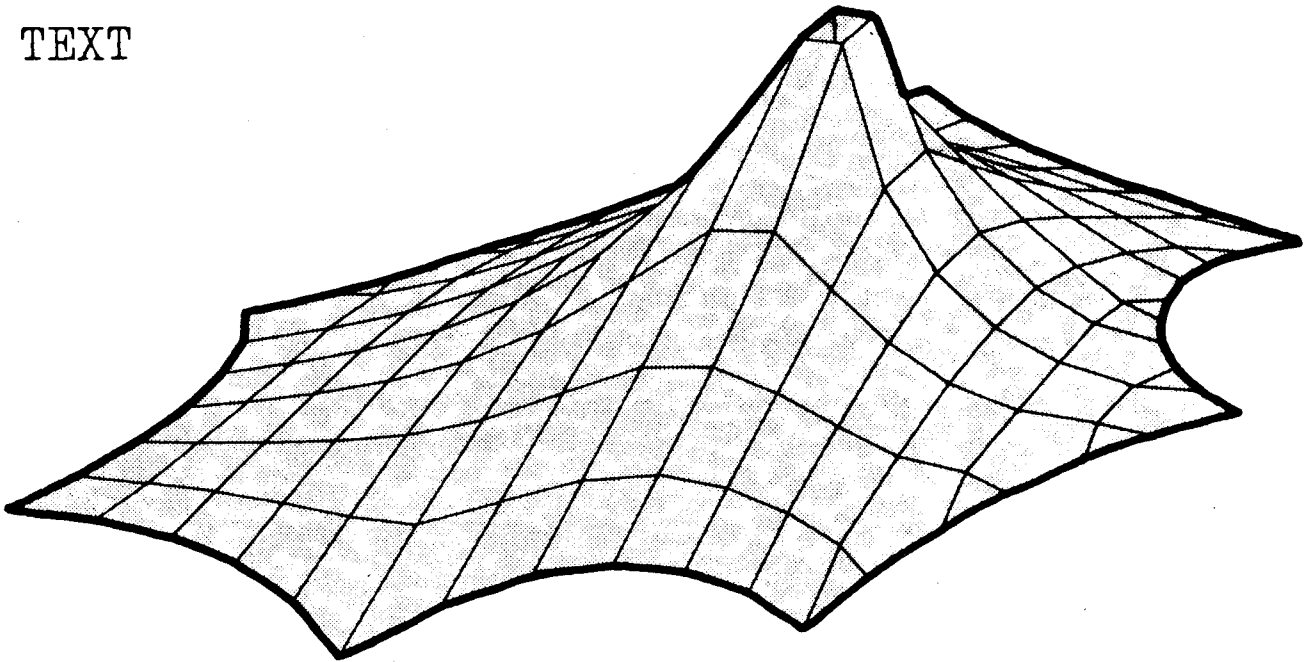


escola tècnica superior d'arquitectura de barcelona  
universitat politècnica de barcelona

~ TESI DOCTORAL ~

tom: 1  
TEXT



**disseny i càlcul  
d'estructures de barres,  
totalment articulades,  
amb grans deformacions.**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
Biblioteca



1400108652

1981

RAMON SASTRE I SASTRE

arquitecte

043 Sas  
I



Tan inútil és aprendre  
sense meditar, com perillós  
és pensar sense haver, abans,  
après dels altres.

Confuci

Tesi Doctoral:

D I S S E N Y I C À L C U L  
D ' E S T R U C T U R E S D E B A R R E S ,  
T O T A L M E N T A R T I C U L A D E S ,  
A M B G R A N S D E F O R M A C I O N S .

Autor: RAMON SASTRE I SASTRE

Barcelona, abril de 1981

~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~  
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR  
D'ARQUITECTURA  
DEL VALLÈS

BIBLIOTECA

R. 10.886

11

## C O N T I N G U T :

=====

## INTRODUCCIÓ

## Capítol I HIPERELASTICITAT

- 1.1 Material hiperelàstic.
- 1.2 Barra hiperelàstica.
- 1.3 Constant hiperelàstica d'una barra.
- 1.4 Nusos extrems d'una barra.
- 1.5 Rigideses lineal i transversal d'una barra hiperelàstica.
- 1.6 Casos especials.
- 1.7 Precisió estàndard.

## Capítol II HIPERELASTICITAT AL PLA.

- 2.1 Barra hiperelàstica al pla.
  - 2.1.1 Desplaçament d'un nus extrem.
  - 2.1.2 Desplaçament d'ambdós nusos extrems.
- 2.2 Nus hiperelàstic.
- 2.3 Rigideses lineals i transversal d'un nus hiperelàstic.
- 2.4 Modificacions de les rigideses lineals i transversal d'un nus hiperelàstic.
- 2.5 Estructura hiperelàstica.
- 2.6 Tipologia de nusos en una estructura.
  - 2.6.1 Nus fix.
  - 2.6.2 Nus tipus "x".
  - 2.6.3 Nus tipus "y".
  - 2.6.4 Nus lliure.

## Capítol III HIPERELASTICITAT A L'ESPAI.

- 3.1 Barra hiperelàstica a l'espai.
  - 3.1.1 Desplaçament d'un nus extrem.
  - 3.1.2 Desplaçament d'ambdós nusos extrems.
- 3.2 Nus hiperelàstic a l'espai.
- 3.3 Rigideses lineals i transversals d'un nus espacial hiperelàstic.

- 3.4 Modificacions de les rigideses lineals i transversals d'un nus espacial hiperelàstic.
- 3.5 Estructura hiperelàstica espacial.
- 3.6 Tipologia dels nusos que formen una estructura hiperelàstica espacial.
  - 3.6.1 Nus fix.
  - 3.6.2 Nus tipus "x".
  - 3.6.3 Nus tipus "y".
  - 3.6.4 Nus tipus "z".
  - 3.6.5 Nus tipus "xy".
  - 3.6.6 Nus tipus "xz".
  - 3.6.7 Nus tipus "yz".
  - 3.6.8 Nus lliure.

#### Capítol IV RESOLUCIÓ D'UNA ESTRUCTURA HIPERELÀSTICA

- 4.1 Estat de càrregues.
- 4.2 Estat d'esforços.
- 4.3 Estat d'equilibri.
- 4.4 Procés de resolució.
- 4.5 Matriu de rigidesa.
  - 4.5.1 Coeficients.
  - 4.5.2 Simetria.
  - 4.5.3 Ample de banda.
  - 4.5.4 Matriu Transformada.
- 4.6 Resolució d'un sistema d'equacions.
  - 4.6.1 Mètode "TES37"

#### Capítol V PROGRAMA "TEP32"

- 5.1 Entrada de dades.
- 5.2 Codificació.
  - 5.2.1 Primera fitxa.
  - 5.2.2 Segona fitxa.
  - 5.2.3 Dades dels nusos.
  - 5.2.4 Dades de les barres.
  - 5.2.5 Dades de l'estat de càrregues.
  - 5.2.6 Fitxa final.
  - 5.2.7 Exemple de codificació.
- 5.3 Subprograma "TES13"
- 5.4 Subprograma "TES14"
- 5.5 Subprograma "TES18"
- 5.6 Subprograma "TES19"

- 5.7 Subprograma "TES35"
  - 5.7.1 Formació de la Matriu Transformada.
  - 5.7.2 Comprovació de l'estat d'esforços.
  - 5.7.3 Canvi de coordenades.
- 5.8 Subprograma "TES16"
- 5.9 Programa principal "TEP32"

## Capítol VI COMENTARIS AL PROGRAMA "TEP32"

- 6.1 Problemes de capacitat d'ordinador.
- 6.2 Programa "TEP22".
  - 6.2.1 Subprograma "TES25".
  - 6.2.2 Subprograma "TES27".
  - 6.2.3 Sortida de dades.
- 6.3 Programes succedanis.
- 6.4 Estructures no deformables. (STRESS-TEP32).
- 6.5 Estructures molt deformables. (STRESS-TEP32).
- 6.6 Estructures no triangulades. (STRESS-TEP32).

## Capítol VII MALLA HIPERELÀSTICA

- 7.1 Introducció al tema.
- 7.2 Cable hiperelàstic.
- 7.3 Càlcul d'una estructura hiperelàstica amb cables hiperelàstics.
  - 7.3.1 Exemple pràctic.
- 7.4 Malla hiperelàstica.
- 7.5 Assimilació d'una malla hiperelàstica a una superfície contínua.
- 7.6 Formació d'una estructura superficial tensada.
  - 7.6.1 Superfície de partida.
  - 7.6.2 Mètode d'actuació.
  - 7.6.3 Procés de càlcul mitjançant el programa TEP32.
- 7.7 Especejament d'una superfície laminar.
- 7.8 Documentació fotogràfica.

## Capítol VIII MALLA UNITÀRIA

- 8.1 Tipologies de Malles Hiperelàstiques.
- 8.2 Malla Unitària.
- 8.3 Tipologia de nusos en una Malla Unitària.
- 8.4 Àrea Nodal.
- 8.5 Càlcul numèric de l'àrea Nodal.
  - 8.5.1 Numeració dels nusos.
  - 8.5.2 Numeració de les barres.
  - 8.5.3 Connexions dels nusos.
- 8.6 Deformació d'una Malla Unitària.
- 8.7 Càrregues superficials.
  - 8.7.1 Pes propi dels cables.
  - 8.7.2 Pes propi de la superfície.
  - 8.7.3 Pressió interna.
  - 8.7.4 Vent.
  - 8.7.5 Neu.
  - 8.7.6 Dilatació.
- 8.8 Programa "TES23"

## Capítol IX APLICACIONS

- 9.1 Consideracions generals.
- 9.2 Estructura pneumàtica.
  - 9.2.1 Paràmetres generals.
  - 9.2.2 Malla unitària.
  - 9.2.3 Forma real
  - 9.2.4 Materialització de la forma.
  - 9.2.5 Càrrega de neu.
  - 9.2.6 Vent.
  - 9.2.7 Conclusions.
- 9.3 Estructura tensada.
  - 9.3.1 Paràmetres generals.
  - 9.3.2 Malla unitària.
  - 9.3.3 Forma real.
  - 9.3.4 Materialització de la forma.
  - 9.3.5 Estats de càrrega
- 9.4 Telefèric.
  - 9.4.1 Paràmetres generals.
  - 9.4.2 Disseny.
  - 9.4.3 Càlcul de tensions i deformacions.

## Capítol X

## CONCLUSIONS

- 10.1 Raó de ser d'aquesta Tesi.
- 10.2 Tesi.
- 10.3 Utilitat.
- 10.4 Modificacions.
- 10.5 Futur.

## Capítol XI

## VARIS

Agraïments.  
Suport tècnic.  
Bibliografia.

I N T R O D U C C I Ó  
=====

Dins el món del càlcul d'estructures, tant al camp de l'edificació com al de l'enginyeria, hi ha hagut un tipus d'estructura que ha estat estudiat i considerat baix molts punts de vista; aquest és el de l'estructura de barres.

I no tan sols perquè hi hagi molts tipus estructurals que formin una configuració d'elements lineals units pels seus extrems, (tal seria una veritable estructura de barres), sinó també perquè moltes vegades s'assimilen a aquest tipus, estructures formades en realitat per elements superficials o volumètrics; així els casos dels sostres reticulats on més aviat es tracta d'una llosa alleugerada que d'un conjunt de barres ortogonals o bé el tractament d'una tela tensada, on ens servim de cada un d'uns fils ideals que formarien una xarxa assimilable a la tela en qüestió, en lloc de considerar-la com un conjunt superficial d'elements finits.

Bé, de tot això podem deduir que els estudis fets sobre aquest tema han estat molts i profunds. Al començament, davant la manca de mitjans de càlcul potents, la resolució de les estructures de barres es realitzava mitjançant mètodes inventats per diferents teòrics que donaren el seu nom a cada un d'aquests mètodes. De tots aquests, el de Cross va ser un dels que més utilitat ha donat, atesa la seva senzillesa. Tanmateix tenia una sè-



rie de restriccions i es tornava desmesuradament llarg quan es tenien en compte els desplaçaments dels nusos de l'estructura.

Ara bé, una vegada els calculadors electrònics van irrompre dins el camp de la tècnica, els mètodes de càlcul van canviar totalment. S'abandonaren els càlculs manuals <sup>amb</sup> mètodes més o menys pràctics, exactes o ràpids i tothom va enfocar el problema sota un altre punt de vista.

Els mètodes matricials van copsar totalment aquest tipus de càlcul. La idea era única, i només els tècnics d'informàtica s'escarrassaven per trobar algorismes més ràpids a fi de resoldre els grans sistemes d'equacions que es presentaven. Més o menys això ja s'ha conseguit, i avui dia jo diria que és un problema resolt i acabat. Les úniques limitacions que trobem en el camp del càlcul d'estructures de barres, rígides, són el nombre de nusos o barres de la mateixa estructura, és a dir, hi ha un problema de quantitat però cap de dificultat, per complexa, estranya, etc. que sigui l'estructura.

Però, i d'aquest però neix l'estudi que ara comença, he dit que tot està fet en el camp de les estructures "rígides" de barres.

Què passa, doncs, amb les estructures molt deformables? Tal com argüia quan vaig fer la presentació del tema de la Tesi, aquestes estructures no es poden resoldre pels mètodes tradicionals o moderns amb ordinador degut al fet de que desconeixem la forma de l'estructura una vegada en equilibri, i aquest és un factor imprescindible en el càlcul normal.

Per això, aquesta Tesi vol emprendre un treball que partint de zero intenti arribar a la solució d'aquestes estructures a través d'un procés lògic des del principi; sempre contemplant l'equilibri de l'estructura una vegada aquesta estigui deformada i no abans. Ja veurem que això ens farà utilitzar mètodes iteratius, ja que si no fos així seria impossible trobar la deformació final ni l'estat d'equilibri.

Podem cloure aquesta introducció exposant l'esquema de com es pensa dur endavant aquesta Tesi. Aquests seran els passos a desenvolupar:

- a) Estudi del material.
- b) Estudi de l'element bàsic: la barra.
- c) Comportament d'una barra sota un estat de deformacions.
- d) Comportament d'un conjunt de barres al pla.
- e) Comportament d'un conjunt de barres a l'espai.
- f) Aplicacions.

Nota:

Sempre que en aquesta Tesi es parli d'estructures de barres, ens referirem a estructures "totalment articulades". És a dir, no es contemplarà en cap moment l'existència de moments flectors ni torsors.

CAPÍTOL IH I P E R E L A S T I C I T A T

## 1.1 MATERIAL HIPERELASTIC

Tot estudi fet dins el camp de la física, es preocupa sempre del comportament dels diferents elements sobre els quals es treballa. Sembla clar, i no cal capficar-se gaire per a entendre que aquest comportament depèn especialment del material o materials que formen aquest element.

També és evident, que en funció del tipus d'estudi que estiguem realitzant, ens interessaran unes propietats dels materials més que les altres. Així, partirem del coeficient de dilatació per a fer estudis tèrmics, del grau de descomposició per a fer estudis de durabilitat, de la resistivitat per a estudis elèctrics, etc. En el cas que ens ocupa, l'estudi d'estructures de barres altament deformables, es evident que el comportament elàstic, és a dir, la relació tensió-deformació del material serà el coneixement prioritari que necessitem.

Amb aquesta relació, podrem concretar, juntament amb altres característiques geomètriques dels elements estudiats, quin serà el comportament d'aquelles estructures. Aquesta relació ens sol venir donada mitjançant una corba grafiada sobre un pla coordinat.

Si ens fixem en la fig. 1.1 podrem veure una corba que ens és molt familiar dins el camp de la resistència

de materials, és la corba tensió-deformació corresponent a l'acer. Comentem-la una mica.

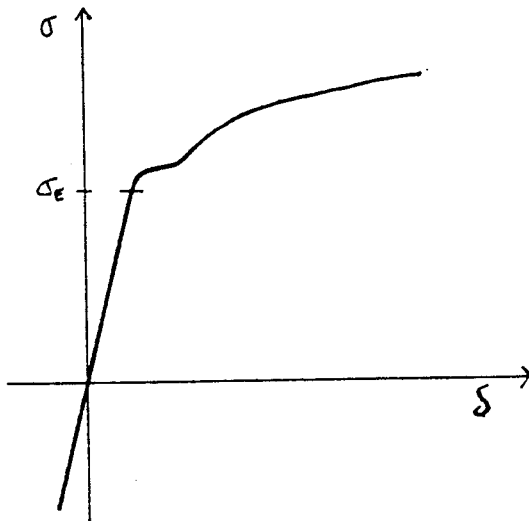


Fig. 1.1

En primer lloc podem veure que la corba passa per l'origen de coordenades, és a dir a tensió nul·la correspon una deformació nul·la. A partir de l'origen trobem un tros recte on diem que el material té un comportament elàstic perquè la relació tensió-deformació és lineal. Després hi ha un període de relaxament on augmenta la deformació sense variar la ten

sió i a continuació ens trobem en el període que anomenem plàstic, on ja no és lineal la deformació respecte de la tensió, i per fi la corba s'acaba en un punt que representa la rotura del material.

El valor de la relació tensió-deformació s'ha vist que és constant en el període elàstic del material, en aquest cas l'acer, i pren el nom de mòdul d'elasticitat del material. Aquesta relació i aquest valor adquireixen la seva importància mitjançant la famosa llei de Hooke:

$$\delta = \frac{L}{E} \sigma$$

sempre que  $\sigma \leq \sigma_E$

Tanmateix, quan ens trobem en els períodes de relaxament o de plasticitat ja no podem establir cap relació lineal entre la tensió i la deformació, encara que el concepte segueix sent el mateix: a més tensió més deformació.

A fi d'evitar aquesta imprecisió anem a definir un material ideal que compleixi les següents característiques:

- 1) Sigui un material completament elàstic. És a dir, la corba tensió-deformació serà sempre una recta.
- 2) Tingui, tant a tracció com a compressió, resistència infinita. És a dir, no existeix el punt de ruptura, ni períodes de relaxament ni de plasticitat.

Es tracta, doncs, d'un material de corba tensió-deformació rectilínia, la qual veiem grafiada a la fig. 1.2 i on sempre, sense excepció, es compleix la llei de Hooke.

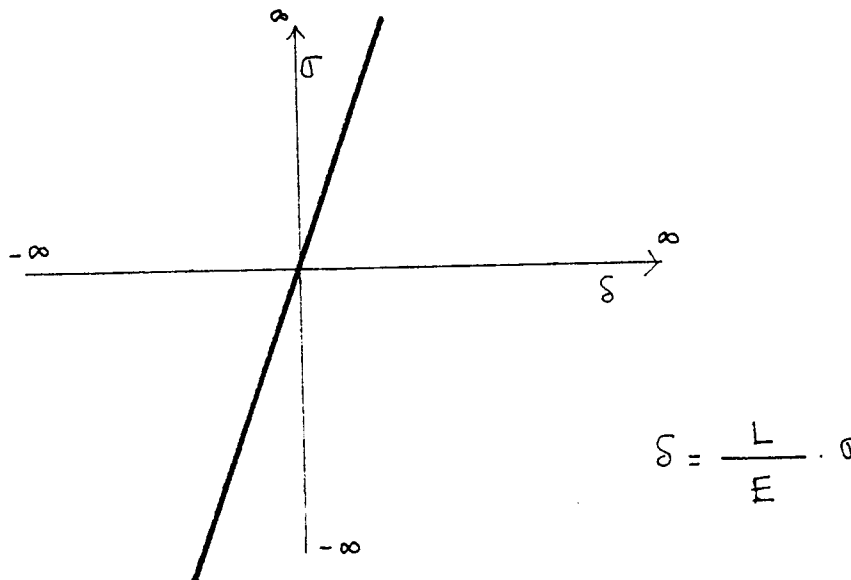


Fig. 1.2

Si donem una mirada als materials existents, veurem que evidentment no n'hi ha cap que compleixi aquestes premis-

ses, ja que tots tenen una tensió de rotura i a més, sempre abans d'aquest punt la corba tensió-deformació deixa de ser una recta.

Per què, doncs, hem inventat aquest material ?

Molt senzill. Pretenem treballar amb una relació tensió-deformació fàcil de calcular i naturalment la més fàcil és la lineal. Al mateix temps, atès que la majoria de materials utilitzats en estructures deformables tenen una gran part de la corba tensió-deformació en període elàstic, i que sotmesos a càrrega normal, les tensions produïdes en ell es troben quasi sempre dins aquest lapsus, no sembla cap disbarat suposar que el material té un comportament absolutament i exclusivament elàstic. Només caldrà que a través del disseny aconseguim que les tensions a les quals sotmetem el material estructural no sobrepassin mai els límits elàstics d'ell mateix a fi i efecte de que els raonaments fets en aquesta Tesi siguin correctes.

Naturalment, a aquest material li haurem de donar algun nom, si ens volem entendre. Degut a aquest comportament exageradament elàstic, el definim com material "hiperelàstic".

El valor constant de la relació tensió-deformació serà el Mòdul Hiperelàstic del material " $E_h$ " que, com ja s'ha dit, es mantindrà invariable per a tensions de qualsevol valor:

El fet d'haver desitjat un material d'unes característiques tan singulars, també ha vingut condicionat per la necessitat de treballar amb un model que serveixi tant per a materials amb mòduls d'elasticitat molt baixos tal és el cas dels plàstics, gomes, etc.; altres amb uns

mòduls intermedis, com és la fusta, i d'altres amb uns mòduls molt alts comparats amb els anteriors, tal seria el cas de l'acer, (cables).

El material hiperelàstic cobrirà, doncs, els casos esmentats.

### 1.2 BARRA HIPERELÀSTICA

Una vegada definit aquest material hiperelàstic ideal, passem a estudiar l'element base del qual es compondran les estructures altament deformables que tracta aquesta Tesi.

Definirem com barra hiperelàstica aquell ent que compleix les següents condicions:

- a) Està constituït d'un sol material homogeni de comportament hiperelàstic.
- b) Té una dimensió molt més gran que les altres dues. A aquesta dimensió l'anomenem longitud:  $L$ .
- c) L'àrea de la secció transversal d'aquesta barra és constant a tot el llarg de la longitud, amb un valor:  $A$ . La inèrcia és sempre nul·la.

### 1.3 CONSTANT HIPERELÀSTICA D'UNA BARRA

Si acabem de dir que la secció  $A$  és constant a tot el llarg d'una barra hiperelàstica, atès que aquesta està totalment formada de material hiperelàstic, el producte  $A \cdot E_h$ , on  $E_h$  és el mòdul hiperelàstic del material,

és també una constant. El seu valor  $K$  l'anomenarem "constant hiperelàstica" de la barra en qüestió.

Podrem concretar dient que una barra hiperelàstica ve definida únicament per dues magnituds: la seva longitud  $L$  (que es mesura amb unitats de longitud) i la seva constant hiperelàstica  $K$  (que es mesura amb unitats de força).

Si apliquem la llei de Hooke a una barra hiperelàstica sotmesa a una força  $T$  actuant en la mateixa direcció que la directriu de la barra, obtindrem la següent equació:

$$\delta = \frac{T \cdot L}{A \cdot E_h} = \frac{T \cdot L}{K}$$

on  $\delta$  és l'increment de longitud que ha sofert la barra hiperelàstica sota l'acció de la força  $T$ . Les demés variables són les constants a les que ens hem anat referint al llarg d'aquest Capítol I.

En el cas en que  $T$  fos igual a  $K$  (recordem que  $K$  ve donada en unitats de força), la relació  $T/K$  valdrà la unitat i per tant:

$$\delta = \frac{T \cdot L}{K} = L$$

És a dir, l'increment de longitud sofert per la barra val igual que la longitud inicial de la mateixa. D'aquesta manera, podem definir a la constant hiperelàstica d'una barra  $K$  com el valor que ha de tenir una força capaç de produir un increment de longitud de l'esmentada barra igual al de la seva pròpia longitud.



## 1.4 NUSOS EXTREMS D'UNA BARRA

Si unim els centres de gravetat de les seccions transversals extremes d'una barra hiperelàstica, obtindrem un segment al qual anomenarem directriu o eix de la barra. Els punts extrems d'aquest segment seran els "nusos extrems" de la barra. D'una manera arbitrària, fig. 1.3 a un d'aquests punts li direm nus inicial "i" i a l'altre nus final "k". Cada un d'aquests punts vindrà definit, naturalment, per les seves coordenades a l'espai:  $x_i, y_i, z_i$  per al nus inicial i  $x_k, y_k, z_k$  per al nus final. És obvi que si estem estudiant un problema al pla els valors  $z_i$  i  $z_k$  no són significatius i els podrem rebutjar.

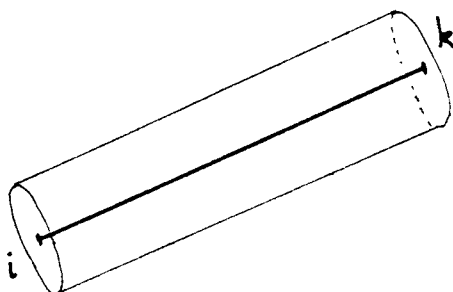


Fig. 1.3

Pel fet de situar aquesta barra en un espai coordinat, ens apareixen unes noves magnituds que ens seran de gran utilitat. El segment  $i-k = L$  es pot descompondre en les seves projeccions sobre els eixos  $x, y, z$  obtenint-se així els valors  $L_x, L_y, L_z$  respectivament. És evident que:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

## 1.5 RIGIDESA LINEAL I TRANSVERSAL D'UNA BARRA.

Sia una barra hiperelàstica de longitud inicial  $L$  a la qual correspongui una constant hiperelàstica  $K = E_h \cdot A$ . Fixem un dels seus extrems, "i", a l'origen d'un sistema d'eixos coordenats. L'altre extrem "k" el fem coincidir amb un punt de coordenades  $x_k, y_k$  tal que la nova longitud de la barra  $L_t$  sigui:

$$L_t = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

Degut al canvi de longitud, la barra hiperelàstica queda sotmesa a una força, el valor de la qual, d'acord amb la llei de Hooke serà:

$$T = \left( \frac{L_t}{L} - 1 \right) \cdot K \quad (\text{eq. 1.1})$$

Aquesta força  $T$  es pot descompondre amb les seves components  $T_x$  i  $T_y$  paral·leles als eixos coordenats. Atès que en aquest cas concret  $L_x = x_k$  i  $L_y = y_k$  (Fig. 1.4)

$$\frac{T_y}{L_y} = \frac{T}{L_t} \quad ; \quad T_y = \frac{T \cdot L_y}{L_t} \quad \text{per tant} \quad T_x = \frac{T \cdot L_x}{L_t}$$

i substituint  $T$  pel seu valor (eq. 1.1)

$$T_y = \left( \frac{L_t}{L} - 1 \right) \cdot \frac{K \cdot L_y}{L_t} = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} \right) \cdot K \cdot L_y$$

igualment: (eq. 1.2)

$$T_x = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} \right) \cdot K \cdot L_x \quad (\text{eq. 1.3})$$

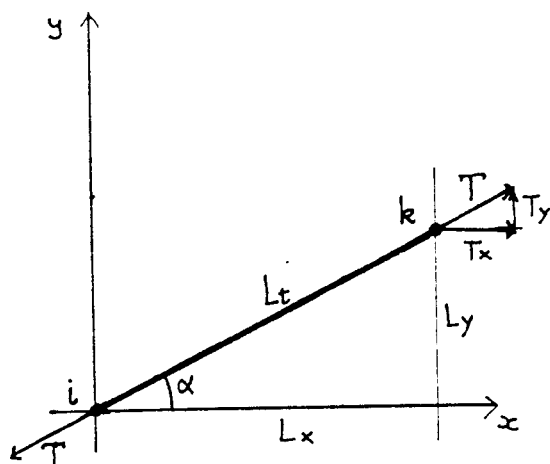


Fig. 1.4

Fem a continuació que l'extrem  $k$  sofreixi un desplaçament vertical molt petit  $dy$ . Així doncs, les noves coordenades del punt  $k_t$  seran  $(x_k; y_k + dy)$ . Tracem, ara, pel punt  $k$  (fig. 1.5) una perpendicular a la directriu  $L_t$  de la barra. L'angle  $\alpha$  format per aquesta perpendicular i la vertical paral·lela a l'eix  $y$  és el mateix que el format per la directriu  $L_t$  de la barra abans de la deformació i l'eix  $x$ .

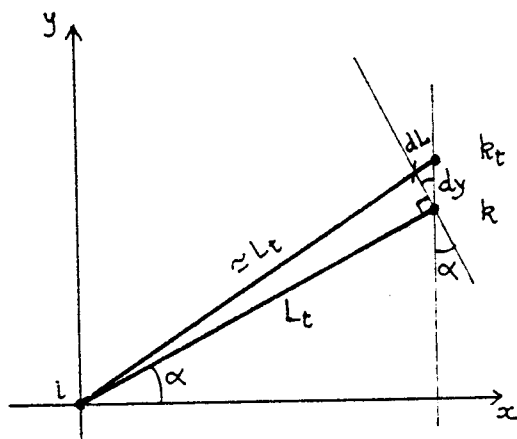


Fig. 1.5

Aquesta perpendicular ens divideix a la nova directriu de la barra hiperelàstica en dos trossos. L'un és pràcticament igual a  $L_t$ , ja que per a angles molt petits la perpendicular a un costat es confon amb l'arc.

L'altre serà, per tant, l'increment  $dL_t$  que ha sofert la barra al passar de la primera posició a la segona.

Si ens fixem en la fig. 1.6, que no és res més que una ampliació de la fig. 1.5, podrem veure que:

$$dL_t = dy \cdot \sin \alpha ; \quad \text{i com que}$$

$$\sin \alpha = \frac{L_y}{L_t} ; \quad \text{tindrem} \quad (\text{eq. 1.4})$$

$$dL_t = dy \cdot \frac{L_y}{L_t} \quad (\text{eq. 1.5})$$

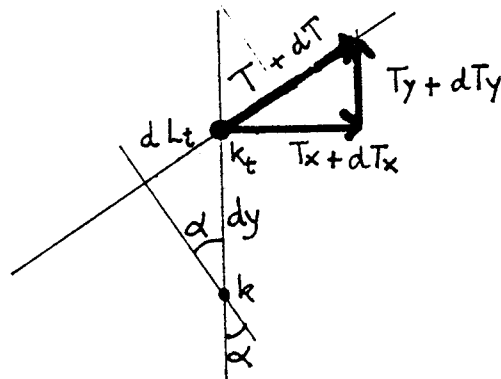


Fig. 1.6

Per una altra banda, en haver sofert la barra hiperelàstica un increment de longitud  $dL$ , resulta que ha aparegut consegüentment un increment de força  $dT$ , de tal manera que ara la barra està sotmesa a una força  $T + dT$ . Naturalment aquesta força pot descompondre's segons els eixos coordenats en  $T_x + dT_x$  i  $T_y + dT_y$ , sent  $T_x$  i  $T_y$  els valors trobats a les equacions 1.2 i 1.3, mentre que  $dT_x$  i  $dT_y$  seran

les variacions que han sofert aquests valors al passar del punt  $k$  al punt  $k_t$ . (fig 1.6).

Naturalment, en aquest nou punt d'equilibri  $k_t$  de coordenades  $(x_k ; y_k + dy)$  podrem establir les mateixes equacions 1.2 i 1.3 que hem establert pel punt  $k$ . Així:

$$T_y + dT_y = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right) \cdot K \cdot (L_y + dy) \quad (\text{eq. 1.6})$$

$$T_x + dT_x = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right) \cdot K \cdot L_x \quad (\text{eq. 1.7})$$

(recordem que  $L_x = x_k$  i  $L_y = y_k$ )

Si restem les equacions 1.2 i 1.3 a les que ara acabem d'obtenir 1.6 i 1.7, respectivament, resulta:

$$dT_y = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right) \cdot K \cdot (L_y + dy) - \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} \right) \cdot K \cdot L_y$$

$$dT_x = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right) \cdot K \cdot L_x - \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} \right) \cdot K \cdot L_x$$

simplificant:

$$dT_y = \frac{K \cdot L_y}{L} - \frac{K \cdot L_y}{L_t + dL_t} + \frac{K \cdot dy}{L} - \frac{K \cdot dy}{L_t + dL_t} - \frac{K \cdot L_y}{L} + \frac{K \cdot L_y}{L_t}$$

$$dT_x = K \cdot L_x \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t + dL_t} - \frac{1}{L} + \frac{1}{L_t} \right)$$

$$dT_y = K \cdot dy \cdot \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right) + K \cdot L_y \cdot \left( \frac{1}{L_t} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right)$$

( eq. 1.8)

$$dT_x = K \cdot L_x \cdot \left( \frac{1}{L_t} - \frac{1}{L_t + dL_t} \right) \quad (\text{eq. 1.9})$$

veiem que ambdues equacions presenten la fracció  $\frac{1}{L_t + dL_t}$  que intentarem transformar:

$$\frac{1}{L_t + dL_t} = \frac{(L_t - dL_t)}{(L_t + dL_t) \cdot (L_t - dL_t)} = \frac{L_t - dL_t}{L_t^2 - dL_t^2}$$

atès que pel fet d'estar treballant amb desplaçaments molt petits,  $dL_t^2$  resulta ser un infinitèsim d'ordre superior i se'l pot despreciar, per tant:

$$\frac{1}{L_t + dL_t} = \frac{L_t - dL_t}{L_t^2}$$

si substituïm  $dL_t$  pel seu valor (eq. 1.5) queda:

$$\frac{1}{L_t + dL_t} = \frac{1}{L_t} - \frac{dy \cdot L_y}{L_t^3}$$

i si substituïm ara aquesta igualtat a les equacions (1.8) i (1.9) obtindrem:

$$dT_y = K \cdot dy \cdot \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} + \frac{dy \cdot L_y}{L_t^3} \right) + K \cdot L_y \cdot \left( \frac{1}{L_t} - \frac{1}{L_t} + \frac{dy \cdot L_y}{L_t^3} \right)$$

$$dT_x = K \cdot L_x \cdot \left( \frac{1}{L_t} - \frac{1}{L_t} + \frac{dy \cdot Ly}{L_t^3} \right)$$

$$dT_y = K \cdot dy \cdot \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} \right) + \frac{K \cdot dy^2 \cdot Ly}{L_t^3} + \frac{K \cdot Ly^2 \cdot dy}{L_t^3} \quad (\text{eq. 1.10})$$

$$dT_x = \frac{K \cdot L_x \cdot Ly}{L_t^3} \cdot dy \quad (\text{eq. 1.11})$$

de l'equació (1.10) podem despreciar el segon terme, ja que hi apareix el valor  $dy^2$  que és un infinitesimal d'ordre superior. Ens queda doncs la següent equació:

$$dT_y = K \cdot dy \cdot \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} + \frac{Ly^2}{L_t^3} \right) \quad (\text{eq. 1.12})$$

Si ara anomenem Rigidesa Lineal " $R_l$ " i Rigidesa Transversal " $R_t$ " als següents valors:

$$R_l = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} + \frac{Ly^2}{L_t^3} \right) \cdot K \quad (\text{eq. 1.13})$$

$$R_t = \frac{L_x \cdot Ly}{L_t^3} \cdot K \quad (\text{eq. 1.14})$$

ens queden les equacions bàsiques:

$$dT_y = R_l \cdot dy \quad (\text{eq. 1.15})$$

$$dT_x = R_t \cdot dy \quad (\text{eq. 1.16})$$

Aquestes darreres equacions 1.15 i 1.16 poden explicar-se de la següent manera:

"Donada una barra hiperelàstica en equilibri, sotmesa a un estat de forces determinat, en aplicar en un extrem una deformació molt petita, l'augment de les components de la tensió a la qual està sotmesa la barra, segons la directriu de la deformació i la seva perpendicular, són proporcionals al valor de la citada deformació. A les corresponents constants de proporcionalitat les anomenem Rigidesa Lineal i Rigidesa Transversal respectivament, de la barra en qüestió."

De l'observació de les equacions 1.13 i 1.14 s'aprecia clarament que els valors de les rigideses lineals i transversals d'una barra hiperelàstica no són constants pròpies d'aquesta, sinó que depenen de la longitud real de la barra en cada moment i de l'angle que formin la directriu de la barra i la deformació.



## ANEX A L'APARTAT "1.6"

Cara a conseguir una major operativitat en la utilització de les equacions que s'han desenvolupat en aquest apartat, i pensant sobretot en la seva codificació als programes en FORTRAN que s'inclouran en aquesta Tesi, aquest Anex presenta unes formes alternatives d'una sèrie d'aquestes equacions, formes que evidentment surten d'un procés matemàtic de substitució i igualació i per tant no canvia en res el significat d'aquestes equacions:

$$\text{eq. 1.1 : } T = ( Lt/L - 1 ) \cdot K$$

$$\text{eq. 1.1.1 } T = ( 1/L - 1/Lt ) \cdot K \cdot Lt$$

$$\text{eq. 1.1.2 } T/Lt = ( 1/L - 1/Lt ) \cdot K$$

$$\text{eq. 1.13 : } R1 = ( 1/L - 1/Lt + Ly^2/Lt^3 ) \cdot K$$

$$\text{eq. 1.13.1 } R1 = ( 1/L - 1/Lt ) \cdot K + ( Ly^2/Lt^2 ) \cdot K/Lt$$

$$\text{eq. 1.13.2 } R1 = T / Lt + ( Ly/Lt )^2 \cdot K / Lt$$

$$\text{eq. 1.13.3 } R1 = ( T + ( Ly/Lt )^2 \cdot K ) / Lt$$

## 1.6 CASOS PARTICULARS

De tots els possibles casos estructurals que se'ns poden presentar a l'hora de buscar les rigideses lineals i transversals d'una barra hiperelàstica n'hi ha uns que són d'un interès especial. Veiem-los.

a) Suposem el cas on la barra hiperelàstica i el desplaçament sofert per un dels seus extrems estan ali-neats. (Fig. 1.7).



(Fig. 1.7)

En aquest cas  $L_y$  que és la projecció de  $L_t$  sobre la directriu del desplaçament val  $L_t$ , mentre que  $L_x$  que és la projecció de  $L_t$  sobre la perpendicular al desplaçament val zero.

$$L_y = L_t \quad L_x = 0$$

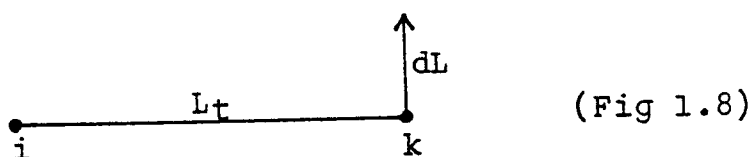
Substituint aquests valors a les equacions 1.13 i 1.14 tindrem:

$$R_l = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} + \frac{L_t^2}{L_t^3} \right) \cdot K = \frac{K}{L}$$

$$R_t = 0$$

valors que ens són ben coneguts a través de la llei de Hooke.

b) Suposem ara que el desplaçament és perpendicular a la directriu de la barra hiperelàstica. (Fig.1.8)



En aquest cas, a través del mateix procés lògic seguit a l'apartat anterior, tindrem:

$$L_x = L_t \quad L_y = 0$$

Si substituïm aquests valors a les equacions 1.13 i 1.14 ens quedarà:

$$R_1 = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} \right) \cdot K$$

$$R_t = 0$$

Si la barra hiperelàstica en equilibri no estigués sotmesa a cap tensió previa,  $L_t = L$  i per tant:

$$R_1 = 0$$

d'on arribaríem a la conclusió (absurd físic) de que aquesta barra no té cap tipus de rigidesa ja que

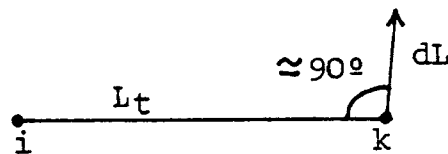
$$R_1 = R_t = 0$$

Quan passi això, prendrem, a efectes d'evitar entrebancs matemàtics (dividir per zero), una  $L_t$  diferent de la real, però molt aproximada:

$$L_t = 1,001 \cdot L$$

de tal manera que la rigidesa resulti molt petita, però mai nul·la.

c) Suposem, per fi, una barra hiperelàstica comprimida en estat d'equilibri, a la qual se la sotmet a un desplaçament quasi perpendicular a la seva directriu (fig 1.9). Tal com ja s'ha vist a l'apartat anterior b) en aquest cas:  $L_y \approx 0$  i  $L_x \approx L_t$ .



(Fig. 1.9)

Atès que la barra està comprimida, podem establir les següents desigualtats:

$$L_t < L \quad \frac{1}{L} < \frac{1}{L_t}$$

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} < 0$$

De tot això deduïm que:

$$R_1 = \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_t} - \frac{L_y^2}{L_t^3} \right) \cdot K < 0$$

Valor que presenta també un absurd físic, ja que mai pot ser negativa la relació d'un augment de tensió i el desplaçament paral·lel i del mateix sentit que provoca aquest augment.

Per a evitar aquest cas, prendrem sempre el valor absolut de la rigidesa lineal, de tal manera que en els casos normals aquest fet no representa cap modificació i en els casos especials que hem vist en aquest apartat ens permet de tirar endavant el càlcul matemàtic que se segueixi.

### 1.7 PRECISIÓ ESTÀNDAR

Direm que dues quantitats són iguals amb precisió estàndard quan la diferència entre ambdues és menor a  $1/10000$ . de la unitat de mesura utilitzada per aquestes magnituds.

Exemple:

0,1 mm. per a magnituds mesurades en metres.

0,1 kg. per a magnituds mesurades en tones.

etc.,etc.