*. Ginn and Company.

- Cembrano, G., Wells, G., Sarda, J., & Ruggeri, A. 1997. Dynamic Control of a Robot Arm based on Neural Networks. *Control Engineering Practice*, 5(4), 485–492.
- Chan, Edward H. P. 1990. Using Neural Network to Interpret Multiple Alarms. *IEEE Computer Applications in Power*, Apr., 33–37.
- Char, B. W., Geddes, K. O., Gonnet, G. H., Leong, B. L., Monagan, M. B., & Watt, S. M. 1992. *Maple V. Library Reference Manual*. New York, NY: Springer-Verlag.
- Chen, Fu-Chuang. 1990. Back-Propagation Neural Networks for Nonlinear Self-Tuning Adaptive Control. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 44–48.
- Chua, L.O., & Yang, L. 1988a. Cellular Neural Networks: Applications. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 35(10), 1273–1289.
- Chua, L.O., & Yang, L. 1988b. Cellular Neural Networks: Theory. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 35(10), 1257–1272.
- de Coulon, F. 1984. *Théorie et traitement des signaux*. Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique. Lausanne: Presses Polytechniques Romandes.
- DeWeerth, Stephen P., Nielsen, Lars, Mead, Carver A., & Aström, Karl Johan. 1991. A Simple Neuron Servo. *IEEE Trans. Neural Networks*, 2(2), 248–251.
- Elman, Jeffrey L. 1988 (Apr.). *Finding Structure in Time*. Tech. Rep. CRL 8801. University of California, San Diego.
- Eykhoff, Pieter. 1974. *System Identification*. John Wiley & Sons.
- Farlow, S. J. 1984. *Self-Organizing Methods in Modelling – GMDH Type Algorithms*. Marcel Dekker.
- Frank, Paul M. 1978. *Introduction to System Sensitivity Theory*. Academic Press.
- Funahashi, Ken-ichi, & Nakamura, Yuichi. 1993. Approximation of Dynamical Systems by Continuous Time Recurrent Neural Networks. *Neural Networks*, 6, 801–806.

- Griño, Robert. 1991. Neural Networks for Water Demand Time Series Forecasting. *Pages 453-460 of: Prieto, A. (ed), Artificial Neural Networks. International Workshop on Artificial Neural Networks. Lecture Notes in Computer Science, vol. 540. New York-Heidelberg-Berlin New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag Springer-Verlag.*
- Griño, Robert. 1994 (June). Nonlinear System Identification Using Additive Dynamic Neural Networks. *Pages 437-442 of: Postprints of the 2nd IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications (SICICA '94).*
- Guez, Allon, Protopopescu, Vladimir, & Barhen, Jacob. 1988. On the Stability, Storage Capacity, and Design of Nonlinear Continuous Neural Networks. *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, 18(1), 80-87.*
- Haber, R., & Unbehauen, H. 1990. Structure Identification of Nonlinear Dynamic Systems - A Survey on Input/Output Approaches. *Automatica (J. IFAC), 26(4), 651-677.*
- Hartman, Eric J., Keeler, James D., & Kowalski, Jacek M. 1990. Layered Neural Networks with Gaussian Hidden Units as Universal Approximations. *Neural Computation, 2, 210-215.*
- Hertz, John, Krogh, Anders, & Palmer, Richard G. 1991. *Introduction to the Theory of Neural Computation.* Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, vol. 1. Addison-Wesley.
- Hindmarsh, A. C. 1983. ODEPACK, a systematized collection of ode solvers. *In: Stepleman, R. S. (ed), Scientific Computing.* Amsterdam, Holland: North-Holland.
- Hirsch, Morris W. 1989. Convergent Activation Dynamics in Continuous Time Networks. *Neural Networks, 2, 331-349.*
- Horn, Roger A., & Johnson, Charles R. 1992. *Matrix Analysis.* New York: Cambridge University Press.
- Howe, R. M. 1991. A new family of real-time predictor-corrector integration algorithms. *Simulation, 57(3), 177-186.*
- Hunt, Kenneth J. 1989. *Stochastic Optimal Control Theory with Application in Self-Tuning Control.* Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 117. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag.

- Hunt, K.J., Sbarbaro, D., Zbikowski, R., & Gawthrop, P.J. 1992. Neural Networks for Control Systems – A Survey. *Automatica (J. IFAC)*, **28**(6), 1083–1112.
- Ito, Yoshifusa. 1991. Representation of Functions by Superpositions of a Step or Sigmoid Function and Their Applications to Neural Network Theory. *Neural Networks*, **4**, 385–394.
- Kailath, Thomas. 1980. *Linear Systems*. Series in Information and Systems Science. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Kalaba, Robert, & Spingarn, Karl. 1982. *Control, Identification and Input Optimization*. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, vol. 25. New York – London: Plenum Press.
- Kelly, Douglas G. 1990. Stability in Contractive Nonlinear Neural Networks. *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, **37**(3), 231–242.
- Khalil, Hassan K. 1992. *Nonlinear Systems*. New York: Macmillan Pub.
- Korenberg, Michael J., & Paarmann, Larry D. 1991. Orthogonal Approaches to Time-Series Analysis and System Identification. *IEEE Signal Process. Mag.*, July, 29–43.
- Kosko, Bart. 1992. *Neural Networks and Fuzzy Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Kreinovich, Vladik Ya. 1991. Arbitrary Nonlinearity is Sufficient to Represent All Functions by Neural Networks: A Theorem. *Neural Networks*, **4**, 381–383.
- Kumar, Sanjay S., & Guez, Allon. 1991. ART Based Adaptive Pole Placement for Neurocontrollers. *Neural Networks*, **4**, 319–335.
- Lazzaro, John, & Mead, Carver A. 1989. A Silicon Model Of Auditory Localization. *Neural Computation*, **1**, 47–57.
- Ljung, Lennart. 1987. *System Identification: Theory for the User*. Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Ljung, Lennart. 1991. Issues in System Identification. *IEEE Control Systems Mag.*, Jan., 25–29.
- Ljung, Lennart, & Gunnarsson, Svante. 1990. Adaptation and Tracking in System Identification – A Survey. *Automatica (J. IFAC)*, **26**(1), 7–21.

- Loke, R. E., & Cembrano, G. 1994. Neural Adaptive Control of a Bioreactor. *Pages 182–186 of: Bányász, Cs. (ed), Preprints of the 2nd IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications (SICICA '94)*. Budapest, Hungary: IFAC.
- MacFarlane, Alistair G.J. 1979. *Frequency-Response Methods in Control Systems*. IEEE Press.
- Mathews, V. John. 1991. Adaptive Polynomial Filters. *IEEE Signal Process. Mag.*, July, 10–26.
- Matsuoka, Kiyotoshi. 1992. Stability Conditions for Nonlinear Continuous Neural Networks with Asymmetric Connection Weights. *Neural Networks*, 5, 495–500.
- Miller, W. T., Sutton, R. S., & Werbos, P. J. 1990. *Neural Networks for Control*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Mitchell & Gauthier Assoc. 1991. *Advanced Continuous Simulation Language (ACSL). Reference Manual*. Concord, MA: Mitchell & Gauthier Assoc. Inc.
- Naidu, Sinnasamy R., Zafiriou, Evangelos, & McAvoy, Thomas J. 1990. Use of Neural Networks for Sensor Failure Detection in a Control System. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 49–55.
- Narendra, Kumpati S., & Parthasarathy, Kannan. 1990. Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 1(1), 4–26.
- Narendra, Kumpati S., & Parthasarathy, Kannan. 1991. Gradient Methods for the Optimization of Dynamical Systems Containing Neural Networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 2(2), 252–262.
- Netushil, A. 1987. *Teoría del mando automático. Sistemas no lineales y mando en el caso de acciones aleatorias*. Moscú: Mir.
- Nguyen, Derrick H., & Widrow, Bernard. 1990. Neural Networks for Self-Learning Control Systems. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 18–23.
- Nijmeijer, Henk, & van der Schaft, Arjan. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag.
- Parlos, A. G., Chong, K. T., & Atiya, A. F. 1994. Application of recurrent multilayer perceptron in modeling complex process dynamics. *IEEE Trans. Neural Networks*, 5(2), 255–266.

- Passino, Kevin M., Sartori, Michael A., & Antsaklis, Panos J. 1990. Neural Computing for Numeric-to-Symbolic Conversion in Control Systems. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 44-51.
- Pearlmutter, B. A. 1995. Gradient Calculations for Dynamic Recurrent Neural Networks: A Survey. *IEEE Trans. Neural Networks*, 6(5), 1212-1227.
- Pearlmutter, Barak A. 1990 (Dec.). *Dynamic Recurrent Neural Networks*. Technical Report CMU-CS-88-191. Carnegie Mellon University.
- Piche, S. W. 1994. Steepest descent algorithms for neural network controllers and filters. *IEEE Trans. Neural Networks*, 5(2), 198-212.
- Polycarpou, M.M., & Ioannou, P.A. 1991 (Sept.). *Identification and Control of Nonlinear Systems Using Neural Network Models: Design and Stability Analysis*. Tech. Rep. 91-09-01. University of Southern California.
- Psaltis, Demetri, Sideris, Athanasios, & Yamamura, Alan A. 1988. A Multi-layered Neural Network Controller. *IEEE Control Systems Mag.*, Apr., 17-21.
- Qin, Si-Zhao, Su, Hong-Te, & McAvoy, Thomas J. 1992. Comparison of Four Neural Net Learning Methods for Dynamic System Identification. *IEEE Trans. Neural Networks*, 3(1), 122-130.
- Ruiz, V., & Torras, C. 1995. On-Line Learning with Minimal Degradation in Feedforward Networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 6(3), 657-668.
- Sanner, Robert M., & Slotine, Jean-Jacques E. 1991a (Mar.). *Direct Adaptive Control Using Gaussian Networks*. Technical Report NSL-910303. Nonlinear Systems Lab., MIT.
- Sanner, Robert M., & Slotine, Jean-Jacques E. 1991b (May). *Gaussian Networks for Direct Adaptive Control*. Technical Report NSL-910503. Nonlinear Systems Lab., MIT.
- Sastry, P. S., Santharam, G., & Unnikrishnan, K. P. 1994. Memory neural networks for identification and control of dynamical systems. *IEEE Trans. Neural Networks*, 5(2), 306-319.
- Sastry, Shankar, & Bodson, Marc. 1989. *Adaptive Control*. Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

- Sato, Masa-aki. 1990. A Learning Algorithm to Teach Spatiotemporal Patterns to Recurrent Neural Networks. *Biological Cybernetics*, **62**, 259–263.
- Schoukens, Johan, & Pintelon, Rik. 1991. *Identification of Linear Systems*. Oxford: Pergamon Press.
- Söderström, Torsten, & Stoica, Petre. 1989. *System Identification*. Series in Systems and Control Engineering. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Sontag, E.D. 1990. *Mathematical Control Theory*. Texts in Applied Mathematics, vol. 6. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag.
- Sontag, Eduardo D. 1989. Sigmoids Distinguish More Efficiently Than Heavisides. *Neural Computation*, **1**, 470–472.
- Tang, Zaiyong, de Almeida, Chrys, & Fishwick, Paul A. 1991. Time Series Forecasting Using Neural Networks vs. Box-Jenkins Methodology. *Simulation*, **57**(5), 303–310.
- Tsytkin, Ya. 1971. *Adaptation and Learning in Automatic Systems*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 73. Academic Press.
- Tsytkin, Ya. Z. 1973. *Foundations of the Theory of Learning Systems*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 101. Academic Press.
- Tulleken, Herbert J. 1990. Generalized Binary Noise Test-signal Concept for Improved Identification-experiment Design. *Automatica (J. IFAC)*, **26**(1), 37–49.
- Varfis, A., & Versino, C. 1990a. Neural Networks for Economic Time Series Forecasting. In: *Proc. NNSED-90*.
- Varfis, A., & Versino, C. 1990b. Univariate Economic Time Series Forecasting by Connectionist Methods. In: *Proc. INNC-90*.
- Weerasooriya, Siri, & El-Sharkawi, M. A. 1991. Identification and Control of a DC Motor using Back-Propagation Neural networks. *IEEE Trans. Energy Conversion*, **6**(4), 663–669.
- Weigend, A. S., Huberman, B. A., & Rumelhart, D. E. 1990. *Predicting the Future: A Connectionist Approach*. Technical Report SSL 90-20. Xerox PARC.
- Wellstead, P. E., & Zarrop, M. B. 1991. *Self-tuning Systems*. John Wiley & Sons.

- Wierzbicki, Andrzej. 1984. *Models and Sensitivity of Control Systems*. Studies in Automation and Control, vol. 5. Elsevier.
- Wu, Q. H., Hogg, B. W., & Irwin, G. W. 1992. A Neural Network Regulator for Turbogenerators. *IEEE Trans. Neural Networks*, **3**(1), 95–100.

Apéndice A

Elementos de análisis matricial

A.1 Productos de Kronecker

En análisis de sensibilidad y en la teoría de sistemas es frecuente el uso de los productos de Kronecker. [cita libro, vetter, otro] El producto de Kronecker ¹ de dos matrices está definido por una matriz particionada cuya partición (i, j) es $a_{ij}\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{nm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ y $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{nr \times ms}$.

Debe hacerse notar que el producto de Kronecker cumple las propiedades distributiva y asociativa:

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \quad (\text{A.3})$$

Otras dos propiedades que se usan en los desarrollos de este trabajo son la transpuesta del producto y la regla del producto mixto:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \quad (\text{A.4})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B} \mathbf{D}) \quad (\text{A.5})$$

siempre y cuando \mathbf{A} , \mathbf{C} y \mathbf{B}, \mathbf{D} tengan las dimensiones adecuadas.

¹También llamado producto directo o producto tensorial.

A.2 Algunos resultados interesantes de análisis matricial

En este apéndice se presentan algunos resultados de análisis matricial que son importantes en los desarrollos efectuados en el presente trabajo.

Dada una función escalar f de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define su **gradiente** frente a \mathbf{x} como

$$\nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.6})$$

Analogamente, se define la **matriz de Jacobi** para una función vectorial $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ de variable vectorial $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (\text{A.7})$$

Por último, y como caso más general, la **derivada de una función matricial respecto de una matriz** se define como

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{M}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{11}} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{12}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{1s}} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{21}} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{22}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{2s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{r1}} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{r2}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial M_{rs}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ y $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{nr \times ms}$. La **derivada de una función vectorial \mathbf{f} frente a una matriz** es un caso particular del anterior en el que $\mathbf{A} = \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, con lo cual $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{nr \times s}$.

Es necesario, también, recordar la regla de la cadena en su expresión más completa, en la que todos los elementos participantes son matrices.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{M})] = \left(\mathbf{M} \otimes \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (\text{row } \mathbf{B})} \right) \left(\frac{\partial \text{col } \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{M}} \otimes \mathbf{I}_m \right) \quad (\text{A.9})$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ y $\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{M})] \in \mathbb{R}^{nr \times ms}$.

Apéndice B

Condiciones de transversalidad

Dado el problema de control óptimo siguiente:

$$\min_{\mathbf{u}} J \triangleq \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) dt \quad (\text{B.1})$$

restringido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \quad (\text{B.2})$$

siendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el vector de estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ el vector de entradas medibles, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^r$ el vector de parámetros desconocido que se supondrá estacionario, \mathbf{f} una función vectorial no lineal ($\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$) y L una función no lineal ($L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$).

La restricción (B.2) puede ser incorporada dentro de la función de coste J haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ resultando:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) - \dot{\mathbf{x}}]\} dt \quad (\text{B.3})$$

haciendo uso de la definición de hamiltoniano ($H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$) nos queda:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{H - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}\} dt \quad (\text{B.4})$$

e integrando por partes:

$$J = -\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \cdot \mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \{H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \cdot \mathbf{x}\} dt \quad (\text{B.5})$$

para t_0 y t_f fijos la variación de J debida a, por ejemplo, una variación en \mathbf{u} es:

$$\delta J = -\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x} \Big|_{t=t_f} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x} \Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right\} dt \quad (\text{B.6})$$

En la ecuación (B.6) para evitar tener que calcular $\delta \mathbf{x}$ escogemos $\boldsymbol{\lambda}$ de tal forma que los coeficientes de $\delta \mathbf{x}$ se anulen:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \quad (\text{B.7})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \mathbf{0} \quad (\text{B.8})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_0) = \mathbf{0} \quad (\text{B.9})$$

Las ecuaciones (B.8) y (B.9) son las denominadas condiciones de transversalidad y aparecen debido a que tanto $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{x}(t_f)$ no son conocidas. Si consideramos que $\mathbf{x}(t_0)$ es conocida y constante las condiciones de transversalidad pasarían a ser:

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{x}(t_0) \quad (\text{B.11})$$

Apéndice C

Elección de la señal de excitación

En las tareas de identificación de sistemas es de vital importancia la señal que se emplea para excitar el sistema bajo estudio. Concretamente la señal debe ser suficientemente rica como para excitar el proceso en la gama de modos que nos interesa capturar en el modelo. Este hecho se verifica si la señal utilizada tiene *persistencia en la excitación* lo que, dicho informalmente, significa que la banda pasante de la señal cubre completamente los modos propios del sistema bajo estudio.

En el caso de que no se pueda inyectar en el sistema la señal adecuada como, por ejemplo, en una identificación en línea con el sistema trabajando en condiciones de operación normales la persistencia en la excitación debe ser asumida. Aunque siempre teniendo en cuenta que la bondad de los resultados obtenidos depende en gran manera de la capacidad excitadora de la señal de entrada. No obstante, existe una forma de solventar el problema de la excitación en sistemas que trabajan en condiciones normales de operación que es superponer a la señal de entrada otra de baja amplitud pero suficiente excitación que por sus características no altere el punto de operación del sistema completo.

C.1 Señales de excitación más habituales

Las señales de excitación más utilizadas en identificación recursiva de sistemas son las siguientes:

Señal cuadrada: Estas señales son muy fáciles de generar y presentan un rango de amplitud limitado y bien definido. La frecuencia de la señal puede seleccionarse empíricamente según la siguiente regla: el periodo de la señal cuadrada (T) debe ser aproximadamente seis veces la constante de tiempo dominante del sistema (Wellstead & Zarrop, 1991). Cumpliendo esta regla se asegura que la mayor parte de la potencia de la señal quede dentro del ancho de banda del sistema.

Ruido con distribución uniforme: Este tipo de ruido se usa a menudo porque se halla disponible en casi todas las librerías numéricas. Presenta la ventaja de que su amplitud está acotada, pero en contrapartida la aparición de valores muy bajos en las secuencias puede dar lugar a distorsiones. Se ha de destacar que su espectro de potencia puede ser adaptado a la forma que interese haciendo una etapa de filtrado previa a la inyección en el sistema.

Ruido con distribución gaussiana: Este tipo de señal presenta como ventaja que su espectro de potencia teórico es plano con lo cual se excita por un igual todo el ancho de banda del sistema, aunque también se invierte una parte apreciable de la potencia de la señal en toda la gama de frecuencias que se halla fuera de la banda pasante del sistema. Como inconveniente se tiene que la amplitud de la señal no está acotada y que, desde un punto de vista de aplicación industrial, su forma temporal no se corresponde con el tipo de consigna estandar de los sistemas reales (escalones y rampas). Es importante notar que para obtener unos resultados adecuados en la identificación se debe efectuar un filtrado previo a fin de acotar su banda pasante.

Ruido binario pseudo-aleatorio: Esta señal comparte con las señales cuadradas la simplicidad de niveles pues únicamente toma dos valores y, en consecuencia, la señal está acotada en amplitud. No obstante, como ventaja su espectro de potencia es mucho más rico y su ancho de banda puede escogerse de forma fácil, como se verá en el siguiente apartado, para cubrir el ancho de banda del sistema bajo estudio.

A estas señales pueden añadirse, para estudios de identificación fuera de línea, las siguientes:

Señal multisenoidal: Esta señal está constituida por la suma de un número determinado de senoides relacionadas armónicamente entre ellas. Este tipo de señal presenta como ventaja la concentración de su energía

unicamente en las bandas de interés, las bandas donde se hallan los modos propios del sistema que se está estudiando. Pero, por contra, se presentan problemas como, por ejemplo, un factor de cresta bastante elevado que debe ser minimizado mediante procedimientos bastante laboriosos (Schoukens & Pintelon, 1991). Además, no está claro donde concentrar la energía de la señal puesto que el sistema es desconocido, y aunque se supiera no sería aceptado fácilmente por los operadores por el miedo a la aparición de resonancias en la operación.

Señal impulso: Este tipo de señal tiene la ventaja de su espectro de potencia es constante para toda frecuencia y, por tanto, se excita uniformemente el sistema en toda su banda pasante. No obstante, algunas veces es necesario efectuar un filtrado para adecuar la banda y presenta problemas de utilización en algunos sistemas puesto que no es adecuado para su funcionamiento una entrega de energía tan concentrada en el tiempo.

C.2 Secuencias binarias pseudoaleatorias

A la vista de los comentarios del apartado anterior se han escogido las secuencias binarias pseudo-aleatorias como señales de excitación para todos los experimentos que se han llevado a cabo en la Tesis. A modo de resumen, las características más relevantes de este tipo de señal son:

- Amplitud acotada tomando unicamente dos niveles simétricos con respecto al cero.
- Ancho de banda de la señal seleccionable facilmente a través del tiempo de reloj usado.
- Semejanza a un espectro de señal de tiempo continuo a través del incremento en la longitud de la secuencia.

Aparte de las ventajas técnicas que puede suponer el uso de estas señales existe otro tipo de condicionamiento no menos importante cuando se trata de efectuar una utilización industrial: la disponibilidad de los responsables de operación de un sistema para efectuar la experimentación. En realidad, los operadores no ven con buenos ojos la inyección en su planta de consignas que se aparten de los habituales cambios en rampa y escalón, y en este sentido la señal PRBS no resulta en absoluto extraña.

n	$N = 2^n - 1$	Realimentaciones
2	3	1,2
3	7	2,3
4	15	3,4
5	31	3,5
6	63	5,6
7	127	4,7
8	255	2,3,4,8
9	511	5,9
10	1023	7,10
11	2047	9,11
12	4096	1,4,6,12
13	8191	1,3,4,13
14	16383	1,6,10,14
15	32767	14,15
16	65535	1,3,12,16

Tabla C.1: Tabla de conexionado del registro de desplazamiento con el sumador para algunas longitudes de registro.

C.2.2 Propiedades

Las secuencias binarias de longitud máxima presentan las siguientes propiedades (de Coulon, 1984):

- la secuencia generada es periodica con periodo $T_s = NT_{clock}$ siendo $N = 2^n - 1$ la longitud de la secuencia y n la longitud del registro de desplazamiento;
- en un periodo T_s de la secuencia siempre hay $N + 1$ unos y N ceros. Así pues, para una longitud de registro n lo suficientemente grande se puede considerar que ambos valores son equiprobables;
- comparando bit a bit un periodo de la secuencia con alguna de sus permutaciones circulares, el número de símbolos coincidentes es igual al número de símbolos no coincidentes menos uno.

C.2.3 Función de autocorrelación y densidad espectral de una señal PRBS

Asignando a los valores 1 y 0 que se hallan en el primer elemento del registro de desplazamiento los valores $+a$ y $-a$ se obtiene una señal $x(t)$ periódica con periodo T_s . La función de autocorrelación (ver figura C.2) es, en consecuencia, periódica con periodo T_s y aproxima muy adecuadamente la función de autocorrelación de una señal impulso $\delta(t)$.

Analíticamente la función de autocorrelación puede expresarse como

$$\phi_x(\tau) = a^2 \left(\frac{N+1}{N} \text{tri}\left(\frac{\tau}{T_{\text{clock}}}\right) - \frac{1}{N} \right) \quad (\text{C.1})$$

donde $\text{tri}(\cdot)$ representa la función triangular de anchura $2T_{\text{clock}}$.

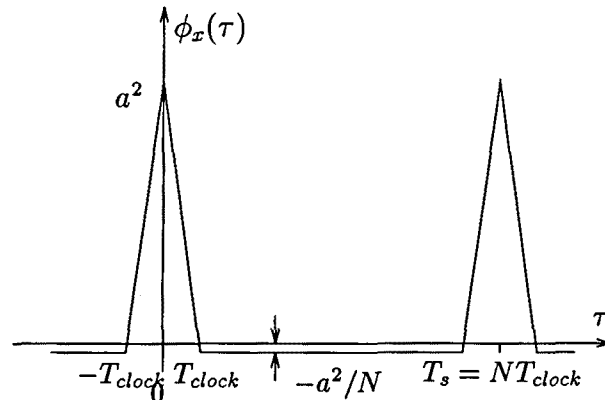


Figura C.2: Función de autocorrelación teórica.

El espectro de potencia correspondiente se expresa como

$$\Phi_x(f) = a^2 \frac{N+1}{N} \text{sinc}^2(T_{\text{clock}}f) \delta_{1/T_s}(f) - \frac{a^2}{N} \delta(f) \quad (\text{C.2})$$

donde $\delta_{1/T_s}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_s})$ es un tren de impulsos en el campo de la frecuencia con periodo $\frac{1}{T_s} = \frac{1}{NT_{\text{clock}}}$. Es interesante notar que el espectro de potencia es discreto ya que la señal PRBS es periódica; y que el valor de continua ($f = 0$) es a^2/N^2 y se corresponde con el valor medio de la señal $\bar{x} = a/N$. Este hecho es importante puesto que para valores de n grandes prácticamente no existe componente continua y por ello no se altera el punto de operación del sistema bajo estudio al inyectar la señal PRBS.

Asimismo, observando la figura C.3 se advierten los siguientes hechos:

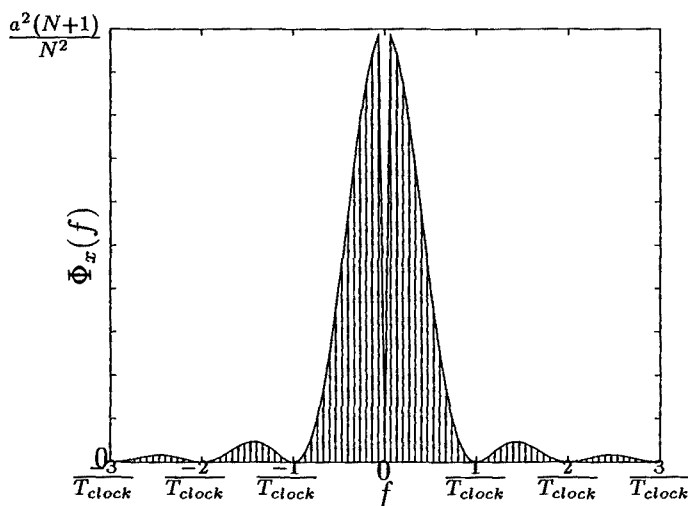


Figura C.3: Densidad espectral de potencia de la señal PRBS.

- incrementando el T_{clock} se obtiene una banda pasante menor en la señal PRBS y, por tanto, se incrementa la densidad de energía en la banda resultante;
- incrementando la longitud de palabra N se aumenta el número de pulsos en el espectro puesto que la distancia entre pulsos es inversamente proporcional a N ; de esta forma, aunque el espectro se asemeja más al de un impulso (espectro continuo por ser una señal no periodica) se produce una disminución en el área de los pulsos al tener que distribuirse la misma energía entre más armónicos.

A modo de conclusión e indicación de uso práctico hay que decir que el espectro de la señal PRBS puede considerarse casi plano hasta un valor de $0.4(1/T_{clock})$ y que, por tanto, a esa frecuencia se deberían cubrir todos los modos relevantes del sistema bajo estudio. También es importante destacar que una longitud de secuencia N mayor o igual a 63 es razonablemente suficiente para trabajos de identificación recursiva (Wellstead & Zarrop, 1991).