

ESTUDI DE LA INFLUÈNCIA DE LA CONFIGURACIÓ GEOMÈTRICA DELS DENTATS SOBRE LA CAPACITAT DE CÀRREGA DELS ENGRANATGES RECTES

Tesi presentada per
CARLES RIBA ROMEVA

a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona
Per a l'obtenció del grau de Doctor, i dirigida per
PEDRO RAMON MOLINER

gener de 1976

INTRODUCCIÓ

A partir de la invenció dels mètodes de generació (finals del segle XIX) i de la posterior posta a punt de les màquines adequades per a utilitzar-los, el dentat cicloïdal ha estat progressivament substituït pel dentat d'evolvent fins a tal punt que, exceptuant algunes aplicacions tradicionals (rellotgeria), podem dir avui dia que el primer ha esdevingut un objecte de museu.

Les primeres eines emprades en la generació de dentats d'evolvent van adoptar l'angle de pressió de $14,5^\circ$: les raons semblen ser en part històriques (la forma del dentat que en resultava recordava el dentat cicloïdal i, en part de càlcul (el $\sin 14,5^\circ$ és aproximadament 0,25, la qual cosa simplificava el càlcul). Les altures de cap i de peu eren iguals per facilitar la intercanviabilitat de les rodes generades, i la reducció del nombre d'eines. Aquestes eines, no obstant, donaven lloc a una interferència important en la zona del peu de les dents quan s'intentava generar pinyons de poques dents.

Aquest motiu, i l'exigència de capacitats de càrrega creixents, van conduir a buscar angles de pressió majors. Així doncs, l'eina més generalitzada avui dia és la de 20° , i comencen ja a ésser freqüents eines d'angles de pressió majors ($22,5^\circ$, 25° i àdhuc superiors).

La tècnica del desplaçament de perfil en la generació de les rodes dentades (o correcció de perfil) ha vingut a fer més flexible la utilització de les eines normalitzades. Entre els seus possibles efectes podem citar:

Primer. Permet d'evitar la interferència en la generació dels pinyons de poques dents.

Segon. Permet desplaçar la zona d'engranament, de la qual cosa en pot resultar un equilibrament entre la resistència de la dent del pinyó i la de la roda, així com la disminució del perill d'excoriació.

Tercer. Permet realitzar rodes dentades que engranen segons un angle de pressió diferent del de l'eina. A la practica sempre es procura que sigui més gran, ja en resulten beneficiades les capacitats de càrrega de les dents i les pressions de contacte.

Aquests avantatges, els quals es presenten en realitzar un desplaçament positiu (enfora) de l'eina (avantatges més acusats en el pinyó que en la roda), estan en compromís, però, amb la disminució del recobriment.

A més, i no obstant l'interès d'aquesta tècnica, cal observar que el fet de desplaçar les eines modifica simultàniament diversos paràmetres de les rodes dentades (radis de peu, gruix de les dents, radis màxims de cap, etc.), la qual cosa limita les possibilitats d'optimització de l'engrenatge.

El present treball ha tingut com a punt de partida la constatació que l'angle de pressió ha anat evolucionant al llarg del temps vers a valors superiors al llarg del temps. En un principi, doncs, ens proposàvem estudiar fins on era possible seguir aquesta tendència i quins eren els valors òptims d'aquest paràmetre.

En abordar l'estudi, ens hem vist obligats a generalitzar el problema: hem prescindit de les eines normalitzades i del concepte de desplaçament. Ha calgut, doncs, fer una anàlisi dels paràmetres independents, reelaborar les expressions que relacionen els diferents paràmetres de l'engrenatge i establir les expressions que tradueixen els límits intrínsecs de l'engrenatge (interferències de funcionament, recobriment mínim, joc de fons, etc.): aquest és el tema del capítol 1.

Un altre aspecte en el qual hem hagut de parar una especial atenció ha estat en l'elecció dels criteris de prevenció dels deterioraments: molts d'ells inclouen simplificacions respecte a les premisses inicials de càlcul, adaptades a l'eina de 20°. Aquest és el tema dels capítols 2 al 6. El capítol 7 tracta de l'estimació de l'energia dissipada, aspecte complementari al present treball.

Els capítols 8 i 9 estableixen els criteris d'optimització, i el capítol 10 ofereix les conclusions més sobresortints del treball. Respecte a aquestes últimes ens sembla interessant comentar dos aspectes:

Primer. El càlcul habitual de la geometria d'un engranatge generat per una eina normalitzada sols es preocupa que el recobriment no sigui inferior a una certa cota mínima a base de fer una comprovació a posteriori. En el present treball hem tractat el coeficient de recobriment com una variable independent i, en conseqüència, en podem elegir el seu valor com a dada de partida.

Segon. La conclusió principal de la tesi és la següent: el veritable límit absolut de la capacitat de carrega de l'engrenatge des del punt de vista dels deterioraments estudiats (ruptura per fatiga, picadures i excoïació), té lloc quan tant la dent del pinyó com de la roda arriben a tenir un gruix de cap nul (límit de punta de la dent); donat que la practica confirma que les dents de un gruix de cap excessivament petit sofreixen un deteriorament de la punta, ens veiem inclinats a pensar que cal prendre un cert valor prudencial mínim per a aquest gruix.

Per tant, les conclusions d'aquest treball condueixen a una altra investigació: quin és el gruix mínim de cap prudencial per tal que no es produeixi el deteriorament de la punta de la dent ?

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

NOMENCLATURA

PRIMERA PART ANÀLISI DE LA GEOMETRIA I DELS DETERIORAMENTS DE L'ENGRANATGE

1. GEOMETRIA DE L'ENGRANATGE RECTE
 - 1.1 Introducció: Definició d'un engranatge recte
 - 1.2 Conjunt de paràmetres fonamentals elegit per a definir un engranatge
 - 1.3 Definició de paràmetres fonamentals i termes geomètrics derivats
 - 1.4 Limitacions intrínseques de la geometria de l'engranatge
 - 1.5 Definicions sobre forces i moments
2. DETERIORAMENT DELS ENGRANATGES: INTRODUCCIÓ
 - 2.1 Descripció dels diferents tipus de deterioraments
 - 2.1.1 Desgast
 - 2.1.2 Fatiga superficial
 - 2.1.3 Deformació plàstica
 - 2.1.4 Ruptura
 - 2.2 Prevenció dels deterioraments i mètodes de càlcul
3. CÀLCUL PER A LA PREVENCIÓ DE LA RUPTURA PER FATIGA
 - 3.1 Model de Lewis
 - 3.2 Mètodes actuals
 - 3.3 Anàlisi comparativa i discussió dels mètodes ISO i AGMA
 - 3.3.1 Termes que intervenen en el factor geomètric
 - 3.3.2 Termes que intervenen en el factor de treball
 - 3.4 Criteri de càlcul adoptat, conseqüència de l'anàlisi anterior
 - 3.5 Deteriorament de la punta de la dent
4. CÀLCUL PER A LA PREVENCIÓ DE LA FORMACIÓ DE PICADURES
 - 4.1 Teoria de Hertz
 - 4.2 Teoria de la lubricació elastohidrodinàmica (EHD)
 - 4.3 Anàlisi comparativa i discussió dels mètodes ISO i AGMA
 - 4.3.1 Termes que intervenen en el factor geomètric
 - 4.3.2 Termes que intervenen en el factor de treball
 - 4.4 Criteri de càlcul adoptat, conseqüència de l'anàlisi anterior
5. CÀLCUL PER A LA PREVENCIÓ DE L'EXCORIACIÓ
 - 5.1 Factor PV d'Almen
 - 5.2 Teoria de les temperatures flash de H. Blok
 - 5.3 Criteri de càlcul adoptat
6. CÀLCUL INDICATIU PER A L' ENERGIA DISSIPADA
 - 6.1 Introducció del concepte
 - 6.2 Criteri de càlcul adoptat per al rendiment instantani
 - 6.3 Criteri de càlcul adoptat per al rendiment mitjà

SEGONA PART. OPTIMITZACIÓ PRÒPIAMENT DITA DE L'ENGRANATGE

7. PRIMERA ETAPA D'OPTIMITZACIÓ: REDUCCIÓ DEL NOMBRE DE PARÀMETRES INDEPENDENTS QUE DEFINEIXEN LA FORMA I PROPORCIONS DE LA SECCIÓ FRONTAL DE L'ENGRANATGE
 - 7.1 Introducció
 - 7.1.1 Altures mínimes de cap d'eina
 - 7.1.2 Radis d'arrodoniment de cap d'eina màxims
 - 7.1.3 Equilibrament dels lliscaments específics
 - 7.1.4 Joc d'entradents nul
 - 7.1.5 Gruixos de cap mínims
 - 7.2 Paràmetres independents: resum
8. SEGONA ETAPA D'OPTIMITZACIÓ: CRITERIS PER A LA RECERCA DE LES DIMENSIONS EXTERIORS ÒPTIMES
 - 8.1 Introducció
 - 8.2 Limitacions imposades pels diferents criteris de prevenció dels deterioraments
 - 8.3 Criteris bàsics d'optimització
 - 8.4 Factors geomètrics i factors de treball
 - 8.5 Delimitació entre zones del camp d'existència crítiques als diferents deterioraments
 - 8.5.1 Comparació entre els límits de volum LR1 i LR2
 - 8.5.2 Comparació entre els límits de volum LP1 i LP2
 - 8.5.3 Comparació entre els límits de volum LP i LR
 - 8.5.4 Determinació del valor mínim del paràmetre de proporció
 - 8.6 Anàlisi dels diferents factors de comparació
 - 8.6.1 Factors de comparació TRR i TPP
 - 8.6.2 Factor de comparació TPR
 - 8.6.3 Factors de comparació TEP i TER
9. GRAFICS D'OPTIMITZACIÓ I RESULTATS
 - 9.1 Gràfics d'optimització
 - 9.2 Consideracions sobre els paràmetres independents
 - 9.3 Utilització dels gràfics d'optimització
 - 9.4 Resultats
 - 9.5 Anàlisi comparativa entre un engranatge tallat per una eina normalitzada i un engranatge basat en el present estudi
10. CONCLUSIONS

APÈNDIXS I BIBLIOGRAFIA

- A1. FACTOR DE FORMA
 - A1.1 Expressió del factor de forma
 - A1.2 Expressió analítica dels paràmetres de càlcul
- A2. FACTOR DE CONCENTRACIÓ DE TENSIONS
- A3. PROGRAMA D'ORDINADOR
 - A3.1 Correspondència entre símbols del text i del programa d'ordinador
 - A3.2 Llistat del programa d'ordinador

BIBLIOGRAFIA

AGRAÏMENTS

NOMENCLATURA

Voldríem fer dues observacions sobre els símbols que es relacionen a continuació: En primer lloc, els símbols que duen el subíndex 1 corresponen al pinyó, mentre que els que duen el subíndex 2 corresponen a la roda; I, en segon lloc, designarem les magnituds lineals amb una lletra majúscula quan s'expressin en el seu veritable valor, mentre que les designarem amb la mateixa lletra minúscula quan s'expressin en mòduls: En aquesta nomenclatura indiquem en general la primera variant.

a_H	Semiampлада de la zona de contacte de Hertz
B	Amplada de contacte
B_0	Coefficient de contacte tèrmic
D	Distància entre centres
DIS	Factor de dissipació
E_r	Mòdul d'elasticitat reduït
F	Força tangencial en el punt d'engranament
f	Coefficient de fricció
F_n	Força normal
F_{nu}	Força normal unitària (per unitat d'amplada)
$F_{r1}, F_{r2},$	Força radial sobre la dent
F_{t1}, F_{t2}	Força tangencial sobre la dent
GE	Factor geomètric d'excoriació
GEP	Relació geomètrica excoriació–picadures
$GER1, GER2$	Relació geomètrica excoriació–ruptura
GP	Factor geomètric de picadures
$GPR1, GPR2$	Relació geomètrica picadures–ruptura
$GR1, GR2$	Factor geomètric de ruptura
GRR	Relació geomètrica ruptura pinyó–ruptura roda
G_{s1c}, G_{s2c}	Lliscament específic en el punt de contacte C
h	Mínim gruix de la pel·lícula (lubrificació EHD)
H_{c1}, H_{c2}	Altura de cap
H_{f1}, H_{f2}	Altura de càlcul
H_{uc1}, H_{uc2}	Altura útil de cap d'eina
K_0	Factor de servei
K_{b1}, K_{b2}	Factor de durada (ruptura)
K_f	Factor de superfície
K_g	Factor de grandària
K_{H1}, K_{H2}	Factor de durada (picadures)
K_h	Factor de relació de dureses de pinyó i roda
K_m	Factor de distribució de càrrega
K_r	Factor de repartiment
K_s	Factor de seguretat
K_t	Factor de temperatura
K_v	Factor dinàmic
LE	Límit d'excoriació
L_{P1}, L_{P2}	Límit de volum de picadures
L_{R1}, L_{R2}	Límit de volum de ruptura
m_0	Mòdul
M_{e1}	Moment efectiu del pinyó
M_{sc}	Valor mínim admissible del gruix de cap
N_c	Nombre de cicles de vida

P_0	Pas primitiu
P_b	Pas de base
P_H	Pressió màxima de Hertz
Pot	Potència transmesa
PV_{adm}	Valor màxim admissible per al producte PV
R_{01}, R_{02}	Radi primitiu
R_{b1}, R_{b2}	Radi de base
R_{c1}, R_{c2}	Radi de cap
R_{cu1}, R_{cu2}	Radi de contacte únic
R_{e1}, R_{e2}	Radi d'arrodoniment de cap d'eina
R_{f1}, R_{f2}	Radi de curvatura de càlcul (peu de dent)
RK_b	Relació de dura da (ruptura)
RK_H	Relació de durada (picadures)
R_{p1}, R_{p2}	Radi de peu
R_{up1}, R_{up2}	Radi útil de peu
$R\sigma_b$	Relació d'esforços de flexió admissibles
$P\sigma_H$	Relació d'esforços de contacte admissibles
S_{01}, S_{02}	Gruix primitiu (de dent)
S_{b1}, S_{b2}	Gruix de base
S_{c1}, S_{c2}	Gruix de cap
S_{cu1}, S_{cu2}	Gruix de contacte únic
S_{f1}, S_{f2}	Secció de càlcul
TE	Factor de treball d'excoriació
TEP	Factor de comparació excoriació–picadures
TER1, TER2	Factor de comparació excoriació–ruptura
Tf	Temperatura flash
TP1, TP2	Factor de treball de picadures
TPP	Factor de comparació picadures pinyó–picadures roda
TPR1, TPR2	Factor de comparació picadures–ruptura
TR1, TR2	Factor de treball de ruptura
TRR	Factor de comparació ruptura pinyó–ruptura roda
V	Paràmetre de volum de l'engranatge
V_{1c}, V_{2c}	Velocitat tangencial del flanc en el punt de contacte C
V_{gc}	Velocitat de lliscament en el punt de contacte C
Vol	Volum de l'engranatge
V_{op}	Valor òptim del paràmetre de volum
Y_{c1}, Y_{c2}	Factor de concentració de tensions
Y_{f1}, Y_{f2}	Factor de forma
Z	Nombre de dents suma
Z_1, Z_2	Nombre de dents
α	Angle de funcionament
α_{c1}, α_{c2}	Angle de cap
$\alpha_{cu1}, \alpha_{cu2}$	Angle de contacte únic
ΔT_{adm}	Increment de temperatura admissible
ε	Coeficient de recobriment
η	Rendiment mitjà
η_i	Rendiment instantani
θ	Paràmetre de proporció de l'engranatge
θ_1, θ_2	Angle de càlcul (factor de forma)

θ_{\min}	Valor mínim del paràmetre de proporció
λ	Gruix relatiu de pel·lícula (lubricació EHD)
μ	Relació de transmissió
ρ_c	Radi de curvatura reduït en el punt de contacte C
σ_{b1}, σ_{b2}	Esforç de flexió admissible per fatiga
σ_{H1}, σ_{H2}	Esforç de contacte admissible per fatiga
ϕ_{01}, ϕ_{02}	Gruix angular primitiu
ϕ_{c1}, ϕ_{c2}	Gruix angular de cap
ϕ_{cu1}, ϕ_{cu2}	Gruix angular de contacte únic
φ_1, φ_2	Factor de cap
φ_a	Factor d'acostament
φ_{acu}	Factor d'acostament de contacte únic
φ_r	Factor de retraïment
φ_{rcu}	Factor de retraïment de contacte únic

PRIMERA PART

ANÀLISI DE LA GEOMETRIA I DELS DETERIORAMENTS DE L'ENGRANATGE

1. GEOMETRIA DE L'ENGRANATGE RECTE

1.1 INTRODUCCIÓ: DEFINICIÓ D'UN ENGRANATGE RECTE

La descripció geomètrica completa d'un engranatge recte (pinyó i roda que engranen) comprèn el coneixement d'un cert nombre de paràmetres geomètrics fonamentals, les toleràncies d'aquests, així com certes modificacions de la superfície dels flancs que són d'ús comú avui dia (especialment la despulla de cap i el bombament longitudinal).

En aquest treball analitzarem la influència del conjunt de la geometria de l'engranatge recte sobre la seva capacitat per a transmetre càrrega. Cal partir, doncs, d'un model simplificat definit exclusivament pels paràmetres fonamentals.

El primer problema que cal abordar és determinar el nombre de paràmetres fonamentals independents que defineixen correctament un engranatge, així com un conjunt de paràmetres que sigui adequat per al present treball.

La secció frontal d'una roda dentada recta es defineix en base de 6 paràmetres intrínsecs (Ref. 34, pag. 40), o sigui, paràmetres no referits a l'eina de generació ni a la manera d'engranar, sinó a característiques de la pròpia roda (i, en especial, a la circumferència de base). Aquest criteri és d'especial interès en el nostre cas, ja que el present estudi queda situat fora de les limitacions imposades per les eines normalitzades.

Donat que dues rodes que engranen han de tenir el mateix pas de base, en resulta, doncs, la necessitat de 11 paràmetres fonamentals per a definir-ne les dues seccions frontals (V. Fig. 1).

	<u>pinyó</u>	<u>roda</u>
Radi de cap	R_{c1}	R_{c2}
Radi útil de peu	R_{up1}	R_{up2}
Radi de peu	R_{p1}	R_{p2}
Radi de base	R_{b1}	R_{b2}
Gruix de dent de base	S_{b1}	S_{b2}
Pas de base		P_b

als quals cal afegir-ne dos més per a completar la definició de l'engranatge:

Distància entre centres	D
Amplada (igual per a pinyó i roda)	B

Per tant, són necessaris un total de 13 paràmetres fonamentals.

1.2 CONJUNT DE PARÀMETRES FONAMENTALS ELEGIT PER A DEFINIR UN ENGRANATGE

El conjunt de paràmetres fonamentals establert en l'apartat anterior no és del tot adequat per al propòsit del present treball; en conseqüència, hem realitzat diverses substitucions de paràmetres que responen essencialment a les següents raons:

- En primer lloc, hem preferit treballar a base de paràmetres que tinguin un significat físic més immediat. Així, doncs, hem substituït:

$$\begin{aligned}R_{b1} &= \text{Radi de base del pinyó} \\R_{b2} &= \text{Radi de base de la roda} \\P_b &= \text{Pas de base}\end{aligned}$$

pels tres paràmetres següents:

$$\begin{aligned}\mu &= \text{Relació de transmissió } (= R_{b1}/R_{b2}) \\Z &= \text{Nombre de dents suma } (= 2 \cdot \pi \cdot (R_{b1} + R_{b2})/P_b) \\\alpha &= \text{Angle de funcionament } (\cos\alpha = (R_{b1} + R_{b2})/D)\end{aligned}$$

- b) En segon lloc, hem procurat elegir paràmetres que permetin la simplificació de les diverses expressions analítiques. Aquest és el cas de la substitució dels dos radis de cap:

$$\begin{aligned}R_{c1} &= \text{Radi de cap del pinyó} \\R_{c2} &= \text{Radi de cap de la roda}\end{aligned}$$

pels dos factors de cap:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \text{Factor de cap del pinyó} \\\varphi_2 &= \text{Factor de cap de la roda}\end{aligned}$$

(Les definicions i relacions s'expliquen en el paràgraf següent).

- c) En tercer lloc, hem definit els gruixos de les dents a partir dels gruixos de cap enlloc dels gruixos de base. Això respon a què el gruix de cap té un significat molt més directe en rodes que s'acosten al límit de punta de les dents, fet al qual tendirem en el present estudi per les raons que s'exposen en l'apartat 7.1.5; en conseqüència, substituïrem els gruixos de base:

$$\begin{aligned}S_{b1} &= \text{Gruix de base del pinyó} \\S_{b2} &= \text{Gruix de base de la roda}\end{aligned}$$

pels gruixos de cap:

$$\begin{aligned}S_{c1} &= \text{Gruix de cap del pinyó} \\S_{c2} &= \text{Gruix de cap de la roda}\end{aligned}$$

(Les definicions i relacions s'estableixen en el paràgraf següent)

- d) Finalment, hem substituït els paràmetres intrínsecs que defineixen el peu de la dent (radi de peu R_p i radi útil de peu R_{up}) pels paràmetres de cap de l'eina generadora, ja que els primers no determinen la corba d'enllaç, informació necessària per a poder calcular els factors de forma Y_f i de concentració de tensions Y_c (V. Apèndixs A1 i A2).

A base dels paràmetres de cap de l'eina generadora i del moviment relatiu d'eina i roda, podem determinar l'expressió analítica de la corba d'enllaç.

Així, doncs, hem substituït els radis de peu R_p i els radis útils de peu R_{up}

$$\begin{aligned}R_{p1} &= \text{Radi de peu del pinyó} \\R_{p2} &= \text{Radi de peu de la roda} \\R_{up1} &= \text{Radi útil de peu del pinyó} \\R_{up2} &= \text{Radi útil de peu de la roda}\end{aligned}$$

pels següents paràmetres de cap de les eines:

$$\begin{aligned}H_{uc1} &= \text{Altura útil de cap de l'eina de pinyó} \\H_{uc2} &= \text{Altura útil de cap de l'eina de la roda}\end{aligned}$$

R_{e1} = Radi d'arrodoniment de cap d'eina de pinyó

R_{e2} = Radi d'arrodoniment de cap d'eina de roda

(V. Fig. 2):

(Tal com més endavant explicarem amb major detall, definirem les eines de generació de tal manera que puguin tallar les rodes sense fer ús dels desplaçaments; en conseqüència, l'angle de pressió de l'eina α_0 serà el mateix que l'angle de funcionament α de l'engranatge i el concepte de desplaçament de l'eina serà innecessari).

1.3 DEFINICIÓ DELS PARÀMETRES FONAMENTALS I TERMES GEOMÈTRICS QUE SE'N DERIVEN

En estudiar la geometria de la secció frontal d'un engranatge recte, sovint és còmode de treballar amb paràmetres lineals reduïts (o paràmetres que prenen com a unitat el mòdul); d'aquesta manera, dos engranatges amb seccions frontals geomètricament semblants es defineixen pels mateixos valors dels paràmetres reduïts.

D'ara endavant, no parlarem de paràmetres reduïts i no reduïts: simplement, designarem amb majúscules els paràmetres que s'expressen en la seva veritable magnitud (metres), i amb minúscules, els paràmetres que s'expressen en mòduls.

Passem a continuació a definir els 13 paràmetres fonamentals elegits i els diferents termes geomètrics que se'n deriven.

- a) D = Distància entre centres
B = Amplada (de pinyó i de roda)
 μ = Relació de transmissió (= $Z_1/Z_2 = \omega_1/\omega_2$)

El primer d'aquests paràmetres no ofereix massa problemes: és simplement la distància O_1O_2 (V. Fig. 2). En quant al paràmetre B significarà tant l'amplada del pinyó i la de la roda, com l'amplada de contacte mutu (és la disposició més freqüent en els engranatges rectes). Finalment, hem definit la relació de transmissió com el quocient entre la velocitat angular del membre conduït (roda) i la velocitat angular del membre conductor (pinyó), o també el quocient entre el nombre de dents del pinyó Z_1 i el nombre de dents de la roda Z_2 .

Aquests tres paràmetres permeten determinar la configuració dels axoides de funcionament o cilindres primitius (V. Fig. 2).

$$\text{Pinyó: Radi } R_{01} = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot D \quad r_{01} = \frac{\mu \cdot Z}{2 \cdot (1+\mu)} = \frac{Z_1}{2} \quad (1.3.a1)$$

Generatriu B

$$\text{Roda: Radi } R_{02} = \frac{1}{1+\mu} \cdot D \quad r_{02} = \frac{\mu \cdot Z}{2 \cdot (1+\mu)} = \frac{Z_2}{2} \quad (1.3.a2)$$

Generatriu B

El volum ocupat per les dues rodes dentades és molt aproximat a (una mica per defecte) el volum dels dos cilindres primitius:

$$\text{Vol} = \pi \cdot \left(\frac{\mu}{1+\mu} \cdot D \right)^2 \cdot B + \pi \cdot \left(\frac{1}{1+\mu} \cdot D \right)^2 \cdot B = \pi \cdot \frac{1+\mu^2}{(1+\mu)^2} \cdot B \cdot D^2 \quad (1.3.a3)$$

Per a una mateixa relació de transmissió, el volum és, doncs, proporcional a la quantitat $B \cdot D^2$ la qual, com més endavant veurem, juga un paper molt important en els diferents càlculs de prevenció dels deterioraments.

b) $Z =$ Nombre de dents suma ($= Z_1 + Z_2$)

Aquest quart paràmetre, junt amb els tres anteriors, permet de determinar els nombres de dents del pinyó Z_1 i el nombre de dents de la roda Z_2 ; també fixa els valors del mòdul primitiu m_0 i del pas primitiu P_0 :

$$Z_1 = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot Z \quad Z_2 = \frac{1}{1+\mu} \cdot Z \quad (1.3.b1)$$

$$\text{El mòdul primitiu: } m_0 = \frac{2 \cdot R_{01}}{Z_1} = \frac{2 \cdot R_{02}}{Z_2} = \frac{2 \cdot D}{Z} \quad (1.3.b2)$$

$$\text{El pas primitiu: } P_0 = \pi \cdot m_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot D}{Z}; \quad p_0 = \pi \quad (1.3.b3)$$

c) $\alpha =$ Angle de funcionament o angle de pressió

Aquest cinquè paràmetre (V. Fig. 3) determina la inclinació i longitud de la línia d'engranament T_1T_2 ; també determina els radis de base de pinyó R_{b1} i roda R_{b2} , (i, com a conseqüència, la configuració dels flancs de les dents); i, per últim, el mòdul de base m_b i el pas de base P_b :

$$\text{La distància } T_1T_2 \text{ serà: } T_1T_2 = D \cdot \sin \alpha \quad (1.3.c1)$$

$$\text{Radis de base: Pinyó } R_{b1} = R_{01} \cdot \cos \alpha; \quad r_{b1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \cos \alpha \quad (1.3.c2)$$

$$\text{Roda } R_{b1} = R_{01} \cdot \cos \alpha; \quad r_{b1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \cos \alpha \quad (1.3.c3)$$

$$\text{Mòdul de base: } m_b = m_0 \cdot \cos \alpha \quad (1.3.c4)$$

$$\text{Pas de base: } P_b = P_0 \cdot \cos \alpha; \quad p_b = \pi \cdot \cos \alpha \quad (1.3.c5)$$

d) $\varphi_1 =$ Factor de cap de pinyó ($= T_1A_1 / T_1T_2$)

$$\text{ $\varphi_2 =$ Factor de cap de roda ($= T_2A_2 / T_1T_2$)}$$

Aquests dos paràmetres mesuren la fracció de longitud de la línia d'engranament T_1T_2 compresa entre les respectives circumferències de base i de cap tant per al pinyó com per a la roda (V. Fig. 3).

En primer lloc, permeten determinar els extrems de la zona activa de la línia d'engranament A_1 i A_2 i, en conseqüència, queden fixats els angles de cap de pinyó α_{c1} i de roda α_{c2} , els radis de cap de pinyó R_{c1} i roda R_{c2} , les altures de cap de pinyó H_{c1} i roda H_{c2} i, finalment, el coeficient de recobriment ε (v. Fig. 2).

$$\text{Angles de cap: Pinyó } \tan \alpha_{c1} = \frac{1+\mu}{1} \cdot \varphi_1 \cdot \tan \alpha \quad (1.3.d1)$$

$$\text{Roda } \tan \alpha_{c2} = (1+\mu) \cdot \varphi_2 \cdot \tan \alpha \quad (1.3.d2)$$

$$\text{Radis de cap: Pinyó } R_{c1} = R_{01} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{c1}}; \quad r_{c1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{c1}} \quad (1.3.d3)$$

$$\text{Roda} \quad R_{c2} = R_{02} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{c2}}; \quad r_{c2} = \frac{Z_2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{c2}} \quad (1.3 \text{ d4})$$

$$\text{Altres de cap: Pinyó} \quad H_{c1} = R_{c1} - R_{01}; \quad h_{c1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{c1}} - 1 \right) \quad (1.3 \text{ d5})$$

$$\text{Roda} \quad H_{c2} = R_{c2} - R_{02}; \quad h_{c2} = \frac{Z_2}{2} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{c2}} - 1 \right) \quad (1.3 \text{ d6})$$

$$\text{Coeficient de recobriment:} \quad \varepsilon = (\varphi_1 + \varphi_2 - 1) \cdot \frac{Z \cdot \tan\alpha}{2 \cdot \pi} \quad (1.3 \text{ d7})$$

En segon lloc, i a través del pas de base P_b , queden determinats els punts de contacte únic sobre la línia d'engranament B_1 , i B_2 ; i en conseqüència, queden fixats els angles de contacte únic de pinyó α_{cu1} i roda α_{cu2} , i els radis de contacte únic de pinyó R_{cu1} i roda R_{cu2} . (V. Fig. 3).

$$\text{Angles de contacte únic: Pinyó} \quad \tan\alpha_{cu1} = \frac{1+\mu}{\mu} \cdot \left(\varphi_2 - \frac{2 \cdot \pi}{Z \cdot \tan\alpha} \right) \cdot \tan\alpha \quad (1.3 \text{ d8})$$

$$\text{Roda} \quad \tan\alpha_{cu2} = (1+\mu) \cdot \left(\varphi_1 - \frac{2 \cdot \pi}{Z \cdot \tan\alpha} \right) \cdot \tan\alpha \quad (1.3 \text{ d9})$$

$$\text{Radis de contacte únic: Pinyó} \quad R_{cu1} = R_{01} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{cu1}}; \quad r_{cu1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{cu1}} \quad (1.3 \text{ d10})$$

$$\text{Roda} \quad R_{cu2} = R_{02} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{cu2}}; \quad r_{cu2} = \frac{Z_2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{cu2}} \quad (1.3 \text{ d11})$$

En tercer lloc, permet de trobar el radi de curvatura reduït dels dos flancs en contacte en els punts A_1 , A_2 , B_1 i B_2 , els quals seran d'utilitat més endavant en tractar les picadures i l'excoriació (V. Cap. 4 i Cap. 5). La definició analítica de radi de curvatura reduït en el punt de contacte C és la següent (V. Fig. 6):

$$\rho_C = \frac{1}{1/T_1C + 1/T_2C} = \frac{T_1C \cdot T_2C}{T_1C + T_2C} = \frac{T_1C \cdot T_2C}{T_1T_2} \quad (1.3 \text{ d12})$$

En aplicar aquesta definició als quatre punts esmentats anteriorment s'obté:

$$\rho_{A1} = \varphi_1 \cdot (1 - \varphi_1) \cdot D \cdot \sin\alpha \quad (1.3 \text{ d13})$$

$$\rho_{A2} = \varphi_2 \cdot (1 - \varphi_2) \cdot D \cdot \sin\alpha \quad (1.3 \text{ d14})$$

$$\rho_{B1} = \left[\varphi_2(1 - \varphi_2) \cdot \tan^2\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{Z} \cdot (2\varphi_2 - 1) \cdot \tan\alpha - \left(\frac{2 \cdot \pi}{Z} \right)^2 \right] \cdot \frac{\cos\alpha}{\tan\alpha} \quad (1.3 \text{ d15})$$

$$\rho_{B2} = \left[\varphi_1(1 - \varphi_1) \cdot \tan^2\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{Z} \cdot (2\varphi_1 - 1) \cdot \tan\alpha - \left(\frac{2 \cdot \pi}{Z} \right)^2 \right] \cdot \frac{\cos\alpha}{\tan\alpha} \quad (1.3 \text{ d16})$$

En quart lloc, permet de calcular les velocitats tangencials tant de pinyó, V_{1C} , com de roda, V_{2C} , en els diferents punts de la línia d'engranament. Les expressions de les velocitats tangencials en el punt de contacte C seran:

$$\text{Pinyó:} \quad V_{1C} = T_1C \cdot \omega_1 \quad (1.3 \text{ d17})$$

$$\text{Roda: } V_{2C} = T_2C \cdot \omega_2 \quad (1.3 \text{ d18})$$

(on ω_1 , i ω_2 són les velocitats angulars de pinyó i roda en rad/s).

Aquestes definicions aplicades als punts extrems de la zona activa de la línia d'engranament A_1 i A_2 , donaran lloc a les següents velocitats:

	punt A1	punt A2	
flanc pinyó:	$V_{1A1} = \varphi_1 \cdot D \cdot \sin\alpha \cdot \omega_1$;	$V_{1A2} = (1 - \varphi_2) \cdot D \cdot \sin\alpha \cdot \omega_1$	(1.3 d19)

flanc roda:	$V_{2A1} = (1 - \varphi_1) \cdot D \cdot \sin\alpha \cdot \omega_2$;	$V_{2A2} = \varphi_2 \cdot D \cdot \sin\alpha \cdot \omega_2$	(1.3 d20)
-------------	---	---	-----------

Anomenarem velocitat de lliscament V_g , al mòdul de la diferència de les velocitats tangencials d'ambdós flancs en el punt de contacte C. Les velocitats de lliscament en els punts A_1 i A_2 seran:

punt A1:	$V_{gA1} = V_{1A1} - V_{2A1} = ((1 + \mu) \cdot \varphi_1 - \mu) \cdot D \cdot \sin\alpha \cdot \omega_1$	(1.3 d21)
----------	---	-----------

punt A2:	$V_{gA2} = V_{2A2} - V_{1A2} = ((1 + \mu) \cdot \varphi_2 - 1) \cdot D \cdot \sin\alpha \cdot \omega_1$	(1.3 d22)
----------	---	-----------

Anomenarem, encara, lliscaments específics G_{s1C} , i G_{s2C} els quocients entre les velocitats de lliscament V_g i les velocitats tangencials de cada un dels dos flancs en el punt de contacte C: hi haurà, per tant, un lliscament específic per a cada punt de la línia d'engranament i per a cada flanc. El lliscament específic serà un indicador de com l'efecte del fregament es concentra sobre un dels dos flancs en contacte.

Els valors més desfavorables d'aquesta variable es donen en els punts A_1 i A_2 ; en aquest cas les expressions dels lliscaments específics seran:

Pinyó:	punt A1	$G_{s1A1} = \frac{V_{gA1}}{V_{1A1}} = \frac{(1 + \mu) \cdot \varphi_1 - \mu}{\varphi_1}$	(1.3 d23)
--------	---------	--	-----------

	punt A2	$G_{s1A2} = \frac{V_{gA2}}{V_{1A2}} = \frac{(1 + \mu) \cdot \varphi_2 - 1}{1 - \varphi_2}$	(1.3 d24)
--	---------	--	-----------

Roda:	punt A1	$G_{s2A1} = \frac{V_{gA1}}{V_{2A1}} = \frac{(1 + \mu) \cdot \varphi_1 - \mu}{\mu \cdot (1 - \varphi_1)}$	(1.3 d25)
-------	---------	--	-----------

	punt A2	$G_{s2A2} = \frac{V_{gA2}}{V_{2A2}} = \frac{(1 + \mu) \cdot \varphi_2 - 1}{\mu \cdot \varphi_2}$	(1.3.d26)
--	---------	--	-----------

Es pot comprovar fàcilment que els valors més desfavorables del lliscament específic corresponen al flanc de la roda al punt A_1 , i al flanc del pinyó al punt A_2 : o sigui en els dos peus de les dents.

Si s'imposa la condició que els dos lliscaments específics més desfavorables, G_{s1A2} i G_{s2A1} , siguin iguals, arribem a la següent relació entre els factors de cap:

$$\frac{\varphi_2 - 1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1 - 1}{\varphi_1} \cdot \mu^2 \quad (1.3 \text{ d27})$$

Tal com veurem més endavant, aquesta condició ofereix un gran interès en la prevenció de l'excoriació (V. Cap. 5).

Finalment, a partir dels factors de cap, φ_1 , i φ_2 , definirem quatre nous factors sobre la línia d'engranament que ens seran d'utilitat en el capítol dedicat a la dissipació (V. Cap. 6 i Fig.8):

$$\text{Factor d acostament} \quad \varphi_a = \frac{A_2 I}{T_1 T_2} = \varphi_2 - \frac{1}{1 + \mu} \quad (1.3 \text{ d28})$$

$$\text{Factor de retraïment} \quad \varphi_r = \frac{I A_1}{T_1 T_2} = \varphi_1 - \frac{\mu}{1 + \mu} \quad (1.3 \text{ d29})$$

$$\text{Factor d'acostament de contacte únic} \quad \varphi_{acu} = \frac{B_2 I}{T_1 T_2} = \frac{2 \cdot \pi}{Z \cdot \tan \alpha} - \varphi_r \quad (1.3 \text{ d30})$$

$$\text{Factor de retraïment de contacte únic} \quad \varphi_{rcu} = \frac{I B_1}{T_1 T_2} = \frac{2 \cdot \pi}{Z \cdot \tan \alpha} - \varphi_a \quad (1.3 \text{ d31})$$

- e) $S_{c1} =$ Gruix de cap de pinyó
 $S_{c2} =$ Gruix de cap de roda

Un cop definit el gruix d'una dent sobre una circumferència de radi qualsevol, queda definit el gruix de la dent sobre qualsevol altre circumferència (V. Fig. 3). A partir dels gruixos de cap, els restants gruixos poden expressar-se de la manera següent:

Gruixos de contacte únic:

$$\text{Pinyó:} \quad S_{cu1} = (S_{c1} + 2 \cdot R_{c1} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c1}) - \text{Ev}(\alpha_{cu1}))) \cdot \frac{\cos \alpha_{c1}}{\cos \alpha_{cu1}} \quad (1.3 \text{ e1})$$

$$s_{cu1} = \left(s_{c1} + Z_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{c1}} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c1}) - \text{Ev}(\alpha_{cu1})) \right) \cdot \frac{\cos \alpha_{c1}}{\cos \alpha_{cu1}}$$

$$\text{Roda:} \quad S_{cu2} = (S_{c2} + 2 \cdot R_{c2} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c2}) - \text{Ev}(\alpha_{cu2}))) \cdot \frac{\cos \alpha_{c2}}{\cos \alpha_{cu2}} \quad (1.3 \text{ e2})$$

$$s_{cu2} = \left(s_{c2} + Z_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{c2}} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c2}) - \text{Ev}(\alpha_{cu2})) \right) \cdot \frac{\cos \alpha_{c2}}{\cos \alpha_{cu2}}$$

Gruixos primitius:

$$\text{Pinyó:} \quad S_{c1} = (S_{c1} + 2 \cdot R_{c1} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c1}) - \text{Ev}(\alpha))) \cdot \frac{\cos \alpha_{c1}}{\cos \alpha} \quad (1.3 \text{ e3})$$

$$s_{c1} = s_{c1} + Z_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{c1}} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c1}) - \text{Ev}(\alpha))$$

$$\text{Roda:} \quad S_{c2} = (S_{c2} + 2 \cdot R_{c2} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c2}) - \text{Ev}(\alpha))) \cdot \frac{\cos \alpha_{c2}}{\cos \alpha} \quad (1.3 \text{ e4})$$

$$s_{c2} = s_{c2} + Z_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{c2}} \cdot (\text{Ev}(\alpha_{c2}) - \text{Ev}(\alpha))$$

Gruixos de base:

$$\text{Pinyó:} \quad S_{b1} = (S_{c1} + 2 \cdot R_{c1} \cdot \text{Ev}(\alpha_{c1})) \cdot \cos \alpha_{c1} \quad (1.3 \text{ e5})$$

$$s_{b1} = s_{c1} \cdot \cos \alpha_{c1} + Z_1 \cdot \cos \alpha \cdot \text{Ev}(\alpha_{c1})$$

$$\text{Roda:} \quad S_{b2} = (S_{c2} + 2 \cdot R_{c2} \cdot \text{Ev}(\alpha_{c2})) \cdot \cos \alpha_{c2} \quad (1.3 \text{ e6})$$

$$s_{b2} = s_{c2} \cdot \cos \alpha_{c2} + Z_2 \cdot \cos \alpha \cdot \text{Ev}(\alpha_{c2})$$

Gruixos angulars de cap:

$$\text{Pinyó:} \quad \phi_1 = s_{c1}/r_{c1} \quad (1.3 \text{ e7})$$

$$\text{Roda:} \quad \phi_2 = s_{c2}/r_{c2} \quad (1.3 \text{ e8})$$

Gruixos angulars de contacte únic:

$$\text{Pinyó:} \quad \phi_{cu1} = s_{cu1}/r_{cu1} \quad (1.3 \text{ e9})$$

$$\text{Roda:} \quad \phi_{cu1} = s_{cu1}/r_{cu1} \quad (1.3 \text{ e10})$$

Gruixos angulars primitius: Pinyó: $\phi_{01} = s_{01}/r_{01}$ (1.3 e11)

Roda: $\phi_{02} = s_{02}/r_{02}$ (1.3 e12)

- f) H_{uc1} = Altura útil de cap d'eina de pinyó
 H_{uc2} = Altura útil de cap d'eina de roda
 R_{e1} = Radi d'arrodoniment de cap d'eina de pinyó
 R_{e2} = Radi d'arrodoniment de cap d'eina de roda

Aquests quatre paràmetres fan referència a eines de tipus cremallera, a les quals ens cenyirem en el present estudi. Així, doncs, els dos primers indicaran l'altura (mesurada sobre la línia de referència de l'eina) del flanc útil de l'eina, o sigui l'altura a la qual s'inicia l'arrodoniment de cap; els dos restants són altra cosa que els radis dels arrodoniments de cap d'ambdues eines (V. Fig. 2).

Les dues altures útils de cap determinen els punts P_1 i P_2 sobre la línia d'engranament (V. Fig. 2), a partir dels quals podríem definir uns angles útils de peu (α_{up1} , i α_{up2}), uns radis útils de peu (R_{up1} i R_{up2}), uns gruixos útils de peu (S_{up1} i S_{up2}) i, finalment, uns gruixos angulars útils de peu (ϕ_{up1} , i ϕ_{up2}); no en detallarem les seves expressions ja que no en farem ús en el text. No obstant, la situació dels punts P_1 i P_2 ens permet saber si existirà interferència en el procés de generació (V. l'apartat següent).

Els radis d'arrodoniment de cap d'eina ens completen la informació per a poder determinar els radis de peu:

Pinyó: $R_{p1} = R_{01} - H_{uc1} - R_{e1} \cdot (1 - \sin \alpha)$ (1.3 f1)

$$r_{p1} = \frac{Z_1}{2} - h_{uc1} - r_{e1} \cdot (1 - \sin \alpha)$$
 (1.3 f2)

Roda: $R_{p2} = R_{02} - H_{uc2} - R_{e2} \cdot (1 - \sin \alpha)$ (1.3 f3)

$$r_{p2} = \frac{Z_2}{2} - h_{uc2} - r_{e2} \cdot (1 - \sin \alpha)$$
 (1.3 f4)

Finalment, sols cal dir que no detallarem l'expressió analítica de la corba d'enllaç ja que resoldrem el problema de determinar la secció d'encastament de la dent (problema que sorgeix en l'estudi dels factors de forma, Y_f , i de concentració de tensions, Y_c), a base d'utilitzar determinades propietats geomètriques i cinemàtiques (V. Apèndixs A1 i A2).

1.4 LIMITACIONS INTRÍNSEQUES DE LA GEOMETRIA DE L'ENGRANATGE

No podem assignar un valor qualssevol a cada un dels paràmetres fonamentals definits en el paràgraf anterior: existeixen certes limitacions tant degut al caràcter de cada variable, com degut al camp d'existència.

Passem revista tot seguit, doncs, a les limitacions que deriven de consideracions estrictament geomètriques.

- a) En primer lloc, tant el nombre de dents del pinyó com el de la roda han d'ésser nombres enters; per tant, la relació de transmissió ha d'ésser un nombre fraccionari, i el nombre de dents suma, un nombre enter. Encara més, aquests dos paràmetres han d'ésser tals que les quantitats $\mu \cdot Z/(1+\mu)$ i $Z/(1+\mu)$, nombre de dents de pinyó i roda, siguin enters.

Si el nombre de dents de pinyó i roda no fossin nombres enters, les dues rodes dentades resultants engranarien correctament (complirien la condició d'engranament), però no podrien completar el gir.

En el present treball hem assimilats els paràmetres μ i Z a variables reals, ja que així obtenim un maneig més fàcil. En general, en un procés d'optimització no és lícil assimilar una variable independent entera a una variable real ja que, en principi, la funció pot prendre valors molt diferents a l'òptim en l'entorn d'aquest. En el present cas, donada la configuració de les funcions a optimitzar, ens serà possible fer aquesta assimilació (V. justificació en el paràgraf 9.2); d'aquesta manera obtenim un maneig més fàcil de les equacions.

- b) En segon lloc, els radis de cap han de ser tals que determinin una zona real d'engranament, la qual cosa s'expressa a través de la següent condició:

$$\varphi_1 + \varphi_2 > 1 \quad (1.4 a)$$

Per altre costat, per tal de no produir la interferència de funcionament, (o sigui, que el cap de la dent d'una roda no provoqui un soscavament en el peu de la roda contrària), és recomanable que les circumferències de cap no intersectin la línia d'engranament (punts P_1 i P_2 ; Fig. 2), més enllà dels punts de tangència T_1 i T_2 . Això condueix a les següents limitacions:

$$\varphi_1 \leq 1 \quad i \quad \varphi_2 \leq 1 \quad (1.4 b)$$

- c) A fi que no es perdi el contacte en passar de l'engranament d'una parella de dents a l'engranament de la parella de dents següent, cal que el coeficient de recobriment sigui igual o major que 1.

Donada l'expressió del coeficient de recobriment:

$$\varepsilon = (\varphi_1 + \varphi_2 - 1) \cdot \frac{Z \cdot \tan \alpha}{2 \cdot \pi} \quad (1.4 c)$$

Obtenim una altra limitació per als factors de cap:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \geq 1 + \frac{2 \cdot \pi}{Z \cdot \tan \alpha} \quad (1.4 d)$$

Si es donen els màxims valors possibles als factors de cap $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, l'expressió anterior es transforma en una limitació inferior per a l'angle de funcionament α o del nombre de dents suma Z :

$$\tan \alpha \geq 2 \cdot \pi / Z \quad o \quad b \acute{e} \quad Z \geq 2 \cdot \pi / \tan \alpha \quad (1.4 e)$$

- d) Els valors dels gruixos de cap de pinyó s_{c1} i roda s_{c2} , no poden ser menors de zero (límit de punta de la dent); això condueix a les següents limitacions:

$$s_{c1} \geq 0 \quad i \quad s_{c2} \geq 0 \quad (1.4 f)$$

- e) La suma dels gruixos primitius de pinyó s_{01} i roda s_{02} ha d'ésser com a màxim el valor del pas primitiu, ja que en cas contrari s'haurien de penetrar els flancs de les dents contràries. Això s'expressa per:

$$s_{01} + s_{02} \leq \pi \quad (1.4 g)$$

o bé, en termes de gruixos de cap: (1.4 h)

$$s_{c1} \cdot \cos \alpha_{c1} + s_{c2} \cdot \cos \alpha_{c2} \leq (Z \cdot \text{Ev}(\alpha) + \pi - Z_1 \cdot \text{Ev}(\alpha_{c1}) - Z_2 \cdot \text{Ev}(\alpha_{c2})) \cdot \cos \alpha$$

- f) Per tal que les eines generin una porció de flanc útil suficient en la zona del peu de la dent, cal que els punts P_1 i P_2 (els quals determinen els radis útils de peu. V. Fig. 2) se situïn en els extrems o més enllà del segment útil de la línia d'engranament $A_1 A_2$.

IPer altre cantó, a fi d'evitar la interferència de tallat, cal que els punts P_1 i P_2 se situïn més enllà dels extrems de la línia d'engranament T_1T_2 ; o sigui (V. Fig. 2):

$$0 \leq T_1P_1 \leq T_1A_1 \quad (1.4 i)$$

$$0 \leq T_2P_2 \leq T_2A_2 \quad (1.4 j)$$

Per a eines de tipus cremallera, les condicions anteriors es transformen en les següents limitacions per a les altures útils de cap d'eina:

$$\frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\alpha \geq h_{uc1} \geq \left(\frac{\mu}{1+\mu} - (1-\varphi_2) \right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\alpha \quad (1.4 k)$$

$$\frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\alpha \geq h_{uc1} \geq \left(\frac{1}{1+\mu} - (1-\varphi_1) \right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\alpha \quad (1.4 l)$$

g) També cal que el cap de la dent d'una roda no interfereixi amb el peu de la dent contrària, la qual cosa condueix a les dues condicions següents:

$$R_{c1} + R_{p2} \leq D \quad (1.4 m)$$

$$R_{c2} + R_{p1} \leq D \quad (1.4 n)$$

b) Finalment, el valor dels radis d'arrodoniment de cap d'eines poden oscil·lar entre zero i un valor màxim que correspon a quan els dos flancs d'eina estan enllaçats per un sol arc de cercle. Aquestes condicions s'expressen de la manera següent:

$$0 \leq r_{e1} \leq \frac{\left(\frac{s_{02}}{2} - h_{uc1} \cdot \tan\alpha \right)}{\cos\alpha} \quad (1.4 p)$$

$$0 \leq r_{e2} \leq \frac{\left(\frac{s_{01}}{2} - h_{uc2} \cdot \tan\alpha \right)}{\cos\alpha} \quad (1.4 q)$$

1.5 DEFINICIONS SOBRE FORCES I MOMENTS

Moment del pinyó: valor nominal del moment exercit sobre el pinyó:

$$M_1 = \frac{Pot}{\omega_1} \quad (1.5 a)$$

Moment efectiu del pinyó: valor màxim real que s'exerceix sobre el pinyó; és el moment del pinyó afectat de diversos factors correctors:

$$M_1 = \frac{Pot \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v}{\omega_1} \quad (1.5 b)$$

on: K_0 = Factor de servei (V. 3.3.2)

K_m = Factor de distribució de càrrega (V. 3.3.2)

K_v = Factor dinàmic (V. 3.3.2)

Força tangencial: valor fictici de la força tangencial que es transmetrien els dos cilindres primitius per fricció:

$$F = \frac{Pot}{\omega_1 \cdot R_{01}} = \frac{Pot}{\omega_2 \cdot R_{02}} = \frac{1+\mu}{\mu} \cdot \frac{Pot}{\omega_1 \cdot D} \quad (1.5 c)$$

Força normal: valor de la força que s'exerceixen mútuament els dos flancs (V. Fig. 5):

$$F_n = \frac{\text{Pot}}{\omega_1 \cdot R_{b1}} = \frac{\text{Pot}}{\omega_2 \cdot R_{b2}} = \frac{1+\mu}{\mu} \cdot \frac{\text{Pot}}{\omega_1 \cdot D \cdot \cos\alpha} \quad (1.5 d)$$

Força normal unitària: valor de la força normal per unitat d'amplada de la dent:

$$F_{nu} = \frac{F_n}{B} = \frac{1+\mu}{\mu} \cdot \frac{\text{Pot}}{\omega_1 \cdot B \cdot D \cdot \cos\alpha} \quad (1.5 e)$$

Força tangencial sobre la dent: valor de la força normal F_n projectada sobre la normal a la línia de simetria de la dent (V. Fig. 5):

$$F_{nu} = F_n \cdot \cos\theta \quad (1.5 f)$$

on θ és l'angle que formen la normal al flanc de la dent i la normal a la línia de simetria de la dent. Podem definir una força tangencial per a la dent del pinyó F_{t1} i una força tangencial per a la dent de la roda, F_{t2} , i aquestes variaran segons el punt d'aplicació de la força sobre el flanc; també podrem definir unes forces tangencials unitàries de pinyó i roda F_{tu1} i F_{tu2} .

Força radial sobre la dent: valor de la força normal F_n projectada sobre la línia de simetria de la dent (V. Fig. 5).

$$F_r = F_n \cdot \sin\theta \quad (1.5 g)$$

On es poden fer les mateixes observacions que en el cas anterior.

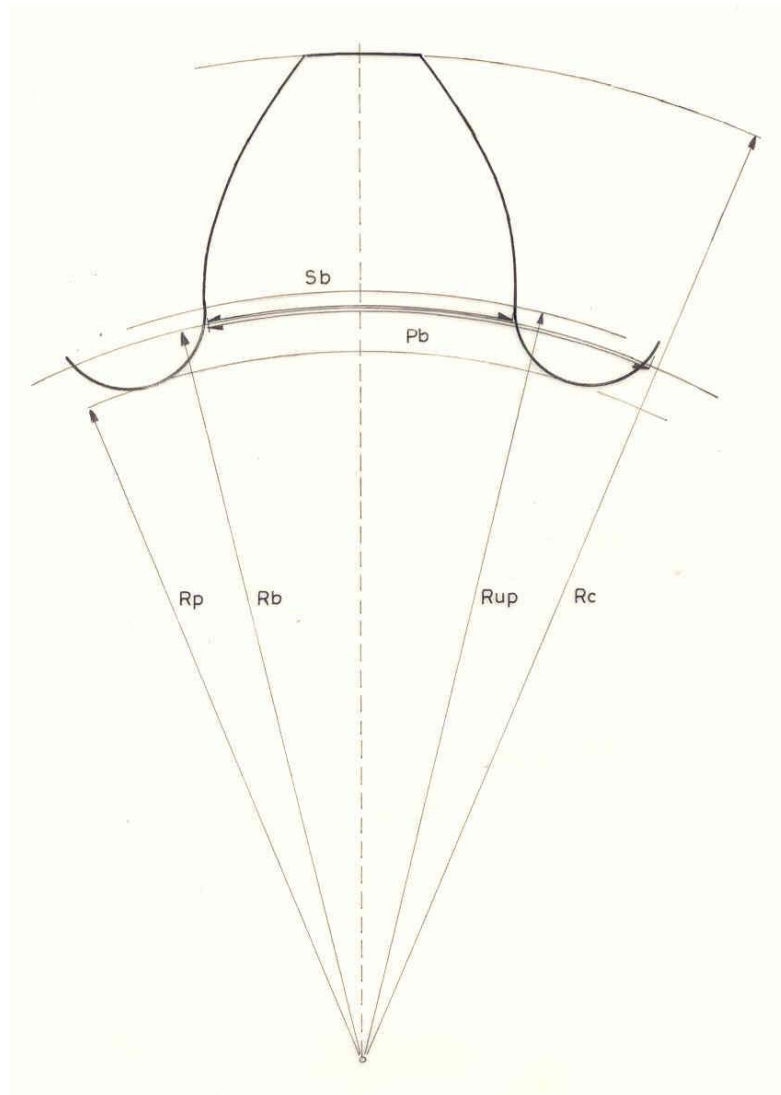


Figura 1

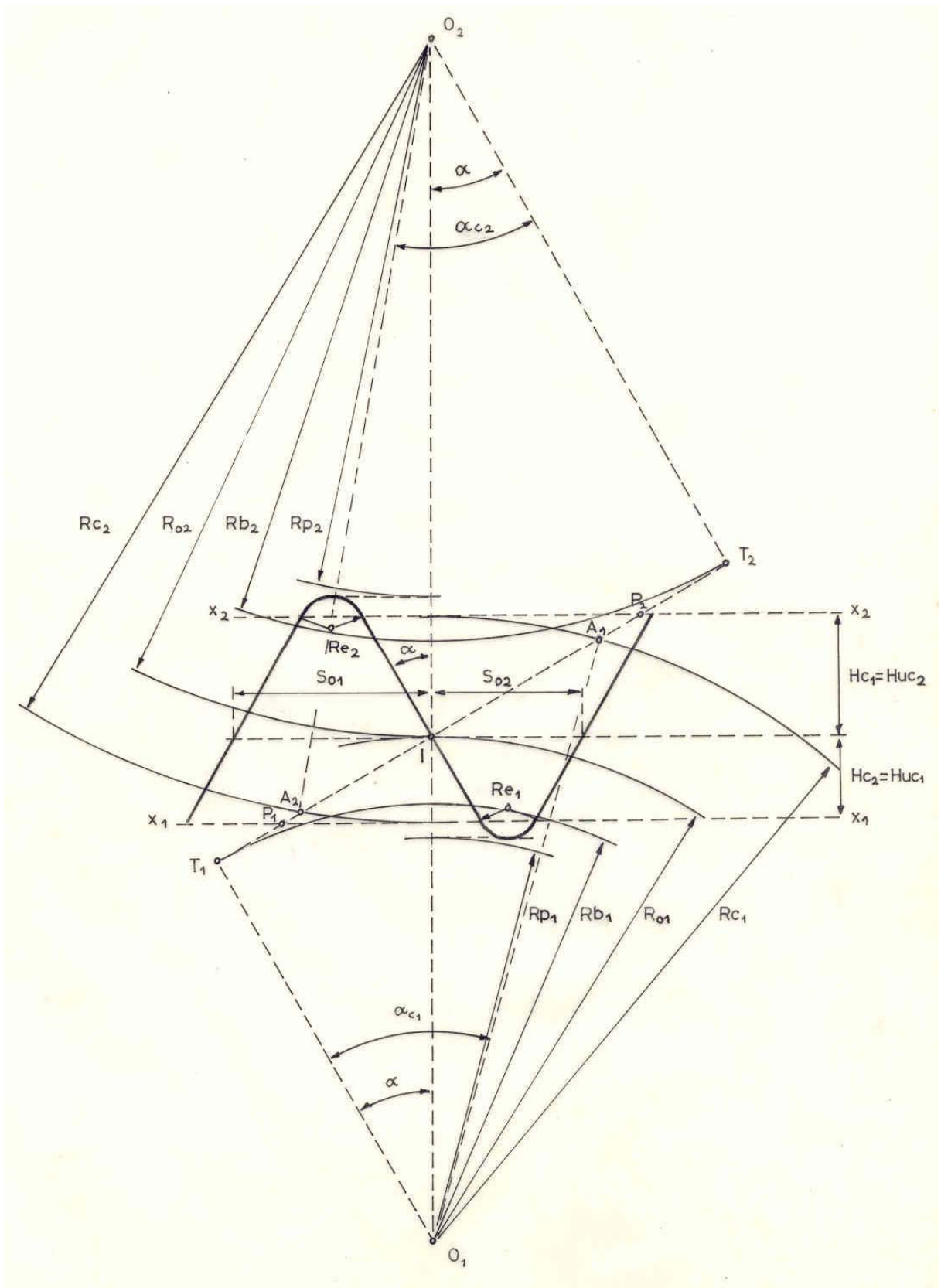


Figura 2

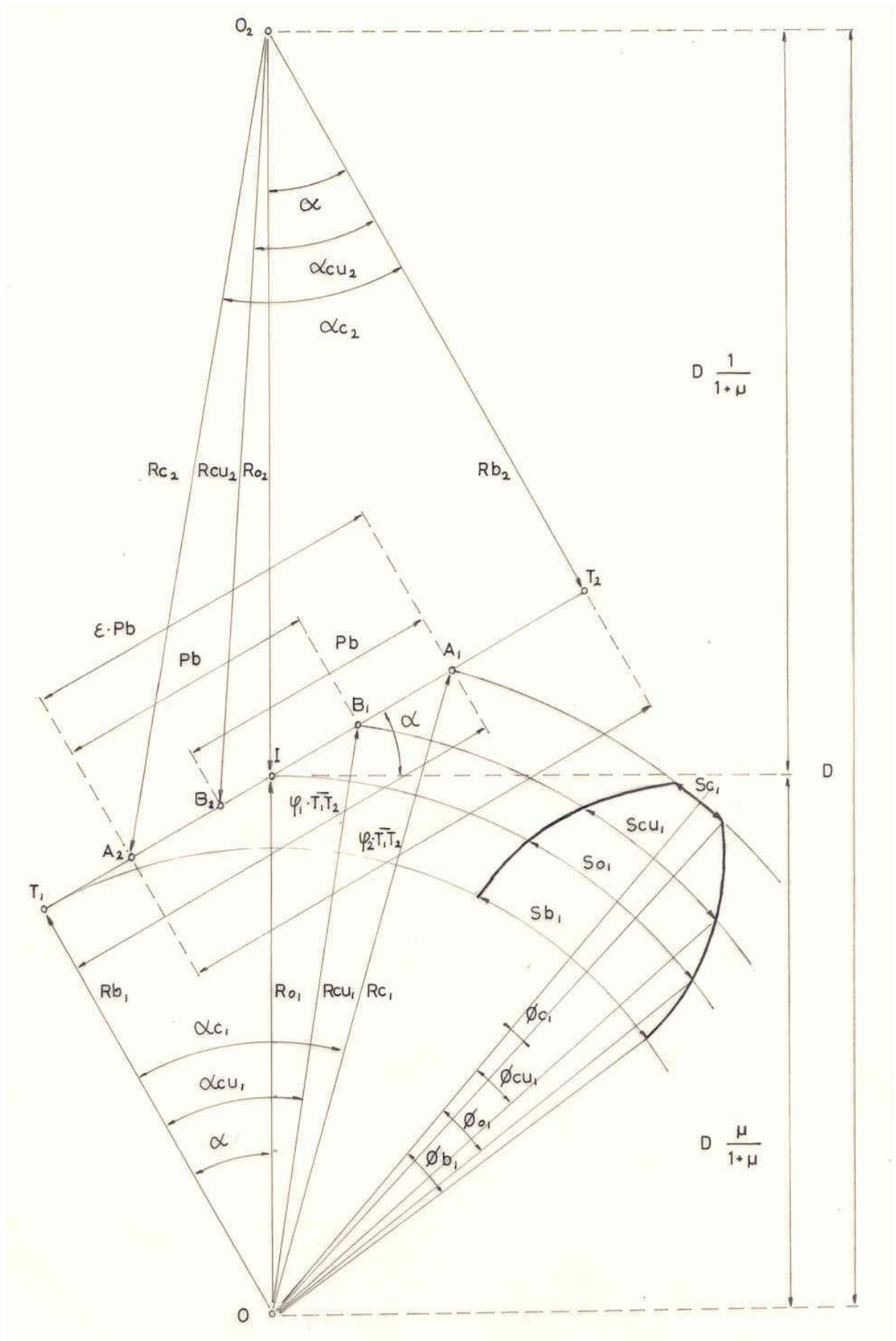


Figura 3

2. INTRODUCCIÓ: DETERIORAMENTS DELS ENGRANATGES

2.1 DESCRIPCIÓ DELS DIFERENTS TIPUS DE DETERIORAMENTS

Els textos que hem consultat ofereixen una gran diversitat de descripcions de deterioraments així com una certa confusió en l'ús dels termes de designació.

La norma americana AGMA 110.03 (Ref. 2) ve a donar un cert ordre en aquest estat de coses ("la intenció de la present norma és eliminar la confusió i l'ús conflictiu de termes en la nomenclatura dels deterioraments dels engranatges", segons resa el seu prefaci). A continuació s'ofereix un resum:

AGMA 110.03 estableix quatre grups generals de deteriorament dels engranatges:

- Desgast ("wear")
- Fatiga superficial ("Surface fatigue")
- Deformació plàstica ("Plastic flow")
- Ruptura ("Breakage").

Dintre de cada un d'aquests grups en distingeix diverses modalitats:

2.1.1 DESGAST

Terme general que descriu la pèrdua de material de les superfícies de les dents de l'engranatge degut al fregament. Els tipus principals de desgast i les seves causes són:

- a) Desgast pròpiament dit (la norma els designa per "normal wear" o "polishing", "moderate wear" i "severe wear", segons la severitat del deteriorament). És fruit del contacte metall–metall conseqüència d'una pel·lícula de lubricant deficient.
- b) Desgast abrasiu (en la norma AGMA "abrasive wear" o "scratching", segons la severitat del deteriorament); és degut a la presència de partícules sòlides en el lubricant les quals s'interposen entre els flancs de les dents. Presenta l'aspecte d'un ratllat en la direcció del lliscament.
- c) Excoriació ("scoring"). Deteriorament iniciat per l'esquinçament de petites zones de contacte que s'havien soldat com a resultat del falliment instantani i localitzat de la pel·lícula de lubricant la qual cosa havia permès el contacte metall–metall.
- d) Desgast corrosiu ("corrosive wear"). És un atac de tipus químic dels flancs de les dents provocat per la mateixa composició del lubricant o dels additius o impureses que porta.

2.1.2 FATIGA SUPERFICIAL

Consisteix en el falliment del material de la superfície dels flancs com a resultat de l'aplicació repetida de tensions superficials superiors al límit de fatiga del material. Es caracteritza pel llevament de petites porcions de metall dels flancs de les dents, i la conseqüent formació de petites cavitats o pics.

En distingeixen les següents modalitats:

- a) Picadures inicials ("initial pitting"). Tenen lloc en iniciar-se el procés de rodament de l'engranatge i són originades per protuberàncies o imperfeccions locals que produeixen concentracions de tensions; un cop eliminades, la situació s'estabilitza.

Els pics acostumen a situar-se en una estreta faixa en la zona de la línia d'engranament.

- b) Picadures destructives ("destructive pitting"). L'aspecte del deteriorament i la situació inicial són els mateixos que en el cas anterior (els pics són, però, majors). No obstant, degut a tenir per causa l'actuació d'una càrrega excessiva, el fenomen progressa fins a la destrucció total de les superfícies.
- c) Clivellament i esfondrament de la superfície ("spalling"). Es caracteritza per la formació de cavitats notablement més amples i fondes que en el cas de les picadures. Pot ésser degut a l'esquerdament del material existent entre els pics en un cas de picadura destructiva ja avançada. Més sovint, però, es dona en engranatges de superfície endurida a causa de les tensions que actuen sota la superfície i que provoquen el col·lapse del material del nucli; tant pot ser degut a un gruix insuficient de la capa endurida com a una resistència inadequada del nucli.

2.1.3 DEFORMACIO PLÀSTICA

És el resultat del cediment de la superfície del metall degut a fortes càrregues; acostuma a anar associat e materials tous. Pot prendre les següents formes:

- a) Laminatge i martellejament ("rolling" i "peening;"). Són fenòmens que acostumen a presentar-se alhora. El laminatge és conseqüència de l'acció de la velocitat de lliscament sota una càrrega excessiva, mentre que el martellejament seria fruit dels xocs deguts a un engranament incorrecte de les dents, i a l'existència d'una depressió en el flanc de la roda conductora en la zona on s'inicia el contacte únic, així com un sortint en el flanc de la dent conjugada.
- b) Ondulacions ("rippling"). Són unes formacions superficials esteses en la direcció perpendicular al lliscament que presenten un aspecte rugós. Consisteixen en un lleuger cediment del material de la superfície per efecte del fregament; poden ésser degudes a una lubricació inadequada, a fortes càrregues, o a vibracions.

2.1.4 RUPTURA

Consisteix en la fractura d'una part de dent o d'una dent sencera.

Se'n poden distingir els següents tipus i causes:

- a) Ruptura per fatiga ("fatigue breakage"). És el resultat de l'aplicació repetida d'esforços de flexió superiors al límit de fatiga: una fissura iniciada en algun defecte del material (pot ser una zona de picadures, una ratlla del rectificat o bé una fissura de tremp) va progressant fins que la secció restant no és suficient per a resistir l'esforç total. Llavors esdevé la fractura. L'aspecte de la fractura presenta una zona brunyida que correspon a la zona prèviament fissurada.
- b) Ruptura per sobrecàrrega ("overload breakage"). És causada per una forta sobrecàrrega o un xoc suficient per a produir-la. No és molt freqüent; en la major part dels casos és degut a l'encavallament de les dents causat pel deteriorament d'un rodament, per d'excessiva flexió de l'arbre o per la introducció d'objectes estranys entre les dents.

2.2 PREVENCIO DELS DETERIORAMENTS I MÈTODES DE CÀLCUL

De l'anàlisi dels deterioraments que acabem de descriure se'n pot concloure el següent:

Un sistema de lubricació correcte, lliure de partícules estranyes i d'agents químics corrosius, evita, en la majoria dels casos, els diferents tipus de desgast i les ondulacions. No obstant una correcta lubricació, l'excoriació pot presentar-se en engranatges que funcionen sota condicions molt severes; és per això que és convenient establir-ne un mètode de prevenció.

Les picadures inicials no presenten problemes, en general. Contràriament, les picadures destructives poden deixar l'engranatge fora d'ús; cal, doncs també, establir-ne un mètode de prevenció. Els engranatges així calculats, no acostumen a presentar deformacions plàstiques sempre que s'hagi elegit correctament el material. Per als engranatges de superfície endurida cal establir una proporció correcte entre la duresa de la superfície i la del nucli així com un gruix adequat de la capa exterior.

La prevenció de la ruptura per fatiga cobreix amb escreix les possibles ruptures degudes a les sobrecàrregues normals de funcionament. El càlcul, però, no pot preveure les ruptures per accident.

Els mètodes clàssics de càlcul d'engranatges ja preveuen dos d'aquests tipus de deteriorament: la ruptura per fatiga i les picadures dels flancs. Més recentment s'hi ha anat incloent el tercer aspecte: la prevenció de l'excoriació.

Les bases sobre les quals s'han assentat els càlculs de prevenció dels dos primers deterioraments han assolit una certa uniformitat en tots els autors i països; per contra, el fenomen de l'excoriació, tot i fer més de 30 anys que s'hi treballa, no és encara del tot conegut i, com és fàcil preveure, ha donat lloc a una gran diversitat de criteris.

Aquests mètodes de càlcul de prevenció han estat les successives respostes als problemes que han anat sorgint en construir engranatges que funcionen sota condicions cada vegada més exigents. Per altra banda, són dels únics aspectes dels quals disposem d'un mètode de càlcul quantitatiu fruit d'un llarg procés d'estudis i d'experiències, així com d'una literatura abundant sobre el tema. A més, constitueixen els límits actuals de la tecnologia dels engranatges.

L'anàlisi d'aquests tres mètodes de prevenció serà l'objecte dels tres propers capítols:

Càlcul per a la prevenció de la ruptura per fatiga (Cap. 3)

Càlcul per a la prevenció de la formació de picadures (Cap. 4)

Càlcul per a la prevenció de l'excoriació (Cap. 5)

Tal com més endavant veurem (paràgraf 8.4), descompondrem la fórmula corresponent a cada un d'aquests càlculs de prevenció en dos factors: un d'ells, que anomenarem factor geomètric, inclourà tots aquells termes que depenen fonamentalment de la geometria de l'engranatge, i actuarà com a variable en el procés d'optimització; l'altre, que anomenarem factor de treball, inclourà els termes restants, i serà constant al llarg del procés d'optimització.

En conseqüència, analitzarem en certa profunditat els termes del factor geomètric, ja que són els únics que intervindran en els càlculs realitzats amb l'ordinador. En quant al factor de treball, solament ens interessa obtenir valors versemblants a fi de poder presentar alguns resultats concrets.

3. CÀLCUL PER A LA PREVENCIÓ DE LA RUPTURA FER FATIGA

Avui dia, no hi ha grans dissensions sobre el mecanisme de producció de la ruptura per fatiga: tothom està d'acord en què s'iniciïn unes fissures superficials en la zona sotmesa a tracció del peu de la dent, les quals progressen vers l'interior de la dent a base de les successives aplicacions de la càrrega, fins que la ruptura esdevé per manca de secció resistent. La velocitat d'avanç de les fissures augmenta amb el valor de les càrregues aplicades.

L'objecte del càlcul consistirà, doncs, en fer concordar les tensions que es produeixen en el peu de la dent amb la vida que volem preveure a l'engranatge.

3.1. MODEL DE LEWIS

Fins a les darreries del segle passat s'havien calculat les càrregues admissibles dels engranatges a base de fórmules més o menys empíriques.

A 1892, Wilfred Lewis va proposar una expressió per al càlcul de la ruptura en la qual intervenia per primera vegada la forma de les dents. La seva formulació, un dels primers intents de càlcul racional dels engranatges, constitueix encara la base dels mètodes actuals de càlcul.

El model de Lewis estableix certes hipòtesis:

- a) Considera la dent com una biga en voladís encastada en la massa de la roda. A base d'inscriure una "paràbola d'igual resistència" a l'interior de la dent, determina la secció sotmesa a les tensions més desfavorables, o secció d'encastament E-E'. (V. Fig. 4).
- b) Finalment, no té en compte la possible repartició de la càrrega entre dues parelles de dents en contacte, la qual cosa té lloc en els extrems del segment actiu de la línia d'engranament en virtut del recobriment: considera la força total aplicada sobre una única dent.

Aquest model condueix a la següent expressió coneguda com a fórmula de Lewis:

$$\frac{F}{m_0 \cdot B} \cdot Y_{fl} \leq \sigma_f \quad (3.1 a)$$

- on:
- F = Força tangencial en el punt d'engranament
 - σ_f = Esforç de flexió admissible
 - m_0 = Mòdul
 - B = Amplada de contacte
 - Y_{fl} = Factor de forma de Lewis

L'expressió del factor de forma de Lewis és la següent:

$$Y_{fl} = \frac{s_{fl}}{6 \cdot h_{fl}} \quad (3.1 b)$$

(Veure $h_{fl} = VR$ i $s_{fl} = EE'$ en la pàg. 4)

3.2. MÈTODES ACTUALS

Les principals modificacions que ha sofert el mètode de Lewis fins a arribar a les actuals formulacions són:

- a) La introducció de les càrregues dinàmiques causades pels errors de fabricació, les masses en joc i la velocitat de gir de l'engranatge, en el càlcul.
- b) La introducció d'un factor de concentració de tensions per a la zona d'encastament de la dent (investigacions posteriors a l'època de W. Lewis n'han recomanat el seu ús).
- c) La consideració, en les zones en què hi ha dues parelles de perfils en contacte, d'un cert repartiment de la càrrega transmesa. Això és possible gràcies a la major precisió en la realització dels engranatges d'avui dia respecte als del temps de W. Lewis.
- d) La introducció d'un factor de distribució de càrrega que té en compte la distribució no uniforme de l'esforç segons l'amplada de la dent, degut a la mala alineació dels eixos, o bé a deflexions de les dents, o deflexions dels arbres que sostenen les rodes.
- e) Finalment, la introducció d'un factor de vida, a fi de tenir en compte la disminució de la resistència del material degut al fenomen de fatiga, i poder assegurar així un determinat nombre de cicles de funcionament.

Avui dia existeixen dos mètodes estesos de càlcul per a la prevenció de la ruptura de les dents per fatiga, els quals recullen aquests aspectes que acabem d'esmentar:

- a) El mètode únic adoptat pel Grup de Treball ISO/TC60 (de l'Organització Internacional de la Normalització) en la seva sessió del setembre de 1970: consistia en un acord de base, però no es va pronunciar encara sobre bona part dels factors. Hi participaven Alemanya, Bèlgica, Espanya, França, Països Baixos, Regne Unit, Suècia, Suïssa i la URSS.
- b) El mètode proporcionat per la norma americana IAGMA (American Gear Manufacturers Association), la versió actualment vigent de la qual correspon a la denominació AGMA 220.02, publicada a l'agost de 1966.

3.3 ANÀLISI COMPARATIVA I DISCUSSIÓ DELS MÈTODES ISO I AGMA

Tant la formulació del mètode ISO com la del mètode AGMA poden reduir-se a la fórmula de Lewis afectada de diversos factors de correcció. Una expressió general per ambdós sistemes que inclou els factors d'un i altre, podria ésser:

$$\frac{F}{m \cdot B} \cdot k_0 \cdot K_d \cdot K_m \cdot K_v \cdot Y_f \leq \sigma_b \cdot \frac{K_b}{Y_c \cdot K_t \cdot K_s} \quad (3.2)$$

- on:
- B = Amplada de contacte
 - m_0 = Mòdul
 - F = Força tangencial en el punt d'engranament
 - σ_b = Esforç de flexió admissible per fatiga
 - K = Factor de servei
 - K_b = Factor de durada
 - K_g = Factor de grandària
 - K_m = Factor de distribució de càrrega
 - K_r = Factor de repartiment
 - K_s = Factor de seguretat
 - K_t = Factor de temperatura
 - K_v = Factor dinàmic
 - Y_c = Factor de concentració de tensions
 - Y_f = Factor de forma

El significat d'alguns d'aquests factors difereix en els mètodes ISO i AGMA. Procedirem, doncs, a una anàlisi dels criteris que sustenten cada un d'aquests mètodes R fi d'arribar a establir la nostra pròpia base de càlcul.

3.3.1 TERMES QUE INTERVENEN EN EL FACTOR GEOMÈTRIC

a) Esforç de flexió màxim (inclou els factors de forma Y_f i de repartiment K_r)

- a.1) L'esforç màxim de flexió es presenta en el peu de la dent; el seu valor depèn, per una part, de la distància del punt d'aplicació de la força tangencial F a la secció d'encastament (V. Figs. 4 i 5), i, per altra part, de la major o menor magnitud de la força exercida sobre la dent en virtut del possible repartiment de la càrrega total transmesa sobre més d'una parella de dents.

Mètode ISO: proposa calcular aquest esforç suposant la càrrega total aplicada en el cap d'una sola dent; però, tenint en compte, també, que en aquesta situació hi ha dues parelles en contacte, i és previsible un cert repartiment de la càrrega entre elles: el mètode ISO diu d'afectar la força transmesa d'un factor de repartiment K_r , el valor del qual faria equivaldre a calcular els esforços de flexió quan la càrrega s'aplica en el punt més alt del flanc on hi ha un sol parell de dents en contacte (punt de contacte únic). Tot i que ISO encara no s'ha pronunciat sobre aquest punt, a la pràctica s'admet de prendre com a primera aproximació per aquest factor la inversa del coeficient de recobriment ε : $K_r = 1/\varepsilon$. La correcció d'aquesta pràctica sembla confirmar-se pels últims treballs realitzats al CETIM a base del càlcul per elements finits (Ref. 14). En cas d'engranatges de mala qualitat caldria prendre $K_r = 1$.

Mètode AGMA: proposa calcular l'esforç de flexió suposant la càrrega total aplicada en el punt més alt del flanc de la dent on hi ha encara un sol parell de dents en contacte (mètode del punt de contacte únic). En cas d'engranatges de mala qualitat, el punt d'aplicació de la força passaria a ésser el cap de la dent.

- a.2) En la secció d'encastament existeix una tensió màxima de compressió en l'extrem E, i una tensió màxima de tracció en l'extrem oposat E' (Figs. 4 i 5). Si solament considerem el component tangencial de la força transmesa, F_t , aquestes dues tensions tenen el mateix valor absolut. Si, per contra, prenem també en consideració el component radial, F_r , cal superposar als esforços de flexió anteriors un esforç uniforme de compressió: la tensió màxima de tracció queda, doncs, disminuïda. Donat que les fissures de fatiga s'inicien en l'extrem sotmès a tracció, sembla lògic introduir aquesta modificació en el càlcul. (V. Fig. 5).

Mètode ISO: Opta pel mateix criteri que Lewis: pren solament en consideració el component tangencial F_t . La justificació podria venir d'un estudi realitzat per H. Winter (Ref. 42 i 43) segons el qual les corbes de fatiga del material són més uniformes quan són calculades a partir únicament dels esforços de flexió. Presenta, això sí, una certa simplificació en el càlcul.

Mètode AGMA: Pren com a tensió de càlcul el màxim esforç de tracció en el cas que es considerin també els efectes del component radial F_r de la força transmesa..

- a.3) Finalment, hi ha el problema de la determinació de la secció d'encastament.

Mètode ISO: Determina la secció d'encastament a partir dels punts de tangència de dues rectes inclinades de 30° respecte de l'eix de la dent amb les corbes

d'enllaç del peu de la dent. (V. Fig. 4). Aquesta pràctica, iniciada a Alemanya, sembla que es justifica per la millor correspondència amb el punt on s'inicien les fissures de fatiga. Però, sobretot, representa una simplificació en el càlcul.

Mètode AGMA: Segueix el criteri primitiu de Lewis: la inscripció d'una paràbola d'igual resistència en la dent.

Discussió: Aquestes hipòtesis de càlcul lleugerament divergents condueixen a la pràctica a resultats que difereixen entre sí menys d'un 10 %, sempre que es tracti de les eines avui dia normalitzades.

En el present treball ens hem proposat recórrer el camp d'existència dels engranatges rectes; en conseqüència, ens hem trobat davant del problema d'haver de calcular la resistència de dents de forma i proporcions molt diferents a les que resultarien de les eines normalitzades. Hem preferit, doncs, evitar tota simplificació o aproximació a fi d'evitar distorsions en els resultats, malgrat la major complexitat de càlcul, i cenyir-nos el més possible al model preestablert.

L'aplicació de la càrrega total en l'extrem de la dent, afectada d'un factor de repartiment K_r , no és altra cosa que una manera simplificada d'obtenir els mateixos resultats que amb el mètode del punt de contacte únic: preferim, doncs, aquest darrer.

El mètode de les dues rectes a 30° per a determinar la secció d'encastament no ens serveix, ja que en alguns casos l'angle de funcionament és superior a aquest valor, la qual cosa fa que no sigui possible trobar el punt de tangència.

La qüestió de prendre o no en consideració el component radial F_r de la força transmesa es presta a majors discussions. Nosaltres hem preferit considerar-lo.

b) Factor de concentració de tensions Y_c . Gràcies a les tècniques fotoelàstiques s'ha pogut comprovar que la tensió real en el peu de la dent és sempre superior a l'obtinguda per càlcul. Aquest és l'origen del factor de concentració de tensions, per al qual han estat proposades nombroses fórmules.

Mètode ISO: no es pronuncia encara sobre aquest punt.

Mètode AGMA: adopta la fórmula donada per Dolan i Broghamer.

Discussió: La fórmula de Dolan i Broghamer és el resultat d'una investigació basada en les tècniques fotoelàstiques (Ref. 14) a base de les recents tècniques dels elements finits ha vingut a confirmar els resultats de Dolan i Broghamer, i a posar en dubte altres expressions com la de Baud, adoptada per G. Henriot (Ref. 26, pag. 330).

Alguns càlculs que hem realitzat basats en la fórmula de Baud ens han conduït a valors poc versemblants per a aquest factor, sobretot en raó de la diversitat de formes i proporcions de les dents que hem assajat. Els valors que hem calculat a base de la fórmula de Dolan i Broghamer presentaven una major uniformitat.

Com a conseqüència de tot el que acabem de dir, hem adoptat aquesta última fórmula en les nostres càlculs (V. Apèndix A2).

3.3.2 TERMES QUE INTERVENEN EN EL FACTOR DE TREBALL

D'entre els termes que detallarem a continuació, el factor de distribució de càrrega K_m i el factor dinàmic K_v no són totalment independents de la geometria de l'engranatge: les estimacions més simples fan dependre el primer de l'amplada B o de la relació entre l'amplada B i el diàmetre del pinyó D_1 , i el segon de la velocitat perifè-

rica V. No obstant, ja aquesta dependència de la geometria queda modulada a través d'aspectes tals com els errors d'alineació dels eixos i la precisió del muntatge en el primer, i el grau de precisió de fabricació en el segon i, a més, sovint la seva formulació es presta a discussions, en el present treball hem preferit partir d'una estimació d'aquests factors i considerar-los constants al llarg del procés d'optimització. Quan l'estimació no hagi estat prou correcte, caldrà procedir a un mou temp-teig a base de valors més ajustats.

- a) Factor de durada K_b . El factor de durada corregeix el valor de l'esforç admissible de fatiga quan la vida prevista per a l'engranatge és menor a 10^7 cicles. La seva expressió, deduïda de les corbes de Whöler, és:

$$K_b = \left(\frac{10^7}{N_0} \right)^c \quad \text{per a } N_0 \leq 10^7$$

i N_0 = nombre de cicles de vida

El valor de l'exponent c es presta e discussions: AGMA dóna una taula de valors de K_b , en funció del nombre de cicles de vida N_0 i de la duresa de l'acer, que corresponen a valors de c compresos entre $1/7$ i $1/19$; G. Henriot (Ref. 26, pag. 342) pren un valor de $c = 1/10$, terme mitjà entre els més usats a Europa i Amèrica. Nosaltres seguirem aquest últim criteri.

- b) Factor dinàmic K_v . El factor dinàmic té en compte les sobrecàrregues que actuen sobre les dents en virtut dels errors de fabricació de l'engranatge, de les masses en joc i de la velocitat de gir.

La preocupació per l'efecte de les càrregues dinàmiques parteix de Lewis mateix: junt amb el seu mètode de càlcul va donar una taula d'esforços admissibles en funció de la velocitat tangencial. (Ref. 35, pàg. 415). Aquesta preocupació va culminar amb la publicació el 1931 dels resultats dels treballs sobre càrregues dinàmiques realitzats per E. Buckingham, (Ref. 13). L'equació de les càrregues dinàmiques de Buckingham, tot i ésser una bona aproximació a la realitat, és excessivament laboriosa de càlcul. La pràctica, l'ha substituït per un factor dinàmic K_v , funció de la qualitat de l'engranatge i de la velocitat perifèrica.

Els valors que en donen els diferents autors (AGMA, Ref. 3; Dudley, Ref. 23; Henriot, Ref. 26), ofereixen una bona concordança.

En el present treball adoptarem la taula donada per G. Henriot (Ref. 26, pàg. 341); cal prendre la inversa del valor donat per la Fig. VII-19.

- c) Factor de distribució de la càrrega K_m . Aquest factor té en compte la possible concentració de la càrrega en una zona de la dent, causada per una mala alineació dels eixos, deformacions dels coixinets, deflexions dels arbres i deflexions de les pròpies dents.

Mètode ISO: dóna diverses taules i gràfics, segons les dades de què disposa.

Els valors donats per G. Henriot (Ref. 26, pàg. 347) són més optimistes que els donats per AGMA, ja que G. Henriot considera que aquest aspecte queda en part cobert pel factor dinàmic K_v .

Nosaltres preferim guiar-nos per la Taula 3 de la norma AGMA 220.02 (Ref. 3).

- d) Factor de servei K_0 . Aquest factor té en compte les sobrecàrregues degudes tant al règim de funcionament de l'orgue propulsor com de l'orgue propulsat. Hi ha

una notable concordança entre els valors donats per G. Henriot (Ref. 26, pàg. 340) i els donats per AGMA.

Nosaltres ens guiarem per la Taula 4 de la norma AGMA 220.02 (Ref. 3).

- e) Els restants factors tenen en compte aspectes molt particulars del disseny. Donat que el propòsit del present treball no consisteix en calcular engranatges concrets, sinó establir quina en seria la millor solució geomètrica, els assignarem el valor 1.

3.4 CRITERI DE CàLCUL ADOPTAT, CONSEQÜÈNCIA DE L'ANÀLISI ANTERIOR

Prendrem, doncs, com e criteri bàsic de càlcul el proporcionat per la norma AGMA 220.02 amb les lleugeres modificacions ja esmentades.

Tenint en compte l'expressió de la força tangencial en el punt d'engranament F i del mòdul m (V. Cap. 1), i les simplificacions que acabem d'esmentar, l'expressió 3.3 es transforma en la següent:

$$\frac{1}{B \cdot D^2} \cdot \frac{\text{Pot}}{2 \cdot \mu \cdot \omega_1} \cdot Z \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v \cdot Y_f \leq \sigma_b \cdot \frac{K_b}{Y_c} \quad (3.4)$$

on:	B	= Amplada de contacte	(m)
	D	= Distància entre centres	(m)
	μ	= Relació de transmissió	
	Z	= Nombre de dents suma	
	Pot	= Potència transmesa	(W)
	ω_1	= Velocitat Angular del pinyó	(rad/s)
	σ_b	= Esforç de flexió a fatiga admissible	(N/m ²)
	K_0	= Factor de servei (AGMA 220.02, Taula 4)	
	K_b	= Factor de durada per a la ruptura a flexió ($K_b = 10^7/N_0$, per a $N_0 \leq 10^7$; 1 per a $N_0 > 10^7$)	
	K_m	= Factor de distribució de càrrega (AGMA 220.02, Taula3)	
	K_v	= Factor dinàmic (Ref. 26, pàg. 341; Fig. VII-19: cal prendre el valor invers del donat per la figura)	
	Y_c	= Factor de concentració de tensions (V. Apèndix A1)	
	Y_f	= Factor de forma (V. Apèndix A2)	

3.5 DETERIORAMENT DE LA PUNTA DE LA DENT

És cosa coneguda que els engranatges acabats en una punta excessivament fina estan sotmesos el perill descantonament o despuntament.

Les rodes tallades amb eines normalitzades, generalment tenen un cap de la dent suficientment ample per a no presentar el perill anteriorment esmentat; Potser aquesta és la raó de l'escassetat de la bibliografia que existeix sobre el tema.

Com més endavant veurem, en el nostre estudi aquest és un aspecte fonamental; pensem, però, que per a arribar a alguna conclusió correcta cal un estudi molt detingut i laboriós que no podem abordar en el sí del present treball (ens hem limitat, doncs, a demostrar la importància que té sobre els valors òptims una variació del gruix de cap de la dent. (V. 7.1.5). No obstant, ens agradaria fer algunes consideracions sobre el tema:

- e) La força de contacte que s'exerceixen les dents d'un engranatge entre sí crea dues zones de concentració de tensions (la fotoelasticitat ho mostra molt clar): la pròpia zona de contacte (pressions de Hertz), i la zona del peu de la dent (tensions màximes de tensió i compressió).
- b) En desplaçar-se el contacte vers la punta de la dent, és la zona de tensions de contacte la que s'hi acostava. A més, en apropar-se el contacte a l'extrem de la dent, forçosament ha d'existir un efecte de contorn que amplifica les tensions de compressió màximes.

Nosaltres pensem que per a resoldre aquest problema cal, en primer lloc, plantejar el problema elàstic en tota la seva generalitat (potser el mètode dels elements finits podria ésser un model apropiat) i, en segon lloc, procedir a una comprovació experimental dels resultats.

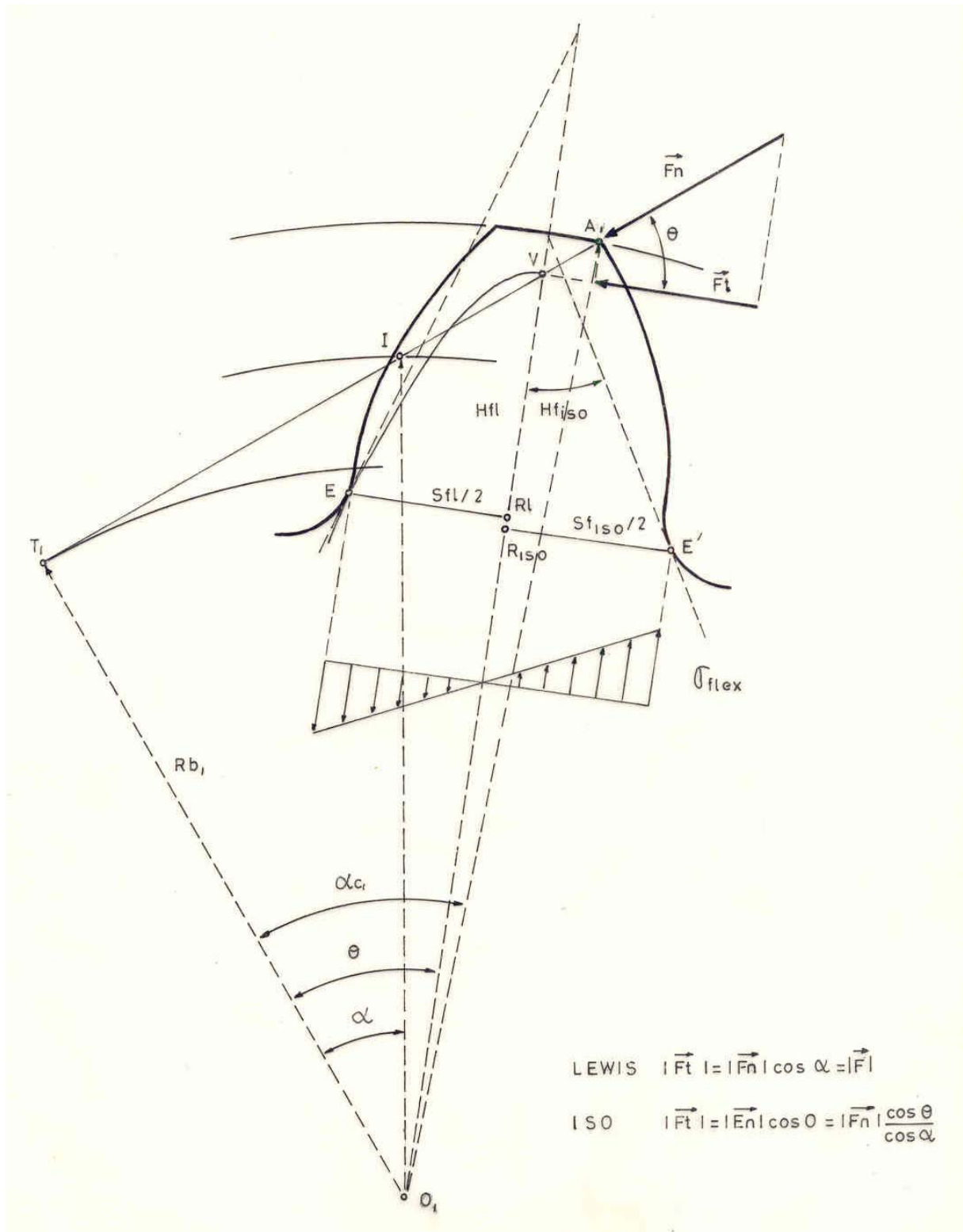


Figura 4

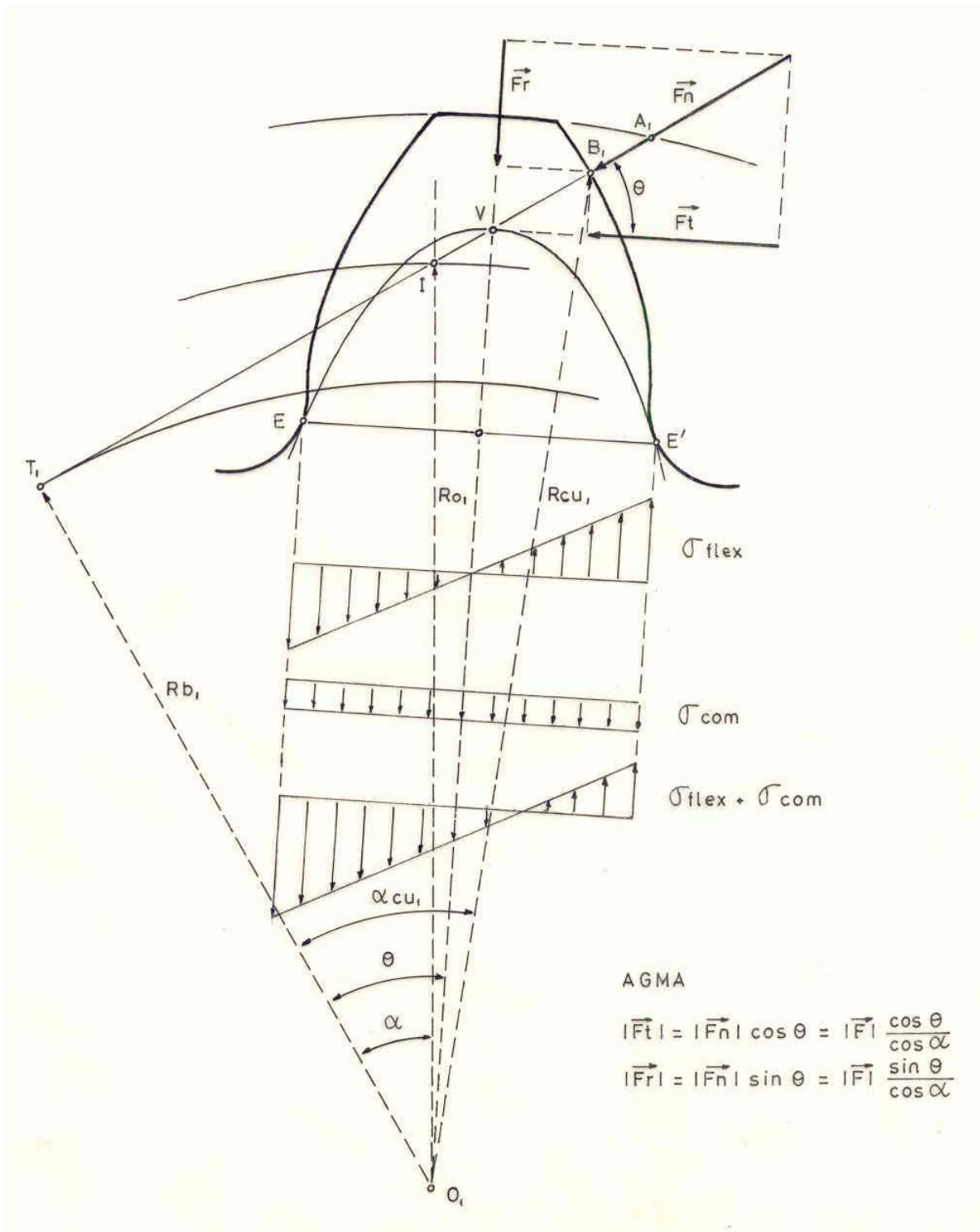


Figura 5

4. CÀLCUL PER A LA PREVENCIÓ DE LA FORMACIÓ DE PICADURES

Avui dia encara no hi ha un acord total entre els autors sobre els mecanismes que produeixen les picadures; no obstant, però, podem afirmar que el nombre de cicles de vida, el grau d'acabat superficial, la duresa del material, el lubricant, el valor de la càrrega i la velocitat de lliscament influeixen sobre la resistència a les picadures.

En primer lloc, és útil de distingir dos tipus de picadures:

- Les picadures superficials, de petita grandària, localitzades a profunditats de 0.01 a 0.02 mm de la superfície.
- Les picadures profundes, de major grandària, que se situen a major profunditat (0,1 a 0,2 mm sota la superfície).

Les picadures superficials són engendrades per l'existència d'uns esforços de cisallament elevats a molt poca profunditat sota la superfície deguts a les variacions de pressió i a la cavitació causades per la rugositat superficial. Només es produeixen en rodament pur i en presència del lubricant. Desapareixen en les zones en què existeix un cert lliscament.

Les picadures profundes són engendrades per l'existència d'uns esforços de cisallament elevats situats a una certa profunditat, els quals no depenen de la distribució precisa dels esforços en la superfície en raó de la rugositat. Es produeixen tant en contactes secs com en contactes lubricats, i són molt menys sensibles al lliscament que les picadures superficials.

4.1 TEORIA DE HERTZ

Els primers mètodes de càlcul de les tensions superficials van ser establerts en base de la teoria de Hertz sobre les tensions de contacte (Ref. 27).

Aquesta teoria segueix el següent model: es tracta d'analitzar el fenomen que té lloc entre dos cilindres en contacte no lubricat, que s'exerceixen una força estàtica mútua. Parteix, a més, de les següents consideracions: el material és isòtrop i perfectament elàstic, i els cilindres tenen una longitud infinita.

A partir d'aquest model, Hertz arriba a la conclusió que s'estableix una zona de contacte d'amplada de $2 \cdot a_H$, degut a la deformació d'ambdues superfícies; la distribució de pressions sobre aquesta zona té una forma el·líptica; i la màxima pressió superficial és p_H (Fig. 6).

Els valors de a_H i p_H són:

$$a_H = \sqrt{\frac{8 \cdot F_{nu} \cdot \rho_c}{\pi \cdot E_r}} \quad (4.1 a)$$

$$p_H = \frac{E_r \cdot a_H}{4 \cdot R} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{E_r \cdot F_{nu}}{\rho_c}} \quad (4.1 b)$$

on F_{nu} = Força normal i unitària aplicada sobre el flanc

$$E_r = \frac{2}{\frac{1 - \nu^2}{E_1} + \frac{1 - \nu^2}{E_2}} = \text{Mòdul d'elasticitat reduït}$$

E_1 i E_2 són els mòduls d'elasticitat de pinyó i roda

ν_1 i ν_2 són els coeficients de Poisson de pinyó i roda.

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{1}{T_1 C} + \frac{1}{T_2 C}} = \text{Radi de curvatura reduït}$$

$T_1 C$ i $T_2 C$ Radis de curvatura d'ambdós flancs en el punt de contacte considerat (V. Fig. 6).

Aquesta distribució de pressions superficials es correspon amb un estat tensional en la massa de la dent que presenta les següents característiques:

- No hi ha tensions de tracció; sols hi ha tensions de compressió i de cisallament.
- Les tensions de cisallament principals són màximes a una profunditat de $z_p = 0,8 \cdot a_H$ en la normal del punt de contacte, i formen un angle de 45° amb la superfície; el seu valor és de $\tau_p = 0,3 \cdot \sigma_H$.
- Les tensions de cisallament ortogonals orientades en la direcció paral·lela a la superfície es troben a una profunditat de $z_{ort} = 0,5 \cdot a_H$, i presenta dos valors extrems: $z_{ort} = +0,25 \cdot a_H$ i $z_{ort} = -0,25 \cdot a_H$.

En considerar el moviment mutu dels dos flancs, l'esforç de cisallament principal esdevé un esforç polsant en passar el flanc contrari per damunt d'ell (de 0 a $0,3 \cdot p_H$ i altre cop a 0), mentre que els esforços de cisallament ortogonals adquireixen un caràcter alternant (entre $+0,25 \cdot p_H$ i $-0,25 \cdot p_H$). S'admet que és la variació total de la tensió la que produeix la fatiga i no el valor absolut; per tant, cal considerar que són les tensions de cisallament ortogonals les responsables de les picadures profundes.

La teoria de Hertz, però, no considera la influència de tres aspectes que la pràctica ha demostrat que són importants:

- la presència del lubricant
- les tensions creades pel fregament
- i la rugositat superficial.

El 1935, Way (ref. 40) va insinuar que les fissures que inicien les picadures es formen a la superfície, i que la pressió hidrostàtica de l'oli empronat en aquestes fissures és el causant de la seva propagació.

Aquest esquema va ésser completat per Wulpi a 1966 (Ref. 44): en les capes properes a la superfície es donen dos tipus de tensió de cisallament:

- Unes tensions de cisallament que tenen la mateixa direcció tant en la roda conductora com en la conduïda, i que són causades pel rodament (segons la teoria de Hertz).
- Unes tensions de cisallament que inverteixen el seu signe en passar pel punt d'engranament I, i que tenen sentits inversos en la roda conductora i en la roda conduïda: són degudes al lliscament.

D'això en resulta que la fissuració, quan es manifesta, pren orientacions diferents segons la dent (conductora o conduïda) i, per a una mateixa dent, segons la regió (el peu o el cap de la dent). La Fig. 7 dona les diferents orientacions possibles de

les fissures, tal com se'n dedueix de la composició de les diferents sol·licitacions en presència.

Tant en el peu de la dent conductora com en el peu de la dent conduïda, la inclinació de les fissures és tal que el contacte entre els dos flancs empresona l'oli dintre d'ells, mentre que en els caps de la dent, tendeix a expulsar-lo. L'experiència sembla confirmar el diferent sentit en què es propaga la fissura en la roda conductora (del peu vers el cap), i en la roda conduïda (del cap vers el peu). (V. Fig. 7).

4.2 TEORIA DE LA LUBRICACIÓ ELASTOHIDRODINÀMICA

En aquestes últimes dècades s'ha anat desenvolupant una poderosa eina per a la comprensió dels contactes lubricats: la teoria de la lubricació elastohidrodinàmica (EHD).

Martin, al 1916 (ref. 29), havia estudiat el gruix de la pel·lícula de lubricant que es crea entre dues superfícies en virtut del seu moviment relatiu (efecte hidrodinàmic); la comparació dels resultats de la seva teoria amb els resultats experimentals obtinguts a base d'engranatges va ser un complet fracàs. No va ésser fins que es van prendre en consideració simultàniament els efectes hidrodinàmic i de deformació elàstica de les superfícies que es va obtenir una bona correspondència amb la realitat; més endavant, s'hi ha introduït els efectes de les característiques reològiques. L'elaboració d'aquesta teoria demana la resolució simultània de les equacions de l'elasticitat i de les equacions que governen el comportament dels fluids: el procés d'anàlisi ha estat llarg i hi han intervingut nombrosos investigadors. Entre ells podem destacar Grubin (V. Ref. 25) i Pretrusevich (V. Ref. 33).

Els resultats teòrics actuals presenten les característiques següents:

- La pel·lícula de lubricant té un gruix pràcticament constant al llarg de tota la zona de contacte i sols presenta un estrenyiment a la sortida (és el punt de mínim gruix).
- La distribució de pressions sobre la zona de contacte és bastant semblant a la distribució de Hertz; presenta, però, una punta de pressió que es correspon al punt d'estrenyiment de la pel·lícula de lubricant.

La preocupació principal d'aquesta teoria ha estat calcular el mínim gruix de la pel·lícula de lubricant. La complexitat del càlcul és tal, que sols ha estat possible obtenir solucions de problemes particulars. A partir d'aquestes solucions, Dowson i Higginson (Ref. 22) van establir una fórmula empírica del gruix mínim de la pel·lícula, que té la expressió següent:

$$H_0 = 1.6 \cdot F_{nu}^{-0,13} \cdot E_r^{0,03} \cdot \rho_c^{0,43} \cdot (\eta_0 \cdot v_\Sigma)^{0,7} \cdot \alpha_0^{0,6} \quad (3.2)$$

- on:
- h_0 = Gruix mínim de la pel·lícula de lubricant
 - F_{nu} = Força normal unitària
 - E_r = Mòdul d'elasticitat reduït
 - ρ_c = Radi de curvatura reduït
 - η_0 = Viscositat "representativa" del lubricant
 - α_0 = Coeficient de pressió "representatiu" de la viscositat del lubricant
 - v_Σ = Velocitat suma = $|v_1 + v_2|$

No obstant haver estat establerta aquesta fórmula per a casos de rodadura pura, les experiències realitzades a base de discos mostren que la velocitat de lliscament V_{gc} té molt poca influència sobre el valor del mínim gruix.

Diverses investigacions recents utilitzen un paràmetre derivat de la teoria de la lubricació elastohidrodinàmica que sembla que tindrà una gran importància pràctica en el futur: s'anomena "gruix relatiu de pel·lícula" λ , i és el quocient entre el gruix mínim de la pel·lícula h_0 , i un valor ε_0 que té dimensió de distància, i que és funció de la rugositat de les superfícies en contacte (alguns autors usen la rugositat total R_t , i d'altres la rugositat R_a). Aquest paràmetre té interès pel fet que pren en consideració simultàniament l'efecte del lubricant, les deformacions elàstiques de les superfícies i la rugositat superficial (V. els treballs de Dawson; Ref. 16).

Tot i que la teoria de la lubricació elastohidrodinàmica sembla tenir un brillant futur, i malgrat els primers estudis realitzats per Dawson i Higginson sobre la seva aplicació als engranatges (Ref. 22), en aquest moment encara no disposem d'un mètode de càlcul suficientment complet i elaborat per a poder-lo aplicar als engranatges d'una manera general.

El gruix relatiu de pel·lícula λ pot ésser un bon índex per a prevenir les picadures superficials; no obstant, els resultats de la teoria elastohidrodinàmica en quant a les tensions de cisallament profundes no difereixen substancialment dels resultats de la teoria de Hertz.

Per tot el que acabem de dir, preferim cenyir-nos als mètodes de càlcul avui dia usats, basats en les tensions de contacte de Hertz.

4.3 ANÀLISI COMPARATIVA I DISCUSSIÓ DELS MÈTODES ISO I AGMA

Anàlogament al càlcul per a la prevenció de la ruptura de la dent per fatiga, ens trobem davant de dos sistemes de càlcul amb d'un ús estès, per a la prevenció de les picadures: el donat per ISO i el donat per AGMA; tots dos prenen la màxima pressió de contacte de Hertz p_H com a índex de les tensions admissibles, i l'afecten de diversos factors de correcció. Una expressió general per ambdós sistemes podria ésser:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{E_r}{\rho_c} \cdot F_{nu} \cdot K_0 \cdot K_d \cdot K_f \cdot K_m \cdot K_r \cdot K_v \leq \sigma_H^2 \cdot \frac{K_H \cdot K_h}{K_t \cdot K_s} \quad (4.3)$$

- On:
- σ_H = Esforços de contacte a fatiga admissibles
 - F_{nu} = Força normal unitària
 - E_r = Mòdul d'elasticitat reduït
 - ρ_c = Radi de curvatura reduït
 - K_0 = Factor de servei o factor de sobrecàrregues
 - K_f = Factor de superfície
 - K_g = Factor de grandària
 - K_H = Factor de duresa o de vida
 - K_h = Factor de relació de dureses de pinyó i roda
 - K_m = Factor de distribució de càrrega
 - K_r = Factor de repartiment
 - K_s = Factor de seguretat
 - K_t = Factor de temperatura
 - K_v = Factor dinàmic

El significat d'alguns d'aquests termes difereix en els mètodes ISO i AGMA. Procedirem, doncs, a una anàlisi dels criteris que sustenten cada un d'aquests dos mètodes a fi d'arribar a establir la nostra pròpia base de càlcul.

Tal com hem indicat anteriorment, desglossarem l'expressió (4.3) en dos factors: un d'ells, el factor geomètric inclourà els aspectes que depenen fonamentalment de la

geometria i l'altre, el factor de treball, inclourà els termes restants. Ens dedicarem preponderantment al primer.

4.3.1 TERMES QUE INTERVENEN EN EL FACTOR GEOMÈTRIC

Mètode ISO: proposa prendre el punt d'engranament com a punt de càlcul; justifica aquesta elecció dient que és precisament en la zona del punt d'engranament on s'inicien les picadures. A més, ISO acorda afectar la càrrega normal unitària F_{nu} d'un factor de repartiment K_r , que vol tenir en compte el repartiment de la càrrega entre dues parelles de perfils. El seu valor seria:

$$K_r = \frac{4 - \varepsilon}{3} \quad (3.3.1)$$

on: ε = Coeficient de recobriment.

Mètode AGMA: proposa prendre com a punt de càlcul el punt més alt sobre el flanc de la roda on hi ha encara un sol parell de flancs en contacte (punt de contacte únic; punt B_1 . V. Fig. 5). No pren en consideració cap tipus de repartiment de la càrrega i per tant adopta $K_r = 1$.

Discussió:

El prendre com a punt de càlcul el punt d'engranament I, o el punt de contacte únic B_2 , no condueix a excessives diferències en engranatges normalitzats. Les diferències augmenten per a reduccions grans i per a rodes de poc nombre de dents (les tensions calculades segons el mètode AGMA arriben a ésser un 10 % majors que les calculades segons el mètode ISO).

El que ofereix majors discrepàncies és el factor de repartiment K_r , sobretot per a coeficients de recobriment ε una mica elevats (V. gràfic 1). Els valors d'aquest coeficient adoptats per ISO semblen ésser un compromís entre els valors adoptats pels francesos (Capelle, Henriot) i el valor unitat adoptat fins aleshores per la norma alemanya DIN.

En la pràctica, rara és la vegada en què en el punt d'engranament I es pot repartir la càrrega entre dues parelles de flancs i, en tot cas, un coeficient de repartiment adoptat per ISO ens sembla molt optimista. En conseqüència, preferim el criteri d'AGMA ja que calcula la tensió en el punt més desfavorable de contacte únic B_2 en el qual no hi ha discussió sobre un possible repartiment de la càrrega.

Aquest és, doncs, el criteri que hem adoptat.

4.3.2 TERMES QUE INTERVENEN EN EL FACTOR DE TREBALL

a) Factor de durada K_H corregeix el valor de l'esforç superficial admissible de fatiga quan la vida prevista per a l'engranatge és menor a 10^7 cicles; la seva expressió es dedueix d'unes corbes de Whöler anàlogues a las de flexió a fatiga:

$$K_H = \left(\frac{10^7}{N_0} \right)^{c'} \quad \text{per a } N_0 \leq 10^7 \quad (4.3.2)$$

on: N_0 = Nombre de cicles de vida previstos

El valor de l'exponent c' donat pels diferents autors oscil·la entre 1/5 i 1/8.5 (aquest últim valor és el donat per AGMA); per al nostre propòsit prendrem un valor mitjà, tal com fa G. Henriot: $c' = 1/6$ (Ref. 26, pàg. 374).

- b) Els factors de servei K_0 , de distribució de càrrega K_m , i dinàmic K_v , tenen el mateix significat que en el càlcul per a la prevenció de la ruptura per fatiga (3.3.2).
- c) Els restants factors (de relació de dureses K_h , de seguretat K_s , de grandària K_g i de temperatura K_t), tenen en compte aspectes molt particulars del disseny. Donat el caràcter del present treball, els assignarem el valor 1.

4.4 CRITERI DE CàLCUL ADOPTAT, CONSEQÜÈNCIA DE L'ANÀLISI ANTERIOR

Adoptem, doncs, com a criteri bàsic de càlcul el proporcionat bàsicament per la norma AGMA 210.02.

Tenint en compte l'expressió de la força normal unitària F_{nu} i el radi de curvatura reduït en el punt de contacte únic B_2 , ρ_{B2} (V. Cap. 1), així com les simplificacions indicades en la secció anterior, l'expressió (4.3) es transforma en la següent:

$$\frac{1}{B \cdot D} \cdot \frac{1 + \mu}{2 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot \frac{Pot}{\omega_1 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{E_r}{\rho_{B2}} \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v \leq \sigma_H^2 \cdot K_H$$

$$\frac{1}{\rho_{B2}} = \frac{\tan \alpha \tan \alpha / c}{(1 - \varphi_1) \cdot \varphi_1 \cdot \tan^2 \alpha + \frac{2 \cdot \pi}{Z} \cdot (2 \cdot \varphi_1 - 1) \cdot \tan \alpha - \left(\frac{2 \cdot \pi}{Z} \right)^2} \quad (4.4)$$

- on: B = Amplada de contacte (m)
D = Distància entre centres (m)
 α = Angle de funcionament (rad)
 μ = Relació de transmissió
Z = Nombre de dents suma
 φ_1 = Factor de cap de pinyó
Pot = Potència transmesa (W)
 ω_1 = Velocitat angular del pinyó (rad/s)
 E_r = Mòdul d'elasticitat reduït (N/m^2)
 σ_H = Esforç de contacte admissible per fatiga (N/m^2)
 K_0 = Factor de servei (AGMA 210.02, Taula 2)
 K_H = Factor de durada per a les tensions de contacte ($K_H = (10^7/N_0)^{1/6}$ per a $N_0 \leq 10^7$; $K_H = 1$ per a $N_0 > 10^7$)
 K_m = Factor de distribució de càrrega (AGMA 210.02, Taula 1)
 K_v = Factor dinàmic (Ref. 26, pàg. 341; Fig. VII-19: cal prendre el valor invers del donat per la figura).

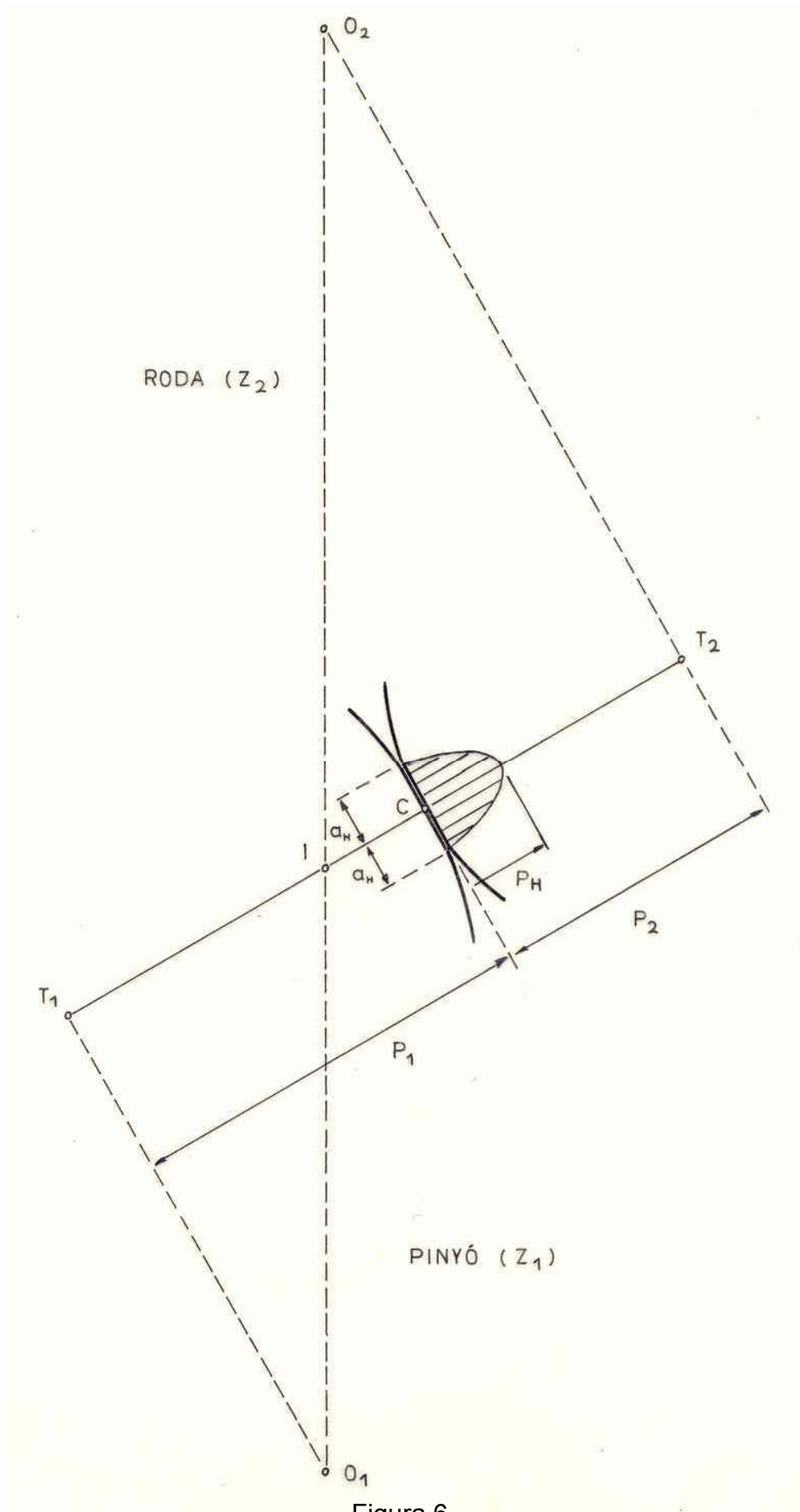
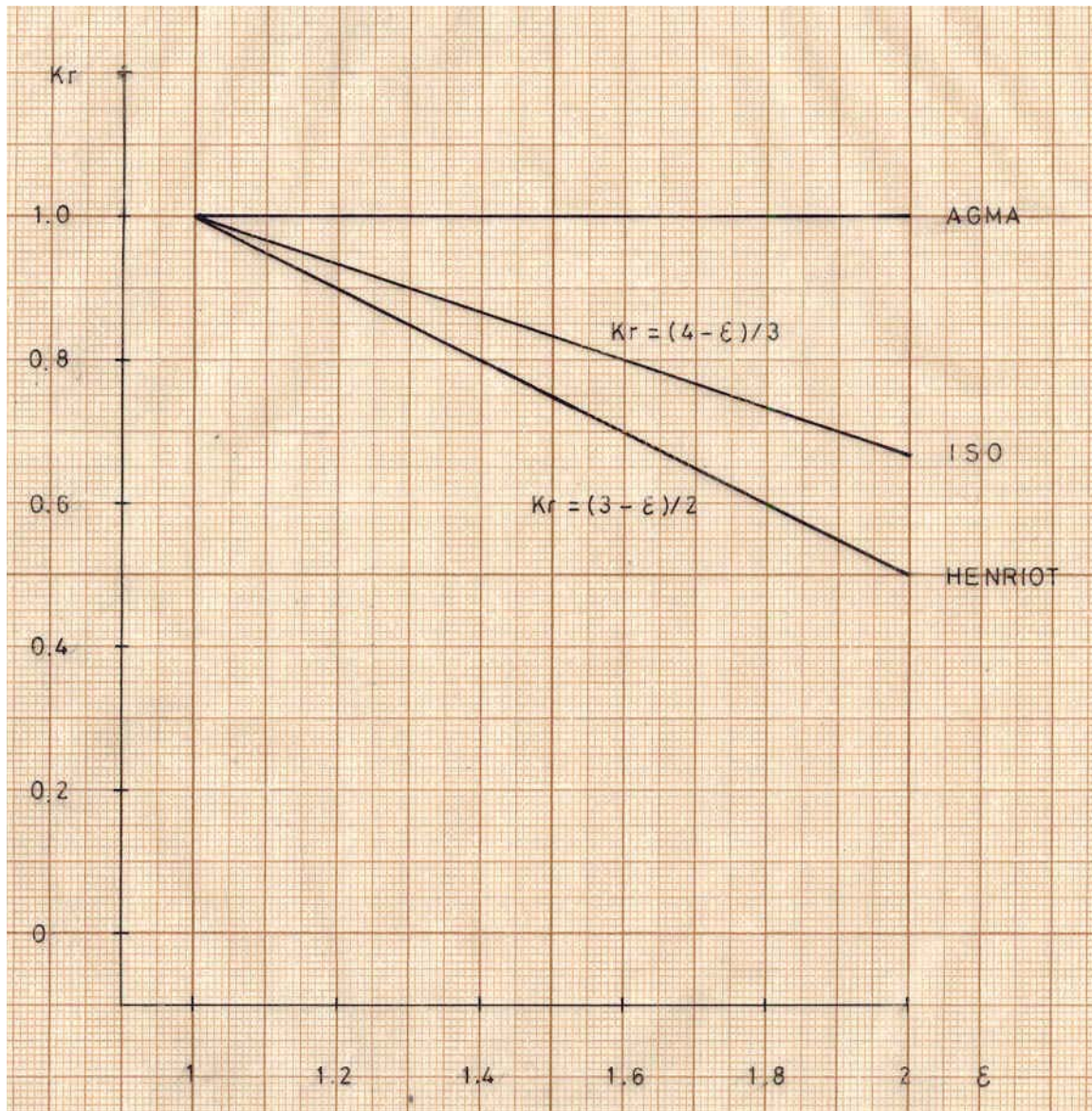


Figura 6



Gràfic 1

5. CÀLCUL PER A LA PREVENCIÓ DE L'EXCORIACIÓ

Malgrat els anys que fa que s'estudia, i els esforços que s'hi han dedicat, el fenomen de l'excoriació continua essent avui dia encara mal conegut.

Va aparèixer com a problema a mitjans dels anys 20, en aplicar els grups d'engranatges hipoides en els eixos de darrera dels vehicles automòbils (els engranatges hipoides presenten una gran velocitat de lliscament). La descoberta, poc després, per part dels tècnics de lubricants, d'uns additius anomenats d'"extrema-pressió" (additius E-P) ha estat l'única solució practica d'aquest problema.

Més tard, i a causa de la continua tendència a utilitzar acers cada cop més resistents a fi de poder transmetre majors carregues, ha anat augmentant el nombre de casos d'engranatges rectes que s'han vist limitats per l'aparició de l'excoriació.

El fenomen de l'excoriació no es produeix per un procés de fatiga com la ruptura i les picadures anteriorment estudiades, sinó que es presenta d'una manera sobtada quan les condicions de funcionament arriben e uns certs valors crítics; s'acompanya de vapors i d'un notable augment de soroll.

Les zones més afectades són els caps i peus de les dents (contràriament a les picadures que apareixen inicialment en la zona del punt d'engranament), presenten unes estries d'aparença rugosa en el sentit de la velocitat de lliscament. El fenomen acostuma a presentar major problema en les engranatges de grans mòduls.

És influït per nombrosos factors, entre els quals citarem: les pressions de Hertz, la velocitat de lliscament, les característiques del lubricant, les propietats del material i l'acabat superficial.

Les darreres investigacions sobre la lubricació elastohidrodinàmica senyalen que, per severes que siguin les condicions de funcionament (pressions de Hertz i velocitat de lliscament) entre els flancs de les dents, persisteix una pel·lícula de lubricant hidrodinàmica, ja sigui total, ja sigui parcial (interrompuda per les aspreses superficials), que separen ambdós flancs. A més, existeixen una capa límit i una capa d'òxid que protegeixen les superfícies.

Per tel que s'arribi a produir el contacte entre els dos metalls verges, han d'ésser destruïdes aquestes tres capes protectores.

Han estat concebuts nombrosos mecanismes per explicar el fenomen de l'excoriació: alguns relacionats amb la viscositat o volatilitat del lubricant, altres relacionats amb els efectes de cavitació, altres amb diversos efectes químics, etc.

Ara bé, de tots els possibles índexs per a preveure l'excoriació, el més acceptat (encara que no unànimement) ha estat la temperatura de conjunció, o temperatura assolida en la zona de contacte en virtut del calor generat per fricció. Aquest és el criteri seguit pels dos mètodes que analitzem e continuació.

5.1 CRITERI PV D'ALMEN

La primera temptativa de donar un criteri quantitatiu per a la prevenció de l'excoriació va ésser realitzada per Almen el 1935 (Ref. 1). Va fer la consideració que la temperatura de conjunció (causa de l'excoriació) és proporcional al producte de la màxima pressió de contacte (o de Hertz) i la velocitat de lliscament: així va néixer el factor PV. Almen, després d'haver analitzat les condicions de funcionament de diversos engra-

natges, uns que havien sofert excoïació i d'altres que no, va arribar a la conclusió que, a efectes de disseny, cal no sobrepassar el valor de 1.500.000 per al producte PV mesurat en unitats angleses: (lliura/polzada²)·(peu/segon); o també 3,1·10⁹ (W/m). Aquest ha esdevingut un dels criteris clàssics per a la prevenció de l'excoïació.

Els valors més desfavorables d'aquest factor es presenten en els extrems de la línia d'engranament, ja que és on existeixen les pressions de Hertz. més importants i les velocitats de lliscament més grans. Les modificacions de perfil d'ús comú avui dia (la despulla de cap en particular), han disminuït notablement el perill d'excoïació; malgrat això, quan l'excoïació es produeix, continua apareixent en les zones del cap i del peu del flanc.

En aquesta situació hi ha dues parelles de perfils en contacte i, per tant, és lícit de pensar en un cert repartiment de la càrrega. Així, doncs, a més d'afectar el valor de la potencia transmesa dels diversos factors correctors ja introduïts en el càlcul de la ruptura i de les picadures (factor de servei K₀, factor de distribució de càrrega K_m i factor dinàmic K_v; V. 3.3.2), hauríem d'introduir un factor de repartiment K_r que tingués en compte aquest aspecte.

El criteri del factor PV d'Almen, un cop introduïdes les expressions de les pressions màximes de Hertz PH i de la velocitat de lliscament V_g (V. Cap. 1), pot formular-se de la següent manera :

$$\text{En el punt } A_1: \frac{1}{B} \cdot \frac{1+\mu}{2 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot \frac{((1+\mu) \cdot \varphi_1 - \mu)^2}{(1-\varphi_1) \cdot \varphi_1} \cdot \text{Pot} \cdot \omega_1 \cdot E_r \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v \cdot K_r \leq PV_{adm}^2 \quad (5.1 a)$$

$$\text{En el punt } A_2: \frac{1}{B} \cdot \frac{1+\mu}{2 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot \frac{((1+\mu) \cdot \varphi_2 - \mu)^2}{(1-\varphi_2) \cdot \varphi_2} \cdot \text{Pot} \cdot \omega_1 \cdot E_r \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v \cdot K_r \leq PV_{adm}^2 \quad (5.1.b)$$

on:	B	= Amplada de contacte	(m)
	μ	= Relació de transmissió	
	φ ₁ i φ ₂	= Factors de cap de pinyó i roda (V. Cap. 1)	
	Pot	= Potencia transmesa	(W)
	ω ₁	= Velocitat angular del pinyó	(rad/s)
	E _r	= Mòdul d'elasticitat reduït	(N/m ²)
	K ₀	= Factor de servei (V. secció 3.3.2)	
	K _m	= Factor de distribució de càrrega (V. secció 3.3.2)	
	K _v	= Factor dinàmic (V. secció 3.3.2)	
	K _r	= Factor de repartiment	
	PV _{adm}	= Valor màxim del producte PV admissible	(W/m ²)

Segons indica Henriot (Ref. 26, pag. 222), i segons hem pogut comprovar nosaltres mateixos, el fet d'igualar els lliscaments específics en els dos punts extrems del segment actiu de la línia d'engranament A₁ i A₂ equival també a igualar el valor dels factors PV en aquests mateixos dos punts: s'obté així, un criteri per a situar el segment A₁A₂ dintre de la línia d'engranament T₁T₂. En aquest cas, prenent una sola de les dues expressions 5.1a o 5.1b n'hi ha prou.

Diverses raons, entre elles les modificacions del perfil d'evolvent, van permetre construir engranatges que funcionaven correctament en condicions en què el factor PV era molt superior al predit per Almen (sobretot quan la velocitat de lliscament creixia). Això va dur a Almen i Straub (Ref. 37) a una revisió de la seva fórmula: van establir un nou factor PVT que donava uns valors més uniformes, segons ells, per a la més ampla gamma de velocitats de lliscament usades en aquell temps (uns 25

m/s). P i V tenien el mateix significat que en el factor PV, mentre que T significava la distància del punt d'engranament I al punt de contacte C.

L'anàlisi dimensional ens mostra que el factor PV té dimensions de potència per unitat de superfície, mentre que el factor PVT té dimensions de potència per unitat de longitud. Al nostre entendre, la potència transmesa per unitat de superfície pot ser un indicador vàlid del calor generat pel fregament en aquell punt, però, no la potència transmesa per unitat de longitud (factor PVT). A més, el factor PV ens imposa un límit inferior per a l'amplada de contacte B, mentre que el factor PVT ens imposaria un límit superior, cosa absurda.

Per tant, no anirem més enllà en l'anàlisi del factor PVT d'Almen.

5.2 TEORIA DE LES TEMPERATURES FLASH DE H. BLOK

H. Blok va recollir la idea que va guiar a Almen, segons la qual l'excoriació és fruit de la generació instantània i localitzada de calor de fricció; a l'any 1937, H. Blok va publicar diversos articles (Ref. 7 i 8) que van configurar la "teoria de les temperatures flash", la qual representa una elaboració i major precisió de l'esquema d'Almen, així com la proposta d'un indicador per a l'excoriació en forma d'increment de temperatura (temperatura flash) enlloc de potència transmesa per unitat de superfície.

El model de Blok podria establir-se de la següent manera: anàlogament a la flama que es mou sobre una superfície en una soldadura, la zona de contacte (establerta segons la teoria de Hertz) és una font de calor de fricció que es mou respecte als dos flancs en contacte. El calor de fricció generat es reparteix entre les dues superfícies (repartició que és funció de les característiques tèrmiques d'ambdós metalls i de la velocitat dels flancs respecte la zona de contacte), no sense abans haver donat lloc a una elevació localitzada i de molt breu durada de la temperatura (temperatura flash).

Estableix, a més, dues consideracions importants: no existeix cap salt de temperatures entre les dues superfícies en contacte, i el coeficient de fregament es manté constant.

L'expressió donada per H. Blok per a l'increment instantani de la temperatura en el cas en què els dos materials presentin les mateixes característiques, és (Ref. 12):

$$T_f = 0,62 \cdot \frac{f}{b_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{nu}^3 \cdot E_r}{\rho_c}} \cdot \left| \sqrt{v_{1C}} - \sqrt{v_{2C}} \right| \quad (5.2)$$

- on: f = Coeficient de fricció
 b_0 = Coeficient de contacte tèrmic: $b_0 = \sqrt{k \cdot \delta \cdot C_e}$ k = Conductivitat del calor; δ = Densitat; i C_e = Calor específic per unitat de massa. Per als acers d'ús normal oscil·la entre $1,2 \cdot 10^4$ i $1,6 \cdot 10^4$ N/(m.s^{1/2}.°C)
 F_{nu} = Força normal unitària (N/m)
 E_r = Mòdul d'elasticitat reduït (N/m²)
 ρ_c = Radi de curvatura reduït en el punt de contacte C (m)
 v_{1C} i v_{2C} = Velocitats tangencials dels flancs en el punt de contacte C (m/s)

D'una manera anàloga a quan hem tractat el factor PV d'Almen, els valors més desfavorables de la temperatura flash es presenten en els extrems de la zona activa de la línia d'engranament A_1 i A_2 ; igualment, doncs, també caldrà afectar la força nor-

mal transmesa, pels diversos factors correctors anteriorment senyalats, inclòs el factor de repartiment K_r (V. 5.1).

El 1939, H. Blok va enunciar el "Postulat sobre la constància de la temperatura d'excoriació per a lubricants sense additius E-P" (extrema pressió) (Ref. 9), la qual cosa venia a fer operatiu el concepte de les temperatures flash; aquest postulat estableix que, per a prevenir l'excoriació, cal que la temperatura de conjunció o de contacte T_c (suma de les temperatures flash T_f i la temperatura de la massa de la dent T_b), no ha de sobrepassar un determinat valor anomenat temperatura d'excoriació T_{ex} , la qual no depèn de les condicions de funcionament:

$$T_c = T_f + T_b \leq T_{ex}$$

Aquest postulat ha estat motiu de nombroses controvèrsies; diverses experiències semblen confirmar-lo, mentre d'altres semblen contradir-lo. L'autor creu, no obstant, en la seva correcció i atribueix les faltes de concordança entre teoria i practica a deficiències en els mètodes d'experimentació o a aspectes que no s'han tingut en compte en el càlcul (Ref. 12).

Un altre aspecte que ha suscitat discussions ha estat el fet d'aplicar la teoria de les temperatures flash, establerta per al cas en què hi ha contacte entre les superfícies i es pot assegurar la inexistència de salt de temperatura entre elles, a la predicció d'excoriació, fenomen que, segons els recents estudis, es dona quan existeix encara una pel·lícula elastohidrodinàmica no menyspreable. H. Blok fa notar, però, que l'increment de la temperatura flash depèn fonamentalment de la quantitat de calor generat, i no de la distribució d'aquest calor sobre la zona de contacte (Ref. 11 i 12): això donaria peu a aplicar aquesta teoria als contactes lubricants sempre que s'adopti un coeficient de fricció f adequat.

Alguns complexos càlculs realitzats sobre pel·lícules elastohidrodinàmiques no isoterms semblen confirmar aquesta explicació (Ref. 12).

P.M. Ku (Ref. 28) en la discussió d'un dels articles de H. Blok, diu, en primer lloc, que, encara que es comprovi que la temperatura d'excoriació no es manté constant, mentre es conegui la seva llei de variació, la teoria de les temperatures flash continua essent vàlida; per altra banda, creu que l'interès d'aquesta teoria resideix en l'estudi de situacions on la interacció química lubricant-metal-atmosfera és important, fet que es dona en l'excoriació, i que és menys acusat en els lubricants sense additius que en els lubricants amb additius. En els casos en que la interacció química lubricant-metal-atmosfera és negligible, la teoria de la lubricació elastohidrodinàmica proporciona una bona aproximació per a determinar les condicions en què es passa del règim de lubricació elastohidrodinàmica al règim de lubricació límit.

Per altra banda, el gruix relatiu de pel·lícula (V. 4.1) no sembla ésser un indicador adequat per a preveure l'excoriació (Ref. 5).

5.3 CRITERI DE CàLCUL ADOPTAT

Si no tenim en compte l'efecte del repartiment de la càrrega, els punts més desfavorables des del punt de vista de la temperatura flash són els extrems de la zona activa de la línia d'engranament A_1 i A_2 (V. Fig. 9). Per a coeficients de recobriment alts, aquests punts continuen essent els més desfavorables encara que apliquem un factor de repartiment de $K_r = 0.5$ (repartiment a parts iguals entre les dues parelles de flancs); per contra, per a coeficients de recobriment baixos, segons el coeficient

de repartiment que apliquem, pot esdevenir crític el punt de contacte únic B₁ (V. Fig. 9) enlloc del A₁.

Nosaltres pensem que cal ésser molt prudent en el moment d'atribuir un valor al factor de repartiment, especialment quan tractem amb problemes de coeficient de recobriment baix; en cas de dubte pensem que caldria analitzar la variació de la temperatura flash al llarg de la línia d'engranament.

De totes maneres creiem totalment justificat de prendre A₁ i A₂ com a punts de càlcul, ja que, a més de presentar els màxims valors teòrics de la temperatura flash, corresponen a les zones on la practica mostra que s'inicia l'excoriació,

L'equació (5.2), un cop introduïdes les expressions dels radis de curvatura reduïts en els punts A₁ i A₂, així com les expressions de les velocitats tangencials de pinyó i roda en aquests mateixos punts, es transforma en les següents fórmules:

punt A₁: (5.3.e)

$$T_{fA1} = 0,62 \cdot \frac{f}{b_0} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{(\text{Pot} \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v \cdot K_r)^3 \cdot E_r}{\omega_1}} \cdot \frac{\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{\mu \cdot (1-\varphi_1)}}{\sqrt[4]{(1-\varphi_1) \cdot \varphi_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

punt A₂.: (5.3.b)

$$T_{fA2} = 0,62 \cdot \frac{f}{b_0} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{(\text{Pot} \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v \cdot K_r)^3 \cdot E_r}{\omega_1}} \cdot \frac{\sqrt{\mu \cdot \varphi_2} - \sqrt{1-\varphi_2}}{\sqrt[4]{(1-\varphi_2) \cdot \varphi_2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

on: B	= Amplada de contacte	(m)
D	= Distància entre centres	(m)
f	= Coeficient de fricció	
b ₀	= Coeficient de contacte tèrmic (v. 5.2)	
μ	= Relació de transmissió	
Pot	= Potència transmesa	(W)
E _r	= Mòdul d'elasticitat reduït	(N/m ²)
ω ₁	= Velocitat angular del pinyó	(rad/s)
α	= Angle de funcionament	(rad)
φ ₁ i φ ₂	= Factors de cap de pinyó i roda (V. Cap. 1)	
K ₀	= Factor de servei (V. 3.3.2)	
K _m	= Factor de distribució de càrrega (V. 3.3.2)	
K _v	= Factor dinàmic (v. 3.3.2)	
K _r	= Factor de repartiment	

Definirem l'increment de temperatura admissible ΔT_{adm} com la diferència entre la temperatura d'excoriació T_c i la temperatura de la massa de les dents T_b:

$$\Delta T_{adm} = T_c - T_b \quad (5.3 c)$$

Caldrà doncs que es compleixi: T_f ≤ ΔT_{adm}

En tractar d'igualar les temperatures flash en els extrems de la zona útil de la línia d'engranament A₁ i A₂ (T_{fA1} = T_{fA2}), donades per les expressions 5.3a i 5.3b, hem trobat que imposen la mateixa condició que la igualació dels lliscaments específics i dels factors PV d'Almen, degut a la qual cosa no hi ha dubte sobre quin criteri elegirem per determinar la zona activa de la línia d'engranament A₁A₂. A més, sols ens caldrà prendre una de les dues expressions 5.3a i 5.3b: la primera.

6. ENERGIA DISSIPADA

6.1 INTRODUCCIÓ DEL CONCEPTE

El fregament entre els flancs de les dents produeix una dissipació d'energia en forma de calor. L'estudi d'aquest fenomen presenta interès per dos motius:

- Perquè dona informació sobre el rendiment de l'engranatge, o sigui, permet saber quina és la fracció d'energia que es transmet i quina és la que es dissipa. En els engranatges rectes, els percentatges d'energia dissipada oscil·len generalment entre un 0,5 i un 3 % de l'energia transmesa.
- Perquè ens permet predir l'escalfament causat per aquesta dissipació, i poder obtenir dades per el disseny del sistema de refrigeració. Malgrat els alts rendiments dels engranatges rectes, l'escalfament pot presentar un problema important, ja que, degut a les grans potències que transmeten alguns engranatges, l'energia dissipada en termes absoluts pot ser molt elevada.

És pràctica habitual considerar un valor constant i promitjat del coeficient de fricció f , en l'avaluació de l'energia dissipada durant l'engranament (Ref. 23 i 26). No obstant, vistos els resultats de la teoria de la lubricació elastohidrodinàmica, sembla més lògic de prendre unes altres bases de càlcul on intervingui el fregament viscos del lubricant.

Un estudi dut a terme per D. Dowson i G.R. Higginson (Ref. 21) estableix, a partir de la consideració que existeix una pel·lícula elastohidrodinàmica completa entre les superfícies en contacte, un model molt simplificat per al càlcul de l'energia dissipada per un engranatge recte. Malgrat la simplificació de l'esquema, és necessari un càlcul notablement laboriós; a més, molts engranatges funcionen sota condicions en les quals solament es dona una lubricació elastohidrodinàmica parcial o marginal, la qual cosa indica que l'aplicació de l'anterior model pot no ésser del tot adequada.

Hem preferit seguir, doncs, els sistemes convencionals ja que, en el present treball, aquest és un aspecte complementari.

6.2 RENDIMENT INSTANTANI

L'estudi algebraic rigorós del concepte de rendiment instantani η_i (potència transmesa / potència d'entrada, per a un instant donat), condueix a la següent expressió (V. Fig. 10):

$$\eta_i = 1 - \frac{f \cdot \tan \alpha \cdot \frac{(1+\mu)^2}{\mu} \cdot \varphi}{\frac{\varphi}{|\varphi|} + \left(1 + \varphi \cdot \frac{1+\mu}{\mu}\right) \cdot f \cdot \tan \alpha} \quad (6.2 a)$$

- on: φ = Distància reduïda del punt de contacte al punt d'engranament (V. Fig. 10) $\varphi = \frac{IC}{T_1 T_2}$
 f = Coeficient de fregament
 α = Angle de funcionament (rad)
 μ = Relació de transmissió

G. Henriot parteix d'un esquema més simplificat (Ref. 26, pag. 442): en l'equilibri de forces no té en compte els moments que exerceixen les forces de fregament sobre ambdues rodes; això el duu a una expressió més simple del rendiment instantani:

$$\eta_i = 1 - f \cdot \tan \alpha \cdot \frac{(1+\mu)^2}{\mu} \cdot |\varphi| \quad (5.2.b)$$

on els termes tenen el mateix significat que en el cas anterior.

Segons hem comprovat, les diferències numèriques entre ambdues expressions són pràcticament insignificants; elegirem, doncs, la de G. Henriot, perquè en ésser el rendiment una funció lineal de φ resulta fàcil d'integrar.

6.3 RENDIMENT MITJÀ

En un cas en què hi hagués en tot moment una sola parella de dents en contacte ($\varepsilon = 1$), el càlcul del rendiment mitjà no oferiria problema: caldria buscar el valor promitjat del rendiment instantani η_i durant el pas d'una dent. Però, a la practica els coeficients de recobriment ε són sempre superiors a 1, gràcies a la qual cosa existeixen dues parelles de dents en contacte simultani en les zones extremes del segment útil de la línia d'engranament A_1B_1 i A_2B_2 .

Per a trobar el valor mitjà del rendiment, G. Henriot calcula l'energia dissipada per una sola parella de dents, sobre la qual considera aplicada la càrrega total, en recórrer tot el segment útil de la línia d'engranament A_1A_2 ; aquesta energia dissipada correspondria al pas de ε dents (V. Fig. 8).

Nosaltres pensem, però, que aquesta estimació és errònia, car en els segments extrems A_1B_1 i A_2B_2 de l'engranament, la càrrega es repartirà entre les dues parelles de dents en contacte. En aquest punt, hem seguit les indicacions de G. Niemann (Ref. 32, pàg. 465), el qual proposa repartir la càrrega a parts iguals entre els dos contactes; l'energia així dissipada correspondria al pas d'una dent (V. Fig. 8).

La diferència de resultats obtinguts segons els dos criteris ens sembla suficientment important com per a incloure aquesta lleugera complicació en el càlcul. Les expressions del rendiment mitjà segons les indicacions de G. Henriot i G. Niemann són:

$$\text{G. Henriot} \quad \eta = 1 - f \cdot \tan \alpha \cdot \frac{(1 + \mu)^2}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\varphi_a^2 + \varphi_r^2}{\varphi_a + \varphi_r} \quad (6.3 \text{ a})$$

$$\text{G. Niemann} \quad \eta = 1 - f \cdot \tan \alpha \cdot \frac{(1 + \mu)^2}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{\varphi_a^2 + \varphi_r^2 + \frac{\varphi_{acu}^3}{|\varphi_{acu}|} + \varphi_{rcu}^2}{\varphi_a + \varphi_{rcu}} \quad (6.3 \text{ b})$$

- on: f = Coeficient de fricció
 α = Angle de funcionament (rad)
 μ = Relació de transmissió
 φ_a = Factor d'acostament
 φ_r = Factor de retraïment
 φ_{acu} = Factor d'acostament de contacte únic
 φ_{rcu} = Factor de retraïment de contracte únic

(Veure el significat dels quatre últims factors en la Fig. 8).

Donat que el valor a donar al coeficient de fregament canviarà d'un problema a un altre, hem desglossat l'expressió del percentatge d'energia dissipada en un factor de dissipació DIS, i el coeficient de fricció f :

$$\text{percentatge d'energia dissipada} = 1 - \eta = f \cdot \text{DIS}$$

$$\text{on:} \quad \text{DIS} = \tan \alpha \cdot \frac{(1 + \mu)^2}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\varphi_a^2 + \varphi_r^2 + \frac{\varphi_{acu}^3}{|\varphi_{acu}|} + \varphi_{rcu}^2}{\varphi_a + \varphi_{rcu}}$$

E.E. Shigley utilitza un concepte anàleg al de factor de dissipació: "mechanical advantage" M , que és la inversa del factor de dissipació DIS: $M=1/\text{DIS}$. (Ref. 23, pàg. 14-15).

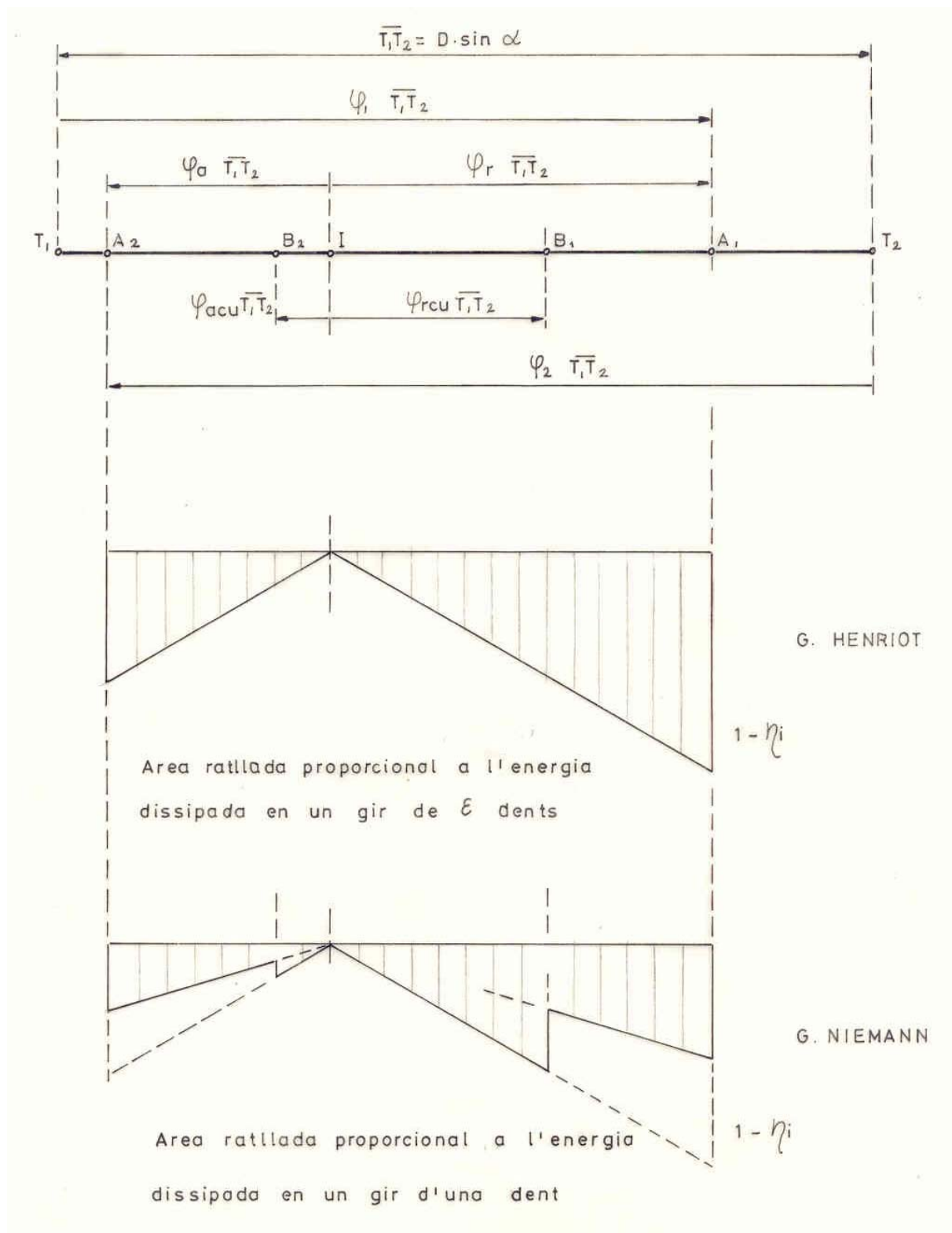


Figura 8

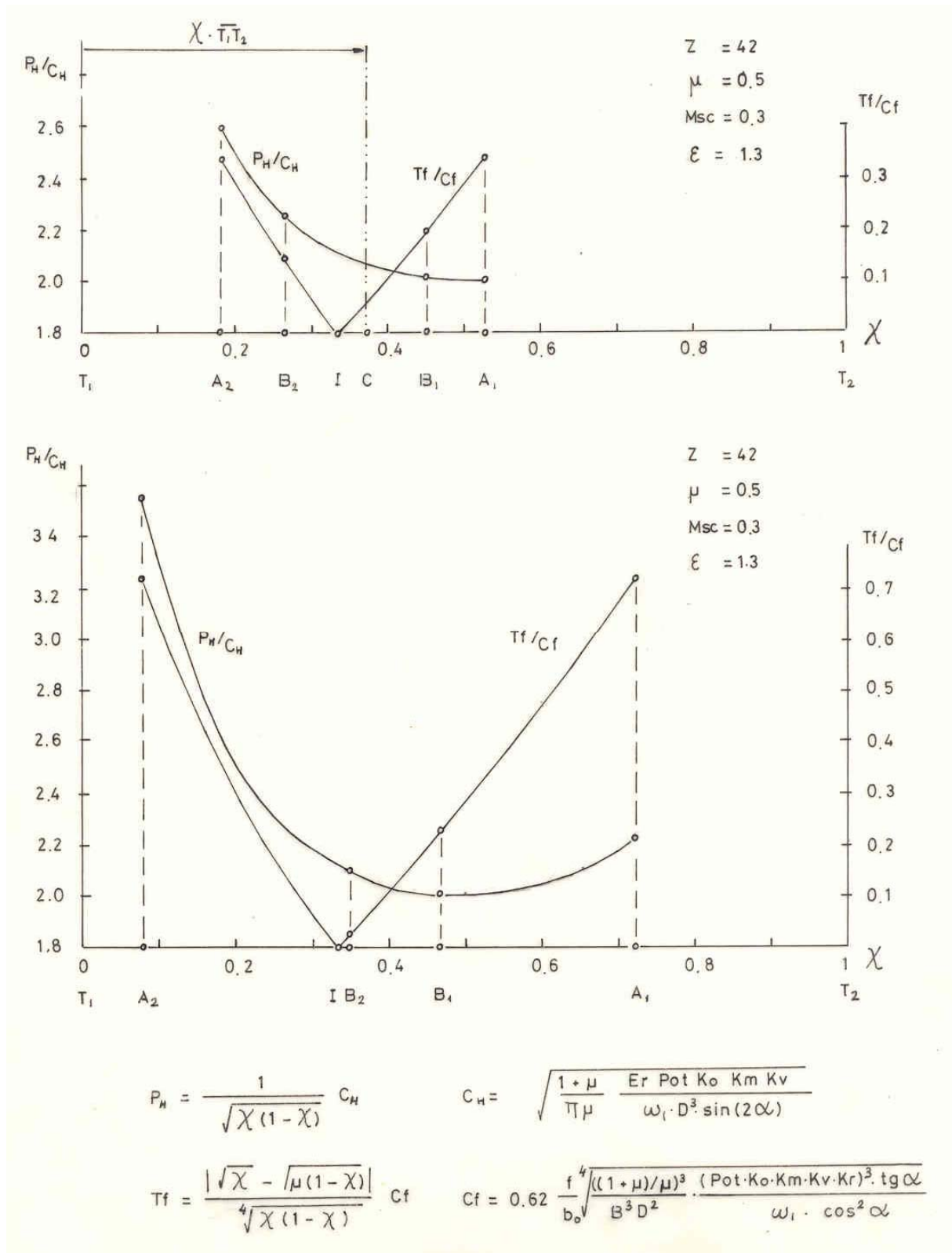


Figura 9

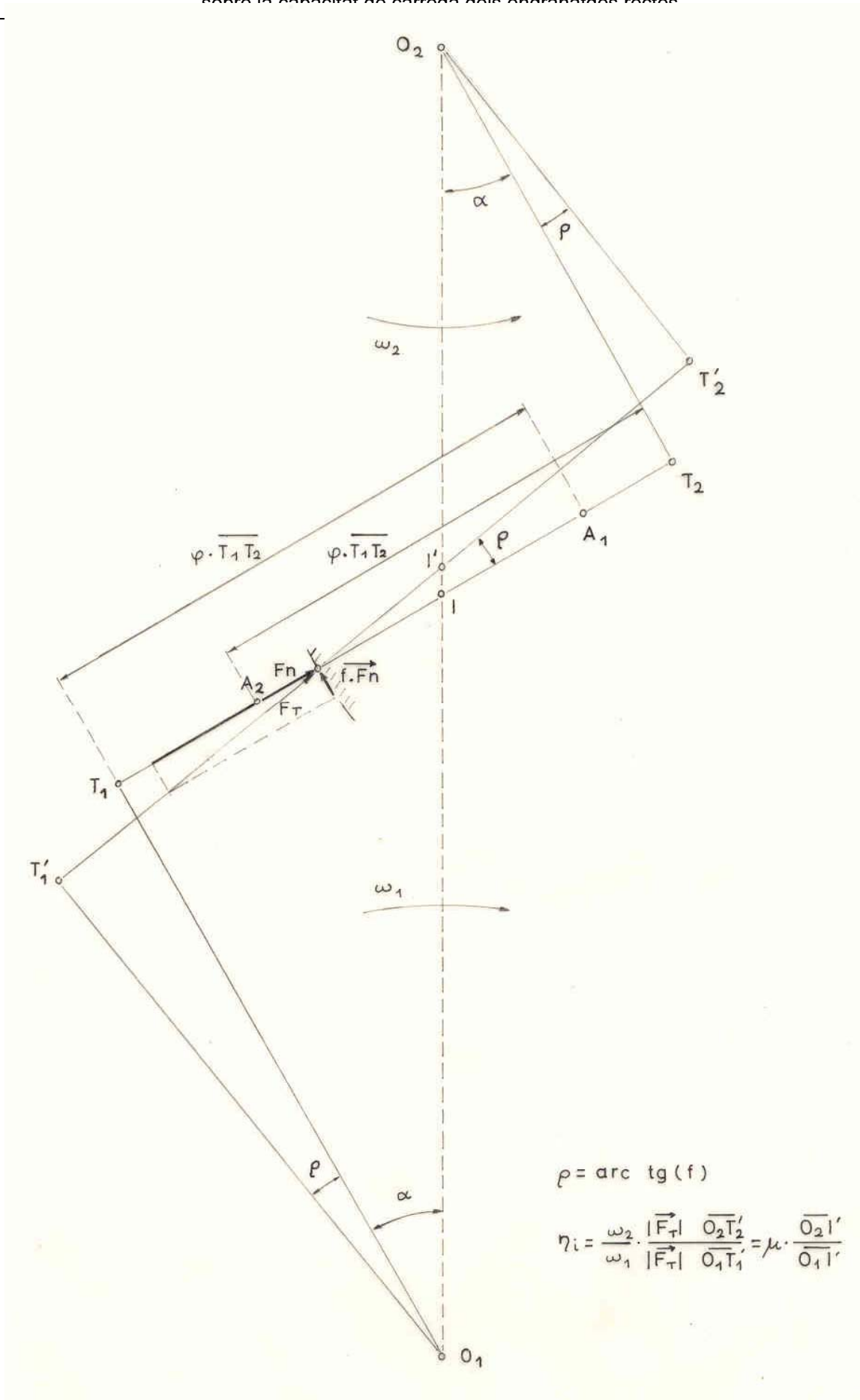


Figura 10

SEGONA PART

OPTIMITZACIÓ PRÒPIAMENT DITA DE L'ENGRANATGE

7. PRIMERA ETAPA D'OPTIMITZACIÓ: REDUCCIÓ DEL NOMBRE DE PARÀMETRES INDEPENDENTS QUE DEFINEIXEN LA FORMA I PROPORCIONS DE LA SECCIÓ FRONTAL DE L'ENGRANATGE

7.1 INTRODUCCIÓ

Segons hem vist en el Cap. 1, la geometria de l'engranatge recte pot ésser definida a partir dels 13 paràmetres independents que reproduïm a continuació:

B	=	Amplada de pinyó i roda
D	=	Distància entre centres
μ	=	Relació de transmissió
Z	=	Nombre de dents suma
α	=	Angle de funcionament
φ_1 i φ_2	=	Factors de cap de pinyó i roda
s_{c1} i s_{c2}	=	Gruixos de cap de pinyó i roda
h_{uc1} i h_{uc2}	=	Altures útils de cap d'eina de pinyó i roda
r_{e1} i r_{e2}	=	Radis d'arrodoniment de cap d'eina de pinyó i roda

En els capítols dedicats a l'optimització (del present en endavant) ens serà més útil de substituir els dos primers paràmetres (B amplada de pinyó i roda, i D distància entre centres) pels dos següents:

$$V = B \cdot D^2 = \text{Paràmetre de volum de l'engranatge}$$
$$\theta = B/D = \text{Paràmetre de proporció de l'engranatge}$$

Aquests dos paràmetres que acabem de definir, determinen les dimensions exteriors de l'engranatge, mentre que els 11 restants en donen la configuració de la seva secció frontal.

En aquest capítol ens proposem d'analitzar alguns criteris d'òptims geomètrics més o menys simples, que permetin establir determinades relacions entre els 11 paràmetres que defineixen la secció frontal de l'engranatge i, així, reduir el nombre d'independents.

Reservem per al capítol proper (Cap. 8) l'estudi de l'optimització dels paràmetres de volum V i de proporció θ en funció de les condicions imposades pels diferents criteris de prevenció dels deterioraments.

7.1.1 ALTURES MÍNIMES DE CAP D'EINA

Analitzem, en primer lloc, les altures de cap que cal donar a les eines. Per un costat, convé que la cavitat del peu de les dents sigui el menys profunda possible, ja: que així serà menys important el moment flector exercit per la força de contacte; però, per altre costat, la cavitat de peu ha de permetre el pas del cap de la dent contrària.

A tal fi, hem fet que l'altura útil del cap de l'eina generadora del pinyó sigui igual a l'altura del cap de la roda, i viceversa; d'aquesta manera, assegurem que el perfil de l'eina generadora del pinyó exclourà en tot moment la dent del pinyó (ja que la genera), però inclourà la de la roda i el mateix raonament podem fer a l'eina de la roda (V. Fig. 2). Aquestes igualtats anteriors s'expressen de la següent manera:

$$h_{uc1} = h_{c2} = \frac{Z_2}{2} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{c2}} - 1 \right) \quad (7.1 a)$$

$$h_{uc2} = h_{c1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{c1}} - 1 \right) \quad (7.1 b)$$

En relacionar-nos h_{uc1} i h_{uc2} amb altres paràmetres coneguts, aquestes dues equacions eliminen 2 paràmetres independents.

Nota: Aquestes dues condicions asseguruen que l'eina talla una zona de perfil útil en el peu de la dent (entre P_1 i P_2 en la Fig. 2) major que el necessari (entre A_1 i A_2 en la Fig. 2). Podríem pensar en reduir les altures útils de cap fi d'assegurar un perfil útil sols fins als punts A_1 i A_2 ; no obstant, hem comprovat que, en la majoria dels casos, aquesta altura no era suficient per a deixar passar el cap de la dent contrària.

7.1.2 RADIS D'ARRODONIMENT MÀXIMS DE CAP D'EINA

Sabem que el coeficient de concentració de tensions millora (disminueix) quan el radi d'arrodoniment de cap de l'eina augmenta. També podem comprovar que el joc de fons de la dent augmenta amb el radi d'arrodoniment de cap d'eina.

Aquestes dues consideracions ens han portat a prendre el radi màxim d'arrodoniment de cap d'eina; o sigui, aquell radi que permeti enllaçar amb un sol arc de circumferència els dos flancs rectes de l'eina de cremallera:

$$r_{e1} = \frac{\frac{s_2}{2} - h_{uc1} \cdot \tan\alpha}{\cos\alpha} \quad (7.1.2 a)$$

$$r_{e2} = \frac{\frac{s_1}{2} - h_{uc2} \cdot \tan\alpha}{\cos\alpha} \quad (7.1.2 b)$$

Aquestes dues relacions eliminen també 2 paràmetres independents.

7.1.3 EQUILIBRIMENT DELS LLISCAMENTS ESPECÍFICS

Segons hem vist en el Cap. 6, el fet d'equilibrar els lliscaments específics en els dos extrems de la zona activa de la línia d'engranament A_1 i A_2 , equival també a equilibrar les temperatures flash en aquests mateixos punts $T_{fA1} = T_{fA2}$; en base a aquest criteri s'obtenen els valors mínims de la temperatura flash en les situacions més desfavorables (punts A_1 i A_2), alhora que permet situar la zona activa de la línia d'engranament.

Aquesta condició condueix a la següent relació entre els factors de cap:

$$\frac{\varphi_2 - 1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1 - 1}{\varphi_1} \cdot \mu^2 \quad (7.1.3 = 1.3 d27)$$

Evidentment, aquesta expressió elimina 1 paràmetre independent.

7.1.4 JOC D'ENTREDENTS NUL

A fi de fer les dents el més resistent possibles, adoptarem els màxims gruixos de dent: això esdevindrà quan el joc d'entredents sigui nul. L'equació que tradueix aquesta condició és la següent:

$$s_1 + s_2 = \pi \quad (7.1.4 \text{ a})$$

o en termes de gruixos de cap:

$$s_{c1} \cdot \cos\alpha_{c1} + s_{c2} \cdot \alpha_{c2} = (\pi + Z \cdot \text{Eva} - (Z_1 \cdot \text{Eva}_{c1} + Z_2 \cdot \text{Eva}_{c2})) \cdot \cos\alpha \quad (7.1.4 \text{ b})$$

Aquesta relació elimina 1 paràmetre independent.

7.1.5 GRUIXOS MÍNIMS DE CAP

Un dels aspectes més interessants que intervenen en la configuració del dentat de l'engranatge recte, és el de la determinació dels gruixos de les dents de pinyó i roda, fet del qual en depèn essencialment la resistència de les dents.

La normalització actualment vigent resol aquest problema a base de repartir el pas primitiu de l'eina en dues parts iguals, les quals corresponen al gruix de la dent de l'eina de pinyó i al gruix de la dent de l'eina de la roda.

Si les dues rodes dentades són tallades sense desplaçar l'eina, en resulta una resistència desfavorable de la dent del pinyó respecte de la dent de la roda, en raó de la major curvatura del flanc del pinyó; els gruixos de cap resultats, generalment estan suficientment allunyats del límit de punta com per a no presentar problemes.

Si el pinyó és tallat amb un desplaçament positiu de l'eina (cas força freqüent), les resistències de la dent del pinyó i la de la roda tendeixen a equilibrar-se; no obstant, però, es corre el perill d'arribar al límit de punta de les dents, sobretot per a nombres de dents petits.

En el present treball hem analitzat el problema des d'un punt de vista més general, ja que no hem pres l'angle de funcionament com un valor fixat per avançat. A base d'aquesta consideració, hem pogut constatar que, per a un problema geomètric concret (relació de transmissió μ , nombre de dents Z , i coeficient de recobriment ε , fixats), l'angle de funcionament α augmenta tant en disminuir el gruix del cap del pinyó com el de la roda o els dos conjuntament (cal tenir en compte que els gruixos primitius han de complir la relació 7.1.1 a); en conseqüència, els radis de curvatura dels flancs augmenten, i la base de les dents es reforça, resultant així, una millora de la resistència dels dentats als tres tipus de deteriorament que hem pres en consideració en aquest estudi.

Tanmateix, teníem el dubte de si calia relacionar els dos gruixos de cap de manera que permetessin equilibrar les resistències dels peus de les dents de pinyó i roda.

A continuació demostrarem que no: la solució òptima s'obté quan tant el gruix de cap del pinyó com el de la roda tenen el mínim valor admissible, malgrat que això condueixi a engranatges desequilibrats des del punt de vista de la resistència a la ruptura, ja que la resistència de la roda dentada més desafavorida en resulta millorada.

A fi d'il·lustrar el que acabem de dir, hem establert un gràfic (V. Gràfic 2) en què, partint d'un determinat engranatge ($\mu = 0,125$, $Z = 300$ i $\varepsilon = 2,0$), amb els dos dentats (pinyó i roda) al límit de punta, hem anat augmentant gradualment el gruix de la dent del pinyó, tot mantenint el gruix de la dent de la roda nul, (meitat esquerra del gràfic) i després, viceversa (meitat dreta del gràfic). Els resultats es donen en termes dels factors geomètrics que es defineixen en el capítol proper: hom constata que els quatre factors geomètrics GR1, GR2, GP i GE disminueixen en acostar-nos a la situació en què els gruixos de cap esdevenen nuls $s_{c1} = s_{c2} = 0$ (les variacions estan donades en percentatges); hom també pot constatar que per aquesta mateixa

configuració obtenim el màxim angle de pressió α , tal com havíem apuntat anteriorment. En cas d'haver partit d'altres dades geomètriques (relació de transmissió, nombre de dents, coeficient de recobriment, i àdhuc uns gruixos de cap mínims s_{c1} i s_{c2} diferents entre ells i majors de zero), el resultat qualitatiu resta el mateix; per tant, el problema queda remès a donar als gruixos de cap el mínim valor admissible.

Des del punt de vista geomètric és lícit d'arribar al límit de punta de la dent; no obstant, simples consideracions sobre la resistència de la punta (V. 3.5) obliguen a prendre un cert marge. La practica habitual en el projecte d'engranatges, voreja aquesta qüestió a base de recomanar un gruix mínim de cap (en mòduls); la bibliografia que hem trobat sobre el tema és molt escassa: es redueix a unes quantes recomanacions referents al perill d'acostar-se al límit de punta quan s'empren desplaçaments positius importants en pinyons de poques dents, les quals no deixen tan sols entreveure si són fruit d'estudis teòrics o de l'experiència. A continuació es donen dues de les recomanacions numèriques:

G. Henriot de 0,2 a 0,3 vegades el mòdul (Ref. 26, Pàg. 235)

Dobrovolski i al. de 0,2 a 0,4 vegades el mòdul (Ref. 18, Pàg. 293)

En els nostres gràfics hem pres els valors mínims de gruix de cap $M_{sc} = 0.3$ tant per al pinyó com per a la roda, la qual cosa no ens sembla excessivament arriscat.

Així, doncs, els dos gruixos de cap queden reduïts a un sol paràmetre: el gruix mínim de cap M_{sc} ; en conseqüència, hem eliminat 1 dels dos paràmetres independents.

Cal tenir en compte que l'elecció del gruix mínim que acabem de fer és fruit del nostre desconeixement sobre el tema; és versemblant de pensar que un coneixement més concís del deteriorament de la punta de la dent permetés reduir els valors mínims dels gruixos de cap de pinyó i roda a termes d'altres paràmetres geomètrics de l'engranatge i, així, eliminar 2 graus de llibertat.

7.2 PARÀMETRES INDEPENDENTS: RESUM

Després de les successives reduccions de paràmetres independents que hem efectuat en els apartats anteriors, els 13 paràmetres independents inicials queden reduïts a 6.

D'entre els conjunts possibles n'hem elegit el següent:

- V = Paràmetre de volum de l'engranatge
- θ = Paràmetre de proporció de l'engranatge j
- μ = Relació de transmissió
- Z = Nombre de dents suma
- ε = Coeficient de recobriment
- M_{sc} = Gruix mínim de cap de pinyó i de roda

En el proper capítol s'estableixen noves relacions entre aquests paràmetres a través de les condicions imposades pels diferents criteris de prevenció dels deterioraments.

8. SEGONA ETAPA D'OPTIMITZACIÓ: CRITERIS PER A LA CERCA DE LES DIMENSIONS EXTERIORS ÒPTIMES

8.1 INTRODUCCIÓ

Tal com hem anunciat en el capítol anterior, a continuació tractarem de relacionar els paràmetres de volum, $V = B \cdot D^2$, i de proporció, $\theta = B/D$, amb els restants paràmetres independents a través de les diferents condicions imposades pels criteris de prevenció dels deterioraments, tot analitzant els criteris que ens permetran obtenir una capacitat de càrrega major o unes dimensions exteriors menors de l'engranatge, en base de donar una configuració geomètrica adequada del seu dentat. Així, doncs, restaran finalment 4 paràmetres geomètrics independents.

La càrrega d'un engranatge es pot expressar en termes de moment efectiu del pinyó M_{e1} , mentre que les dimensions exteriors de l'engranatge es poden expressar en termes de la variable de volum V . El problema d'optimització es pot enunciar de dues maneres:

- Fixat el valor de la variable de volum V obtenir el màxim moment efectiu que pot transmetre el pinyó M_{e1} .
- Fixat el valor del moment efectiu que ha de transmetre el pinyó M_{e1} , obtenir la solució que exigeix un menor valor per a la variable de volum V .

Malgrat que els dos enunciats condueixen a les mateixes solucions òptimes, hem preferit raonar a partir del segon ja que és el problema més freqüent a la pràctica.

8.2 LIMITACIONS IMPOSATS PELS DIFERENTS CRITERIS DE PREVENCIÓ DELS DETERIORAMENTS

En aquest treball hem inclòs l'estudi de la prevenció de tres tipus de deteriorament:

- Ruptura del peu de la dent per fatiga (Capítol 3)
- Formació de picadures en els flancs de les dents (Capítol 4)
- Excoriació (Capítol 5).

El criteri de càlcul adoptat per a la prevenció de la ruptura de les dents per fatiga (V. 3.4) aplicat a cada un dels dos peus de les dents (pinyó i roda) en el punt més desfavorable (punt de contacte únic B_1 per al pinyó, i punt de contacte únic B_2 per a la roda), dóna lloc a les dues condicions següents:

$$\text{Dent del pinyó: } V = B \cdot D^2 \geq LR1 = \frac{M_{e1}}{\sigma_{b1} \cdot K_{b1}} \cdot \frac{1+\mu}{2 \cdot \mu} \cdot Z \cdot Y_{f1} \cdot Y_{c1} \quad (8.2 a)$$

$$\text{Dent de la roda: } V = B \cdot D^2 \geq LR2 = \frac{M_{e1}}{\sigma_{b2} \cdot K_{b2}} \cdot \frac{1+\mu}{2 \cdot \mu} \cdot Z \cdot Y_{f2} \cdot Y_{c2} \quad (8.2 b)$$

El criteri de càlcul adoptat per a la prevenció de les picadures (V. 4.4), aplicat a cada un dels dos flancs en el punt de contacte més desfavorable (punt de contacte únic B_2) condueix a dues condicions més:

$$\text{Flanc del pinyó :} \quad (8.2 c)$$

$$V = B \cdot D^2 \geq LP1 = \frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_{H1}^2 \cdot K_{H1}} \cdot \frac{1+\mu}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{(1-\varphi_1) \cdot \varphi_1 \cdot \tan^2 \alpha + \frac{2 \cdot \pi}{Z} \cdot (2 \cdot \varphi_1 - 1) \cdot \tan \alpha - \left(\frac{2 \cdot \pi}{Z}\right)^2}$$

Flanc de la roda:

$$V = B \cdot D^2 \geq LP2 = \frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_{H2}^2 \cdot K_{H2}} \cdot \frac{1 + \mu}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{(1 - \varphi_1) \cdot \varphi_1 \cdot \tan^2 \alpha + \frac{2 \cdot \pi}{Z} \cdot (2 \cdot \varphi_1 - 1) \cdot \tan \alpha - \left(\frac{2 \cdot \pi}{Z}\right)^2} \quad (8.2.d)$$

Finalment, el criteri de càlcul adoptat per a la prevenció de l'excoriació (V. 5.3), aplicat a un dels dos punts més desfavorables (concretament el punt A₁), dóna lloc a l'última condició següent:

$$B^3 \cdot D^2 \geq LE = \left(\left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^4 \cdot \frac{(M_{e1} \cdot K_r)^3}{E_r \cdot \omega_1^2} \right) \cdot \left(0,62 \cdot \left(\frac{1 + \mu}{\mu} \right)^3 \cdot \frac{(\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{\mu \cdot (1 - \varphi_1)})^4}{\varphi_1 \cdot (1 - \varphi_1)} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \quad (8.2.e)$$

on: B	= Amplada de pinyó i roda	(m)
D	= Distància entre centres	(m)
μ	= Relació de transmissió	
Z	= Nombre de dents suma	
α	= Angle de funcionament	(rad)
φ_1	= Factor de cap de pinyó	
M_{e1}	= Moment efectiu del pinyó	(Nm)
ω_1	= Velocitat angular del pinyó	(rad/s)
σ_{b1} i σ_{b2}	= Esforços admissibles de flexió (pinyó i roda)	(N/m)
σ_{H1} i σ_{H2}	= Esforços admissibles de contacte (pinyó i roda)	(N/m)
E_r	= Mòdul d'elasticitat reduït	(N/m ²)
ΔT_{adm}	= Increment de temperatura admissible	(°C)
f	= Coeficient de fricció	
b_0	= Coeficient de contacte tèrmic	(N/(m·s ^{1/2} ·°C))
K_{b1} i K_{b2}	= Factors de durada de pinyó i roda (ruptura de la dent)	
K_{H1} i K_{H2}	= Factors de durada de pinyó i roda (picadures)	
K_r	= Factor de repartiment	
Y_{c1} i Y_{c2}	= Factors de concentració de tensions de pinyó i roda	
Y_{fi} i Y_{f2}	= Factors de forma de pinyó i roda	

Cada una de les quatre primeres expressions anteriors determina el valor mínim que pot prendre la variable de volum V sense que esdevingui el deteriorament corresponent.

Anomenarem:

- LR1 = Límit de volum de la ruptura del pinyó
- LR2 = Límit de volum de la ruptura de la roda
- LP1 = Límit de volum de les picadures del pinyó
- LP2 = Límit de volum de les picadures de la roda

La cinquena condició determina un límit inferior per el producte B³D², el qual no té un significat immediat. Anomenarem simplement a:

- LE = Límit d'excoriació

Les cinc variables LR1, LR2, LP1, LP2 i LE depenen tant de les dades del problema com de la configuració del dentat; és a base de la modificació d'aquest últim aspecte que obtindrem l'optimització de l'engranatge.

8.3 CRITERIS BÀSICS D'OPTIMITZACIÓ

Les limitacions imposades pels diferents criteris de prevenció dels deterioraments són les següents:

$$\text{Ruptura / picadures: } V = BD^2 \geq V_{op} \quad (8.3 a)$$

$$\text{Excoriació : } B^3D^2 \geq LE \quad (8.3.b)$$

en les quals V_{op} és el valor òptim (mínim) del major dels quatre límits de volum LR1, LR2, LP1, LP2:

$$V_{op} = \text{Mín.Màx (LR1, LR2, LP1, LP2)} \quad (8.3 c)$$

i LE és el límit d'excoriació definit en l'apartat anterior.

Podem trobar-nos amb dos casos:

- a) En primer lloc adoptem el valor òptim del paràmetre de volum V_{op} ; la condició imposada per l'excoriació pot transformar-se en un límit inferior del paràmetre de proporció $\theta = B/D$; a fi de fer-la comparable amb les anteriors, transformarem el producte B^3D^2 de la següent manera:

$$B^3D^2 = (BD^2)^{5/3} \cdot (B/D)^{4/3} = V^{5/3} \cdot \theta^{4/3} \quad (8.3 d)$$

d'on podem deduir que el límit imposat per l'excoriació a la variable de volum és:

$$V \geq LE^{3/5} / \theta^{5/4} \quad (8.3 e)$$

el qual no depèn tan sols de les dades del problema i de la configuració del dentat (tal com en els quatre límits anteriors), sinó també de la variable θ . Això significa que, a base de prendre un valor de la variable de proporció e suficientment gran, sempre podrem aconseguir que el valor de la variable de volum V necessari per a prevenir l'excoriació sigui, com a màxim, igual al valor òptim de la variable de volum segons els criteris de ruptura i picadures: en d'altres paraules, amb un paràmetre de proporció $\theta = B/D$ suficientment gran, podem fer que l'excoriació no sigui crítica. El valor mínim necessari θ_{min} , el definim a base de la igualtat entre el límit imposat per l'excoriació a la variable de volum i el valor òptim de la variable de volum segons els criteris de ruptura i picadures:

$$LE^{3/5} / \theta_{min}^{4/5} = V_{op} \quad (8.3 f)$$

d'on se'n dedueix que:

$$\theta_{min} = LE^{3/4} / V_{op}^{5/4} \quad (8.3 g)$$

En aquest primer cas suposem que aquest valor mínim del paràmetre de proporció és perfectament compatible amb les exigències constructives del problema. Es el cas que es presenta freqüentment, i per al qual hem previst els gràfics d'optimització.

En aquest primer cas, és útil de fer la següent transformació:

$$b = \frac{B}{\sqrt[3]{V_{op}}} \quad \text{i} \quad d = \frac{D}{\sqrt[3]{V_{op}}} \quad (8.3 h)$$

gràcies a la qual cosa, l'equació $V = BD^2 = V_{op}$ es transforma en:

$$b \cdot d^2 = 1 \quad (8.3 \text{ i})$$

qual és una hipèrbola cúbica única per a qualsevol problema (Veure la seva representació en el Gràfic 4). Tot punt d'aquesta corba comprès en la zona en què $\theta \geq \theta_{\min}$, constitueix una solució vàlida del problema: sols cal afectar els valors de b i d corresponents al punt elegit pel factor $V_{op}^{1/3}$ a fi d'obtenir l'amplada B i la distància entre centres D reals.

- b) En aquest segon cas també adoptem inicialment el valor òptim del paràmetre de proporció; no obstant, suposem que raons constructives obliguen a prendre un paràmetre de proporció θ menor que θ_{\min} ; en aquest cas, l'excoriació esdevé el deteriorament crític, i cal prendre un valor del paràmetre de volum V major que V_{op} (El Gràfic 4 il·lustra aquest fet a base de calcular els valors de V a través de l'expressió 8.3.e). Tal com podem comprovar, la solució empitjora ràpidament en disminuir el valor de θ , per la qual cosa sembla recomanable d'evitar sempre que sigui possible aquest tipus de solucions.

Pot donar-se el cas que se'ns imposi una distància entre centres D_0 que doni lloc a una amplada B insuficient ($B/D < \theta_{\min}$); la solució d'aquest problema exigeix un valor del paràmetre de volum major que l'òptim; podríem seguir el següent camí:

$$B^3 \cdot D_0^2 \geq LE \quad \text{d'on} \quad B \geq \left(\frac{LE}{D_0^2} \right)^{1/3} \quad (8.3 \text{ j})$$

Atès que a través dels gràfics d'optimització (Veure Cap. 9) no obtenim LE , sinó θ_{\min} i V_{op} , a base de la relació:

$$LE = \theta_{\min}^{4/3} \cdot V_{op}^{5/3} \quad (8.3 \text{ k})$$

obtenim finalment:

$$B \geq \left(\frac{\theta_{\min}^{4/3} \cdot V_{op}^{5/3}}{D_0^2} \right)^{1/3} \quad (8.3 \text{ l})$$

8.4 FACTORS GEOMÈTRICS I FACTORS DE TREBALL

Cada un dels quatre límits de volum $LR1$, $LR2$, $LP1$, i $LP2$, així com el límit d'excoriació LE , inclouen termes que depenen de la configuració dels dentats de l'engranatge (o sigui, del punt del camp d'existència sota consideració), i termes que depenen de les dades del problema.

i A fi de poder determinar quina és la influència de la configuració geomètrica del dentat sobre les limitacions dels diferents deterioraments, i poder estudiar així el punt del camp d'existència que ofereix una millor solució geomètrica del problema, hem pensat que era convenient d'agrupar aquests dos tipus de termes en dos factors diferents. Així, tindrem per a cada una de les cinc condicions de prevenció dels deterioraments:

- Un factor geomètric que agrupa els termes que depenen de la geometria, el qual serà variable al llarg del procés d'optimització.
- Un factor de treball que agrupa els termes restants, depenents de les dades del problema, el qual serà constant al llarg del procés d'optimització.

Passem tot seguit a definir cada un dels factors geomètrics i dels factors de treball:

Ruptura de la dent del pinyó: $LR1 = GR1 \cdot TR1$

$$\text{Factor geomètric: } GR1 = \frac{1+\mu}{2 \cdot \mu} \cdot Z \cdot Y_{f1} \cdot Y_{c1} \quad (8.4 \text{ a})$$

$$\text{Factor de treball: } TR1 = \frac{M_{e1}}{\sigma_{b1} \cdot K_{b1}} \quad (8.4 \text{ b})$$

Ruptura de la dent de la roda: $LR2 = GR2 \cdot TR2$

$$\text{Factor geomètric: } GR2 = \frac{1+\mu}{2 \cdot \mu} \cdot Z \cdot Y_{f2} \cdot Y_{c2} \quad (8.4 \text{ c})$$

$$\text{Factor de treball: } TR2 = \frac{M_{e1}}{\sigma_{b2} \cdot K_{b2}} \quad (8.4 \text{ d})$$

Picadures del flanc del pinyó: $LP1 = GP \cdot TP1$

$$\text{Factor geomètric: } GP1 = \frac{\frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}}{(1-\varphi_1) \cdot \varphi_1 \cdot \tan^2 \alpha + \frac{2 \cdot \pi}{Z} \cdot (2 \cdot \varphi_1 - 1) \cdot \tan \alpha - \left(\frac{2 \cdot \pi}{Z}\right)^2} \quad (8.4 \text{ e})$$

$$\text{Factor de treball: } TP1 = \frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_{H1}^2 \cdot K_{H1}} \quad (8.4 \text{ f})$$

Picadures del flanc de la roda: $LP2 = GP \cdot TP2$

Factor geomètric: $GP2 = GP1 = \text{cas anterior}$

$$\text{Factor de treball: } TP2 = \frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_{H2}^2 \cdot K_{H2}} \quad (8.4 \text{ g})$$

Excoriació: $LE = GE \cdot TE$

$$\text{Factor geomètric: } GE = 0,1477 \cdot \left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^3 \cdot \frac{(\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{\mu \cdot (1-\varphi_1)})^4}{\varphi_1 \cdot (1-\varphi_1)} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (8.4 \text{ h})$$

$$\text{Factor de treball: } TE = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0}\right)^4 \cdot (M_{e1} \cdot K_r)^3 \cdot E_r \cdot \omega_1^2 \quad (8.4 \text{ i})$$

8.5 DELIMITACIÓ ENTRE ZONES CRÍTIQUES ALS DIFERENTS DETERIORAMENTS

En els punts del camp d'existència de l'engranatge en què els dels límits de volum s'igualen, podem afirmar que l'engranatge és igualment crític als dos deterioraments corresponents; o sigui, el valor de la variable de volum V mínim necessari per a prevenir els dos deterioraments, és el mateix.

Així, doncs, la comparació entre diferents límits de volum ens permetrà determinar les diferents zones del camp d'existència de l'engranatge en què és crític un deteriorament o un altre.

Aquest serà l'objecte dels propers apartats:

8.5.1 COMPARACIÓ ENTRE ELS LÍMITS DE VOLUM LR1 I LR2

La igualtat entre els límits de volum LR1 i LR2 determina el límit de separació entre la zona crítica a la ruptura del pinyó i la zona crítica a la ruptura de la dent de la roda:

$$LR1 = LR2 \quad \text{o també} \quad GR1 \cdot TR1 = GR2 \cdot TR2 \quad (8.5.1)$$

A partir de les definicions següents:

$GRR = GR1/GR2$ Relació geomètrica (ruptura pinyó / ruptura roda), funció de la geometria de l'engrenatge

$TRR = TR2/TR1$ Factor de comparació (ruptura pinyó / ruptura roda), funció de les dades del problema

podrem establir les següents zones en el camp d'existència de l'engrenatge:

si $GRR \geq TRR$ Serà crítica la ruptura de la dent del pinyó i determinant el valor del límit de volum $LR1 = GR1 \cdot TR1$

si $GRR = TRR$ Seran igualment crítiques la ruptura de la dent del pinyó i la de la roda; és equivalent de prendre els límits de volum $LR1$ o $LR2$

si $GRR \leq TRR$ Serà crítica la ruptura de la dent de la roda, i determinant el valor del límit de volum $LR2 = GR2 \cdot TR2$

Anomenarem d'una manera simplificada LR (límit de volum de ruptura) al major dels dos valors dels límits de volum $LR1$ i $LR2$; o sigui: $LR = \max. (LR1, LR2)$.

8.5.2 COMPARACIÓ ENTRE ELS LÍMITS DE VOLUM $LP1$ I $LP2$

La igualtat entre els límits de volum $LP1$ i $LP2$ determina el límit de separació entre la zona crítica a les picadures del flanc del pinyó i la zona crítica a les picadures en el flanc de la roda:

$$LP1 = LP2 \quad \text{o també} \quad GP \cdot TP1 = GP \cdot TP2 \quad (8.5.2)$$

A partir de la definició següent:

$TPP = TP2/TP1$ Factor de comparació (picadures pinyó / picadures roda), funció de les dades del problema

podrem establir les següents zones en el camp d'existència de l'engrenatge:

si $1 \geq TPP$ Serà crítica la formació de picadures en el flanc del pinyó, i determinant el valor del límit de volum $LP1 = GP \cdot TP1$

si $1 = TPP$ Seran igualment crítiques la formació de picadures en el flanc de la roda i en el flanc del pinyó; és equivalent prendre els límits de volum $LP1$ o $LP2$

si $1 \leq TPP$ Serà crítica la formació de picadures en el flanc de la roda, i determinant el valor del límit de volum $LP2 = GP \cdot TP2$

Anomenarem d'una manera simplificada LP (límit de volum de picadures) al major dels dos valors dels límits de volum $LP1$ i $LP2$; o sigui: $LP = \max. (LP1, LP2)$. També podem definir un factor de treball de picadures TP tal que sigui el major dels dos valors $TP1$ i $TP2$; o sigui: $TP = \max. (TP1, TP2)$. Podrem establir finalment, que $LP = GP \cdot TP$.

La delimitació entre la zona crítica a les picadures del flanc del pinyó i la zona crítica a les picadures del flanc de la roda, sols depèn de les dades del problema; d'ara endavant, només parlarem de límit de volum de picadures LP i de factor de treball de picadures TP .

8.5.3 COMPARACIÓ ENTRE ELS LÍMITS DE VOLUM LP I LR

Hi ha zones del camp d'existència de l'engranatge en què hi ha major perill de formació de picadures (és major LP que LR), i zones en què és major el perill de ruptura (és major LR que LP).

Suposem en primer lloc, que és crítica la ruptura de la dent del pinyó en front de la de la roda ($GRR \geq CRR$). En aquest cas, el límit de separació entre la zona crítica a la formació de picadures i la zona crítica a la ruptura de la dent del pinyó, ve donat per la següent igualtat:

$$LP = LR1 \quad \text{o també} \quad GP \cdot TP = GR1 \cdot TR1 \quad (8.5.3)$$

A partir de les definicions següents:

$GPR1 = GP/GR1$ Relació geomètrica (picadures / ruptura pinyó), funció de la geometria de l'engranatge

$TPR = TR1/TP$ Factor de comparació (picadures / ruptura pinyó), funció de les dades del problema

podrem establir les següents zones en el camp d'existència de l'engranatge:

si $GPR1 \geq TPR1$ Serà crítica la formació de picadures, i determinant el límit de volum $LP = GP \cdot TP1$

si $GPR1 = TPR1$ Seran igualment crítiques la formació de picadures i la ruptura de la dent del pinyó; és equivalent de prendre els límits de volum LP o LR1

si $GPR1 \leq TPR1$ Serà crítica la ruptura de la dent del pinyó, i determinant el límit de volum $LR1 = GR1 \cdot TR1$

En cas que la ruptura de la dent de la roda fos més crítica que la del pinyó ($GRR \leq CRR$), seguiríem un raonament anàleg, havent definit prèviament, però:

$R2 = GP/GR2$ Relació geomètrica (picadures / ruptura roda), funció de la geometria de l'engranatge

$R2 = TR2/TP$ Factor de comparació (picadures / ruptura roda), funció de les dades del problema

8.5.4 DETERMINACIÓ DEL VALOR MÍNIM DEL PARÀMETRE DE PROPORCIÓ

En l'apartat 8.3 hem establert la conveniència que l'excoriació no sigui el deteriorament determinat, ja que d'aquest fet se'n derivaria l'exigència d'un valor elevat del paràmetre de volum. Aquesta condició, suposant que ens trobem en el punt corresponent a la solució òptima des del punt de vista de la ruptura i les picadures, s'expressaria de la següent manera:

$$\theta_{\min} = LE^{3/4} / V_{op}^{5/4} \quad \text{on:} \quad LE = GE \cdot TE \quad (8.5.4 \text{ a})$$

Tal com comprovarem en el capítol 9, els gràfics d'optimització no ens proporcionaran valors de l'òptim del paràmetre de volum V_{op} , sinó valors dels factors geomètrics o de les seves relacions.

Donat que V_{op} , segons els casos, pot identificar-se amb cada un dels límits de volum LR1, LR2 o LP, establirem les expressions per a cada un d'ells:

- a) Si $GRR \geq TRR$ i $GPR1 \leq TPR1$, serà determinant la ruptura de la dent del pinyó; tindrem, llavors: $V_{op} = LR1$.

$$\theta_{\min} = \frac{LE^{3/4}}{LR1^{5/4}} = \frac{GE^{3/4}}{GR1^{5/4}} \cdot \frac{TE^{3/4}}{TR1^{5/4}} = GER1 \cdot TER1 \quad (8.5.4 \text{ b})$$

- b) Si $GRR \leq TRR$, i $GFR2 \leq TPR2$, serà determinant la ruptura de la dent de la roda; tindrem, llavors: $V_{op} = LR2$

$$\theta_{\min} = \frac{LE^{3/4}}{LR2^{5/4}} = \frac{GE^{3/4}}{GR2^{5/4}} \cdot \frac{TE^{3/4}}{TR2^{5/4}} = GER2 \cdot TER2 \quad (8.5.4 \text{ c})$$

- c) Si $GPRI \geq TPRI$, i $GPR2 \geq TPR2$, serà determinant la formació de picadures; tindrem, llavors: $V_{op} = LP$

$$\theta_{\min} = \frac{LE^{3/4}}{LP^{5/4}} = \frac{GE^{3/4}}{GP^{5/4}} \cdot \frac{TE^{3/4}}{TP^{5/4}} = GEP \cdot TEP \quad (8.5.4 \text{ d})$$

Per analogia als casos anteriors, hem fet ús de les següents definicions:

$GER1 = \frac{GE^{3/4}}{GR1^{5/4}}$	Relació geomètrica (excoriació / ruptura pinyó), funció de la geometria de l'engranatge
$GER2 = \frac{GE^{3/4}}{GR2^{5/4}}$	Relació geomètrica (excoriació / ruptura roda), funció de la geometria de l'engranatge
$GEP = \frac{GE^{3/4}}{GP^{5/4}}$	Relació geomètrica (excoriació / picadures), funció de la geometria de l'engranatge
$TER1 = \frac{TE^{3/4}}{TR1^{5/4}}$	Factor de comparació (excoriació / ruptura del pinyó), funció de les dades del problema
$TER2 = \frac{TE^{3/4}}{TR2^{5/4}}$	Factor de comparació (excoriació / ruptura de la roda), funció de les dades del problema
$TEP = \frac{TE^{3/4}}{TP^{5/4}}$	Factor de comparació (excoriació / picadures), funció de les dades del problema.

8.6 ANÀLISI DELS DIFERENTS FACTORS DE COMPARACIÓ

8.6.1 FACTORS DE COMPARACIÓ TRR I TPP

Aquests dos factors s'expressen de la següent manera:

$$TRR = \frac{TR2}{TR1} = \frac{\frac{M_{e1}}{\sigma_{b2} \cdot K_{b2}}}{\frac{M_{e1}}{\sigma_{b1} \cdot K_{b1}}} = R\sigma_b \cdot RK_b \quad (8.6.1 \text{ a})$$

$$TPP = \frac{TP2}{TP1} = \frac{\frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_{H2} \cdot K_{H2}}}{\frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_{H1} \cdot K_{H1}}} = R\sigma_H^2 \cdot RK_b \quad (8.6.1 \text{ b})$$

on: $GER1 = \frac{GE^{3/4}}{GR1^{5/4}} =$ Relació d'esforços a flexió admissible s

$GER2 = \frac{GE^{3/4}}{GR2^{5/4}} =$ Relació d'esforços de contacte admissible s

$$GEP = \frac{GE^{3/4}}{GP^{5/4}} = \text{Relació de durada (ruptura)}$$

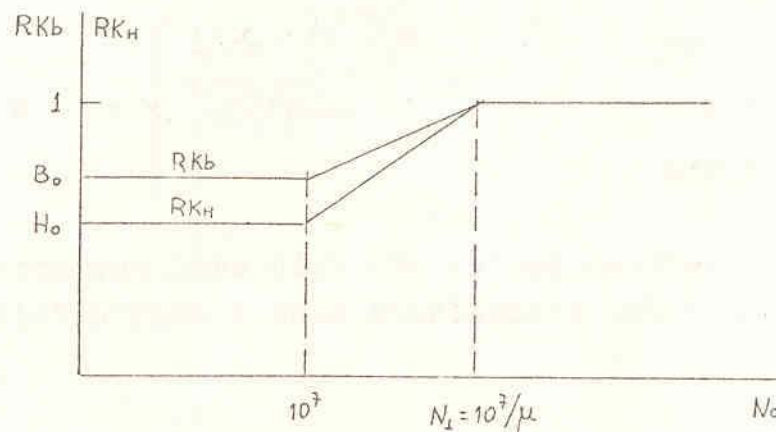
$$TER1 = \frac{TE^{3/4}}{TR1^{5/4}} = \text{Relació de durada (picadures)}$$

Segons la llargada de la vida, les relacions de durada RK_b i RK_H poden expressar-se de la següent manera (N_0 = Nombre de cicles de vida):

$$RK_b = \begin{cases} \sqrt[10]{\mu} & \text{per a } N_0 \leq 10^7 \\ \sqrt[10]{\mu \cdot N_0 / 10^7} & \text{per a } 10^7 < N_0 \leq 10^7 / \mu \\ 1 & \text{per a } N_0 \geq 10^7 / \mu \end{cases}$$

$$RK_H = \begin{cases} \sqrt[6]{\mu} & \text{per a } N_0 \leq 10^7 \\ \sqrt[6]{\mu \cdot N_0 / 10^7} & \text{per a } 10^7 < N_0 \leq 10^7 / \mu \\ 1 & \text{per a } N_0 \geq 10^7 / \mu \end{cases}$$

La representació gràfica de RK_b i RK_H en funció del nombre de cicles de vida N_0 és:



On els valors de N_1 , B_0 i H_0 són funció de la relació d'engranament μ i poden trobar-se en la taula que donem a continuació:

Taula 1

μ	N_1	$B_0 = \sqrt[10]{\mu}$	$H_0 = \sqrt[6]{\mu}$	$1/\sqrt{H_0}$
1	10	1,000	1,000	1,000
0,5	2·10	0,933	0,890	1,059
0,25	4·10	0,870	0,793	1,122
0,125	8·10	0,812	0,707	1,189

Veiem, doncs, que la variació que sofreixen els factors de comparació TRR i TPP, causada pels diferents valors que poden prendre els factors de durada, es mou dintre d'un marge relativament estret: entre B_0 i 1 el TRR, i entre H_0 i 1 el TPP.

Per equilibrar les resistències a la formació de picadures en els flancs de pinyó i roda, cal fer que $TPP = 1$, o sigui:

$$TPP = R\sigma_H^2 \cdot RK_H = 1 \quad (8.6.1 c)$$

d'on se'n dedueix que:

$$R\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{RK_H}} \quad (8.6.1 d)$$

Per tant:

$$R\sigma_H = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{H_0}} = \frac{1}{\sqrt[12]{\mu}} & \text{per a } N_0 \leq 10^7 \\ \sqrt[12]{\frac{10^7}{\mu \cdot N_0}} & \text{per a } 10^7 < N_0 \leq 10^7 / \mu \\ 1 & \text{per a } N_0 \geq 10^7 / \mu \end{array} \right\}$$

Comprovarem que tots ells són valors compresos entre 1 i 1.19 (G. Henriot arriba a unes conclusions anàlogues (Ref. 26, pàg. 377).

En el càlcul d'engranatges normalitzats, també pot establir-se una dependència entre la relació d'esforços de flexió admissibles $R\sigma_b$ i la relació d'engranament μ , a fi d'igualar les resistències a la ruptura de la dent del pinyó i de la dent de la roda. Els valors de $R\sigma_b$ oscil·len entre 1 i 1,45. (Ref. 26, pàg. 349).

En el nostre cas s'hauria de complir la següent igualtat:

$$TRR = R\sigma_b \cdot RK_b = GRR \quad \text{o bé} \quad R\sigma_b = GRR / RK_b$$

A base dels resultats obtinguts a través de l'ordenador, hem pogut comprovar que, per a la major part del camp d'existència de l'engranatge (especialment en el que podríem dir útil), el factor geomètric GRR pren valors inferiors a la unitat; en conseqüència, caldria, en general, prendre valors de la relació d'esforços a flexió $R\sigma_b$ també inferiors a la unitat (o sigui, un material més resistent per a la roda que per al pinyó) a fi d'equilibrar la resistència e la ruptura de pinyó i roda.

En conclusió:

– Seria convenient prendre un material d'igual o major resistència al contacte per al pinyó que per a la roda a fi d'igualar el perill de formació de picadures sobre els flancs.

– I, per contra, seria convenient prendre un material en general més resistent a la ruptura per a la roda que per al pinyó a fi d'igualar el perill de ruptura de les dents.

Donat que aquestes dues característiques (resistència al contacte i resistència a la ruptura) van més o menys lligades, no és probable poder trobar una parella de materials que compleixi les condicions anteriors. Pensem, doncs, que la millor solució consisteix en prendre el mateix material tant per al pinyó como per a la roda: $R\sigma_b = 1$ i $R\sigma_H = 1$.

En aquest cas tindrem:

1. Per a vides curtes ($N_0 < 10^7 / \mu$):
Ruptura: en general és més crítica la dent de la roda
Picadures: és més crític el flanc del pinyó

2. Per a vides llargues ($N_0 \geq 10^7/\mu$):
Ruptura: en general, és més crítica la dent de la roda
Picadures: són igualment crítics el flanc del pinyó i el de la roda.

8.6.2 FACTOR DE COMPARACIÓ TPR

En principi podríem distingir quatre factors del tipus TPR, segons utilitzéssim els factors de treball TR1, TR2, TP1 i TP2; les definicions que en resultarien, així com les seves expressions serien:

$$TP1R1 = \frac{TR1}{TP1} = \frac{\sigma_{H1}^2 \cdot K_{H1}}{\sigma_{b1} \cdot K_{b1} \cdot E_r} \quad (8.6.2a)$$

$$TP2R1 = \frac{TR1}{TP2} = \frac{\sigma_{H2}^2 \cdot K_{H2}}{\sigma_{b1} \cdot K_{b1} \cdot E_r} \quad (8.6.2b)$$

$$TP1R2 = \frac{TR2}{TP1} = \frac{\sigma_{H1}^2 \cdot K_{H1}}{\sigma_{b2} \cdot K_{b2} \cdot E_r} \quad (8.6.2c)$$

$$TP2R2 = \frac{TR2}{TP2} = \frac{\sigma_{H2}^2 \cdot K_{H2}}{\sigma_{b2} \cdot K_{b2} \cdot E_r} \quad (8.6.2d)$$

Totes elles sols difereixen en si es prenen les característiques del pinyó o de la roda; si suposem, tal com se'n desprèn de l'apartat anterior, que el material del pinyó i de la roda són el mateix, podrem adoptar un únic valor pels esforços admissibles de flexió σ_b i un únic valor pels esforços admissibles de contacte σ_H ; si, a més, les vides són suficientment llargues, tots els factors de durada prendran per valor la unitat; en aquest cas podrem adoptar una única fórmula simplificada per aquest factor de comparació:

$$TPR = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_b \cdot E_r} \quad (8.6.2e)$$

Quan exposem els resultats veurem que aquest factor és determinant en el moment d'obtenir el valor òptim del paràmetre de volum.

A fi de tenir una referència dels valors que pot prendre el factor de comparació TPR en funció de la qualitat i duresa de l'acer, hem obtingut els valors que exposem en forma de taula, extrets de les recomanacions donades per les normes AGMA 220.02 i 210.02. Hem pres en tots els casos el valor del mòdul d'elasticitat reduït: $E_r = 2,26 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ (coeficient de Poisson $\nu = 0.3$).

Taula 2. Valors orientatius per al factor de comparació TPR

Acers (duresa)	σ_b (N/m ²)	σ_H (N/m ²)	TPR
Tremp total			
200 Brinell	$1,88 \cdot 10^8$	$6,6 \cdot 10^8$	0,0102
250 Brinell	$2,23 \cdot 10^8$	$7,9 \cdot 10^8$	0,0124
300 Brinell	$2,51 \cdot 10^8$	$9,2 \cdot 10^8$	0,0149
350 Brinell	$2,72 \cdot 10^8$	$10,5 \cdot 10^8$	0,0179
400 Brinell	$2,93 \cdot 10^8$	$11,8 \cdot 10^8$	0,0210
450 Brinell	$3,07 \cdot 10^8$	$13,2 \cdot 10^8$	0,0251

Carburitzats			
55 Rockwell	$3,80 \cdot 10^8$	$13,8 \cdot 10^8$	0,0221
60 Rockwell	$4,14 \cdot 10^8$	$15,8 \cdot 10^8$	0,0257

8.5.3 FACTORS DE COMPARACIÓ TER I TEP

Anàlogament a l'apartat anterior, podríem determinar dues expressions per al factor de comparació TER, i dues per al factor de comparació TEP; aquestes serien:

$$TER1 = \frac{TE^{3/4}}{TR1^{5/4}} = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^3 \cdot M_{e1} \cdot (E_r^3 \cdot \sigma_{b1}^5 \cdot K_r^9 \cdot K_{b1}^5 \cdot \omega_1^6)^{1/4} \quad (8.6.3a)$$

$$TER2 = \frac{TE^{3/4}}{TR2^{5/4}} = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^3 \cdot M_{e1} \cdot (E_r^3 \cdot \sigma_{b2}^5 \cdot K_r^9 \cdot K_{b2}^5 \cdot \omega_1^6)^{1/4} \quad (8.6.3b)$$

$$TEP1 = \frac{TE^{3/4}}{TP1^{5/4}} = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^3 \cdot M_{e1} \cdot \left(\frac{\sigma_{H1}^{10}}{E_r^2} \cdot K_r^9 \cdot K_{H1}^5 \cdot \omega_1^6 \right)^{1/4} \quad (8.6.3c)$$

$$TEP2 = \frac{TE^{3/4}}{TP2^{5/4}} = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^3 \cdot M_{e1} \cdot \left(\frac{\sigma_{H2}^{10}}{E_r^2} \cdot K_r^9 \cdot K_{H2}^5 \cdot \omega_1^6 \right)^{1/4} \quad (8.6.3d)$$

Evidentment, si fem les mateixes suposicions en quant a materials i vides que en l'apartat anterior, aquestes quatre expressions es redueixen a les dues següents:

$$TER = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^3 \cdot M_{e1} \cdot (E_r^3 \cdot \sigma_b^5 \cdot K_r^9 \cdot \omega_1^6)^{1/4} \quad (8.6.3e)$$

$$TEP = \left(\frac{f}{\Delta T_{adm} \cdot b_0} \right)^3 \cdot M_{e1} \cdot \left(\frac{\sigma_H^{10}}{E_r^2} \cdot K_r^9 \cdot \omega_1^6 \right)^{1/4} \quad (8.6.3f)$$

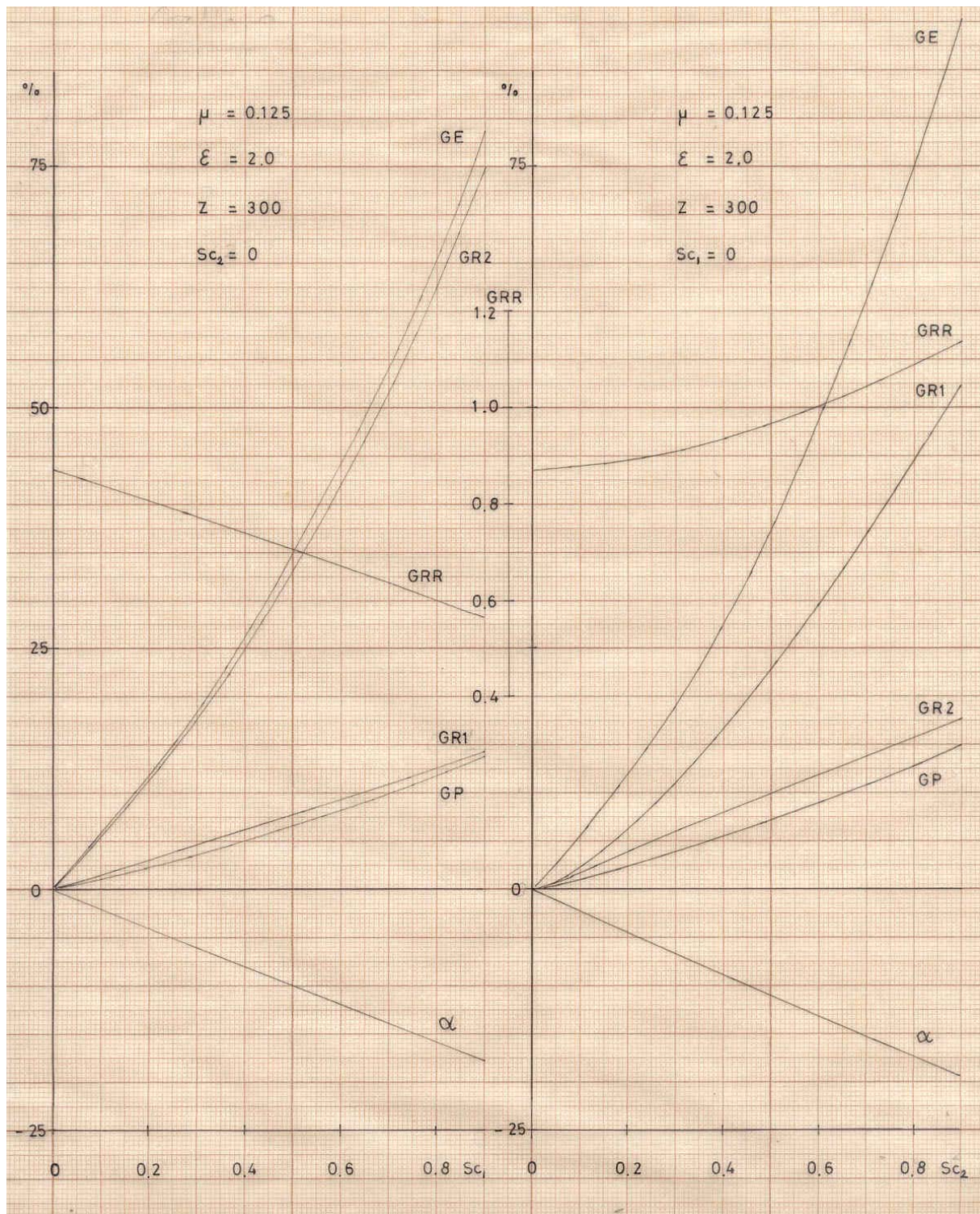
El valor mínim del paràmetre de proporció θ_{min} , serà proporcional a algun d'aquests dos factors de comparació; observem, doncs, que tant l'un com l'altre augmenten quan:

- El moment efectiu del pinyó M_{e1} augmenta (directament proporcional)
- La velocitat angular del pinyó ω_1 augmenta (segons la potència 3/2)
- Les característiques resistents del material milloren.

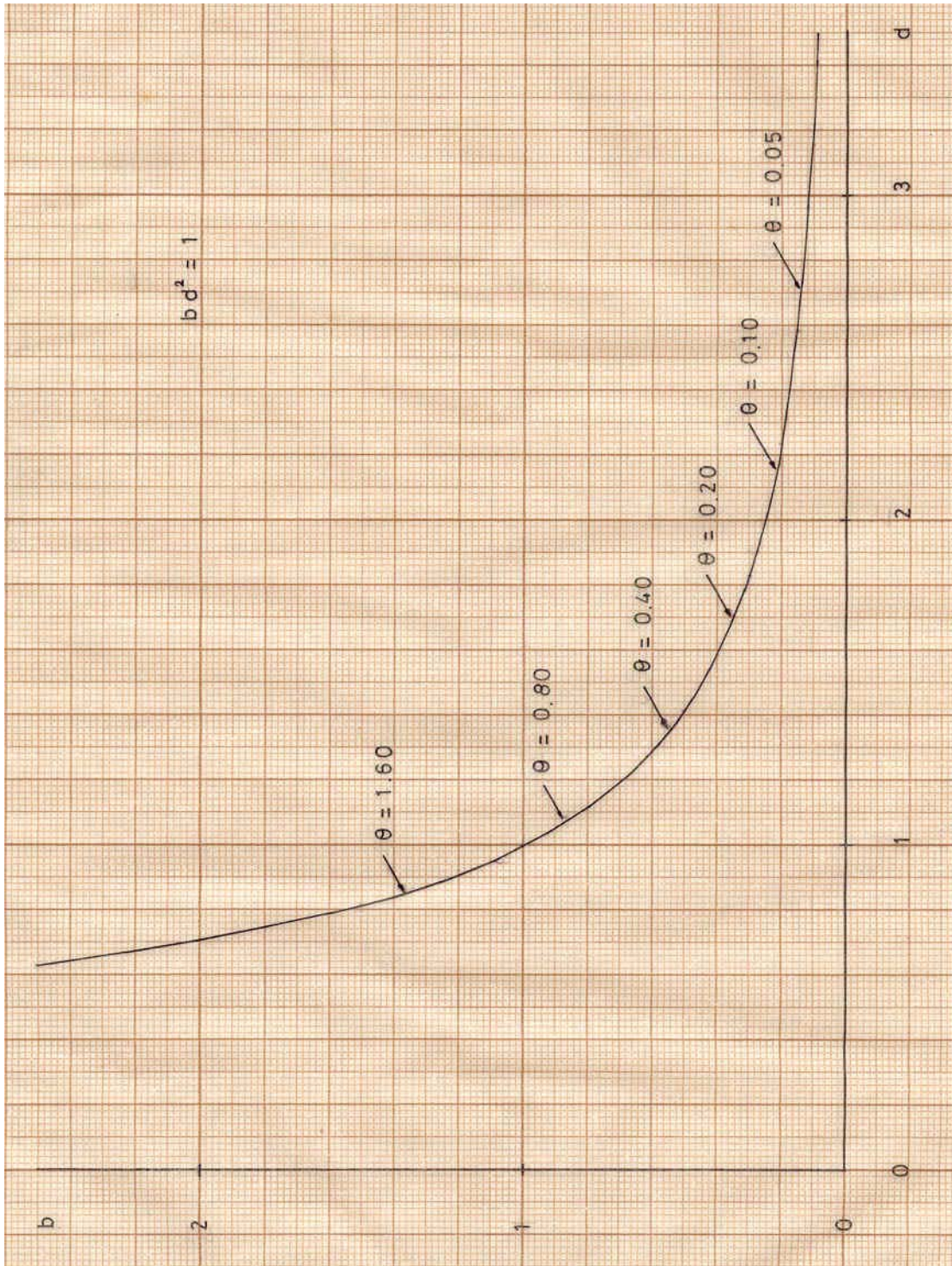
Per contra, pot disminuir quan:

- L'increment admissible de temperatura ΔT_{adm} augmenta (segons la potència 3); això depèn essencialment de les característiques i els additius del lubricant
- El factor de repartiment K_r disminueix (major repartiment)
- El coeficient de fricció f disminueix (també segons la potència 3): aspecte que depèn essencialment del lubricant i de l'acabat superficial

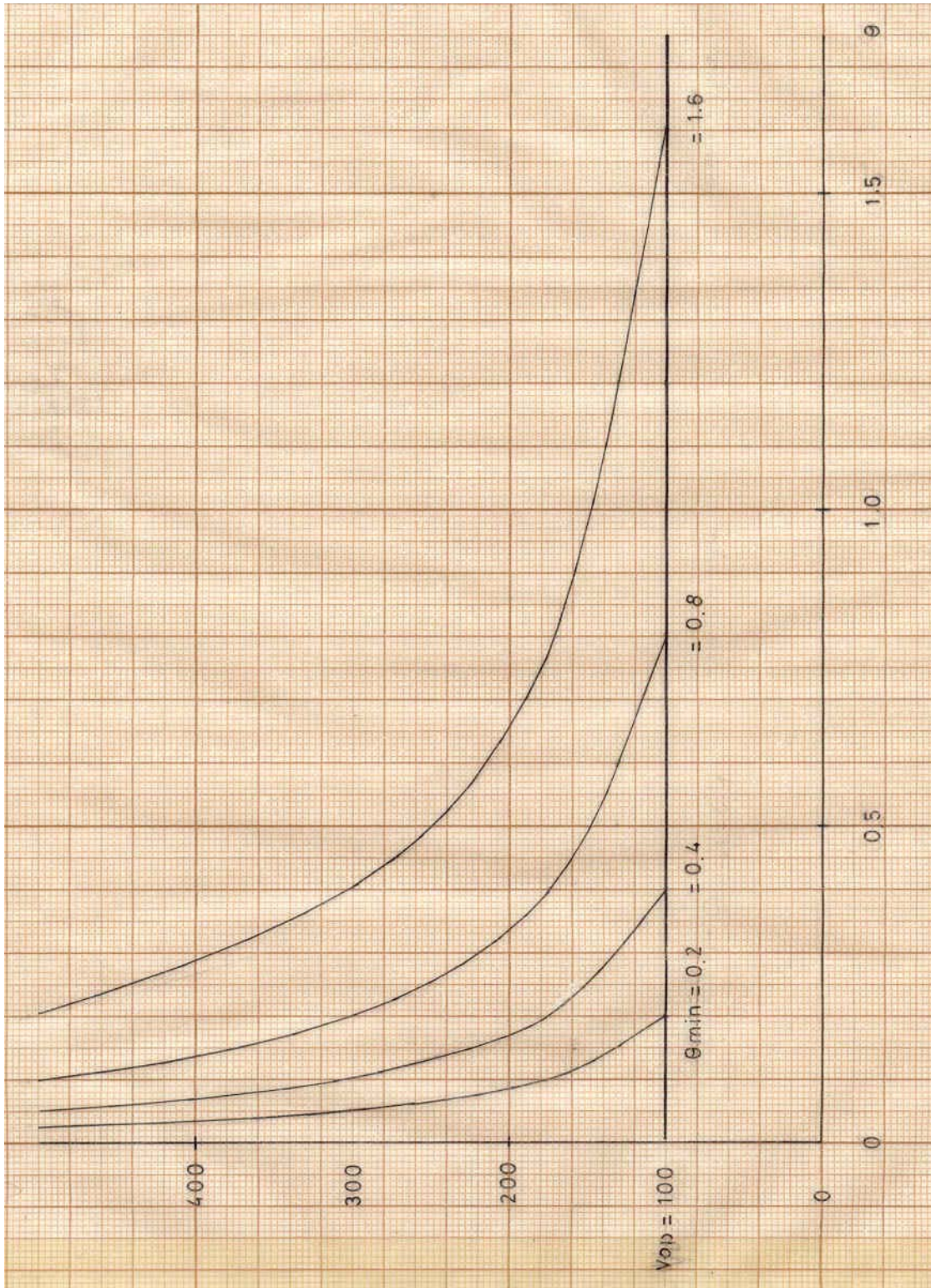
Finalment, tant el coeficient de contacte tèrmic b_0 com el mòdul d'elasticitat reduït E_r , són constants que no poden ésser modificades.



Gràfic 2



Gràfic 3



Gràfic 4

9. GRÀFICS D'OPTIMITZACIÓ I RESULTATS

9.1 GRÀFICS D'OPTIMITZACIÓ

Segons hem explicat en el capítol anterior, el procés d'optimització d'un engranatge consistirà en trobar el valor mínim que pot prendre la variable de volum (V_{op}), així com el valor mínim que podem donar a la variable de proporció (θ_{\min}) sense que l'excoriació esdevingui determinant.

Per al primer aspecte cal conèixer els valors dels límits de volum LR1, LR2, LP1, i LP2, i per tant, cal tenir informació sobre els factors geomètrics GR1, GR2 i GP.

Per al segon aspecte cal tenir informació sobre els valors dels factors de comparació TER1, TER2, i TEP, així com sobre les relacions geomètriques GER1, GER2 i GEP.

Tant els factors geomètrics GR1, GR2 i GP com les relacions geomètriques GER1, GER2 i GEP són funció de la forma del dentat i, per tant, de les quatre variables geomètriques independents:

- μ = Relació de transmissió
- M_{sc} = Gruix mínim de cap de pinyó i roda
- ε = Coeficient de recobriment
- Z = Nombre de dents suma

Les dues primeres d'aquestes variables seran sempre dades del problema i, per tant, no seran susceptibles d'ésser modificades a fi de cercar l'òptim; la tercera, el coeficient de recobriment, serà sovint també una dada del problema, ja que en la majoria de casos la solució millora quan el coeficient de recobriment disminueix (evidentment no pot ésser inferior a un determinat ε_{\min} imposat per l'enunciat del problema). Així, doncs, és pròpiament el nombre de dents Z el que jugarà el paper primordial com a variable en el procés d'optimització de l'engranatge (malgrat que en alguns casos l'enunciat pot delimitar-ne un valor màxim Z_{\max}).

- El factor geomètric GP és generalment una funció monòtona decreixent de Z
- El factor geomètric GR1 és sempre una funció monòtona creixent de Z
- El factor geomètric GR2 és una funció de Z bastant semblant a la GR1 per a nombres de dents alts; no obstant, per a nombres de dents baixos passa per un mínim i es fe decreixent.

Hem pogut constatar que per a la gran majoria de casos, la ruptura de la dent de la roda és crítica davant de la del pinyó; en conseqüència, hem basat l'exposició gràfica dels factors i relacions geomètriques en dos tipus de representacions:

- a) Representació GR2 (ordenades) – Z (abscisses), amb el coeficient de recobriment en forma paramètrica. Damunt s'hi creuen les següents famílies de corbes:
- Relació geomètrica GPR2 constant: límit entre la zona crítica a la formació de picadures i a la zona crítica a la ruptura de la dent de la roda.
 - Relació geomètrica GER2 constant: permet de trobar el valor mínim de la variable de proporció \square_{\min} , en cas que ens trobem en una zona crítica a la ruptura de la dent de la roda.

- Relació geomètrica GRR constant: hem establert dues corbes: $GRR = \mu$ i $GRR = 1$; límit entre la zona crítica a la ruptura de la dent del pinyó i la crítica a la ruptura de la dent de la roda

V. Gràfics 5, 8, 11 i 14.

b) Representació GP (ordenades) – Z (abscisses), amb el coeficient de recobriment en forma paramètrica. Damunt s’hi creuen les següents famílies de corbes:

- Relació geomètrica GPR2 constant: límit entre la zona crítica a la ruptura de la dent de la roda i la zona crítica a la formació de picadures.
- Relació geomètrica GEP constant: permet trobar el valor mínim de la variable de proporció θ_{\min} , en cas que ens trobem una zona crítica a les picadures.
- Relació geomètrica GRR constant; hem establert dues corbes: $GRR = \mu^{1/10}$ i $GRR = 1$; límit entre la zona crítica a la ruptura de la dent del pinyó i la crítica a la ruptura de la dent de la roda (V. 8.6.1).
- Relació geomètrica GPR1 constant; en aquest tipus de gràfic hem previst de donar unes porcions dels límits entre la zona crítica a la ruptura de la dent del pinyó i la zona crítica a les picadures. En cas d’ésser determinant la ruptura de la dent del pinyó podríem obtenir la informació necessària a través d’aquesta família de corbes.

V. Gràfics 6, 9, 12 i 15.

A fi de completar la informació proporcionada per aquestes dues famílies de gràfics, hem establert un tercer tipus que respon a les següents característiques:

c) Representació α (ordenades) – Z (abscisses), amb el coeficient de recobriment en forma paramètrica. Damunt s’hi creuen dues famílies de corbes:

- Relació geomètrica GRR constant; en aquest cas no es pretén delimitar certes zones del camp d’existència de l’engranatge, sinó donar una informació del valor que pren GRR en tot el camp d’existència estudiat.
- Factor de dissipació DIS constant; permet fer-se una idea del percentatge d’energia dissipada i del rendiment de l’engranatge per a cada punt del camp de l’existència.

v. Gràfics 7, 10, 13 i 16.

9.2 CONSIDERACIONS SOBRE ELS PARÀMETRES INDEPENDENTS

a) La relació de transmissió varia d’un cas a un altre i, per a cada valor concret caldria, en principi, establir els càlculs i representacions gràfiques corresponents. En el present treball hem elegit quatre valors de μ esglaonats segons una progressió geomètrica de raó 0.5:

$$\mu = 1$$

$$\mu = 0.5 = 1/2$$

$$\mu = 0.25 = 1/4$$

$$\mu = 0.125 = 1/8$$

b) Seguint el raonament de l’apartat 7.1.5 hem establert un únic valor per a la gruixària mínima de cap $M_{sc} = 0,3$.

- c) Per al coeficient de recobriment ε , hem pres valors compresos entre 1 i 2 (esglonats de dècima en dècima). Els valors de ε inferiors a 1 donen lloc a esgronaments incorrectes, mentre que els valors superiors a 2 exigeixen un estudi aprofundit dels criteris de repartiment de la càrrega entre dues o més parelles de dents, punt sobre el qual no hem entrat deliberadament. Com a terme de referència, cal tenir en compte que els engranatges normalitzats rarament arriben a coeficients de recobriment superiors a 1,8.
- d) Des del punt de vista pràctic sols són possibles determinats valors enters per a la variable Z; el tractament d'una variable entera és, però, més complex que el d'una variable continua. Malgrat que, en general, no és lícit de resoldre un problema de màxims o mínims d'una funció de variable entera a base de considerar-la real, en el present treball aquest artifici no durà a error: en primer lloc, les diferents funcions de Z (factors i relacions geomètriques, angle de funcionament, factor de dissipació) presenten una gran simplicitat (la major part són monòtones i les que no ho són, tampoc presenten canvis bruscs); i, en segon lloc, els òptims es troben en la majoria dels casos en la intersecció de dues funcions. Així, doncs, podem precisar perfectament la variació de la funció en apartar-nos del Z òptim.

Per a petits valors de Z hem limitat les representacions gràfiques a la interferència de tallat; per a nombres de dents grans, hem establert un límit arbitrari, que, no obstant, inclogui una zona del camp d'existència suficientment gran per a poder resoldre la majoria dels problemes.

9.3 UTILITZACIÓ DELS GRÀFICS D'OPTIMITZACIÓ

A fi de facilitar l'anàlisi dels resultats, partirem de materials de característiques mecàniques iguals per a pinyó i roda (qüestió ja recomanada en l'apartat 8.6.1); o sigui:

$$\sigma_{b1} = \sigma_{b2} = \sigma_b ; \quad \sigma_{H1} = \sigma_{H2} = \sigma_H \quad (9.3.1a)$$

També hem suposat que la vida de l'engranatge és llarga, gràcies a la qual cosa, els factors de durada tindran per valor la unitat:

$$K_{b1} = K_{b2} = K_{H1} = K_{H2} = 1 \quad (9.3.1b)$$

(Això permet simplificar el problema, eliminar la casuística de les relacions dels diferents factors de durada, sense treure generalitat el problema).

En aquest cas podrem realitzar les següents simplificacions:

Els factors de treball de ruptura de pinyó i roda són iguals:

$$TR1 = TR2 = TR = \frac{M_{e1}}{\sigma_b}; \quad \text{Si } TRR = 1 \quad (9.3.1c)$$

Els factors de treball de picadures de pinyó i roda són també iguals:

$$TP1 = TP2 = TP = \frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_H^2}; \quad \text{Si } TPP = 1 \quad (9.3.1d)$$

Sols existeix un factor de comparació ruptura-picadures:

$$TPR1 = TPR2 = TPR = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_b \cdot E_r}; \quad \text{Si } TRR = 1 \quad (9.3.1e)$$

Finalment, solament existeix un factor de comparació ruptura–excoriació, i un factor de comparació picadures–excoriació:

$$TER = TER1 = TER2 = \frac{TE^{3/4}}{TR^{5/4}} \quad (9.3.1f)$$

$$TEP = TEP1 = TEP2 = \frac{TE^{3/4}}{TP^{5/4}} \quad (9.3.1g)$$

- a) Per a la relació de transmissió $\mu = 1$, les corbes $GR1(Z)$ $\varepsilon = \text{constant}$ coincideixen amb les corbes $GR2(Z)$ $\varepsilon = \text{constant}$, i són monòtones creixents, mentre que les corbes $GP(Z)$ $E = \text{constant}$ són monòtones decreixents. La corba $GPR1 = GPR2 = TPR$ separa la zona crítica a la ruptura de la zona crítica a les picadures; com a conseqüència del que hem dit, determina la línia d'òptims. Evidentment, com menor sigui el coeficient de recobriment, menor haurà d'ésser el valor del paràmetre de volum V_{op} necessari.

RESUMINT: determinada la relació de transmissió $\mu = 1$, un coeficient de recobriment mínim ε_{\min} , i un determinat material (el qual caracteritza el valor de CPR), la solució òptima es troba en la intersecció de la corba corresponent a $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$ i la corba $GPR1 = GPR2 = TPR$. La solució tant pot ésser determinada a través del gràfic representació $GR1 = GR2 - Z$ com a través del gràfic representació $GP - Z$.

Si l'hem determinada sobre $GR1 = GR2 - Z$, tindrem:

$$V_{op} = TR \cdot GR1(op) = TR \cdot GR2(op) \quad (9.3.1h)$$

Si l'hem determinada sobre $P - Z$, tindrem:

$$V_{op} = TP \cdot GP(op) \quad (9.3.1i)$$

valors que han d'ésser coincidents.

- b) Els casos corresponents a relacions de transmissió menors de 1 presenten dos tipus de complicacions:

- En primer lloc, les corbes $GR1(Z)$, $\varepsilon = \text{constant}$ i $GR2(Z)$, $\varepsilon = \text{constant}$ no coincideixen; donat que més freqüentment és determinant la ruptura de la dent de la roda, s'ha pres com a representació de treball la $GR2-Z$; s'ha inclòs la informació necessària referent a $GR1$ en la representació $GP-Z$, a través de les corbes $GPR1$.
- En segon lloc, les corbes $GR2(Z)$, $\varepsilon = \text{constant}$ ja no són monòtones creixents en tota la seva extensió, sinó que per a valors de Z baixos passa per un mínim i es fa decreixent.

Per tant, cal parar esment en certs Aspectes nous en la interpretació de les gràfiques per als casos en que μ és menor que 1:

La línia de mínims m_0-m_{10} uneix els punts mínims de les corbes $GR2(Z)$ $\varepsilon = \text{constant}$; A mà dreta de la línia de mínims, les corbes $GR2(Z)$, $\mu = \text{constant}$ són creixents: per tant, la interpretació de les gràfiques és anàloga al de $\mu=1$ que hem exposat anteriorment; ara però s'haurà de tenir en compte que les funcions $GR2(Z)$ no coincideixen amb les $GR1(Z)$, $\varepsilon = \text{constant}$.

RESUMINT: La solució òptima la trobarem en la intersecció de la corba $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$ amb la corba $GPR2 = TPR$ si $GRR < 1$ (o $GPR1 = TPR$ si $GRR > 1$); si aquestes dues corbes no intersequessin (cosa que pot succeir quan són usats materials molt resistents, i s'exigeixen coeficients de recobriment alts), aleshores la solució recomanada correspondrà a la intersecció de la corba $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$ amb la línia de mínims.

En determinats casos pot interessar d'obtenir solucions que exigeixin un menor nombre de dents Z que el determinat per la solució òptima. Per a relacions de transmissió altes (petites reduccions), recomanem de buscar algun punt situat sobre la corba $GP(Z)$, $\varepsilon = \text{constant}$, la qual cosa, degut al feble pendent d'aquestes corbes, no conduirà, en general, a solucions gaire més voluminoses. Per a casos de relació de transmissió petites (grans reduccions) recomanem de seguir simplement la línia $GPR2 = TPR$, que tal com pot observar-se a les diferents representacions, presenta generalment unes extenses zones quasi horitzontals; en desplaçar el punt vers valors de Z menors, el coeficient de recobriment augmenta (millora) fins a la línia de mínims, i més enllà torna a disminuir: no hi ha inconvenient en passar a mà esquerra de la línia de mínims sempre que se sigui conscient que els seus punts no constitueixen solucions òptimes. Per al cas de $\mu = 0.125$, atesa l'especial inflexió que sofreixen les corbes $GP(Z)$, $\varepsilon = \text{constant}$ per a nombres de dents baixos, es dona el cas que algunes de les solucions òptimes (quan s'usen materials no molt resistents, i s'exigeixen coeficients de recobriment alts), es troben a mà esquerra de la línia de mínims.

Els valors de la relació geomètrica $GER2$ donats per la representació $GR2-Z$, i els valors de la relació geomètrica GEP donats per la representació $GP-Z$, permeten obtenir una orientació sobre el valor mínim del paràmetre de proporció θ_{\min} .

Un cop determinat el punt del camp l'existència que ens proporciona la solució més favorable, la representació $\alpha - Z$ ens ofereix una informació complementària sobre l'angle de pressió α i el factor de dissipació DIS .

9.4 RESULTATS

L'explotació a fons de totes les possibilitats d'anàlisi que comporten els gràfics d'optimització comportaria molt d'espai. Nosaltres en ressaltarem, doncs, les característiques més sobresortints.

A fi d'exemplificar el que direm d'ara en endavant, ens cenyirem als gràfics corresponents al cas de $\mu = 0.25$ (V. Gràfics 11, 12, i 13).

Triarem tres materials:

acer al carbó, tremp total: (300 Brinell)	$\sigma_b = 2,50 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ $\sigma_H = 9,20 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	TPR = 0,015 TRR = 1
acer aliat, tremp total: (380 Brinell)	$\sigma_b = 2,87 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ $\sigma_H = 11,4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	TPR = 0,020 TRR = 1
acer fortament aliat tremp total: (450 Brinell)	$\sigma_b = 3,08 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ $\sigma_H = 13,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	TPR = 0,025 TRR = 1

(En tots ells el mòdul d'elasticitat reduït val $E_r = 2,26 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$)

A continuació oferim tres taules (una corresponent a cada un dels acers) que contindran els valors del factor geomètric P necessari per evitar el deteriorament de l'engranatge, quan els coeficients de recobriment van augmentant entre 1 i 2; la línia d'òptims corresponent se situa (segons la taula) sobre $GPR2=0.015$, $GPR2=0.02$ o $GPR2=0,025$ (o $GPR1=0.015$, $GPR1=0.02$ o $GPR1=0.025$ si $GRR>1$). A partir del moment en què les línies descrites intersequen la línia de mínims, els òptims se situen sobre aquesta última. En cas d'haver de determinar valors sobre la representació $GR2-Z$, els traduirem en termes del factor geomètric GP a ase de fer: $GP (R2) = GR2 \cdot TPR2$.

De moment són necessàries tres columnes: una pels coeficients de recobriment, una altra per al nombre de dents, i una tercera per al factor geomètric P.

A fi de poder-se fer una idea més clara de les variacions del paràmetres de volum V_{op} en modificar el coeficient de recobriment ε o les característiques del material TPR, hem establert dos tipus d'índex de referència:

- En cada una de les taules particulars, hem pres com a referència 100 el valor del factor geomètric GP per e $\varepsilon = 1$ (columna A).
- I, per al conjunt de les tres taules, hem pres com a referència 100 el factor geomètric GP ($\varepsilon = 1$) corresponent al valor del factor de comparació $TPR = 0.025$, la millor de les solucions analitzades. En aquest índex hem inclòs també l'efecte de la variació del factor de treball TP degut als esforços admissibles de contacte σ_H ; o sigui, els índexs de la columna B permetran comparar directament entre si el valor del paràmetre de volum necessari V_{op} per a qualsevol cas de les tres taules.

Una sisena columna amb la relació geomètrica GEP (o la GER2 traduïda a termes de GEP a través de l'expressió $GEP (ER2) = GER2 \cdot TER2 / TEP$) permetrà calcular el valor mínim del paràmetre de proporció θ_{min} .

Finalment, dues últimes columnes forniran una informació complementària consistent en l'angle de pressió α (el qual és important en el moment de trobar les reaccions sobre els coixinets o rodaments), i el factor de dissipació (el qual pot ésser de gran interès en el moment de projectar el sistema de refrigeració de l'engranatge).

Taula 3 ($\mu = 0,25$ TPR = 0,025)

Z_{op}	GP		A	B	GEP	α	DIS
126,5	11,57	GPR1			$1,7 \cdot 10^{-4}$	38,29	0,078
126,8	11,78	GPR1			$2,5 \cdot 10^{-4}$	35,86	0,078
126,3	11,99	GPR2	103,63	103,63	$3,8 \cdot 10^{-4}$	33,73	0,081
123,5	12,22	GPR2	105,61	105,61	$5,8 \cdot 10^{-4}$	31,79	0,088
119,5	12,44	GPR2	107,52	107,52	$8,9 \cdot 10^{-4}$	29,98	0,098
115,0	12,65	GPR2	109,33	109,33	$1,4 \cdot 10^{-3}$	28,28	0,110
100,0	12,87	GPR2	111,23	111,23	$2,9 \cdot 10^{-3}$	26,11	0,142
93,5	14,05	m_0-m_{10}	121,43	121,43	$4,8 \cdot 10^{-3}$	24,24	0,168
134,0	15,37	m_0-m_{10}	132,84	132,84	$4,8 \cdot 10^{-3}$	23,38	0,168
114,5	17,27	m_0-m_{10}	149,26	149,26	$4,6 \cdot 10^{-3}$	22,64	0,167
126,0	19,05	m_0-m_{10}	164,65	164,65	$4,2 \cdot 10^{-3}$	22,06	0,163

Taula 4 ($\mu = 0,25$; $TPR = 0,025$; $TP (380 \text{ HB}) / TP (450 \text{ HB}) = 1,340$)

Z_{op}	GP		A	B	GEP	α	DIS
157,0	11,26	GPR1		130,41	$9,0 \cdot 10^{-5}$	38,53	0,062
157,5	11,46	GPR1	101,77	132,72	$1,4 \cdot 10^{-4}$	36,16	0,063
158,7	11,66	GPR1	103,55	135,04	$1,9 \cdot 10^{-4}$	34,13	0,064
159,0	11,87	GPR2	105,41	137,47	$2,7 \cdot 10^{-4}$	32,32	0,068
157,2	12,08	GPR2	107,28	139,90	$3,8 \cdot 10^{-4}$	30,68	0,073
154,0	12,28	GPR2	109,06	142,22	$5,5 \cdot 10^{-4}$	29,16	0,081
148,5	12,48	GPR2	110,83	144,54	$8,2 \cdot 10^{-4}$	27,69	0,092
140,0	12,66	GPR2	112,43	146,62	$1,3 \cdot 10^{-3}$	26,22	0,108
125,0	12,84	GPR2	114,03	148,70	$2,6 \cdot 10^{-3}$	24,47	0,137
114,5	13,84	m_0-m_{10}	122,91	160,29	$4,6 \cdot 10^{-3}$	22,64	0,167
126,0	15,24	m_0-m_{10}	135,34	176,50	$4,2 \cdot 10^{-3}$	22,06	0,163

Taula 5 ($\mu = 0,25$; $TPR = 0,015$; $TP (300 \text{ HB}) / TP (400 \text{ HB}) = 2,058$)

Z_{op}	GP		A	B	GEP	α	DIS
207,7	10,96	GPR1		194,95	$40 \cdot 10^{-5}$	38,78	0,047
209,5	11,15	GPR1	101,73	198,33	$5,8 \cdot 10^{-5}$	36,47	0,047
212,0	11,36	GPR1	103,65	202,06	$8,1 \cdot 10^{-5}$	34,49	0,048
215,0	11,56	GPR1	105,47	205,62	$1,1 \cdot 10^{-4}$	32,77	0,050
217,0	11,77	GPR2	107,39	209,35	$1,4 \cdot 10^{-4}$	31,24	0,053
216,8	11,97	GPR2	109,21	212,91	$1,9 \cdot 10^{-4}$	29,85	0,057
215,5	12,17	GPR2	111,04	216,47	$2,6 \cdot 10^{-4}$	28,56	0,063
212,8	12,37	GPR2	112,86	220,03	$3,4 \cdot 10^{-4}$	27,38	0,069
208,0	12,56	GPR2	114,59	223,41	$4,7 \cdot 10^{-4}$	26,25	0,079
200,0	12,75	GPR2	116,33	226,79	$6,8 \cdot 10^{-4}$	23,13	0,091
190,0	12,90	GPR2	117,70	229,45	$1,0 \cdot 10^{-3}$	24,00	0,105

De l'observació de les taules anteriors es poden extreure diverses conclusions:

- En primer lloc, la forta influència de la resistència del material sobre el valor del paràmetre de volum V_{op} necessari; aquesta influència és més acusada per a coeficients de recobriment baixos que per a coeficients de recobriment alts.
- Els diferents nombres de dents corresponents a les solucions òptimes són en general elevats (el menor nombre de dents que apareix és 95, que correspon a $Z_1 = 19$ i $Z_2 = 76$); també podem observar que, com menor és la resistència del material, majors són els nombres de dents necessaris per a la solució òptima.
- El valor mínim del paràmetre de proporció (θ_{min} , proporcional a GEP), augmenta notablement amb els coeficients de recobriment; rarament, doncs, presentaran problemes d'excoriació els engranatges que tenen coeficients de recobriment baixos.

- d) L'angle de pressió α disminueix en augmentar el coeficient de recobriment ε ; per altre costat, presenta petites variacions en funció de la resistència del material.
- e) Finalment, el factor de dissipació DIS empitjora (augmenta) en augmentar el coeficient de recobriment i la resistència del material; per a obtenir la fracció d'energia dissipada caldria multiplicar DIS pel coeficient de fricció f ; els valors d'aquest darrer són generalment inferiors a 0,1 i, per tant, el percentatge d'energia dissipada no sol sobrepassar el 1,5 %.

Per acabar d'il·lustrar aquest tema, enunciamem un problema concret i el resoldrem en base dels gràfics d'optimització:

Relació de transmissió	μ	= 0,25	
Coeficient de recobriment mínim	ε_{\min}	= 1,7	
Material usat (380 Brinell)			
Esforç admissible de flexió	σ_b	= $2,87 \cdot 10^8$	N/m ²
Esforç admissible de contacte	σ_H	= $11,4 \cdot 10^8$	N/m ²
Mòdul d'elasticitat reduït	E_r	= $2,26 \cdot 10^{11}$	N/m ²
Increment de temperatura admissible	ΔT_{adm}	= 100	°C
Coeficient de fricció mitjà	f	= 0,08	
Coeficient de contacte tèrmic	b_0	= $1,4 \cdot 10^4$	N/(m.s ^{1/2} .°C)
Potència transmesa	Pot	= 47	kW
Velocitat angular del pinyó	ω_1	= 200	rad/s
Transmissió amb xocs lleus	K_0	= 1,25	
Muntatge acurat	K_m	= 1,3	
Qualitat d'acabat I'	K_v	= 1,1	
Vida llarga ($N_0 > 4 \cdot 10^7$)	$K_{b1} = K_{b2} = K_{H1} = K_{H2}$	= 1	

El moment efectiu que en resulta de les anteriors dades és:

$$M_{e1} = \frac{\text{Pot} \cdot K_0 \cdot K_m \cdot K_v}{\omega_1} = 420 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Obtindrem a continuació els diversos factors de treball i de comparació:

Factor de treball de picadures

$$TP = \frac{M_{e1} \cdot E_r}{\sigma_H^2} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

(donat que hem reduït els restants factors geomètrics a valors del factor GP, no ens caldrà trobar els restants factors de treball).

Factor de comparació ruptura – picadures

$$TPR = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_b \cdot E_r} = 0,02$$

Factor de comparació excoïació – picadures

$$TEP = \frac{TE^{3/4}}{TP^{5/4}} = \left\{ \begin{array}{l} 20,459 \text{ si } K_r = 1 \\ 4,301 \text{ si } K_r = 0,5 \end{array} \right\}$$

(donat que hem traduït els valors de la relació geomètrica GER2 a termes de la relació geomètrica GEP, no ens cal calcular el factor de comparació TER).

A base dels gràfics d'optimització per a $\mu = 0,25$, s'arriba a la solució òptima en el punt $Z = 140$, en el qual li correspon un valor del factor geomètric de picadures de $GP = 12,66$.

El pinyó té 28 dents i la roda 112.

El valor òptim del paràmetre de volum serà:

$$V_{op} = P \cdot TP = 12,66 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} = 9,242 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

El valor mínim del paràmetre ne proporció θ_{min} , per al cas més desfavorable ($K_r = 1$, o sigui, quan no existeix repartiment de la càrrega entre dues parelles de flancs), és:

$$\theta_{min} = GEP \cdot TEP = 0,0013 \cdot 20,459 = 0,0266$$

el qual evidentment no presenta cap problema constructiu; nosaltres prendrem un valor del paràmetre de proporció major.

L'angle de funcionament és de

$$\alpha = 26,22^\circ$$

El percentatge de dissipació és:

$$DIS \cdot f \cdot 100 = 0,108 \cdot 0,08 \cdot 100 = 0,864$$

o sigui que el rendiment és superior al 99 %.

Finalment, cal donar les proporcions concretes a l'engranatge; aquesta decisió es fa en funció de l'espai disponible, o de la configuració del tren d'engranatges on va inserit l'engranatge. Nosaltres, per a poder seguir amb l'exemple, prendrem el valor 0,2 per al paràmetre de proporció θ ; el gràfic 3 mostra que, en aquest cas, la solució correspon a:

$$b = 0,342 \quad i \quad d = 1,710$$

La veritable magnitud d'aquestes dues distàncies serà ($V_{op}^{1/3} = 0,0947 \text{ m}$):

$$B = 0,0333 \text{ m} = 3,33 \text{ cm}$$

$$D = 0,1665 \text{ m} = 16,65 \text{ cm}$$

9.5 ANÀLISI COMPARATIVA ENTRE UN ENGRANATGE TALLAT PER UNA EINA NORMALITZADA I UN ENGRANATGE BASAT EN EL PRESENT ESTUDI

Finalment, ens sembla d'interès de comparar els resultats obtinguts en el present estudi amb els resultats que s'obtingrien a base d'eines normalitzades. En definitiva, es tractarà d'estudiar la disminució del paràmetre de volum que podem aconseguir a base de les modificacions del dentat que hem introduït en aquest treball.

A fi de fer més correcte la comparació, s'han seguit les següents pautes:

- Òbviament s'ha partit del mateix enunciat i s'han aplicat les equacions dels deterioraments elegides en els capítols 3, 4 i 5 als engranatges tallats amb eines normalitzades.
- S'han comparat engranatges del mateix coeficient de recobriment ε ; primer s'ha procedit al càlcul de l'engranatge tallat amb eina normalitzada, ja que no és possible elegir ε en aquest cas; posteriorment, s'ha calculat l'engranatge no normalitzat segons el mètode adoptat en el present estudi.

- c) No s'ha analitzat cap cas d'engranatge tallat amb l'eina desplaçada; en primer lloc perquè no hi ha un criteri únic per a desplaçar l'eina; en segon lloc, perquè les solucions òptimes tenen lloc per a nombres de dents elevats, cas en què els desplaçaments tenen poca importància; finalment, el fet de desplaçar l'eina condueix a una disminució del coeficient de recobriment ε , la qual cosa, per a nosaltres, és també un empitjorament de la solució.
- d) La solució òptima per a rodes tallades amb eines normalitzades es troba també en el punt en què sigui igualment crítica la ruptura que les picadures.
- e) Finalment, es considera la normalització de les eines en quant a les proporcions i forma de la cremallera generadora, però no quant a la discretització del mòdul (ja que aquest aspecte jugaria desfavorablement en les rodes normalitzades).

El terme de comparació serà una eina de tipus normal segons la definició que donem a continuació (Ref. 35, pàg. 85):

Angle de pressió	α_0	=	20°
Altura de cap	a_{c0}	=	$1 m_0$
Altura de peu	a_{p0}	=	$1 m_0$
Suplement de cap	f_0	=	$0,25 m_0$

Utilitzarem les expressions ja donades en el capítol 8 per als factors geomètrics:

Factor geomètric de ruptura

En les rodes normalitzades la ruptura del pinyó és més crítica que la de la roda.

$$GR1 = \frac{1+\mu}{2\cdot\mu} \cdot Z \cdot Y_{f1} \cdot Y_{c1} \quad (9.5a)$$

on els valors del factor de forma Y_{f1} i de concentració de tensions Y_{c1} poden ésser obtinguts a través de les figures IA i IB de la norma americana AGMA 220.02 (el factor geomètric de la norma correspon a $1/(Y_{f1}, Y_{c1})$).

Factor geomètric de picadures

$$GP = \frac{1+\mu}{2\cdot\pi\cdot\mu} \cdot \frac{\tan\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} \cdot \frac{1}{(1-\varphi_1)\cdot\varphi_1 \cdot \tan^2\alpha_0 + \left(\frac{2\cdot\pi}{Z}\right)\cdot(2\cdot\varphi_1-1)\cdot\tan\alpha_0 + \left(\frac{2\cdot\pi}{Z}\right)^2} \quad (9.5b)$$

on el factor de cap φ_1 té per expressió:

$$\varphi_1 = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\tan\alpha_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{Z_1 + a_{c0}/m_0}{z_1 \cdot \cos\alpha_0}\right)^2 - 1} \quad (9.5c)$$

Factor geomètric d'excoriació

$$GE = 0,1477 \cdot \left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{\mu\cdot(1-\varphi_1)}}{(1-\varphi_1)\cdot\varphi_1} \cdot \frac{\tan\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} \quad (9.5d)$$

on el factor de cap φ_1 té la mateixa expressió que en el cas de les picadures.

En quant als factors de treball i de comparació, tenen el mateix valor tant per a l'engranatge tallat amb eines normalitzades com per a l'engranatge determinat segons els mètodes del present estudi; donat que sols ens interessa establir una comparació entre els dos resultats, només serà necessari conèixer el factor de comparació TPR.

ANÀLISI D'UN CAS CONCRET

Ens cenyirem a l'enunciat de l'apartat anterior excepte en el que fa referència al coeficient de recobriment ε ; el factor de comparació TPR resultant és:

$$\text{TPR} = 0,02$$

La solució òptima s'obtindrà també per a l'engranatge normalitzat quan la relació geomètrica $\text{GPR} = \text{GP}/\text{GR}$ és aproximadament igual a $\text{TPR} = 0,02$. Després de diversos temptejos s'ha arribat als resultats exposats en la següent taula:

Taula 6

Comparació eina normalitzada – eina no normalitzada

	Z	ε	φ_1	GP	GE	GEP	α
Eina normalitzada	125	1,731	0,3113	17,29	0,0148	$1,2 \cdot 10^{-3}$	20°
Eina no normalitzada	135	1,731	0,2970	12,72	0,0130	$1,6 \cdot 10^{-3}$	25,6°

Hom observa fàcilment que l'engranatge tallat per l'eina normalitzada necessita un volum notablement major per a transmetre la càrrega:

$$\frac{\text{GP norm.}}{\text{GP no norm.}} = \frac{17,29}{12,72} = 1,36$$

O sigui un 36 % més de volum i de pes; o també, l'engranatge no normalitzat podria transmetre un 36 % més de càrrega amb el mateix volum del normalitzat.

El nombre de dents és una mica inferior en l'engranatge normalitzat; per contra, l'engranatge no normalitzat és més restrictiu en quant al valor mínim del paràmetre de proporció (segons l'apartat anterior $\text{CEP}=20,459$, que implica $\theta_{\min}(\text{nor.})=0,024$ mentre que $\theta_{\min}(\text{no norm.})=0,032$); això s'explica no perquè l'engranatge sigui pitjor des del punt de vista de l'excoriació (el factor geomètric d'excoriació és menor en l'engranatge no normalitzat), sinó perquè l'engranatge es carrega proporcionalment més degut e la major resistència a ruptura i picadures. Finalment, hi he una notable diferència quant a l'angle de funcionament: els òptims per a engranatges no normalitzats semblen correspondre sempre valors sensiblement superiors a 20°.

10. CONCLUSIONS

A manera de resum exposarem ràpidament els aspectes i resultats més notables obtinguts en el present treball.

- a) El primer aspecte que interessa destacar és el fet d'haver pogut reduir el nombre de variables independents de la geometria de l'engranatge a quatre. Probablement, de tenir un coneixement més precís sobre el criteri de deteriorament de la punta de la dent, aquestes variables es reduirien a tres: relació de transmissió μ , coeficient de recobriment ε i nombre de dents Z .
- b) En segon lloc, ens sembla interessant de destacar que, tant la prevenció de la ruptura de les dents com la prevenció de les picadures sobre els flancs exigeixen un valor mínim del volum de l'engranatge (nosaltres el determinem a través del paràmetre de volum V); la prevenció de l'excoriació condueix a una limitació inferior del paràmetre de proporció de l'engranatge θ : en definitiva, n'exigeix una amplada mínima.
- c) En tercer lloc, de totes les modificacions geomètriques introduïdes en el present treball respecte del dentat de les eines normalitzades, les que al nostre entendre tenen major importància són: 1. L'equilibrament dels lliscaments específics (aquest concepte ja s'aplica en alguns casos en què s'utilitza el desplaçament de l'eina; també és conegut el fet que equilibrar els lliscaments específics equival a equilibrar els factors PV d'Almen; no obstant, no teníem notícia que algú hagués comprovat que també equival a equilibrar els valors de la temperatura flash T_f de H. Blok); 2. El partir dels gruixos de caps de dent i portar-los al valor mínim admissible (aquesta condició és més o menys equivalent a fer l'angle de pressió màxim; vist però, des del punt de vista dels gruixos de cap, té l'avantatge que permet una més fàcil atenció al deteriorament de punta de la dent).
- d) En quart lloc, els engranatges de característiques òptimes se situen en aquells punts en què la ruptura i les picadures són igualment crítics: les línies CPR constant determinen aquesta condició; cal observar que, per a reduccions fortes (μ petits), existeixen extenses zones on aquestes línies són pràcticament horitzontals, la qual cosa indica que es pot triar la solució òptima sovint dintre d'uns marges molt amples (depèn del coeficient de recobriment ε i del nombre de dents Z que més convinguin).
- e) En cinquè lloc, cal destacar el paper important que juga el material i les seves característiques en el procés d'optimització d'un engranatge, ja que el factor de comparació TPR (depenent d'elles) és el que determina fonamentalment la línia d'òptims sobre els gràfics d'optimització. A més, els resultats obtinguts sofreixen grans variacions en modificar les característiques del material.
- f) En sisè lloc, cal destacar que, amb la nova geometria del dentat, podem aconseguir disminucions del volum de l'engranatge de l'ordre del 30 %. Cal també observar que el mètode proposat en el present estudi permet d'elegir voluntàriament el valor del coeficient de recobriment ε .
- g) Finalment, voldríem fer constar que, a través del nostre treball, el problema d'optimitzar un engranatge recte ha quedat reduït fonamentalment al problema de disminuir al màxim el valor dels gruixos de cap de les dents sense arribar al deteriorament de la seva punta. Aquest darrer aspecte, del qual no en tenim pràcticament cap informació, pensem que exigeix un estudi suficientment detingut com per constituir el tema d'un treball posterior; els seus fruits acabarien de completar el present estudi, i potser n'obligarien a revisar algun aspecte.

APÈNDIXS I BIBLIOGRAFIA

A1. FACTOR DE FORMA

A1.1 EXPRESSIÓ DEL FACTOR DE FORMA

En aquest apèndix tractarem de determinar l'expressió analítica dels paràmetres que intervenen en la definició del factor de forma. En el nostre cas es tracta del factor de forma corresponent al punt de contacte únic (punt més alt sobre el flanc de la dent on hi ha encara una sola parella de dents en contacte), i que permet de calcular l'esforç de tracció màxim que es produeix en la secció d'encastament (punt S) quan es tenen en compte tant els esforços de flexió causats pel component tangencial de la força de contacte, com la compressió originada pel component radial d'aquesta mateixa força (V. Fig. 11).

En aquest cas, les expressions dels factors de forma són:

$$\text{Pinyó: } Y_{f1} = 6 \cdot \frac{h_{f1}}{s_{f1}} \cdot \frac{\cos\theta_1}{\cos\alpha} - \frac{1}{s_{f1}} \cdot \frac{\sin\theta_1}{\cos\alpha} \quad (\text{A1.1a})$$

$$\text{Roda: } Y_{f2} = 6 \cdot \frac{h_{f2}}{s_{f2}} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\alpha} - \frac{1}{s_{f2}} \cdot \frac{\sin\theta_2}{\cos\alpha} \quad (\text{A1.1b})$$

s_{f1} i s_{f2} = Gruixos de càlcul de dent de pinyó i roda; corresponen a la secció d'encastament S-S' determinada per la paràbola d'igual resistència.

h_{f1} i h_{f2} = Altures de càlcul de pinyó i roda; estan compreses entre el vèrtex de la paràbola d'igual resistència V i la secció d'encastament S-S'.

α = Angle de funcionament

θ_1 i θ_2 = Angles de càlcul de pinyó i roda; són els angles formats per la línia d'acció de la forma i la normal a la línia de simetria de la dent.

A1.2 EXPRESSIÓ ANALÍTICA DELS PARÀMETRES DE CàLCUL

En l'explicació que ve a continuació ens referirem a la Figura 11, la qual mostra una situació molt particular de l'engranament entre l'eina cremallera i la roda que genera, en què coincideixen el punt de contracte eina-roda, i el punt de tangència de la paràbola d'igual resistència (quan la força està aplicada en el punt de contacte únic) amb el peu de la dent: punt S. En aquest cas, es compleixen diverses condicions:

En primer lloc, la suma dels angles α_1 , β_1 i γ_1 és de $\pi/2$:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A1. 2a})$$

En segon lloc, la tangent de l'angle β_1 pot determinar-se gràcies a les propietats de la paràbola:

$$\tan\beta_1 = \frac{SR}{NR} = \frac{s_{f1}/2}{2 \cdot h_{f1}} = \frac{s_{f1}}{4 \cdot h_{f1}} \quad (\text{A1.2b})$$

I, en tercer lloc, la tangent de l'angle γ_1 és el quocient entre el valor del segment $\tilde{N}''N'$ i $N'I$. El valor de $\tilde{N}''N'$, pot calcular-se com la diferència entre el segment $N''N'$ (desplaçament sofert per l'eina cremallera en un gir de l'angle α_1 de la roda: $N''N' = (Z_1/2) \cdot \alpha_1 \cdot m_0$), i $N'N$ és la meitat del pas primitiu. O, sigui:

$$\tan \gamma_1 = \frac{1}{v_{e1}} \cdot \left(Z_1 \cdot \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A1.2c})$$

$$v_{e1} = h_{uc1} - r_{e1} \cdot \sin \alpha \quad (\text{A1.2d})$$

Podem establir unes relacions anàlogues per a la roda:

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A1.2e})$$

$$\tan \beta_1 = \frac{s_{f2}}{4 \cdot h_{f2}} \quad (\text{A1.2f})$$

$$\tan \gamma_2 = \frac{1}{v_{e2}} \cdot \left(Z_1 \cdot \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A1.2g})$$

$$v_{e2} = h_{uc2} - r_{e2} \cdot \sin \alpha \quad (\text{A1.2h})$$

Angles de càlcul. L'expressió dels angles de càlcul θ_1 i θ_2 és la següent, segons es desprèn de la Figura 11:

$$\theta_1 = \alpha_{cu1} - \phi_{cu1} \quad (\text{A1.2i})$$

$$\theta_2 = \alpha_{cu2} - \phi_{cu2} \quad (\text{A1.2j})$$

O sigui, són les diferències entre els corresponents angles de contacte únic, α_{cu1} i α_{cu2} , i els gruixos angulars de contacte únic ϕ_{cu1} i ϕ_{cu2} . Les expressions d'aquests angles poden trobar-se en el capítol 1.

Altures de càlcul. L'altura de càlcul de la dent del pinyó h_{f1} podem descompondre-la en tres parts, segons pot confirmar-se en la figura 11:

$$h_{f1} = VR = VI' + I'Q + QR$$

A base de les diferents definicions donades en el capítol 1 i al valor del paràmetre v_{e1} que s'acaba de definir, finalment podem expressar l'altura de càlcul del pinyó de la següent manera:

$$h_{f1} = \frac{Z_1}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta_1} - \cos \alpha_1 \right) + \left(\frac{v_{e1}}{\cos \gamma_1} + r_{e1} \right) \cdot \sin \beta_1 \quad (\text{A1.2k})$$

Anàlogament per a la roda:

$$h_{f2} = \frac{Z_2}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta_2} - \cos \alpha_1 \right) + \left(\frac{v_{e2}}{\cos \gamma_2} + r_{e2} \right) \cdot \sin \beta_2 \quad (\text{A1.2l})$$

Seccions de càlcul. El valor dels gruixos de càlcul s_{f1} i s_{f2} serà dues vegades el valor del segment RS. Aquest pot ésser calculat en base a restar al segment QI la projecció sobre d'ell del segment SI:

$$\text{Pinyó: } s_{f1} = Z_1 \cdot \sin \alpha_1 - 2 \cdot \left(\frac{v_{e1}}{\cos \gamma_1} + r_{e1} \right) \cdot \cos \beta_1 \quad (\text{A1.2m})$$

$$\text{Roda: } s_{f2} = Z_2 \cdot \sin \alpha_2 - 2 \cdot \left(\frac{v_{e2}}{\cos \gamma_2} + r_{e2} \right) \cdot \sin \beta_2 \quad (\text{A1.2n})$$

Atès que per a trobar els valors dels angles α_1 , β_1 i γ_1 cal conèixer els paràmetres de càlcul θ_1, h_{f1} i s_{f1} i, viceversa, haurem de procedir a base d'un mètode iteratiu en el càlcul.

A2. FACTOR DE CONCENTRACIÓ DE TENSIONS

Tal com hem exposat en el capítol 3, l'expressió adoptada per al factor de concentració de tensions Y_c és la donada per Dolan i Broghamer (Ref. 19), i adoptada per la norma americana AGMA 220.02. Això és:

$$\text{Pinyó: } Y_{c1} = H + \left(\frac{s_{f1}}{r_{f1}}\right)^J \cdot \left(\frac{s_{f1}}{h_{f1}}\right)^L \quad (\text{A2.a})$$

$$\text{Roda: } Y_{c2} = H + \left(\frac{s_{f2}}{r_{f2}}\right)^J \cdot \left(\frac{s_{f2}}{h_{f2}}\right)^L \quad (\text{A2.b})$$

on: h_{f1} i h_{f2} = Altures de càlcul de pinyó i roda; les seves expressions són les mateixes que en l'apartat A1.2.

s_{f1} i s_{f2} = Seccions de càlcul de pinyó i roda; les seves expressions són les mateixes que en l'apartat A1.2.

r_{f1} i r_{f2} = Radis de curvatura de càlcul de pinyó i roda; la mateixa norma AGMA indica que la seva expressió:

$$r_{f1} = r_{e1} + \frac{v_{e1}^2}{Z_1/2 + v_{e1}} \quad (\text{A2.c})$$

$$r_{f2} = r_{e2} + \frac{v_{e2}^2}{Z_2/2 + v_{e2}} \quad (\text{A2.d})$$

Finalment, H , J i L són tres paràmetres que depenen de l'angle pressió α . La norma AGMA 220.02 proporciona la següent taula extreta dels resultats de Dolan i Broghamer:

Taula 7

	H	J	L
14,5°	0,22	0,20	0,40
20°	0,18	0,15	0,45
25°	0,14	0,11	0,50

A fi de fer manejable aquesta taula, hem adaptat els valors d'aquests tres paràmetres a sengles paràboles:

$$H = 0.22738 \cdot \alpha^2 - 0.27973 \cdot \alpha + 0.30536 \quad (\text{A2.e})$$

$$J = 0.34109 \cdot \alpha^2 - 0.72624 \cdot \alpha + 0.35194. \quad (\text{A2.f})$$

$$L = 0.28422 \cdot \alpha^2 + 0.34972 \cdot \alpha + 0.29329 \quad (\text{A2.g})$$

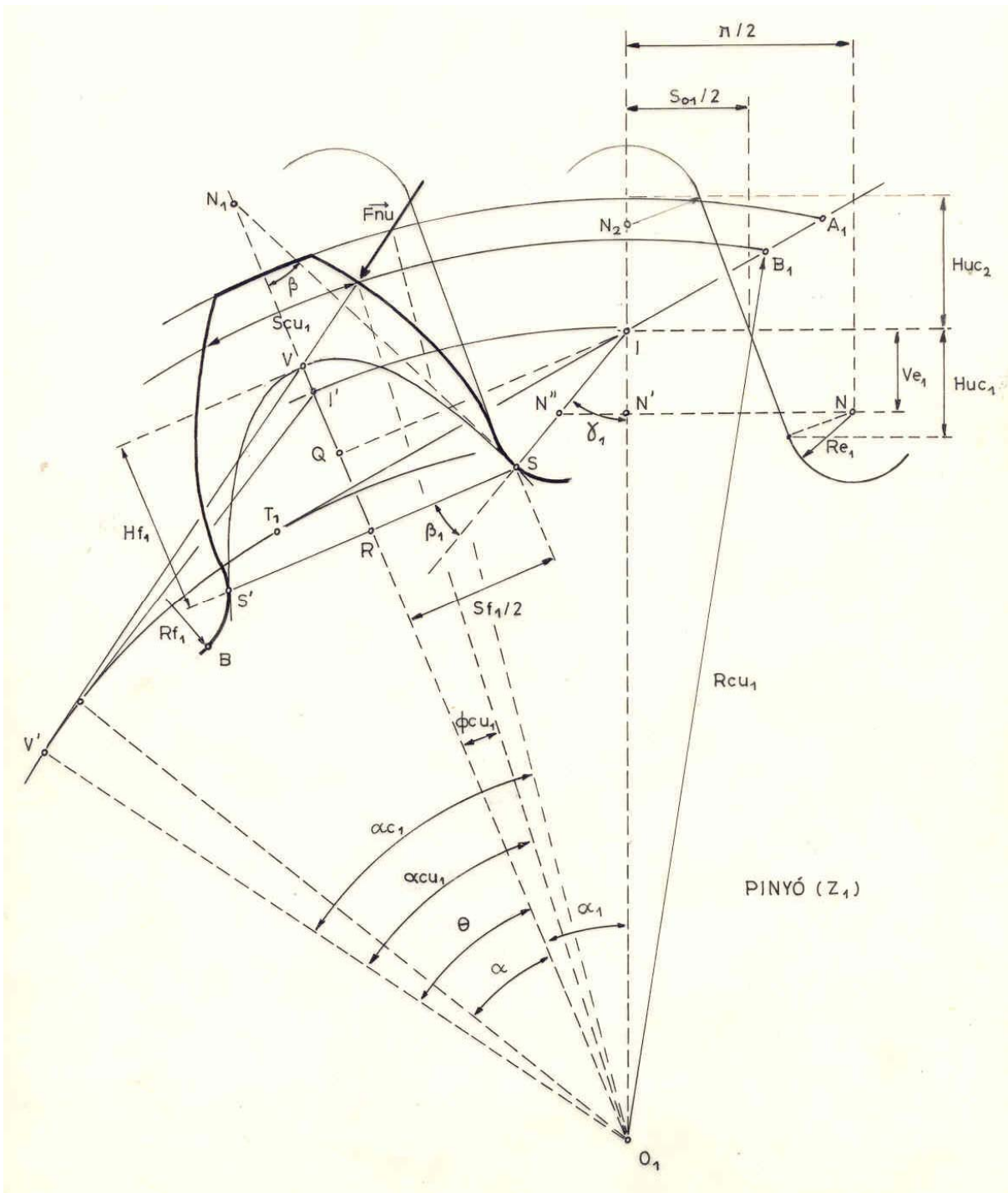


Figura 11

A3. PROGRAMA D'ORDINADOR

A3.1 CORRESPONDÈNCIA ENTRE ELS SÍMBOLS DEL TEXT I ELS USATS EN EL PROGRAMA D'ORDINADOR

<u>Ordenador</u>	<u>text</u>
A	α
A1	α_{c1}
A2	α_{c2}
ACU1	α_{cu1}
ACU2	α_{cu2}
AL1	α_1
AL2	α_2
B1	β_1
B2	β_2
DIS	DIS
D1	$h_{uc1} = h_{c2}$
D2	$h_{uc2} = h_{c1}$
E	ε
E1	S01
E2	S02
EC1	S _{c1}
EC2	S _{c2}
EP	GEP
ER1	GER1
ER2	GER2
EX	GE
G1	γ_1
G2	γ_2
GAE	φ_a
GAU	φ_{acu}
GRE	φ_r
GRU	φ_{rcu}
H1	h_{f1}
H2	h_{f2}
M	μ
P	GE
PR1	GPR1
PR2	GPR2
R1	r_{e1}
R2	r_{e2}
RF1	r_{f1}
RF2	r_{f2}
RR	GRR
RUP1	GR1
RUP2	GR2
S1	S _{f1}
S2	S _{f2}
V	Ev (α)

V1	$E_v (\alpha_1)$
V2	$E_v (\alpha_2)$
VE1	v_{e1}
VE2	v_{e2}
X1	φ_1
X2	φ_2
Y	M_{sc}
YC1	Y_{c1}
YC2	Y_{c2}
YF1	Y_{f1}
YF2	Y_{f2}
Z	Z
Z1	Z_1
Z2	Z_2

A3.2 LLISTAT DEL PROGRAMA D'ORDINADOR

A continuació reproduïm el llistat del programa d'ordinador utilitzat en el present treball.

FACOM 8052 FORTRAN -740601- V03 L08

```
1      REAL M
2      1  READ (5,506) M,Y,E
3      DATA G,NUM,A,EXPO10,EXPO,PI,PI2,GRAD/.8,0,.6,.10000,.33333,
      3.14159,A.6.28318,57.295/
4      WRITE (6,508)
5      WRITE (6,502) M,Y,E
6      FM1=M/(1.+M)
7      FM2=FM1/M
8      FM3=M*M
9      FM4=1.-FM3
10     NUM=0
11     Z=211.
12     DO 1000 MI=1,250
13     Z=Z-1.
14     Z1=Z*FM1
15     Z2=Z*FM2
16     71 DO 500 L=1,100
17     IF (L-2) 50,60,70
18     60 RA=A
19     RF3=F3
20     A=A-.025
21     GO TO 50
22     70 IF((ABS(F3)),LT.1.E-4) GO TO 600
23     IF(ABS(F3-RF3),LT.1.E-7) GO TO 600
24     A9=F3*(A-RA)/(F3-RF3)
25     RA=A
26     RF3=F3
27     A=A-A9
28     50 S=SIN(A)
29     C=COS(A)
30     T=S/C
31     V=T-A
32     IF (M,EQ,1.) GO TO 3
33     EX1=E*PI2/(Z*T)
34     EX2=(2.*FM3-FM4*EX1)/FM4
35     EX3=-(1.+EX1)*FM3/FM4
36     X1=SQRT(EX2**2-4.*EX3)-EX2)/2.
37     GO TO 83
38     3  X1=.5+PI*E/(Z*T)
39     83 X2=X1/(FM3+FM4*X1)
40     T1=X1*T/FM1
41     T2=X2*T/FM2
42     A1=ATAN(T1)
43     A2=ATAN(T2)
44     Q1=C/COS(A1)
45     Q2=C/COS(A2)
```

```

46      V1=T1-A1
47      V2=T2-A2
48      EC1=Y
49      E1=EC1/Q1+Z1*(V1-V)
50      E2=PI-E1
51      EC2=(E2+Z2*(V-V)*Q2
52      F3=EC2-Y
53      500 CONTINUE
54      600 CONTINUE
55      AB=(E-1.)*PI2/(Z*T)
56      X1=X1-AB
57      X12=X2-AB
58      TACU1=X11*T/FM1
59      TACU2=X12*T/FM2
60      ACU1=ATAN(TACU1)
61      ACU2=ATAN(TACU2)
62      ECU1=(Y/Q1+Z1*(V1-TACU1+ACU1))
63      ECU2=(Y/Q2+Z2*(V2-TACU2+ACU2))
64      CI1=ACU1-ECU1/Z1
65      CI2=ACU2-ECU2/Z2
66      GAE=X2-FM2
67      GRE=X1-FM1
68      GAU=X12-FM2
69      GRU=X11-FM1
70      D1=Z2*(Q2-1.)/2.
71      D2=Z1*(Q1-1.)/2.
72      R1=(E2/2.-D1*T)/C
73      R2=(E1/2.-D2*T)/C
74      H01=E1/2.+D1*T*R1*C
75      H02=E2/2.+D2*T*R2*C
76      VE1=D1-R1*S
77      VE2=D2-R2*S
78      G1=G
79      DO 200 J=1,30
80      IF (J=2) 151,152,153
81      152 RG1=G1
82      RFUN1=FUN1
83      G1=G1-.1
84      GO TO 151
85      153 AG1=FUN1*(G1-RG1)/(FUN1-RFUN1)
86      RG1=G1
87      RFUN1=FUN1
88      G1=G1-AG1
89      151 AL1=VE1*TAN(G1)+H01)*2./Z1
90      B1=PI/2.-G1-AL1
91      RR1=VE1/COS(G1)+R1
92      RS1=VE1 *TAN(G1)/COS (G1)
93      S1-Z1*SIN(AL1)-2,*RR1*COS(B1)
94      H1=Z1*(C/COS(CI1)-COS(AL1))2.+RR1*SIN(B1)
95      YY1=S1/(4.*H1)
96      FUN1=TAN(B1)-YY1
97      IF(ABS(FUN1),LT,1.E-5) GO TO 201

```

```

98 200 CONTINUE
99 WRITE (6,978)
100 978 FORMAT (' EXCES DE ITERACIONS 1')
101 201 G2=G
102 DO 300 K=1,10
103 IF (K=2) 251,252.253
104 252 RG2=G2
105 RFUN2=FUN2
106 G2=G2-.1
107 GO TO 251
108 253 AG2=FUN2*(G2-RG2)/(FUN2-RFUN2)
109 RG2=G2
110 RFUN2=FUN2
111 G2=G2-AG2
112 251 AL2=(VE2*TAN(G2)+H02)*2./Z2
113 B2=PI/2.-G2-AL2
114 RR2=VE2/COS(G2)+R2
115 RS2=VE2*TAN(G2)/COS(G2)
116 S2=Z2*SIN(AL2)-2.*RR2*COS(B2)
117 H2=Z2*(C/COS(CI2)-COS(AL2))/2.+RR2*SIN(B2)
118 YY2=S2/(4.*H2)
119 FUN2=TAN(B2)-YY2
120 IF (ABS(FUN2),LT,1.E-5) GO TO 301
121 300 CONTINUE
125 301 YF1=(6.*H1*COS(CI1)-S1*SIN(CI1))/(S1*S1*C)
126 YF2=(6.*H2*COS(CI2)-S2*SIN(CI2))/(S2*S2*C)
127 HF=-.227381*A*A-.279782*A+.305367
128 EXP1=.34107*A*A-.72624*A+.36194
129 EXP2=.284225*A*A+.349727*A+.293291
130 RF1=R1+VE1**2/(Z1/2.+VE1)
131 RF2=R2+VE2**2/(Z2/2.+VE2)
132 YC1=HF+((S1/RF1)**EXP1)*((S1/H1)**EXP2)
133 YC2=HF+((S2/RF2)**EXP1)*((S2/H2)**EXP2)
134 RUP1=(Z*VF1*YC1/(2.*FM1))
135 RUP2=(Z*YF2*YC2/(2.*FM1))
136 RR=RUP1/RUP2
137 F2=Z*(1.-FM2*(C*C+M*Q1))/2.
138 P=(T/(C*C*(X1*(1-X1)*T*T+PI2*(2.*X1-1.)*T/Z-(-PI2/Z)**2)))/(PI2*A*FM1)
139 PR1=P*RUP1
140 PR2=P/RUP2
141 EX=.1477*T*(SQRT(X1)-SQRT(M*(1.-X1)))**4/(C*C*(1.-X1)*X1*FM1**3)
142 EP=EX**.75/P**1.25
143 ER1=EX**.75/RUP1**1.25
144 ER2=EX**.75/RUP2**1.25
145 DIS=(T/4.*FM1*FM2)*(GAE*GAE+GRE*GRE+ABS(GAU)*GAU+GRU
*GRU)/(GAE+GARU)
146 GA=A*GRAD
147 GA1=A1*GRAD
148 GA2=A2*GRAD
149 GB1=B1*GRAD
150 GB2=B2*GRAD
151 WRITE (6,507) Z,GA,RUP1,RUP2,RR,P,PR1,PR2,EX,EP,EH1,ER2,DIS,

```

```
      1      X1,GA1,E1,D1,R1,GB1,H1,S1,YF1,VC1,F1,XI1
      2      X2,GA2,E2,D2,R2,GB2,H2,S2,YF2,VC2,F2,XI2
152      IF (NUM,EQ,20) WRITE (6,508
153      NUM=NUM+1.
154      IF (NUM,EO,21) NUM=0
155      IF (F2,LT,0.) GO TO 1
156 1000 CONTINUE
157      GO TO 1
158 502 FORMAT (/3F10.3/)
159 506 FORMAT (F5.3,F3.1,F3.1)
160 507 FORMAT (F10.0,3F10.3,4F10.5,4E10.3,F10.5,2(/F20,3,11F10.3))
161 508 FORMAT (1H1,5X,'Z',9X,'A',9X,'R1',8X,'R2',8X,'RR',8X,'P',9X,'PR1',
      A7X,'PR2',7X,'E',9X,'EP',8X,'ER1',7X,'ER2',7X,'DIS')
162      STOP
```

*** OPTIONS IN EFFECT ***

```
FORTRAN1 LIST,NOMAP,NOASTER,NODEBUG,NOSEQ,NONERW,
          SYSIN,DECK,NOSTACK,EBCDIC
          TRAP=00CE,OPT=0,WORK=20,ARRAY=256,TABLE=10
```

FT997 END OF COMPILATION (FTMAIN).

```
1      FUNCTION TAN(X)
2      C=COS(X)
3      IF (C,L,1.E-7) GO TO 6
4      5      TAN=SIN(X)/C
5      RETURN
6      6      WRITE (6,7)
7      FORMAT (' ANGLE RECTE')
8      STOP 7777
9      END
```

*** OPTIONS IN EFFECT ***

```
FORTRAN1 LIST,NOMAP,NOASTER,NODEBUG,NOSEQ,NONERW,
          SYSIN,DECK,NOSTACK,EBCDIC
          TRAP=00CE,OPT=0,WORK=20,ARRAY=256,TABLE=10
```

FT997 END OF COMPILATION (TAN)

```
          FACOM BOS2 LIED -740910- V02-L11
/PARA OUT=PROGRAM,ALL-MOD, USCALL
```

```
LIED OUTPUT RECORDS ARE 471
MAX ADDRESS 2AFF
```

BIBLIOGRAFIA

No totes les obres i articles ressenyats en aquesta bibliografia responen a referències del text: hem introduït, també, alguns escrits que han col·laborat a fer possible aquest treball.

- 1 ALMEN, J. D. Factors influencing the durability of spiral-bevel gears for automotive, en Automotive Industries, Nov. 23, 1935, pp. 676-701.
- 2 AGMA (American Gear Manufacturers Association), Nomenclature of gear-tooth wear and failure, AGMA 110.03, Washington, Jan. 1964.
- 3 AGMA (American Gear Manufacturers Association), Rating the strength of spur gear teeth, AGMA 220.0, Washington, Aug. 1966.
- 4 AGMA (American Gear Manufacturers Association), Surface durability (Pitting of spur gear teeth), AGMA 210.02, Washington, Jan. 1965.
- 5 BAILEY, M. & CAMERON, A. The influence of temperature and metal pairs on the scuffing of a commercial oil, Proc. Inst. Mech. Engrs., 1973, vol. 187, pp. 67-73.
- 6 BENEDICT, G.H. Instantaneous Coefficients of gear tooth friction, Paper At the Lubrication Conference, Boston, Oct. 1960; ASLE Transactions 4, 1961, pp. 50-70.
- 7 BLOK, H. Les températures de surface dans des conditions de grippage sous extrême pression, Proc. Second World Petrol Congress. Paris 1937, 3; pp. 471-486.
- 9 BLOK, H. Theoretical study of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness lubricating conditions, Proc. Gen. Disc. Lubrications; Inst. Mech. Engrs. Pt. 2, 1937; pp. 222-235.
- 9 BLOK, H. Seizure delay method for determining the protection against seizure afforded by extreme pression lubricant, Soc. Autom. Engrs. Journal, Vol. 44, 1939; pp. 193-201.
10. BLOK, H. The flash temperature concept, Paper read at the Symposium on "Wear in the Gasoline Engine", Toronto Research Centre, Oct. 1960; Wear, 6, 1973, PP. 483-494.
- 11 BLOK, H. The present status of the theory of gear lubrication; Paper to be read in Japan during the period, Sept. 18 – Oct 8, 1968. Delft, Bibliotheek der Technische Hogeschool.
- 12 BLOK, H. The postulate about the constancy of scoring temperature, in "The interdisciplinary approach of concentrated contacts" NASA SP-237, 1970, pp. 153-248.
- 13 BUCKINGHAM, E. Dynamic loads on gear teeth, Report of the ASME - Special Research Committee on the Strength of Gear Teeth, 1931, New York.
- 14 CABERT, G.; M. DELFOSSE et R. R. MATHIS. Evaluation des contraintes et de la flexion des dents d'engrenages cylindriques droits sous

- charge, Mémoires techniques du CETIM, n° 15, Senlis, 1973; pp. 45-57.
- 15 CHENG, R.S. & F.K. ORCUTT. A correlation between the theoretical and experimental results on the elastohydrodynamic lubrication of rolling and sliding contacts, Proc. Inst. Mech. Engrs., vol. 180, paper 13, pt. 3B, 1965, pp. 158-168.
 - 16 DAWSON, P. H. Effect of metallic contact on the pitting of lubricated rolling surfaces, Jour. Mech. Engng. Sci. Vol. 4, No. 1, 1962, pp. 16-21.
 - 17 DELFOSSE, M. et T. DANG-TRAN. Calcul de la résistance des roues cylindriques d'après les méthodes ISO et AGMA, Informations du CETIM, Senlis" Fev. 1972, pp. 22-29.
 - 18 DOBROVOLSKI, V., K. ZABLONSKI, S. MAK, A. RADCHIK, L. ERLIJ. Elementos de máquinas, Editorial Mir, Moscú, 1970.
 - 19 DOLAN M.M. & BROGHAMER A photoelastic study of the stresses in gear tooth fillets. Univ. Illionis Eng. Expt. Sta. Bull., 335, 1942.
 - 20 DOWSON, D. Elastohydrodynamic lubrication: an introduction and review of theoretical studies. Proc. Inst. Mech. Engrs. 1955, session 1, paper R1, vol. 180, pt. 3B, pp. 7-16.
 - 21 DOWSON, D. & G. R. HIGGINSON. A theory of involute gear lubrication. Paper at the symposium of Gear Lubrication, Institute of Petroleum. 1966. Pt. 11, pp. 8-15.
 - 22 DOWSON, D. & G. R. HIGGINSON. Elastohydrodynamic lubrication. The fundamentals of roller and gear lubrication. Pergamon Press Ltd., Oxford, 1966.
 - 23 DUDLEY, D. Gear handbook. Manufacture and application of gears. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1962.
 - 24 FEIN, R. S. & K.L. KREUTZ Discussion on Boundary Lubrication, by Godfrey I.A. Friction and Wear. NASA 181, 1968. pp. 358-376.
 - 25 GRUBIN, A.N. Fundamentals of the hydrodynamic lubrication theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces. Investigation of the contact of machine components. Scientific Research Inst. for Tech. and Mech. Engrg. Book No. 30, 1949.
 - 26 HENRIOT, G. Traité théorique et pratique des engrenages, (2 tomes). Dunod, Paris, 1968. (4ème édition).
 - 27 HERTZ Über die breührung fester elastischer körper. Journ. f.d. reine und angewandre Meth. Vol. 92., 1882.
 - 28 KU, P.M. Discussion on "the postulate about the constancy of scoring temperature" by H. Blok (Ref. 12, pp. 224-227).
 - 29 MARTIN, H.M. The lubrication of gear teeth, Engineering, vol. 102, 1916, pp. 119 i ss.
 - 30 MERCARELLI, E., S. RUEL et B. VIEILLARD-BARON. Contribution a l'étude des détériorations des dentures des engrenages réducteurs.

- Sciences et Techniques de l'Armement, 46,3 fasc. 1972. pp. 611 - 641.
- 31 MERRITT, H.E. Gear engineering. Pitman, London, 1971.
 - 32 NIEMANN, G. Tratado teórico-práctico de elementos de máquinas. Labor, S.A., Barcelona, 1967.
 33. PETRUSEVICH, A.I. Basic conclusions from de contact-hydrodynamic theory of lubricating (en rus). Ivest. Akad. Nauk. S.S.S.R. Otdel. Teck. Nauk. (1951). (Traducció anglesa: N° STS-133, BTS-480, Science Translation Service, University of Alabama, EE.UU.).
 - 34 RAMON MOLINER, P. Engranajes. Comissió de Publicacions de la ETSEIB (Barcelona)
 - 35 SHIGLEY, J.E. El proyecto en ingeniería mecánica. Ediciones del Castillo, S.A., Madrid, 1965.
 - 36 SPOTTS, M.F. Mechanical Design Analysis. Prentice-Hall, Inc., 1964; Englewood Cliffs, New Jersey.
 - 37 STRAUB, J. PTV value of gear teeth. Progress Report by Automotive Committee, AGMA 101.02 of Oct. 1951.
 - 38 TRIER, H. Trazado y cálculo de las ruedas dentadas. Ed. Labor, S.A., Barcelona, 1964.
 - 39 UNE (Una Norma Española). Engranajes. Nomenclatura de los desgastes y rotura de los dientes. UNE 18.040 (1a revisión). Instituto Nacional de Racionalización del Trabajo. Madrid, 1965.
 - 40 WAY, S. Pitting due to rolling contact. Trans. ASME, vol. 57, 1935.
 - 41 WINTER, H. und K. STOLZLE Tragfähigkeitsberechnung von Zahnradgetrieben Amerikanische und deutsche praxis. Antriebstechnik, 10, Nr 2, 1971. pp. 35- 41.
 - 42 WINTER, H. Flanken Tragfähigkeit gerdverzahnte stirnräder. Das Industrieblatt, heft 5, 1960; heft 12, 1961.
 - 43 WINTER, H. Gear tooth strength of spur gear. Power transmission, London, Febr. 1962.
 - 44 WULPI, D.J. Surface Damage in Gears. Metal Progress, Sept. 1966.

AGRAÏMENTS

Aquest treball ha estat possible gràcies a nombroses orientacions i col·laboracions que he rebut de molt diverses persones. A totes elles, doncs, agraeixo l'ajuda que m'han prestat. No obstant, voldria fer constar el meu agraïment d'una manera especial:

a Pedro Ramon Moliner, Director de la Tesi, per haver-me suggerit el tema, i per l'atenció i il·lusió amb que ha seguit la realització del present treball.

al Laboratori d'Automàtica de l'ETSEIB durant les meves primeres temptatives de càlcul, i més endavant al Centre de Càlcul de la UPB en la realització dels càlculs definitius, per les seves pacients i eficaces ajudes.

La realització d'aquest treball en català ha estat possible, entre altres coses, gràcies al Director de la Tesi que m'ha permès elegir amb tota llibertat la llengua, així com als professors Enric Casassas i Enric Freixa que m'han animat a fer-ho i m'han aclarit els aspectes legals relacionats amb el tema; els consells rebuts de Lluís Marquet sobre terminologia m'han estat d'una gran utilitat.

Finalment, vull reconèixer el laboriós treball de mecanografia que ha realitzat Maria Badel.