L'àlgebra a la Península Ibèrica del segle XVI

Fàtima Romero Vallhonesta

L’àlgebra a la Península Ibèrica del segle XVI

Tesi doctoral de

Fàtima Romero Vallhonesta

Directora

Dra. Maria Rosa Massa Esteve

Tutor

Dr. Xavier Roqué Rodríguez

Programa de Doctorat en Història de la Ciència

Centre d’Història de la Ciència (CEHIC) – Universitat Autònoma de Barcelona

Barcelona, abril de 2018

L'àlgebra a la Península Ibèrica del segle XVI

Tesi doctoral de Fàtima Romero Vallhonesta

Directora: Dra. Maria Rosa Massa Esteve

Tutor: Dr. Xavier Roqué Rodríguez

Programa de Doctorat en Història de la Ciència

Centre d'Història de la Ciència (CEHIC) – Universitat Autònoma de Barcelona

Barcelona, abril de 2018

Y digo que para hazer vna demanda, por la dicha regla, has de imaginar q̃ tal cuenta, o demanda ya es hecha, y respondido, y tu agora la quieres prouar.

Aurel, 1552, 76v

Que hazia por vuestra vida? Acaescio que esta vieja quiso vn dia feriar cierto ganado que tenia, la qual despues q̃ ouo aueriguado el precio que por cada cabeça le auian de dar, se assento à la puerta por do el ganado auia de salir: & demã daua primeramente le pagassen vna cabeça, & despues que estaua pagada, mãdaua que la sacassen. Y luego començaua de nueuo a hazer cuenta de otra, y assi en las demas. Cosa cierto apartada de todo engaño.

Pérez de Moya, 1562, 696

Porq̃ vemos por esperiencia, que todos los hõbres y mugeres auiendo llegado alos años de discrecion, por saber contar hasta ciento, dizen communmente, q̃ son ya buenos cõtadores, y que no los engañaran en dar y recebir dineros: lo que arguye, que los tales que dizen esto, no han aun alcançado, que cosa sea verdaderamente Arithmetica

Roca, 1564, 1r

De manera, que quien sabe por Algebra, sabe scientificamente.

Núñez, 1567, 270v

Viene y yguala[n] a 12 y que vn ny y vn c. y ygua
lan a 10 q. y que [illegible] y 4 qq y yguala[n] a 10 c.
y 16 q. da 10 c. y 8 q. y 16 l. luego la uerdad de la ygua
lacion no esta es treçha a dos o tres quantidades
proporcionales mediatas o ynmediatas como co
rre la doctrina vulgar de los autores sino que se
estiende ynfinitamente de lo qual se colige que
la doctrina de los autores es estrecha y falta pues
no descubre el balor y progression de la cosa mas
que en el canon simple y en los tres conpuestos

Pérez de Mesa, 1598, 96

AGRAÏMENTS

Començaré per agrair els comentaris i suggeriments de tots els professors que han participat en les sessions de seguiment de la meva tesi: Xavier Roqué, Agustí Nieto- Galan, José Pardo, Jesús Maria Galech i Carles Puig entre d'altres, de manera que he pogut anar perfilant els punts més importants de la recerca i m'han conscienciat de la importància del context. La meva primera intenció era dedicar un capítol a cadascun dels aspectes de l'algebrització que destaco en la recerca però, seguint els seus suggeriments, he dedicat cada capítol a un autor per posar més de manifest el context.

Agraeixo també a en Jorge Molero la manera amable de recordar-me els terminis per a lliurar els informes anuals de les sessions de seguiment i també la seva ajuda per a la realització de tots els tràmits burocràtics.

La inestimable ajuda i suport de la meva directora de tesi, Ma. Rosa Massa, m'ha permès realitzar aquesta recerca. Ha estat sempre amatent i disposada a revisar els meus textos i facilitar-me la bibliografia que la recerca anava requerint, alhora que m'exigia el rigor necessari en tota recerca. Han estat molt enriquidores les sessions de treball que hem mantingut, en les quals, a part de comentar diferents textos, m'anava suggerint diferents vies per avançar en la recerca així com documents de suport.

M'han estat de gran ajut les traduccions d'alguns fragments de l'obra *Coss* de Christoff Rudolff, per poder-ne copsar els matisos. Agraeixo aquestes traduccions a Jon Hauer, Malva Lesser i Pau Ferrer, que m'han permès constatar algunes de les diferències entre els textos de Rudolff i Aurel, així com algunes converses amb Jens Høyrup i Albrecht Heeffer al voltant del text de Rudolff i, especialment, els comentaris d'Eberhard Knobloch amb relació al text alemany. També m'ha ajudat amb algun fragment de Clavius en llatí, Magdalena Fàbregues, i Antonia Conde ho ha fet amb un de Núñez en portuguès. Quant a la correcció lingüística i a la tria de determinats termes he tingut sempre la inestimable col·laboració de Cristina Xiqués. A totes elles els agraeixo també les seves aportacions. Pel que fa a algunes qüestions històriques i la terminologia a utilitzar amb relació a la història de la Península Ibèrica al segle XVI, m'han estat de gran ajut els comentaris i recomanacions de Joan Ramon Varela.

Vull agrair, finalment, els ànims i suport de Carles Puig, Mònica Blanco, Joaquim Berenguer, Iolanda Guevara, Pere Grapí i Antoni Roca-Rosell, i els comentaris i suggeriments després de llegir fragments "quasi definitius" de la tesi a la meva família: Enric Xiqués, Immaculada Xiqués, Ferran Xiqués, Cristina Xiqués, Marta Pedrico i Pol Bartrès, que m'han ajudat a millorar-ne diferents aspectes, tant formals com de contingut, i m'han ofert la seva ajuda i suport en tot moment.

ÍNDEX

RESUM

Aquesta tesi analitza com es va introduir l'àlgebra a la Península Ibèrica i com es va anar desenvolupant, a partir de l'anàlisi de totes les obres amb contingut algebraic que s'hi van publicar al segle XVI, i del manuscrit 2294 de finals de segle, de la biblioteca de la Universitat de Salamanca. L'estudi d'altres obres europees de la mateixa època amb contingut algebraic, ens ha permès mostrar també que l'estatus de l'àlgebra a la Península Ibèrica, era semblant al d'altres països europeus.

Es mostren en les obres analitzades, els aspectes que considerem clau en el procés d'algebrització de les matemàtiques, un dels quals és la idea d'àlgebra que tenen les autors, que en alguns casos porta implícita la idea d'anàlisi. Es mostra també, la generalització dels procediments per a resoldre equacions, així com la creació de nous objectes algebraics que aniran definint les seves pròpies regles. La introducció d'una segona incògnita és també un dels aspectes que hem estudiat, ja que va contribuir a la consideració de les equacions com a nous objectes algebraics.

Tots aquests aspectes del desenvolupament de l'àlgebra estan exemplificats amb passatges de les diferents obres analitzades, fent èmfasi en els que són més rellevants en cadascuna.

Finalment, fem referència a les possibles fonts de les obres analitzades i a les relacions entre elles i amb altres obres europees amb contingut algebraic publicades en el mateix període.

ABSTRACT

This thesis analyzes how algebra was introduced in the Iberian Peninsula and how it was developed, based on the analysis of all the works with algebraic content published in this region in the 16th century, and the manuscript 2294 from the end of the century, from the library of the University of Salamanca. The study of other European algebraic works from the same period, has also allowed us to show that the status of algebra in the Iberian Peninsula was similar to that of other European countries.

In the treatises analyzed, the aspects that we consider to be key, in the process of algebraization of mathematics, one of which is the idea of algebra that the authors have, which in some cases implicitly involves the idea of analysis. We have also focused on the generalization of the procedures to solve equations, as well as the creation of new algebraic objects that will define their own rules. The introduction of a second unknown is also one of the aspects that we have looked at, since it contributed to the consideration of the equations like new algebraic objects.

All these aspects of the development of algebra are exemplified with excerpts from the different works analyzed, emphasizing those that are most relevant in each one.

Finally, we refer to the possible sources of the Iberian works and to the relationship between them and other European algebraic treatises published in the same period.

PRÒLEG

Després de diversos anys d'investigació, presento aquesta tesi sobre la introducció de l'àlgebra a la Península Ibèrica. El meu interès per l'algebrització de les matemàtiques va començar amb els cursos corresponents al màster interuniversitari (UAB-UB) d'història de la ciència, motiu pel qual vaig presentar el treball de recerca de final de màster: "Una aproximació al pensament algebraic a l'Espanya del segle XVI", on vaig analitzar la part algebraica del manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca, de Diego Pérez de Mesa. Qui em va parlar d'aquest manuscrit va ser Ma. Rosa Massa Esteve, que em va dirigir el treball de recerca i que ha estat també la meva directora de tesi. Ella havia sentit a parlar d'aquest manuscrit a Isabel Vicente, catedràtica del departament de Física Aplicada de l'Escola Universitària Politècnica de Valladolid, on hi buscava astrologia i hi va trobar, en canvi, aritmètica i àlgebra. La Universitat de Salamanca em va proporcionar el microfilm on hi havia el manuscrit, i la UAB em va facilitar les eines per tal de poder-lo passar a paper.

A partir d'aquell moment he anat participant en diversos simposis i congressos relacionats amb l'algebrització de les matemàtiques i he publicat també diversos articles. La decisió de fer una tesi relacionada amb l'algebrització de les matemàtiques no la vaig prendre de seguida, sinó que va ser el fet d'adonar-me que no hi havia gaire estudis sobre les obres matemàtiques de la Península Ibèrica del segle XVI, que em va fer pensar en la possibilitat d'estudiar-los.

Vaig participar entre el 2007 i el 2009, en un grup d'àlgebra a Tours coordinat per Sabine Rommevaux, i la meva directora de tesi, al centre de recerca CNRS[1] de la Universitat François Rabelais d'aquesta ciutat. El maig de 2009 hi vaig presentar una comunicació sobre sobre *la regla de la quantitat* al segle XVI a la Península Ibèrica, en un col·loqui titulat: *Unité ou pluralité de l'algèbre en Europe (XIIe – XVIe siècles)*. L'agost de 2009 vaig participar a Gant en

[1]Centre National de la Recherche Scientifique.

un simposi titulat *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning* amb una comunicació intitulada "The symbolism in the earliest mathematical works written in Spanish, containing algebra", que es va publicar el 2012[2] a la revista *Philosophica* que publica dos cops l'any la universitat de Gant. Tant el col·loqui com el simposi em van proporcionar una visió més àmplia de l'àlgebra europea, i de les característiques de les matemàtiques al Renaixement amb la recuperació de textos clàssics. En algunes de les taules rodones que hi va haver a Tours en el marc del treball del grup d'àlgebra, es va posar de manifest la necessitat d'estudiar les matemàtiques del Renaixement per elles mateixes, no només des d'un punt de vista retrospectiu com a prefiguració de les del segle XVII, tot i no oblidar les seves aportacions pel desenvolupament futur d'aquesta disciplina. Es va parlar també dels textos no específicament matemàtics que acompanyaven algunes de les obres com podien ser les cartes als lectors, els pròlegs o els apèndixs, per tal de conèixer la intencionalitat dels autors i alguns aspectes relacionats amb el context. Per tal de parlar d'aquests tipus de textos inclosos en obres del Renaixement[3] es va organitzar a Tours, el desembre de 2010, un col·loqui en el qual vaig participar amb una comunicació que vaig titular: *Dialogue sur l'arithmétique dans l'Arithmetica practica y speculativa de Pérez de Moya*, sobre el llibre que clou l'*Arithmetica* de Pérez de Moya de 1562, que és un dels textos de referència d'aquesta tesi.

La participació en els congressos bianuals de la ESHS[4] m'ha permès conèixer persones que treballen autors d'altres països de la mateixa època que els que són objecte d'aquesta tesi, amb algunes de les quals hi mantinc correspondència, la qual cosa m'ha ajudat en la meva recerca. Destacaré tres de les participacions en aquests congressos. En el congrés de Viena de 2008: "Styles of Thinking in Science and Technology", vaig participar en una sessió organitzada per Ma. Rosa Massa Esteve, titulada: "The Algebrization of Mathematics. The

---

[2] Romero Vallhonesta, Fàtima, 2012. "Algebraic symbolism in the first algebraic works in the Iberian Peninsula". *Philosophica*, **87**, 117-152. Ghent University.

[3] Una de les participants en el col·loqui havia fet un treball de mestratge a partir dels pròlegs als *Elements* d'Euclides de Tartaglia i Clavius. La seva comunicació va contribuir que prengués consciència de la importància dels *Elements*, que com veurem seran un referent important per totes les obres que analitzarem: Axworthy, A., 2004. *Le statut des disciplines mathématiques au XVIè siècle au regard des préfaces aux Élements d'Euclide de Niccolò Tartaglia et de Christophe Clavius.* Mémoire de maîtrise spécialisée "Renaissance". CNRS. Tours.

[4] European Society for the History of Science.

significance of Symbolic Language in the Sixteenth Century in Spain and France", amb una comunicació[5] que portava el títol: "The equalities and the rule of quantity in the àlgebra of Diego Pérez de Mesa". En el congrés de Barcelona de 2010, "The circulation of Science and Technology", es tractava la importància de la circulació de les idees per entendre la seva evolució i hi vaig participar en el simposi "Some aspects of the Circulation of Symbolic Language" amb la comunicació[6]: "The circulation of Algebraic Symbolism Related to the First Algebraic Works in the Iberian Peninsula". La tercera participació que vull destacar és la de Praga de 2016, "Science and Power, Science as Power", on vaig intervenir en el simposi "Challenges for the history of engineering: Education, professions, circulation, sustainability, power", organitzat per Antoni Roca-Rosell i Ana Cardoso de Matos, amb la comunicació: "Mathematics involved in the training for gunners in 16th century" que em va permetre endinsar-me en disciplines afins a les matemàtiques i també en la situació de context del segle XVI. La lectura de l'obra *Disciplinas, saberes y prácticas*[7], de Víctor Navarro, de la qual en vaig escriure una ressenya[8], em va permetre també una immersió en aquest context.

El febrer de 2014 vaig participar en dos seminaris sobre l'àlgebra hispànica en el període renaixentista entorn del lèxic i els conceptes que s'empraven aleshores, amb Ma. Rosa Massa, la meva directora de tesi, i Itzíar Molina, doctoranda de la Universitat de Salamanca que participava en el projecte: *Diccionario de la Ciencia y de la Técnica del Renacimiento* (DICTER) d'aquesta universitat i feia una estada de recerca al centre de recerca per a la història de la tècnica "Francesc Santponç i Roca". L'objectiu d'aquest projecte és l'elaboració

[5]Romero Vallhonesta, Fàtima, 2008. "The equalities and the rule of quantity in Pérez de Mesa's work", a Hermann Hunger, Felicitas Seebacher, Gerhard Holzer (ed.) *Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for the History of Science,* 122-130. Vienna.

[6] Romero Vallhonesta, Fàtima, 2012, "The circulation of algebraic symbolism related to the first algebraic works in the Iberian Peninsula", a Roca-Rosell (ed.), *The Circulation of Science and Technology: Proceedings of the 4th Ingernational Confeence of the ESHS,* 396-404. SCHCT-IEC. Barcelona.

[7] Navarro Brotons, Víctor, 2014. *Disciplinas, saberes y prácticas. Filosofía natural, matemáticas y astronomia en la sociedad española de la época moderna.* Publicacions de la Universitat de València.

[8] Romero Vallhonesta, Fàtima, 2016. "Disciplines, sabers i pràctiques" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **15,** 517-537, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca".

d'aquest diccionari, és a dir, la realització del tractament lexicogràfic del vocabulari especialitzat de la ciència (exclosa la vessant "bio", és a dir, la medicina, botànica, zoologia, etc.) i de la tècnica desenvolupades a l'Espanya del segle XVI i primer quart del XVII. Vam estat tractant, en aquests seminaris, les 160 accepcions que Molina havia classificat amb la marca "àlgebra", per tal de definir-les per a ser incloses en el DICTER. El fet d'haver de definir tots aquests termes em va obligar a aprofundir en la terminologia utilitzada pels diferents autors d'àlgebres de la Península Ibèrica per anomenar els diferents objectes i procediments algebraics que s'anaven introduint en els textos de matemàtiques.

Em va ser de gran ajut pel que fa al context europeu, la participació en dos seminaris que van tenir lloc els dies 22 i 23 de gener de 2015 sobre la introducció de l'àlgebra a Europa, en el primer dels quals, amb la participació de Jens Høyrup i Albrecht Heeffer, convidats al centre de recerca per a la història de la tècnica "Francesc Santponç i Roca", es va posar de manifest la importància de la *Triparty* (1484) de Nicolàs Chuquet en l'algebrització de les matemàtiques i es va debatre sobre les possibles relacions entre aquesta obra i l'àlgebra de Rudolff (1525), a la qual em referiré més endavant[9]. En el segon seminari va tenir lloc un debat més general sobre les matemàtiques al Renaixement. El mateix dia 23 vaig participar en el congrés *Mathematics in the Renaissance: language, methods and practices*, que va tenir lloc a l'ETSEIB[10], amb la comunicació "German sources in the introduction of àlgebra in the Iberian Peninsula", en la qual avançava alguns dels resultats de la recerca objecte d'aquesta tesi.

El primer problema que vaig tenir amb la recerca, va ser l'obtenció dels textos originals dels autors i també, al principi, la dificultat de la seva lectura. Tampoc m'ha facilitat la feina la diversitat de llengües dels textos que he acabat treballant: alemany antic, difícil d'entendre fins i tot pels parlants actuals, toscà, llatí, portuguès, italià, francès antic i anglès. Un dels principals problemes que he tingut, però, ha estat delimitar la recerca. La majoria de

---

[9] Vegeu la nota 218 de la taula dels problemes que relacionen els d'Aurel i Rudolff en el capítol 2.
[10] Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona.

les ramificacions relacionades amb la recerca, m'han interessat molt i algunes d'elles, com, per exemple, l'estudi de l'àlgebra com un llenguatge, m'ha costat molt deixar-les de banda.

Un altre problema que no havia previst és la quantitat de textos que s'han anat publicant darrerament i que, d'alguna manera, estan relacionats amb la meva recerca. Alguns d'ells els he pogut obviar, però d'altres no. A tall d'exemple en citaré dos. Un d'ells és de Karen Hunger Parshall, publicat a finals de 2016 amb el títol: *A plurality of algebras, 1200-1600: Algebraic Europe from Fibonacci to Clavius,* al butlletí de la British Society for the History of Mathematics que cita dues publicacions meves i una de la meva directora de tesi. Aquest article fa referència sobretot al desenvolupament de l'àlgebra a Itàlia i només dedica un apartat a la pràctica de l'àlgebra fora d'Itàlia, fent referència bàsicament a França i Alemanya. De fet, les obres dels algebristes de la Península Ibèrica són força desconegudes, tot i que darrerament Ma. Rosa Massa, Maria do Céu Peireira da Silva, i jo mateixa, estem donant a conèixer alguns aspectes de les diferents obres. En el cas de Maria do Céu Pereira, sobretot amb relació als continguts relacionats amb la geometria. L'altre article recent al que vull fer referència és de Jeffrey A. Oaks i es va publicar el juny de 2017 amb el títol: "Irrational "coeficients" in Renaissance Algebra" a la revista *Science in context.* L'autor hi parla de l'acceptació o no dels nombres irracionals com a coeficients per part dels primers algebristes. Un dels autors als quals fa referència és Christoff Rudolff[11] que és la font principal de Marco Aurel, autor del primer tractat d'àlgebra imprès publicat a la Península Ibèrica i, per tant, està clar que no podia tancar la recerca sense haver llegit aquest article.

[11] Hi ha pocs estudis sobre l'obra de Rudolff, entre els quals: Terquem, M., 1857. "Christophe Rudolff". *Annali di Scienze matematiche e fisiche,* **8**, 325-338; Reich, K., 1994. "The "Coss" tradition in algebra", a Grattan-Guinness (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,* **1**, 192-199. Routledge. London and New York i Heeffer, A., 2012b. "The rule of quantity by Chuquet and De la Roche and its influence on German Cossic algebra, a Rommevaux, S., Spiesser, M i Massa Esteve, M.R. (eds.), *Pluralité de l'algèbre a la Rtenaissance,* 127-147. Honoré Champions. Paris. Per la nostra recerca hem utilitzat el facsímil de l'edició original, inclosa a Kaunzner and Röttel 2006.

CAPÍTOL 1. INTRODUCCIÓ

La recerca que presentem se situa en l'època del Renaixement, concretament en el segle XVI, i està centrada en els inicis de l'àlgebra a la Península Ibèrica. Aquesta disciplina es va anar desenvolupant a partir de les aritmètiques pràctiques, on les equacions es començaven a escriure amb abreviacions i símbols, en contrast amb la manera totalment retòrica d'expressar-les en la majoria de textos anteriors.

La paraula "àlgebra", és polisèmica. Ha tingut diferents significats i encara els té actualment. Un estudiant de secundària, per exemple, pot identificar l'àlgebra amb la resolució d'equacions i un estudiant de Grau pot referir-se a l'àlgebra com a l'estudi d'estructures com grup, anell o cos, per exemple. En aquesta tesi ens referirem a "àlgebra" com a una part de la matemàtica que va sorgir com una extensió de l'aritmètica per la necessitat de generalitzar determinats processos relacionats amb la resolució d'equacions, proporcionant procediments que, de manera sistemàtica, ordenessin els càlculs per a poder resoldre problemes. Els autors s'hi refereixen com *àlgebra, Art Major* o *regla de la cosa.* Els objectes que va anar creant, van anar definint les seves regles i construint models, per tal de poder resoldre de la mateixa manera els problemes del mateix tipus, fins que va esdevenir una disciplina de ple dret que va haver de fer-se un lloc per un camí tortuós, entre l'aritmètica i la geometria. També utilitzarem el terme "àlgebra" per referir-nos a les obres amb contingut algebraic que tractarem al llarg de la tesi. Pel que fa al terme *caracter,* la majoria dels autors estudiats l'utilitzen per referir-se a les incògnites però l'utilitzarem també en el sentit actual de signe gràfic, del qual el terme tècnic utilitzat pels autors n'és un cas particular.

Pel que fa al Renaixement, va ser un moviment intel·lectual que va renovar la cultura europea en tots els àmbits, a partir del moviment humanista, amb el qual es volien recuperar la cultura i els sabers clàssics. Es considerava la cultura de l'Antiguitat clàssica com a un model a imitar en contrast amb la "barbàrie" medieval, segons l'expressió encunyada pels humanistes. El terme "humanisme" prové de l'èmfasi posat en el moviment de reforma cultural i educativa del Renaixement, en els sabers que es consideraven més relacionats amb l'ésser humà i en la vida activa: la història, la gramàtica, la retòrica, la poesia i la filosofia moral. L'humanisme pretenia restituir el llegat històric de l'antiguitat mitjançant un depurat treball filològic, que a part de superar la "barbàrie" de les traduccions i interpretacions medievals, es proposava també donar a conèixer textos que es consideraven importants i que eren poc o mal coneguts a l'Edat Mitjana, com la *Geografia* de Ptolemeu i les obres d'Apol·loni, Euclides, Diofant, Pappus, Arquimedes i Aristarc per citar les que tenen més relació amb les matemàtiques[12]. De fet, alguns autors d'àlgebres no reconeixien els orígens àrabs d'aquesta disciplina, i els atribuïen a l'obra de Diofant, de manera que es va construir un relat en determinats àmbits en el qual l'àlgebra tenia el seu origen a l'Antiguitat clàssica[13].

El període que abasta la tesi és molt ric en produccions científiques i si bé s'ha escrit força sobre les obres tècniques, no s'ha publicat gaire sobre les obres matemàtiques. S'ha de tenir en compte que els autors del Renaixement eren persones amb múltiples interessos i solien escriure sobre diverses disciplines. Aquesta circumstància ha fet que, tot i que la tesi està focalitzada en les obres d'àlgebra, s'hagin hagut d'estudiar les contribucions dels autors a altres matèries que ajuden a contextualitzar la tesi.

De fet, l'àlgebra va rebre un impuls important en una època en què van proliferar obres de diferents disciplines relacionades amb les matemàtiques, com per exemple, la navegació, l'astronomia, la cosmologia[14], l'artilleria o l'arquitectura, que es poden englobar en el que més endavant s'anomenarien "matemàtiques mixtes"[15].

---

[12] Ordóñez, Javier; Navarro, Víctor; Sánchez-Ron, José Manuel, 2007. *Historia de la ciència,* 243-247. Espasa Calpe S.A. Pozuelo de Alarcón.

[13] Cifoletti, Giovanna, 1996. "The creation of the History of Algebra in the sixteenth century" a Gosldstein, Catherine; Gray Jeremy & Ritter, Jim (eds.). *Mathematical Europe,* 121-142. Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme. Paris.

[14] Sobre la cosmologia a l'Espanya del segle XVI, vegeu: Navarro, V.; Rodríguez, E., 1998. *Matemáticas, cosmología y humanismo en la España del siglo XVI. Los Comentarios al segundo libro de la Historia Natural de Plinio de Jerónimo*

1.1. Sobre les disciplines afins a les matemàtiques

La navegació va experimentar a finals del segle XV una transformació sense precedents (González[16], 2006). Ja a mitjans de segle, el príncep portuguès conegut com Enric el Navegant (1394-1460), va fundar a Sagres una escola d'estudis nàutics, geogràfics i astronòmics, des d'on va organitzar diverses expedicions marítimes animant els seus mariners a anar cada vegada més lluny. En menys d'un segle, els europeus havien sortit dels límits del seu petit continent i el 1517 havien acabat fent la volta al món amb l'expedició de Magallanes que va concloure tres anys més tard. Amb aquests viatges, van sorgir nous problemes d'astronomia, cosmografia i navegació, ja que es va passar d'una navegació costera en la qual els navegants s'orientaven a partir de la costa propera, a una navegació d'altura o navegació astronòmica basada en l'observació del Sol i l'estrella polar. Aquests canvis van propiciar la producció de diferents tractats relacionats amb aquestes disciplines. En el cas de la Península Ibèrica podem destacar els d'astronomia[17] d'Antonio de Nebrija[18] (1517), Jerónimo Muñoz[19] (1573), i Josepe Micón[20] (1578) i la traducció de la *Sphera* de Johannes de Sacrobosco[21] per Jerónimo Chaves (1545); els de cosmologia de Martín

---

Muñoz. Cuadernos Valencianos de Historia de la Medicina y de la Ciencia, LIV. Instituto de Estudios Documentales e Históricos sobre la Ciencia. Universitat de València-CSIC. València.

[15] Sobre els significat de "matemàtiques mixtes" es pot llegir: Massa-Esteve, M. Rosa, Roca-Rosell, Antoni i Puig-Pla, Carles, 2011. "Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century". *Engineering Studies* , **3**, n. 3, 233-253 i sobre l'evolució del terme, Brown, Gary I., 1991, "The Evolution of the Term "Mixed Mathematics"". *Journal of the History of Ideas*, **52**, n. 1, 81-102.

[16] González González, F.J., 2006. "Del "Arte de marear" a la navegación astronómica: Técnicas e instrumentos de navegación en la España de la Edad Moderna". *Cuadernos de Historia Moderna. Anejos*. **V**, 135-166.

[17] Sobre l'activitat astronòmica, vegeu: Navarro Brotons, Víctor, 1992. "La actividad astronómica en la España del siglo XVI: perspectivas historiográficas". *Arbor CXLII,* (558-559-560), 185-216 i sobre l'ensenyament de l'astronomia a les universitats: Navarro Brotons, Víctor, 2006. "The cultivation of astronomy in Spanish Universities in the latter half of the 16th century" a Feingold, M. i Navarro-Brotons, V. (eds.) *New studies in the History and Philosophy of Science and Technology. Universities and science in the early modern period*. Archimedes, vol. 12, 83-98. Springer. Netherlands.

[18] Nebrija, Antonio de, 1517. *Tabla de la diversidad de los días y horas*. Arano de Guillén de Brocar. Alcalá de Henares.

[19] Muñoz, Jerónimo, 1573. *Libro del nuevo cometa*. Pedro de Huete. Valencia.

[20] Micón, Josepe, 1578. *Diario y juyzio del grande cometa*. Jayme Sendrat. Barcelona.

[21] Sacrobosco, Juan de, 1545. *Tractado de la sphera*. Juan de León. Sevilla. Traducció de Hierónymo de Chaves.

Fernández de Enciso[22] (1519), Andrés de Poça[23] (1585), Simón de Tovar[24] (1595) i la traducció anònima de la *Cosmographia* de Pedro Apiano[25] (1575). Pel que fa a la navegació, destacarem els tractats de Francisco Falero[26] (1535), Pedro de Medina[27] (1545, 1563), Martín Cortés de Albacar[28] (1551); Bernardino de Escalante[29] (1577); Diego García de Palacio[30] (1587) i Rodrigo Zamorano[31] (1581).

També les obres militars van adquirir durant el segle XVI, gran importància a Europa, que va ser escenari d'intenses campanyes bèl·liques que havien començat el segle XV, i que es van allargar fins al XVII. Des de la meitat del segle XVI van aparèixer treballs relacionats amb diferents aspectes de la vida militar, que incloïen tractats sobre l'ensenyament de l'artilleria i les teories sobre el tir artiller. L'artilleria, que s'aprenia mitjançant els ensenyaments d'un mestre artiller, es va transformar finalment en una professió que actualment associaríem a l'enginyeria[32]. Una de les obres més rellevants, d'entre les impreses a la Península Ibèrica sobre l'anomenat art militar, és *El perfecto capitan*[33], de 1590, l'autor de la qual és Diego de Álava Viamont[34]. D'aquesta obra, n'hem analitzat en profunditat els llibres 5è i 6è, que estan dedicats a la balística o "nova ciència de l'artilleria", on Álava

---

[22] Fernández de Enciso, Martín, 1519. *Suma de Geographia*. Juan Cromberger. Sevilla.
[23] Poça, Andrés de, 1585. *Hydrografía*. Mathías Mares. Bilbao.
[24] Tovar, Simón de, 1595. *Examen y censura del modo de averiguar las alturas de las tierras*. Rodrigo de Cabrera. Sevilla.
[25] Apiano, Pedro, 1575. *Cosmographía*. Juan Bellero. Anvers.
[26] Faleiro, Francisco, 1535. "Tratado del Sphera y del Arte del Marear compuesto por Francisco Faleiro natural del Reyno de Portugal"a J. Bensaude (eds.), *Opera Omnia do Academico Titular Fundador da Academia Portuguesa da Historia, Joaquim Bensaude (1859- 1952)*, 9-110. Academia Portuguesa da Historia, IV. Lisboa.
[27] Medina, Pedro de, 1545. *Arte de navegar*. Francisco Fernández de Córdova, Valladolid
-1563. *Regimiento de navegación*. Simón Carpintero, Sevilla.
[28] Cortés de Albacar, Martín, 1551. *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar con nuevos instrumentos y reglas: exemplificado con muy subtiles demonstraciones.* Antón Álvarez. Sevilla.
[29] Escalante, Bernardino de, 1577. *Discurso de la navegación.* Biuda de Alonso Escrivano. Sevilla.
[30] García de Palacio, Diego, 1587. *Instrucción nàutica*. Pedro de Ocharte, México.
[31] Zamorano, Rodrigo, 1581. *Compendio del arte de navegar*. Alonso de la Barrera. Sevilla.
[32] Sobre l'artilleria i el seu ensenyament, hem consultat: Medina Ávila, Carlos J., 2014. "De la Escuela a la Academia. Los centros de formación de artilleros", en el número extraordinari de la *Revista de Historia Militar* de març de 2014, editada pel "Instituto de Historia y Cultura Militar".
[33] Álava Viamont, Diego de, 1590. *El perfecto capitán instruido en la disciplina militar y nueva ciencia de la artilleria.* Pedro Madrigal. Madrid.
[34] Álava era un home de lleis i, per tant, un llec en matèria castrense, però es va interessar pel tema per motius familiars: el seu pare, Francisco de Álava era capità general d'Artilleria.

comenta les idees de la *Nova Scientia* (1537) de Niccolò Tartaglia[35] referents al moviment dels projectils. Com a deixeble de Muñoz[36], Álava explica les experiències realitzades pel seu mestre per tal de rebatre la teoria que Tartaglia exposa en la *Nova Scientia,* referent a què l'increment de l'abast dels projectils és el mateix per a cada grau d'elevació de la peça.

Es van fer també al segle XVI les traduccions al castellà de les obres d'arquitectura de Lleó Baptista Alberti[37] i Marc Vitruvi[38] i es van escriure diversos tractats sobre fortificacions, entre els quals destaca el de Cristóbal de Rojas (1598)[39]. Aquestes fortificacions que configuraven la imatge de les ciutats de frontera eren part de la seva arquitectura, però si tenim en compte la seva finalitat, s'integraven també en l'art militar[40]. La concepció vitrubiana de l'arquitecte com a "home universal"[41], per tant, va deixar pas a la concepció més prosaica de l'enginyer militar com a soldat expert. Rojas fa èmfasi en la seva obra en els coneixements matemàtics que ha de tenir un enginyer i especialment en els de geometria, fent referència a la fusió del soldat i l'arquitecte en una sola professió, la d'enginyer. Aquesta idea la plasma en la imatge que obre el llibre amb el seu retrat portant la cuirassa, amb els *Elements* d'Euclides a la mà dreta, mentre que amb l'esquerra, que reposa sobre l'elm, subjecta un compàs i on dues fortaleses estrellades, una pentagonal i

Figura 1.1. Imatge de Rojas

[35] Tartaglia, Niccolò, 1537. *Nova Scientia*. Venice.
[36] Jerónimo Muñoz (ca. 1520 - ca. 1591) va néixer a València on va començar els seus estudis que va continuar a diferents llocs d'Europa. Va ser un dels científics espanyols més destacats el segle XVI, que va exercir com a professor d'hebreu i matemàtiques a les universitats de València i Salamanca.
[37] Alberti, León Baptista, 1582. *Los diez libros de Architectura.* Alonso Gómez. Madrid. Traducció de Francisco Loçano.
[38] Vitrubio Pollión, Marco, 1582. *De Architectura.* Juan Gracián. Alcalá de Henares. Traducció de Miguel Urrea.
[39] Rojas, Cristóbal de, 1598. *Teorica y practica de fortificación conforme las medidas y defensas destos tiempos, repartida en tres partes.* Luis Sánchez. Madrid.
[40] Va ser, de fet, el desenvolupament de l'artilleria que va obligar a fer modificacions substantives en les construccions per tal que fossin eficaces per protegir-se del foc artiller.
[41] En el capítol 1r del primer llibre de la seva *De Architectura,* Vitruvi explica que l'arquitectura és una ciència adornada amb nombrosos ensenyaments teòrics i amb diverses instruccions que serveixen de dictamen per a jutjar totes les obres que arriben a la seva perfecció mitjançant les altres arts...I més endavant: "els que van rebre de la naturalesa tant talent, perspicàcia i memòria, que puguin adquirir perfectament la Geometria, Astrologia, Música, i altres disciplines, passen els límits d'arquitectes i es fan matemàtics...(Vitrubi, 1787, 1,8).

l'altra quadrada, ocupen els angles superiors i flanquegen una esfera que mostra Àfrica i les Índies.

1.2. Sobre les aritmètiques comercials

Les transaccions comercials van originar la necessitat de l'aprenentatge de l'aritmètica[42], de manera que se'n van escriure molts tractats, essent el més antic dels impresos la *Aritmetica de Treviso*[43], publicada en aquesta ciutat italiana el 1478 i d'autor anònim. Cal destacar que la segona aritmètica impresa va ser la *Summa de la art de arismetica* de Francesc Santcliment, publicada a Barcelona el 1482[44]. Les necessitats relacionades amb l'activitat mercantil i financera havien impulsat el desenvolupament de l'aritmètica i del seu ensenyament ja a partir de l'any 1300, convertint-la en una eina imprescindible pels mercaders, de manera que es va estimular el seu aprenentatge i la difusió dels seus manuals. Aquests manuals d'aritmètica van ser en aquell moment revolucionaris i els hem de contemplar com a testimonis actius del dinamisme i eficàcia dels homes de negocis d'aquella època, pels quals eren eines imprescindibles per a dur a terme activitats comptables i fiscals. Els mercaders s'havien de moure amb desimboltura en un món cada vegada més complex que els exigia el coneixement d'instruments de canvi i regles aritmètiques per tal de portar amb eficàcia la comptabilitat. Aquest aprenentatge s'iniciava amb l'ensenyament de la lectura, l'escriptura i el càlcul, com instruments que permetien una millor administració dels negocis i les propietats[45]. Hi havia també un altre tipus d'aritmètiques anomenades acadèmiques o especulatives, dedicades a l'estudi de les propietats dels números enters i de les relacions entre magnituds, que tenia un caràcter propedèutic en disciplines com la

---

[42] Vegeu: Salavert Fabiani, Vicente, 1990b. "Aritmética y sociedad en la España del siglo XVI", a S. Garma, D. Flament i V. Navarro (eds.), *Contra los titanes de la rutina*. Encuentro, en Madrid, de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofía de la matemática, 51-69, CSIC. Madrid.

[43] Una transcripció del text d'aquesta aritmètica es pot llegir a: Swetz, Frank J., 1987. *Capitalism and Arithmetic. The New Math of the 15th Century.* La Salle. Open Court. Illinois.

[44] Hi ha una edició moderna: Malet, A. (ed.), 1998. *Francesc Santcliment. Summa de l'art d'aritmètica*. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Eumo editorial. Vic.

[45] Vegeu Caunedo del Potro, Betsabé , 2009. "Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés". *Pecvnia* 8, 71-96 i Salavert, V., 1990a. "Introducción a la historia de la Aritmética Práctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI". *Dynamis* 10, 63–91.

música o la filosofia. Les regles introduïdes pels àrabs, que seran la base pel desenvolupament de l'àlgebra, apareixien però, en capítols finals en algunes de les aritmètiques mercantils i consistien en una sèrie de tècniques que les complementaven i que van anar arraconant els mètodes de falsa posició[46].

1.3. Sobre la traducció de textos àrabs

Gràcies a la seva proximitat a la cultura islàmica, les ciutats de Toledo, Barcelona i Toulouse, van atraure molts estrangers interessats en la traducció de textos de l'àrab[47]. La figura més destacada de l'escola espanyola va ser Gerard de Cremona[48] (1114-1187). El seu principal objectiu va ser que es conegués la major part possible del corpus de la ciència grega i aràbiga. La producció més rellevant de la ciència àrab que va traduir, va ser el tractat d'àlgebra *Al-Kitâb al-Mukhtasar fî Hisâb al-Jabr wa al-Muqâbala* de Abu Ja^{c}ar Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî, que es considera el primer tractat sobre regles algebraiques, les regles de *al-jabr* i *al-muqabala*[49], i que va ser la font principal del desenvolupament de l'àlgebra europea. Ja havia estat traduït per Robert de Chester[50] (ca. 1110-més tard de 1157) a Segovia el 1145 amb el títol *Liber algebrae et almucabala*, d'on prové l'actual nom d'*àlgebra.* Aquestes regles van ser difoses en el món occidental per Leonardo de Pisa (1180-1250), més conegut pel nom de Fibonacci, perquè era fill d'un cònsol anomenat Bonacci. A la seva obra *Liber*

---

[46] Són mètodes per a resoldre problemes, molt utilitzats a les aritmètiques mercantils que consistien en provar amb un valor que podria ser la solució, i a partir d'aquest valor, normalment amb una regla de tres, trobar el valor vertader.

[47] Sobre els indicadors que evidencien les fonts àrabs dels textos matemàtics i sobre les traduccions, vegeu: Hamon, Gérard, 2015, "La mémoire des sources arabes" a Barbin, Évelyne i Maltret, Jean-Louis (dir.), *Les Mathématiques Mediterranéennes d'une rive et de l'autre,* 125-138. Ellipses. Paris.

[48] Segons expliquen els seus biògrafs, Gerard de Cremona va anar a Toledo per tal de trobar i llegir l'*Almagest* de Ptolemeu que no es podia trobar en llatí. A Toledo va estudiar àrab i va traduir l'*Almagest* (1175) així com 90 textos més.

[49] Aquests termes fan referència a la transposició de termes d'un costat a l'altre en la resolució d'equacions, que comporta dos passos: fer la mateixa operació a ambdós costats de la igualtat i simplificar després en un dels membres.

[50] Robert de Chester va ser traductor d'obres científiques i religioses àrabs al llatí. Malgrat la seva condició de clergue, va estar més interessat per traduir les obres científiques que les religioses, tot i que acabaria esssent més conegut per haver estat el primer traductor de l'Alcorà al llatí.

abaci[51] (1202) hi inclou els problemes que va aprendre a resoldre a les àlgebres àrabs, així com els mètodes de càlcul de la numeració índia. Com ja hem comentat, l'activitat mercantil havia propiciat el desenvolupament de l'aritmètica de manera que entre 1300 i 1500 van aparèixer un bon nombre de les obres que actualment anomenem aritmètiques mercantils, de les quals més de tres-centes, es trobaven en manuscrits italians per només, trenta, per exemple, en manuscrits francesos. L'aparició de la impremta a meitat del segle XV va ajudar a la seva difusió. Estaven escrites normalment en llengua vulgar, no en llatí, i constaven d'una part teòrica: nombres, operacions, regla de tres, regla de falsa posició,... i d'una part pràctica: problemes de barates, impostos, aliatges, correus, companyies, monedes...Algunes incloïen un darrer bloc d'àlgebra i altres no, de fet no s'hi resolien casos nous, però van ajudar a la difusió de les regles algebraiques àrabs. El saber d'aquestes aritmètiques mercantils i de les fonts orientals usades pels mercaders italians es recullen en l'obra enciclopèdica de Luca Pacioli (1447-1517)[52] que va tenir gran difusió a la seva època. El següent impuls vindrà de la Itàlia renaixentista del segle XVI, època molt rica culturalment, quan es comencen a recuperar textos grecs i es tradueixen al llatí.

1.4. Sobre els primers textos amb contingut algebraic

En el segle XVI es va fer un pas important en el desenvolupament del llenguatge simbòlic. Així, per exemple, des del segle XV ja s'havien començat a utilitzar alguns dels símbols que s'utilitzen actualment, com + i -, la primera aparició dels quals en un text imprès va tenir lloc a Alemanya el 1489, a l'obra *Behende und hupsche Rechnung auf allen kauffmanschafft* de Johannes Widman[53] (1462-1498). El símbol = va ser introduït per Robert Recorde (1510-1558) en el seu tractat d'àlgebra de 1557[54], tot i que els seu ús va trigar molt en

---

[51] Hem treballat amb l'edició: Sigler, L. E., 2002. *Fibonacci'es Liber Abaci.* Springer-Verlag. New York.

[52] La *Summa* de Pacioli és el primer llibre imprès, que conté àlgebra. Aquesta obra és un compendi del coneixement matemàtic que s'ensenyava a les escoles d'àbac i està dividit en *distinctions*, cadascuna d'elles en *tractati* i cada *tractatus* en *articuli*. El quart, cinquè i sisè tractats de la vuitena distinció de la *Summa* de Pacioli, estan dedicats a l'àlgebra: Pacioli, 1494. *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità.* Venezia.

[53] Cajori, Florian, 1928-29. *A History of Mathematical Notations.* I. *Notations in Elementary mathematics.* II. *Notations Mainly in Higher Mathematics,* 128, 230-231. La Salle.Open Court. Illinois.

[54] Recorde, Robert, 1557. *The Whetstone of Witte.* London. Facsimile reprint New York: Da Capo Press, 1969.

generalitzar-se, així com l'ús de símbols per a designar les incògnites i les seves potències, que es va anar desenvolupant molt lentament. En la segona meitat del segle XVI van començar a aparèixer tractats dedicats a difondre les regles bàsiques de l'àlgebra que, a poc a poc, va anar deixant de ser concebuda només com una eina de resolució de problemes per esdevenir un objecte d'estudi per ella mateixa. De fet, va ser capaç d'agafar cos com una branca independent de les matemàtiques a partir de la publicació l'any 1591 de l'obra *In Artem Analyticen Isagoge* de François Viète[55].

A part d'aquestes importants contribucions d'algunes obres al desenvolupament del llenguatge simbòlic, volem destacar entre les primeres obres europees amb contingut algebraic: *Ayn new Kunstlich Buech* (1518) de Heinrich Schreiber[56], *Larsimetique nouvellement composee* (1520) d'Étienne de la Roche[57], *Summa de arithmetica* (1521) de Francesco Ghaligai[58], *Behend und hübsch Rechnung durch die Kunstreichen Regeln Algebre, so gemeincklich die Coss gennent werden* (1525) de Christoff Rudolff[59], *Practica arithmetice & mesurandi singularis* (1539) i *Ars Magna* (1545), ambdues de Girolamo Cardano, *Arithmetica integra*[60] (1544) de Michael Stifel i *Quesiti et inventioni diverse*[61] (1546) de Niccolò Tartaglia.

Hi ha diversos estudis sobre el procés d'algebrització de les matemàtiques a França (Van Egmond[62] 1988, Cifoletti 2004[63], 2006[64]), Itàlia (Van Egmond[65]1981, Franci i Toti 1985[66],

---

[55] Viète, François, 1591. *In artem analyticen isagoge*. J. Mettayer. Tours.
[56] Schreiber, Heinrich, 1518. *Ayn new Kunstlich Buech.* Johannes Stuchs. Nürberg.
[57] Roche, Estienne de la, 1520. *L'arismethique novellement compose par maistre Estienne de la Roche dict Villefranche natif de Lyon sou les Rosne*. Lyon (reedició de 1538).
[58] Ghaligai, Francesco, 1521. *Summa de arithmetica.* Bernardo Zuchetta. Firenze.
[59] Kaunzner, Wolfgang and Röttel, Karl, 2006, *Christoff Rudolff aus Jauer in Schlesien. Zum 500. Geburtstag eines bedeutenden Cossisten und Aritmetikers, der aus diesem seinerzeit hoheitlich zur Krone von Böhem gehörenden Landesteil stammt*. Polygon-Verlag. Eichstätt.
[60] Stifel, Michael, 1544. *Arithmetica integra.* Johann Petreius. Nürnberg.
[61] Tartaglia, Niccolò, 1546. *Quesiti et inventioni diverse.* Venezia.
[62] Van Egmond, Warren, 1988. "How Algebra came to France?" a Hay, Cynthia (ed.), *Mathematics from Manuscript to Print (1300-1600),* 127-144. Clarendon Press. Oxford.
[63] Cifoletti, Giovanna, 2004. "The Algebraic Art of Discourse: Algebraic *Dispositio, Invention* and *Imitation* in Sixteenth Century France", a Chemla, Karine (ed.), *History of Science, History of Text,* 123-135. Springer. New York.
[64] Cifoletti, Giovanna, 2006. "From Valla to Viète: The Rethorical Reform of Logic and Its Use in Early Modern Algebra" a *Early Science and Medicine,* vol. 11, n. 4, 390-423. Brill. Leyde.

Høyrup[67] 2001, Franci[68] 2010, Gavagna[69] 2012), a Anglaterra (Stedall[70] 2011) i a Portugal (Machado[71], 2011). N'hi ha també que tracten el procés d'algebrització d'una manera més general (Rommevaux, Spiesser i Massa-Esteve[72] 2012; Katz i Hunger Parshall[73] 2014) però n'hi ha molt pocs centrats en la Península Ibèrica i tots ells tractats parcialment.

Els primers textos espanyols amb contingut algebraic van aparèixer com a capítols d'aritmètiques mercantils, com a la majoria dels primers textos europeus. Aquests textos contrastaven de manera explícita l'*Art Major* o àlgebra amb l'*Art Menor*, tal com s'anomenava sovint l'aritmètica. Hi ha alguns estudis sobre les matemàtiques a l'Espanya del segle XVI, la majoria dels quals tracten específicament de les aritmètiques comercials (Rey Pastor[74] 1934; López Piñero[75] 1979; Salavert Fabiani[76] 1990a; Navarro Brotons[77] i al. 1999), i fan referència als tipus de textos i a les tècniques utilitzades, sobretot en les parts dedicades a l'aritmètica. Hi ha pocs treballs focalitzats en la part algebraica d'aquests textos

---

[65] Van Egmond, Warren,1981.*Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*. Editrice Giunti Barbera. Firenze.

[66] Franci, Raffaella; Toti Rigatelli, Laura, 1985. "Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli". *Janus,* **72**, 17-82.

[67] Høyrup, Jens, 2001. "The Founding of Italian Vernacular Algebra", a *Commerce et mathématiques du moyen âge à la renaissance, 24ràbi de la Méditerranée,* 129–156. Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13–16 mai 1999). Toulouse: Éditions du C.I.H.S.O.

[68] Franci, Raffaella, 2010. "The History of Algebra in Italy in the 14th and 15th Centuries. Some Remarks on Recent Historiography" a *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Nova època **3**:2, 175–194.

[69] Gavagna, Veronica, 2012, "L'Ars magna aritmeticae nel corpus matemático di Cardano" a *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance,* 237-268. Honoré Champion éditeur. Paris.

[70] Stedall, Jacqueline, 2011. *From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra.* European Mathematical Society Publishing House. Zürich.

[71]Machado Mota, Bernardo, 2011. *O estatuto da matemàtica em Portugal nos séculos XVI e XVII.* Fundaçao Calouster Gulbenkian.

[72] Rommevaux, Sabine; Spiesser, Maryvonne et Massa Esteve, Maria Rosa, 2012. *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance.* Honoré Champion éditeur. Paris.

[73] Katz, Víctor J. And Hunger Parshall, Karen, 2014. *Taming the Unknown. A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*. Princeton University Press. Woodstok.

[74] Rey Pastor, Julio, 1934, *Los matemáticos españoles del siglo XVI.* Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas, Monografía 1. Madrid.

[75] López Piñero, José Mª, 1979. *Ciencia y Técnica en la Sociedad Española de los siglos XVI y XVII.* Editorial Labor. Barcelona.

[76] Salavert, Vicente, 1990a. "Introducción a la historia de la aritmética práctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI", *Dynamis*, **10**, 63-91

[77] Navarro, V.; Salavert, V. L.; Roselló, V.; Darás, V.,1999. *Bibliographia Physico-Mathematica Hispanica,* **I**, 1475-1600. València: Instituto de Historia de la Ciencia y Documentación "López Piñero". Universitat de València – CSIC.

(Romero Vallhonesta 2007[78], 2011[79] i 2012[80]; Massa-Esteve 2010 i 2012; Stedall, 2012; Molina 2015 i 2017[81]; Silva[82] 2016 i Hunger Parshall[83] 2017) però no donen una visió global de les primeres obres amb contingut algebraic impreses a la Península Ibèrica, sinó que n'estudien aspectes concrets i no es situen dins del marc europeu per tal d'esbrinar quines van poder ser les seves principals fonts. S'han publicat recentment dos volums sobre la història de les matemàtiques a Espanya (Dorce Polo[84], 2017) on es dedica un capítol del 1r volum a la introducció de l'àlgebra, en el qual es dóna una visió general del contingut de les obres dels autors als quals ens referim en aquesta tesi fent èmfasi en els possibles avenços.

Aquests textos ens han servit de punt de partida per a la nostra recerca i estan relacionats amb l'objectiu general i amb el tercer dels objectius específics als quals farem referència més endavant.

1.5. *Sobre la polèmica sobre la ciència espanyola*

Al fet que no hi hagi hagut estudis sobre aquestes obres fins a una època ben recent, hi pot haver contribuït l'anomenada "polémica sobre la ciencia española[85]" que es va iniciar el 1782 amb Nicolas Masson de Morvilliers[86] (1740-1789), qui va escriure un article a

[78] Romero Vallhonesta, Fàtima, 2007. *Una aproximació al pensament algebraic a l'Espanya del segle XVI. Estudi del manuscrit 2294 de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca.*
(http://hdl.handle.net/2072/5158)

[79] Romero Vallhonesta, Fàtima, 2011. "The "rule of quantity" in Spanish algebras of the 16th Century. Possible sources". *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Nova època, **4**, 93-115.

[80] Romero Vallhonesta, Fàtima, 2012, *op. cit*.

[81] Molina Sangüesa, Itzíar, 2017. *Letras, números e 25ràbigues25: estudio de las voces aritmético-algebraicas del Renacimiento*. Iberoamericana. Madrid.

[82] Silva, M. Céu, 2016. "On the circulation of algebraic knowledge in the Iberian península: the sources of Pérez de Moya's Tratado de Arithmetica (1573)". *Revue d'histoire des mathématiques* **22**, fascicule 2 ,145-184.

[83] Hunger Parshall, Karen, 2017. "A plurality of algebras, 1200-1600: Algebraic Europe from Fibonacci to Clavius. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics,* **32**, 2-16.

[84] Dorce Polo, Carlos, 2017. *Historia de las matemáticas en España*, **1,** 161-236. Editorial Arpegio. Sant Cugat.

[85] López Piñero, José Mª, 1999. "Actividad científica y 25ràbigue en la España de Felipe II", a Martínez Ruiz (dir.) *Felipe II. La Ciencia y la Técnica,* 17-37. Actas. Fundescoontes da clostaallínándeernir. Madrid.

[86] Masson de Morvilliers va ser un enciclopedista i escriptor francès que va participar en la redacció de la Encyclopédie méthodique, de 206 volums. És conegut especialment per la seva pregunta "què es deu a Espanya? Aquest text es va entendre com un atac directe a la civilització hispana i va provocar airades reaccions des

l'*Encyclopédie Méthodique*[87] titulat "Espagne", en el qual l'autor es preguntava si es devia alguna cosa a Espanya en l'àmbit científic. Aquesta polèmica va ser principalment un debat ideològic: la qüestió era, per uns, buscar raons que expliquessin la debilitat de la cultura científica a Espanya i per altres, intentar justificar que no s'havia d'envejar res als altres països (Navarro[88], 2014) i va continuar el segle XX, com ho mostra el fet que el 1913 fos batejada per Julián Juderías amb el nom de "leyenda negra". Segueix la línia pessimista relacionada amb la polèmica sobre la ciència espanyola, una de les obres de referència pel que fa a les matemàtiques d'aquest període: *Los matemáticos españoles del siglo XVI*[89](1934) de Rey Pastor que estudia les produccions impreses dels matemàtics espanyols del segle XVI i considera que són molt pobres en comparació amb les obres dels matemàtics estrangers contemporanis. Arriba a la conclusió que, si bé a la primera meitat dels segle XVI hi va haver a Espanya importants aritmètics, a partir d'aleshores, la matemàtica espanyola va deixar pràcticament d'existir.

Cañizares, en canvi, remarca que les contribucions de Portugal i Espanya en ciència i tecnologia, han estat excloses de molts relats, obviant-ne la seva importància en la revolució científica (Cañizares, 2004)[90]. Segons l'autor, l'origen s'ha de buscar en la reforma protestant i la Il·lustració. Aquesta negligència en la inclusió, no va permetre als erudits conèixer el fet que a la Península Ibèrica es va crear primer una cultura empírica, experimental i utilitarista, de manera que el coneixement no s'obtenia directament dels clàssics, sinó dels mercaders, dels emprenedors i dels buròcrates. Relacionat també amb la polémica de la ciencia

---

d'Espanya i des de fora, entre les quals destaca la del botànic Antonio José de Cavanilles (1745-1804): Observations de M. L'abbé Cavanilles sur l'article Espagne de la Nouvelle Encyclopédie (París, 1784).

[87] Nicolás Masson de Morvilliers, 1782. « Espagne », *Encyclopédie méthodique ou par ordre des matières. Géographie moderne,* **I**, 554-568. Pandoucke. Paris.

[88] Navarro Brotons, Víctor, 2014, *op. cit.*

[89] Rey Pastor, Julio, 1934. *Los matemáticos 26 ràbigues 26 del siglo XVI.* Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas, Monografía núm.1. Madrid.

[90] Cañizares-Esguerra, Jorge, 2004. "Iberian Science in the Renaissance: Ignored How Much Longer?". *Perspectives on Science*, 12, n. 1.

española, hi ha un article recent[91] en el qual es parla de la càrrega ideológica d'aquesta polémica i es pregunta també sobre la narrativa relacionada amb la revolució científica i remarca una nova mirada que li estan donant darrerament alguns historiadors llatinoamericans.

1.6. *Objectius de la tesi*

Hem relacionat diversos estudis i obres que mostren que la producció científica, en general, va ser important al segle XVI a la Península Ibèrica i en alguns casos, com en la navegació, les obres d'autors espanyols van ser una referència important per altres autors europeus. En aquesta tesi el que volem esbrinar és l'estat de la qüestió al nivell concret de l'àlgebra, ja que no hi ha gaire estudis que dediquin atenció a les primeres obres espanyoles amb contingut algebraic i considerem que pot ser una aportació important a la història de l'àlgebra europea.

L'objectiu general d'aquesta tesi, doncs, és determinar com es va introduir l'àlgebra a la Península Ibèrica, com es va anar desenvolupant, si el seu estatus era comparable al d'altres països europeus, quin va ser el context en el qual es va produir aquesta algebrització, i si va tenir algunes característiques que la diferenciïn del procés seguit en altres països. Hi hagués hagut avenços significatius o no[92], forma part de la història i mereix un estudi detallat.

Desglossarem aquest objectiu general en tres d'específics que concretaran la metodologia que utilitzarem per a la recerca:

---

[91] Pimentel, J.; Pardo-Tomás, J., 2017. "And yet, we were modern. The paradoxes of Iberian science after the Grand Narratives. *History of Science.* **55** (2), 133-147.

[92] Sobre la història de la ciència com a disciplina acadèmica a Espanya i sobre les noves tendències historiogràfiques, vegeu: Nieto-Galan, Agustí, 2008. "The History of Science in Spain: A Critical Overview". *Nuncius,* **23** (2), 211-236.

1. El primer objectiu específic és analitzar el contingut algebraic de les obres publicades a la Península Ibèrica al segle XVI, que sigui significatiu per l'evolució del pensament algebraic.
2. El segon objectiu específic és esbrinar a quin públic s'adreçaven les obres algebraiques dels autors estudiats, en la línia historiogràfica de la ciència i els seus públics.
3. El tercer objectiu específic és situar les obres algebraiques publicades a la Península Ibèrica en el context europeu, determinant les possibles relacions amb altres obres europees de la mateixa època, amb contingut algebraic.

1.6.1. Les obres analitzades

L'estudi de les obres a les quals es refereix el primer objectiu específic, constitueix el nucli de la nostra recerca. Per tal de saber quines eren les obres que havíem d'estudiar, vam consultar diversos treballs: el volum I de la *Bibliographia Physico-Mathematica Hispanica*[93] que facilita la labor dels estudiosos de la ciència espanyola, proporcionant un catàleg d'obres relacionades amb la física i les matemàtiques, impreses en el període 1475-1900; *Rara Arithmetica*[94], que és un catàleg d'obres d'aritmètica escrites abans de 1601 i ens va interessar perquè alguns dels manuals d'àlgebra s'introduïen en forma de capítols d'obres d'aritmètica; *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI*[95], que dóna a conèixer les obres científiques espanyoles i portugueses en el període que va des de l'arribada de Colon a Amèrica fins la supressió de l'Acadèmia de Matemàtiques de Madrid, el 1625; l'apèndix 3 de l'obra *Experiencing Nature*[96], on hi ha una relació dels llibres científics espanyols des del 1519 fins al 1626; i finalment, per la matemàtica espanyola, vam consultar *Los matemáticos españoles del siglo XVI,* una de les obres de referència pel que fa a les

[93] Navarro Brotóns V., 1999, *op. cit.*
[94] Smith, David Eugene, 1908. *Rara arithmetica. A Catalogue of the Arithmetics Written Before the Year MDCI with a description of those in the Library of George Arthur Plimpton of New York*. Ginn. Boston & London.
[95] Picatoste Rodríguez, Felipe, 1891. *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI: estudios biográficos y bibliográficos de 28ciencias exactes, físicas y naturales y sus inmediatas 28aplicaciones en dicho siglo*. Imprenta y fundición de Manuel Tello. Madrid.
[96] Barrera-Osorio, Antonio, 2006. *Experiencing Nature. The Spanish American Empire and the Early Scientific Revolution,* 147-150. University of Texas Press. EUA.

matemàtiques d'aquest període on, com ja hem comentat, Rey Pastor hi estudia les produccions impreses dels matemàtics espanyols del segle XVI. Pel que fa a Portugal, hem consultat el segon capítol de la primera part de l'obra *Science in the Spanish and Portuguese Empires, 1500–1800*[97], on els autors destaquen les figures més rellevants de la ciència portuguesa en el període que va de 1450 a 1800, i l'obra *A Matemática no tempo do mestre José Vizinho*[98] que fa referència a l'època que va des de mitjan segle XV fins a finals del XVII. A part de les obres relacionades en aquests manuals, hem treballat també amb el manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca que és el germen d'aquesta tesi, l'autor del qual és Diego Pérez de Mesa.

Les obres seleccionades amb relació a l'objectiu d'aquesta tesi, inclouen totes les obres publicades a la Península Ibèrica al segle XVI amb contingut algebraic. De fet, totes elles estan publicades a la segona meitat d'aquest segle. Són les següents:

- ✓ Marco Aurel, *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, Valencia, 1552.
- ✓ Juan Pérez de Moya, *Compendio de la Regla de la Cosa*, Burgos, 1558.
- ✓ Juan Pérez de Moya, *Arithmetica práctica y speculativa*, Salamanca, 1562
- ✓ Antic Roca, *Arithmetica*, Barcelona, Casa de Claudio Bornat, 1564.
- ✓ Pedro Núñez Salaciense, *Libro de álgebra en arithmética y geometría*, Amberes, Herederos dí Arnoldo Birckman, 1567.
- ✓ Diego Pérez de Mesa, *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrologia y matematicas*. Manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca, 1598.

També farem referència a l'obra:

---

[97]Fontes da Costa, Palmira; Leitão, Henrique, 2009. "Portuguese Imperial Science, 1450–1800. A Historiographical Review" a Bleichmar, Daniela & altres (eds.) *Science in the Spanish and Portuguese Empires, 1500–1800*, 35-53. Stanford University Press. Stanford. California.

[98] Costa Canas, António; Ferrão, M. Eugénia (coords.), 2009. *A Matemática no tempo do mestre José Vizinho*. Sociedade Portuguesa de Matemàtica/Gradiva Publicaçoes, S.A. Lisboa.

✓ Juan Pérez de Moya, *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural*, Alcalá de Henares, Juan Gracian, 1573,

per tal d'analitzar algunes de les millores que conté amb referència a alguns temes tractats en les obres prèvies d'aquest mateix autor.

1.6.1.1. *Els aspectes que destacarem d'aquestes obres*

L'estudi d'aquestes obres està focalitzat en els aspectes que hem considerat claus del procés d'algebrització, que no necessàriament són aquells aspectes que a primer cop d'ull representen canvis més significatius respecte a les obres d'aritmètica. Tot i que el simbolisme és crucial en el procés d'algebrització, no sempre un simbolisme més acurat va paral·lel a un pensament algebraic més profund.

En molts estudis relacionats amb l'àlgebra, i també en algunes obres de referència generals pel que fa a la història de les matemàtiques com la de Carl Boyer[99], s'ha tingut en compte la classificació del que en podríem anomenar fases de l'algebrització de les matemàtiques, en *retòrica*, *sincopada* i *simbòlica,* que va establir Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann[100] el 1842 en el seu estudi sobre l'àlgebra grega[101]. De fet, aquesta classificació va esdevenir tan comuna que alguns autors com el mateix Boyer no en citen la procedència. Leon Rodet[102] va qüestionar aquesta divisió considerant que només es podien reconèixer dos tipus d'àlgebra[103], la de "les abreviacions i les dades numèriques" i "l'àlgebra simbòlica", però es va mantenir, en general, la de Nesselmann. Actualment[104] també s'ha criticat aquesta

---

[99] Boyer, Carl, 1968. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons. New York (edició de 1985, Princeton University Press, Princeton).

[100] Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (1811 – 1881) va ser un orientalista alemany, historiador de les matemàtiques i filòleg.

[101] Nesselmann, Georg Heinrich Ferdinand, 1842. *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, I. Die Algebra der Griechen.* Berlín (reimprès per Minerva, Frankfurt, 1969).

[102] Léon Rodet (ca. 1832- 1895), va ser un matemàtic, filòleg i orientalista 30ràbigu, autor de diverses obres relacionades amb les matemàtiques 30aràbigues, índies, perses i xipriotes.

[103] Rodet, Leon, 1881. *Sur les notations numèriques et algèbriques antérieurment au XVI siècle*, 69. E. Leroux. Paris.

[104] Vegeu: Heeffer, Albrecht, 2009. "On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism", 1–27 a Bart van

forma de referir-se a diferents estadis de l'algebrització de les matemàtiques, entre d'altres aspectes perquè considerant les obres d'alguns autors, aquests estadis es solapen i perden el significat de ser cada vegada més avançats, en el procés d'algebrització. Aquesta classificació posa l'èmfasi en la part simbòlica de l'àlgebra, que tot i ser la que evidencia més els canvis que es van produint en l'algebrització, no sempre corresponen a canvis rellevants en el pensament matemàtic. Atès que en aquesta tesi ens interessen més els processos de pensament que han pogut portat a l'algebrització de les matemàtiques, no farem referència a aquests estadis, sinó que focalitzarem la nostra recerca en altres aspectes que a continuació relacionarem.

Un d'aquests aspectes és la idea d'àlgebra. És la mateixa per a tots els autors? És, per a tots ells el mateix àlgebra que Art Major? Algun dels dos conceptes equival a "regla de la cosa"? L'àlgebra és una tècnica per resoldre les equacions quan tenen la seva forma estàndard? O és el procés que va des de l'enunciat d'un problema a l'obtenció de la solució? Quina és la seva relació amb les disciplines clàssiques com l'aritmètica o la geometria? Hi ha construccions geomètriques que il·lustrin les regles algebraiques o que les complementin? Quin és el significat d'aquestes construccions?

Un segon aspecte és la notació simbòlica[105]. Encara que, com hem dit, la utilització de més símbols no sempre equival a un pensament algebraic més avançat, és indiscutible la influència del simbolisme en els avenços del procés d'algebrització. En aquest aspecte, no ens fixarem només en els símbols que utilitzen els autors per a designar les incògnites, sinó

Kerkhove (ed.), *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics.* World Scientific. Singapore. Vegeu també Høyrup, Jens, 2015. "Embedding: Another case of stumbling progress in the history of àlgebra". *Physis, Rivista Internationale di Storia delle Scienza, L (1-2),* 1-38.

[105] Sobre la importància del simbolisme algebraic, vegeu: Serfati, Michel, 2010. "Symbolic revolution, scientific revolution: mathematical and philosophical aspects" a Heeffer, A. i Van Dyck, M. (eds.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics.* College Publications; Heeffer, A., 2012a. "Surmounting obstacles: circulation and adoption of algebraic symbolism" a Heffer, A. i Massa Esteve, Ma. Rosa, *The Epistemic Functions of Algebraic Symbolism: historical Case Studies. Philosophica,* **87,** 5-25. Ghent University i Radford, Luis, 2006. "The Cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism a Furringhetti, F.; Kaijser, S. I Tzanakis, C. (eds.), a *Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU 4,* 509-524. *Uppsala, Sweden.* Conferència Plenària.

també en el paper que juguen determinats símbols coim pot ser el + o les $\sqrt{\ }$ en l'algebrització. La notació utilitzada pels diferents autors ens permetrà també fer hipòtesis sobre les possibles fonts que van inspirar les seves obres. Els símbols són essencials per obtenir nous resultats? Relacionat amb la notació simbòlica, la incògnita i les seves potències en contínua proporció, tenen un paper destacat a la majoria de les obres d'aquests autors. Quina influència de la teoria de proporcions dels *Elements* d'Euclides hi ha en els textos estudiats?

El tercer aspecte que considerarem són les equacions[106]. Com les escriuen els diferents autors? Com les classifiquen? Com expliquen el procediment per a resoldre-les? Quin tipus de problemes resolen? Alguns d'aquests autors dediquen un capítol, de vegades previ a la resolució d'equacions, a tractar les quantitats irracionals i sovint fan referència al llibre X dels *Elements* d'Euclides quan posen exemples de binomis[107] i residus. Els binomis són sumes de dues quantitats, al menys una de les quals és irracional, i els residus són diferències del mateix tipus d'expressions. Quina importància tenen aquestes expressions en el procés d'algebrització? Quina importància té en el procés d'algebrització la introducció d'una segona incògnita[108]?

1.6.2. *L'activitat científica i els seus públics*

Una de les aportacions sobre la naturalesa de la circulació del coneixement que més influència ha tingut les darreres dècades en la historiografia de la història de la ciència, ha

[106] Sobre la teoria d'equacions, en general, vegeu: Franci, Raffaella; Toti, Laura, 1979. *Storia della teoria delle equazioni algebriche.* Ugo Mursia editore; Sesiano, Jacques, 2000. *An Introduction to the History of Algebra. Solving Equations from Mesopotamia Times to the Renaissance,* 93-140. American Mathematical Society. USA i Bashmakova, Isabella, Smirnova, Galina, 2000. *The Beginnings and Evolution of Algebra.* The Mathematical Association of America. Washington.
[107] Per una primera aproximació als conceptes de *binomi* i *apòtome* o *residu,* en el sentit euclidià del terme, vegeu: Hutton, Charles, 1795, *Mathematical and Philosophical Dictionary,* **1,** 125-126. J. Johnson. London.
[108] Sobre la importància de la introducció d'una segona incògnita vegeu: Heeffer, A., 2010. "From the Second Unknown to the Symbolic Equation", a A. Heeffer i Massa Esteve, M.R. (eds.), *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics.* Studies in Logic 26. College Publications. London.

estat la de James Secord[109]. Aquest autor entén el coneixement científic no com una doctrina abstracta, sinó com una pràctica comunicativa, i considera que la història de la ciència s'ha centrat massa vegades en els orígens i en els productors de ciència, sense donar la rellevància que es mereixien a les audiències i els lectors. Una altra aportació molt interesant i més recent, que hi està relacionada, és la de Agustí Nieto-Galan[110] que amplia el concepte d'esfera pública de la ciència, expressió encunyada pel filòsof Jürgen Habermas, a diferents àmbits, i destaca la importància de les pràctiques quotidianes, per exemple, enfront de les grans figures i idees. Així, el segon objectiu específic d'aquesta tesi, té relació amb els públics de la ciència, que implica el context en el qual es va introduir l'àlgebra a la Península Ibèrica i inclou els establiments o institucions on s'impartia docència de les matemàtiques.

Entre les nombroses atribucions que corresponien als municipis a l'Espanya de Felip II, n'hi havia moltes de relacionades amb l'activitat científica, com eren l'ensenyament, la sanitat, les obres públiques i el control dels gremis. Hi havia a més a més diverses institucions relacionades amb l'activitat científica: les universitats, la Casa de Contractació de Sevilla i el Consell d'Índies, l'Acadèmia de Matemàtiques de Madrid, les "escoles d'artilleria", el gran laboratori de El Escorial, diversos jardins botànics i alguns hospitals. Farem referència a continuació a aquelles institucions que van tenir relació amb l'ensenyament i desenvolupament de les matemàtiques.

Pel que fa a les universitats, des de la seva fundació, (Peset[111] , 2000; Fernández Luzón[112], 2005; Mordechai i Navarro[113] , 2006; Carabias[114], 2012; Peralta[115], 2016) van organitzar els seus

[109] Secord, James, 2004, "Knowledge in Transit", *Isis*, 95, 654-672.
[110] Nieto-Galan, Agustí, 2016. *Science in the Public Sphere. A history of lay knowledge and expertise.* Routledge. New York.
[111] Peset, Mariano (coord.), 2000. *Història de la Universitat de València.* Volum I. Universitat de València.
[112] Fernández Luzón, Antonio, 2005. *La Universidad de Barcelona en el siglo XVI.* Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona.
[113] Mordechai, Feingold & Navarro-Brotons, Víctor (eds.), 2006, *op. cit.*
[114] Carabias Torres, Ana M., 2012. *Salamanca y la medida del tiempo.* Ediciones Universidad de Salamanca.

estudis en diferents branques del saber, que s'ensenyava en quatre o cinc "facultats" segons la "facultat" o permís rebut pel papa o el rei per impartir determinats coneixements. Eren les facultats "majors" de Teologia, Lleis, Cànons o Medicina i una facultat "menor" o d'Arts. Funcionaven segons el model dels seus fundadors i amb total independència les unes de les altres. Per exemple, a la universitat d'Alcalà estaven prohibits els estudis de Dret pels estatuts fundacionals del cardenal Cisneros. Les matemàtiques tenien el seu lloc auxiliar als ensenyaments universitaris, figurant en els plans d'estudi de les facultats (menors) d'Arts amb una orientació humanística basada en les fonts clàssiques. A les facultats d'Arts s'hi estudiaven les 7 arts liberals: el *Trivium*, antecedent de la facultat de Filosofia i Lletres, i el *Quadrivium*, germen de les facultats de Ciències. La universitat més antiga d'entre les espanyoles va ser la de Palència, creada el 1208 per Alfons VIII. Abans del segle XVI hi havien les de Salamanca (1215), Valladolid (1346) i Alcalà (1499) que juntament amb la de Palència eren les anomenades universitats majors. Les menors anteriors al segle XVI, eren les de Lleida (1300), Múrcia (1310), Osca (1354), Llutxent (1423), Barcelona (1430), Girona (1446), Sigüenza (1472), Saragossa (1474), Àvila (1482) i València (1500). La majoria dels manuals que s'utilitzaven per la docència en aquestes universitats, provenien de traduccions de les obres clàssiques.

1.6.2.1. La Casa de la Contractació

Una de les institucions més destacades del segle XVI va ser la Casa de Contractació de Sevilla (Donoso[116], 1996; Vicente[117], 2003; Martín-Merás[118], 2003; Barrera-Osorio[119], 2006;

---

[115] Peralta, Javier, 2016. "Los Estudios de Matemáticas en la Universidad de Alcalá en Tiempos de Carlos III y sus Precedentes". *Boletin de Educaçao Matemática*, 30, n. 55, 402-423. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Río Claro. Brasil.

[116] Donoso Cortés, Rafael, 1996. *Una contribución a la historia de la contabilidad: anàlisis de las prácticas contables desarrolladas por la tesorería de la Casa de la Contratación de las Indias de Sevilla (1503-1717)*. Universidad de Sevilla.

[117] Vicente Maroto, M. Isabel, 2003. "El arte de la navegación en el Siglo de Oro". *Cátedra Jorge Juan*. Curso 2000-2001, Jesús Ramón Victoria Meizoso (dir.), 187-230. A Coruña Universidade.

[118] Martín-Merás, Luisa, 2003. "Las enseñanzas náuticas en la Casa de la Contratación de Sevilla a Acosta Rodríguez; Antonio & González Rodríguez, Adolfo (coord.). *La Casa de la Contratación y la Navegación entre España y las Indias*. CSIC. Universidad de Sevilla.

[119] Barrera-Osorio, Antonio, 2006. *Experiencing Nature. The Spanish American Empire and the Early Scientific Revolution.* University of Texas Press. EUA.

Portuondo[120], 2009) que va ser creada pels Reis Catòlics per administrar i controlar tot el tràfic de les Índies al declarar-les mercat reservat de Castella. Ningú no podia anar a Amèrica ni fletar cap mercaderia cap a les Índies sense passar per la Casa de Contractació de Sevilla i tota la mercaderia procedent de les Índies havia de passar pel control d'aquesta institució i pagar la taxa d'un 20% a la Corona. Les ordenances fundacionals van ser emeses pels Reis Catòlics el 20 de gener de 1503, començant d'aquesta manera un creixent procés d'institucionalització per a l'administració dels nous territoris americans. Per cèdula del mateix any es va crear l'ensenyament nàutic que es va encomanar als Pilots Majors de la *Casa* i que més endavant s'encarregaria als cosmògrafs. Un d'aquests Pilots Majors va ser Américo Vespucio, nomenat el 1508. La mateixa cèdula que el va nomenar expressava les queixes per la falta de coneixements, de fonament i de desconeixement de l'ús de l'astrolabi i el quadrant per part dels pilots. S'hi expressa també la necessitat de combinar teoria i pràctica i de proveir instruments de navegació. Es va establir la càtedra de matemàtiques, que ocupava un lloc residual a les universitats, i també les de cosmografia, astronomia, cartografia, hidrografia i artilleria. La cartografia va ser una de les disciplines que va produir més manuals. Des d'Andrés de Morales o Américo Vespucio, passant pel més teòric Alonso de Santa Cruz, fins a Jerónimo de Chávez i Juan López de Velasco, la qualitat dels mapes va anar augmentant. La major part de les obres compostes pel personal de la *Casa* es traduïen el mateix any de la seva publicació al llatí, francès, anglès alemany i flamenc. D'entre el autors que van ser traduïts cal destacar el matemàtic Pedro de Medina, reconegut amb el títol de cosmògraf d'honor, autor de quatre tractats relacionats amb l'art de navegar. Un d'ells, el seu manual *Arte de Navegar*, va ser traduït al francès, l'anglès i el flamenc i va ser reeditat 15 vegades en aquestes llengües. D'aquesta manera la *Casa* va ser coneguda arreu d'Europa. De fet, es va constituir com un dels més notables centres d'investigació nàutica d'Europa durant els segles XVI i XVII.

[120] Portuondo, Maria M., 2009. *Secret Science. Spanish Cosmography and the New World.* The University of Chicago Press. Chicago and London.us

La pragmàtica de 22 de novembre de 1559 del rei Felip II[121] que prohibia sortir a l'estranger[122] per anar a estudiar o a ensenyar a les universitats i col·legis, no va afectar tant com podria semblar a la força científica que tenia la Casa de la Contractació.

La documentació recollida a la *Casa* constitueix l'Arxiu d'Índies, ubicat a l'edifici de la Casa de la Lonja de Sevilla, construït a l'època de Felip II, entre 1585 i 1598, sobre plànols de Juan de Herrera (1530-1597)[123].

1.6.2.2. L'Acadèmia de Matemàtiques

Precisament va ser Juan de Herrera, qui va fer realitat el desig que havia expressat diverses vegades el monarca Felip II d'establir a la Cort un centre de formació científico-tècnica. Els objectius de l'*Acadèmia*, així com el contingut de les lectures i els textos recomanats als alumnes, es van redactar i recollir el 1583 pel propi Herrera en un escrit que va pretendre que fossin els estatuts de l'*Acadèmia*, que va publicar a finals de 1584 amb el títol de *Institución de la Academia Real Mathematica*[124]. En aquest escrit Herrera justifica la creació de l'*Acadèmia* per la ineficàcia de les universitats, ja que malgrat estar dotades de càtedres de matemàtiques, tenien tan pocs alumnes que era difícil trobar en tot el regne persones amb uns mínims coneixements científics:

> *ay falta en la republica de artifices entẽdidos y perfectos para muchos vsos, y ministerios necessarios a la vida polytica.. Ha sido su Magestad seruido, q en su Corte aya vuna lectio publica de*

---

[121] Delgado Criado; Buenaventura, 1993. *Historia de la Educación en España y América. La educación en la España Moderna (Siglos XVI-XVIII),* 35. Fundación Santa María. Ediciones Sampo
M. Madrid.
[122] Les excepcions eren viatjar al regne d'Aragó, al col·legi de St Climent de Bolònia, i a les universitats de Roma, Nàpols i Coimbra.
[123] Arquitecte i Aposentador Major de Felip II, es va fer càrrec, apart de la Lonja de Sevilla, de les obres del Monestir de El Escorial; se li atribueix també el disseny de la façana i la modificació i ampliació dels plànols primitius. Va dissenyar la façana principal del palau de Carles V a Granada, la façana sud del Alcázar de Toledo i va fer el projecte de la catedral de Valladolid.
[124] Herrera, Juan de, 1995. *Institución de la Academia Real Mathemática*, edició i estudis preliminars José Simón Díaz i Luis Cervera Vera. Instituto de Estudios Madrileños, Madrid, reproducció del original de 1584 en facsímil.

Mathematicas, trayendo para ello personas eminētes q las lea y enseñe publica y graciosamēte, a todos los q las quisiere oyr[125].

Més endavant, Herrera es refereix a les diferents branques de les matemàtiques:

Y ansi en Timeo le llama a estas sciencias, camino para saber, y en su republica haze dezir a Socrates, que los que son por naturaleza Mathematicos, son aptos para todas las otras sciencias y artes. Y en Epinomide tanto atribuye a estas facultades, que al hombre imperito dellas le llama insipientissimo y sin juyzio : estas tienen por subjecto y materia la quantidad, y ansi respecto della se deuiden en quatro partes. Arithmetica, y musica tiene la discreta, Geometria y Astronomia la continua : y si consideramos los subjectos como intelegibles y sensibles, son ocho, Arithmetica y Geometria de los intellegibles, Mechanica, Astrologia, Perspectiua, Mensuradora, Musica y Numeradora, de los sensibles. Destas como principales se deriuan y descienden todas las demas q participan deste nombre[126].

I recomana els textos que es llegiran en cadascuna de les branques. En el cas de l'aritmètica, per exemple:

Los que quisieren hazar profession de Arithmeticos, y saber esta disciplina con fundamentos generales, para q por si solos puedan resoluer co habito demostratiuo, y verdad infalible las dudas y questiones q se puede offrecer, sin el trabajo y fatiga q padecen los puraménte platicos, han de saber los primeros nueue libros de Euclides : alguna otra Arithmetica Theorica como la de Iordano o de Boecio...

I en el cas de l'àlgebra, recomana el text de Núñez, que, per tant, seria un text de referència a l'*Acadèmia,* i especifica, com veurem més endavant que ho remarca Núñez, que l'àlgebra està basada en el llibre X dels *Elements* d'Euclides:

...y con ello exercitarse en algunos de los muchos q ay dela practica qual el de Frater Luca, los de Tartaglia, y el Algebra o Almucabala, por la que se sacan y desatan questiones y quesitos muy subtiles, fundese primero bien en el Decimo de Euclides rayz y fuente della, y lo que della escriuio el Doctor Pero Nuñez, Michael Stifelio, Peletario, y otros muchos, de que podra cada vna por si aprouechase para fundamento della se leeran en la Academia, el septimo de Euclides, con algunas

---

[125] Herrera, 1584, 1^v.
[126] *Ibid.* 4^v-5^r

precticas conforme a la doctrina dellos, con lo qual podra cada vno despues passar por si lo que quisiere[127].

Com a conseqüència de les necessitats de l'època, una de les disciplines a les quals l'*Acadèmia* va donar més importància va ser a *l'art de navegar* i a les tècniques militars[128]. En contrast amb els ensenyaments universitaris i per voluntat reial, Herrera va disposar que tots els ensenyaments es llegissin en llengua castellana, i no en llatí, per tal que tothom els pogués entendre més bé. Així mateix es van traduir al castellà vulgar, molts textos científics que eren emprats per a la formació dels cosmògrafs, enginyers, i altres especialistes de la institució.

L'*Acadèmia* va caure en decadència cap el 1624 i va ser absorbida pels "Estudios Reales" de San Isidro o Col·legi de Jesuïtes.

1.7. Algunes remarques

La tesi es desenvolupa en una època i un espai determinats i a vegades es fa difícil referir-se a la nacionalitat dels autors considerats, com a conjunt, i també al conjunt del territori en el qual van viure, degut a què aquestes realitats són canviants. S'ha de tenir en compte que al segle XVI la unitat espanyola es basava únicament en l'existència d'un mateix cap d'estat, o sigui d'un rei comú per als diversos estats peninsulars. Tanmateix, també és cert que a nivell de les elits, el terme "Espanya", s'emprava per a simplificar la nomenclatura, però el concepte no amagava les diversitats polítiques i jurídiques existents. Hem utilitzat en algun moment "regnes d'Espanya" perquè així ho manifesta Aurel, un dels autors de referència d'aquesta tesi, però si ens referíssim a tot el període, l'expressió no seria del tot procedent perquè a finals del segle XVI, el regne de Portugal és incorporat a la Corona hispànica, i aleshores tota la Península es troba dins d'un mateix conjunt polític.

---

[127] *Ibid.* 8^r-8^v

[128] Més informació a: Esteban Piñeiro, M., 1999. "La Academia de Matemáticas de Madrid" dins les *Actas del Congreso Internacional sobre La Ciencia y la Técnica en la época de Felipe II*, 113-133. Fundesco. Madrid.

Utilitzarem al llarg de la tesi, algunes vegades Península Ibèrica i d'altres Espanya, ja que aquest darrer terme s'utilitzava en determinats àmbits i queda clar a quina realitat geogràfica fa referència. Pel que fa als autors, Marco Aurel és de procedència alemanya però escriu al regne de València, Antic Roca és del Principat de Catalunya, Juan Pérez de Moya i Diego Pérez de Mesa són del regne de Castella i Pedro Núñez del regne de Portugal.

Quan en aquesta tesi hi posem cites literals dels autors, hem inclòs de vegades algunes imatges amb fragments de l'obra, que proporcionen mostres dels tipus de textos treballats, i altres vegades hem transcrit les cites per tal de fer menys feixuga la lectura. En tots els casos van precedides de petites explicacions, que orienten sobre el seu contingut. En la majoria dels casos no hem trobat necessari transcriure aquestes cites al castellà modern, ja que són prou entenedores per un lector actual. No passa el mateix amb totes les llengües. Una de les obres que hem treballat és el *Coss* (1525) de Christoff Rudolff, i ho hem fet a partir de l'edició de 2006 de Kaunzner i Röttel[129] que conté una edició facsímil de l'obra, on hem pogut constatar que l'alemany del segle XVI conté molts llatinismes que no s'utilitzen en l'alemany modern i que fan força complicada la lectura del text.

1.8. Estructura de la tesi

La tesi està estructurada en set capítols, precedits d'un pròleg, el primer dels quals és aquesta introducció. L'objectiu d'aquesta introducció és contextualitzar la tesi, donant una visió del panorama científic a la Península Ibèrica del segle XVI, que com ho mostra l'activitat científica de la qual hem tractat, mereix ser posat en relleu en el marc del panorama científic europeu. Un altre dels objectius d'aquesta introducció ha estat explicar la metodologia emprada per la tria de les obres que seran objecte d'anàlisi, i donar referències sobre els treballs que s'han publicat, relacionats amb la línia de recerca d'aquesta tesi, un *estat de l'art*.

---

[129] Kaunzner, Wolfgang and Röttel, Karl, 2006, *op.cit.*

Els capítols dedicats als cinc autors: Aurel, Pérez de Moya, Roca, Núñez i Pèrez de Mesa, i les seves obres, tenen tots la mateixa estructura. Comencen amb una introducció que destaca alguns aspectes del capítol, i continuen amb un apartat sobre dades biogràfiques. El tercer apartat descriu les obres triades i destaca amb fragments escollits d'aquestes obres, els aspectes en els quals hem focalitzat la tesi. Mostrarem que pel que fa a la idea d'àlgebra, en alguns autors porta implícita la idea d'anàlisi, que serà cabdal en el desenvolupament de l'àlgebra, i en canvi, en d'altres autors aquesta idea no hi és. Pel que fa als símbols, Aurel seguirà la tradició germànica, que no seguiran els altres autors estudiats, tot i que Pérez de Moya mostra que coneix. En la resolució d'equacions hi haurà algunes diferències com el nombre de tipus que consideren els autors, el coeficient dels termes de grau més alt que alguns dels autors consideren que ha de ser la unitat i d'altres no, i també el terme independent que alguns autors acompanyen d'un símbol i d'altres no, tal com es fa actualment. En alguns capítols, els sistemes d'equacions es tracten en un subapartat de l'apartat d'equacions i en d'altres no, en funció de la importància que té per l'autor la introducció d'una segona incògnita i també de si el mètode és similar o diferent d'algun dels autors analitzats en capítols previs. També s'analitzaran els procediments de resolució d'alguns problemes que mostraran la manera de raonar dels autors, sobretot a partir d'alguns comentaris que ens pemetran entendre algunes de les seves idees sobres l'àlgebra i aquells aspectes als quals donen més importància. Dedicarem també un apartat de cada capítol a les fonts i a les possibles influències. Cadascun dels capítols acaba amb unes conclusions, que destaquen els aspectes més rellevants d'allò que s'ha analitzat, i que aniran configurant les conclusions finals a les quals dedicarem el darrer capítol.

Les conclusions finals, a diferència de les de cada capítol, que es centra en els autors, les referirem als objectius de la tesi, de manera que entre les unes i l'altra, es donarà una visió més completa del panorama algebraic de la Península Ibèrica del segle XVI.

CAPÍTOL 2. MARCO AUREL. La introducció de l'àlgebra.

2.1. Introducció

En aquest capítol analitzarem la primera obra amb contingut algebraic publicada a la Península Ibèrica, el *Libro primero de Arithmetica Algebratica* (1552) de Marco Aurel, i donarem evidències per concloure que la seva font principal és l'obra *Coss* (1525) de Christoff Rudolff (Romero-Vallhonesta i Massa-Esteve[130], 2018). L'obra d'Aurel tenia com a objectiu la introducció de l'àlgebra "als regnes d'Espanya", tal com ho manifesta el mateix autor en l'epístola que introdueix l'obra. D'aquí la seva importància en el procés d'algebrització de les matemàtiques a la Península Ibèrica i la seva rellevància en aquesta tesi, ja que és clau per aconseguir el nostre objectiu més general.

Després de referir-nos breument a la biografia de l'autor, descriurem el *Libro Primero* i a continuació ens centrarem en els aspectes que considerem clau en el pensament algebraic: la idea d'àlgebra, els símbols i la resolució d'equacions, per tal de posar-los de manifest en l'obra d'Aurel. Relacionat amb la idea d'àlgebra explicarem de manera succinta l'origen de la idea d'anàlisi que serà fonamental per alguns dels autors estudiats. I pel que fa a la resolució d'equacions, destacarem la introducció d'una segona incògnita i detallarem el mètode per a resoldre sistemes d'equacions sense escriure'ls de forma explícita, ja que el simbolisme utilitzat no ho permetia. La introducció d'una segona incògnita considerem que va tenir una importància cabdal en el procés d'algebrització de les matemàtiques. Mostrarem com un símbol com el + , l'utilitza Aurel per construir nous objectes algebraics, en sigui conscient o no, i com el fet d'acompanyar amb un símbol el terme independent té

---

[130] Romero Vallhonesta, Fàtima; Massa-Esteve, Ma. Rosa (2018) "The main sources for the Arte Mayor in sixteenth century Spain". *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*. Publicat online el 18 de gener de 2018: http://dx.doi.org/10.1080/17498430.2017.1419704

una funció semblant a la que més endavant tindran els parèntesis[131]. Dedicarem també un apartat a analitzar la resolució d'alguns problemes per part de l'autor.

En el cas d'Aurel, l'apartat de les fonts té especial importància ja que ens remetrà a les fonts europees de la primera obra amb contingut algebraic publicada a la Península Ibèrica, i suposarà una contribució important a l'assoliment del tercer dels objectius específics: la relació amb les obres europees de la mateixa època.

A les conclusions destacarem la importància de la proporció contínua de les incògnites en la resolució d'equacions i també la idea d'anàlisi que seguirà tenint molta importància a les obres de Pérez de Moya i Roca, que veurem en els capítols següents, i per les quals l'obra d'Aurel, és la font principal.

2.2. Dades biogràfiques

Marco Aurel o Marco Aurelio és l'autor del primer llibre imprès a la Península Ibèrica que conté un tractat d'àlgebra[132], titulat *Libro primero de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantivol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarment llamada Arte Mayor o Regla de la cosa: sin la qual no se podra entender el decimo de Euclides, ni otros muchos primores, asi en Arithmetica como en Geometria: compuesto, ordenado, y hecho Imprimir por Marco Aurel, natural Aleman: Intitulado, Despertador de ingenios,* i va ser publicat a València amb data 16 de gener de 1552.

---

[131] Vegeu: Høyrup, J., 2015, *op. cit.* Sobre la funció de determinats símbols amb relació a la funció dels parèntesis.

[132]Aquest va ser el primer tractat algebraic publicat a la Península Ibèrica, però no el primer tractat que contenia àlgebra, tal com va mostrar Docampo. Vegeu: Docampo Rey, Javier, 2010, "Vernacular algebra in the Iberian Peninsula before Marco Aurel: Notations and terminology", a H Hunger, F Seebacher and G Holzer, (eds), *Styles of thinking in Science andTechnology. 3rd. ICESHS, 85-92.* Austrian Academy of Sciences. Vienna, i Docampo Rey, Javier, 2006, "Reading Luca Pacioli's *Summa* in Catalonia. An early 16th century Catalan manuscrit on algebra and arithmetic", *Historia Mathematica,* **33**, 43-62. És interessant també remarcar que quan l'Arithmetica de Juan de Ortega es va reimprimir el 1552, el mateix any en què Aurel va publicar la seva *Arithmetica Algebratica*, Gonzalo del Busto, el seu editor, hi va afegir 13 exemples sobre Art Major al final del llibre, sense donar, però, cap explicació.

De la seva biografia no se'n sap pràcticament res. Era alemany, com ell mateix remarca, i s'havia establert a València, on ensenyava les primeres lletres a les escoles; era *mestre de scriure e contar*[133]. Se'l coneixia com a Marcho Alamany i també va ensenyar matemàtiques pràctiques. Va tenir assignada una cambra de l'Estudi General fins a final del curs 1545-1546, tal com consta als Arxius Municipals de València[134]. Hi va renunciar formalment el 30 de juliol de 1546, en absentar-se de la ciutat. Consta que va escriure una obra intitulada *Tratado muy útil y provechoso para toda manera de tratantes y persones aficionadas al contar* (València, 1541), i un *Tratado de reglas breves de reducción de moneda* (València, 1541), que sembla que es van imprimir quan Aurel exercia el càrrec de mestre en les escoles de gramàtica incloses en l'Estudi General, però aquestes obres no s'han trobat. Aquests tractats són importants amb relació a l'objectiu relacionat amb els públics de la ciència, ja que ens permetrien saber si estaven relacionats amb la labor dels centres d'activitat financera i mercantil espanyols de l'època. Efectivament, a finals del segle XV i principis del XVI, hi havia a València, i també a altres ciutats espanyoles com Barcelona i Saragossa, una important presència de mercaders alemanys que operaven mitjançant companyies mercantils com la Groβe Ravensburgern Handelsgesellschaft[135], de manera que possiblement la presència d'Aurel a València estigués relacionada amb aquestes cases comercials[136].

L'única obra d'Aurel que s'ha trobat és el *Libro Primero* que es va publicar també a València, sis anys més tard que Aurel renunciés a la cambra d'Estudi General que tenia assignada a la ciutat.

133Aurel seria, doncs, el que en alemany es coneix com "Schreib-und Rechenmeister".
134Més informació a Febrer Romaguera, M.V., 2003. *Ortodoxia y Humanismo. Els estudio general de Valencia durante el rectorado de Joan de Salaya (1525-1558)*, 267. Servei de Publicacions de la Universitat de València. Sueca.
135 Gran Societat Comercial de Ravensburg.
136 Per a més informació, vegeu Hinojosa, J.R., 1987. "Mercaderes alemanes en la Valencia del siglo XV: la "Gran Compañía " de Ravensburg", a *Anuario de Estudios Medievales*, 17, 455-468 i Sesma, J. A, 2013. *Revolución comercial y cambio social: Aragón y el mundo Mediterráneo (siglos XIV y XV)*, 405-409. Prensas de la Universidad de Zaragoza.

2.3. *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*

El *Libro Primero* consta de 140 folis i està dividit en 24 capítols. En els sis primers l'autor explica les propietats dels nombres enters, les fraccions i les proporcions; la regla de tres, canvis de moneda i progressions. Dels capítols 7è al 12è, Aurel tracta de les arrels quadrades, les cúbiques, els binomis[137] i els residus, i les seves arrels quadrades i cúbiques. En el 13è capítol comença l'àlgebra o *Arte Mayor* amb l'establiment dels caràcters que l'autor utilitzarà per a designar les incògnites. Del capítol 14è al 21è i en els capítols 23è i 24è, Aurel explica quines són les regles per a resoldre els diferents tipus d'equacions i en el 22è, tracta sobre com trobar les arrels dels binomis i els residus.

En l'epístola adreçada a Bernardo Cimon[138] que introdueix l'obra, Aurel es refereix a la "sciencia del contar" i al fet que sigui poc coneguda sobretot en "estos Reynos de España":

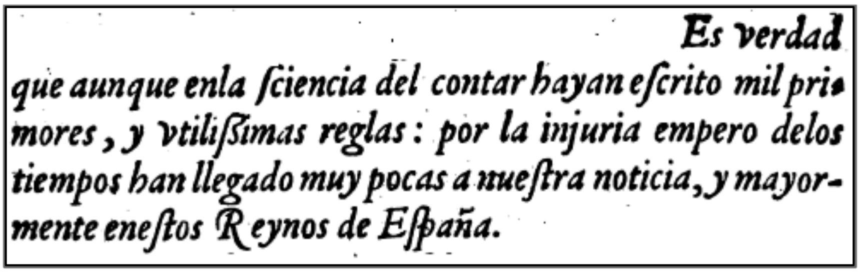

Es verdad
que aunque enla ſciencia del contar hayan eſcrito mil pri-
mores, y vtiliſsimas reglas: por la injuria empero delos
tiempos han llegado muy pocas a nueſtra noticia, y mayor-
mente eneſtos Reynos de Eſpaña.

Figura 2.1. Fragment de l'epístola introductòria a l'obra.[139]

[137] En la majora dels tractats d'àlgebra del Renaixement, s'hi pot trobar un capítol sobre la classificació de binomis i apòtomes o residus, que són expressions que consisteixen en la suma (en el cas dels binomis) o la resta (en el cas dels residus), d'un nombre racional i una arrel quadrada o bé de dues arrels quadrades. La inclusió d'aquest capítol es pot justificar per la necessitat de saber operar amb aquest tipus d'expressions a l'hora de resoldre equacions de segon grau. Aquesta classificació té el seu origen en el llibre X dels *Elements* d'Euclides. Per la importància que té en totes les obres estudiades, i perquè ja eren tractats en dues obres de referència de l'època com el *Liber abaci* de Fibonacci i la *Summa* de Pacioli, analitzarem els capítols que hi dediquen, Fibonacci, Pacioli i els autors estudiats en aquesta tesi, en un annex.

[138] L'única referència que hem trobat a Bernardo Cimon és a Picatoste, 1891, 21, on diu que era ciutadà de València.

[139] Aurel, 1552, s/p.

Més endavant, en una dedicatòria al lector, Aurel es torna a lamentar de la "gran falta que en estos Reynos de España ay de la sciencia Mathematica", per la qual cosa ha gosat escriure aquesta obra que, segons ell manifesta consta de tres parts: la primera és l'Art Major, a la segona demostrarà geomètricament tot el que ha posat en nombres a la primera part, i la tercera part serà de geometria pràctica per a oficials mecànics. La segona i la tercera parts, però, no s'han trobat. Vegem com ho expressa l'autor en aquesta dedicatòria:

Considerando, Amado Lector, la gran falta que en estos Reynos de España ay de la sciencia Mathematica, por ser ella tan necessaria, a los sabios verdaderos, me he atrevido de escriuir esta obra, la qual he partido en tres partes: Primera: Segunda: y Tercera. La segunda, sera para prouar (en parte) por demostracion Geometrica lo que en esta presente, y pª parte he puesto por numero: aunque en esta primera (en el arte mayor) lo que digo de numero, podras tambien tomar por linea. La tercera parte serà Geometria Pratica, para oficiales mechanicos[140]*....*

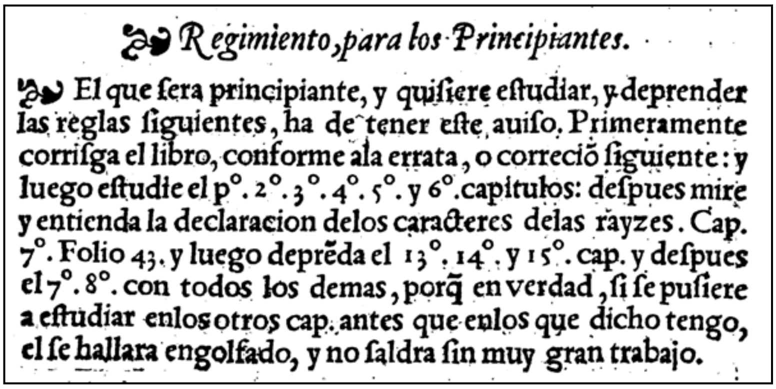
I una mica més endavant Aurel posa èmfasi en el fet d'haver-la escrit en una llengua que no és la seva per tal de facilitar-ne el seu coneixement als "reynos de España", la qual cosa mostra la intenció didàctica de l'autor:

...Assi que por ser cosa nueua lo que trato, y jamas vista, ni declarada: y podra ser, que ni aun entendida, ni imprimida en España, me he atreuido a tratarla, y escriuirla en lengua tan por entero repugnante a la mia... [141]

Després de l'índex de l'obra l'autor afegeix el que ell anomena "Regimiento para los Principiantes" on especifica l'ordre en què s'han de llegir els capítols per tal de facilitar la comprensió de les regles algebraiques, la qual cosa reafirma encara més la intenció didàctica de l'autor (figura 2.2).

---

[140] *Ibid.*
[141] *Ibid.*


Regimiento, para los Principiantes.

El que ſera principiante, y quiſiere eſtudiar, y deprender las reglas ſiguientes, ha de tener eſte auiſo. Primeramente corriſga el libro, conforme ala errata, o correciõ ſiguiente: y luego eſtudie el p°. 2°. 3°. 4°. 5°. y 6°. capitulos: deſpues mire y entienda la declaracion delos caracteres delas rayzes. Cap. 7°. Folio 43. y luego deprẽda el 13°. 14°. y 15°. cap. y deſpues el 7°. 8°. con todos los demas, porq̃ en verdad, ſi ſe puſiere a eſtudiar enlos otros cap. antes que enlos que dicho tengo, el ſe hallara engolfado, y no ſaldra ſin muy gran trabajo.

Figura 2.2. Ordre en què s'han de llegir els capítols.[142]

2.3.1. La idea d'àlgebra

Aurel comença el capítol XIII: *Trata de los carateres, definiciones con su operacion, y rayz quadrada,* expressant la seva idea d'àlgebra. Per Aurel, "àlgebra" és sinònim d'*Art Major*[143] i de *regla de la cosa*[144] i està basada en la proporció contínua, citant com a referència el llibre IX dels *Elements* d'Euclides. La proporció contínua serà fonamental per reduir els tipus d'equacions, i poder donar un procediment general per a resoldre-les, malgrat aquest procediment estigui enunciat en forma retòrica (figura 2.3).

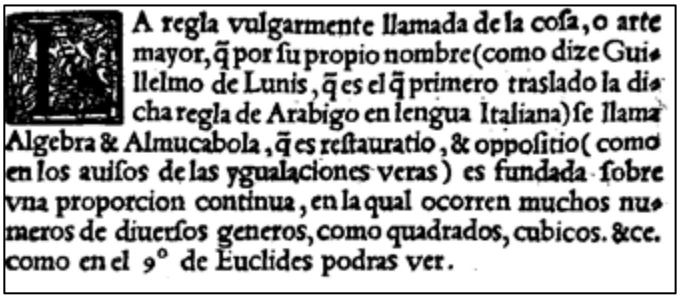

LA regla vulgarmente llamada dela coſa, o arte mayor, q̃ por ſu propio nombre (como dize Guilleluno de Lunis, q̃ es el q̃ primero traslado la dicha regla de Arabigo en lengua Italiana) ſe llama Algebra & Almucabola, q̃ es reſtauratio, & oppoſitio (como en los auiſos delas ygualaciones veras) es fundada ſobre vna proporcion continua, en la qual ocorren muchos numeros de diuerſos generos, como quadrados, cubicos. &ce. como en el 9° de Euclides podras ver.

Figura 2.3. Importància de la proporció contínua en l'àlgebra.[145]

---

[142] *Ibid.*

[143] En contraposició a l'*Art Menor*, nom amb què sovint es feia referència a l'aritmètica.

[144] Sobre l'etimologia dels termes utilitzats per designar la primera i segona incògnites, vegeu: Molina Sangüesa, Itziar, 2015."En torno a las incógnitas del álgebra: Cosa, Segunda cosa y Cantidad. Análisis de una terminología matemática renacentista". *Cuadernos AISPI. Estudios de Lenguas y Literaturas Hispánicas,* **6**, 127-146.

[145] Aurel, 1552, f. 68v

Com que la notació emprada no fa explícita la relació funcional entre les incògnites, la importància de la proporció contínua és cabdal.

En notació actual podríem expressar aquesta proporció contínua de la manera:

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \ldots$$

Es poden trobar referències als caràcters en proporció contínua en diversos autors des de finals del segle XIV. No hi ha, però, referències als *Elements* d'Euclides en el moment d'establir el símbols que s'utilitzaran pels caràcters, a les obres europees que contenen àlgebra anteriors a la d'Aurel, a excepció de la de Rudolff. Aquest autor, quan fa referència als caràcters en proporció contínua, també cita els *Elements*.

Quant als orígens de l'àlgebra, Aurel es refereix a les seves arrels aràbigues (vegeu també figura 2.3):

> *La regla vulgarment llamada de la cosa, o arte mayor, que por su propio nombre (como dice Guillelmo de Lunis, q es el q primero traslado la dicha regla de Arabigo en lengua Italiana) se llama Algebra & Almucabala, q es restauratio, & oppositio (como en los auisos de las igualaciones veras)*[146]*...*

No totes les primeres àlgebres europees hi fan referència. De fet, en algunes s'obvien volgudament aquests orígens[147]. El 1462 Regiomontanus[148] va trobar un manuscrit que

[146] Aurel, 1552, f. 68v-69r.

[147] Vegeu Stedall, Jacqueline, 2012."Narratives of algebra in early printed European texts", a S. Rommevaux, M. Spiesser i M. R. Massa Esteve (eds), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance,* 217-235. Honoré Champions. Paris.; Heeffer, Albrecht, 2009, *op. cit.* i Cifoletti, Giovanna, 1996, *op. cit.*

[148] Johannes Müller (1436-1476) va ser un prolífic matemàtic i astrònom alemany. El sobrenom *Regiomontanus* prové de la traducció llatina del nom de la ciutat alemanya on va néixer, Königsberg (*Montanus real* o *Montanus Regia*). No obstant, Regiomontanus va emprar en la seva vida nombrosos noms, per exemple en la seva inscripció a la Universitat apareix com *Johannes Molitoris de Künigsperg* en el qual empra *Molitoris* com a versió latinizada de 'Müller'.

contenia les *Aritmètiques* de Diophant i en una conferència[149] que va pronunciar a Pàdua el 1464 relacionada amb el desenvolupament de les matemàtiques[150], va fer referència al manuscrit i va suggerir que s'hi podien trobar els orígens de l'àlgebra. D'aquesta manera el projecte dels humanistes de recuperar els clàssics grecs i distanciar-se de les influències dels "bàrbars" va contribuir a què més tard fes fortuna entre alguns autors, un nou relat historiogràfic en el qual s'instituïa Diofant com el creador de l'àlgebra.

Per Aurel, l'àlgebra no és només la resolució d'equacions, sinó que és una regla que permet obtenir una equació a partir d'un enunciat, que després es resol aplicant la regla corresponent. Per tal d'exemplificar aquesta idea, veurem com troba Aurel l'arrel quadrada del binomi[151] $27 + \sqrt{200}$ al capítol 11è, basant-se en els *Elements*[152] d'Euclides i com ho fa en el capítol 22è per la *regla de la cosa.* En la primera columna es detallen els passos que s'han de fer amb els termes concrets que componen el binomi, per a obtenir-ne l'arrel, i es van fent aquests passos a mesura que s'expliquen. Es tracta d'una sèrie d'instruccions a seguir, que reprodueixen les del llibre X dels *Elements.*

En la segona columna, Aurel explica de manera succinta els passos que cal fer per trobar l'arrel d'un binomi, que tot i referir-los als termes concrets del binomi del qual en vol obtenir l'arrel, es poden generalitzar més fàcilment: es tracta de fer dues parts de la part racional del binomi, de tal manera que el producte d'aquestes dues parts, sigui igual a la quarta part del quadrat de la part irracional (si el binomi fos $a + \sqrt{b}$, per exemple, es tractaria de trobar c i d tals que: $\begin{cases} c + d = a \\ c \cdot d = \frac{1}{4} b \end{cases}$; aleshores el binomi $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ seria l'arrel del binomi $a + \sqrt{b}$). Planteja aleshores una equació que li permet trobar les parts en què s'ha de dividir 27, les arrels de les quals, seran els dos termes del binomi buscat.

---

[149] Aquesta conferència es va publicar en els seus *Rudimenta astronomia Alfragani* el 1537.

[150] Zinner, Ernst, 1990. *Regiomontanus: his life and work.* Traduït per Ezra Brown. Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam.

[151] Més referències als binomis en l'apartat sobre equacions i també a l'annex.

[152] Concretament fa referència a les proposicions: (X, 48), (X,30), (X,17), (X,18).

Mostrarem a continuació les dues maneres de calcular $\sqrt{27+\sqrt{200}}$, (quiero saber qual es la $\sqrt{}$ de $27+\sqrt{200)}$ [153] tal com les expressa Aurel, però utilitzant per les incògnites de la 2a columna una notació semblant a l'actual, per raons tipogràfiques.

Arrel del binomi $27+\sqrt{200}$ seguint els *Elements*[154]	Arrel del binomi $27+\sqrt{200}$ per la *regla de la cosa*[155]
Quiero saber qual es la $\sqrt{}$ de $27+\sqrt{200}$. Las dos potencias[156] son 729, y 200; cuya diferencia es 529; $\sqrt{}$ de la qual es 23; los quales junta con la mayor parte del binomio, y seran 50, cuya metad, es 25, que es la potencia de la parte mayor: los quales resta, o quita de la parte mayor, del binomino[157], i quedaran 2, que es la potencia de la parte menor de la dicha rayz. Y multiplicando la una potencia con la otra, vernan 50, que es la quarta parte de la potencia de la parte menor del binomino. Y la $\sqrt{}$ de cada una destas dos	Binomino pº es, $27+\sqrt{200}$, Parte 27 en 2 tales partes, que multiplicando la una con la otra, vengan 50, q es la 4ª parte de la potencia[159] de $\sqrt{200}$. Pongo q la una parte sea $1x$, la otra sera $27Q$-$1x$; multiplicando la una con la otra, vienen $27x$-$1ʒ$, ygual a $50Q$. Yguala, y vernan $27x$, ygual a $1ʒ$ $+50Q$. Sigue la ygualacion[160], y verna la x a valer $25Q$. Tanto diràs que es la una parte; la otra serà, 2, multiplicada la una con la otra, viene 50. Agora junta la $\sqrt{}$ de cada una delas dos partes juntas, y vernan $\sqrt{25}+\sqrt{2}$, digo, $5+\sqrt{2}$. Tanto diras que

153 Aurel, 1552, f. 63r
154 *Ibid.*
155 *Ibid.* f. 133r.
156 Aquí l'autor es refereix als quadrats.
157 Aurel utilitza *binomino* i *binomio* indistintament per referir-se a les expressions a les quals hem fet al·lusió en aquest mateix capítol. És l'únic autor dels que hem estudiat, que s'hi refereix d'aquesta manera. De fet, moltes de les expressions que s'utilitzen en les obres d'àlgebra d'aquesta època escrites en espanyol, són neologismes que suplien les necessitats designatives de l'àlgebra. Per més informació sobre els neologismes continguts en les àlgebres espanyoles del segle XVI, vegeu: Molina Sangüesa, Itzíar, 2017. *Letras, números e incógnitas: estudio de las voces aritmético-algebraicas del Renacimiento.* Iberoamericana. Madrid.

potencias, es $\sqrt{25}$, y $\sqrt{2}$; junta dos seran $5+\sqrt{2}$. Este binomino 4º[158] diràs que es √ de $27+\sqrt{200}$, que es binomino primo. Y quitada la una de la otra, quedara $5-\sqrt{2}$, serà llamada residuo, como consta por la 68ª del 10º. Y para hallar la √ del dicho residuo, mira la 86ª del mesmo 10º; aun que en la pratica lo mesmo que en los binominos se haze. Solo empero que como en binominos pornas + en los residuos pornas -, como dicho tengo.	es la √ del suso dicho binomino.

Per tant, la *regla de la cosa* no significa només la resolució de l'equació, sinó també tot el procés per arribar a plantejar-la. Per Pacioli, que és, com ja hem comentat a la introducció, un dels referents importants pels autors del segle XVI, l'àlgebra consistia en una sèrie de regles que permetien resoldre equacions lineals i quadràtiques una vegada escrites en la seva forma estàndard. Tot i que Pacioli, a partir de l'enunciat d'un problema, mostrava com establir l'equació corresponent, no considerava que aquest procés fos part de l'àlgebra[161].

Un altre aspecte molt rellevant relacionat amb la idea d'àlgebra, és l'*anàlisi*, en el sentit que va definir Pappus. Aquesta idea, que tan important va ser en el procés d'algebrització de les matemàtiques, prové d'una obra dedicada sobretot a la geometria. Pappus d'Alexandria (ca. 290- ca. 350) és autor d'una *Col·lecció Matemàtica*[162], compendi que recull

---

159 L'autor aquí també es refereix al quadrat.
160 Aquí Aurel es refereix a què es segueixi el procediment per resoldre l'equació.
158 En els *Elements* es classifiquen els binomis en sis tipus (vegeu annex).
161 Stedall, Jacqueline, 2012, *op. cit*.
162 Sobre l'obra de Pappus, vegeu l'interessant llibre: Cuomo, Serafina, 2000. *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*. Cambridge University Press. Cambridge.

proposicions extretes d'un gran nombre d'obres, en els quals hi fa remarques per tal que s'entenguin les demostracions. La *Col·lecció* consta de vuit llibres, dels quals se'n conserven íntegrament els sis darrers. El llibre VII[163] és essencial per la història de la geometria grega. En un llarg preàmbul que Pappus adreça al seu fill Hermodorus, explica què és l'anàlisi i què és la síntesi. Defineix l'anàlisi com el procediment que s'ha de seguir a partir d'allò que es busca, considerant-ho com si fos conegut, de manera que es facin els mateixos passos que es seguirien i en el mateix ordre, que si fos conegut com a resultat de la síntesi, que és el procés invers: va d'allò conegut, a allò que és desconegut. L'essencial de l'anàlisi és l'assumpció que el problema en qüestió és resolt.

Aurel exposa de manera molt clara què vol dir el que s'entén per *anàlisi,* al principi del capítol 14è, tot i que l'autor no parli d'anàlisi. Hi queda clar que per Aurel la *regla de la cosa* no és només una regla per a resoldre equacions, com ja hem vist amb un exemple, sinó que és tot un procés, el fonament del qual és l'anàlisi. Se suposa el problema resolt i es dóna un nom a la solució del problema, de manera que es confereix una mena d'existència a aquesta solució[164]. No és tan important el nom concret que es doni a la solució, com el fet que al tenir un nom, es pugui operar amb ella. És a dir, no es tracta de donar una sèrie d'instruccions per arribar a la solució del problema, sinó d'operar amb un nou objecte, com si ja fos conegut. Vegem com ho expressa l'autor:

> *Ya que has visto medianamente lo necessario para la operacion del algebra, regla de la cosa, o arte mayor, agora te quiero mostrar, como te has de regir en hazer y proponer las demandas que por ella auras, o querras hazer. Y digo que para hazer una demanda, por la dicha regla, has de imaginar q tal cuenta o demanda ya es hecha, y respondido, y tu agora la quieres prouar. Y pornas q la respuesta fuesse una x, con la qual has de procedir con los auisos y reglas dadas, como si fuere la propia quantidad sabida, o respuesta verdadera, hasta tanto que venga a la postre la vltima respuesta, debaxo de caracteres, o quantidades ocultas. La qual, o las quales diras ser ygual a lo q tu querrias que*

[163] Jones, Alexander, 1986. *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection.* Springer. New York.
[164] Sobre la idea d'anàlisi i el paper dels símbols, es poden llegir reflexions molt interessants a Kvasz, Ladislav, 2008, *Patterns of Change,* 167-172. Birkhäuser. Verlag AG. Basel.

viniesse. Y luego praticaras esta tal ygualacion, por vna de las 8 ygualaciones siguientes, a la que sera sujeta, y por ella te sera declarada la valor de la x oculta, y primero propuesta[165].

El fet d'operar amb una quantitat desconeguda com si fos coneguda, és una idea crucial que Aurel remarca i amb la qual queda clar que l'autor és conscient de la seva importància en els procediments algebraics.

2.3.2. Els símbols

En el capítol XIII, Aurel estableix els símbols que utilitzarà per a designar la incògnita i les seves potències, a les quals es refereix com *caracteres* i diu que es posen per evitar escriure'n els noms, que són llargs. Remarca que no necessàriament han de ser els que ell declara, en poden ser uns altres i, si es volen escriure els seus noms sencers també es pot fer. Ell proposa els següents (figura 2.4):

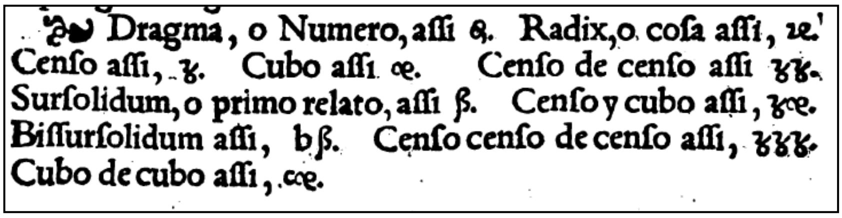

Dragma, o Numero, assi ʒ. Radix, o cosa assi, ꝛ.
Censo assi, ʒ. Cubo assi ce. Censo de censo assi ʒʒ.
Surſolidum, o primo relato, assi ß. Censo y cubo assi, ʒce.
Biſſurſolidum assi, bß. Censo censo de censo assi, ʒʒʒ.
Cubo de cubo assi, cce.

Figura 2.4. Declaració dels *caracters*.[166]

i fa una explicació de cadascun d'ells. En aquestes explicacions es refereix al que actualment anomenem equacions, com *igualacions,* que és com ens hi referirem sovint d'ara en endavant.

En el cas del *dragma*[167], que és el primer dels caràcters que proposa, diu Aurel que és sempre un nombre o quantitat "discreta y sabida", a diferència dels altres caràcters. Si diem,

[165] Aurel, 1552, f. 76v
[166] *Ibid.* f. 69r
[167] Aurel utilitza el terme *dragma*, d'origen àrab, a diferència de Pérez de Moya, per exemple, que utilitzarà el llatinisme *numero*.

per exemple, 3*Q*[168] ducats, volem dir clarament 3 ducats, però si diem 3*x*[169] ducats, o 4ʒ ducats, no podrem dir quants ducats són exactament, per ser quantitat "oculta y no sabida", fins que per alguna igualació no es trobi el valor de la *x*. Alguns dels autors que tractem, acompanyen d'un símbol el terme independent i d'altres no. Més endavant mostrarem amb un problema que resol Aurel, quin sentit podria tenir aquest símbol.

En l'explicació referent a la *x*, Aurel diu que és arrel o costat d'un quadrat i que és el primer dels nombres en una proporció contínua, perquè *Q*, es com ú, el qual "no es numero". Cal remarcar que la noció de nombre (quantitat discreta) i de magnitud (quantitat contínua) es van transformar amb la introducció dels procediments algebraics[170]. En les obres de diversos autors hi ha contradiccions pel que fa a la noció de nombre, de manera que allò que en algun moment consideren nombre, en un altre ocasió, consideren que no ho és. També als irracionals, en alguns casos se'ls atorga categoria de nombres i en altres casos no, i tampoc és clar en algunes obres quin tipus de nombres són irracionals.

En l'explicació referent al *censo, ʒ* (x^2 en notació actual), Aurel diu que és un nombre quadrat o un quadrat equilàter, l'arrel del qual, procedeix multiplicant la *x* per ella mateixa.

Pel que fa a la *œ* (x^3 en notació actual), el *cubo,* és un nombre cúbic o cos cúbic, igualment ample, llarg i alt. Procedeix de multiplicar la *ʒ* per la seva arrel que és la *x*.

El *censo de censo, ʒʒ* (x^4 en notació actual), és un nombre quadrat quadrat, l'arrel del qual té arrel. Procedeix de multiplicar *œ* per ell mateix o bé de multiplicar *œ* per *x* i la seva arrel és sempre un quadrat.

---

[168]Utilitzarem *Q* per indicar el símbol, que acompanya el terme independent, per raons tipogràfiques.
[169] Utilitzarem la *x* per a indicar la incògnita, també per raons tipogràfiques.
[170] Sobre les nocions de nombre i magnitud al renaixement, vegeu: Malet, Antoni, 2006. "Renaissance notions of number and magnitude". *Historia Mathematica* 33, 63-81; Bos, Henk J.M., 2001. *Redefining geometrical exactness : Descartes' transformation of the early modern concept of construction,* 120-127. Springer-Verlag. New York i Naets, Jurgen, 2010. "How to Define a Number? A General Epistemological Account of Simon Stevin's ". Art of Defining. *Topoi,* 29, 77-86.

El *sursolidumo primo relato, β* (x^5 en notació actual), és sempre un nombre irracional perquè no té arrel quadrada ni cúbica. Procedeix de multiplicar *ʒʒ* per *x* i també el *œ* per *ʒ* . Diu que és una figura *prolongada.*

El *censo y cubo, ʒœ* (x^6 en notació actual), és un nombre o figura corpòria, o és un quadrat cubicat o un cub quadrat. Procedeix de multiplicar el *β* amb la *x*, o bé *ʒ* amb la *ʒʒ*, o de multiplicar *œ* per ell mateix, o bé *ʒ* cubicat. Aquest nombre tindrà arrel quadrada i arrel cúbica.

El *bissursolidum,* o 2º *relato,* el *bβ* (x^7 en notació actual), és també irracional: mai tindrà arrel quadrada ni arrel cúbica. Procedeix de multiplicar *ʒœ*, amb *x*, o *β*, amb *ʒ*, o *ʒʒ* amb *œ*. És també figura *prolongada.*

El *censo censo de censo, ʒʒʒ* (x^8 en notació actual), és un nombre quadrat, l'arrel quadrada del qual, és quadrat d'un quadrat, que tindrà arrel doble. Procedeix de multiplicar *bβ* amb *x*; *ʒœ* amb *ʒ*; *β* amb *œ* o *ʒʒ* per ell mateix.

El *cubo de cubo, cœ* (x^9 en notació actual), l'arrel cúbica del qual, té arrel cúbica. Procedeix de multiplicar *ʒʒʒ* amb *x*; *bβ* amb *ʒ*; *ʒœ* amb *œ*; *β* amb *ʒʒ*¸ o cubicar el cub.

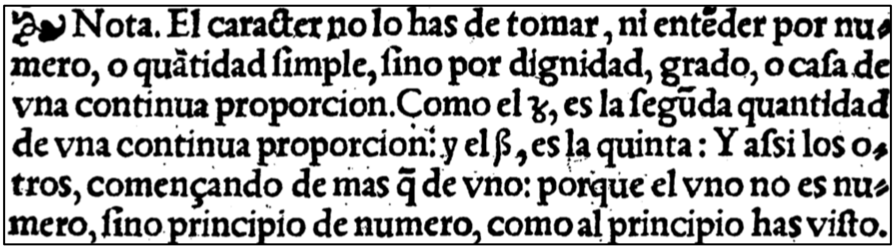
Els símbols són per l'autor, abreviacions, com ell mateix explica. Hi ha referències geomètriques en la definició d'alguns dels símbols, com en el cas del *primo relato* o del *censo y cubo,* per exemple, però Aurel no va més enllà pel que fa a les relacions entre l'àlgebra i la geometria. L'autor remarca la importància de la proporció contínua entre els símbols, ja que la notació que empra, no posa de manifest cap relació entre ells. En declara 10 però l'autor afegeix que n'hi poden haver tants com siguin necessaris. Vegem com ho expressa Aurel:

> *Ya que has visto la invencion, propiedad, y significacion de los dichos 10 numeros, o caracteres de vna continua proporcion, y como para el presente no pienso seran menester mas, no me alargo mas: mas si caso fuere que huuiesses menester mas de los ya dichos,*

podras hallarlos como has visto en la mesma continua proporcion: y como por vna tabla aqui presente veras, en la qual pone 3 exemplos. El primero en dupla: el segundo en tripla: el tercero en quadrupla proporcion. Y esto para que puedas ver como suben, y como te has de hauer con ellos, quando huuiesses menester mas de los ya dichos[171].

Cal remarcar que els símbols que utilitza Aurel, com els que utilitzaran els altres autors que són objecte d'aquesta tesi, tenen una naturalesa matemàtica complexa ja que reuneixen alhora el símbol per una quantitat i per l'operació que es fa amb aquesta quantitat. En el cas de la cinquena potència, per exemple, el símbol β representa el que actualment representem de la forma x^5, que inclou el símbol x i l'operació (elevar a la cinquena potència) que es fa amb aquest símbol.

Aurel utilitza diverses vegades la paraula "dignidad" amb relació als caràcters, però no com a sinònim. Núñez, en canvi es referirà a "dignitats" per indicar les incògnites, és a dir, amb el significat que Aurel utilitza *caracters.* En el capítol 13è, després d'haver declarat els caràcters, Aurel escriu una nota en la qual distingeix entre *caracter* i *dignidad, grado o casa* (figura 2.5):



Nota. El caracter no lo has de tomar, ni entẽder por nu-
mero, o quãtidad ſimple, ſino por dignidad, grado, o caſa de
vna continua proporcion. Como el ȝ, es la ſegũda quantidad
de vna continua proporcion: y el ß, es la quinta: Y aſsi los o-
tros, començando de mas q̃ de vno: porque el vno no es nu-
mero, ſino principio de numero, como al principio has viſto.

Figura 2.5. *Caracters, dignitades, grados o casas.*

També trobem els termes: *dignitat, grau* o *casa,* al principi de la part aritmètica de l'obra on l'autor es refereix amb aquests termes a les unitats, desenes, centenes i milers. Tant en el cas dels caràcters com en el fragment que mostrarem a continuació (figura 2.6), el termes *dignitat, grau o casa*, fan referència a la posició, que en el cas dels *caracters* suposa identificar-

[171] Aurel, 1552, f. 70r-70v

los amb el seu grau i en el cas de les unitats, desenes, centenes i milers, al valor relatiu de les xifres en funció de la posició que ocupen. En ambdós casos, l'autor fa referència on s'han de col·locar els caràcters o les xifres:

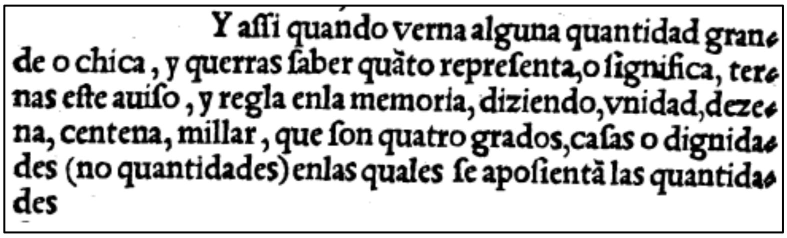

Y assi quando verna alguna quantidad gran-
de o chica, y querras saber quãto representa, o significa, ter-
nas este auiso, y regla enla memoria, diziendo, vnidad, deze-
na, centena, millar, que son quatro grados, casas o dignida-
des (no quantidades) enlas quales se aposientã las quantida-
des

Figure 2.6. *Dignitats, graus o cases* al principi de la part aritmètica de l'obra d'Aurel.[172]

Quan Aurel declara els caràcters que utilitzarà, no hi inclou el símbol +. En el 1r. capítol, on tracta les quatre regles generals dels nombres enters, explica que la suma vol dir "poner en una partida o summa lo que estuuiere en muchas[173]"però no posa cap símbol per efectuar-les (figura 2.7):

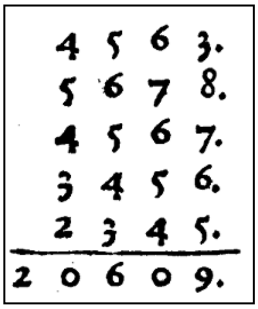

4 5 6 3.
5 6 7 8.
4 5 6 7.
3 4 5 6.
2 3 4 5.
2 0 6 0 9.

Figura 2.7. Suma sense símbols.[174]

Fins al foli 44[v], no apareix per primera vegada el símbol + a l'àlgebra d'Aurel. És en el capítol 7è, que tracta de "numeros quadrados, de sus rayzes, generacion, deffinicion, y operacion". En els cas de la suma d'irracionals, l'autor considera que ha de posar el signe + quan aquesta suma no es pot expressar en forma d'un sol nombre. L'autor posa l'exemple de sumar $\sqrt{7}$ amb $\sqrt{2}$. Els passos que fa, corresponen a elevar el quadrat el binomi i indicar-ne

[172]Aurel, 1552, f. 1[v].
[173]*Ibid.* f. 2[r].
[174]*Ibid.* f. 2[v].

l'arrel quadrada, com era habitual a l'època, és a dir: $\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{7+2+2\sqrt{14}}=\sqrt{7+2+\sqrt{56}}$. Aurel diu que "juntes hazen tanto como rayz quadrada de 9+$\sqrt{56}$ ".

> *Para sumar dos numeros irracionales, haras lo mesmo que arriba heziste: mas como el producto del vno con el otro no tiene rayz discreta, cuyo doble se hauia de sumar co la suma delos dos numeros sordos, y porque no son de vn genero no se pueden sumar sin el +, quadruplaras el dicho producto, que tanto es quadruplar el quadrado, o potecia, como doblar la rayz*[175].

Per tant, el signe + no és aquí una manera abreviada d'expressar la suma, sinó que és un símbol que crea un nexe entres dos "objectes" que han de romandre junts per formar-ne un de nou. Aquesta idea del signe com a nexe entre dos objectes es reforça més endavant, en el capítol 15è en l'apartat intitulat "Demandas binomiales, que por la mesma primera ygualacion se pueden hazer". Després de resoldre sis exercicis que contenen binomis o residus, Aurel posa una nota en la qual diu que el binomi i el residu s'han de considerar una sola quantitat, de manera que es reforça la idea que els signes "més" i "menys" contribueixen a la creació de nous objectes com són, en aquest cas, els binomis i els residus.

> *Esta media dozena de demandas de numeros binomiales he querido poner, para que a lo menos entiendas como te has de hauer con tales posiciones, y como el binomio, o residuo se ha de tomar por sola vna quantidad*[176]*...*

Amb relació al sentit que pogués tenir acompanyar el terme independent amb un símbol, vegem el problema 8è del 20è capítol, que tracta de les regles i demandes que es poden fer per la 5a igualació. S'han de trobar dos nombres tals que un d'ells sigui $2+\sqrt{2}$ més gran que l'altre i que multiplicant-los resulti $36+\sqrt{1152}$. Aurel anomena $1x$ al menor dels nombres. Aleshores, diu, el més gran serà: $1x+2+\sqrt{2}$. Multiplicant-los tindrem: $1ʒ+2+\sqrt{2}x$, remarcant l'autor que el binomi s'ha d'entendre com una sola quantitat, i en aquest

[175] *Ibid.* f. 44v.
[176] *Ibid.* f. 107v.

cas, multiplicada per x. D'alguna manera, la Q que acompanya el terme independent, en alguns casos supleix el que més endavant s'indicarà amb parèntesis. A l'expressió $1ʒ + 2 + \sqrt{2}x$, que ha obtingut Aurel com a resultat dels productes, no es pot dubtar que tot el binomi $2 + \sqrt{2}$ multiplica la x, és a dir, que és l'expressió que actualment s'escriuria: $1ʒ + (2 + \sqrt{2})x$ perquè en cas contrari, s'hauria d'escriure $1ʒ + 2Q + \sqrt{2}x$.

2.3.3. Les igualacions o equacions

De la mateixa manera que l'autor declara 10 caràcters, però diu que se'n pot ampliar el nombre, també proposa 8 tipus d'igualacions, però en la seva explicació queda clar que el nombre d'igualacions que es poden considerar, pot variar.

Aurel justifica el nombre d'igualacions que considera, dient que fa la mitjana entre les 6 que proposa Luca Pacioli i les 10 que proposa Albert de Saxònia[177] i que amb els 8 tipus es poden entendre els 6 de Pacioli i els 10 d'Albert de Saxònia:

> *Agora te quiero mostrar 8 reglas para las 8 ygualaciones: en las quales estan fundades las respuestas de nuestra regla, de la cosa, o arte mayor: dado que algunos ponen 6, como fray Lucas del Burgo. Y otros 10, como Albertucio de Saxonia. A mi empero me ha parecido tomar el medio arithmetico, entre 10, y 6, que es 8: pues por elles entederas, las 6 de fray Lucas: y por las mesmas alcançaras las 10 de Albertucio. Las 4 son simples, de 2 quantidades: y las otras 4 compuestas, de 3 quantidades, como aqui las veras de vna en vna, y primero las simples*[178].

Considera l'autor 4 tipus d'equacions amb dos termes, anomenades *igualacions simples*, que en notació actual podríem agrupar amb l'expressió: $ax^{n+k} = bx^n$ amb k= 1,2,3,4 i 4 tipus

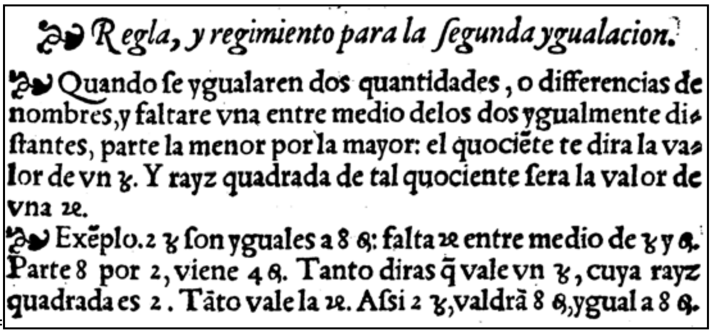
[177]Albert de Helmstoedt (1316-1390), més conegut com Albert de Saxònia va ser un filòsof alemany. Va estudiar a Praga i a París, on va ser Mestre d'Arts. Hi va ensenyar filosofia del 1351 al 1362. Va fundar la universitat de Viena i en va ser el seu primer rector (1364). És autor d'un tractat de lògica, *Summa logica.* i també d'un tractat sobre proporcions. Va ser deixeble de Jean Buridan i va tractar, com ell, la qüestió del *impetus*. Per més informació sobre el pensament d'Albert de Saxònia, es pot consultar: Moody, Ernest A., 1953. "Truth and Consequence in Mediaeval logic" a Brouwer, L.E.J.; Beth, E.W. & Heyting, A. (eds.) *Studies in Logic and the Fundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Company,Amsterdam. No hem trobat enlloc que tractés les equacions, com suggereix Aurel. Està clar que el preocupava la naturalesa de les matemàtiques, però més aviat el seu valor de veritat, que té més relació amb la lògica que amb l'àlgebra.

[178]Aurel, 1552, f. 77v.

més amb tres termes, anomenades *igualacions compostes*, que en notació actual podríem expressar: $ax^{n+2} + bx^{n+1} = cx^n$; $ax^{n+2}+cx^n = bx^{n+1}$; $bx^{n+1}+cx^n = ax^{n+2}$ per les igualacions 5a, 6a i 7a i les seves generalitzacions quan els graus de les incògnites no són consecutius però hi ha la mateixa diferència entre ells: $ax^{n+2k} + bx^{n+k} = cx^n$; $ax^{n+2k} + cx^n = bx^{n+k}$; $bx^{n+k}+ cx^n = ax^{n+2k}$, amb $k\in\mathbf{N}$.

Cadascun d'aquests tipus d'equacions està acuradament descrit. En el cas de les equacions simples, els dos termes estan col·locats a cadascun dels membres de la igualtat i es distingeixen en funció de la diferència entre els graus de la incògnita. Per exemple, en el cas de les equacions simples del 2n tipus, l'autor explica quines equacions pertanyen a aquest tipus i descriu en forma retòrica el procediment per a resoldre-les. A continuació resol una equació per exemplificar el procediment. Tot i estar escrit en forma retòrica, el procediment que es descriu és general, i en aquest sentit, suposa un estadi més avançat pel que fa a l'algebrització, que, per exemple, el fet d'utilitzar símbols per abreviar el nom dels caràcters. Una de les claus del procés d'algebrització és la capacitat per donar regles el més general possible i aquesta capacitat no va lligada necessàriament a una major simbolització.

En paraules d'Aurel (figura 2.8):


Regla, y regimiento para la ſegunda ygualacion.

Quando ſe ygualaren dos quantidades, o differencias de nombres, y faltare vna entre medio delos dos ygualmente diſtantes, parte la menor por la mayor: el quociẽte te dira la valor de vn ȥ. Y rayz quadrada de tal quociente ſera la valor de vna ꝛe.

Exẽplo. 2 ȥ ſon yguales a 8 ϕ: falta ꝛe entre medio de ȥ y ϕ. Parte 8 por 2, viene 4 ϕ. Tanto diras q̃ vale vn ȥ, cuya rayz quadrada es 2. Tãto vale la ꝛe. Aſsi 2 ȥ, valdrã 8 ϕ, ygual a 8 ϕ.

Figura 2.8. Procediment per a resoldre la segona igualació.[179]

[179] Aurel, 1552, f. 78r.

La traducció d'aquest procediment a la notació actual seria:

$$ax^{n+2} = bx^n \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

En el cas del 1r tipus, $ax^{n+1} = bx^n$, la fórmula seria: $x = \frac{b}{a}$, en el del 3r tipus, $ax^{n+3} = bx^n$, la fórmula seria: $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, i pel quart tipus, $ax^{n+4} = bx^n$, la fórmula s'expressaria en notació actual: $x = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.

Després d'explicar quines equacions s'ajusten al que ell anomena la quarta igualació, que és la darrera de les simples, Aurel escriu una nota i un avís. A la nota, resumeix els quatre casos, i afegeix que procedint de la mateixa manera, si faltessin quatre termes entremig, el quocient seria el valor de x^5 i si en faltessin 5, tindríem el valor de x^6, etc. i que de cada quocient se n'ha d'extreure una arrel, l'índex de la qual dependrà dels termes entremitjos que faltin entre les dues potències de la igualtat. En paraules de l'autor:

> *Nota. Assi como en la primera ygualacion has visto q no falta ningun carater entre medios, el quociete dize la valor de una x, en la segona ygualacion falta vn caracter entre medio de los 2; el quociente dize la valor de un z, en la tercera faltan 2, verna la valor de un ∞: en la quarta faltan 3, el quociente te dira la valor de vn zz, assi procediedo, si faltaren 4 el quociete dixera la valor de vn β, y si 5 vernia la valor de vn z∞. &c. De cada quociente sacaras la rayz conforme a lo que viene, con tal que los que faltaren entre medio de los 2, sean equidistantes*[180].

En l'avís, l'autor diu que si dues expressions que s'igualen, tenen la mateixa quantitat i el mateix gènere, com si igualem 3x a $3x$ o $4x^2$ a $4x^2$ (en notació actual), per exemple, aleshores la x sempre valdrà 1*Q*. En canvi, si $2x$ ha de ser igual a $3x$ o $4x^2$ a $5x^2$, per exemple, el cas és impossible. En el primer cas està clar que la solució per la x no és només 1, sinó que qualsevol nombre és solució. Aquest fet no està clar pels autors de l'època, la majoria dels quals ho expressen com Aurel. De fet és una errada que es troba també a la *Summa* de

[180] Aurel, 1552, f. 78v.

Pacioli, a la de Ghaligai[181], i que també trobarem al *Compendio* i a la *Arithmetica* de Pérez de Moya i a la *Arithmetica* de Roca. Aquest tipus d'errades que es van repetint al llarg de diferents obres, poden contribuir a determinar-ne possibles fonts i influències. En el segon cas pel qual Aurel dóna un avís, la solució és 0, però en les obres d'aquesta època, aquesta possibilitat no es considerava.

Les igualacions compostes tenen tres termes: dos en un costat de la igualtat i el tercer a l'altre costat. No es podien reduir a un sol cas perquè els "coeficients" dels termes sempre havien de ser positius. Cal remarcar que els nombres que acompanyaven les incògnites no eren tals coeficients en el sentit que els entenem actualment. Aquests *nombres* "comptaven" les incògnites i per tant, no tenien sentit com a coeficients ni els nombres negatius ni els irracionals[182]. A la cinquena igualació (primera de les compostes) el terme que està sol en un costat és el terme independent; en la sisena igualació el terme que està sol és el terme en el qual la incògnita té el grau menor i en la setena el que està sol és el que té la incògnita amb el grau més alt. En tots els casos, els graus de les incògnites són consecutius. El que Aurel intitula "regla, y regimiento para la octava ygualacion", és una generalització dels tres casos anteriors quan els graus de la incògnita no són necessàriament consecutius, però sí equidistants.

Vegem com Aurel expressa la regla per al cinquè tipus. Igual que en el cas de les igualacions simples, el procediment de resolució de les compostes està expressat en forma retòrica, però no es tracta d'instruccions per un cas concret, sinó generals per a totes les igualacions que s'ajustin al model.

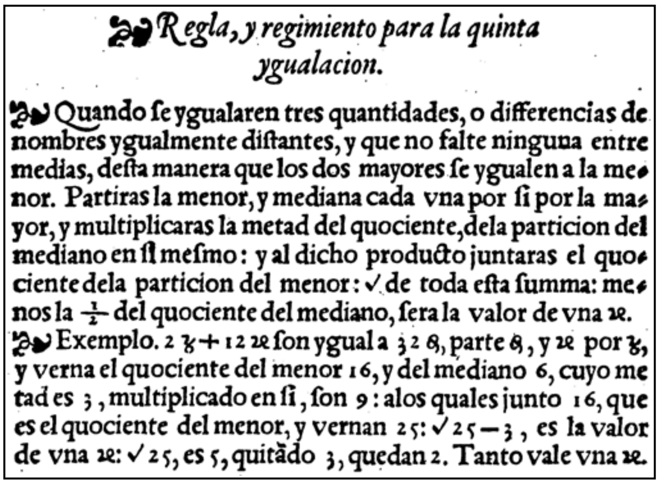
L'equació que posa com a exemple per el cinquè tipus, en notació actual s'escriuria: $2x^2 + 12x = 32$ i seguint el procediment d'Aurel, obtenim: $x = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 16} - \frac{1}{2}.6$

[181] Stedall, 2012, *op. cit.*, 226-228.
[182] Oaks, Jeffrey A., 2017. "Irrational "Coefficients" in Renaissance Algebra". *Science in Context*, **30** (2), 141-172.

La fórmula que expressaria aquesta regla és, escrita en notació actual:

$$ax^{n+2} + bx^{n+1} = cx^n;\ \ x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

Les equacions d'aquest tipus, tenen una solució positiva i una de negativa[183]. Com que les solucions negatives no es tenien en consideració, les equacions corresponents a la cinquena igualació tenen només una solució per Aurel. L'autor ho expressa (Figura 2.9):



Regla, y regimiento para la quinta ygualacion.

Quando ſe ygualaren tres quantidades, o differencias de nombres ygualmente diſtantes, y que no falte ninguna entre medias, deſta manera que los dos mayores ſe ygualen a la menor. Partiras la menor, y mediana cada vna por ſi por la mayor, y multiplicaras la metad del quociente, dela particion del mediano en ſi meſmo: y al dicho producto juntaras el quociente dela particion del menor: √ de toda eſta ſumma: menos la ½ del quociente del mediano, ſera la valor de vna ℞.

Exemplo. 2 ȝ + 12 ℞ ſon ygual a 32 ȝȝ, parte ȝȝ, y ℞ por ȝ, y verna el quociente del menor 16, y del mediano 6, cuyo metad es 3, multiplicado en ſi, ſon 9: alos quales junto 16, que es el quociente del menor, y vernan 25: √25 − 3, es la valor de vna ℞: √25, es 5, quitãdo 3, quedan 2. Tanto vale vna ℞.

Figura 2.9. Procediment per a resoldre la cinquena igualació.[184]

I obté per a la x el valor 2.

El cas que correspon a la sisena igualació té dues solucions positives[185], i l'autor les reconeix. Escrivint en notació actual les instruccions que dóna per a resoldre aquest tipus d'equacions, s'arriba a la fórmula:

[183] Si considerem l'equació tal com l'escriuríem actualment: $ax^{n+2} + bx^{n+1} - cx^n = 0$, els signes dels termes, ordenats pels graus de les incògnites, són: + + - . Cada canvi de signe correspon a una equació positiva i quan no hi ha canvi de signe, correspon a una solució negativa. Per tant, en aquest cas, hi haurà una solució negativa i una de positiva.

[184] Aurel, 1552, f. 78v

$$ax^{n+2} + cx^{n} = bx^{n+1};\ \mathrm{x} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^{2} - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$$

De tota manera, quan l'autor busca la solució de l'equació que ha posat com exemple (figura 2.10), $2x^2 + 32 = 20x$, ha de calcular $\sqrt{9} - 5$ (que donaria un resultat negatiu) i aleshores canvia l'ordre dels termes i calcula $5 - \sqrt{9}$:

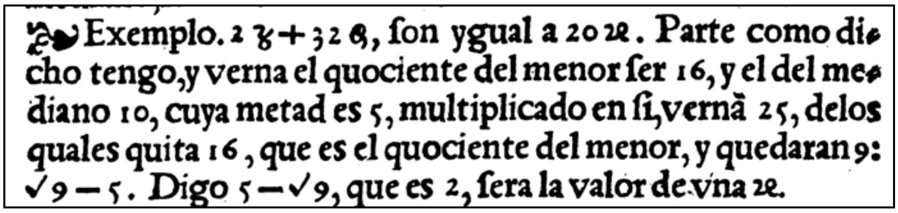

Exemplo. 2 ℨ + 32 ₵, son ygual a 20 co. Parte como di-
cho tengo, y verna el quociente del menor ser 16, y el del me-
diano 10, cuya metad es 5, multiplicado en si, vernã 25, delos
quales quita 16, que es el quociente del menor, y quedaran 9:
√9 − 5. Digo 5 − √9, que es 2, sera la valor de vna co.

Figura 2.10. Exemple d'equació del cinquè tipus. Primera solució.[186]

Després troba l'altra solució que és positiva i comprova totes dues solucions. Al final d'aquest cas hi ha una nota que diu que la major part de les demandes que es poden fer per aquesta igualació tindran dues respostes i fa una explicació en la qual diu que si en un dels casos no es pot efectuar la resta "seria impossible de 3, sacar 5", s'ha de posar la quantitat més gran primer. Després d'aquesta nota hi ha un "aviso muy notable", en el qual l'autor diu que si $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (el radicand seria negatiu en aquest cas), aleshores en comptes d'efectuar una resta, s'haurà de sumar, i els resultat obtingut després d'efectuar l'arrel quadrada i sumar $\frac{b}{2a}$ al resultat, serà el valor de x però en aquest cas serà "menos o deuda". Posa un exemple en el qual diu que la solució és -10, però, de fet és un exemple d'una equació sense solució real com passa sempre que $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. De tota manera, és força nou el fet que admeti una solució negativa.

[185]El tipus d'equacions que corresponen a la sisena igualació, es poden escriure en notació actual: $ax^{n+2}-bx^{n+1}+cx^{n}=0$. Com que hi ha dos canvis de signe, l'equació té dues solucions positives.

[186] Aurel, 1552, f. 79r.

En el cas de la setena igualació, que correspon a les equacions que es poden expressar en forma simbòlica: $bx^{n+1}+cx^{n} = ax^{n+2}$, el procediment que explica Aurel, condueix a la fórmula general:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^{2} + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$$

El cas de la vuitena igualació és, en realitat, un recull de casos que corresponen a les equacions, que en notació actual podríem resumir en: $ax^{n+2k} + bx^{n+k} = cx^{n}$; $ax^{n+2k} + cx^{n} = bx^{n+k}$; $bx^{n+k} + cx^{n} = ax^{n+2k}$, $k \epsilon N$, en els quals les potències de la incògnita no són consecutives, però guarden la mateixa proporció entre elles. Aurel diu que en aquests casos s'ha de procedir com a les igualacions cinquena, sisena i setena i al final s'ha d'efectuar alguna arrel al resultat per a trobar el valor de la x.

Després d'haver explicat les regles per a les igualacions, Aurel resol problemes que condueixen al plantejament d'equacions de cadascun dels tipus. La seva tipologia és molt diversa. N'hi ha de nombres, sense context, d'edats, de compra d'espècies, de compra i venda de draps, d'al·ligacions, de testaments, de companyia, etc.

En la introducció als problemes que corresponen a la primera igualació, Aurel manifesta que per aquesta igualació es poden fer totes les demandes que es podrien fer per *Arte Menor*, però per *Arte Menor* seria impossible respondre a les demandes que corresponen a les altres 7 igualacions. La diferència més rellevant entre la resolució de les equacions corresponents a la primera igualació i la resta, és el fet que en les altres s'han d'extreure arrels. L'arrel, per tant, és un element important a l'àlgebra, sobretot en els casos en què l'arrel expressa un nombre irracional.

2.3.3.1. Els sistemes d'equacions

En el capítol XVI: "Trata de la *regla de la quantidad*, con algunas reglas, y demandas que por ella se hazen que por otro nombre se puede llamar *regla de la segunda cosa*", Aurel tracta els sistemes d'equacions lineals. Al ser aquests sistemes de primer grau, el capítol corresponent el col·loca Aurel a continuació dels problemes que exemplifiquen la primera igualació, en la resolució de la qual no intervenen arrels. La *regla de la quantitat* o *regla de la segona quantitat* o també *regla de la segunda cosa* són expressions usades en els primers tractats d'àlgebra per referir-se al procediment per a resoldre problemes en els quals s'utilitza més d'una incògnita. La primera vegada en què apareix una segona incògnita en la cultura occidental va ser probablement, cap el 1225 en el *Flos* de Fibonacci[187], i més tard, el 1373 en el *Trattato di Fioretti* d'Antonio de Mazzinghi[188]. L'ús de més d'una incògnita portaria a la solució de sistemes d'equacions lineals, la resolució dels quals va representar un pas important cap el procés d'algebrització de les matemàtiques[189].

Aurel resol només 8 problemes amb més d'una incògnita en el capítol 16è, amb enunciats força variats. Veurem la resolució del segon que és on queda més clara l'aplicació de l'anomenada *regla de la quantitat.* Tracta de tres companys que volen comprar un cavall que val 34 ducats, però cadascun per separat no té prou diners. El primer diu als altres dos que si li donen la meitat del que tenen, podrà pagar el cavall. El segon diu als altres dos que si li donen 1/3 del que tenen, ell també podria comprar el cavall i finalment, el tercer, diu als altres dos, que si li donen ¼ del que tenen, ell també podrà pagar el cavall. Es tracta de saber quants ducats té cadascun (figura 2.11).

---

[187] Ad hoc itaque inveniendum, posui pro primo numero causam, et pro quinto rem ... Pisano, Leonardo, 1225. *Flos,* Codice Ambrosiano de Milano.
[188] Franci, Rafaella & Totti Rigatelli, Laura, 1988. « Fourteenth-century Italian algebra » in C. Hay (ed.), *Mathematics from Manuscript to Print, 1300-1600*, 11-29. Clarendon Press.
[189] Romero-Vallhonesta, 2011 *op. cit.*i Heeffer, 2012b., *op. cit.*

2 Tres compañeros tienen dineros, y quieren comprar vn cauallo por 34 ducados. Dize el primero alos otros dos, que le den la $\frac{1}{2}$ delo que tienen, y con lo q̃ el tiene podra pagar el cauallo: el ſegundo demanda a los otros dos, que le den $\frac{1}{3}$ de lo que tienen, y con lo que el tiene tambien podra pagar el cauallo: el tercero demanda a los otros dos el $\frac{1}{4}$, y que podra juſtamente pagar el cauallo. Demãdo, quãtos ducados tiene cada vno por ſi.

Figura 2.11. Enunciat problema segona quantitat.[190]

Traduint l'enunciat del problema al llenguatge algebraic actual obtindrem el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z = 34 \\ \dfrac{1}{3}x + y + \dfrac{1}{3}z = 34 \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}y + z = 34 \end{cases}$$

Marco Aurel utilitza només dues incògnites. A la primera l'anomena x i a la segona, q. Aquesta q servirà per designar la quantitat de diners del segon company i després també la del tercer. L'autor suposa que el primer dels companys té x ducats. N'hi falten, per tant, 34Q-x per poder comprar el cavall, quantitat que ha de ser igual a la meitat del que tenen els altres dos (primera equació). Per tant, entre els altres dos tenen 68Q-2x ducats i entre tots tres, 68Q-1x (afegint-hi la quantitat x del primer). Suposa ara que el segon té q ducats. Aleshores, entre el primer i el tercer tenen 68Q-1x-1q ducats. La tercera part d'aquesta quantitat és[191], $22\frac{2}{3}Q - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}q$, a la qual s'hi ha d'afegir la quantitat que té el segon (es refereix al que hem escrit en la segona equació), obtenint : $22\frac{2}{3}Q - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}q$. Aleshores iguala aquesta quantitat a 34 ducats que és el preu del cavall i amb aquesta expressió, la quantitat que té el segon es pot expressar en funció de la quantitat que té el primer.

---

190 Aurel, 1552, f. 109r

191 Les fraccions impròpies s'expressaven en aquesta època en forma de número mixt, forma que actualment està en desús.

A continuació suposa que el tercer té q ducats, és a dir, ha usat la q per posar la quantitat que té el segon en funció de la que té el primer i després torna a usar el mateix símbol per indicar la quantitat de diners que té el tercer. Com abans, però ara entre el primer i el segon, tindran 68Q-1x-1q ducats. La quarta part d'aquesta quantitat és : $17Q - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}q$, a la qual hi afegeix la quantitat q que té el tercer i obté, $17Q - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}q$ que ha de ser igual al preu del cavall, és a dir, a 34 ducats. D'aquesta igualtat obté l'expressió de la quantitat q del tercer en funció de la que té el primer : $\frac{1}{3}x + 22\frac{2}{3}Q$. Ajuntant les quantitats de cadascun dels tres amics, obté : $1x + \frac{1}{2}x + 17Q + \frac{1}{3}x + 22\frac{2}{3}Q = 1\frac{5}{6}x + 39\frac{2}{3}Q$, que ha de ser igual a 68Q-1x, d'on obté x=10 i 22 i 26 per les quantitats de ducats del segon i el tercer.

Per tant, el que fa Aurel és fer servir la primera incògnita com a paràmetre i expressa la segona i la tercera en funció de la primera, obtenint una sola incògnita que li permet trobar la primera i després les altres. La introducció de la 2a incògnita va suposar un pas molt important pel que fa a l'algebrització de les matemàtiques. En la resolució d'Aurel, les equacions es tracten encara separadament i el fet d'assignar el mateix símbol a la 2a i la 3a incògnites, impedeix que els conjunt de les 3 equacions es pugui escriure de forma explícita i, per tant, que el sistema d'equacions, tal com l'entenem actualment, es pugui posar de manifest. De tota manera aquest ús de la 2a incògnita serà una primera baula que portarà a la consideració de l'equació com un nou objecte de l'àlgebra.

2.3.4. Problemes

Aurel planteja i resol 115 problemes corresponents a la primera igualació. Descriurem un d'aquests problemes, que pertany a la tradició de problemes recreatius. Hi ha molts problemes que han viatjat a través de diferents cultures i que s'han anat proposant, a vegades com a simple distracció, d'altres, per mostrar la importància de saber aritmètica[192], o també per mostrar alguna manera innovadora de resoldre'ls. De fet, alguns d'aquests problemes van desaparèixer dels manuals de matemàtiques en difondre's els procediments algebraics, per tornar a aparèixer cap el segle XVIII[193]. El que mostrem a continuació tracta d'un treballador "gandul", que es contracta amb la condició que els dies que no treballi, ha de pagar a l'amo una determinada quantitat. Es tracta de saber, quants dies ha treballat si al cap d'un nombre de dies l'amo no li deu res al treballador ni el treballador li deu res a l'amo. La primera vegada que es té coneixement d'aquest problema és en la *Arithmetica* (1484) de Borghi[194] una de les primeres aritmètiques impreses.

En l'enunciat d'Aurel, un sastre contracta un ajudant per 30 dies i com que sap que el mosso és "gandul", li proposa guanyar 36 *dineros* per dia treballat i els dies que no treballi, el mosso haurà de donar a l'amo 20 *dineros.* Al cap de 30 dies ni l'amo deu res al mosso ni el mosso deu res a l'amo. Es tracta de saber quants dies va treballar el mosso i quants va fer el gandul.

Així ho expressa Aurel (figura 2.12):

[192]Vegeu el capítol dedicat a Pérez de Moya.

[193] Un interessant article sobre els problemes recreatius i la influència de l'àlgebra en la seva desaparició durant un temps dels manuals de matemàtiques: Heeffer, Albrecht, 2014. "How algebra spoiled recreational problems: A case study in the cross-cultural dissemination of mathematics. *Historia Mathematica,* **41**, 400-437.

[194]Borghi, Pietro ,1484, *Arithmetica,* f. 111^{v}. La *Arithmethica* de Pietro Borghi és l'incunable d'aritmètica comercial que va ser més popular a la seva època. Se'n coneixen quinze edicions, la darrera de les quals és del 1577 a Venècia. Les edicions posteriors porten per títol *Libro del Abacho*.

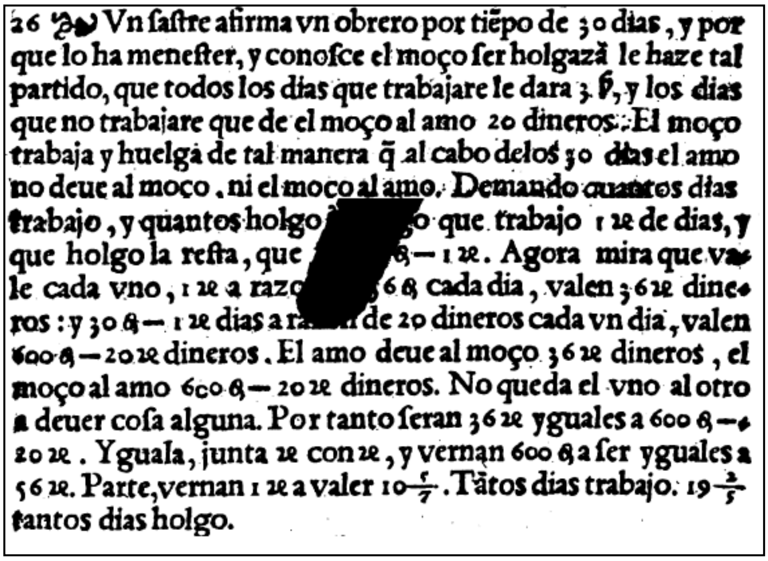

26 ℞ Vn sastre afirma vn obrero por tiẽpo de 30 dias, y por
que lo ha menester, y conosce el moço ser holgazã le haze tal
partido, que todos los dias que trabajare le dara 3. ϕ, y los dias
que no trabajare que de el moço al amo 20 dineros. El moço
trabaja y huelga de tal manera q̃ al cabo delos 30 dias el amo
no deue al moco, ni el moco al amo. Demando quantos dias
trabajo, y quantos holgo[redacted]o que trabajo 1 ℞ de dias, y
que holgo la resta, que [redacted]ϕ — 1 ℞. Agora mira que va-
le cada vno, 1 ℞ a raz[redacted]6 ϕ cada dia, valen 36 ℞ dine-
ros: y 30 ϕ — 1 ℞ dias a r[redacted] de 20 dineros cada vn dia, valen
600 ϕ — 20 ℞ dineros. El amo deue al moço 36 ℞ dineros, el
moço al amo 600 ϕ — 20 ℞ dineros. No queda el vno al otro
a deuer cosa alguna. Por tanto seran 36 ℞ yguales a 600 ϕ —
20 ℞. Yguala, junta ℞ con ℞, y vernan 600 ϕ a ser yguales a
56 ℞. Parte, vernan 1 ℞ a valer $10\frac{5}{7}$. Tãtos dias trabajo. $19\frac{2}{5}$
tantos dias holgo.

Figura 2.12. Problema 26 d'Aurel corresponent a la primera igualació.[195]

La resolució del problema per Aurel, utilitzant el llenguatge actual, seria: Suposa que el mosso va treballar x dies i que va fer el gandul la resta, que són 30-x. Per tant l'amo deu al mosso 36x i el mosso deu a l'amo 20(30 - x). Aquestes dues expressions han de correspondre a quantitats iguals i, per tant, $36x = 20(30 - x) \rightarrow 56x = 600$, d'on els dies treballats són: $x = 10\frac{5}{7}$ i els dies no treballats, 30-x, són[196] $19\frac{2}{7}$.

En el llibre de Borghi, es tracta d'un treballador que busca feina i un amo que n'hi dóna per 40 dies, de manera que el treballador cobrarà 20 § per cada dia treballat i perdrà 28 § per cada dia no treballat. Al cap de 40 dies l'amo no deu res al treballador. Es tracta de saber quants dies va treballar i quants no va treballar.

El text de Borghi (figura 2.13):

[195] Aurel, 1552, f. 86v-87r.

[196] Al text d'Aurel, com es pot observar, hi ha una errada i dóna com a solució pels dies no treballats $19\frac{2}{5}$.

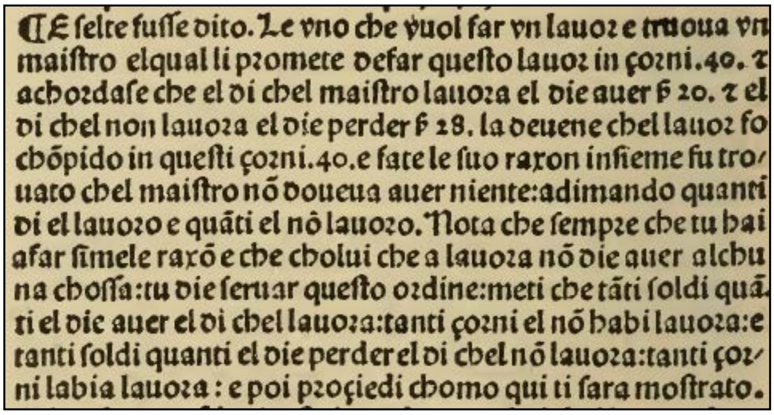

¶E selte fusse dito. Le vno che vuol far vn lauor e truoua vn
maistro elqual li promete defar questo lauor in çorni.40. e
achordase che el di chel maistro lauora el die auer ß 20. e el
di chel non lauora el die perder ß 28. la deuene chel lauor fo
chõpido in questi çorni.40.e fate le suo raxon insieme fu tro/
uato chel maistro nõ doueua auer niente: adimando quanti
di el lauoro e quãti el nõ lauoro. Nota che sempre che tu hai
afar simele raxõ e che cholui che a lauora nõ die auer alchu
na chossa: tu die seruar questo ordine: meti che tãti soldi quã
ti el die auer el di chel lauora: tanti çorni el nõ habi lauora: e
tanti soldi quanti el die perder el di chel nõ lauora: tanti çor/
ni labia lauora: e poi proçiedi chomo qui ti sara mostrato.

Figura 2.13. Problema de Borghi del treballador *gandul*.[197]

Borghi suposa que el treballador ha estat contractat per 48 dies perquè és una quantitat que li és còmode per saber els dies que ha treballat, ja que en aquests cas està clar que n'haurà treballat 28 i haurà deixat de treballar-ne 20, ja que $28 \cdot 20 - 20 \cdot 28 = 0$, que representa el guany del treballador. Aleshores fa una regla de tres dient que si els dies treballats serien 28 si el contracte s'hagués fet per 48 dies, quants dies hauria treballat si el contracte s'hagués fet per 40 dies, i obté la solució $23\frac{1}{3}$ pel nombre de dies treballats.

Aquest tipus de problemes, pels quals s'havia de buscar una solució enginyosa, van anar perdent interès al poder-se resoldre amb els procediments algebraics, d'una manera més senzilla, com hem vist en la solució d'Aurel. És, probablement, per aquest motiu que van desaparèixer dels manuals durant un temps.

En els capítols 17è, 18è, 19è 20è i 21è, l'autor resol problemes corresponents a les igualacions segona (21 problemes), tercera (15 problemes), quarta (13 problemes), cinquena (30 problemes) i sisena (19 problemes) respectivament.

[197] Borghi, 1484, 111v.

En els capítols 23è i 24è es resolen problemes que corresponen a la setena i vuitena igualacions.

En l'apartat següent mostrarem alguns exemples de problemes que condueixin a la resolució d'equacions no lineals.

2.4. Les fonts

Hi ha un bon nombre de tractats europeus que contenen àlgebra publicats abans de 1552 que és la data de publicació del d'Aurel, i que s'han de tenir en compte a l'hora de buscar les possible fonts del *Libro Primero.* Aquests textos tenen algunes similituds pel que fa a la notació o al tractament de les equacions, però en molts casos, hi ha diferències significatives entre ells. Després d'examinar diversos textos europeus rellevants, especialment italians, alemanys i francesos, hem constatat una gran connexió entre el *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genennt werden* (1525) de Christoff Rudolff (1494-1543)[198] i el *Libro primero* (1552) d'Aurel. Per aquest motiu hem fet una anàlisi en profunditat també del text de Rudolff, i podem afirmar que es tracta de la font principal de l'obra d'Aurel[199].

Aurel cita diversos autors i obres a la seva àlgebra, que probablement hi han influït, però que no són la seva font principal. Un els autors que cita és Luca Pacioli (1445-1517), concretament la seva obra *Summa de arithmetica geometria proportione & proportionalita* (Venezia, 1494). Aurel s'hi refereix com Fray Lucas del Burgo, el nom pel qual Pacioli era conegut aleshores i el cita dues vegades; la primera, juntament amb "Albertucio de Saxonia" quan justifica la seva proposta de considerar 8 tipus d'equacions[200],i la segona vegada en el 20è capítol, en una nota després de resoldre un problema que porta a la solució d'una

---

[198]Rudolff va estudiar a la Universitat de Viena. Hi ha pocs estudis sobre l'obra de Rudolff, que inclouen Terquem, M., 1857. "Christophe Rudolff". *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, **8**, 325-338.; Reich 1994 i Heeffer 2012b, *op. cit.*

[199] Vegeu: Romero-Vallhonesta i Massa-Esteve, 2018, *op. cit.*

[200]Aurel, 1552, f. 77[v].

equació del cinquè tipus[201]. Aurel diu que Fray Lucas del Burgo va resoldre aquest problema i que ell va haver de canviar algunes quantitats per tal d'obtenir un resultat racional.

Aquest problema tracta sobre un mercader que compra tres classes d'espècies (figura 2.14), i a partir del que costen entre totes i d'unes proporcions entre els preus de cada espècia, s'ha de trobar el preu d'una lliura de cada tipus. És pràcticament el mateix que un problema de Pacioli, que es pot trobar en el 6è tractat, 6ena distinció, 14è article, 21ena questió, tal com Aurel referencia exactament. La solució al problema lleugerament modificat és $2\frac{6}{7}$ i la solució al problema de Pacioli és $\sqrt{7\frac{135503}{361201}}-\frac{100}{601}$.

Aurel canvia només un parell de dades (figura 2.15): les 12 lliures de canyella que considera Pacioli, les canvia per 14 i el preu total, que en el cas de Pacioli són 200, per 240, de manera que els càlculs es simplifiquen i obté un resultat racional. Diu que si hi ha nombres irracionals "fuera largo en escriuir, y muy fatigoso en hazer[202]". De fet, Aurel critica força la manera de Pacioli de resoldre el problema "el la hizo de una manera que pocos saldran a la luz con ella, con tanta oscuridad[203]" i una mica més endavant: "Bien creo que estaua ocupado en sus sermones, y no estaua en la cuenta...[204]"

L'enunciat de Pacioli:

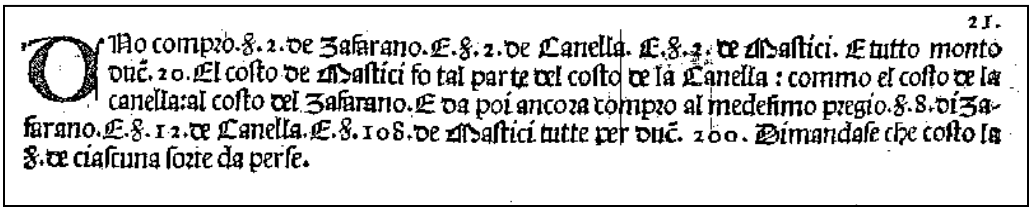
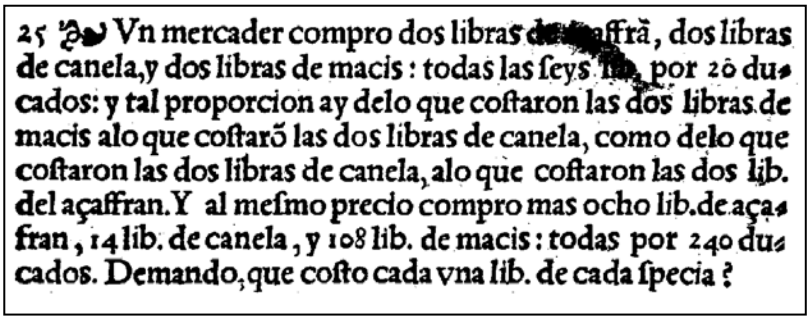

21.
Uno compro. ℔. 2. de Zafarano. E. ℔. 2. de Canella. E. ℔. 2. de Mastici. E tutto monto duc. 20. El costo de Mastici fo tal parte del costo de la Canella: commo el costo de la canella: al costo del Zafarano. E da poi ancora compro al medesimo pregio. ℔. 8. di Zafarano. E. ℔. 12. de Canella. E. ℔. 108. de Mastici tutte per duc. 200. Dimandase che costo la ℔. de ciascuna sorte da perse.

Figura 2.14. Pacioli, 1494, tractat 6è, distinció 6a, article 14, questió 21.

I el d'Aurel:

---

[201] *Ibid,* f. 125^{v}.
[202] *Ibid.* f. 125^{v}.
[203] *Ibid.* f. 126^{r}.
[204] *Ibid.* f. 126^{r}.



25 Vn mercader compro dos libras de açaffrã, dos libras
de canela, y dos libras de macis: todas las seys lib. por 20 du-
cados: y tal proporcion ay delo que costaron las dos libras de
macis alo que costarõ las dos libras de canela, como delo que
costaron las dos libras de canela, alo que costaron las dos lib.
del açaffran. Y al mesmo precio compro mas ocho lib. de aça-
fran, 14 lib. de canela, y 108 lib. de macis: todas por 240 du-
cados. Demando, que costo cada vna lib. de cada specia?

Figura 2.15. Problema 26 corresponent a la cinquena igualació.[205]

Aquest exemple ens proporciona un argument més per tal de reafirmar la intenció didàctica d'Aurel, que canvia les dades del problema per fer-lo més entenedor, donant per suposat que no és un "problema real" sinó que és un exemple per explicar la resolució d'una equació del cinquè tipus.

L'obra més citada per Aurel en la seva àlgebra són els *Elements* d'Euclides, que cita 11 vegades a la part algebraica del *Libro Primero* i 56 en total.

En la introducció, Aurel diu que usarà la mateixa terminologia que Euclides en la major part de la seva obra, especialment en els capítols 11è i 12è, que són els que tracten les arrels quadrades i cúbiques de les expressions binomials.

Aurel defineix *nombre* com Euclides al principi del setè llibre i Boeci[206] en el primer llibre, tal com el mateix autor explica. En el 3r capítol, sobre proporció, Aurel cita Pitàgores com l'inventor de la proporció harmònica.

---

[205] Aurel, 1552, f. 125r.

[206] Anicio Manlio Severino Boecio (480-524) és un autor molt citat al Renaixement. De fet, una de les obres de referència al Renaixement pel que fa a l'aritmètica, la de Jordanus Nemorarius, es basa en la *Institutio Arithmetica* de Boeci, de la qual n'hi ha una transcripció que és la que hem consultat: Sánchez Manzano, Mª Asunción, 2002, *Boecio. Institutio Arithmetica.* Universidad de León. Secretariado de Publicaciones. León.

En el 6è capítol, sobre progressions, Aurel resol el conegut problema dels grans de blat que s'haurien de posar en un tauler d'escacs si a cada casella se n'hi haguessin de posar el doble que a l'anterior i cita Juan de Ortega[207].

En el 14è capítol, on Aurel defineix els símbols que usarà per les incògnites, es refereix a Guillelmo de Lunis com el primer en traduir la *regla de la cosa* de l'àrab a l'italià. El primer autor en citar Guillermo de Lunis com a traductor de l'àlgebra de l'àrab a l'italià, del qual es té referència, va ser Benedetto da Firenze en la seva "Practica d'arismetricha" (1463), que mai va ser impresa. Trobem la mateixa cita a Raffaello Canacci's "Ragionamenti d'algebra" (c. 1485) tampoc mai impresa. Una tercera cita és a Francesco Ghaligai "Summa de arithmetica", impresa a Florència el 1521 i reimpresa el 1548. Aurel podia conèixer Ghaligai o algunade les seves fonts.

Finalment en el 15è capítol sobre les regles per a la primera igualtat, Aurel cita Marcus Vitrubius i la seva obra "Arquitectura", que com ja hem comentat al capítol introductori, era una de les obres de referència al segle XVI, i explica com Arquimedes va resoldre el problema de la corona del rei Hieró de Siracusa.[208]

A part de la *Summa* de Pacioli, les altres obres a les quals Aurel fa referència, no contenen àlgebra i els autors que cita no van escriure cap obra amb contingut algebraic. Aurel no dóna pistes, doncs, sobre la seva font principal, que és l'obra *Coss* de Rudolff. En veurem tot seguit algunes evidències.

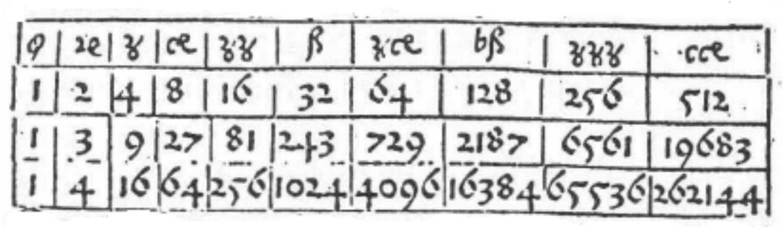
---

[207]Aurel explica que Fray Ioan de Ortega va cometre una greu errada quan va donar el resultat d'aquest problema. Vegeu: Ortega, J. De, 1512, *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria,* 26^v-27^r. En casa de Maistro Nicolau de Benedictis. León.

[208]Aquest conegut problema tracta d'una corona d'or que Hieró va encarregar a un orfebre. Segons Vitrubi, Hieró va sospitar que l'orfebre havia substituït una part de l'or per plata. Hieró va demanar a Arquimedes que ho investigués, i va descobrir el frau submergint la corona en una banyera d'aigua i es va adonar que la quantitat de líquid desplaçat no era l'esperada si la corona hagués estat fabricada només amb or. Aurel diu que Vitrubi no diu quin era el pes de la corona ni la quantitat d'aigua desplaçada.

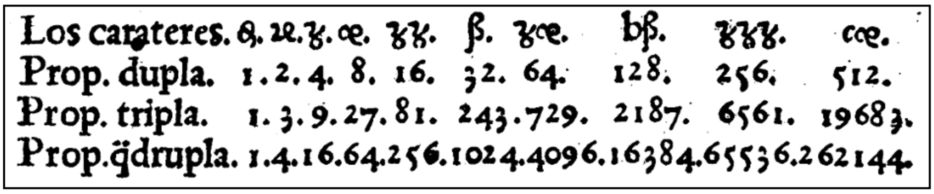
Pel que fa als símbols, Aurel utilitza els mateixos que va utilitzar Rudolff, qui també remarcava la proporció contínua entre els caràcters i ambdós citen el llibre IX dels *Elements* d'Euclides per tal d'explicar-la.

Per tal que quedi clar el fet que els caràcters estan en proporció contínua tant Rudolff com Aurel, escriuen els caràcters en una taula, tal com es mostren a continuació (figures 2.16 i 2.17), de manera que a sota els símbols, hi ha els valors que els correspondria segons cada valor de la base, sobre la qual es construirà la proporció corresponent.



φ	ꝛe	ʒ	ce	ʒʒ	ß	ʒce	bß	ʒʒʒ	cce
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144

Figura 2.16. Taula de Rudolff de *caracters* en proporció contínua.[209]



Los carateres.	φ.	ꝛe.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	bß.	ʒʒʒ.	cce.
Prop. dupla.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
Prop. tripla.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.
Prop. q̃drupla.	1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.	65536.	262144.

Figura 2.17. Taula d'Aurel de *caracters* en proporció contínua.[210]

Com es pot observar, les dues taules mostren el valor que prendrien les incògnites quan la base de la proporció és 2, 3 o 4.

Continuant amb els símbols, tots dos autors utilitzen +, – i √, per la suma la resta i l'arrel quadrada, d'expressions algebraiques, respectivament, expliquen el procediment de la mateixa manera i alguns dels exemples són idèntics.

[209]Rudolff, 1525, f. Diij^{v}.
[210]Aurel, 1552, f. 70^{v}.

A la taula següent (figura 2.18), mostrem dos exemples amb idèntiques xifres, el primer del quals també amb idèntics símbols:

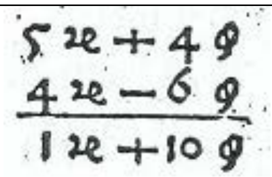
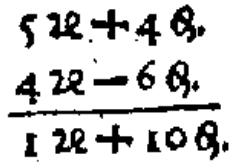
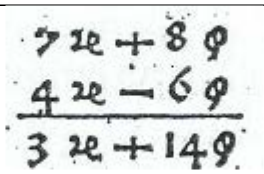
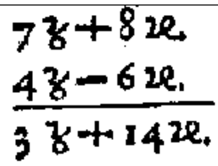
Restes al *Coss*[211]de Rudolff	Restes al *LibroPrimero*[212]d'Aurel
	
	

Figura 2.18. Sumes i restes a les obres de Rudolff i Aurel.

Quan es tracta de multiplicar *caracters,* Rudolff i Aurel construeixen taules idèntiques amb els símbols del terme independent, la incògnita i les seves potències, amb un nombre a sobre de cada *caracter,* que correspon al que actualment seria el *grau de la incògnita* (figures 2.19 i 2.20):

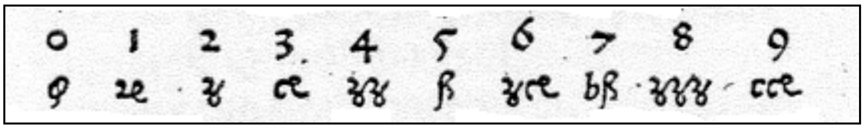


Figura 2.19. Taula per a multiplicar *caracters* a l'obra de Rudolff[213]

[211]Rudolff, 1525, f. Dv^{r}.
[212]Aurel, 1552, f. 71^{v}.
[213]Rudolff, 1525, f. Dvj^{v}.

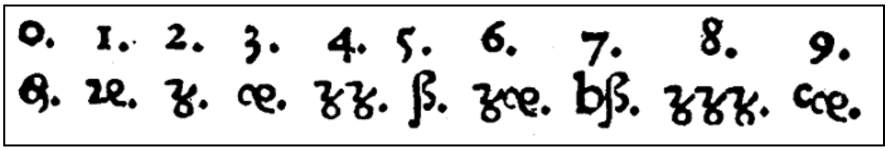


Figura 2.20. Taula per a multiplicar *caracters* a l'obra d'Aurel[214].

Ambdós autors expliquen que per multiplicar dos *caracters,* s'han de considerar els nombres que hi ha a sobre d'ells, sumar-los i aleshores buscar el *caracter* que correspon a aquesta suma, que serà el producte buscat[215].

També hi ha exemples de multiplicacions i divisions amb disposicions dels termes molt semblants i algunes amb xifres idèntiques.

Tots dos autors consideren 8 tipus d'equacions i enuncien les regles per a resoldre-les d'una manera similar, amb diferències subtils.

L'explicació del procediment a seguir per a resoldre les equacions del primer tipus, és similar en els dos autors amb la diferència que Aurel remarca el fet de la proporció contínua, que tot i que Rudolff també considera, no remarca en aquest cas. En paraules dels autors (figura 2.21):

La regla per a resoldre equacions del primer tipus al *Coss* de Rudolff.[216]	La regla per a resoldre equacions del primer tipus en el *Libro primero* d'Aurel.[217]

[214] Aurel, 1552, f. 72^{r}.

[215] Y quando tu querras multiplicar una dignidad, grado, o caracter con otro, mira lo que esta encima de cada uno, y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual caracter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion (Aurel 1552, f. 72 ^{r}).
Zu wissen den name eins products, addier die zalen so gefunde werde über den zweien quantitetn welhdu miteinander multiplicirst, das collect würt dir anzeigen den nam des products (Rudolff 1525, f. Dvj^{v}in Kaunzner i Röttel 2006, 176).

[216] Wan zwo quantitetn natürlicher ordnung einan der gleich werden/dividir die steiner in die grösser quantitet/der quocient zeigt an den werdt 1x us in disen exempln (Rudolff 1525, f. Gvij^{v} in Kaunzner and Röttel 2006, 188).

Quan dues quantitats, en l'ordre natural, siguin iguals entre elles, divideix la més petita entra les més gran, i el quocient mostrarà el valor de x com (pots veure) en els exemples següents.	Quando se ygualaren dos quantidades, caracteres o diferencias de nombres, y no faltare alguna entremedias de las dos: digo que la una siga a la otra, en regla de continua proporcion: como d a x; x a z, z a &c. Partiras la menor por la mayor, el quociente de tal particion te dira quanto vale la x.

Figura 2.21. Regla per a resoldre el primer tipus d'equacions [simples] segons Rudolff i Aurel.

Pel que fa als problemes que resolen ambdós autors, hi ha moltes coincidències. Tots dos consideren cada capítol referent a cada tipus d'equació, com independent pel que fa a la numeració dels enunciats. L'única diferencia és que Rudolff numera els que fan referència a la segona quantitat a continuació dels corresponents al primer tipus d'equacions i Aurel comença la numeració de nou.

La taula següent mostra el nombre de problemes de cada tipus que resol cada autor i els problemes que coincideixen exactament. El primer dels nombres que s'hi indiquen, fa referència al número corresponent al problema en l'obra de Rudolff i el segon el número corresponent en l'obra d'Aurel:

Tipus d'equacions	Nombre de problemes que resol Rudolff de cada tipus	Nombre de problemes que resol Aurel de	Nombre de problemes idèntics	Correspondència entre les numeracions corresponents als problemes idèntics

[217] Aurel 1552, f. 77v-78r.

		cada tipus		
Primera igualació	187	115	39	4-1; 7-2; 8 -3; 81-42; 107-47; 109-48; 110- 49; 113- 52; 114-53; 123-55; 124-58; 125-59; 126-60; 127-61; 134-64; 136-65; 137-66; 141-67; 145-68; 146-69; 147-70; 148-71; 149-72; 150-73; 151-74; 153-76; 154-77; 155-78; 156-79; 159-80; 160-81; 165-83; 166-86; 167-87; 171-88; 172-89; 173-90; 176-91; 178-92
Regla de la quantitat[218]	31	8	4	188-1; 191-2; 193-3; 194-5
Segona igualació	30	21	17	1-1; 3-3; 4-4; 4a-5; 4b-6; 4c-7; 5-8; 6-9; 7-10; 9-11; 11-12; 13-13; 14-14; 15-15; 20-16; 26-19; 30-20
Tercera	20	15	12	1-1; 2-2; 3-3; 6-4;11-5; 4-6;5-7; 7a-8;

[218] Al pròleg m'he referit als seminaris en els qual vaig participar el gener de 2015. Allà es va parlar de les possibles fonts de l'àlgebra de Rudolff, que tot i que, en principi, el seu estudi no era un objectiu d'aquesta tesi l'hem hagut d'estudiar ja que ha resultat ser la font principal de l'àlgebra d'Aurel. Un dels participants en el seminari sosté que l'obra de Rudolff, especialment pel que fa a la introducció d'una segona incògnita té clares influències de Chuquet i De la Roche: Heeffer, Albrecht, 2008, "Estienne de la Roche's appropriation of Chuquet (1484)" a Hermann Hunger (ed.) *Book of Abstracts, 3rd International Conference of the European Society for the History of Science*, 36-52. Vienna. Referent també a la introducció d'una segona incognita són molt interessants les reflexions que fa Radford al voltant de la "invenció" de les idees matemàtiques que exemplifica en el cas de la "invenció" d'una segona incògnita, i de la importància de comprendre el pensament matemàtic des del punt de vista de la creació, que no es pot fer sense relacionar el pensament matemàtic i el context cultural: Radford, Luis, 1997. "L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre". *Reperes-Irem*, **28**, 81-98.

igualació				8-9;16-11;18-12;20a-13
Quarta igualació	20	13	12	1-1; 4-2; 5-3; 7-4; 9-5; 11- 6; 12-7; 16-8; 17-9; 18-10; 19-11; 20-12
Cinquena igualació	40	30	22	1-1; 2-2; 3-3;5-4; 6-5; 7-6; 8-7; 9-8; 10-9; 11-10; 12-11; 13-12; 14-14; 16-15; 15-16;17-17; 19-18; 20-19; 21-20; 26-21; 33-23; 34- 24
Sisena igualació	30	19	16	1-1; 3-2; 6-3; 8-5; 9-6;10-7;11-8; 12-9;13-10;14-11;15-12;17-13; 20-15; 22-16;25-17; 26a-18
Setena igualació	30	17	16	2-1; 3a-2; 4-3; 5a-4; 6-5; 8-6; 9-7; 10-8; 11-9; 12-10; 20-12; 21-13; 22-14; 28a-15; 29-16; 30-17
Vuitena igualació	24	11	5	2-1; 4-2; 6-3; 7-4; 8-5

A part d'aquests problemes, també n'hi ha d'altres que són molt semblants o que plantegen el mateix tipus de situacions, però en aquesta taula només hi hem posat els que són idèntics: el mateix enunciat i les mateixes xifres. Per exemple, el problema del *treballador gandul,* que hem posat com un exemple de problema corresponent a la primera igualació, també és a l'obra de Rudolff i la manera de resoldre'l és la mateixa que després utilitzarà Aurel, però les dades no són exactament les mateixes[219] i per aquest motiu, no l'hem inclòs a la taula.

[219]Rudolff 1525, f. Oij^{r}-Oij^{v} a Kaunzner and Röttel 2006, 142.

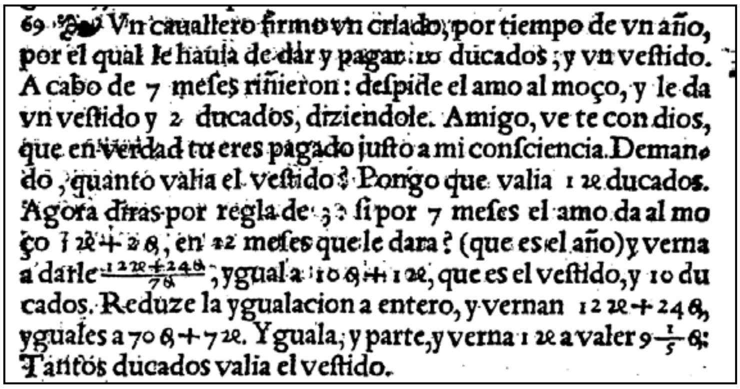
Per tal d'exemplificar que l'enunciat i la solució de molts problemes són idèntics, en mostrarem dos. El primer és el problema 69 d'Aurel, corresponent al primer tipus d'equacions, que és el 146 de Rudolff. Tracta d'un senyor que contracta un criat per un any, per 10 ducats (florins en el cas de Rudolff) i un vestit. Al cap de set mesos, l'amo acomiada el criat, donant-li un vestit i 2 ducats (florins en el cas de Rudolff), de manera que considerava que li pagava el que li corresponia pel temps treballat. Es vol saber el preu del vestit.

Tots dos autors consideren x el preu del vestit i es pregunten, si per 7 mesos el criat rep x+2 ducats (o florins) quants n'hauria de rebre en un any. La resposta, fent una regla de tres, és $\frac{12x+24}{7}$, fracció que es pot veure en la resolució del problema per part dels dos autors, tenint en compte que ells afegeixen una Q que acompanya els termes independents.
Aleshores tenim:

$$\frac{12x+24}{7} = 10x \quad \rightarrow \quad 5x = 46 \quad \rightarrow x = 9\frac{1}{5}$$

que és la solució a la qual arriben els dos autors.

L'enunciat d'Aurel (figura 2.22) :



69 Vn cauallero firmo vn criado, por tiempo de vn año, por el qual le hauia de dar y pagar 10 ducados; y vn vestido. A cabo de 7 meses riñieron: despide el amo al moço, y le da vn vestido y 2 ducados, diziendole. Amigo, ve te con dios, que en verdad tu eres pagado justo a mi consciencia. Demando, quanto valia el vestido? Pongo que valia 1 ℞ ducados. Agora diras por regla de 3: si por 7 meses el amo da al moço 1 ℞ + 2 φ, en 12 meses que le dara? (que es el año) y verna a darle $\frac{12 ℞ + 24 φ}{7 φ}$, ygual a 10 φ + 1 ℞, que es el vestido, y 10 ducados. Reduze la ygualacion a entero, y vernan 12 ℞ + 24 φ, yguales a 70 φ + 7 ℞. Yguala, y parte, y verna 1 ℞ a valer $9\frac{1}{5}$ φ: Tantos ducados valia el vestido.

Figura 2.22. Enunciat i solució problema 69 del primer tipus.[220]

I el de Rudolff (figura 2.23):

146 Ein herr hat einē diener/ sol im ein jar zu lon geben 10 flo: vnd einen rock. Der knecht dient 7 monat/ kompt mit dē herrn in vneinigkeit. Spricht der herr zum knecht. Nim hin 2 flo: vnd den rock/ so bist du bezalt. Ist die frag was der rock werdt sey? Setz 1 ℞ flo: Sprich 7 monath geben 1 ℞ + 2 φ was geben 12 monat. facit $\frac{12 ℞ + 24 φ}{7 φ}$ gleich 10 φ + 1 ℞. Setzt im gantzen 70 φ + 7 ℞ gleich 12 ℞ + 24 φ. Subtrahir φ von φ. ℞ von ℞/ bleiben 5 ℞ gleich 46 φ. facit 1 ℞ $9\frac{1}{5}$ φ/ so vil floren ist der rock angeschlagen. Proba. 7 monat geben $11\frac{3}{5}$ flo: was geben 5 monat. facit 8 flo: so der herr für die übrig zeyt ingehalten hat.

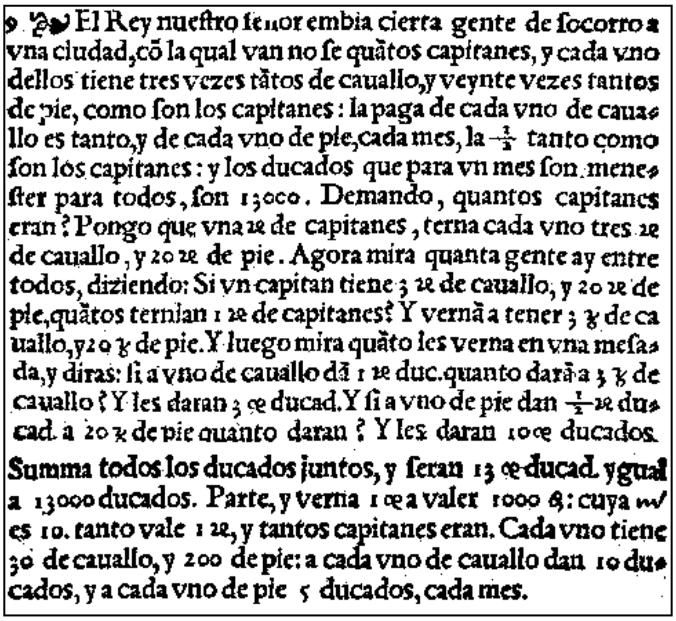
Figura 2.23. Enunciat i solució problema 146 del primer tipus.[221]

Aquest problema pot tenir aplicació pràctica per situacions semblants, però, en canvi, n'hi ha d'altres que podrien pertànyer a la tradició de problemes recreatius, com el que exposem a continuació. Es tracta del problema 9 d'Aurel, corresponent a la tercera igualació, que és el 8 de Rudolff. En aquest problema es tracta de saber quants capitans s'han d'enviar a socórrer una ciutat, de manera que cada capità en porta tants a cavall i tants a peu com són

[220] Aurel, 1552, 98v.
[221] Rudolff, 1525, Diij.

en total els capitans. La quantitat que els paguen també està expressada en funció del nombre de capitans. Es tracta, per tant, d'un problema amb un enunciat molt rebuscat, que no té aplicació pràctica i que té la finalitat d'exemplificar amb un problema la resolució d'una equació del tercer tipus. Les dades són exactament les mateixes i tots dos autors arriben a l'equació $13x^3 = 13000$, i obtenen $x=10$.

L'enunciat d'Aurel (figura 2.24):



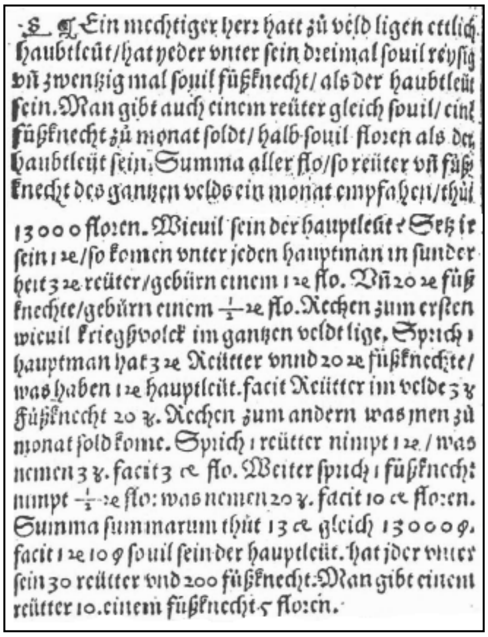
9 El Rey nueſtro ſeñor embia cierta gente de ſocorro a vna ciudad, cõ la qual van no ſe quãtos capitanes, y cada vno dellos tiene tres vezes tãtos de cauallo, y veynte vezes tantos de pie, como ſon los capitanes: la paga de cada vno de cauallo es tanto, y de cada vno de pie, cada mes, la $\frac{1}{2}$ tanto como ſon los capitanes: y los ducados que para vn mes ſon meneſter para todos, ſon 13000. Demando, quantos capitanes eran? Pongo que vna ꝶ de capitanes, terna cada vno tres ꝶ de cauallo, y 20 ꝶ de pie. Agora mira quanta gente ay entre todos, diziendo: Si vn capitan tiene 3 ꝶ de cauallo, y 20 ꝶ de pie, quãtos ternian 1 ꝶ de capitanes? Y vernã a tener 3 ȝ de cauallo, y 20 ȝ de pie. Y luego mira quãto les verna en vna meſada, y diras: ſi a vno de cauallo dã 1 ꝶ duc. quanto darã a 3 ȝ de cauallo? Y les daran 3 ce ducad. Y ſi a vno de pie dan $\frac{1}{2}$ ꝶ ducad. a 20 ȝ de pie quanto daran? Y les daran 10 ce ducados.

Summa todos los ducados juntos, y ſeran 13 ce ducad. ygual a 13000 ducados. Parte, y verna 1 ce a valer 1000 ȝ: cuya √ es 10. tanto vale 1 ꝶ, y tantos capitanes eran. Cada vno tiene 30 de cauallo, y 200 de pie: a cada vno de cauallo dan 10 ducados, y a cada vno de pie 5 ducados, cada mes.

Figura 2.24. Enunciat i solució del problema 9 d'Aurel del tercer tipus.[222]

I el de Rudolff (figura 2.25):

[222] Aurel, 1552, 116^r- 116^v.



.8. ¶ Ein mechtiger herr hatt zů veld ligen ettlich haubtleüt/ hat yeder vnter sein dreimal souil reysig vñ zwentzig mal souil füßknecht/ als der haubtleüt sein. Man gibt auch einem reüter gleich souil/ eim füßknecht zů monat soldt/ halb souil floren als der haubtleüt sein. Summa aller flo/ so reüter vñ füßknecht des gantzen velds ein monat empfahen/ thůt 13000 floren. Wieuil sein der hauptleüt? Setz ir sein 1 ℞/ so komen vnter jeden hauptman in sunderheit 3 ℞ reüter/ gebürn einem 1 ℞ flo. Vñ 20 ℞ füßknechte/ gebürn einem $\frac{1}{2}$ ℞ flo. Rechen zum ersten wieuil kriegßvolck im gantzen veldt lige. Sprich 1 hauptman hat 3 ℞ Reütter vnnd 20 ℞ füßknechte/ was haben 1 ℞ hauptleüt. facit Reütter im velde 3 ȝ füßknecht 20 ȝ. Rechen zum andern was men zů monat sold kome. Sprich 1 reütter nimpt 1 ℞/ was nemen 3 ȝ. facit 3 ce flo. Weiter sprich 1 füßknecht nimpt $\frac{1}{2}$ ℞ flo: was nemen 20 ȝ. facit 10 ce floren. Summa summarum thůt 13 ce gleich 13000 φ. facit 1 ℞ 10 φ souil sein der hauptleüt. hat jder vnter sein 30 reütter vnd 200 füßknecht. Man gibt einem reütter 10. einem füßknecht 5 floren.

Figura 2.25. Enunciat i solució del problema 8 de Rudolff del 3r tipus[223].

Està clar que Aurel coneixia la *Summa* de Pacioli i segurament que estava familiaritzat també amb l'obra de Galighai o potser amb alguna de les seves fonts perquè ambdós autors fan referència a Guillermo de Lunis, a qui citen pocs autors. Hem comentat que Aurel s'hi refereix en el 14è capítol, com el primer en traduir la *regla de la cosa* de l'àrab a l'italià.

Tenint en compte la intenció didàctica de l'àlgebra d'Aurel, podia haver pensat que el *Coss* de Rudolff era una obra apropiada per entendre l'àlgebra i introduir-la a Espanya. Hem mostrat molts punts en comú entre el *Coss* de Rudolff i el *Libro primero* d'Aurel, comparant les notacions, els tipus d'equacions, i la manera de resoldre els problemes, una bona part dels quals són idèntics. També és idèntica la manera de resoldre els problemes per la *regla de la quantitat*[224]. Hi ha, però, algunes diferències. És cert que Aurel es va apropiar de l'obra de Rudolff, però hi va afegir comentaris i idees originals, de manera que li va servir de base per escriure la seva obra i adaptar-la al públic que n'havia de ser el receptor.

223 Rudolff, 1525, Tviij[v].
224 Romero Vallhonesta, Massa Esteve, 2018, *op. cit.*

2.5. Conclusions

La introducció de l'algebra a la Península Ibèrica, d'una manera formal, va tenir lloc el 1552 amb la publicació del *Libro Primero* de Marco Aurel. Aquest autor s'havia establert a València en una època en què s'hi havien establert un bon nombre de mercaders alemanys. Era *mestre de primeres lletres* i ensenyava també matemàtiques pràctiques. Com ja hem comentat a la introducció, aquesta és la via principal per la qual l'àlgebra es va introduir a Europa: a través de manuals d'aritmètica pràctica destinats als mercaders i escrits en llengua vernacular, i en els quals es dedicava una part a l'àlgebra.

En el cas d'Aurel, la seva obra dedica la meitat a l'àlgebra, de manera que no es tracta només de donar-ne notícia, sinó que desenvolupa les seves tècniques al llarg de 12 capítols.

En l'apartat dedicat als símbols, hem destacat que l'autor considera que ha de posar el signe + quan ha de sumar irracionals, ja que la suma no es pot expressar en forma d'un sol nombre, de manera que el signe + fa de nexe d'unió entre dos "objectes" creant-ne un de nou.

L'àlgebra representa per Aurel, a diferència de per Pacioli, per exemple, tot el procés que va des de l'enunciat d'un problema fins a la seva solució, passant pel plantejament de l'equació corresponent.

La proporció contínua és cabdal als inicis de l'àlgebra i Aurel n'és plenament conscient. Quan expressa la seva idea d'àlgebra al principi del capítol 13è, ja diu que està basada en la proporció contínua i ho remarca nombroses vegades al llarg de l'obra. Diverses obres anteriors fan referència a la proporció contínua en el moment d'explicar que és l'àlgebra o de definir els caràcters, però no es fa referència a *Els Elements* d'Euclides, quan se'n parla, com sí que ho fa Aurel. Sí que hi fa referència també Rudolff, que és la font principal d'Aurel. Les incògnites no deixen de ser abreviacions, sense que s'evidenciï cap relació funcional entre elles, sinó és per l'afirmació que estan en proporció contínua. De la mateixa manera que la proporció contínua explica la relació entre les incògnites que la pròpia notació no pot posar de manifest, el símbol que acompanya el terme independent pot, en alguns casos, jugar el rol que actualment juguen els parèntesis com hem vist en l'exemple del problema 8 del 20è capítol, en l'apartat dedicat als símbols.

Una altra qüestió cabdal és l'*anàlisi*, que és fonamental en l'obra d'Aurel i també ho serà en les obres de Pérez de Moya i Roca, que seguiran la mateixa línia. L'anàlisi suposa el problema resolt, és a dir, que té solució, i se li dóna nom a aquesta solució, operant amb ella com si tingués un valor conegut. El fet d'operar amb una quantitat desconeguda, és fonamental per l'àlgebra i permet generalitzar els procediments, cosa que és molt difícil de dur a terme, si per resoldre un problema l'únic que tenim són una sèrie d'instruccions a partir de les dades, que condueixen a la solució.

Hem donat arguments sòlids per tal de mostrar que Rudolff és la font principal d'Aurel tot i que ell no el citi. De tota manera, hi ha diferències subtils entre les seves obres. Potser una de les més remarcables és el fet al qual ens hem referit a l'apartat de les equacions, concretament a la sisena igualació, on Aurel admet una solució negativa mentre que Rudolff no parla de nombres negatius. Tenint en compte que l'obra de Rudolff és la base de la d'Aurel, és molt agosarada la introducció d'un canvi d'aquestes característiques.

L'obra d'Aurel no va ser només el manual amb el qual es va introduir l'àlgebra a la Península Ibèrica, sinó que va ser també la font principal per les obres de Juan Pérez de Moya i Antic Roca[225], com veurem en els capítols corresponents. De la mateixa manera que Rudolff és la principal font d'Aurel, d'on extreu les idees principals per la seva obra, Pérez de Moya extraurà les idees principals del seu *Compendio* (1558), així com les de la seva *Arithmetica* (1562), del *Libro Primero.* El fet que l'obra de Pérez de Moya, amb diverses incorporacions posteriors, aconseguís més de 25 edicions, ens permet afirmar la decisiva influència del *Libro Primero* en el desenvolupament de l'àlgebra espanyola.

[225] Massa-Esteve, Mª Rosa, 2012. "Spanish Arte Mayor in the Sixteenth century", a Rommevaux, S., Spiesser, M. i Massa Esteve, M. R. (eds.), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance,* 103-126. Honoré Champions. Paris.

CAPÍTOL 3. JUAN PÉREZ DE MOYA. La difusió de l'àlgebra.

3.1. Introducció

En aquest capítol analitzarem la segona obra d'àlgebra impresa a la Península Ibèrica, el *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor*[226], de 1558 (en endavant *Compendio*), l'autor del qual és Juan Pérez de Moya. És la primera obra impresa a la Península Ibèrica amb contingut estrictament algebraic, que constituiria el llibre 7è i una petita part del llibre 5è de la *Arithmetica practica y speculativa*[227] de 1562 (en endavant *Arithmetica*) del mateix autor. La font principal d'ambdues obres és el *Libro Primero de Artihmetica Algebratica* de Marco Aurel.

Després d'un breu apunt biogràfic on destacarem la varietat de disciplines que Pérez de Moya va tractar, descriurem el contingut del *Compendio* i de la *Arithmetica* i farem referència, quan escaigui, a petites diferències entre el *Compendio* i el llibre 7è de la *Arithmetica*, on l'autor hi tracta la *regla de la cosa*, expressió amb la qual Pérez de Moya es refereix també a l'àlgebra, com feia Aurel. A continuació, ens referirem a la idea d'àlgebra de l'autor, als símbols que utilitzarà per les incògnites i al mètode per a resoldre equacions. Com en el cas d'Aurel, l'anàlisi configura la idea d'àlgebra de Pérez de Moya. El mètode que utilitza l'autor per a resoldre equacions és similar, encara que utilitza símbols diferents als que utilitza Aurel. En el cas de la introducció d'una segona incògnita, analitzarem el petits canvis que es van produint en les reedicions de les seves obres, que l'autor sempre revisa i que comentarem en l'apartat dedicat als problemes.

---

[226] Pérez de Moya, Juan, 1558. *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor ordenado por el Bachiller Juan Pérez de Moya, natural de Santisteban del Puerto.* Martin de Bitoria. Burgos.

[227] Pérez de Moya, Juan, 1562. *Arithmetica practica y speculativa* [del bachiller Juan Pérez de Moya, agora nuevamente corregida y añadidas por el mismo autor muchas cosas con otros dos libros y una tabla muy copiosa de las cosas más notables de todo lo que en este libro contiene]. Mathías Gast. Salamanca.

Dedicarem un apartat al 9è llibre de la *Arithmetica*, que reforça la intenció didàctica de l'autor i que juntament amb el 8è llibre, donen a l'obra un caràcter més erudit i literari que el de les altres obres analitzades.

A l'apartat dedicat a les fonts, constatarem la influència de l'obra d'Aurel en la de Pérez de Moya, tot i que hagi pogut tenir també altres influències.

Aquest capítol, a part de contribuir a l'assoliment del primer objectiu específic, com tots els que fan referència als autors, contribuirà especialment a l'assoliment del segon objectiu específic, relacionat amb els públics de la ciència. L'autor vol donar a conèixer l'àlgebra, no solament al públic que estigués interessat en la matèria, sinó a tot tipus de públic, com ho demostra el diàleg que constitueix el darrer llibre de la seva *Arithmetica.* En la línia del que considerava Secord[228], la lectura del diàleg és, d'alguna manera, una participació en la producció científica del coneixement. Relacionada també amb els públics de la ciència, la recomanació del rei al començament de la *Arithmetica,* i els escrits d'Alejo Venegas i Francisco Sánchez, van tenir un paper important en la difusió de l'obra.

3.2. Dades biogràfiques

Juan Pérez de Moya va néixer a Santisteban del Puerto (Jaén) cap el 1513 i va morir a Granada cap el 1596. Quant a la seva formació, sembla clar que va estudiar a Salamanca, ciutat a la qual va està lligat molts anys i possiblement també a Alcalà d'Henares. No devia passar de la condició de "batxiller" que és la que figura en la portada de la major part de les seves obres, la qual cosa pot sorprendre si es té en compte el gran nombre d'obres que va publicar, i la diversitat de disciplines que va tractar. Es va ordenar sacerdot, segurament un cop acabats els estudis, ja que el 1536 va aconseguir una capellania fundada en el seu poble pel comte Men Rodríguez de Benavides i hi devia romandre al menys fins el 1554, any de la

[228] Secord, 2004, *op. cit.*

publicació a Toledo del *Libro de cuenta,* en la portada del qual, figura com a veí de Santisteban del Puerto[229].

A la seva *Arithmetica*, després d'un escrit de Francisco de Erasso en nom del rei, de la dedicatòria de l'obra al príncep Carlos i d'un escrit de l'autor al lector, n'hi ha un altre de "El maestro Alexo Venegas[230] al beneuolo y pio Lector", al final del qual fa una lloança del Pérez de Moya:

> *...cuyo autor es el Bachiller Iuan Perez de Moya, natural de Sant Estevan del Puerto. Es tan leydo y tan experimetado en esta arte de Arithmetica, que con publico applauso la ha leydo en Salamanca, y en la corte, y en otros muchos lugares insignes, que me parece que loarle con mayor encarescimiento, seria poner sospecha en la obra. Por lo qual me paresce que es major acogerme al refran castellano que dize, Hablen cartas y callen barvas, hable la obra que ella me quitara de cuydado de pregonar lo que ella tan presto puede provar. Vale de Madrid a siete de Octubre de mil y quinientos, y sesenta y un años.*

Tot i que era corrent elogiar els autors en els pròlegs o notes a les seves obres, en aquest cas, els seus biògrafs consideren justificats els elogis a Pérez de Moya que el consideraven una persona extraordinàriament culta, que havia llegit i assimilat tot el que s'havia publicat a la seva època. No solament hi ha aquest elogi en la seva *Arithmetica,* sinó que hi ha un escrit de "El licenciado Francisco Sánchez[231], cathedratico de Rhetorica en la vniversidad de Salamanca" al lector, just abans de començar el llibre 7è que és el que Pérez de Moya dedica a la *regla de la cosa.* En el seu escrit, *el Brocense* destaca l'interès de Pérez de

[229] Per a les dades biogràfiques hem emprat: Valladares Reguero, A.,1997. "El Bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes biobibliográficos". *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses,* n. 165, 371-412 i Ruiz Higueras, Luisa & García García, Francisco Javier, 2009. "*Aritmetica Practica y Specvlativa* de J. Pèrez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico". *Llull,* **32,** 103-133.

[230] Alejo Venegas va néixer cap el 1498, probablement a Camarena (Toledo). Va exercir docència a Toledo i més tard, va ser nomenat «visitador de libros» a petició de l'Inquisidor General, Alonso Manrique de Lara, la qual cosa li va permetre estudiar diferents obres. D'entre aquelles que va permetre la seva publicació, hi figura el *Libro de cuenta* de Juan Pérez de Moya, Toledo, Juan Ferrer, 1554. BNM, R-14.218.

[231]Francisco Sánchez (1523-1601) nascut a Brozas (Cáceres) i conegut com *El Brocense*, és un dels principals humanistes del Renaixement hispà, famós per les seves edicions i comentaris d'autors clàssics grecs i llatins.

Moya per la divulgació de la ciència i el fet que era un llibre esperat perquè se n'havia sentit a parlar (es refereix a *la regla de la cosa*) en altres llengües.

És citat com a gran aritmètic per Lope de Vega en el llibre 4rt de l'obra "El peregrino en su patria[232]" (Figura 3.1):

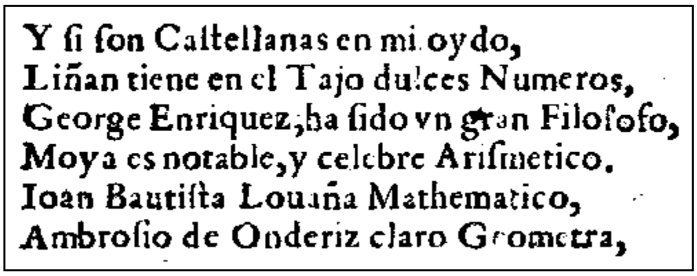

Y ſi ſon Caſtellanas en mi oydo,
Liñan tiene en el Tajo dulces Numeros,
George Enriquez, ha ſido vn gran Filoſofo,
Moya es notable, y celebre Ariſmetico.
Ioan Bautiſta Louaña Mathematico,
Ambroſio de Onderiz claro Geometra,

Figura 3.1. (Pérez de) Moya citat per Lope de Vega[233]

Va escriure diverses obres, no totes elles relacionades amb les matemàtiques[234]:

- ✓ *Comparaciones o símiles para los vicios y virtudes, muy util y necesario para Predicadores y otras persones curiosas* (Lisboa, 1581; Alcalá de Henares, 1584, 1586; València, 1599)
- ✓ *Philosofia Secreta, Donde debaxo de Historias fabuloses, se contiene mucha doctrina provechosa a todos estudios. Con el origen de los Idolos o Dioses de la Gentilidad* (Madrid, 1585, 1628, 1673; Saragossa, 1599)
- ✓ *Varia historia de Sanctas e illustres mugeres en todo genero de virtudes* (Madrid, 1583).
- ✓ *Sylva Eutrapelias id est comitatis et urbanitatis ex variis probatae fidei authoribus et vitae experimentis* (Valladolid, 1577; Sevilla, 1579), única obra escrita en llatí.

Les obres matemàtiques, amb la data de la primera edició, són les següents:

---

[232] De Vega Carpio, Lope, 1605. *El peregrino en su patria.* Casa de Sebastián de Cormellas. Barcelona.
[233] Lope de Vega, 1605, 179^{v}.
[234] Més detalls a: Rodríguez Vidal, R., 1987. *Diálogos de Aritmética pràctica y especulativa* (1562), 5-25. Prensas Universitarias de Zaragoza.

- ✓ *Libro de cuenta que trata de las quatro Reglas de Arithmetica practica, por numeros enteros y quebrados y de reducciones de monedes destos Reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad.* Toledo, 1554.
- ✓ *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor.* Burgos, 1558.
- ✓ *Arithmetica practica y especulativa.* Salamanca, 1562.
- ✓ *Obra intitulada Fragmentos Mathematicos*. Salamanca, 1567.
- ✓ *Libro primero y segundo que trata de Geometria practica*. Salamanca, 1568.
- ✓ *Tratado de cosas de Astronomia y Cosmografia Natural*. Alcalá, 1573.
- ✓ *Tratado de Geometria practica y especulativa*. Alcalá, 1573.
- ✓ *Tratado de Mathematicas en que se contienen coses de Arithmética, Geometria, Cosmografia y Philosofia natural. Con otras varias materias necesarias a todas las artes liberales.* Alcalá, 1573.
- ✓ *Manual de contadores.* Alcalá, 1582.

Aquesta relació de les obres de Pérez de Moya, mostra la seva diversitat d'interessos, encara la que la major part d'elles tenen relació amb les matemàtiques.

3.3. Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor

El *Compendio* de Pérez de Moya, de 1558, consta de 149 pàgines i està dividit en 16 capítols. El 1r tracta sobre la denominació de la *regla de la cosa.* En el 2n declara els *caracters* i explica el seu significat. En el 3r declara els símbols que utilitzarà pels caràcters, que seran diferents dels que havia declarat en el capítol anterior, per motius relacionats amb la impremta. En el capítol 4rt defineix nombres quadrats i explica com operar-hi. En el 5è fa el mateix amb els nombres cúbics. En el 6è explica com realitzar operacions que impliquen nombres quadrats i cúbics. En el 7è explica les operacions amb nombres medials[235] i en el 8è les operacions amb els caràcters. El 9è capítol està dedicat als binomis

[235] Pérez de Moya defineix els nombres medials com nombres, les potències dels quals, són arrels de nombres no quadrats. Quan Pérez de Moya parla de potències, es refereix al quadrat. Un exemple podria ser $\sqrt{\sqrt{6}}$. Els nombres medials estan definits en el llibre X dels *Elements* d'Euclides i tenen relació amb les línies binomials, els apòtomes i els residus, als quals ens referirem més endavant.

i disjunts o residus, i a les seves operacions. En el capítol 10è dóna avisos per a les igualacions. En el capítol 11è tracta les 4 igualacions simples de 2 quantitats i en el 12è les 3 igualacions compostes de 3 quantitats. En el capítol 13è posa exemples (*demandes* per l'autor) on s'haurà d'aplicar el que s'ha vist en els capítols precedents. S'hi proposen 18 problemes corresponents a la 1a igualació simple, 3 per a la 2a, 2 per a la 3a i 3 per a la 4a. També es proposen 2 problemes per a il·lustrar cadascun dels 3 tipus d'igualacions compostes que considera l'autor. Hi ha 3 exercicis addicionals a l'article 8 d'aquest capítol i l'article 9 és la *regla de la segona cosa* o *quantitat* que il·lustra amb 4 problemes. El capítol 14è és una recopilació de totes les igualacions, en paraules de l'autor, i hi resol 4 problemes. El capítol 15è tracta sobre les arrels universals[236] i, finalment, el 16è tracta de la proporció i de la proporcionalitat.

L'*Arithmetica* de Pérez de Moya, de 1562, és l'obra que li va donar fama i va arribar, almenys, a les 25 edicions. Consta de 765 folis i està dividida en nou llibres, tots ells menys el darrer, estan dividits en diversos capítols i aquests, en articles. Mostrem el contingut dels llibres a la taula següent:

ARITHMETICA* de *1562	
LLIBRE	CONTINGUT
Primer	Operacions amb nombres enters
Segon	Operacions amb fraccions
Tercer	Regla de tres, regla de companyia, al·ligacions, etc.
Quart	Nocions de geometria[237].
Cinquè	Aritmètica especulativa[238]

[236] Els autors d'aquesta època parlen d'arrels universals quan han d'extreure una arrel d'una expressió que ja en conté una, com en el cas de les arrels dels binomis i els residus que són arrels de l'estil: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Més endavant veurem com Pérez de Moya indica les arrels universals.
[237] La seva inclusió a l'obra, l'autor la justifica per la necessitat de mesurar les terres. És un capítol poc extens: Pérez de Moya, 1562, 304-319; i és l'únic de l'obra on l'autor representa figures geomètriques.
[238] L'autor es refereix a pràctiques aritmètiques que, en principi, no tenen una aplicació immediata.

Sisè	Comptar “sense ploma[239]” i fer canvis de monedes.
Setè	És el compendi de la *regla de la cosa*[240].
Vuitè	Mesures antigues i càlcul de festes movibles.
Novè	Diàleg sobre la importància de l'aritmètica.

Figura 3.2 Taula on es mostra el contingut dels llibres de la *Arithmetica* de 1562 de Pérez de Moya

El llibre 9è, que hem analitzat a fons, ens ha permès reafirmar-nos en la intenció didàctica del autor, entre d'altres coses pel fet d'haver escollit el diàleg com a gènere literari. El diàleg permet a l'autor distanciar-se de les seves tesis, de forma que la seva veu roman oculta i el lector participa d'alguna manera en el procés de producció col·lectiva del coneixement. Segons algunes fonts[241] hauria estat el primer capítol del *Libro de cuenta,* que va ser el primer que Pérez de Moya va publicar. Tracta diversos punts de vista sobre la utilitat de les matemàtiques i els motius que aconsellen el seu estudi.

Sembla clar que l'*Arithmetica* és una mena de recopilació d'allò que necessita saber qui vulgui ensenyar matemàtiques. No és un manual per a estudiants perquè els capítols no respecten gens un ordre de dificultat, de manera que, per exemple, en el capítol 4rt del 5è llibre, s'utilitzen arrels quadrades i cúbiques que no s'havien tractat encara i l'autor ha de remetre sovint al capítol on es tractaran[242]. De tota manera, l'ordre de dificultat sí que es respecta dins de cada llibre.

Aquesta *Arithmetica* té una característica important que la diferencia de la resta de les que tractem, que és la inclusió de dos capítols, els darrers, amb un caire marcadament

[239] Es refereix a comptar sense fer servir paper i llapis.

[240] Està precedit d'un text dedicat al lector escrit en llatí en el qual es destaca la importància del llibre i també de l'escrit del *Brocense* al qual ja hem fet referència.

[241] Vegeu Baranda, C., 2011. “Formas del discurso científico en el Renacimiento: tratados y diálogos”, *Studia Aurea,* **5**, 1-21.

[242] Per exemple, l'autor abans d'iniciar el llibre 5è, escriu: *Para entendimiento de lo que en este libro se trata lee el tercero, y quarto, y quinto, y septimo, y nono, y quinzeno, capitulo del libro septimo.* Pérez de Moya, 1562, 320.

erudit i literari que confirmen la vocació didàctica de Pérez de Moya i el confirmen alhora com a humanista.

3.3.1. La idea d'àlgebra

Pérez de Moya expressa la seva idea d'àlgebra en el capítol 1r del *Compendio* i en el capítol 1r del llibre 7è de la seva *Arithmetica*.

L'autor parla de la *regla de Algebra, regla de la cosa, regles reales* o *arte mayor* per referir-se a l'àlgebra. Remarca que per aquesta regla es poden resoldre infinites qüestions i la seva finalitat és trobar un nombre proporcional "dudoso demandado". Es tracta, doncs, de trobar un nombre desconegut i la proporció és important, tot i que no diu que la regla es basi en la proporció contínua com sí que remarcava Aurel, encara que més endavant sí que parlarà de proporció contínua.

Com ja hem comentat, el text de 1558 està inclòs en el de 1562 amb alguns petits canvis. En aquesta primera referència a l'àlgebra podem veure que ha canviat dues paraules del text (i una lletra de la paraula *almucabala*) de 1558 en el de 1562, que potser no les considerava prou precises. En el de 1558 diu:

> *...Algebra, que quiere dezir, restauratio, o almucabola, que quiere dezir,* ***aposicion, o solucion...***

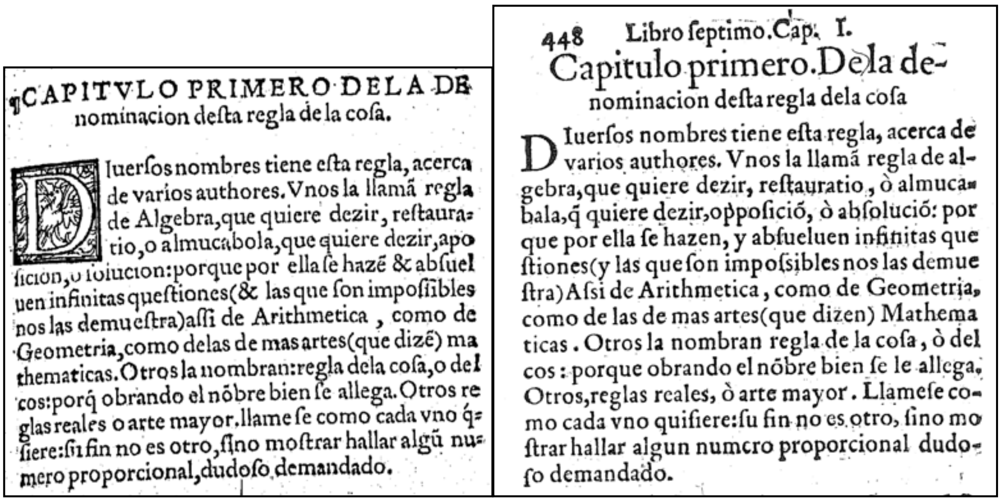
I en el de 1562:

> *...algebra, que quiere dezir, restauratio, o almucabala, q quiere dezir,* ***oposicio***[243]***, o absolucio...***

[243] Oposición és un terme que procedeix de l'àrab, concretament de al-muqābala. Vegeu: Molina Sangüesa, Itzíar, 2017. Lingüística Iberoamericana. *Letras, números e incógnitas: estudio de las voces aritmético-algebraicas del Renacimiento,* 95. Iberoamericana. Madrid.

De fet, la paraula *absolucio*, que utilitza Pérez de Moya en l'*Arithmetica*, té més relació amb el que diu després l'autor sobre que "por ella se hazen, y absuelven infinites questiones", que no pas la paraula *solucion*, que utilitza al *Compendio.* Canvia també la paraula *aposicion*, per la paraula *oposicio*, com a sinònims de les anteriors.

Podem veure aquestes petites diferències comparant el capítol 1r del llibre 7è de l'*Arithmetica* i el capítol 1r del *Compendio.*



¶CAPITVLO PRIMERO DE LA DE nominacion deſta regla de la coſa.

Diuerſos nombres tiene eſta regla, acerca de varios authores. Vnos la llamã regla de Algebra, que quiere dezir, reſtauratio, o almucabola, que quiere dezir, apoſicion, o ſolucion: porque por ella ſe hazẽ & abſuel uen infinitas queſtiones (& las que ſon impoſſibles nos las demueſtra) aſſi de Arithmetica, como de Geometria, como delas de mas artes (que dizẽ) mathematicas. Otros la nombran: regla dela coſa, o del cos: porq̃ obrando el nõbre bien ſe allega. Otros reglas reales o arte mayor. llame ſe como cada vno q̃ſiere: ſu fin no es otro, ſino moſtrar hallar algũ numero proporcional, dudoſo demandado.

448 Libro ſeptimo. Cap. I.

Capitulo primero. De la denominacion deſta regla dela coſa

Diuerſos nombres tiene eſta regla, acerca de varios authores. Vnos la llamã regla de algebra, que quiere dezir, reſtauratio, ò almucabala, q̃ quiere dezir, oppoſició, ò abſolució: por que por ella ſe hazen, y abſueluen infinitas queſtiones (y las que ſon impoſsibles nos las demueſtra) Aſsi de Arithmetica, como de Geometria, como de las de mas artes (que dizen) Mathematicas. Otros la nombran regla de la coſa, ò del cos: porque obrando el nõbre bien ſe le allega. Otros, reglas reales, ò arte mayor. Llameſe como cada vno quiſiere: ſu fin no es otro, ſino moſtrar hallar algun numero proporcional dudoſo demandado.

Figura 3.3. Inici del primer capítol del *Compendio* i del llibre 7è de la *Arithmetica.*[244]

Després de descriure els caràcters que utilitzarà, i que tractarem més endavant, l'autor defineix nombre quadrat i mostra com extreure l'arrel quadrada de qualsevol nombre. Defineix també nombre cúbic i explica com extreure l'arrel cúbica d'un nombre.

Pérez de Moya expressa d'una manera clara, com havia fet Aurel, el que s'entén per anàlisi, sense fer referència tampoc al terme *anàlisi.*

Al principi del 10è capítol, l'autor explica en què consisteix la *regla de la cosa.* Diu que per fer qualsevol demanda per aquesta regla, s'ha de suposar que la demanda ja ha estat feta i

[244] Pérez de Moya, 1558, 1; Pérez de Moya, 1562, 448.

s'ha respost i que es vol provar. Si, per exemple, la resposta fos 1*co*, s'ha de procedir fent allò que la demanda proposa, és a dir, s'ha de procedir a fer els passos per tal de plantejar l'equació. Per tant, l'àlgebra no és per Pérez de Moya només la resolució d'equacions, sinó tot el procés que porta de l'enunciat del problema al resultat, passant pel plantejament de l'equació corresponent, igual que ho era per Aurel. En paraules de l'autor:

> *Haviendo puesto lo que me ha pareseido ser necessario, para operacion desta regla de la cosa, resta mostrar y declarar la orden que se ha de tener, para saber hazer, y proponer las demandes que por ella quisieres absoluer. Y assi digo que para hazer qualquiera demanda por esta regla, has de prosuponer q la tal demanda es ya hecha y respondida, y que la quieres prouar. Poniendo por exemplo que la respuesta fuesse vna cosa, con la qual procederas, haziedo lo que la demada pidiere, y lo que te viniere co la 1 co. diras ser ygual alo que qusieras que viniera. Desto se sigue ser necessarias dos partes, en estas ygualaciones, la vna la que viniere con la operació dela co. (segun lo que la demanda pide) y la otra, lo que quisieras que viniera, Destas dos partes, la vna ha de ser semejante a la otra en qualidad, o por major dezir, en proporcion, como si dixessemos, dame dos numeros en proporcion tripla, que summados hagan 36*[245].

Per tal de poder operar amb el resultat, se li dóna nom, i com hem apuntat en el cas d'Aurel, això suposa atorgar-li una mena d'existència. Aquesta idea crucial de l'anàlisi en els processos algebraics, que ja era a l'obra d'Aurel, Pérez de Moya també la remarca. Potser és agosarat dir que aquesta concepció de l'àlgebra suposa una ruptura epistemològica, però, com a mínim, es pot afirmar que hi ha la llavor d'aquesta ruptura, que culminaria amb l'àlgebra de Viète.

3.3.2. Els símbols

En el capítol 2n del *Compendio*, Pérez de Moya declara els caràcters, i a cadascun li dóna un nom i un valor. Diu que s'han inventat per una qüestió de brevetat i no necessàriament han de ser aquests; tothom pot usar els que vulgui i inventar-ne molts més. L'autor, d'entrada, posa aquests, semblants als d'Aurel (figura 3.4):

---

[245]Pérez de Moya, 1558, 61-62.

Figura 3.4. Símbols per a la incògnita i les seves potències.[246]

i els declara en el 2n capítol que titula "en el qual se ponen algunos caracteres que sirven por quantidades proporcionales", de manera que fa èmfasi en la proporcionalitat, que no havia remarcat en l'explicació sobre l'àlgebra, on només s'hi havia referit de passada.

En l'article 3 del capítol 8è, Pérez de Moya explica la multiplicació dels caràcters i fa un aclariment en una nota, relacionat amb la proporcionalitat. Exposa allò que actualment es podria explicar dient que per a multiplicar potències s'han de sumar els exponents. Ho fa en un to clarament didàctic, en format pregunta-resposta i utilitza el terme "dignidad". És l'única vegada que utilitza aquest terme en el *Compendio,* com també l'utilitzarà una sola vegada a la seva *Arithmetica* i en el mateix context[247], essent el significat d'aquest terme similar al que li donava Aurel, de manera que a vegades els caràcters s'identifiquen amb el lloc que ocupen en una determinada proporció.

Alguno puede dubtar y preguntar diziẽdo, aueys dicho que para multiplicar vn caracter por otro, juntaremos lo que los tales caracteres tuuieren encima: y que el producto sera el caracter que tuuiere sobre si otro tanto: pues si yo quiero multiplicar vn cce. por vn ccv summando 4 q̃ tiene el cce. con 9 que tiene el ccv. hazen 13. y en toda la tabla no ay caracter que monte tanto, luego que caracter diremos que monta a lo qual respondo que no te fatigues por saber que caracter sera (porque como he dicho) estos caracteres se ponen por vna quantidat o dignidad proporcional. Y desta suerte multiplicar cce. por ccv. no es otra cosa sino multiplicar vna quantidad proporcional, por vna otra nouena dela misma proporcion[248].

[246] Pérez de Moya, 1558, 1.
[247] Pérez de Moya, 1562, 516.
[248] Pérez de Moya, 1558, 39.

Diu l'autor que el primer dels caràcters vol dir nombre, i es considera en aquesta regla com la unitat en els nombres, és a dir, que multiplicant per ell, no fa créixer i dividint no fa minvar i així com 1 no és nombre[249], tampoc *Q* es pren per caràcter proporcional. El seu valor sempre és conegut, com si es diu 4 *Q* rals, direm clarament que són 4 rals.

El segon es diu *cosa* i és arrel o costat d'un nombre quadrat i és el primer dels nombres d'una proporció contínua. L'autor ja parla clarament de proporció contínua, que serà la base per reduir els tipus d'equacions. Aquest segon caràcter no té un valor propi, sinó el que se li vulgui donar.

El tercer es diu *censo* i denota un nombre quadrat que procedeix de la multiplicació de la c*osa* per ella mateixa.

El quart caràcter es diu *cubo* i denota un nombre cúbic. Procedeix de multiplicar el *censo* per la c*osa.*

El cinquè és el c*enso de censo,* que vol dir que ha estat quadrat dues vegades.

El sisè és el *primo relato* o *sursolidum,* i es tracta d'un nombre que no té arrel quadrada ni cúbica. Procedeix de multiplicar el valor de la *cosa* pel c*enso de censo,* o el *censo* pel *cubo.*

El setè es diu c*enso & cubo.* Denota un quadrat cubicat o un cub quadrat. És un nombre del qual se'n pot extreure l'arrel quadrada i de la quadrada, la cúbica, i al contrari.

El vuitè és el *segundo relato* o *bissursolidum.* Com en el cas del sisè, l'autor diu que no té arrel quadrada ni cúbica. Procedeix de multiplicar el valor de la *cosa* pel de *censo y cubo,* o el *primero relato* amb c*enso,* o c*enso de censo* per *cubo.*

---

[249]Tal com hem vist en el capítol anterior, al Renaixement la noció de nombre es va anar modificant i hi ha dubtes i incoherències a les obres dels autors d'aquesta època pel que fa al seu concepte.

El novè l'anomena Pérez de Moya *censo de censo de censo* i denota un nombre tres vegades quadrat, i del qual es podrà extreure tres vegades l'arrel quadrada, en paraules de l'autor. Procedeix de multiplicar el valor de la *cosa* pel del *segundo relato;* o del *censo y cubo* pel del c*enso,* o del *primero relato* pel *cubo,* o bé del *censo de censo* per ell mateix.

El desè es diu *cubo de cubo* i denota un nombre cubicat dues vegades i del qual, per tant, se'n podrà extreure dues vegades l'arrel cúbica. Procedeix de multiplicar la *cosa* pel *censo de censo de censo,* o el *2 relato* pel c*enso* o el c*enso y cubo* per *cubo,* o el *primero relato* per *censo de censo* o cubicant el *cubo.*

Després d'aquesta explicació dels caràcters, l'autor remarca que qualsevol d'ells no s'ha de prendre per una quantitat simple, sinó pel grau d'una proporció contínua. El mateix autor utilitza la paraula *grau* i aclareix que el primer és la *cosa,* el segon el *cens,* etc. Per tant, podem veure com és l'absència d'una notació adequada, el que no permet incloure en la notació que els diferents caràcters són potències de la incògnita principal i com l'autor la compensa amb aquestes explicacions.

En el capítol següent, Pérez de Moya declara uns altres caràcters[250] que són els que ell usarà perquè, segons ell mateix diu, no n'hi havia d'altres a l'impremta. Sobta una mica que en declari uns, i en faci servir uns altres. Potser és part de les incerteses del moment, provocades per la introducció de procediments algebraics, o volia que quedés clar que coneixia la notació amb la qual l'àlgebra s'havia introduït a la Península Ibèrica, o potser que l'impressor li va demanar que els canviés.

Els caràcters que utilitzarà, seran els següents:

---

[250] Vegeu Cajori, Florian, 1928-29. *op. cit.,* 236.

Notació actual	-	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
Notació de Pérez de Moya	*n*	*co.*	*ce.*	*cv.*	*cce.*	*R.*	*cecv.*	*RR.*	*ccce.*	*ccv.*

Altres caràcters que Pérez de Moya declara en aquest capítol 3r:

Notació actual	$\sqrt{}$	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[3]{}$	+	-	Les arrels universals indiquen que s'ha de fer l'arrel del tot el que segueix.			=	segona incògnita
Notació de Pérez de Moya	*r*	*rr*	*rrr*	*p*	*m*	*rv*	*rrv*	*rrrv*	*ig.*	*q*

Es pot constatar en aquesta taula com els símbols per indicar les arrels tampoc guarden una relació funcional. Si bé en el cas de l'arrel quadrada i l'arrel quarta, els símbols semblen guardar aquesta relació, ja que l'arrel quarta és l'arrel de l'arrel quadrada, no és així en el cas de l'arrel cúbica que si seguíssim la relació funcional de les anteriors, correspondria a una arrel vuitena, o a una sisena en el cas que la relació fos additiva.

L'autor ho expressa:

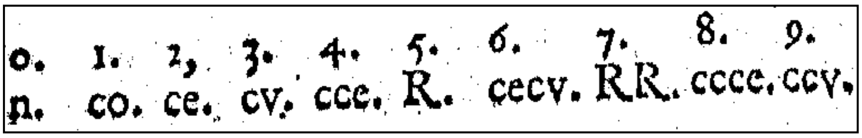
> *Esta figura r, quiere dezir rayz quadrada. Esta figura rr, denota rayz quadrada de rayz quadrada. Exemplo rr 16 quiere dezir rayz quadrada de 16, que es 2. Esta rrr, denota rayz cubica. Exemplo rrr 8, quiere dezir rayz cubica de 8, que es 2*[251].

[251] Pérez de Moya, 1558, 5.

A diferència d'Aurel, que ja havia declarat abans els símbols per les arrels, el + i el -, Pérez de Moya ho fa quan declara els caràcters que utilitzarà per a designar les incògnites.

Al capítol 8è on l'autor tracta de les quatre regles generals per operar amb caràcters i abans de començar amb la suma, Pérez de Moya diu que els caràcters no són sinó unes quantitats proporcionals incertes, o més ben dit, *variables*, ja que varien segons el valor de la *cosa.* Aquesta explicació enllaça amb la que fa al capítol 2n on declara els símbols. Són les dues úniques vegades que fa servir la paraula "variable" al *Compendio,* de la mateixa manera que la fa servir també dues vegades a la *Arithmetica*, i en els mateixes ocasions. Aurel no fa servir la paraula "variable" i, en canvi, Roca també la utilitzarà quan declararà els caràcters, com veurem en el capítol següent.

Pérez de Moya diu que no es poden sumar els caràcters com si fossin "coses" d'una mateixa espècie, sinó que "s'hi ha d'afegir el *mas"*, com ho expressa l'autor. Si volem sumar caràcters diferents, com *2co* amb *2ce*, direm que fan *2co p 2ce* o *2ce p 2co.* Ara bé, si són de la mateixa espècie, aleshores s'ha d'efectuar la suma; com si volem sumar *5co* amb *3co*, sumarem 5 amb 3, que dóna 8 i el resultat direm que són *coses.* En aquest darrer cas, l'autor no fa cap referència al símbol *p* per efectuar la suma, la qual cosa vol dir que aquest símbol l'utilitza quan no pot convertir dues quantitats en una de sola, i el que fa és unir-les, com si fossin una sola entitat, com ja hem vist a l'obra d'Aurel. D'alguna manera, es crea un nou objecte. Aquesta és una altra de les claus de l'algebrització, la creació de nous objectes que acabaran regint-se per les seves pròpies regles. Diu l'autor que primer s'ha d'anar en compte amb el *p* i el *m,* és a dir, s'han de tenir en compte els signes, i que la regla general és que multiplicant *p* per *p* o *m* per *m,* dóna *p;* i multiplicant *p* per *m* o *m* per *p,* dóna *m.* Després, s'ha de tenir en compte la taula següent (figura 3.5);



0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
n.	co.	ce.	cv.	ccc.	R.	cecv.	RR.	cccc.	ccv.

Figura 3.5. Taula que relaciona els caràcters amb la seva denominació (o grau)[252]

Aquí es torna a posar de manifest la proporcionalitat entre els caràcters, ja que en aquesta taula els nombres que estan sobre els caràcters juguen el rol d'exponents, com en el cas d'Aurel. Com diu l'autor, si volem multiplicar-ne dos, hem de sumar els seus "exponents" (summaras los numeros que los tales caracteres tuuiere sobre si[253]) i buscar a quin caràcter correspon el resultat. En el cas de la divisió de caràcters, l'autor diu que s'ha d'utilitzar la mateixa taula i restar en comptes de sumar.

En paraules de l'autor i de manera similar a com ho diu Aurel:

> *Esta figura has de notar que quado multiplicares vn qualquiera destos caracteres por otro: summaras los numeros que los tales caracteres tuuiere sobre si, y lo que montare mira sobre que caracter sera otro tato porque aquel tal caracter sera el producto de los dos multiplicados*[254].

3.3.3. Les igualacions

Pérez de Moya proposa la classificació de les igualacions en 4 de simples de 2 quantitats i 3 de compostes de 3 quantitats, en els capítols 11è i 12è del seu *Compendio.*

Així com Aurel posava avisos i notes entre el procediment de resolució de les equacions simples i el de les compostes, Pérez de Moya posa els avisos en el capítol anterior. Efectivament, en el capítol 10è l'autor diu que les dues parts que s'igualen, a vegades són semblants en caràcters i en número, així com si 6 *cv* s'igualessin a 6 *cv* ($6x^3 = 6x^3$ en notació actual), aleshores el valor de la cosa, o resposta de la demanda serà 1. Si els dos membres fossin semblants en caràcters i diferents en número, com si 3 *co.* s'igualessin

---

252 Pérez de Moya, 1558, 35.
253 *Ibid.* 36.
254 *Ibid.*

a 4 *co.* ($3x = 4x$ en notació actual), aleshores la demanda és impossible. Si són semblants en número i diferents en caràcters, com si 8 *co.* s'igualen a 8 *ce.* (en notació actual $8x = 8x^2$), aleshores la demanda té infinites respostes i si els dos membres són diferents en números i caràcters, aleshores hi ha una sola solució. Pérez de Moya distingeix 4 casos especials on Aurel només en distingia 2 i en el primer dels casos, comet la mateixa errada que Aurel i que havien comès altres autors, com ja hem comentat en el capítol anterior. En el capítol següent, veurem que Roca segueix Pérez de Moya a l'hora de considerar els casos especials.

Per decidir el nombre d'igualacions que proposarà, Pérez de Moya no parla de cap autor en particular sinó que fa una referència general a "los que trataron desta regla". Diu que uns en proposaven 8, uns altres 10, i uns altres menys, i ell en proposa 7, de les quals 4 són simples i 3 compostes.

Els tipus d'igualacions simples són els mateixos que hem vist a Aurel i aquestes igualacions les podem expressar en llenguatge actual amb la fórmula: $ax^{n+k} = bx^n$ per k=1,2,3,4, i la solució general es pot expressar: $x = \sqrt[k]{\frac{b}{a}}$.

Tot i que els tipus d'igualacions simples siguin els mateixos que proposa Aurel, Pérez de Moya mostra una voluntat més clara de generalitzar quan parla de "procedir en infinit". Ho fa en els casos referents a les explicacions de la primera i quarta igualacions simples. En el cas de la primera ho expressa:

> *...Y para que esto sea entendido, tendras auiso que el primer caracter es n. (aunque por si no denota quãtidad proporcional, cono denota la cosa y los de mas caracteres.) El segundo es co. El tercero ce. Y assi van procediendo en infinito...*[255]

I en el cas de la quarta:

---

[255] Pérez de Moya, 1558, 68.

En esto has de notar, que si faltassen quatro caracteres entre los dos que se ygualaren, que despues de auer partido lo que viniere cõ el caracter menor por lo que viniere con el mayor, sacando la rayz relata del quociente, sera el valor de la cosa. Y si faltaren 5. despues de auer hecho lo que en todas se haze, sacando el cecv, y assi puedes proceder en infinito...[256]

Cal remarcar aquesta idea de generalització que Aurel no manifesta d'una forma tan clara.

Com a exemple de les explicacions que fa Pérez de Moya per classificar les equacions simples i resoldre-les, vegem la del tercer tipus. És el cas on hi ha una diferència de 3 graus entre les incògnites que hi ha a cada costat de la igualtat. L'autor diu que s'ha de fer la divisió entre els coeficients dels termes ("lo que viniere") i després efectuar l'arrel cúbica del quocient.

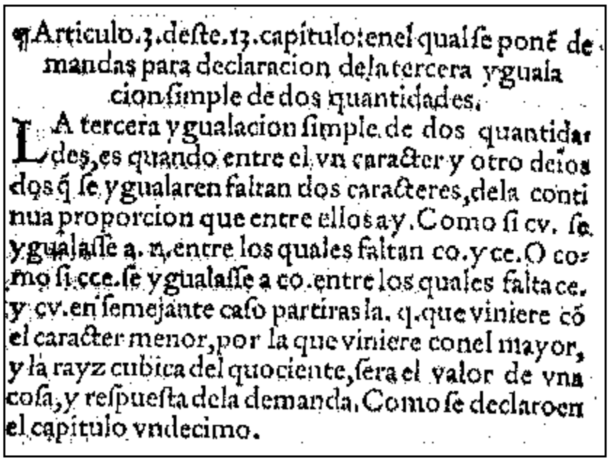
En l'explicació que fa l'autor en el capítol 11è remet a l'article 3r del capítol 13è que és el capítol on l'autor posa exemples d'aplicació de cadascuna de les regles i, de passada, les recorda (figures 3.6 i 3.7):

3. ¶La tercera ygualació de las ſimples de dos quã
tidades es, quando entre los dos caracteres que ſe
ygualan faltan dos. Como ſi cv. ſe ygualaſſe a n. en-
tre los quales falta la co. y el ce. O como ſi cce, ſe
ygualaſſe a la co. entre los quales falta ce. y cv. En
tal caſo partiras lo que viniere con el caracter me-
nor, por lo que viniere cõ el mayor, y la rrr, del quo
ciente ſera el valor dela co. y reſpueſta dela deman-
da. Mira el tercero articulo del capitulo decimo
tercio.

Figura 3.6. 3a igualació de les simples[257] (capítol 11è)

[256] *Ibid.*,69.
[257] *Ibid.*,69.

En el 3r article del capítol 13è, l'autor torna a explicar quines equacions corresponen a la 3a igualació simple però en aquest cas, concreta que quan parla de què falten 2 caràcters, aquests caràcters estan en proporció contínua:


¶ Articulo.3.deste.13.capitulo: enel qual se poné demandas para declaracion dela tercera ygualacion simple de dos quantidades.

LA tercera ygualacion simple de dos quantidades, es quando entre el vn caracter y otro delos dos q̃ se ygualaren faltan dos caracteres, dela continua proporcion que entre ellos ay. Como si cv. se ygualasse a. n. entre los quales faltan co. y ce. O como si cce. se ygualasse a co. entre los quales falta ce. y cv. en semejante caso partiras la. q. que viniere cõ el caracter menor, por la que viniere conel mayor, y la rayz cubica del quociente, sera el valor de vna cosa, y respuesta dela demanda. Como se declaro en el capitulo vndecimo.

Figura 3.7. Tercera igualació de les simples.[258] (capítol 13è)

En el capítol 12è tracta de les 3 igualacions compostes de 3 quantitats que, en paraules de l'autor, són aquelles en què s'han d'igualar dos caràcters a un altre. En un cas s'han d'igualar els dos *majors* al *menor*, en un altre el *major* i el *menor* al *mitjà* i en el darrer, els dos *menors* al *major*. Aleshores explica què vol dir quan es refereix als caràcters *major*, *menor* i *mitjà* i utilitza per fer l'explicació els termes *antecedent*, *següent* i *mitjà*. L'*antecedent* d'un caràcter és el que el precedeix i aquest caràcter que és precedit per l'*antecedent*, s'anomena *següent*. Diu Pérez de Moya que els *antecedents* sempre són menors que els *següents* i és en aquest sentit que s'ha d'entendre *menor* quan es parla dels caràcters en una igualació composta. Finalment, *mitjà* és un caràcter que es troba entre dos extrems, un d'ells *menor* i l'altre, *major*. Aquesta terminologia no la utilitza Aurel quan parla de les igualacions. Sí que utilitza el terme *antecedent*, però juntament amb el terme *consegüent* quan parla de proporcions en el sentit euclidià, però no en el context de la resolució d'equacions.

---

[258] Pérez de Moya, 1558, 90.

Com a exemple de resolució de les igualacions compostes, vegem com Pérez de Moya explica la regla per a resoldre les del segon tipus. Es tracta del tipus d'equacions en el qual el terme major i el menor s'igualen al mitjà, que en notació actual s'expressaria: $ax^{n+2} + cx^{n} = bx^{n+1}$. Si seguim les instruccions de l'autor, arribarem a la fórmula: $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$. Aquest cas dóna dues solucions positives quan té solució real. L'autor ho expressa (figura 3.8):

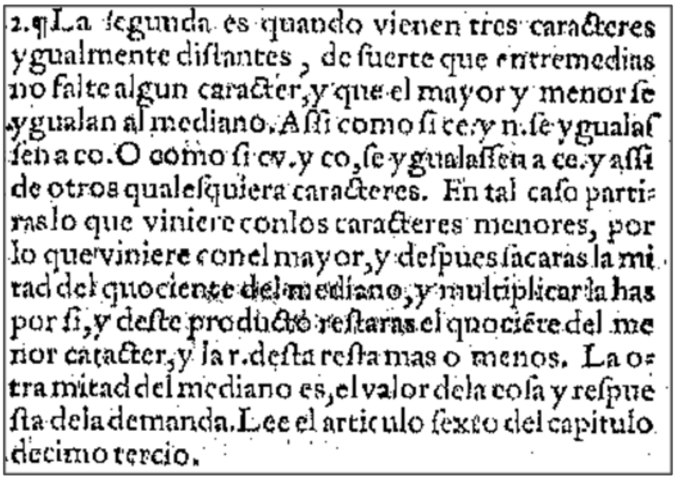

2.¶La ſegunda es quando vienen tres caracteres ygualmente diſtantes, de ſuerte que entremedias no falte algun caracter, y que el mayor y menor ſe ygualan al mediano. Aſſi como ſi ce. y n. ſe ygualaſſen a co. O como ſi cv. y co, ſe ygualaſſen a ce. y aſſi de otros qualeſquiera caracteres. En tal caſo partiras lo que viniere con los caracteres menores, por lo que viniere con el mayor, y deſpues ſacaras la mitad del quociente del mediano, y multiplicarla has por ſi, y deſte producto reſtaras el quociẽte del menor caracter, y la r. deſta reſta mas o menos. La otra mitad del mediano es, el valor dela coſa y reſpueſta dela demanda. Lee el articulo ſexto del capitulo decimo tercio.

Figura 3.8. Segona igualació de les compostes.[259]

En els cas de l'explicació referent a la tercera igualació de les compostes, Pérez de Moya també parla de "procedir en infinito":

> *...Y si faltaren 5. vendra cecv, cuya rayz cecv. sera el valor de la cosa: y assi podras procedir en infinito, como por los exemples del octauo articulo del capitulo decimo tercio major entenderas*[260].

3.3.4. Problemes o demandes

En el capítol 13è, "en el qual se ponen demandas, para declaracion de todo lo que se ha tratado en los capitulos precedentes", Pérez de Moya resol problemes d'aplicació dels diferents tipus d'equacions. El 1r problema que planteja per il·lustrar la segona regla de les

---

[259] Pérez de Moya, 1558, 71.
[260] Pérez de Moya, 1558, 73.

compostes, tracta de la compra de draps i porta a l'autor a la resolució de l'equació: $720 + x^2 = 82x$. Aquesta equació té dues solucions: 72 i 20, de les quals Pérez de Moya només en troba una, 72. El segon problema té una temàtica semblant però l'enunciat és força rebuscat. Condueix a la resolució de l'equació: $2000 + 2x^2 = 140x$. Aquesta equació té també dues solucions: 50 i 20, de les quals Pérez de Moya, es refereix només a una, 50.

Quan en el capítol 12è, Pérez de Moya ha explicat la resolució de les equacions corresponents a la segona igualació de les compostes, hi ha dues notes de l'autor. La 1a nota diu que del fet que en l'explicació es digui que després de l'arrel s'ha d'afegir o restar el terme que nosaltres hem expressat $\frac{b}{2a}$, se'n dedueix que la major part de les demandes que es puguin fer per aquesta igualació, tindran dues respostes, tot i que en els dos exemples que posa l'autor d'aplicació d'aquesta regla, només en considera una. Com Aurel, diu que si $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aleshores s'han de sumar aquestes quantitats i després fer-ne l'arrel i sumar-la a la meitat del terme mitjà per trobar el valor de la *cosa,* de manera que repeteix l'errada d'Aurel. No posa cap exemple que il·lustri aquests cas i no parla de possibles solucions negatives, com sí, en canvi, ho feia Aurel.

La tercera igualació de les compostes és el cas en què hi ha tres caràcters igualment distants, de manera que no en faltin d'entremitjos i que els dos menors s'igualin al major. Correspondria a la fórmula general: $bx^{n+1} + cx^n = ax^{n+2}$ i les instruccions per a trobar la solució es poden expressar en notació actual:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$$

Després d'aquesta tercera igualació, Pérez de Moya afegeix una nota, explicant com s'ha de procedir si falta un caràcter, és a dir, utilitzant llenguatge actual, si les potències de la incògnita no fossin consecutives. Aleshores s'ha de procedir aplicant la regla de la igualació corresponent, en funció de com estan distribuïts els termes en la igualtat, i al final s'ha de fer una arrel. Si faltessin dos caràcters, s'hauria de fer al final una arrel cúbica, si tres, una arrel quarta, i així es podrà procedir fins a l'infinit. Hi torna a haver aquí una voluntat clara de generalització per part de l'autor.

Pel que fa a l'àlgebra, hem vist que el contingut del *Compendio* de 1558, no és exactament el que després contindrà el llibre 7è de l'*Arithmetica* de 1562. Tot i que no hi hagi grans diferències, està clar que l'autor n'ha fet una revisió. El mateix passa amb el llibre 7è de l'*Arithmetica* i la part aritmètica del *Tratado*[261] de 1573. Aquesta darrera obra té tres parts ben diferenciades: la primera d'elles tracta l'aritmètica, la segona la geometria i la tercera l'astronomia, i el llibre 7è de la part aritmètica és també la *regla de la cosa.* Pel que fa referència a la segona igualació de les compostes, està clar que l'autor ha millorat la seva explicació, de manera que la fórmula que se'n dedueix, és la correcta.

L'autor proposa dues maneres de resoldre aquest tipus d'igualacions, que condueixen a les fórmules, que en notació actual s'escriurien:

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \qquad \text{i} \qquad 2x = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}$$

Pérez de Moya tracta la *regla de la segunda cosa o quantidad* en l'article 9è del capítol 13è del *Compendio* de 1558. És també l'article 9è però del capítol 12è, en la *Arithmética* de 1562. En el *Tratado* de 1573, que conté aritmética, geometria i astronomia, la *regla de la cosa* és el llibre 7è de l'aritmètica i la *regla de la quantitat* està tractada en el capítol 61è d'aquest llibre 7è: "en que se pone la regla que dizen de la quantidad, tiene seys articulos".

[261] Pérez de Moya, Juan, 1573. *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural*. Juan Gracian. Alcalá de Henares.

A diferència d'Aurel que col·locava els exemples de la regla de la quantitat, després dels de la 1a igualació simple, Pérez de Moya, els col·loca en darrer lloc. Així com en general, l'*Arithmetica* de 1562 tendeix a ampliar el *Compendio*, pel que fa a la segona quantitat, omet un dels problemes de 1558, l'únic en el que hi intervenen 4 incògnites, la qual cosa sorprèn ja que generalitza més el procediment que en els casos amb 2 o 3 incògnites.

L'enunciat és el següent:

> *Dame 4 numeros de tal condicion, que el primero junto a 50, sea el triplo de los otros tres: y el segundo junto a 50, sea el quadruplo de los otros tres: y el tercero junto con 50, sea el quintuplo de los otros tres: y el quarto con 50, sea el sextuplo de los otros tres*[262].

Actualment plantejaríem per a resoldre'l, un sistema d'equacions que es podria escriure:

$$\begin{cases} x + 50 = 3(y + z + t) \\ y + 50 = 4(x + z + t) \\ z + 50 = 5(x + y + t) \\ t + 50 = 6(x + y + z) \end{cases}$$

Pérez de Moya el resol utilitzant d'una manera molt enginyosa, el mateix mètode que emprava Aurel. Posa 1*co.* pel valor de la primera incògnita i diu que la tercera part del que s'obté al afegir-li 50 serà la suma dels altres tres nombres. Aquesta suma serà, per tant, escrita en llenguatge actual: $\frac{1}{3}(x + 50)$. Si a aquesta suma li afegim la x, obtenim la suma dels quatre nombres[263]: $\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$. Després anomena *q* la segona incògnita. La suma de les altres tres serà: $\frac{1}{4}(q + 50)$, que ha de ser igual a $\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$ si li restem la *q*. D'aquí obté la *q* en funció de x: $\frac{10}{3} + \frac{16}{5}x$. Després anomena *q* a la tercera incògnita i també a partir de la suma de totes 4, obté la tercera en funció de x i el mateix amb la quarta. Quan ha expressat totes

[262] Pérez de Moya, 1558, 110.

[263] Pérez de Moya no treballa mai amb fraccions impròpies, que en aquesta època s'expressaven sempre en forma de nombre mixt. En el cas de $\frac{50}{3}$, ell l'expressa: $16\frac{2}{3}$.

les incògnites en funció de x, les suma i iguala el resultat al total: $\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$ i els va obtenint tots. El mètode no pot fer explícit el "sistema d'equacions" perquè no hi ha prou símbols per a totes les incògnites.

Aquesta és la mateixa línia que l'autor segueix a l'*Arithmetica* de 1562, però en el *Tratado* de 1573 hi ha una innovació en la notació, tot i que no es tradueix en un canvi de mètode en la resolució dels sistemes. Aquest canvi de notació consisteix en assignar lletres diferents a les incògnites, de manera que es manté la denominació de 1*co.* per la primera i s'anomenen *a, b, c,* etc. les restants[264]. El quart dels problemes que proposa implica 4 variables a les quals dóna els noms: *1 co.,1a,1b,1c*, però la manera de resoldre'l és la mateixa que quan les variables, a partir de la primera, tenien el mateix nom (figura 3.9). Aïlla cada variable en funció de la primera per tal d'obtenir una equació amb una sola incògnita. El "sistema d'equacions" segueix sense ser explícit i les equacions es tracten separadament.

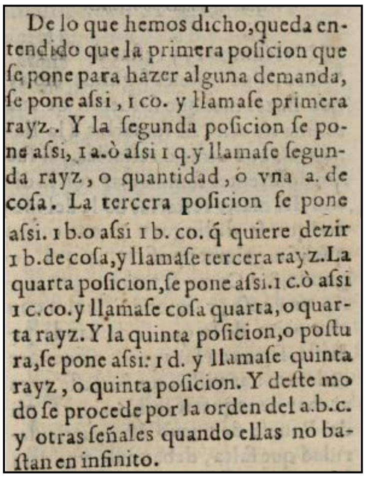

De lo que hemos dicho, queda entendido que la primera poſicion que ſe pone para hazer alguna demanda, ſe pone aſsi, 1 co. y llamaſe primera rayz. Y la ſegunda poſicion ſe pone aſsi, 1 a. ò aſsi 1 q. y llamaſe ſegunda rayz, o quantidad, ò vna a. de coſa. La tercera poſicion ſe pone aſsi. 1 b. o aſsi 1 b. co. q̃ quiere dezir 1 b. de coſa, y llamaſe tercera rayz. La quarta poſicion, ſe pone aſsi. 1 c. ò aſsi 1 c. co. y llamaſe coſa quarta, o quarta rayz. Y la quinta poſicion, o poſtura, ſe pone aſsi: 1 d. y llamaſe quinta rayz, o quinta poſicion. Y deſte modo ſe procede por la orden del a. b. c. y otras ſeñales quando ellas no baſtan en infinito.

Figura 3.9. Les incògnites en els sistemes d'equacions en el *Tratado* de 1573

[264] Pérez de Moya, 1573, 593-605 (en la paginació hi ha una errada: a la pàgina 593, la segueix la 694 però a continuació hi va la 595).

3.4. *El llibre 9è de la Arithmetica de 1562*

Al descriure el contingut de l'*Arithmetica* de 1562, hem remarcat el caràcter erudit i literari dels dos darrers llibres. Ens referirem al darrer, el 9è, escrit en forma de diàleg[265], perquè té més relació que el 8è amb procediments per a la resolució de problemes. Consta de dues parts, en la primera de les quals, un estudiant, *Antimacho* visita un altre estudiant que està malalt, *Sophronio* (segurament representa l'opinió de l'autor), i el troba llegint un llibre d'aritmètica. Aquesta situació serveix a l'autor de pretext per parlar de la necessitat del seu estudi. En la segona part, s'hi afegeixen dos estudiants més, *Damon* i *Lucilio*, que es fan preguntes sobre l'aritmètica.

A la primera part, *Sophronio* fa la funció de mestre d'un *Antimacho* que li pregunta amb ironia si el seu interès per la matèria és degut a què vol fer de criat d'algun genovès ric. *Sophronio* li respon que no és pas el seu fort això de servir, però que les ciències no s'han d'aprendre per l'interès que s'espera d'elles sinó per la perfecció que porten a l'home, fent referència al llibre I de la *Metafísica* d'Aristòtil.

En aquesta obra és on hem trobat per primera vegada una referència a "el compte de la vella", expressió que ara ja està una mica en desús però que s'utilitzava sovint per indicar un mètode per a resoldre problemes pas a pas, sense operacions complicades i comptant amb els dits si calia. Probablement aquesta expressió prové d'aquesta obra. *Sophronio* li explica a *Antimacho* que una vella volia vendre el seu bestiar i quan va haver esbrinat quant li havien de donar per cadascun dels caps de bestiar, es va posar a la porta per on el bestiar havia de sortir i demanava que li paguessin el que valia un cap de bestiar. Aleshores demanava que el traguessin i així successivament, de manera que no

---

[265] La importància dels diàlegs matemàtics està recollida en: Rényi, Alfréd (1965). *Dialógusok a matematikáról*. Akádemiai Kiadó. Budapest. Nosaltres hem consultat l'edició de 1967, traduïda a l'anglès i editada per Holden-Day. San Francisco.

calia saber quant valia tot el bestiar i, per tant, l'aritmètica no era tan necessària. Pérez de Moya ho expressa (figura 3.10):

> Acaeſcio que eſta vieja quiſo vn dia feriar cierto ganado que te-
> nia, la qual deſpues q̃ ouo aueriguado el precio
> que por cada cabeça le auian de dar, ſe aſſento à
> la puerta por do el ganado auia de ſalir: & demã
> daua primeramente le pagaſſen vna cabeça, &
> deſpues que eſtaua pagada, mãdaua que la ſacaſ
> ſen. Y luego començaua de nueuo a hazer cuen
> ta de otra, y aſsi en las demas. Coſa cierto apar-
> tada de todo engaño.

Figura 3.10. El "compte de la vella" a la *Arithmetica.*[266]

Hi ha un clar predomini de procediments argumentatius, desenvolupats al principi en parlaments llargs, mitjançant els quals s'exposen de forma ordenada les rèpliques i contrarèpliques dels dos interlocutors a favor i en contra de l'aritmètica. Poc a poc, la ignorància d'*Antimacho* es va posant en evidència (figura 3.11):

> Que lẽguaje es eſſe? hablad Chriſtiano, y dezid
> me, que coſa es, o que quiere dezir ſeys treze a-
> bos de entero?

Figura 3.11. Antimacho mostra la seva ignorància.[267]

Després de l'argumentació, *Sophronio* mostra la necessitat dels coneixements aritmètics amb un cas pràctic que fa referència a un soldat que va enganyar un pagès que no sabia prou aritmètica. El soldat paga al pagès un feix d'espàrrecs en funció de la longitud de la corda que els lliga, és a dir, si pels espàrrecs que es poden lligar amb una corda d'1 pam paga 1 ral, pels que abasten una corda de 2 pams, li paga 2 rals.

---

[266] Pérez de Moya, 1562, 696.
[267] *Ibid.*, 699.

Després d'uns quants exemples, *Antimacho* es declara vençut i convençut en la disputa: "yo me rindo y me doy por contento, y confiesso la necessidad que desta arte ay[268]".

A la segona part canvia el propòsit i el to i s'incorporen a la tertúlia dos estudiants més, *Damon* i *Lucilio* i com adverteix la introducció: "se prosigue la platica entre todos quatro, diciendo cada vno las preguntas o dislates que sabe, así como se haze quando en las noches de Nauidad se junta algun numero de gente alrededor del fuego, todo por terminos comunes de Arithmetica[269]".

Es tracta d'un diàleg plaent entre amics en què sorgeix l'humor. La novetat està en què per a entretenir-se no recorren a anècdotes, contes o relats, com sol ser habitual en aquests contextos, sinó a la resolució de jocs i endevinalles matemàtiques.

3.5. Les fonts

Pérez de Moya no dóna pistes sobre les seves fonts, com tampoc ho va fer Aurel, i cita ben pocs autors. Al *Compendio* cita una sola vegada Euclides, concretament la 4a proposició del llibre II, quan ha de sumar: $\sqrt{\sqrt{10}} + \sqrt{\sqrt{12}}$ que ell expressa "quiero summar, *rr* de 10, con *rr* de 12". L'altra cita és a Luca Pacioli (Frater Lucas) quan parla del nombre d'igualacions a considerar. A l'*Arithmetica,* els *Elements* d'Euclides es citen 41 vegades, 10 d'elles en el llibre 7è de l'àlgebra. En aquesta obra cita també Aristòtil, 16 vegades, a Zamberto, 4 vegades, a Luca Pacioli, 2 i a Boeci una sola vegada.

Com ja hem avançat al principi del capítol, la font principal de Pérez de Moya és Aurel. No hi ha tantes evidències com les que hem mostrat en el cas d'Aurel amb Rudolff, perquè en el cas d'Aurel, més de la metiat dels enunciats del problemes dels diferents tipus

[268] *Ibid.*, 705.
[269] *Ibid.*, 706.

d'igualacions són idèntics als de Rudolff i molts d'altres són del mateix tipus, però està clar que el *Libro Primero* és la base del *Compendio.*

En el capítol 13è, quan Aurel declara els caràcters que utilitzarà, diu amb referència a la x:

> *El x, es rayz, o lado de vn quadrado equilatero. Y es el primero de los numeros de vna continua proporcion: porque Q es como vno, el qual no es numero*[270].

I quan Pérez de Moya declara el 2n caràcter, diu:

> *El.2. se dize cosa, es rayz o lado de vn numero quadrado: y este es el primero de los numeros de vna continua proporcion. Su valor es variable: porque assi como si auiedo de poner algunos numeros proporcionales, puede el primero ser vnas vezes vna quantidad, & otras vezes otra: assi esta cosa no tedra proprio valor, antes tendra el que le quisieremos dar: assi por enteros, como por quebrados*[271].

Tot i que l'explicació que fa Pérez de Moya és més extensa, tots dos autors relacionen la incògnita amb el costat d'un quadrat, que és una referència clara a la geometria. Tots dos autors fan referència a què la *cosa,* la incògnita per nosaltres, és el 1r dels termes d'una proporció contínua. Pérez de Moya remarca el caràcter variable de la *cosa,* que Aurel apunta quan fa l'explicació del *dragma,* que és el primer caràcter, on diu que el *numero* o *dragma* "es quantidad discreta y sabida: no como los otros caracteres, como si dixiesses 3*Q* ducados: diràs claramente que son 3 ducados; mas diziendo 3*x* ducados, o 4ʒ ducados...Estos tales no se podrian determinadamente dezir quantos ducados son por ser quantidad oculta y no sabida[272]...", però no utilitza la paraula "variable" ni cap altra que pugui resumir el caràcter de la incògnita.

---

[270] Aurel, 1552, f. 69^{v}.
[271] Pérez de Moya, 1558, 2; 1562, 449.
[272] Aurel, 1552, f. 69^{r}-69^{v}.

Després d'haver declarat els caràcters que utilitzaran, ambdós autors posen una nota que en el cas d'Aurel diu, tal com hem mostrar en la figura 2.5:

El caracter no lo has de tomar, ni entender por numero, o quantidad simple, sino por dignidad, grado o casa de una continua proporcion. Como el ʒ, es la segunda quantidad de vna continua proporcion: y el ß, es la quinta: Y assi los otros, començando de mas q de vno: porque el vno no es numero, sino principio de numero, como al principio has visto[273].

Pérez de Moya ho expressa:

Nota que el caracter qualquiera que sea, no se ha de tomar por quantidad simple, sino por grado de vna continua proporcion o quantidad: delos quales el primero grado es la cosa, el segundo el censo, el tercero el cubo, el censo de censo el quarto, y el primero relato es el quinto: & assi delos de mas[274].

En aquestes notes els autors tornen a fer èmfasi en la proporció contínua i en un aspecte clau com és la identificació de cada caràcter amb el grau que li correspon, és a dir, en llenguatge actual, la identificació de cada incògnita amb el seu exponent.

Les referències a l'*anàlisi* són molt semblants en les obres d'ambdós autors, concretament l'explicació del mètode analític, tot i que ja hem remarcat que cap dels dos autors utilitza el terme *anàlisi*. Moya diu: "Y assi digo que para hazer qualquiera demanda por esta regla, has de prosuponer q tal demanda es ya hecha y respondida, y que la quieres prouar[275]" on Aurel deia: ""Y digo que para hazer una demanda, por la dicha regla, has de imaginar q tal cuenta o demanda ya es hecha, y respondido, y tu agora la quieres provar"[276].En aquest cas, els dos autors s'expressen de manera pràcticament idèntica (Aurel diu imaginar i Pérez de Moya presuponer), fent èmfasi en un altre dels aspectes crucials de l'algebrització, com ja hem comentat.

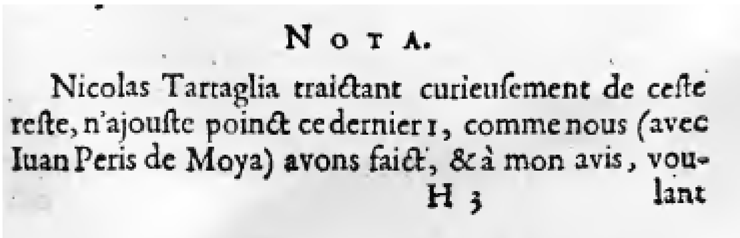
[273] *Ibid*. f. 70v.
[274] Pérez de Moya, 1558, 4; 1562, 452.
[275] Pérez de Moya, 1558, 62.
[276]Aurel, 1552, f. 76v.

Pel que fa als tipus d'igualacions que proposen Aurel i Pérez de Moya, tot dos comencen referint-se al nombre de tipus que han proposat altres autors. En el cas d'Aurel, es refereix a autors concrets i, en canvi, Pérez de Moya fa una referència més general. Aurel diu que en proposarà 8 tipus i Pérez de Moya 7, però en realitat són els mateixos. Aurel anomena les igualacions de la primera a la vuitena començant per les simples i acabant per les compostes i, en canvi, Pérez de Moya, anomena primer les quatre simples i després torna a començar la numeració amb les compostes. El que seria la cinquena igualació d'Aurel, per exemple, correspon a la primera de les compostes de Pérez de Moya.

La vuitena igualació d'Aurel, és, com ja hem dit al capítol anterior, una explicació sobre com procedir en els casos en els quals les incògnites no tenen potències consecutives. És el mateix que diu Pérez de Moya en una nota que segueix a la tercera igualació de les compostes. De fet, la vuitena igualació d'Aurel és més una generalització que un cas diferent i des d'aquest punt de vista és més clar expressar-ho en una nota, tal com fa Pérez de Moya, que a més a més, afegeix que es pot continuar fins a l'infinit.

Ja hem remarcat la difusió que va tenir l'obra de Pérez de Moya. Mostrem ara una nota on és citat per Stevin[277] quan explica la manera d'extreure l'arrel cúbica, en el llibre 2n de la seva *Practique de Arithmetique,* dient que l'havia seguit a ell en comptes de seguir a Tartaglia (figura 3.12):

[277] Simon Stevin (1548-1620) va ser un matemàtic i enginyer holandès de molt prestigi conegut especialment per la introducció a Europa de l'ús dels decimals amb la publicació de l'opuscle *De Thiende,* del qual Robert Norton en va publicar una traducció a l'anglès el 1608 amb el títol *Disme*. A part d'aquest opuscle va fer importants contribucions a la trigonometria, la mecànica, l'arquitectura, la teoria musical, la geografia, la fortificació i la navegació. Sobre Stevin hem consultat també l'obra: Dijksterhuis, E.J., 1970, *Simon Stevin: Science in the Netherlands around 1600.* Martinus Nijhoff. The Hague. Netherlands.



NOTA.

Nicolas Tartaglia traictant curieusement de ceste reste, n'ajouste poinct ce dernier 1, comme nous (avec Iuan Peris de Moya) avons faict, & à mon avis, vou-
H 3 lant

Figura 3.12. Nota on Stevin cita Pérez de Moya.[278]

Aquest començament de la part algebraica amb l'extracció d'arrels, mostra com en el cas d'Aurel, la importància de les arrels en l'àlgebra. Com ja hem assenyalat, a cada capítol està molt pensat l'ordre del que hi exposa, per tal que es pugui entendre, amb una intenció clarament didàctica.

Tot i que el *Tratado de Arithmetica* de 1573 no és una de les principals obres de referència en aquesta tesi, cal assenyalar que l'autor té influències en aquesta obra del *General Trattato* de Tartaglia de 1560, i del *Libro de Algebra* de Pedro Núñez de 1567[279], de les quals no en podia tenir notícia quan va escriure el *Compendio* de 1558, ja que no havien estat publicades encara. Aquesta constatació reafirma l'interès de Pérez de Moya per estar al dia pel que fa a les obres que s'anaven publicant i per anar perfeccionant les seves versions.

3.6. Conclusions

Cal destacar la importància de l'obra matemàtica de Pérez de Moya, principalment de l'*Arithmetica* de 1562 en la difusió dels procediments algebraics a la Península Ibèrica. L'escrit que Francisco de Erasso va fer en nom del rei al principi de l'obra i els elogis d'Alejo Venegas i *El Brocense,* van contribuir molt probablement a la seva difusió.

---

[278] Girard, Albert (1620). *L'arithmetique de Simon Stevin de Bruges (1585),* 117. Edició revisada, corregida i anotada per Albert Girard.

[279] Silva, M. Céu, 2016. "On the circulation of algebraic knowledge in the Iberian península: the sources of Pérez de Moya's *Tratado de Arithmetica* (1573)". *Revue d'histoire des mathématiques* **22**, fascicule 2 ,145-184.

Així com Aurel tenia relació amb el món mercantil, Pérez de Moya era un humanista, amb interessos molt diversos. Malgrat que sembla que a la seva formació no va passar de "batxiller", els seus biògrafs estan d'acord en què va ser una persona extremadament culta.

El fet de publicar el *Compendio* el 1558, amb el que seria la part algebraica de la seva *Arithmetica* de 1562, mostra la seva voluntat de difondre els nous procediments algebraics per tal de donar-los a conèixer el més aviat possible. És una persona meticulosa que va desgranant allò que explica i que revisa en obres posteriors, de manera que, en general, va afegint aportacions interessants que fan que les seves obres millorin.

Igual que per Aurel, l'àlgebra és sinònim de *regla de la cosa* i d'*Art Major* i és el procés que porta de l'enunciat d'un problema a la resolució de l'equació corresponent, passant pel seu plantejament.

També com en el cas d'Aurel, destaquem la importància de la proporció contínua en l'àlgebra de Pérez de Moya, i també de l'*anàlisi*, que ja hem remarcat en el cas d'Aurel i que tenen una importància cabdal en el desenvolupament de l'àlgebra.

Hem mostrat que la principal font de Pérez de Moya és Aurel, encara que probablement, va consultar altres obres amb contingut algebraic per tal de documentar-se abans d'escriure el *Compendio.* Tot i que sembla clar que més tard Pérez de Moya va conèixer l'àlgebra de Pedro Núñez, el *General Trattato* de Tartaglia i la *Arithmetica Integra* de Stifel (Silva, 2016), no hi ha influències d'aquests autors en la seva primera obra d'àlgebra de 1558, el *Compendio.* La influència europea, en aquest cas només de Rudolff, sembla que es manifesta a través de l'obra d'Aurel encara que Pérez de Moya no el citi.

És l´únic dels autors estudiats, que afegeix un llibre d'un caire, que podríem qualificar de més literari, al final de la seva *Arithmetica.* Aquest llibre en forma de diàleg, a cavall entre la tradició oral i la cultura escrita, té un marcat caràcter didàctic, en el qual un dels personatges, *Sophronio,* representa, molt probablement, l'opinió de l'autor i, pel seu contingut va adreçat a tot tipus de públic. Potser, fins i tot, està pensat per a ser llegit en veu alta, atès que una bona part de la població de l'època era analfabeta[280]. Hem mostrat algunes de les qüestions que s'hi tracten, entre les que pretenen convèncer al lector de la importància de l'aritmètica. N'hi ha moltes altres d'interessants que permetrien fer un retrat sociològic de la societat de l'època, com un problema sobre nou caminants que busquen un lloc per dormir, però no caben tots a l'hostal, en sobra un. Es tracta de comptar de manera que qui no tingui lloc per dormir sigui el "negre".

Ja hem comentat que l'autor feia al·lusió a Aristòtil, però hi ha moltes altres referències erudites com per exemple, al llibre de la Sabiduria de Salomó, quan defineix l'Aritmètica, i també a La Celestina.

A part de la importància del *Compendio* de Pérez de Moya, per a la difusió de l'àlgebra va ser clau la seva introducció a la *Arithmetica* de 1562. També va ser essencial, com una de les principals fonts de la *Arithmetica* (1564) d'Antic Roca, que analitzarem en el capítol següent.

[280] Vegeu: Sierra, L., 2004. "Analfabetos y cultura letrada en el siglo de Cervantes: los ejemplos del Quijote". *Revista de Educación,* núm. extraordinari, 49-59.

CAPÍTOL 4. ANTIC ROCA. Una aritmètica més acadèmica.

4.1. Introducció

En aquest capítol analitzarem l'*Arithmetica* d'Antic Roca, que a diferència de les obres que hem analitzat prèviament, té un caràcter especulatiu. Els exemples que exposa tenen l'objectiu de reforçar la part teòrica, i quan es tracta de resoldre problemes, Roca remet a les obres d'altres autors, sobretot d'Aurel. Tot i que Roca ha llegit diversos autors i n'extreu de cadascun allò que creu convenient, veurem també com la seva font principal és el *Libro Primero* d'Aurel.

A diferència d'Aurel i Pèrez de Moya, Roca té estudis universitaris i va ser professor a la Universitat de Barcelona. Degut a la seva formació, era metge, va escriure sobre temes mèdics, que no van tractar ni Pérez de Moya ni Aurel. També va ser membre del Consell de Cent, i per tant, va participar en el govern de la ciutat de Barcelona.

Donarem algunes dades biogràfiques de l'autor i després descriurem la seva *Arithmetica* i com en els capítols anteriors, en destacarem els aspectes que considerem clau en l'algebrització de les matemàtiques. Una de les diferències amb els altres autors és que Roca cita les seves fonts, dóna una llista d'autors que han influït en la seva obra i a molts d'ells els cita en diferents capítols. La idea d'àlgebra és similar a la d'Aurel i Pérez de Moya, però en canvi veurem que *àlgebra* i *regla de la cosa* no són sinònims per Roca. Pel que fa als símbols, utilitza els d'origen italià, i el signe "més" i el "menys" participen en la creació de nous objectes, com hem mostrat també en les altres obres analitzades. Amb relació a les equacions, en declara el mateix nombre que Aurel, però no resol problemes. A cada regla hi ha, però, un exemple d'aplicació, i no tracta les equacions amb dues incògnites.

En l'apartat de les fonts destacarem Aurel com la seva font principal tot i les clares influències d'autors com Chuquet, Ghaligai i Scheubel que no es manifestaven de manera tan clara en els altres autors de referència d'aquesta tesi.

4.2. Dades biogràfiques

Antic Roca (ca. 1530-1580) era gironí, tal com ho manifesta ell mateix a diferents obres. A *l'Arithmetica,* signa com "Antich Rocha de Gerona" i en un text anterior, el *Lexicon Catalanum,* es presenta com "Antichus Rochanus Gerundensis in Barcinonensi Gymnasio publicus philosophiae professor", així com també ho fa en altres obres. Va estudiar a València i va completar la seva formació a la Universitat de Barcelona, on va ser deixeble de Francesc Calça (1521-1603), professor de filosofia i retòrica, i del lul·lista Lluís-Joan Vileta (?-1583). Es va graduar com a doctor en Arts el 1555 i dos anys més tard, figurava ja com a "mestre col·legiat" de l'Estudi barceloní; i el curs 1558-1559 formava part de la càtedra de filosofia. Amb les constitucions de 1559, va ser nomenat titulat del primer curs d'Arts, tot i que en els estatuts del 1559, la facultat d'Arts no acabava d'estar ben definida, estava entremesclada amb els estudis de gramàtica i amb prou feines es destacava amb tres càtedres de filosofia que incloïen alguns ensenyaments de matemàtiques. Més endavant, Roca va estudiar Matemàtiques i Medicina[281].

Segons Fernández Vallín, Roca va ser un dels primers que va proposar, el 1564, la separació de les matemàtiques de les altres ciències, amb l'objectiu de formar una ciència pura, marcant el camí que haurien de seguir les matemàtiques[282].

Roca era també lexicògraf i comentarista de filosofia aristotèlica[283]. De fet, va ser la figura principal de l'aristotelisme a Catalunya. Els seus comentaris van ser utilitzats com a llibres

---

[281] Rabaseda Tarrés, Joaquim, 2010. *El Compendi d'Antich Rocha. Primer text sobre la partida doble a la Península Ibèrica.*

[282]Fernández Vallín, 1989. *Cultura científica en España en el siglo XVI*, 38, ed. Facsímil, Sevilla.

de text i van reforçar l'orientació aristotèlica del currículum filosòfic. També va ser autor de diverses obres de temàtica variada tant de filologia com de filosofia o sobre temes matemàtics i mèdics. La seva obra més coneguda és *Arithmetica*[284]*, recopilacion de todas las otras que se han publicado hasta agora por Antich Rocha*, impresa a Barcelona el 1564. Es tracta d'una recopilació de tot el que es coneixia d'aquesta matèria en aquell moment, tal com el seu autor indica, que dedica al cronista de la Cort, Cristòbal Calbet d'Estrella. El mateix Roca explica que per completar la seva obra ha consultat un total de 49 autors, entre els quals esmenta Pedro Sánchez Ciruelo, Juan de Ortega, Juan Pérez de Moya, Juan de Icíar i l'alemany Marco Aurel.

L'autor duu a terme també algunes traduccions del francès com un manual de càlcul mercantil o la primera obra de comptabilitat que es publica a la Península Ibèrica, concretament a Barcelona l'any 1565[285]. Aquesta obra va tenir a Espanya una acollida molt favorable i durant molt temps va ser l'única obra rellevant que, a nivell internacional, el citava amb relació al desenvolupament comptable espanyol en el segle XVI, tot i que no es pugui considerar un tractat espanyol de comptabilitat[286].

El 1560, a petició de l'editor Claudi Bornat, emprèn l'obra d'actualitzar el diccionari d'Elio Antonio de Nebrija[287], incorporant-hi nous noms geogràfics i de persones, per tal de

---

[283] L'humanisme plantejava tot un repte a la filosofía aristotélica, ja que Aristòtil intentaba determinar la veritat absoluta mitjançant el raonament lògic i des dels temps de Petrarca els retòrics humanistes havien criticat el racionalisme escolàstic i havien insistit en què la funció del pensament humà era fer eleccions moralment sanes entre les alternatives que la vida quotidiana propocionava. Tot i això, Aristòtil va seguir dominant els ensenyaments, sobretot pel que feia a les ciències de la naturalesa. Nauert, Charles G, 2006, "Mentalidad", a Cameron, Euan (ed.), *El siglo XVI,* 136-165. Crítica. Barcelona.

[284]Al final de la primera impressió de l'Arithmetica, Roca hi afegeix un manual de comptabilitat per partida doble, la traducció de la Pratique pour brièvement apprendre à chiffrer et tenir livres de comptes de l'autor alemany Valentin Menher.

[285] Rabaseda, 2010, *op. cit.*

[286] Donoso, 1996, *op. cit.*

[287]Antonio de Nebrija va néixer a Nebrija (l'actual Lebrija, a la província de Sevilla) entre l'1441 i l'1444. De ben jove es va aficionar al llatí, la qual cosa va fer que afegís "Aelius" al seu nom. Va estudiar a Salamanca i als 19 anys va viatjar a Itàlia portat pel seu interès humanista de beure en les fonts de la llatinitat, amb la intenció de poder aportar nous mètodes i idees a la universitat espanyola. Una de les seves obres més conegudes és la *Gramática de la llengua castellana* de 1492 que va aportar idees sobre el seu valor i eficàcia per a ensenyar llengües.

transformar-lo en un diccionari enciclopèdic que pren el nom de *Lexicon Latino Catalanum*, una edició corregida i augmentada que s'imprimeix a la Ciutat Comtal el 1560, es reedita el 1585 i encara hi ha una tercera reimpressió el 1587.

Roca va revisar també un recull de poemes d'Ausiàs Marc editats a Barcelona l'any 1560 per l'editor Claudi Bornat. En els preliminars d'aquesta obra, inclou dos poemes propis: un en llatí i un sonet en català. Francesc Calça (1521-1603), humanista català que va ser rector de l'Estudi General de Medicina i Arts de Barcelona i conseller en cap d'aquesta ciutat, havia format part del tribunal que va concedir el mestratge en Arts a Roca, a qui dedica un elogi en aquesta mateixa obra[288]. En els biennis de 1576-1577 i 1581-1582, Roca és escollit membre del Consell de Cent de Barcelona.

El repertori d'obres de Roca és el següent:

- ✓ *Les obres del valerós cavaller y elegantíssim Àusias March [...] revistes i ordenades y de molts cants augmentades, Claudi Bornat, 1560.*
- ✓ *Lexicon latino catalanum seu Dictionarium Aelii Antonii Nebrissenssis, Claudi Bornat, 1560.*
- ✓ *Dialectica Antichi Rochani Gerundensis praelectiones illustrata. Trad. De G Trapezuntius. Clavdivm Bornat, 1561.*
- ✓ *Praelectiones a Graecis interpretibus haustae, C. Bornat, 1563.*
- ✓ *Oratio in Barcinonensis Gymnasio calend. septembris anno 1562 habita. Barcinone: Claudium Bornati, 1562 i 1565.*

Nebrija va morir a Alcalà el 2 de juny de 1522 . Labrador Gutiérrez, Tomás, 2005. "E. A. De Nebrija: Gramática de la llengua castellana. Su utilidad y eficacia para "deprender peregrinas lenguas""a Castillo Carballo, M. A.; Cruz Moya, O.; García Platero, J.M. & Mora Gutiérrez, J. P. (coord.), *Las gramáticas y los diccionarios en la enseñanza del español como segunda lengua: deseo y realidad. Asociación para la Enseñanza del Español como Lengua Extranjera. XV Congreso Internacional de la ASELE*, 518-525. Universidad de Sevilla. Sevilla.

[288]Molas, J.,1998, "Francesc Calça: Poemes". *Els Marges* (14), 77-95.

- ✓ *Arithmetica. De Gerona compuesta y de varios auctores recopilada, provechosa para todos estados de gentes. Va añadido un Compendio para tener y regir los libros de cuenta, traduzido de lengua francesa en romance castellano. Barcelona: Claudi Bornat, 1564.*

- ✓ *Lunari y Repertori dels temps, 1568.*

- ✓ *Ac Publici Philosopiae. Professoris in In Aristotelis archiphysicou organum exactissimae & elegantissimae praelectiones. Barcinone: Claudium Bornat, 1570.*

  1. In Aristotelis categorías. Barcinone: Claudium Bornat, 1570.

  2. In Aristotelis Herminiam pralectiones. Barcinone: Claudium Bornat, 1570.

  3. In Aristotelis topica & sophisticas redargutiones ... Barcinone: Claudium Bornat, 1570.

  4. In Aristotelis posteriorem Analysin exactissimae ac elegantissimae praelectiones ... Barcinone: Claudium Bornat, 1570.

  5. In Porphyrium praelectiones. Barcinone: Claudium Bornat, 1570.

  6. In priorem analysin Aristotelis praelectiones : in primum librum. Barcinone: Claudium Bornat, 1570.

- ✓ *In Aristotelis philosophorvm principis octo libros [fisikes akroaseos] exactissimae & elegantissimae praelectiones ... Barcinone: Claudium Bornat, 1573.*

- ✓ *Compendium dialecticae F. Titelmanni ad Libros logicorum Aristotelis. Admodum vtile ac necessarium. De F Tittelmans Franciscus. Barcinone: Societatis Bibliopolarum, Petri Mali, 1576.*

- ✓ *Organum doctissimae & elegantissimae praelectiones : in quibus cum omnium interpretum Graecorum, Arabum & Latinorum commentationes declarantur tu[m] verò Aristo. Barcinone: Claudium Bornat, 1578.*

Roca escriu tant en castellà com en llatí i català. L'única obra d'Aurel que es coneix està escrita en castellà i les de Pérez de Moya estan escrites en castellà, llevat d'una que està escrita en llatí.

4.3. *L'Arithmetica*

L'Arithmetica és una obra escrita en llengua vernacular, estil directe i simple[289]. No conté demostracions, només presenta càlculs, regles, definicions i resolucions d'alguns problemes. Està dividida en dues parts: la primera consta de 4 llibres i la segona de 4 més. Els quatre capítols del llibre 1r. tracten de l'aritmètica en general, sobre què ha s'ha d'ensenyar i quantes classes d'aritmètica hi ha. El llibre 2n. consta de 10 capítols, en el primer dels quals explica l'autor què és l'aritmètica pràctica i en els 9 següents explica bàsicament els tipus de nombres i les operacions de suma i resta. El llibre 3r. consta de 15 capítols i tracta essencialment de les multiplicacions i divisions i de les proves de les 4 operacions elementals. El llibre 4rt., darrer de la primera part, consta de 18 capítols i s'hi tracten les fraccions i les seves operacions, les progressions, l'arrel quadrada i la cúbica. El 1r. llibre de la 2a part consta de 20 capítols i tracta la regla de tres, les proporcions i les seves aplicacions. El llibre 2n tracta la regla de companyia i les al·ligacions, així com les barates o permutes. El llibre 3r consta de 17 capítols, els 12 primers dels quals es refereixen als canvis de moneda i els 5 darrers a les regles d'una i dues falses posicions. En el llibre 4rt és on l'autor tracta l'Art Major. Consta de 19 capítols, en el 1r dels quals, l'autor explica què és l'Art Major. Del 2n al 8è es tracten els nombres racionals, irracionals, quadrats, medials, cúbics i operacions entre ells. Els capítols 9è, 10è i 11è estan dedicats als binomis i residus. En el 12è l'autor explica la *regla de la cosa.* Dels capítol 13è al 16è es defineixen els caràcters i les operacions entre ells. En els 3 darrers capítols es tracten les igualacions simples i compostes.

289 Sobre la *Arithmetica* de Roca, vegeu: Massa Esteve, M. Rosa, 2008. "L'àlgebra al segle XVI a Espanya. L'*Arithmetica* (1564) del gironí Antic Roca" a *Actes d'història de la ciencia i de la técnica.* Nova época, **1**(2), 311-317.

En el pròleg, Roca diu que demostra com s'ha d'ensenyar l'aritmètica i opina que no s'ha de barrejar amb altres ciències i s'ha de guardar un ordre al explicar-la:

> *Qualquier Sciencia para auerse biē de enseñar, es menester primeramente que en ella no se traten coses perteneciētes a otras facultades, y lo que se tratase, que guarde el orden conueniēte: porque de lo vno slae grāde ignorància, y del otro grande confusion para el que la quisiere deprender*[290].

Una mica més endavant:

> *Por cierto de reyr seria el Architecto, que primeramente quisiesse ordenar el tejado del edificio, y aparejar los sobrados, antes de hazer los fundamētos*[291]...

I més endavant encara, en el mateix pròleg:

> *Quantos Mathematicos confusos, los quales mezclaron todas las sciēcias Mathematicas, queriēdo hazer vna de todas*[292]

Després del pròleg, Roca presenta un catàleg d'autors en els quals diu que s'ha basat per escriure-la. S'hi poden trobar citats autors clàssics com ara: Plató, Aristòtil, Euclides, Arquimedes i Ptolemeu, però també autors d'aritmètiques i d'àlgebres tant espanyols com francesos, italians o alemanys. Destaquem Chuquet, Pacioli, Stiffel, De la Roche, Scheubel, Peletier, Borrel, Ramus i Pérez de Moya, entre d'altres. Més endavant, hi ha un altre catàleg d'autors que Roca assenyala que també ha emprat per fer la segona part de l'obra. D'aquesta segona llista en destaquem Guillermo de Lunis, Fibonacci i Marco Aurel Aleman.

4.3.1. *La idea d'àlgebra*

El capítol 1r del llibre 4rt de la segona part de l'*Arithmetica,* porta el títol "Quantas son las operaciones consideradas en la *Arte mayor* de Arithmetica". Per l'autor *l'Art Major* és un

---

[290] Roca, 1564, s/p.
[291] *Ibid.*
[292] *Ibid.*

conjunt de quatre operacions, la darrera de les quals és la *regla de la cosa.* Per Roca, per tant, *Art Major* i *regla de la cosa* no són sinònims, sinó que la regla de la cosa és una de les operacions de l'Art Major. Les altres tres operacions són relatives als nombres quadrats, als nombres cúbics i als binomis. Aquestes tres operacions són essencials per a l'autor com a base per després poder operar amb caràcters.

> *La quarta operació y vltima es, la regla dicha de la Cossa, en la qual cosidera ciertos numeros o characteres sumando, restando, multiplicando, y partiendo aqllos, y aun sacado rayz Quadrada dellos. Explican se tabie en esta vltima regla ciertas ygualaciones, todo lo qual bien entendido (lo q no sera poco) facil cosa sera hazer por esta vltima regla de la Cossa, qualesquier operaciones que se pueden offrecer en esta Arte. Este es el orden que auemos de tenir acerca desta Arte mayor, y en esta nuestra orden esta toda contenida, y no aura ningun precepto en ella que no se explique. Y pues que auemos de declarar primeramente la operacion que consiste en los numeros Quadrados, Bueno sera que vamos segon el orden que tenemos propuesto*[293].

Aquesta idea de separació entre *Art Major* i *regla de la cosa* no hi és a l'obra de Marco Aurel ni a la de Pérez de Moya, que consideren *l'Art Major* i *la regla de la cosa,* sinònims. De la mateixa manera que hem mostrat, que el concepte de *nombre* no és clar en aquesta època, i ho continuarem mostrant en l'obra de Núñez, tampoc tenen clar els autors com anomenar els nous procediments algebraics, que han d'anar encaixant amb els procediments aritmètics o ampliant-los. Aquesta separació entre *Art Major* i *regla de la cosa,* es troba, en canvi, a la *Triparty*[294] (1484) de Nicolas Chuquet per qui l'àlgebra és una regla de resolució, com pot ser la regla de tres[295]. Roca insisteix en l'ordre en què s'han d'aprendre les quatre operacions que formen l'*Art Major.* Tots els autors estudiats tracten les arrels abans que l'àlgebra, perquè les arrels són objectes importants per l'àlgebra ja que s'han de fer arrels per a trobar les solucions en tots els casos d'igualacions, menys en els corresponents a la primera.

---

[293] Roca, 1564, 223^{v}-224^{r}.

[294] Chuquet, Nicolas, 1484. "Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien" a Marre, A. (ed.). *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* **13** (1880), 593–659, 693–814.

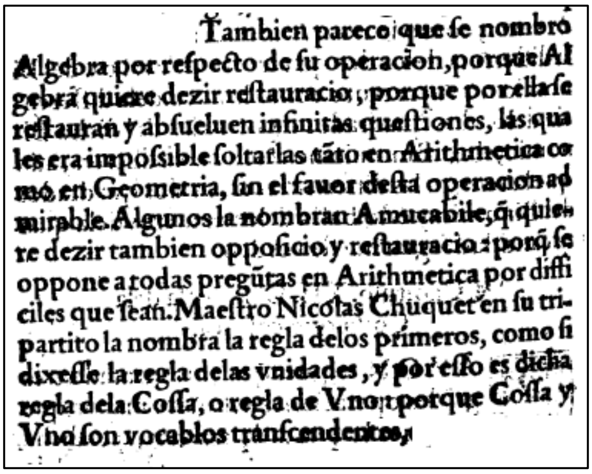
[295] Sobre la *Triparty,* vegeu: Spiesser, Maryvonne, 2006. "L'algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale". *Revue d'historie des mathématiques,* **12**, 7-33.

En el capítol 12è, Roca parla dels orígens de l'àlgebra i fa referència a un dels debats de l'època al qual ja ens hem referit. Diu que alguns creuen que la *regla de la cosa* té l'origen en l'obra de Diofant, tal com ho fa notar Scheubel, i Regiomontanus que diu que Diofant va escriure 13 llibres sobre les operacions de l'Art Major. Afegeix Roca, que alguns han estat tan agosarats que s'atribueixen l'Art Major com si n'haguessin estat els primers inventors, la qual cosa no pot ser si creiem Guillermo de Lunis que la va traduir de l'àrab a l'italià i sembla que afirma que l'inventor va ser un gran aritmètic anomenat Geber, d'on deriva el nom d'aquesta regla. Roca posa sobre la taula la polèmica sobre la invenció de l'àlgebra, i tot i que no ho manifesta clarament, sembla decantar-se pels orígens àrabs.

Afegeix que sembla que també es va dir àlgebra, amb referència a l'operació, perquè àlgebra vol dir restauració, ja que per ella es restauren i resolen infinites qüestions que no es podien resoldre per aritmètica ni per geometria. Aquesta darrera afirmació demostra que Roca intueix la potència de l'àlgebra i que a més a més en vol destacar la vessant més acadèmica. Alguns l'anomenen "amucabile", que vol dir també oposició i restauració perquè s'oposa[296] a totes les preguntes en Arithmetica per difícils que siguin. Es refereix a Nicolas Chuquet i a la seva obra, *Triparty* on l'anomena "regla dels primers", com si volgués dir "regla de les unitats" i per això es diu "regla de la cossa" o regla de Vno", perquè "cossa" i "Vno" son paraules transcendents.

L'autor ho expressa així:

[296]*...porque se oppone a todas preguntas en Arithmetica* (Roca, 1564, 251^{v}). Aquí el terme oposar-se s'utilitza en el sentit de fer-hi front, de resoldre.



Tambien parecio que ſe nombro Algebra por reſpecto de ſu operacion, porque Algebra quiere dezir reſtauracio, porque por ella ſe reſtauran y abſueluen infinitas queſtiones, las quales era impoſsible ſoltarlas tāto en Arithmetica como en Geometria, ſin el fauor deſta operacion admirable. Algunos la nombran Amucabile, q̄ quiere dezir tambien oppoſicio y reſtauracio: porq̄ ſe oppone a todas pregūtas en Arithmetica por difficiles que ſeā. Maeſtro Nicolas Chuquet en ſu tripartito la nombra la regla delos primeros, como ſi dixeſſe la regla delas vnidades, y por eſſo es dicha regla dela Coſſa, o regla de Vno: porque Coſſa y Vno ſon vocablos tranſcendentes.

Figura 4.1. Idees sobre àlgebra a l'*Arithmetica* de Roca.

Roca explica que la *regla de la cosa* transcendeix totes les operacions perquè ella "es la llave y la puerta de todos los secretos y contemplaciones que se puedan hallar en Arithmetica", expressió que manlleva de la de Chuquet:

Ceste rigle est la clef lentree et la porte des abismes qui sont en la science des nombres[297]

canviant "abismes" per "secrets i contemplacions" i "science des nombres" per "Arithmetica"[298].

Continua Roca dient que entre totes les operacions considerades en l'*Art Major*, és tan important [*la regla de la cosa*] que alguns no han dubtat en anomenar-la *Art Major*, tot i que en realitat només en sigui una part. I afegeix que el que es pot deduir de tota aquesta explicació, és que la *regla de la cosa* és una operació de l'*Art Major* per la qual es poden resoldre totes les preguntes dubtoses en aritmètica i la seva finalitat ho demostra, que no és altra que "mostrar

[297]Chuquet, Nicolas, 1484, 83v. "Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien" a Marre, A. (ed.). *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* **13** (1880), 593–659, 693–814.

[298] Trobem una expressió semblant a l'obra de Roger Bacon (ca. 1214- ca. 1294) referent a les matemàtiques en general: "Et harum scientiarum porta et clavis est Mathematica", és a dir, "la matemàtica és clau i porta de la ciència".

hallar qualquier numero propocional dudoso demandado[299]", expressió que manlleva en aquests cas a Pérez de Moya:

> *...su fin no es otro, sino mostrar hallar algun numero proporcional, dudoso demandado*[300]

Aquesta operació, segons l'autor, es basa en una proporció contínua, en la qual concorren molts nombres de diversos gèneres, com quadrats, cúbics, etc., com es pot veure en el llibre IX d'Euclides. Roca fa referència al llibre IX d'Euclides com havia fet Rudolff i també Aurel, però que en canvi, no fa Pérez de Moya quan parla dels caràcters en proporció contínua.

Per tant, per Roca, la *regla de la cosa* és sinònim d'àlgebra, però no ho és d'*Art Major* del qual representa la quarta operació. Roca remarca que altres autors no han dubtat en anomenar *regla de la cosa* a tot l'*Art Major*, ja que és "la Regla per excel·lència".

L'anàlisi, com per Aurel i Pérez de Moya, és clau per *la regla de la cosa* i Roca ho expressa d'una manera molt semblant a com ho van expressar aquests autors:

> *...Digo que para hazer qualquier demanda por esta regla de la Cossa, has de imaginar que la tal demanda es ya hecha y respondida, empero tu la quieres prouar: y pornas primeramente que la respuesta fuesse vna cosa, con la qual has de procedir haziendo lo que la demanda pidiere, y lo que te viniere con la 1.cosa diras ser ygual a lo que quisieras que viniera...*[301]

I una mica més endavant:

---

[299]Roca, 1564, 252^r.
[300]Pérez de Moya, 1558, 1.
[301]Roca, 1564, 262^r.

Desto puedes colligir en las ygualaciones ser necessarias dos partes: la vna la que viniere con la operacion de la cosa con characteres (segun lo que la demanda pide) y la otra, lo que quisieras que viniera, o la que auia de venir, y la vna es ygual a la otra[302].

Com diuen també els altres dos autors, s'ha de suposar que ja es té la solució i operar amb ella, seguint les instruccions de l'enunciat, per tal d'arribar a una equació i aplicar la regla corresponent. La *regla de la cosa* no és, per tant, només el mètode per a resoldre igualacions, sinó també el procés que porta des de l'enunciat a la solució, passant pel plantejament de l'equació corresponent. Tot i que per Roca, la *regla de la cosa* sigui una de les operacions de l'Art Major, és la mateixa idea que tenen d'àlgebra Aurel i Pérez de Moya.

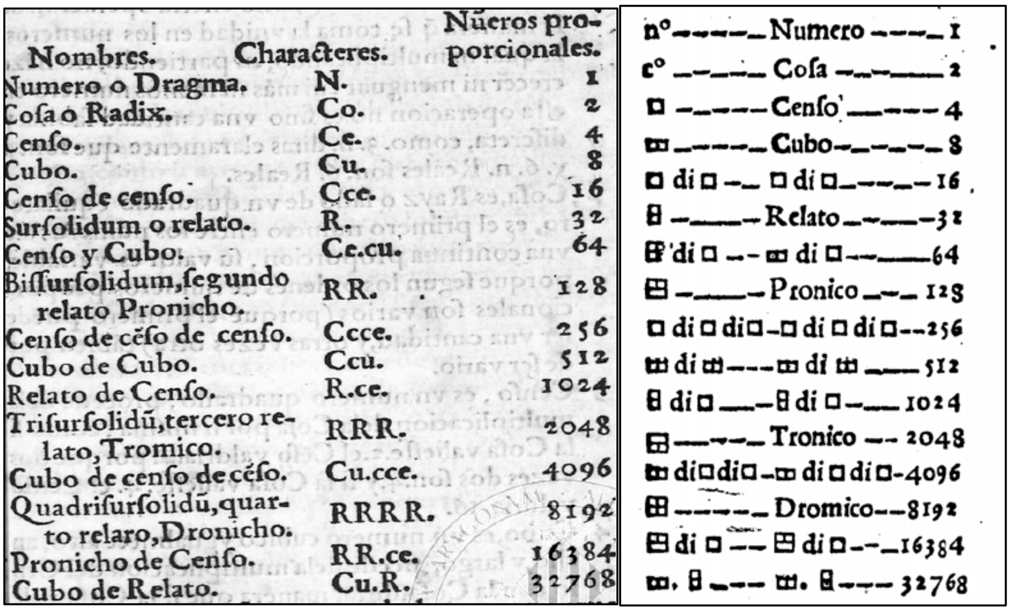
4.3.2. Els símbols

En el capítol 13è del llibre 4rt de la segona part, Roca comença explicant que els aritmètics acostumen a declarar alguns caràcters disposats de tal manera que guarden entre ells una proporció contínua i que no tenint-ne prou amb això, hi fan operacions. Afegeix que per no ser diferent que tan "cèlebres aritmètics", també els declararà. Remarca que cada autor fa servir els seus propis caràcters, que cadascú es pot inventar els que vulgui, perquè l'operació de *la regla de la cosa* no es basa en els símbols que s'utilitzen pels caràcters, sinó en el seu significat. Tampoc és important el número de caràcters que es declarin. Posa exemples de diferents autors com Aurel, Ioan Scheubelio (Iohann Scheubel), Francisco Leonardo (Ghaligai), Esteuan de la Rocha (Étienne de la Roche), que en declaren nombres diferents, però que tots estan d'acord en què es poden estendre fins a l'infinit, de la mateixa manera que els nombres s'estenen fins a l'infinit. Ell decideix declarar-ne 10 i utilitzar lletres llatines perquè, segons diu, s'entenguin més bé, tot i que en declara finalment 16 com Ghaligai. De fet, Roca en declara 16 però n'explica 10.

[302] Roca, 1564, 262^{v}-263^{r}.

En el moment de declarar-los, afegeix una columna en la qual hi ha els nombres que correspondrien a cada caràcter en el cas que la *cosa* valgués 2. D'aquesta manera, queda clar que els caràcters estan en proporció contínua.

De fet, fins el 10è utilitza els mateixos símbols que Pérez de Moya, tenint en compte que la *u* i la *v* en aquesta època són intercanviables. Poden sobtar algunes dels noms que afegeix als dels caràcters com alternativa en alguns casos: *pronicho, tromico* i *dronicho*. Són els noms que utilitza Ghaligai. A continuació (figura 4.1) mostrem les taules on Roca i Ghaligai declaren els caràcters respectivament.



Nombres.	Characteres.	Nũeros proporcionales.
Numero o Dragma.	N.	1
Cosa o Radix.	Co.	2
Censo.	Ce.	4
Cubo.	Cu.	8
Censo de censo.	Cce.	16
Sursolidum o relato.	R.	32
Censo y Cubo.	Ce.cu.	64
Bissursolidum, segundo relato Pronicho.	RR.	128
Censo de cẽso de censo.	Ccce.	256
Cubo de Cubo.	Ccu.	512
Relato de Censo.	R.ce.	1024
Trisursolidũ, tercero relato, Tromico.	RRR.	2048
Cubo de censo de cẽso.	Cu.cce.	4096
Quadrisursolidũ, quarto relaro, Dronicho.	RRRR.	8192
Pronicho de Censo.	RR.ce.	16384
Cubo de Relato.	Cu.R.	32768

Figura 4.1. Taules on Roca i Ghaligai declaren els caràcters a les seves respectives obres.

Roca diu que el primer nombre es diu *Numero* o *Drachma* i que en aquesta operació és tal que ni multiplicant ni partint no fa créixer ni minvar, és una quantitat "sabida y discreta", com 3.*n*. diràs clarament que són 3, i 6.*n*. rals, són 6 rals.

Quan declara el segon dels caràcters, la *cosa*, Roca remarca que és el primer dels nombres en una proporció contínua i que el seu valor és variable. Ja hem comentat en el capítol anterior que Pérez de Moya utilitza també la paraula "variable" que no utilitza, en canvi, Aurel. Roca només utilitza la paraula "variable" en aquesta ocasió i s'expressa de manera molt similar a com ho fa Pérez de Moya.

Vegem com ho expressa Roca:

> *Cosa, es Rayz o lado de vn quadrado equilatero, es el primero numero entre los numeros de vna continua proporcion, su valor es variable, porque segun los ordenes de numeros proporcionales son varios (porque el primero puede ser vna cantidad y otras vezes otra) tābien puede ser vario.*[303]

I com ho expressava Pérez de Moya:

> *El segundo se dize cosa. Es rayz o lado de vn numero quadrado. Y este es el primero de los numeros de vna continua proporcion. Su valor es variable: porque assi como si auiendo de poner algunos numeros porporcionales, puede el primero ser vnas vezes vna quātidad, y otras vezes otra: assi esta cosa no tendra proprio valor, antes tendra el que le quisieres dar: assi por enteros como por quebrados*[304].

Aquesta utilització del mot "variable", a l'hora d'explicar el segon dels caràcters, va una mica més enllà del que és una incògnita. Les incògnites deixen de ser-ho un cop s'han resolt les equacions, que és quan es troba el seu valor. El fet que la *cosa* sigui variable sembla indicar que designaria un "conjunt" d'incògnites, el valor de les quals varia en funció de la proporció a la qual pertanyen.

El *censo* és un nombre quadrat, que procedeix de la multiplicació de la *cosa* per ella mateixa.

El *cubo* és un nombre cúbic igualment alt, ample i llarg, procedeix de la multiplicació del *censo* amb la *cosa.*

---

303 Roca, 1564, 253v.
304 Pérez de Moya, 1562, 449.

El *censo de censo* és un nombre dues vegades quadrat, l'arrel quadrada del qual té també arrel quadrada i procedeix de la multiplicació del *censo* per ell mateix, o del *cubo* amb la *cosa.*

El *sursolidum* o *primo relato,* és un nombre irracional, ja que no té arrel quadrada ni cúbica; neix de la multiplicació del *censo de censo* per la *cosa*, o de la multiplicació del *cubo* pel *cubo.*

El *censo y cubo* és un nombre sòlid i quadrat cubicat o un nombre cub quadrat, del qual se'n pot extreure arrel cúbica i quadrada, de manera que si s'extreu primer l'arrel quadrada, tindrà arrel cúbica, i si s'extreu primer l'arrel cúbica, tindrà arrel quadrada. Procedeix de multiplicar el *relato* pel valor de la *cosa,* o multiplicant el c*enso* pel *censo de censo,* o multiplicant el *cubo* per ell mateix o cubicant el *censo.*

Pronicho o *segundo relato,* és un nombre irracional com el *primero relato*, que no té ni arrel cúbica ni quadrada. Procedeix de multiplicar el *censo y cubo* amb la *cosa,* o multiplicant el *primero relato* amb el *censo,* o multiplicant el *censo de censo* amb el *cubo.*

Censo de censo de censo, és un nombre tres vegades quadrat, l'arrel quadrada del qual, és quadrat d'un quadrat, que té arrel discreta. Procedeix de multiplicar el *segundo relato* per la *cosa*, o multiplicant el *censo y cubo* pel *censo,* o el *primero relato* pel *cubo,* o multiplicant el *censo de censo* per si mateix.

Cubo de cubo, és un nombre cúbic cubicat, l'arrel cúbica del qual, té arrel cúbica. Procedeix de multiplicar el *censo de censo de censo* amb la *cosa*, o multiplicant el *segundo relato* amb el *censo,* o multiplicant el *censo y cubo* pel *cubo,* o multiplicant el *primero relato* pel c*enso de censo,* o cubicant el *cubo.*

A totes les explicacions hi posa exemples del valors que tindrien els diferents caràcters, en funció del valor de la *cosa,* tal com ho van fer també Aurel i Pérez de Moya.

Després de declarar aquests deu caràcters, diu Roca que aquest són 10 números en proporció contínua, que és dupla, però de la mateixa manera és podien considerar en una proporció tripla, i també en una quàdrupla i en qualsevol altra proporció. Afirma també que aquests 10 números són suficients, però se'n pot augmentar el nombre tant com es vulgui. I continua:

Y esto has de notar, que el character de tal nõbre no demuestra sino vna dignidad, o grado, o casa de vna continua proporcion: como el primero relato es el sexto grado, o casa de la continua proporcion[305]*...*

És l'única vegada que Roca utilitza el terme "dignidad" a la seva obra i ho fa en el mateix sentit que ja hem comentat a les obres d'Aurel i Pérez de Moya. Aurel parla també de *casa* per referir-se al grau, però Pérez de Moya només parla de *dignidad o grau.*

L'autor mostra quin és el significat dels caràcters que, com Aurel i Pérez de Moya, identifica amb el que serien els exponents si s'indiquessin els caràcters com es fa actualment. Roca, per tant, copsa aquesta aquesta idea fonamental de la proporció contínua que formen les incògnites.

En el capítol 6è del llibre 2n on Roca explica com sumar nombres de la mateixa espècie, posa aquest primer exemple (figura 4.2):

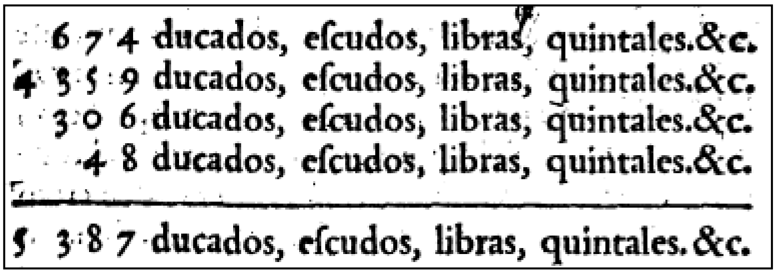

6 7 4 ducados, escudos, libras, quintales.&c.
4 3 5 9 ducados, escudos, libras, quintales.&c.
3 0 6 ducados, escudos, libras, quintales.&c.
4 8 ducados, escudos, libras, quintales.&c.
5 3 8 7 ducados, escudos, libras, quintales.&c.

Figura 4.2. Suma de nombres de la mateixa espècie.[306]

[305] Roca, 1564, 255^{r}.
[306] *Ibid.*,12^{v}.

Com tampoc en posaven ni Aurel ni Pérez de Moya, no hi ha cap símbol que indiqui que s'han de sumar les quantitats, es diu que s'han de sumar i ja és suficient.

Més endavant apareixeran amb el sentit de símbols, les paraules "Mas" i "Menos", però abans d'aparèixer amb aquest sentit, l'autor les escriu en el capítol 16è del llibre 3r: "Como se haze la operacion de dos Falsas posiciones", on diu (figura 4.3):

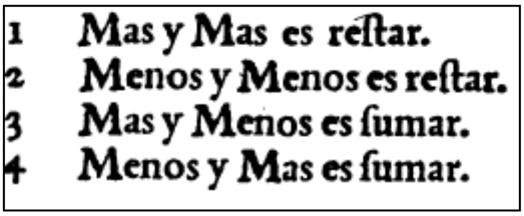

1 Mas y Mas es reſtar.
2 Menos y Menos es reſtar.
3 Mas y Menos es ſumar.
4 Menos y Mas es ſumar.

Figura 4.3. Regla per a aplicar al mètode de dues falses posicions.[307]

Tot i que pot semblar que el que expressa Roca té relació amb la regla dels signes, el que l'autor explica es refereix a quan es consideren dues falses posicions per tal de resoldre un problema. Si, per exemple, s'obtenen dos resultats que són més grans que el que correspondria, aleshores s'ha de restar, aplicant el cas 1. Per tant, aquí el "Mas" i el "Menos", no tenen encara el significat de símbols que tindran més endavant, sinó que tenen el sentit de "més gran" o "més petit"

La primera vegada que Roca escriu el "Mas" amb el significat de símbol, és al capítol 3r del llibre 4rt que "muestra como se han de sumar, restar, multiplicar, y partir los numeros Quadrados o Racionales, y los numeros Sordos dichos Irracionales[308]". Posa com a exemple de la suma de dos nombres irracionals, la de "rayz de 5 con la rayz de 3" que efectua elevant al quadrat i fent després l'arrel quadrada, és a dir, en notació actual: $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5+3+2\sqrt{15}}=\sqrt{5+3+\sqrt{60}}=\sqrt{8+\sqrt{60}}$, com ja hem vist en un exemple de l'apartat 2.3.2 del capítol dedicat a Aurel. Quan es refereix al radicand d'aquesta darrera

[307] *Ibid.*, 215r

[308] *Ibid.*, 225r.

arrel diu l'autor: "harā tato como rayz q̃drada de. 8. mas rayz de. 60."[309] Aleshores diu que "alguns", quan s'adonen que el producte dels irracionals que pretenen sumar no té arrel quadrada "discreta" (exacta), deixen aquesta suma indicada amb els dos termes units per la partícula "Mas". L'autor ho expressa citant Scheubel i Euclides:

> *...los suman con esta partícula Mas, como si vuiessen de sumar. 5. y 3. que ambos son numeros Sordos, dizen que ayuntādo la ra. de 5. con la ra. de. 3 que montan ra.5 mas ra.3. poniēdo el numero Sordo mayor en el primero lugar, y despues el nūero Sordo menor, como lo nota y lo guarda Ioan Scheubelio, y esto sale de la. 4. del libro.2. de Euclides, como lo auemos notado[310].*

El "Menos" amb el sentit de símbol fa també la primera aparició en el capítol 3 del llibre 4rt quan tracta la resta d'arrels quadrades de nombres sords. Planteja l'operació: "restar ra. 5. y ra. 8", es a dir, $\sqrt{8}-\sqrt{5}$. El que proposa és sumar 8 i 5, multiplicar aquests nombres i fer l'arrel quadrada del resultat. Com que en resulta $\sqrt{40}$, que és un nombre irracional, proposa quadruplicar el 40 i deixar indicada la resta que obté, amb l'ajuda del "Menos[311]".

La importància d'aquests exemples rau en què és la primera vegada que utilitza el "més" i el "menys" amb el significat de mantenir unides dues quantitats, tal com ho fan també Aurel i Pérez de Moya. Hem vist també com en el cas de la suma fa referència a Scheubel i a Euclides, de manera que la llista d'autors que declara Roca al principi de la seva obra, no és una mera llista que mostra que té notícia ms dels autors que han tractat els temes que ell tracta, sinó que en coneix les obres.

Una mica més endavant l'autor parla de la "diction Menos", de manera que sembla que estigui donant una entitat al "Menos":

---

[309] *Ibid.*, 225^{v}-226^{r}.
[310] *Ibid.*, 226^{v}-227^{r}.
[311] *Ibid.*, 228^{v}.

Algunos por euitar esta prolixidad sacan estas rayzes de los nueros Sordos do la diction Menos, como resta ra. 5. Fr ra. 12. Diras que queda ra. 12. Menos ra. de 5[312].

La primera vegada que el "Menos" i el "Mas" apareixen en una operació plantejada, és en el capítol 10è del llibre 4rt: "De sumar Binomios y Residuos, Restar, multiplicar, y partir". Roca planteja l'operació[313] (figura 4.4):

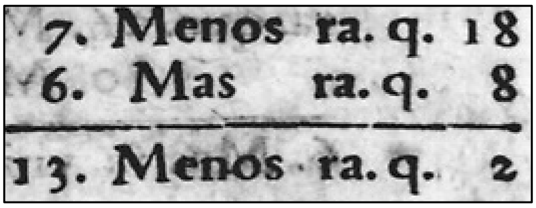

7. Menos ra. q. 18
6. Mas ra. q. 8
13. Menos ra. q. 2

Figura 4.4. Suma d'un binomi i un residu.

que en notació actual s'escriuria[314]:

$$\begin{array}{c} 7-\sqrt{18} \\ 6+\sqrt{8} \\ \hline 13-\sqrt{2} \end{array}$$

En aquest cas el "Mas" i el "Menos" tenen el significat que tenen actualment els signes + i -, tot i que s'utilitzin també per a sumar o restar nombres i, en canvi, l'autor, els fa servir només quan no pot donar el resultat d'aquesta operació com un sol nombre i és una manera d'indicar que les dues parts del resultat han de romandre unides, com un sol objecte.

En el capítol 13è del llibre 4rt, "Del sumar y restar de los Characteres", explica l'autor com s'han de sumar i restar els caràcter semblants i els que són de diverses espècies. En aquest segon cas i pel que fa a la suma, diu:

---

[312] *Ibid.*, 229^{r}.
[313] *Ibid.*, 243^{r}.
[314]Per efectuar el càlcul $\sqrt{8}-\sqrt{18}$, el que fa l'autor és elevar l'expressió al quadrat, extreure'n l'arrel quadrada i considerar la determinació negativa d'aquesta arrel: $\sqrt{\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)^2}=\sqrt{8+18-2\sqrt{144}}=\sqrt{2}$.

Empero si quisieres sumar characteres de diuersas especies todos juntos, como co. y cu. y otros semejantes, entoces los sumaras con la diction del Mas, sin reduzir una especie a otra[315].

Passa aquí com amb les arrels, que els caràcters diferents no es poden sumar i aquí el “Mas” té el mateix significat que en el cas de les arrels, fa de nexe d’unió entre dues expressions.

L’autor adverteix que sempre s’han de sumar els termes semblants i que quan s’han de sumar dues expressions, els caràcters s’han de posar per ordre de manera que el que està més a la dreta ha de ser el *numero,* a continuació hi ha d’anar la *cosa,* després el c*enso,* i així successivament. Posa també un avís per tal d’aclarir que si el caràcter que hi ha més a l’esquerra no té cap senyal ni de “mas” ni de “menos”, sempre s’ha d’entendre que és “mas”.

A continuació posa un exemple de suma de caràcters (figura 4.5):

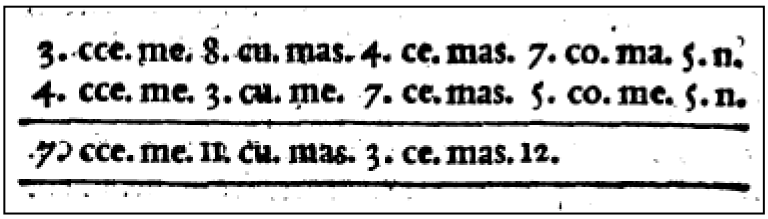

3. cce. me. 8. cu. mas. 4. ce. mas. 7. co. ma. 5. n.
4. cce. me. 3. cu. me. 7. ce. mas. 5. co. me. 5. n.
7. cce. me. 11. cu. mas. 3. ce. mas. 12.

Figura 4.5. Suma d’expressions amb caràcters diversos[316].

i explica com ha efectuat la suma terme a terme[317] i remarca el cas dels *censos de censos,* que ha sumat perquè no tenien cap senyal al davant.

Com es pot observar en les figures 4.4 i 4.5, el “Menos” es converteix en “me.” quan acompanya a un caràcter. Aquests canvis en el significat de les expressions, mostren els petits passos que es van produint en les diferents obres i són molt importants pel

---

[315] Roca, 1564, 255^{v}.
[316] Roca, 1564, 256^{r}.
[317] En el cas del caràcter *co.*, hi ha una petita errada: l’autor (o l’editor) oblida posar-lo en el resultat de la suma.

desenvolupament de l'àlgebra. D'alguna manera, aquests símbols que Roca no ha declarat amb els caràcters, com tampoc ho va fer Aurel, es van perfilant en funció dels objectes que acompanyen.

4.3.3. Les equacions

La resolució d'equacions és el tema dels dos darrers capítols de l'obra[318]. En el 18è tracta les quatre igualacions simples i en el 19è les quatre compostes. Igual que van fer Aurel i Pérez de Moya, abans de dir quants tipus d'igualacions considerarà, fa referència al nombre d'igualacions que han considerat altres autors, tot i que Pérez de Moya no parlava d'autors concrets, com sí que ho feia Aurel, que es referia a "Fray Lucas del Burgo" i a "Albertucio de Saxonia". Roca, a part de referir-se a aquests dos autors, hi afegeix el nombre d'igualacions que considera el mateix Aurel i també Étienne de la Roche, Scheubel i Pérez de Moya i diu que seguirà a Aurel.

En el capítol 17è, Roca dóna avisos per a resoldre les igualacions, com també els donen Aurel i Pérez de Moya. Una de les coses que s'han de tenir en compte, diu l'autor, és que en les igualacions són necessàries dues parts: una que conté els caràcters i l'altra el resultat que s'ha d'obtenir, de manera que una part és igual a l'altra, i quan aquestes dues parts són semblants en caràcters i amb nombres, com si 3. *ce*. s'igualessin a 3. *ce*. ($3x^2 = 3x^2$) o 4. *co* a 4. *co* ($4x = 4x$), aleshores el valor de la *cosa* o resposta a la demanda serà 1. *nu*. Aquest és el cas al qual ens hem referit en el capítol dedicat a Aurel i també en el dedicat a Pérez de Moya, com a exemple d'errada que es va repetint en diferents obres. Roca també considera altres casos, com, per exemple el que en llenguatge actual s'escriuria: $5x^3 = 6x^3$ que l'autor diu que no es pot resoldre. Considera també el cas en què els coeficients són iguals i els caràcters no, que segons l'autor, té infinites solucions, i el cas en què coeficients i caràcters són diferents que té una sola solució. De fet, fa una explicació molt

[318] Vegeu: Massa-Esteve, Ma. Rosa, 2010a. "The treatment of equations in the Iberian Peninsula after Marco Aurel (1552): The Great Art of Antic Roca", a H. Hunger, F. Seebacher i G. Holzer, (eds), *Styles of thinking in Science and Technology*, 103-111. 3rd ICESHS, Austrian Academy of Sciences. Vienna.

semblant a la de Pérez de Moya, en la qual es refereix a les quatre possibilitats quant a diferències i igualtats entre els coeficients i les incògnites i Aurel, en canvi només considera dos casos especials.

En el cas d'infinites solucions, hi ha una errada en l'exemple del text de Roca: $7x^3 = 7x^3$, que no correspondria a aquest cas[319] (figura 4.6):

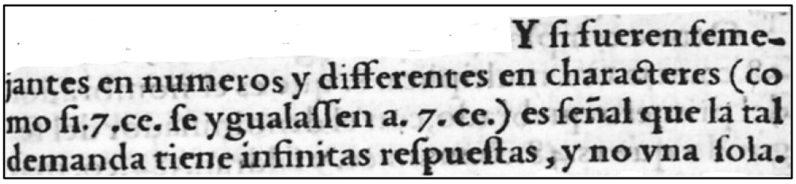

Y ſi fueren ſeme-
jantes en numeros y differentes en characteres (co
mo ſi.7.ce. ſe ygualaſſen a. 7. ce.) es ſeñal que la tal
demanda tiene infinitas reſpueſtas, y no vna ſola.

Figura 4.6. Exemple de Roca que no concorda amb el cas.

Les igualacions simples, es podrien resumir, en notació actual : $ax^{n+k} = bx^n$ per k=1,2,3,4. Roca no presenta una llista de problemes com Aurel i Pérez de Moya sí que feien, però posa un exemple de resolució de cada equació un cop ha fet l'explicació corresponent. L'autor remarca, com també ho havia fet Aurel, que per la primera igualació es resolen les qüestions que es podrien també resoldre per *Arte Menor*, és a dir pel que actualment anomenem aritmètica. Remet a l'obra d'Aurel per veure'n exemples i diu que ell en posarà algun per tal que s'entengui la regla. Un cop ha explicat com resoldre cadascuna de les 4 igualacions simples, diu l'autor que es pot deduir que hi podria haver moltes més igualacions simples i que totes elles "se pueden explicar con una sola"[320].

Roca es refereix a les igualacions compostes com Pérez de Moya. Parla de primera, segona, tercera i quarta de les compostes, no de cinquena, sisena, setena i vuitena igualacions com feia Aurel. Les fórmules que es poden deduir, seguint les instruccions de resolució per a cadascun dels tipus, són les mateixes que resumeixen les instruccions que

319 Roca, 1564, 263^{r}.
320 Roca, 1564, 265^{v}

donaven Aurel i Pérez de Moya i que ja hem mostrat en els capítols anteriors. En el cas de la segona igualació de les compostes, l'autor remarca que la major part o totes les demandes que acaben amb aquesta igualació, tenen dues respostes. Aleshores dóna un avís per saber quan s'ha de sumar o restar "la metad del quotiente del mediano[321]", és a dir quan s'ha de sumar a l'arrel o restar-lo, el terme $\frac{b}{2a}$ en la fórmula: $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$. L'avís diu que quan la quantitat que està amb el caràcter mitjà (primer terme del radicand), sigui més gran que la quantitat del menor (segon terme del radicand), aleshores s'ha d'efectuar la suma, i si fos menor, s'ha d'efectuar la resta. Afegeix que quan $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, de manera que no es pot efectuar la resta, aleshores s'ha de sumar i afegint a l'arrel, $\frac{b}{2a}$, obtindrem el valor de la *cosa.* Comet, per tant, la mateixa errada que Aurel i Pérez de Moya. L'exemple que posa per aplicar el procediment de la 2a igualació de les compostes, no correspon a cap d'aquests dos avisos. És un exemple amb números, sense context. Es tracta de fer dues parts del número 20 de manera que multiplicades donin 84. L'equació corresponent té dues solucions: 14 i 6, però el problema només en té una, ja que quan una de les parts és 14, l'altra ha de ser 6. Roca dóna 6 com a solució de l'equació. Quan Roca tracta la quarta igualació de les compostes, diu que alguns la posen com avís, referint-se probablement a Pérez de Moya. De fet, com ja hem dit, la quarta igualació, és una generalització de les anteriors.

Al final de la *Arithmetica*, Roca diu que totes les igualacions es poden reduir a dues: una d'elles es pot dir simple i agruparà totes les simples i l'altra composta, agrupant totes les compostes, tot i que no explica de quina manera. Aquesta afirmació és molt rellevant ja que ni Aurel ni Pérez de Moya la fan tan explícita i vol dir que Roca ha copsat la potència de la proporció contínua per reduir el nombre de tipus d'equacions.

[321] *Ibid.* 266^{v}.

No fa llista de problemes, però posa alguns exemples per tal que s'entenguin les regles. Al principi del capítol 18è del llibre 4rt, on explica el procediment a seguir en els casos corresponents a la primera igualació, remet a Marco Aurel per si es volen estudiar exemples de tots els casos. Vegem com ho diu Roca:

Por esta primera ygualacion se pueden hazer todas las demandes que por arte menor se pueden alcançar ser verdad si te exercitares en ello: y aunque seria cosa larga traerte exemplos en cada operacion dela arte menor[322]*, en lo que se detiene Marco Aurel, y en el los podràs ver, y en otros muchos, no dexare de traerte algun exemplo para que entiendas el precepto*[323].

4.4. Les fonts

Així com ni Aurel ni Pérez de Moya sembla que volguessin donar pistes sobre les seves fonts principals, Roca dóna una llista força exhaustiva del autors en els quals diu que s'ha basat.

Cathalogo de los autores, de los quales ha ſido recopilada eſta preſente obra.

Archimedes.
Ariſtotil.
Beda Ingles.
Budeo.
Clichtoueo Neoportu-nenſe.
Cutheberto Tonſtallo.
Eſteuan dela Rocha.
Euclides.
Franciſco Feliciano.
Franciſco Leonartho Ghaligalo.
Gemma phryſio.
Georgio Valla.
Georgio Veneto.
Gilles Huguetan.
Henrrique Grauio.
Henrrique Vuelpio.
Herodiano Alexãdrino
Iacobo Paletario.
Iacobo fabro Stapulẽſe
Ioachimo Fortio.
Ioan Andres.
Ioan Antonio Tajente.
Ioan [illegible]o.
Ioan de [illegible]rtega.
Ioan Grammatico.
Ioan Martin Siliceo.
Ioan Nouiomago.
Ioan Perez de Moya.
Ioan Sacrobuſto.
Ioan Scheubelio.
Ioan Vantallols.
Ioan de Yciar.
Iordano.
Lucas de Burgo.
Marco Vitruuio.
Marſilio Ficino.
Michael Stelſio.
Nicolas Chuquet.
Oroncio Fineo.
Pedro Apiano.
Pedro Ciruelo.
Pedro Ramo.
Philippo Friſcobaldo.
Platon. Plinio.
Ptolemeo.
Rodolpho Paludano Nouiomago.
Seuerino Boecio.
Strabo.
Valentin Mennher.

Figura 4.7. Llista d'autors en els quals Roca manifesta que basa la seva obra

No tots els de la llista estan citats al llarg de l'obra. Un dels que no hi està citat és Valentin Mennher, que és l'autor del qual va traduir del francès[324] un text que va afegir com apèndix de l'*Arithmetica,* intitulat: *Compendio para tenir y regir los libros de cuentas, traducido de llengua francesa en romance castellano,* que va ser publicat l'any següent amb el títol lleugerament canviat. Pot ser, per tant, que n'hagi consultat la majoria. No sembla una llista posada perquè quedés clar que estava al dia del que s'havia publicat perquè en els casos que cita en el text, ho fa de manera

[322] L'autor aquí es refereix a l'*Arte Mayor*.
[323] Roca, 1564, 264r.
[324] González Hernández, C., 2016. "Del francés al castellano: las traducciones en la Junta de libros". *Quaderns de Filologia; Estudis Lingüístics XXI*, 165-183.

molt concreta, fent referència clara a aspectes de les seves obres. És important destacar que 12 anys després de la publicació de la primera obra amb contingut algebraic a la Península Ibèrica, es troben citades en l'obra de Roca, les figures més destacades de l'àlgebra fins a aquell moment, juntament amb d'altres, les obres dels quals ho van ser de referència per l'humanisme.

En el capítol 2n del llibre 4rt, tracta els nombres *sords* i per explicar-los fa referència a "Ioan Scheubelio" que diu que són aquells dels quals no es poden expressar les arrels amb algun "numero cierto[325]", és a dir, fa referència als nombres irracionals. I el torna a citar quan explica com sumar arrels quadrades[326]així com quan proposa una manera alternativa de sumar i restar nombres medials. Després d'explicar les operacions amb nombres medials, Roca proposa una altra manera de sumar-los i restar-los basada en com ho feien "Leonardo Pisano[327]" i Pérez de Moya. També cita Scheubel en el capítol 11è on tracta les arrels quadrades i cúbiques dels binomis i explica el mètode de Scheubel, contrastant-lo amb el d'Aurel[328]. Sovint hi ha referències com aquesta, que mostren que Roca ha estudiat les obres dels autors que cita i en cada cas aplica el mètode que més li convenç. En el capítol 12è on tracta la *regla de la cosa*, diu que Scheubel fa referència a Diofant com a origen de la *regla de la cosa*. S'hi torna a referir en el capítol 13è amb relació al tipus i nombre de caràcters que usen diversos autors. Quant als tipus de caràcters, cita també a Ghaligai[329]. Finalment, s'hi refereix en el capítol 8è, juntament a Pacioli, Albert de Saxònia, De la Roche[330], Pérez de Moya i Aurel, quan exposa el nombre de tipus d'igualacions que proposen diversos autors.

---

[325]Roca, 1564, 224^{r}.
[326]*Ibid.,* 227^{r}.
[327]Aquí l'autor es refereix a Leonardo de Pisa, conegut també com a Fibonacci.
[328]Roca, 1564, 248^{r}.
[329]Roca s'hi refereix com "Francisco Leonardo". De fet, no se'l cita gaire d'aquesta manera. A la portada de la seva *Pratica d'Arithmetica,* hi posa com a autor Francesco Ghaligai i a la primer pàgina en una dedicatòria de l'autor a monsenyor Giulio de Medici, diu "L'humil servent Francesco di Lionardo Ghaligai"(Roca, 1564, 252^{v}; Ghaligai, 1552, A^{ii}).
[330]Roca es refereix a Pacioli, Albert de Saxònia i De la Roche com Fray Lucas de Burgo, Albertucio de Saxonia i Esteuan de la Rocha respectivament (Roca, 1564, 264^{r}).

També fa referència a Euclides quan tracta la suma de les arrels, concretament a la proposició 4a del 2n llibre, sense citar els *Elements*, la qual cosa vol dir que devia donar per suposat que els *Elements* era l'obra a la qual feia referència. Així com Aurel cita Euclides al llarg de tota l'obra, Roca només ho fa a la part algebraica, llevat d'un comentari al final del llibre 3r en el qual cita diversos autors. Fa referència sempre a proposicions concretes, essent la més citada la (IV,2)[331].

En el capítol 4rt del llibre 4rt: *De numeros Sordos dichos Rayz de rayz quadrada, o numeros mediales, que cosa sean, y quantas especies ay dellos*[332], Roca cita Aurel quan explica els tipus de nombre medials que hi ha, donant a entendre que s'ha basat en la seva obra per establir-ne quatre tipus i s'hi refereix també al final del capítol 6è[333] quan explica com dividir nombres medials i al final del 10è, que tracta de la divisió dels binomis i els residus. En el capítol 11è diu que s'ha adonat que molts autors han treballat com extreure les arrels quadrades dels binomis i ho han fet de diverses maneres i posa com a exemple d'aquesta diversitat a Scheubel i Aurel però que cadascú es basa en raons i autoritats eficaces, és a dir, que Roca valora les dues maneres de fer les arrels. Explica que Aurel es basa en les proposicions 48a, 49a, 50a, 51a, 52a i 53a dels *Elements* per extreure les arrels de cadacun dels tipus de binomis[334]. Roca optarà però, per l'explicació que fan Pérez de Moya i Scheubel. Aquests dos autors expliquen que per extreure l'arrel d'un binomi, s'han de fer dues parts del terme més gran de manera que multiplicades, en resulti la quarta part del terme més petit. L'arrel de la suma d'aquestes dues parts, segons ho expressa Roca, será l'arrel del binomi[335]. L'autor no ho expressa correctament perquè el resultat ha de ser la suma de les arrels de les dues parts, no l'arrel de la suma, però a continuació posa l'exemple del càlcul de l'arrel d'un binomi, que actualmente expressaríem com $\sqrt{68+\sqrt{4608}}$ obtenint per les dues parts els resultats 36 i

[331] Cita també la (VI,16), la (VII,2), la (X,19) i la (X,21).
[332]Roca, 1564, 230^r.
[333]*Ibid.*, 235^v.
[334]Efectivament, el que diu Roca és exacte. Aurel en el capítol 11è explica com extreure les arrels de cada tipus de binomi, basant-se en les proposicions que diu Roca (Aurel, 1552, 62^v-66^r).
[335] Pérez de Moya,1558, 51-52 i Scheubel, 1551, 36^v.

32, i dóna com a resultat de l'arrel $6+\sqrt{32}$. Roca[336] posa dos exemples que són els mateixos que posa Pérez de Moya. Scheubel en posa uns altres. Quan tracta les arrels cúbiques dels binomis fa referència Roca a Aurel i Pérez de Moya[337]

En el capítol 12è on Roca explica la *regla de la cosa,* com a 4a operació de *l'Art Major*, parla de Diofant, Scheubel, Regiomontanus, Guillermo de Lunis i Chuquet. Aquesta idea de considerar la *regla de la cosa* com una operació podria provenir de Chuquet ja que les altres probables fonts com Pacioli, Aurel i Pérez de Moya consideren l'*Art Major*, la *regla de la cosa* i l'àlgebra una mateixa cosa[338].

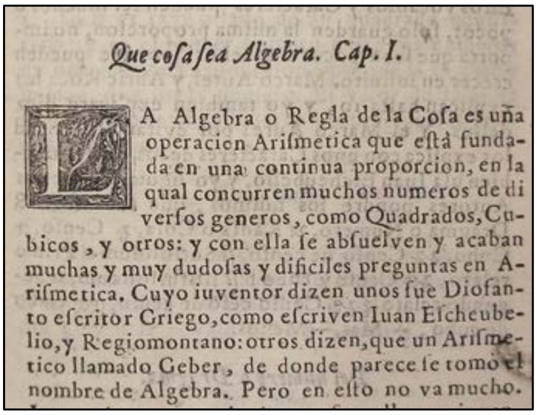
Figura 4.8. *Tratado* de Tolrà

Roca torna a fer referència a Scheubel quan explica com multiplicar caràcters. Diu que si s'ha de multiplicar, per exemple, *ccce.* per *ccu.*, s'ha de sumar 8 i 9 que són 17 i el resultat serà la dissetena quantitat de la proporció, que encara que no se sàpiga com anomenar-la, no ha de preocupar, tal com a Scheubel no li preocupaven els noms dels caràcters[339].

Roca va ser una de les fonts de l'àlgebra de Joan Baptista Tolrà (1619), que va ocupar una càtedra de "Principis de Galè" a la universitat de Barcelona (1596-1598) i que s'anomena ell mateix deixeble de filosofia d'Antic Roca.

Tot i que Tolrà té influències clares d'Aurel, quan parla de la *regla de la cosa,* fa referència als mateixos autors a què feia referència Roca: Diofant, Scheubel, Regiomontanus, Geber, etc. i parla també de la *regla de la cosa* com una operació i com Roca també, fa referència als orígens de l'àlgebra sense decantar-se per si són grecs o àrabs.

[336] Roca, 1564, 248v-249v.
[337] *Ibid.*,251r.
[338] Pacioli, 1494, f. 111v; Aurel, 1552: portada; Pérez de Moya, 1562, 387.
[339] Scheubel, 1551, 2-3.


Que coſa ſea Algebra. Cap. I.

LA Algebra o Regla de la Coſa es uña operacion Ariſmetica que eſtá fundada en una continua proporcion, en la qual concurren muchos numeros de diverſos generos, como Quadrados, Cubicos, y otros: y con ella ſe abſuelven y acaban muchas y muy dudoſas y dificiles preguntas en Ariſmetica. Cuyo iuventor dizen unos fue Dioſanto eſcritor Griego, como eſcriven Iuan Eſcheubelio, y Regiomontano: otros dizen, que un Ariſmetico llamado Geber, de donde parece ſe tomó el nombre de Algebra. Pero en eſto no va mucho.

Figura 4.9. Definició d'àlgebra de Tolrà.

Tolrà fa diverses referències a Aurel i a Roca. Probablement va conèixer primer l'obra de Roca, de qui es considera deixeble i després la d'Aurel a qui Roca cita profusament. En qualsevol cas, l'obra de Tolrà està clarament influenciada per aquestes obres.

4.5. Conclusions

Roca és un humanista, com Pérez de Moya, que està interessat en totes les branques del coneixement i també en la política, com ho mostra la seva condició de membre del Consell de Cent durant dos biennis, i per tant la seva implicació en el govern de la ciutat de Barcelona.

És també un acadèmic, ja que és professor de la Universitat de Barcelona. Tal com hem dit, va proposar la separació de les matemàtiques de les altres ciències, amb la intenció de formar una ciència pura, idea que encaixa amb la seva visió més especulativa de les matemàtiques en general, i encaixa perfectament també, amb el caràcter més especulatiu de la seva *Arithmetica* amb relació al de les obres estudiades en els capítols anteriors.

Tot i que l'obra ha rebut les influències de les aritmètiques de diversos autors com Chuquet, Ghaligai, Scheubel, Aurel i Pérez de Moya, Roca en fa una compilació amb criteri propi, mostrant que coneix bé les seves obres, essent la d'Aurel la font principal. Exposa allò que considera essencial per aprendre l'Aritmètica i tria de cada autor el que creu convenient, explicant la seva tria quan fa referència explícita als autors. De fet, al final de l'obra, escriu un índex onomàstic de 15 pàgines, que Roca anomena "Tabla de las cosas memorables contenidas en esta presente obra. La a muestra la primera pagina, y la b, la segunda". Vegem una de les pàgines d'aquesta taula, en la qual cita autors com Scheubel, Peletier, Buteo o Marco Aurel:


TABLA.

† 3

Figura 4.10 . Taula amb relació de conceptes i autors.

Pel que fa als símbols, utilitza els mateixos que Pérez de Moya, tot i que pels noms d'alguns, hi posa també els utilitzats per Ghaligai.

Al final de l'obra, l'autor explica que en les equacions no és pas necessari prendre 8 tipus o 10 tipus i remarca que es poden reduir a dos, però no concreta la manera de fer-ho. Com ja hem remarcat, la generalització és un dels aspectes més rellevants del procés d'algebrització i és molt important que Roca copsi aquesta possibilitat. Pel que fa a les equacions sobta una mica que no tracti les que tenen dues o més incògnites. Molts dels autors que cita Roca tracten la *regla de la quantitat,* Mennher entre ells, del qual Roca va traduir un text de comptabilitat. De tota manera, és des del punt de vista actual que tenim clara que la introducció d'una segona incògnita, va representar un pas important en l'àlgebra. Com que l'obra de Roca té la d'Aurel com a principal referent i atès que Aurel resol els problemes corresponents a la *regla de la quantitat* a continuació dels de la primera igualació, podria ser que Roca els considerés problemes corresponents de la 1a igualació i ja hem dit que Roca no resol problemes, si no és per exemplificar les regles.

CAPÍTOL 5. PEDRO NÚÑEZ. L'aplicació de l'àlgebra a l'aritmètica i a la geometria.

5.1. Introducció

En aquest capítol analitzarem una obra completament diferent de les anteriors, tant pel seu contingut com per la seva extensió: el *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (1567), en endavant *Libro de Algebra.* Així com les obres d'Aurel, Pérez de Moya i Roca segueixen un patró semblant que té com a font directa o indirecta el *Coss* de Rudolff, el cas de Núñez és molt més complex i més original. Núñez va escriure la seva obra en llengua castellana per tal que tingués més difusió, ja que era una llengua més parlada que el portuguès. És possible que el fet que busqués un editor a Anvers[340], tingués com a objectiu assegurar-se l'èxit. L'objectiu de Núñez, tal com posa de manifest en el títol de l'obra, és mostrar la utilitat de l'àlgebra tant en qüestions d'aritmètica com de geometria.

Del seu *Libro de Algebra* en destacarem els aspectes que hem considerat també en les altres obres, i hi veurem diferències tant pel que fa a la idea d'àlgebra com al nombre d'equacions que considera. En el cas de l'àlgebra, com els altres autors, considera que és tot el procés per arribar a la solució d'un problema, i no solament la resolució d'equacions. No hi ha implícita, en canvi, la idea d'*anàlisi* i pel que fa a la classificació de les equacions no segueix la línia alemanya sinó que distingeix els 6 casos fonamentals que caracteritzen l'àlgebra àrab[341]. Analitzarem alguns exemples de discussió d'equacions de tercer grau que

[340] Durant el segle XVI, Anvers era una ciutat rica i poderosa gràcies al comerç, a l'auge del qual va contribuir el seu important port fluvial en el riu Escalda.

[341] Aquests sis casos els va introduir Abu Ja^{c}ar Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî a l'obra *Al-Kitâb al-Mukhtasar fî Hisâb al-Jabr wa al-Muqâbala*, tot i que l'ordre és diferent. Vegeu: Oaks, Jeffrey, A., Alkhateeb, Haitham M., 2005. "*Māl*, enuntiations, and the prehistory of Arabic àlgebra". *Historia Mathematica*, **32,** 400-425.

els altres autors estudiats no tracten. Quant als símbols, Núñez utilitzarà els de tradició italiana com Pérez de Moya i Roca, però a diferència d'aquests autors, no acompanyarà amb cap símbol el terme independent. Una altra diferència important amb les altres obres estudiades seran les demostracions geomètriques de les regles per a resoldre equacions, ja que els altres autors no fan demostracions i les seves obres no contenen geometria.

Així com els altres autors destaquen la proporció contínua entre les incògnites, Núñez utilitza sobretot la teoria de les proporcions euclidiana, de la qual en domina les propietats. Analitzarem com fa ús d'aquesta teoria amb una sèrie d'exemples a partir del càlcul de dos mitjans proporcionals seguint el mètode d'Euclides, i l'ampliació d'aquest càlcul a diferents objectes de l'àlgebra fins arribar a establir proporcions entre equacions.

Pel que fa a les fonts, mostrarem com Euclides és la referència principal per Núñez, encara que té també importants influències de Regiomontanus, Pacioli, Cardano i Tartaglia. La seva obra també va ser una referència important per a les d'altres autors, especialment per Gosselin[342] i Clavius[343] que el citen diverses vegades a les seves àlgebres.

5.2. Dades biogràfiques

Pedro Nuñez (1502-1578) va ser un matemàtic portuguès, que és considerat per alguns historiadors la figura més important de la ciència portuguesa. Simon de Tovar[344] parlava de Núñez com "el matemàtic més gran del nostre temps" i John Dee[345] parlava de

---

[342] Gosselin, Guillaume, 1577. *De arte magna, seu De occulta parte numerorum & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur, libir quattor, in quibus explicantur æquationes Diophanti, Regulaæ Quantitas simplicis, & Quantitatis surdæ*, Parisiis, apud Ægidium Beys.

[343] Clavius, Christoph, 1608. *Algebra.* Rome.

[344] Simón de Tovar va ser un dels personatges més influents a la Sevilla del segle XVI. Era metge de professió i propietari d'un dels jardins botànics més importants del moment.

[345] John Dee (1527-1608) fou un matemàtic, astrònom, astròleg, ocultista, navegant. Va escriure un prefaci a la primera traducció a l'anglès dels *Elements* d'Euclides el 1570. D'origen gal·lès va ser servidor de l'Imperi Britànic i assessor de la reina Elisabet I d'Anglaterra. Va dedicar gran part de la seva vida a l'estudi de l'alquímia, l'endevinació i l'hermetisme.

Núñez com "aquest eruditíssim home... que és per a nosaltres l'única columna de suport per a l'art de les matemàtiques[346]".

És també un humanista com Pérez de Moya i Roca, però en aquest cas, tot i que la seva obra abasta diferents camps del coneixement, prima la producció científico-tècnica sobre la que es podria considerar més literària. De fet, Núñez va dedicar una gran part de la seva activitat intel·lectual a la fonamentació científica de la navegació[347]. Molt probablement d'origen jueu[348], Nuñez va néixer el 1502 a Alcácer do Sal. És per aquest motiu que va afegir el topònim Salaciense al seu nom en la majoria dels seus textos impresos.

Alguns aspectes de la seva biografia es coneixen pels interrogatoris a què van ser sotmesos els seus néts durant els processos inquisitorials[349]. Va cursar estudis introductoris a la Medicina a la universitat de Salamanca[350], estudis que cursaven habitualment els qui estaven interessats per temes científics. Es va graduar el 1523 i el 8 d'agost de 1526 va opositar a Salamanca per una càtedra d'Arts que no va obtenir i es va concedir a Henrique Fernandes, també portuguès. El 1527 va tornar a Portugal. El 16 de novembre de 1529 va ser nomenat cosmògraf reial pel rei Joan III El Pietós. El 15 de gener de 1530 va ocupar la càtedra de Lògica a la universitat de Lisboa. De tota manera, Nuñez continuava treballant en el seu doctorat en Medicina, que va obtenir el 1532, any en què va ocupar la càtedra de metafísica. Entre 1532 i 1544 treballava oficialment a la universitat de Lisboa però va passar temporades a Espanya. Cap el 1534, segons l'autor manifesta, podria haver començat a escriure el *Libro de Algebra*, probablement en la seva estada a Salamanca, però que no

---

346 Leitão, Henrique de Sousa, 2002. *Pedro Nunes 1502-1578. Novas terras, novos mares e o que mays he: novo ceo e noves estrelles.* Biblioteca Nacional. Lisboa.

347 Sobre l'obra cosmogràfica de Núñez, vegeu Navarro, 2014, 203-223, *op. cit.*

348 La primera referència a l'ascendència jueva de Nunes la podem trobar a finals del segle XIX en l'obra *Mathematik bei den Juden* de Moritz Steinschneider fent referència a la informació que havia trobat en el llibre *Sefer Majan Ganim* de Joseph del Medigo (1591-1655) publicat a Amsterdam. Leitão, 2003. "Para uma biografia de Pedro Nunes: O surgimento de un matemático, 1502-1542", *Cadernos de Estudos Sefarditas,* 3, 50-51.

349 Matias Pereira, un dels seus néts, va ser empresonat per la Inquisició de Coimbra entre 1623 i 1631 i Pedro Nunes Pereira, un altre nét, ho va ser per la de Lisboa entre 1623 i 1632. Leitão, 2003, 49, *op. cit.*

350 En aquesta ciutat va contraure matrimoni el 1523 amb Guiomar Areas, filla de Pedro Fernández de Areas, cavaller castellà veí de la ciutat de Salamanca. Van tenir sis fills, quatre noies i dos nois.

publicaria fins el 1567. El mateix autor, en la carta dedicada a l'infante Don Henrique que precedeix l'obra, diu que fa quasi 30 anys que la va compondre però que després va estar ocupat en l'estudi de temes molt diferents, de caire més especulatiu. Afegeix que primer la va escriure en portuguès, però la va traduir a la llengua castellana per tal que tingués més difusió. Núñez, com Aurel, creu que a Espanya hi ha poques persones que hagin sentit a parlar de l'àlgebra i per aquest motiu, també com Aurel, la vol donar a conèixer.

La primera de les obres de Núñez que es va publicar, va ser *Tratado da Sphera*, el 1537. Aquesta obra contenia una edició del *Tractatus de Sphaera* (ca. 1220) de Johannes de Sacrobosco[351] (ca. 1195- ca. 1256), de la *Theoricae nouae planetarum* (1472) de Georges von Peuerbach (1423-1461) i del llibre I de la *Geographia* de Claudi Ptolemeu (ca- 85 - ca. 165). Més tard, el 1542, va publicar *De Crepusculis,* on tracta el problema de la durada del crepuscle, resolent el problema del crepuscle mínim que Bernouilli presentaria dos segles més tard:

> *El problema del crepuscle mínim va ser resolt, i de manera també molt elegant, per Nunez, en un breu tractat de 142 pàgines, imprès a Lisboa el 1542, i va aconseguir que hi dediquessin atenció molts autors eminents des d'aleshores*[352].

El 1546 va publicar *De erratis Orontii Finaei*[353], on va mostrar que els intents d'Oronce Finé[354] (1494-1555) de resoldre els anomenats tres problemes clàssics: la quadratura del cercle,

---

[351] Se'l coneix també com John of (o de) Holywood.

[352] The problema of the shortest twilight was first solved, and very elegant too, by Ninez, in a little quarto tract of 142 pages, printed at Lisbon in 1542; and it has engaged the attention of many distinguished autors since that time. Vegeu: Davies, T.S., 1833. "On Bernouilli's Solution of the Problem of Shortest Twilight". *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science,* **3,** July-Desember 1833, 179. University of London. London.

[353] Pedro Nuñez, 1546. *De erratis Orontii Finaei Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris, Qui putavit inter duas datas lineas, binas medias proportionales sub continua proportione invenisse, circulum quadrasse, cubum duplicasse, multangulum quodcunque rectilineum in circulo describendi, artem tradidisse, & longitudinis locorum differentias aliter quam per eclipses lunares, etiam dato quovis tempore manifestas fecisse, Petri Nonii, Salaciensis Liber unus.* João Barreira et João Álvares. Coimbra.

la trisecció de l'angle i la duplicació del cub, van ser incorrectes. Cap el 1550, va fer una aportació important a la navegació, el descobriment que si una nau navega amb rumb constant, la corba que descriu no és un cercle màxim sinó una corba que s'aproxima indefinidament al pol i que més tard Willebrord Snel van Royen, més conegut com a Snell[355] (1580-1626) va anomenar *loxodroma*. Aquestes corbes, que Núñez havia anomenat línies de rumb, són corbes que tallen els meridians amb angle constant, al llarg de les quals no varia la posició de la brúixola. El gran cosmògraf Gerardus Mercator (1512-1594) les va utilitzar per aplicar la projecció que porta el seu nom, que transforma les loxodromes en línies rectes. El 1566 Núñez va publicar un compendi de les seves obres, *Petri Nonii Salaciensis Opera,* amb versions millorades. Núñez va inventar un dispositiu de mesura d'angles o de longituds que permet, quan s'incorpora a un astrolabi o a un instrument similar, mesurar fraccions de grau d'angle, mitjançant una escala auxiliar. De fet, aquest dispositiu es coneix amb el nom de *nonius,* com a reconeixement al seu autor (Sousa[356], 1985; Tavares[357], 2011).

5.3. *El Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*

L'àlgebra de Pedro Núñez té una estructura complexa. Es tracta d'una obra molt extensa i molt diferent de les àlgebres d'Aurel, Pérez de Moya i Roca. L'interval que hi ha des de què es va començar a escriure fins que va ser publicada fa que sigui també molt difícil d'analitzar. No hi ha evidències que confirmin el que diu l'autor sobre el fet que podia haver estat escrita 30 anys abans de la seva publicació, però probablement va ser escrita en diverses etapes i cadascuna de les tres parts, correspongui a una etapa diferent. De fet, hi ha

---

[354] Oronce Finé va ser un matemàtic i cartògraf francès, nascut a Briançon. La seva obra més coneguda és *Protomathesis* (1532), on tracta diversos aspectos relacionats amb les matemàtiques.
[355] Monmonier, Mark, 2004. *Rumb Lines and Map Wars. A Social History of the Mercator Projection,* 2. The University of Chicago Press. Chicago and London i Navarro, 2014, 207, *op. cit.*
[356] Sousa Ventura, Manuel, 1985. *Vida e Obra de Pedro Nunes.* Biblioteca Breve, **99.** Instituto de Cultura e Lingua Portuguesa. Ministério da Educação. Lisboa.
[357] Tavares da Conceição, Margarida, 2011. "Translating Vitrubius and Measuring the Sky: On Pedro Nunes and Architecture". *Nexus Network Journal,* **13**, n. 1, 205-220.

moltes referències a obres posteriors a la dècada dels 30, que segurament van anar modelant l'obra.

L'obra està dividida en tres parts, que l'autor anomena principals i consta de 710 pàgines.

La primera consta de 6 capítols que tracten sobre la finalitat de l'àlgebra, les seves regles i *conjugacions*, que és com Nuñez anomena les equacions, i sobre les demostracions de les regles de les *conjugacions simples* i *compostes* i els casos particulars.

La segona part principal té tres subdivisions, la primera de les quals té 11 capítols on l'autor declara les incògnites que anomena *dignidades* i explica com operar-hi. Els altres autors estudiats també parlen en alguna ocasió de *dignidades* però el terme té un significat més complex que a l'obra de Núñez, com ja hem explicat al capítol 2 dedicat a Aurel. Per Núñez les *dignidades* són les incògnites. La segona part d'aquesta segona part principal consta de 12 capítols dedicats a les operacions amb arrels. Núñez dedica els 14 primers capítols de la tercera subdivisió a la teoria de les proporcions i el darrer a les arrels dels binomis, tot que l'autor es refereix a tots 15 capítols com a la *teoria de les proporcions*.

La tercera part de l'obra és la més extensa i desenvolupa la resolució d'equacions que havia tractat a la primera part, i ho fa d'una manera molt més completa. Consta de 7 capítols, 4 dels quals tenen un caràcter més aviat teòric i 2 d'ells exemplifiquen l'aplicació de l'àlgebra a l'aritmètica i a la geometria.

Com es pot apreciar, aquesta estructura difereix molt de la de les obres dels altres autors que hem tractat. És molt més complexa i a més a més, conté geometria. De fet, l'objectiu de l'autor és mostrar les aplicacions de l'àlgebra a l'aritmètica i a la geometria. En el primer capítol ja tracta les equacions i la part que dedica a les proporcions, que el mateix autor en diu "tractat de proporcions", és molt més extensa que a les altres obres estudiades.

5.3.1. *La idea d'àlgebra*

Núñez, en la carta que precedeix l'obra, explica que de tots els llibres sobre les ciències matemàtiques que ha compost, no n'hi ha cap de tan profitós com aquest d'àlgebra que explica de manera fàcil i breu com trobar la quantitat desconeguda, en qualsevol situació d'aritmètica i geometria i en totes les arts que utilitzin el comptar i el mesurar. L'autor considera que els principis de l'àlgebra provenen dels llibres dels *Elements* d'Euclides. Afegeix que *àlgebra* és un nom aràbic que significa restauració perquè "tirando lo sobrero y restaurando lo diminuto" arribarem a conèixer allò que busquem. Continua Núñez explicant que a d'altres els sembla que el nom d'*àlgebra* prové d'un matemàtic moro que diuen que en va ser l'inventor, anomenat Gebre, i que Regiomontanus, en canvi, menciona els llibres de Diofant, que no havien estat encara divulgats, i que tractaven aquesta art. L'autor fa referència, doncs, a les arrels aràbigues de l'àlgebra i al referir-se a Diofant també fa referència a les possibles arrels gregues, però com Roca, no es decanta per cap de les dues possibilitats:

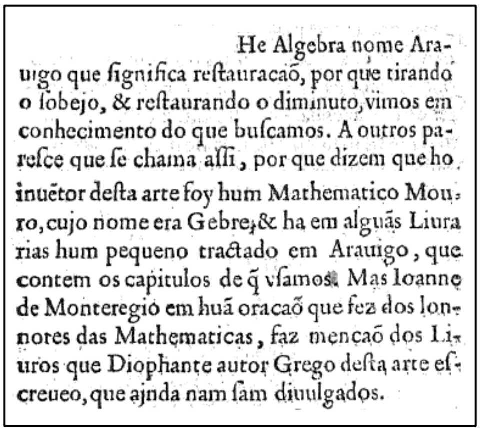

He Algebra nome Arauigo que ſignifica reſtauracaõ, por que tirando o ſobejo, & reſtaurando o diminuto, vimos em conhecimento do que buſcamos. A outros pareſce que ſe chama aſſi, por que dizem que ho inuẽtor deſta arte foy hum Mathematico Mouro, cujo nome era Gebre, & ha em alguãs Liurarias hum pequeno tractado em Arauigo, que contem os capitulos de q̃ vſamos. Mas Ioanne de Monteregio em huã oracaõ que fez dos lonnores das Mathematicas, faz mencaõ dos Liuros que Diophante autor Grego deſta arte eſcreueo, que ajnda nam ſam diuulgados.

Figura 5.1. Fragment de la carta de Núñez a l'infante Don Henrique.

Considera Núñez, ja en el capítol 1r de la primera part principal, que la finalitat de l'àlgebra és posar de manifest la quantitat desconeguda i el mitjà que s'utilitza és la igualtat. Al capítol 1r de la tercera part principal, l'autor explica com s'ha de fer la *igualació*. Diu que en aquesta art d'àlgebra, fer *igualació* vol dir transformar una igualtat fins a obtenir alguna de les *conjugacions* que l'autor declara al principi de la seva obra. Núñez utilitza el terme *conjugació* per referir-se al que actualment anomenem equació. És l'únic dels autors estudiats que utilitza aquest terme. Aquí Núñez no fa referència al procés des de l'enunciat fins a l'obtenció de la solució, però mostrarem que, com pels altres autors estudiats, tot aquest procés també formarà part de l'àlgebra per l'autor. El que cal remarcar és que en l'obra de Núñez no hi ha referències a l'anàlisi: es fa referència als passos a seguir per a resoldre els problemes corresponents a cada tipus de *conjugacions*, però en canvi, no es reflexiona sobre el sentit de donar nom a alguna cosa que encara no existeix i que, com ja hem comentat en diverses ocasions, és una de les claus del procés d'algebrització.

Tot i que Núñez lloï l'àlgebra en la carta que dedica a l'infante Don Henrique, algunes vegades fa afirmacions que no semblen donar suport a aquesta idea. En una bona part dels problemes que resol, Núñez ho fa de dues maneres i sovint posa en segon lloc la que creu millor o més senzilla. En alguns problemes, aquesta segona manera és l'algebraica. Hi ha expressions com: "Y con este fundamento queriendo obrar por Algebra, que siempre tengo por mejor, porque entendemos lo que obramos, sera la obra mas facil que la primera"[358], però no és així en tots els casos. Hem analitzat els problemes que Núñez resol de dues maneres: amb àlgebra i sense àlgebra segons ell mateix manifesta, per tal d'entendre què és exactament l'àlgebra per Núñez. N'hem triat 3 d'aquests, per tal d'exemplificar el tipus de resolucions que fa Núñez: el 41 i el 72 del capítol: *De la Practica de las Reglas de Algebra en los casos de Arithmetica,* i el 45 del capítol: *De la practica de Algebra en los casos o exemples de Geometria, y primeramente de los quadrados.*

L'autor resol primer el problema 41[359] per àlgebra, segons ell mateix manifesta i després el resol aplicant la teoria euclidiana de proporcions i utilitzant al final el mètode de falsa posició. L'enunciat del problema és el següent: Tenim tres nombres que el 1r i el 2n amb la meitat del 3r fan 100. I el 2n i el 3r amb 1/3 del primer fan 100 i el 1r i el 3r amb 1/4 del 2n fan 100 i volem saber quin és cadascun d'aquests nombres.

---

[358] Núñez, 1567, 212^{v}.
[359] *Ibid.*, 162^{v}.

La manera més senzilla de resoldre actualment aquest problema és a partir del plantejament del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{2}z = 100 \\ \dfrac{1}{3}x + y + z = 100 \\ x + \dfrac{1}{4}y + z = 100 \end{cases}$$

El procediment que utilitza Núñez, en llenguatge actual, i partint del sistema que hem plantejat correspon a transformar les dues primeres equacions del sistema, en les següents:

$$\begin{cases} x + y = 100 - \dfrac{1}{2}z \\ \dfrac{1}{3}x + y = 100 - z \end{cases}$$

Fa aleshores el que correspondria a restar els primers membres i els segons membres de les dues equacions del sistema:

$$x + y - \left(\frac{1}{3}x + y\right) = 100 - \frac{1}{2}z - (100 - z)$$

I obté: $\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}z$ que equival a $\frac{1}{4}z = \frac{1}{3}x$ i, per tant, $x = \frac{3}{4}z$. Ja té doncs el primer nombre en funció del tercer (a qui Núñez ha anomenat *co.*), que és la incògnita que fa de paràmetre.

L'autor ho expressa:

Pornemos el tercero numero ser 1 co y seran luego el primero y segundo con la mitad de 1 co. yguales a 100. por lo qual sacando de 100. esa mitad de 1co. lo que queda, que es $100\widetilde{m}\frac{1}{2}co.$ *sera lo que valen primero y segundo juntos. Y porque el segundo y tercero con* $\frac{1}{3}$*. del primero hazen 100. sacaremos destos 100. el tercero que es 1 co. y lo que queda, que es* $100\,\widetilde{m}1co.$ *sera lo que valen el segundo y la tercia parte del primero. Tenemos luego que el segundo con todo el primero valen* $100\widetilde{m}\frac{1}{2}co.$ *pero el mismo segundo con la sola tercia parte del primero valen* $100\,\widetilde{m}1co.$ *Y porque segundo y primero juntos exceden al segundo, y* $\frac{1}{3}$ *del primero juntos en* $\frac{2}{3}$ *del primero, sacando luego de* $100\widetilde{m}\frac{1}{2}co.$*valor del primero y segundo,* $100\,\widetilde{m}1co.$ *valor del segundo con* $\frac{1}{3}$ *del primero, lo que queda* *que es p̃ $\frac{1}{2}$ co. será el valor de los $\frac{2}{3}$ del primero, y sera por tanto la mitad de media cosa, que es $\frac{1}{4}$ co. el valor de un tercio del primero, y sera luego todo el primero $\frac{3}{4}$ co*[360].

Una vegada expressat el primer nombre en funció del tercer, expressarà a continuació la quantitat del segon en funció de la del tercer. Per fer-ho, té en ment l'expressió que hem escrit com a primera equació i expressa totes les incògnites en funció de la tercera, les substitueix a l'expressió que hem col·locat a la tercera equació, per trobar el valor de z (*co.*) que resulta ser $52\frac{4}{23}$ i a partir de les relacions entre les incògnites, troba el valor del primer nombre, $39\frac{3}{23}$ i el del segon, $34\frac{18}{23}$.

Per tant, aquesta resolució per àlgebra ens mostra, que com pels altres autors que hem estudiat, per Núñez l'àlgebra és tot el procés que porta del plantejament del problema fins a la solució i no solament la resolució de l'equació que s'obtingui com a resultat del plantejament del problema, com considerava Pacioli.

Quan ja té el problema solucionat, diu que el resoldrà d'una manera més fàcil i sense àlgebra. Per resoldre'l d'aquesta segona manera, fa referència al que en el sistema que hem plantejat són la 2a i 3a equacions. Explicarem també el seu raonament a partir d'aquest sistema per tal que sigui més clar des d'un punt de vista actual: al primer membre de la segona equació li falten $\frac{2}{3}x$ per arribar a la suma dels tres nombres i la tercera li falten $\frac{3}{4}y$ per a obtenir la mateixa quantitat. Com que les expressions dels primers membres d'aquestes equacions valen el mateix, aleshores ha de ser $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y$[361]. Per tant: $\frac{y}{x} = \frac{8}{9}$. A continuació Núñez fa un raonament semblant centrant-se en les igualtats que hem escrit com a 1a i 2a equacions del sistema i obté $\frac{3}{4} = \frac{x}{z}$. Aleshores fa una regla de tres dient que si quan el primer és 3 el tercer és 4, quan el primer és 9, el tercer haurà de ser 12. Les dues relacions que l'autor ha trobat entre les incògnites, no permeten determinar-ne els valors

---

360 Núñez, 1567, 162^v.

361 Porque el primero da 1/3 al segundo y tercero, sacaremos 1/3 del todo, y quedaran 2/3, y porque el segundo da ¼, quedaran ¾ (Núñez, 1567, 163^r).

Aleshores suposa Núñez que la x és 9 i obté els nombres 9, 8 i 12 pel primer, segon i tercer, respectivament. Aleshores suma el primer amb el segon i amb la meitat del tercer (primera equació del sistema que hem plantejat) i obté el resultat 23, el mateix que obté fent les operacions corresponents a les altres dues equacions i fa una altra regla de tres dient que si un resultat 23 correspon a un primer nombre igual a 9, un resultat 100 correspondrà a un nombre igual a $39\frac{3}{23}$ i amb el mateix raonament obté els altres dos nombres: $34\frac{18}{23}$ i $52\frac{4}{23}$.

Totes dues maneres de resoldre el problema es basen en un raonament força elaborat. A la primera l'autor posa de manifest les incògnites i a la segona no les hi posa i es basa en un raonament proporcional. Núñez no fa èmfasi com els altres autors estudiats en què les incògnites estan en proporció contínua però, en canvi, domina la teoria euclidiana de proporcions que utilitza profusament. La importància per Núñez d'aquesta teoria queda demostrada en els 14 capítols que hi dedica. El fet que l'autor digui que la manera de resoldre el problema sense àlgebra és més fàcil, no sembla donar suport, com ja hem apuntat, a la importància que l'autor dóna en realitat a l'àlgebra i que expressa al principi de la seva obra.

Analitzarem a continuació el problema 72[362] que Núñez resol també amb àlgebra i sense, com el mateix autor manifesta. En aquest cas, Núñez no es limita a utilitzar el concepte euclidià de proporció, sinó que n'aplica alguna propietat. Es tracta de dividir el número 10 en dues parts de manera que el quadrat de la més gran sigui el triple del quadrat de la més petita. Núñez planteja l'equació que actualment escriuríem: $x^2 = 300 + 3x^2 - 60x$[363], que transforma en la forma estàndard: $30x = 150 + x^2$ i obté pel terme més gran el resultat $15 - \sqrt{75}$ i pel més petit: $\sqrt{75} - 5$. Seguidament diu: "obrando sin Algebra viene lo mismo". Amb aquesta expressió manifesta que no calia l'àlgebra per a resoldre aquest problema que resol també aplicant la teoria euclidiana de proporcions. L'autor explica que, com que el quadrat

[362] Núñez, 1567, 181^r.

[363] Núñez considera x la quantitat més gran i, per tant, 10-x serà la petita. Aleshores $x^2 = 3(10-x)^2 \Rightarrow x^2 = 3(100 + x^2 - 20x) \Rightarrow x^2 = 300 + 3x^2 - 60x$.

de la part més gran és el triple del quadrat de la més petita, la proporció de quadrats és com de 3 a 1 i aleshores la proporció de les arrels serà com $\sqrt{3}$ a 1, ja que 1 és el mateix que $\sqrt{1}$. A partir d'aquesta proporció, que podríem escriure: $\frac{part\ major}{part\ menor} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, obté la proporció[364]: $\frac{\sqrt{3}+1}{1} = \frac{10\ (part\ major + part\ menor)}{part\ menor}$. Aleshores diu l'autor que per regla de 3 obté que la part menor és $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$, i racionalitza[365], resultant: $\frac{\sqrt{300}-10}{2} = \sqrt{75} - 5$, essent la major: $10 - (\sqrt{75} - 5) = 15 - \sqrt{75}$. Amb aquests dos problemes, mostrem la importància que atorga Núñez a la teoria euclidiana de les proporcions, que troba més senzilla que l'àlgebra. L'alternativa a l'àlgebra, doncs, és per Núñez, tant en aquest problema com a l'anterior, és la teoria euclidiana de les proporcions.

Ens referirem a un tercer problema per tal de mostrar com l'autor aplica l'àlgebra a la resolució de problemes geomètrics. És el problema 45 del capítol 7è de la tercera part principal, *De la practica de Algebra en los casos o exemplos de Geometria, y primeramente de los quadrados*. Es tracta de trobar els costats d'un triangle, la seva àrea, i l'altura sobre un dels costats, si es coneixen les dues parts en què l'altura divideix la base, i la suma dels altres dos costats[366]. Núñez resol el problema per àlgebra aplicant el teorema de Pitàgores als dos triangles rectangles en què el triangle queda dividit per l'altura i aïllant el quadrat de l'altura en els dos casos. Igualant els resultats, obté l'equació $54x = 756$, conjugació simple amb solució $x = 14$. Una vegada resolt el problema, Núñez diu: "por otro modo podremos sin Algebra conocer quanto sea cada uno de los lados" i utilitza un procediment del qual, segons l'autor manifesta, se'n pot trobar la demostració en la proposició 14 del segon llibre dels triangles[367] de Juan de Monteregio. Aquest segon procediment és més senzill que el primer i l'autor justifica la seva utilització de l'àlgebra en la majoria de casos perquè "este

---

364 Utilitza la propietat euclidiana de les proporcions: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
365 Núñez ho expressa: *multiplicando primerarmente assi los 10 como R3.p1. por R.3.m.1.*Núñez. 1567, 181v.
366 Núñez, 1567, 269r.
367 Müller, Johann. *De Triangulis Omnimodis*, traduïda per Barnabas Hughes (1967). University of Wisconsin Press. Madison.

tratado es hecho para que en el se practiquen las Reglas de Algebra en los casos de Geometria[368]"

Núñez segueix remarcant la importància de l'àlgebra, com a mètode. En l'explicació que fa referència a aquest problema 45, acaba de quedar clar que l'àlgebra no és per Núñez només la resolució de l'equació que finalitza el problema, sinó tot el procediment. Segons l'autor, quan s'utilitza l'àlgebra, s'entén allò que s'està fent, però si s'utilitzen altres regles, no s'entén allò que s'està fent perquè cada cas és diferent i en cada cas s'han d'utilitzar proposicions diferents d'Euclides[369]. Amb les regles de l'àlgebra per resoldre els casos de geometria, només fa falta el teorema de Pitàgores. Núñez ho expressa així:

> *... Y tambien porque quien obra por Algebra va entendiendo la razon de la obra que haze, hasta la ygualacion ser acabada. Y siendo hecha, queda en alguna de las sobredichas conjugaciones, las quales tienen sus Reglas. De suerte, que quien obra por Algebra, va haziendo discursos demonstrativos. Pero el que obra por otras Reglas, como es la Regla por la qual resolvemos este caso 45, sacada del dicho libro de Juan de Monteregio, no entiende luego la razon de la obra que va haziendo, y para poner la razon, la qual es differente en differentes casos, seria necessario usar de muchas y varias proposiciones de Euclides. Y esto se escusa con las reglas de Algebra, porque por ellas demonstramos todos los casos, sin haver neccessidad de otras proposiciones de Euclides: porque nos basta para los casos de Geometria, la proposicion 47 del primero de Euclides, que es el invento Pithagorico, con algunos faciles documentos*[370].

Una mica més endavant, l'autor fa una afirmació que mostra la rellevància que té per ell l'àlgebra:

Quien sabe por Algebra, sabe cientificamente[371].

Després d'analitzar aquests 3 problemes de l'obra de Núñez en els quals fa referència a l'àlgebra, podem concloure que per Núñez, l'àlgebra és un mètode que permet resoldre

---

368 Núñez, 1564, 269ᵛ-270ʳ.
369 No fa referència als *Elements,* però se sobreentén.
370 Núñez, 1567, 269ᵛ-270ʳ.
371 Núñez, 1567, 270ᵛ.

problemes aritmètics i geomètrics i que, com pels altres autors que hem estudiat, consisteix en tot el procés de resolució d'un problema, des del plantejament fins a l'obtenció de la solució. És un mètode que permet entendre el que s'està fent, a diferència d'altres mètodes que consisteixen en una seqüència d'instruccions que s'han de seguir, sense comprendre bé el procés.

Tal com ell mateix manifesta, per Núñez els principis de l'àlgebra estan basats en els *Elements* d'Euclides i troba admirable que algunes qüestions geomètriques no es puguin resoldre per mitjans geomètrics i s'hagi de recórrer a l'àlgebra, estant aquesta basada en la geometria. Es refereix concretament al problema 12 de l'obra *De Triangulis Omnimodis* de Regiomontanus, on l'autor resol tots els problemes sobre triangles geomètricament, excepte els 12 i el 23 pels quals no va ser capaç de trobar una construcció geomètrica de la solució, sinó que va haver de calcular els costats i els angles per determinats valors numèrics "per arte rei & census". Aquest problema 12 de Regiomontanus, el resol també Núñez i el comentarem en l'apartat dedicat als símbols per tal de mostrar l'extensió de les operacions a diferents objectes de l'àlgebra.

5.3.2. Els símbols

A diferència dels altres autors, Núñez considera que són tres les principals quantitats que s'utilitzaran en la igualtat: *Numero, Cosa, Censo.* Tot i que siguin les incògnites bàsiques per Núñez, a la segona part principal de la seva obra, en declara més.

> *Numero en esta Arte se dize qualquiera quantidad, quando la entendemos compuesta de unidades, o sea numero entero, o sea quebrado, o sea Raiz, aun q sea sorda*[372].

Com veurem més endavant, hi ha una contradicció en l'obra de Núñez pel que fa al concepte de nombre, que com ja hem vist en els altres capítols, en aquesta època no és clara. Aquí l'autor considera que una quantitat irracional (raíz sorda), és un nombre però en una

[372] Núñez, 1567, 1v.

altra ocasió, Núñez no atorga a les quantitats irracionals, la categoria de nombres. De fet, l'àlgebra va anar creant nous objectes, que van haver de trobar el seu lloc en la disciplina que emergia, de manera que si un objecte aritmètic s'havia de tractar com a objecte algebraic, a vegades calia redefinir la seva naturalesa. Algunes contradiccions que podem trobar en les obres d'aquesta època responen a la dificultat d'encaix de l'aritmètica i l'àlgebra.

A la segona part principal, Núñez declara els símbols que utilitzarà, que, com ja hem dit, anomena *dignidades.*

La primera és la *cosa,* que té la unitat per *denominació*; la segona, *el censo,* que li correspon la denominació 2; la tercera és el *cubo,* amb denominació 3; la quarta el *censo de censo, d*e denominació 4; la cinquena el *relato primo,* de denominació 5; i la sisena el *censo de cubo* o *cubo de censo*, la denominació del qual és 6. Diu Núñez que aquesta és la manera de procedir dels aritmètics, que van creant les altres dignitats, cadascuna d'elles amb la denominació que li dóna l'ordre que li correspon. És important remarcar el fet que Núñez ja associa d'entrada cada incògnita amb el seu grau, al qual s'hi refereix amb el terme "denominació".

Vegem com les escriu en el cas que la *cosa* valgui 2 i com Núñez també identifica les incògnites amb els seus graus:

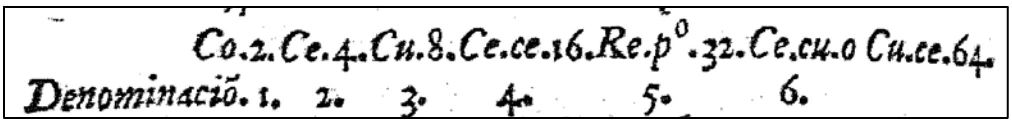

Co.2.Ce.4.Cu.8.Ce.ce.16.Re.p°.32.Ce.cu.o Cu.ce.64.
Denominació. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Figura 5.2. Símbols per les conjugacions a l'obra de Núñez.

Afegeix l'autor que les altres *dignidades* es poden anar formant de la mateixa manera i n'hi haurà prou amb anomenar-les per les seves *denominacions*.

Utilitza el símbol $\tilde{p}$ per indicar "més" i el símbol $\tilde{m}$ per indicar "menys". Per expressar la igualtat escriu la paraula "ygual" sense abreviar i, a diferència dels altres autors que hem estudiat, no acompanya de cap símbol el terme independent.

En el capítol 2 d'aquesta segona part principal, *Sumar los enteros,* Núñez explica la suma del que nosaltres en diríem polinomis i remarca que "aunque no se explique esta palabra mas, como no se declarare que es menos, luego se entiende que es mas", és a dir que els termes que no van precedits de cap signe, es considera que tenen signe "més", com també ho consideren els altres autors que hem estudiat. Vegem-ne un exemple (figura 5.3):

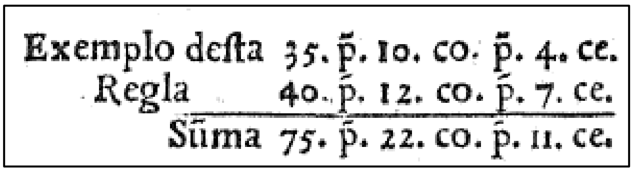

Exemplo desta 35. p̃. 10. co. p̃. 4. ce.
Regla 40. p̃. 12. co. p̃. 7. ce.
Sũma 75. p̃. 22. co. p̃. 11. ce.

Figura 5.3. Suma d'expressions polinòmiques.[373]

Analitzarem a continuació algunes qüestions relatives a la naturalesa dels nombres a partir de la definició de Núñez d'arrel quadrada, i també del significat de les arrels quan actuen com a coeficients. Tot i que les arrels no les considerem símbols especials, veurem com pot canviar el seu significat i d'alguna manera es converteixen en "símbols" diferents[374].

El primer capítol de la segona subdivisió de la segona part principal, tracta dels tipus d'arrels[375]. Núñez defineix arrel quadrada com un nombre que multiplicat per ell mateix, genera un altre nombre, que per aquest motiu s'anomena quadrat i afegeix que com que tot nombre es pot multiplicar per ell mateix, tot nombre pot ésser arrel quadrada d'un altre. En canvi, continua, el recíproc no és cert i posa exemples de nombres que no es poden obtenir a partir d'un altre nombre elevat al quadrat, com són el 2, el 3, el 5, el 6, etc[376].

---

373 Núñez, 1567, 25r.

374 Més informació sobre el significat dels "coeficients" en aquesta època a Oaks, 2017, *op. cit.*

375 Sobre les quantitats irracionals a l'Àlgebra de Núñes, vegeu: Romero Vallhonesta, Fàtima, 2010. "Les quantitats irracionals a l'Àlgebra de Pedro Núñez". *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **11,** 53-77. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca". ETSEIB.

376 Núñez, 1567, 43r.

L'autor posa l'exemple del nombre 6 que no té arrel quadrada, però es pot construir una línia de 6 peus, que és contínua, i assignar-li una part de tal manera que sobre ella es construeixi una superfície de 6 peus quadrats. A aquesta part se l'anomenarà "costat quadrat de 6"[377] no arrel quadrada. I aquesta tal línia serà mitjana proporcional entre la línia sencera de 6 peus i la línia d'1 peu[378].

En llenguatge actual s'escriuria:

$$\frac{6}{cc} = \frac{cc}{1}$$

Per justificar aquesta proporció, l'autor remet a la proposició (VI,9) dels Elements d'Euclides de la versió de Campanus379 i a la proposició (VI,13) de la versió de Zamberto. Aquesta precisió sobre les versions mostra que per Núñez els Elements d'Euclides no són només una referència que legitima el seu discurs, sinó que són una obra que ha estudiat a fons i en la qual, tal com diu el matreix autor, fonamenta la seva àlgebra.

Segons Núñez, els aritmètics anomenen impròpiament arrel sorda de 6 al que ell anomena "costat quadrat de 6" i opina que el motiu d'aquest nom és que aquesta línia es pot "veure" però no se'n pot dir el nom i, per tant, no es pot "sentir" i d'aquí el nom de *sorda.* De fet, ell parla també d'arrels *sordes* a la primera pàgina de la seva obra.

Quan Núñez diu que el nombre 6 no té arrel quadrada, ho justifica dient que cap nombre multiplicat per ell mateix ni amb fracció, ni sense, farà exactament 6. Està considerant, per tant, que l'arrel de 6 no és un nombre. El fet de considerar que els que ara anomenen "irracionals quadràtics" no són nombres, es confirma amb el que diu més endavant sobre les arrels:

[377] L'autor remarca que a aquest "costat quadrat" se l'anomena impròpiament arrel.

[378] Núñez, 1567, 44v.

[379] Campanus de Novara (1220-1296) va ser un matemàtic i astrònom, conegut principalment per una edició dels *Elements* d'Euclides, que es va fer molt popular per la seva claredat expositiva. Sobre l'edició de Campanus, vegeu: Busard, Hubertus, L, 2005. *Campanus of Novara and Euclid's Elements.* Franz Steiner. Verlag. Stuttgart.

... Y toda raiz quadrada ora sea numero, ora sea raiz sorda, se dize raiz segunda...[380]

Hi hauria, doncs, una consideració diferent del que Núñez entén per nombre quan el defineix al principi de la seva àlgebra i el que considera quan tracta les quantitats irracionals, que és una mostra més de les ambigüitats en la concepció de nombre que hi havia a l'època.

Els coeficients no tenen a la majoria de les obres d'aquesta època el significat que tenen actualment[381]. Aquesta qüestió es complica en el cas de les arrels, la naturalesa de les quals no és clara. Pels autors d'aquesta època no té sentit una expressió com $\sqrt{2}x$, que escriuen de la forma $\sqrt{2x^2}$, ja que en el primer cas, el coeficient de la x seria un número irracional, $\sqrt{2}$, mentre que en el segon cas el coeficient de x^2, 2, és racional. Núñez, en el 1r capítol de la 3a part principal especifica com treballar les *conjugacions* quan hi ha fraccions i arrels, i en un exemple considera equivalents les expressions $\sqrt{8x^2}$ i $x \cdot \sqrt{8}$, per tal que l'equació s'ajusti a la 2a conjugació de les compostes. El que fa l'autor és escriure que l'equació que en notació actual s'escriuria: $1x^2 = 2 + \sqrt{8x^2}$, de la forma, també en notació actual: $1x^2 = 2 + x\sqrt{8}$ per tal que encaixi amb la 2a *conjugació* de les compostes, que té per solució $x = 2 + \sqrt{2}$. Núñez ho expressa:

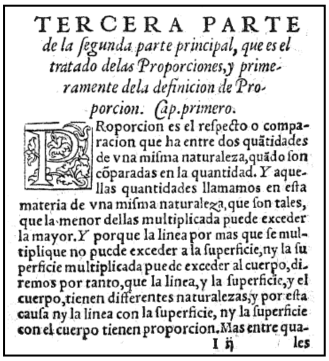
Exemplo, si la ygualacion viniere a esto, que 1.ce. es ygual a 2.p.R.8.ce. sera acabada la ygualacion. Porque tanto vale como dezir, que 1.ce. es ygual a 2.p.co.R.8 que es la segunda conjugacion de las compuestas, y el valor de la cosa serà 2.p.R.2[382].

L'autor no fa cap altra comentari referent a la transformació de l'expressió, apart de l'equivalència entre les dues expressions, que li permet classificar l'equació. Probablement l'autor no va ser conscient d'aquest canvi conceptual. De fet, els coeficients, com ja hem comentat al capítol dedicat a Aurel quan ens referíem als coeficients negatius, no tenien el

---

[380] Núñez, 1567, 44[v].
[381] Oaks, 2017, *op. cit.*
[382] Núñez, 1567, 141[r]

sentin que tenen actualment sinó que eren nombres que comptaven les incògnites i que aquest podia ser també el motiu pel qual mantenien el número 1 on actualment no s'hi posa coeficient. Núñez continua mantenint l'1 amb les incògnites, de manera que aquest canvi en la notació, no va suposar un canvi conceptual en la seva obra. Del fet que les regles per determinats càlculs es van adaptant a nous "objectes", ja n'hem vist alguns exemples en els capítols anteriors i a continuació en veurem un, pel cas del càlcul de mitjans proporcionals. A partir del càlcul de dos mitjans proporcionals aplicant la teoria de proporcions dels *Elements*, veurem com Núñez, va ampliant la regla per trobar mitjans proporcionals a diferents tipus de nombres i expressions, pels quals, en principi, aquesta norma no havia estat pensada. Ja ens hem referit a la importància de la teoria euclidiana de proporcions a l'obra de Núñez, com a fonament per a l'àlgebra com ho demostren els 15 capítols que hi dedica i les múltiples referències als *Elements*. [383]


TERCERA PARTE

de la ſegunda parte principal, que es el tratado delas Proporciones, y primeramente dela definicion de Proporcion. Cap. primero.

PRoporcion es el reſpecto o comparacion que ha entre dos quãtidades de vna miſma naturaleza, quãdo ſon cõparadas en la quantidad. *Y* aquellas quantidades llamamos en eſta materia de vna miſma naturaleza, que ſon tales, que la menor dellas multiplicada puede exceder la mayor. *Y* porque la linea por mas que ſe multiplique no puede exceder a la ſuperficie, ny la ſuperficie multiplicada puede exceder al cuerpo, diremos por tanto, que la linea, y la ſuperficie, y el cuerpo, tienen differentes naturalezas, y por eſta cauſa ny la linea con la ſuperficie, ny la ſuperficie con el cuerpo tienen proporcion. Mas entre qua-

I ij les

Figura 5.4. On comença la teoría de proporcions a l'àlgebra de Núñez.

Tornant a la naturalesa de diferents objectes matemàtics, la major part del 1r capítol de la teoria de proporcions està dedicada a disquisicions sobre l'angle de contingència o de contacte[384], que és l'angle que forma, per exemple, una circumferència amb una tangent. L'autor reflexiona sobre la naturalesa i el valor d'aquest angle: és o no un nombre? Té la mateixa naturalesa que els angles rectilinis? Es poden comparar[385]? Núñez opina que l'angle

---

[383] En el tractat de les proporcions de Núñez, de fet, hi ha referències als llibres II, III, V, VI, VII,VIII, X dels *Elements* i se'n citen algunes proposicions concretes i també alguna definició. Les referències són concretament a les proposicions i definicions següents. (V,8), (X,1), (III,16), (VII,20), (VI,17), (V, 10 def.), (V,15), (VI, 1 def.), (VIII,7), (VIII,8), (X,15), (X,2), (X,16), (X,13), (II,5), (II,6).

[384] Loget, François, 2010. "La disgression sur l'angle de contact dans le Libro de Algebra de Pedro Nuñez" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, **9**, 79-100, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca.

[385] La naturalesa d'aquest angle va ser objecte d'una disputa entre Clavius (1538-1612) i Peletier (1517-1582) i més endavant, Wallis (1616-1703) va adoptar el punt de vista de Peletier, la qual qual cosa mostra que tant el concepte de nombre, com la naturalesa d'alguns objectes matemàtics no va ser un a qüestió senzilla de resoldre, ja que les disquisicions sobre la seva naturalesa es van perllongar força en el temps. A partir de la posició presa amb relació a aquesta qüestió per un matemàtic poc conegut, Henry de Monantheuil, Maierù hi reflexiona en un interessant

de contingència, encara que sigui quantitat, no tindrà proporció amb l'angle del semicercle ni amb l'angle rectilini. Per més que els multipliquem, un no pot excedir l'altre[386].

L'autor explica, en el capítol 14è del que ell anomena "tractat de les proporcions" com trobar dos mitjans proporcionals entre 2 i 5, basant-se en el llibre VIII dels *Elements* d'Euclides. Als *Elements* s'explica com trobar dos mitjans proporcionals entre dos nombres cúbics i Núñez el que fa és elevar els dos nombres al cub, aplicar la regla de Euclides, i fer l'arrel cúbica de cadascun dels termes de la seqüència obtinguda. Obté la seqüència: 2, $\sqrt[3]{20}, \sqrt[3]{50}, 5$. Aleshores Núñez analitza el que ha fet i veu que trobar el primer terme és equivalent a multiplicar el 2 per si mateix i després per 5 i a fer l'arrel cúbica del resultat. Per trobar el segon, el que ha fet equival a multiplicar el 5 per si mateix, després per 2 i fer també l'arrel cúbica del resultat[387].

Núñez diu aleshores:

Y tambien servira esta Regla en las quantidades que no son numeros[388].

Posa l'exemple de trobar dos mitjans proporcionals entre R.2 i R.3[389]. En aquest cas diu que no es pot basar en el llibre VIII d'Euclides perquè R.2 i R.3 multiplicades cúbicament no donen lloc a nombres. De tota manera, l'autor utilitza el mateix procediment que ha utilitzat

---

article: Maierù, L, 1992. "Filologia, epistemologia e contenuti matematici in Henry de Monantheuil circa l'angolo di contatto" a *La Matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matemàtica tra '500 e '600,* 105-130. Edizioni Porziuncola. Perugia.

386 Núñez, 1567, 66v.

387 Aquest mètode per a trobar els dos mitjans proporcionals entre dos nombres, es basa en el llibre VIII dels *Elements*, com el mateix Núñez diu a continuació. La proposició 19a del llibre VIII diu: Between two similar solid numbers there fall two mean proportional numbers; and the solid number has to similarnsolid number the ratio triplicate of that which the corresponding side has to the corresponding side. Heath, Thomas L. , 1908. *Euclid. The thirteen books of the Elements*, **2**, 373. Cambridge University Press. London (es tracta d'una edició traduïda del text de Heiberg amb introducció i comentaris de Heath).

388 Núñez, 1567, 106r.

389 Sobre l'extensió de les regles de l'aritmètica a diferents objectes algebraics, vegeu: Labarthe, Marie-Hélène, 2010. "Extension des opérations de l'Arithmétique aux nouveaux objects de l'algèbre: l'argumentation de Pedro Nunes". *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* 11, 19-51. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca". ETSEIB.

en el cas del 2 i el 5, i obté la seqüència: R.2, arrel cúbica de R.12, arrel cúbica de R.18, R.3, és a dir, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{\sqrt{12}}, \sqrt[3]{\sqrt{18}}, \sqrt{3}$.

Núñez fa la comprovació particular per aquest cas: R.cu.R.12 ($\sqrt[3]{\sqrt{12}}$) que és el primer dels mitjans proporcionals, multiplicat per R.cu.R.18 ($\sqrt[3]{\sqrt{18}}$), segon dels mitjans proporcionals, dóna R.cu.R.216 ($\sqrt[3]{\sqrt{216}}$) i R.2 per R.3 dóna R.6, el cub del qual és R.216, de manera que R.6 és R.cu.R.216. Per tant, és igual multiplicar la 2a quantitat per la 3a, que són els dos mitjos, que multiplicar la 1a quantitat per la 4a i comprova també que la proporció és contínua.

L'autor busca a continuació dos mitjans proporcionals entre 3 i 2x. Utilitza el mateix mètode que ha utilitzat en els altres casos, multiplicant 3 per si mateix i per 2x, i obté $\sqrt[3]{18x}$ com a primer dels mitjans proporcionals. Multiplica després 2x per ell mateix i per 3 i obté $\sqrt[3]{12x^2}$ com a segon dels mitjans proporcionals. La seqüència serà: 3, $\sqrt[3]{18x}$, $\sqrt[3]{12x^2}$, 2x. La prova que fa Núñez és que la multiplicació de 3 per 2x, dóna el mateix resultat que $\sqrt[3]{18x}$ multiplicat per $\sqrt[3]{12x^2}$. I serà la primera quantitat, que és 3, a la segona que és $\sqrt[3]{18x}$, com la tercera que és $\sqrt[3]{12x^2}$, a la quarta que és $2x$.

I que la proporció és contínua és la prova perquè la 1a quantitat multiplicada per la 3a, que és el segon mitjà proporcional, dóna $\sqrt[3]{324x^2}$, i el mateix resulta de multiplicar la 2a, que és el primer dels mitjans proporcionals, per ella mateixa, i serà, per tant, la 1a a la 2a, com la 2a a la 3a, la qual cosa mostra que la proporció és contínua.

Vegem ara com Núñez resol el problema 46 de Regiomontanus, que va dir que no podria resoldre per geometria, i que portarà a Núñez a establir proporcions entre equacions[390]:

> *Si la perpendicular fuese conocida y la base también conocida, y la proporcion que entre si tienen los dos lados de este triangulo fuese sabida, seran los dos lados conocidos y las partes de la base donde cae la perpendicular*"[391].

Núñez pren *bc* = 20; *ad*= 5; $\frac{ab}{ac} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{1}$, i especifica que ja se sap que tota arrel és mitjana proporcional entre el nombre i la unitat. Núñez explica que com que volem conèixer els costats prendrem *dc* com "1*co*." (cosa), llavors *bd* serà "20 m 1*co*" i el quadrat de *dc* serà "1 *ce*." (censo). En notació actual: $dc = x$; $bd = 20\text{-}x$; $(dc)^2 = x^2$, tot seguit aplica el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle *adc*:

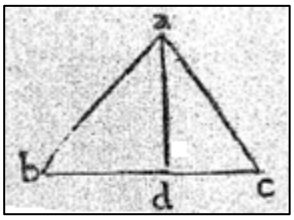


Figura 5.4. Il·lustració pel problema

$$\left.\begin{array}{l} dc^2 = x^2 \\ ad^2 = 25 \end{array}\right\} \quad ac^2 = x^2 + 25$$

Repeteix el mateix procediment en l'altre triangle rectangle *adb* en què l'altura ha dividit l'inicial.

$$\left.\begin{array}{c} bd^2 = x^2 + 400 - 40x \\ ad^2 = 25 \end{array}\right\} \quad ab^2 = x^2 + 425 - 40x$$

[390] Massa Esteve, Mª Rosa, 2010b. "Àlgebra i Geometria al *Libro de Àlgebra en Arithmetica y Geometria* (1567) de Pedro Núñez", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **11,** 101-125. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca". ETSEIB.

[391] Núñez, 1567, 270v-271r.

A continuació Núñez especifica que la proporció és la mateixa si prenem els quadrats i aplica la propietat de quatre quantitats proporcionals:

$$\frac{ab^2}{ac^2} = \frac{5}{1} = \frac{x^2+425-40x}{x^2+25} \Rightarrow x^2 + 10x = 75$$

Núñez, per tant, el que fa és estendre la regla per calcular dos mitjans proporcionals entre dos cubs perfectes a diversos casos: quan els nombres són enters qualssevol, quan els *nombres* són quantitats irracionals, quan es tracta de quantitats desconegudes i arriba a establir proporcions entre expressions algebraiques.

Núñez no sembla ser conscient d'aquesta generalització que fa del mètode per a trobar dos mitjans proporcionals entre dos nombres donats. Més aviat ho fa per una qüestió pràctica tal com hem comentat en el cas que utilitza una arrel com a coeficient per tal de poder classificar una equació. De tota manera, ell comprova que els termes obtinguts en cada cas estiguin en proporció contínua.

5.3.3. *Les equacions o conjugacions*

Núñez comença la seva *Àlgebra*, explicant què pretén l'àlgebra i quines són les principals quantitats amb les quals establirà les igualtats: *Numero*, *Cosa* i *Censo*.

A continuació passa a considerar 6 tipus de conjugacions, 3 de simples i 3 de compostes:

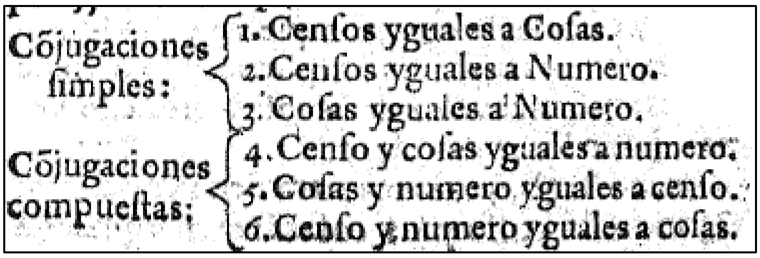

Cõjugaciones ſimples: 1. Cenſos yguales a Coſas. 2. Cenſos yguales a Numero. 3. Coſas yguales a Numero.
Cõjugaciones compueſtas; 4. Cenſo y coſas yguales a numero. 5. Coſas y numero yguales a cenſo. 6. Cenſo y numero yguales a coſas.

Figura 5.5. Tipus de conjugacions.

que en notació actual serien: $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$ per les simples i $x^2+bx = c$; $bx+c = x^2$ i $x^2 + c = bx$ per les compostes.

Aquesta classificació difereix de la dels altres autors analitzats en aquesta tesi i coincideix amb la que va fer al-Khwârizmî en la seva obra *Al-Kitâb al-Mukhtasar fî Hisâb al-Jabr wa al-Muqâbala.*

Núñez enuncia retòricament els algorismes de resolució (ell els anomena "reglas"), un per cadascun dels sis casos (tres regles simples i tres compostes) i resol en cada cas una equació aplicant la regla a un exemple numèric.

La taula següent mostra la forma estàndard de cada tipus d'equació, l'exemple de resolució que proposa Núñez, amb la solució, i la fórmula que obtindríem actualment, si seguíssim les indicacions de l'autor:

Forma estàndard	Exemple	Expressió actual de la fórmula
$ax^2 = bx$	$4x^2 = 20x$ ($x=5$)	$x = \frac{b}{a}$
$ax^2 = c$	$7x^2 = 63$ ($x=3$)	$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$
$bx = c$	$10x = 25$ ($x = 2\frac{1}{2}$)	$x = \frac{c}{b}$
$x^2+bx = c$	$x^2 + 10x = 56$ ($x=4$)	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
$bx+c = x^2$	$6x + 40 = x^2$ ($x=10$)	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$
$x^2 + c = bx$	$x^2 + 24 = 10x$ ($x=6$ i $x=4$)	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 - c} \pm \frac{b}{2}$

A diferència dels altres autors analitzats, Núñez no parla del "número de los censos" (coeficient de la x^2) perquè sempre el considera 1. Si no ho és, divideix per aquest coeficient.

L'autor ho explica en el capítol 5è intitulat "que en las reglas compuestas se deue hazer reducion a un censo[392]", quan ja ha demostrat totes les regles. El que diu, actualment ho expressaríem dient que el coeficient del terme de segon grau ha de ser la unitat i si no ho és, s'ha de dividir per aquest coeficient per tal de poder aplicar la fórmula.

Núñez presenta un exemple per a cada regla amb enunciats força elaborats[393] i a continuació demostra (ell mateix empra la paraula demostració) amb construccions geomètriques les regles de resolució dels tres primers casos (les regles simples) i les dels tres casos següents (les regles compostes), justificant-les amb proposicions dels *Elements* d'Euclides. Tot i que es basa en proposicions dels *Elements*, no segueix el raonament lògico-deductiu que caracteritza aquesta obra, sinó que el que fa en realitat, és construir la solució de les equacions.

Núñez comença les justificacions geomètriques per les regles simples en el capítol 3r titulat "Demostración de las reglas simples"[394]. L'autor ha de treballar amb nombres i amb figures geomètriques (línies, superfícies) i en justifica la relació,

> *"..en esta materia que tratamos, devmos considerar que pues assi es, que por la división del continuo se haze numero, como dize Aristoteles, y numero es un ayuntamiento o collection de unidades, poderemos por tanto imaginar estos numeros y unidades en las lineas, y en las superficies, y en los cuerpos, por su division en partes"[395].*

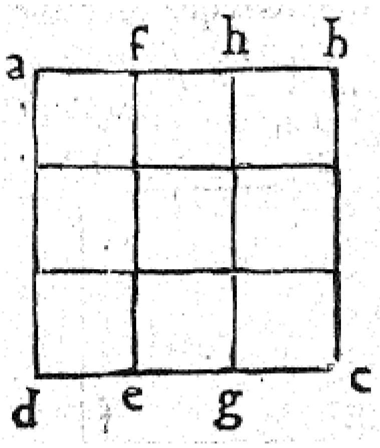
i també especifica que els matemàtics solen dividir les superfícies planes en parts iguals i quadrades, a cadascuna de les quals s'anomena unitat d'acord amb la unitat del costat.

---

392 Núñez, 1567, 18^v.
393 En el capítol 2 titulat "Práctica de estas reglas" (2^v-5^r) fa després sis apartats on practica cadascuna de les regles en un problema aritmètic ("Busquemos dos números…"). Planteja l'equació i la resol aplicant l'algorisme corresponent.
394 Núñez, 1567, 5^r-6^v.
395 *Ibid.*, 5^v.

Podem veure en aquest fragment una referència molt explícita a la geometria que no hi és a les altres obres analitzades. I segueix,

De suerte que teniendo sabido cuantas unidades lineales contienen las dos lineas que comprenden la figura plana rectangular, que son los dos lados que hacen el ángulo recto, luego por una sola multiplicación se alcanza cuanto sea el valor de tal figura. Y conociendo la altura de la figura solida otro si rectangula, por otra multiplicación allende de la primera se comprende su capacidad[396].



I tot seguit procedeix a fer la demostració de la primera regla simple emprant l'exemple numèric: $3x = x^2$. En paraules de Núñez. "3. raizes son yguales a el quadrado a.b.c.d."

Tot i que aquestes demostracions són geomètriques, en veurem aquesta de la primera regla simple[397], ja que il·lustra la voluntat de relacionar l'àlgebra amb la geometria, molt present a l'obra de Núñez.

L'autor considera un quadrat *abcd* i el divideix en tres parts que són els tres rectangles de bases: *de, eg* i *gc* respectivament, i d'altura el costat del quadrat. Núñez els anomena amb les lletres que corresponen a vèrtexs diametralment oposats: *ae, fg* i *hc*. Després divideix cada rectangle en tres parts, traçant paral·leles[398] al costat *ab,* de manera que el quadrat inicial queda dividit en 9 parts. Tenim, doncs, el quadrat inicial dividit en 3 rectangles, cadascun dels quals és 1 *cosa*, que haurà quedat dividida en 3 unitats.

Núñez explica que distingeix el costat del quadrat, que és una línia i l'arrel (*cosa*) del quadrat que és una superfície, l'altura de la qual és el costat del quadrat i té per base la unitat lineal, com es pot veure a la figura.

---

[396] Núñez, 1567, 5ᵛ.
[397] Massa, 2010b, 109-111, *op. cit.*
[398] Núñez parla de "lineas equidistantes", Núñez, 1567, 6ʳ.

Vegem com ho expressa l'autor:

> *Exemplo, si. 3. raizes son yguales a el quadrado a.b.c.d. es necessario que cada vna de las raizes valga. 3. por q̃. 3. raizes tres vezes hazen a su quadrado que es. 9. conuiene a saber .3. vnidades en cada vna raiz, y q̃da en el quadrado figurada su raiz en figura rectangula. La qual es tan alta como el lado del quadrado, y tiene por base la vnidad lineal como en esta figura parece*[399].

Núñez remarca al final del capítol que l'arrel del quadrat és superfície, i en canvi, el costat del quadrat és línia, i que si l'arrel fos línia, seria impossible que les *cosas* fossin iguals als *censos*. La idea d' homogeneïtat en una equació (igualtat), que més tard trobarem també a Viète, és present en l'obra de Núñez: no es poden igualar termes de dimensions diferents (línies amb superfícies, per exemple) o sigui que l'arrel s'ha de considerar un rectangle de base 1 i d'altura el valor x de l'arrel. Més endavant, en la tercera part de l'obra, Núñez es referirà novament a aquesta idea de diferenciar el costat, com a línia, i l'arrel, com a superfície, que esdevé essencial per entendre les seves idees per treballar geomètricament la certesa de les regles algebraiques[400].

En el capítol 6è intitulat "como conosceremos si el caso es necessario o impossible" Núñez dóna avisos per tal de poder identificar els casos que tenen infinites solucions i els que no tenen solució. Posa com exemples d'infinites solucions $10x = 10x$, o $4x^2 = 4x^2$ i com a exemple de cas sense solució $10x = 12x$. Cal destacar el cas d'infinites solucions, ja que els altres autors estudiats, i la majoria d'autors d'aquesta època, consideraven que tenia només

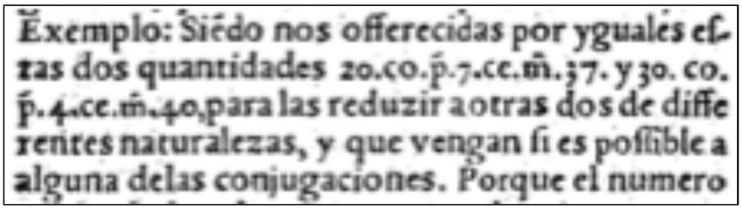
---

[399] Núñez, 1567, 5^{v}- 6^{r}.

[400] Núñez explica "*Que si el lado tiene 3 braças, la raíz tiene 3 braças. Pero las unas braças son líneas, y las otras son superficies, como habemos dicho en la demostración de las Reglas*" (Núñez, 1567, 232^{r}). També més endavant Núñez presenta un matís sobre aquestes superfícies aclarint que si les unitats que representen l'arrel són més petites que la unitat, l'arrel serà una superfície més petita que la del quadrat. I tot seguit posa l'exemple [$x= 2\ x^2$] prenent com arrel ("cosa") ½ i com a quadrat ("censo") ¼ . Núñez ho expressa: "*Que quando en el tercero Capitulo diximos, que la cosa es raiz del censo, y que es una superficie rectangular menor que el censo, esso se entendia del censo de numero, y no del censo de puro quebrado, porque assi aremos dado los exemplos. Pero si trataremos de puro quebrado, hallaremos que la cosa es mayor que el censo, y obrando por la regla, que responde a la primera conjugación simple, esto mismo hallaremos*" (Núñez, 1567, 23^{r}).

la solució x=1. De fet, un dels autors de referència d'aquesta època que ho considerava, és Pacioli, l'obra del qual Núñez coneix bé, però està clar que, en aquest cas, no segueix.

L'autor comença la tercera part principal de la seva obra, explicant com s'ha de fer la *igualació,* i posa alguns exemples de com transformar una equació per tal d'obtenir la seva forma estàndard. Posa l'exemple de la transformació de la igualtat entre les quantitats: $20x + 7x^2 - 37$ i $30x + 4x^2 - 40$ per tal que, si és possible encaixi amb alguna de les *conjugacions:*



Exemplo: Siẽdo nos offerecidas por yguales es-
tas dos quantidades 20.co.p̃.7.ce.m̃.37. y 30. co.
p̃.4.ce.m̃.40,para las reduzir aotras dos de diffe
rentes naturalezas, y que vengan si es possible a
alguna delas conjugaciones. Porque el numero

Figura 5.6. Exemple on s'explica com fer la igualació.

Després de fer diferents passos, agrupant els termes semblants a la mateixa banda i de tal manera que tots els termes siguin positius, obté la igualtat: $3x^2 + 3 = 10x$ que és la forma estàndard de la 3a *conjugació* de les compostes. Posa un altre exemple en el qual no cal agrupar termes semblants, sinó només escriure la igualtat de manera que encaixi amb alguna de les formes estàndard. L'equació és $10x - 1x^2 = 26$. Si l'equació s'escriu $10x = 1x^2 + 26$, tenim la forma estàndard de la tercera de les compostes que en aquest cas "és impossible", segons manifesta l'autor. Efectivament l'equació no té solució real ja que el seu discriminant és negatiu. Núñez ho expressa:

> *Porq̃ muchas vezes nos proponen vn impossible, y obrando y ygualando y vsando delas Reglas no se puede comprehender que es impossible hasta el fin de todo el discurso, en el qual se collige vn manifiesto impossible, y entonces inferimos que el caso que se propuso era impossible*[401].

[401] Núñez, 1567, 21ᵛ.

Es refereix també a les equacions de grau superior al segon. Núñez que s'ha de tenir en compte que a les igualacions hi poden haver altres quantitats apart de *numero, cosa* i *censo* i aleshores s'han de reduir a altres de menor *denominació,* i per això hem de restar a les *denominacions*, la de la menor *dignitat.* Posa com a exemple l'equació $2x^3 + 5x^4 = 3x^5$ que redueix a $2 + 5x = 3x^2$ dividint tots els termes per x^3, li aplica la regla de la segona *conjugació* de les compostes i obté la solució x=2. Aquest cas no representa cap novetat respecte de les altres obres que hem estudiat perquè totes elles parlen d'alguna manera de generalitzar els procediments per a resoldre les equacions de segon grau a altres de grau superior quan els termes són igualment distants, és a dir, quan les incògnites guarden la mateixa proporció entre elles. Núñez, però, amplia els casos. Diu que si ens trobem que hi ha *numero* amb les dignitats, aleshores s'ha de fer d'una altra manera, que consisteix en dividir els dos membres de l'equació per un divisor comú. Núñez ho expressa:

> *Y porque si ay numero en la compañia de las dignidades, no se pueden abatir por este modo; buscaremos entonces otro remedio, y sera ver si tienen partidor commun, por el qual entrambas quantidades que queremos igualar puedan ser partidas*[402].

L'autor posa com a exemple l'equació: $1x^3 + 1x^2 = 1x^2 + 7x + 6$. En aquest cas, diu Núñez, no n'hi hauria prou amb treure el *censo* d'ambdós costats perquè quedaria: $1x^3 = 7x + 6$ i, segons manifesta l'autor, no hi ha regla general per a aquesta conjugació. Es busca un partidor comú, que en aquest cas seria x+1, i dividint els dos membres de la igualtat per aquest partidor comú, obtenim una equació que pertany a la segona *conjugació* de les compostes: $1x^2 = 1x + 6$ i que té per solució x=3.

Núñez proposa fer una taula per tal de poder trobar els partidor comú en diferents casos. En aquesta taula hi hauria d'haver els resultats de: (x+1) per (x+1) i per (x+2) i per (x+3) i així successivament. Després s'haurien de posar els resultats de multiplicar (2x+1) per (x+1) i per (x+2) i així fins a 10. Però, segueix Núñez, hi ha conjugacions de dignitats i

[402] Núñez, 1567, 125v.

numero, en les quals, sense aquesta taula, podrem saber quin és el partidor comú i quins seran els quocients. Aquestes són les conjugacions en què *cubo, y numero, son yguales a cosas, o cosas y numero yguales a cubo.* La regla que donarem, diu Núñez, no servirà per a qualsevol *conjugació* d'aquestes, sinó que només servirà quan les *cosas e*xcedeixin el *numero* en la unitat, o el doble de les *cosas* excedeixi al *numero* en el cub de 2, o el triple de les *cosas* excedeixi el *numero* en el cub de 3, o el quàdruple de les c*osas* excedeixi el *numero* en el cub de 4 i així successivament.

En el cas de l'equació anterior, $1x^3 = 7x + 6$, les *cosas* excedeixen al *numero* en una unitat, és a dir, el coeficient de la x és una unitat més gran que el terme independent, i el que s'ha de fer és afegir aquesta unitat a ambdós costats: $1x^3 + 1 = 7x + 7$ (d'aquest manera, el segon membre és múltiple de x+1) i dividir ambdós costats per x+1, obtenint: $1x^2 + 1x + 1 = 7$ que amb la transformació: $1x^2 = 1x + 6$, encaixa amb la segona de les conjugacions compostes, la solució de la qual és x=3. Per tant, en alguns casos s'hauria de mirar la taula que proposa Núñez per si hi ha evidència que els membres de l'equació tenen algun partidor comú i en d'altres casos, si es compleixen determinades condicions, amb una petita transformació de la igualtat, el partidor comú es fa evident.

5.3.4. Problemes

Núñez resol els problemes en els quals s'ha d'utilitzar més d'una incògnita, als capítols 5è i 6è de la tercera part principal de la seva obra. En el capítol 5è, *De la Practica de las Reglas de Algebra en los casos de Arithmetica,* l'autor resol 110 problemes, que es podrien resoldre utilitzant sistemes d'equacions, però Núñez no fa cap referència a la *regla de la quantitat.* El 41 és el primer dels que hem mostrat per tal d'exemplificar una resolució amb àlgebra i sense àlgebra.

En el capítol 6è, *De la regla de la quantitat simple o absoluta*[403], Núñez resol tres problemes relacionats amb la *regla de la quantitat*. Diu l'autor que aquesta regla és diferent de les altres i la utilitzem de dues maneres. Una d'elles és com a substitució de la *regla de la cosa*, per fer la igualació, amb l'ajuda del terme « quantitat » i l'altra és per fer « posició sobre posició ».

Diu l'autor que s'utilitza *la regla de la quantitat* quan « hem fet la posició d'1 *co*. pel primer i per tant, no podem fer també posició pel segon », és a dir, si a la 1a incògnita l'hem anomenat *co.*, hem de donar un altre nom a la segona incògnita.

El primer problema que proposa és del mateix estil que el que hem triat per exemplificar la resolució de Marco Aurel sobre els tres homes que volen comprar un cavall, però sense context i és també el primer problema que resol Cardano en el capítol IX de la seva Ars Magna [404](1545). Cardano parla de la quantitat de diners que tenen tres homes i Núñez no hi posa context.

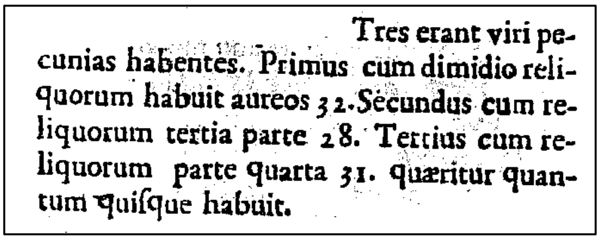

Tres erant viri pecunias habentes. Primus cum dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cum reliquorum tertia parte 28. Tertius cum reliquorum parte quarta 31. quæritur quantum quisque habuit.

Figura 5.7. Problema de l'*Ars Magna* de Cardano

Tenemos tres numeros, que el primero con la mitad de los otros, haze 32 y el segundo on el tercio de los otros dos, haze 28 y el tercero con el quarto de los otros dos, haze 31 u queremos saber quanto es cada uno dellos[405].

Si traduïm aquest enunciat al llenguatge algebraic actual, obtindrem el sistema següent:

[403] Gosselin titula el capítol de la seva *De Arte Magna,* dedicat a la resolución de problemas amb diverses incògnites: "De quantitate Absoluta" (Gosselin, 1577, 80^r), que podría estar inspirat en el terme utilitzat per Núñez. Tot i que en aquest punt concret, Gosselin no cita Núñez, el cita moltes vegades al llarg de la seva obra i, per tant, la coneix bé.

[404] Cardano, Girolamo (1545). *Ars Magna.* Johann Petreius. Nürnberg (traducció a l'anglès de Witmer, R. T. de 1968. M.I.T. Cambridge, reimpresa per Dover, New York el 1993).

[405] Núñez. 1567, 224^v.

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=32 \\ \frac{1}{3}x+y+\frac{1}{3}z=28 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+z=31 \end{cases}$$

Núñez suposa que el primer nombre és 1 *co*. Aleshores la meitat del segon i el tercer serà 32 $\tilde{m}1co.$ i el doble d'aquesta expressió, que és $64\tilde{m}2co.$, seran el segon i el tercder junts i ja que el primer és 1 *co.*, tots tres nombres seran $64\tilde{m}1co$. Aquí Núñez el que fa és treballar amb el que nosaltres hem considerat la primera equació del sistema ($\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=32-x \Rightarrow y+z=64-2x \Rightarrow x+y+z=64-x$) i ha expressat la suma dels tres nombres en funció del primer. Després suposa que el segon és "1 *quantitat*" i, a partir del que ha obtingut i d'un raonament centrat en la egona equació obté el que la *quantitat* en funció de la *cosa* i també el que té el tercer en funció de la *cosa*. El raonament de Núñez és el següent: com que entre tots tres fan $64\tilde{m}1co.$, el primer i el tercer junts faran 64 $\tilde{m}$ 1 $co.\tilde{m}$ 1 $quantitat$. Si fem la tercera part d'aquesta expressió i li ajuntem 1 *quantitat* que és el que val el segon resultarà $21\frac{1}{3}\tilde{m}.\frac{1}{3}co.\tilde{p}.\frac{2}{3}$ de *quantitat* , d'on obté pel valor de 1 *quantitat,* $10\tilde{p}\frac{1}{2}co.$ i pel valor del tercer, $54\tilde{m}\ 2co.\frac{1}{2}$. Ara que ja té expressats els tres nombres en funció del primer, treballa amb la relació que hem escrit com la tercera equació del sistema i obté els valor 12, 16 i 24 pel primer, segon i tercer, respectivament.

Núñez ja havia resolt aquest problema sense utilitzar la " quantitat" en el capítol anterior[406]. Comença igual que ho farà després en el capítol 6è: Núñez suposa que el primer nombre és 1 *co*. Aleshores la meitat del 2ni el 3r serà $32\tilde{m}1co.$ i el doble d'aquesta expressió, que és $64\tilde{m}2co.$, seran el 2n i el 3r junts i a partir d'aquí té en compte la relació que hem escrit com a segona equació del sistema per dir que si traiem de 28 un terç del primer que és $\frac{1}{3}co.$, obtindrem el que valen el segon i un terç del tercer. Traurem aquesta quantitat de $64\tilde{m}2co.$ que valen el 2n i el 3r i el que queda, $36\tilde{m}1co.\frac{2}{3}$, serà el que valen $\frac{2}{3}$ del tercer, que

[406] És el problema 51 del capítol 5è.

ajuntant-la amb la meitat d'aquesta quantitat tindrem el que val el tercer: $54\tilde{m}2co.\frac{1}{2}$. Traient aquesta quantitat de $64\tilde{m}2co.$ que és el que valen el segon i el tercer junts, quedarà $10\tilde{p}\frac{1}{2}\ co.$ A partir d'aquí l'acaba tal i com l'acabarà en el capítol següent.

El segon problema que tracta en aquest capítol és un exemple del que ell anomena segona manera d'usar la quantitat absoluta:

> *Partamos $1co.\tilde{p}.3.$ en tales dos partes, que dando a la primera 4 y sacando de la segunda 5 resulte la primera seis veces mas que la segunda*[407].

El resol suposant que la primera part és 1 *quantitat* i serà, per tant, la segona $1co.\tilde{p}.3\tilde{m}.1$ *quantitat*. A continuació afegeix 4 a la primera part, en treu 5 de la segona i, com que el que resulta de la primera part és 6 vegades el que resulta de la segona, conclou que $6co.\tilde{m}.6\ quantitats\ \tilde{m}.12.$ han de ser igual a $1quantitat\ \tilde{p}.4.$ i d'aquí troba el valor de la *quantitat*, que és la primera part, i també de la segona part.

Seguidament torna a resoldre el problema sense usar la *quantitat*. Diu que si a la primer part n'hi donem 4 i a la segona n'hi traiem 5, es perdrà una unitat de la suma, que passarà a ser $1co.\tilde{p}.2$. Com que, del que resulta de la primera part al que resulta de la segona hi ha tal proporció com de 6 a 1, la proporció entre el total i la segona part serà com 7 és a 1[408] i per la regla de tres podrem conèixer aquesta segona part: "Si 7 nos dan 1 quanto nos daran $1co.\tilde{p}.2$". Diu l'autor que s'ha de multiplicar el segon pel tercer i dividir el resultat per 7 i s'obté $\frac{1}{7}co.\tilde{p}.\frac{2}{7}$ que serà el resultat de la segona part després d'haver-li tret 5 unitats i serà, per tant, la segona part $\frac{1}{7}co.\tilde{p}.5\frac{2}{7}$. Restant aquesta quantitat del total obté la primera part.

El tercer i darrer problema que resol Núñez en aquest capítol diu que el resol Cardano per la *regla de la quantitat*. Efectivament, la primera qüestió del capítol X de l'*Ars Magna* de Cardano planteja el següent:

---

407 Núñez, 1567, 225v.

408 Aquí Núñez fa referència a la "proporció conjunta" que va demostrar Euclides al llibre V dels *Elements* però no diu a quina proposició es refereix.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta, sint 100 & productum unius i alterum duplum sit aggregato eorum[409].

I Núñez l'enuncia:

Busquemos dos numeros, cuyos quadrados juntos en una suma, sean 100. y que lo que se haza multiplicando vno por otro, sea duplo de la suma de entrambos juntos[410].

Núñez suposa que els dos nombres junts són 1 *co.* i serà, per tant, el seu quadrat 1 *ce.* Aleshores fa servir la igualtat que actualment s'expressaria: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$[411] i conclou que $100\widetilde{p}.4co.$ són iguals a 1 *ce.* En llenguatge actual, la incògnita, *co.* que tria l'autor és $x+y$ i, per tant, el quadrat de la incògnita $(x+y)^2$ serà per l'autor 1*ce.* L'enunciat li dóna el valor de $x^2 + y^2$ i també li proporciona la relació $xy=2(x+y)$, de manera que la fórmula que utilitza li serveix per relacionar fàcilment les dades de l'enunciat. A partir d'aquí, aplicant una de les regles de les conjugacions compostes troba pel valor de la cosa que és la suma dels dos nombres, $2.\widetilde{p}.R.104$[412] i per l'enunciat sap també el seu producte, que és el doble d'aquesta quantitat, és a dir, $4.\widetilde{p}.R.416$. L'autor diu a continuació que ha de dividir $2.\widetilde{p}.R.104$ en dues parts de tal manera que l'una multiplicada per l'altra faci $4.\widetilde{p}.R.416$. i que per això pot fer servir la regla dels mitjans proporcionals o bé àlgebra. El que fa Núñez és suposar que una de les parts és 1 *cosa* i per tant, l'altra serà $2.\widetilde{p}.R.104 - 1co.$ Multiplicant aquestes dues parts i igualant-les a $4.\widetilde{p}.R.416$ obté la solució que després comprova.

En contrast amb el nombre de problemes que dedica Núñez a exemplificar diferents regles, en el cas de la *regla de la quantitat*, només en posa 3, la qual cosa fa pensar que tenia certs dubtes sobre aquesta regla. De fet, en alguns problemes del capítol 5è de la 3a part principal, l'aplica sense citar-la. Així com altres autors consideren la *regla de la quantitat* com

---

[409] Cardano, 1545, *op. cit.*

[410] Núñez, 1567, 226[v].

[411] Núñez planteja retòricament aquesta igualtat fent referència a la 4 proposició del llibre II dels *Elements* d'Euclides, l'enunciat de la qual és el següent: If a straight line be cut at random, the square on the whole is equal to the squares on the segments and twice the rectangle contained by the segments. Heath, Thomas L. , 1908. *Euclid. The thirteen books of the Elements*, **1**, 376-378. Cambridge University Press. London.

[412] En llenguatge actual $2 + \sqrt{104}$.

la perfecció de l'àlgebra, Núñez creu que la majoria de problemes que es resolen per aquesta regla, es resoldrien de manera més senzilla utilitzant només una incògnita.

Clavius (1538-1612) es refereix a Cardano, Núñez i "d'altres" amb relació a l'origen de la segona incògnita[413]. La referència sobta una mica ja que, com hem comentat, Núñez sembla una mica escèptic amb l'ús d'una segona incògnita. Potser l'admiració que li tenia Clavius com a deixeble[414] de Núñez, va propiciar aquesta referència.

5.4. Les fonts

Si considerem les obres que contenen demostracions geomètriques de les arrels simples, n'hi ha a l'obra *Kitab fi al-jabr wa'l-muqabala* (ca. 850-930) de Shuja ibn Aslam, conegut com abu Kamil[415], i també a la *Summa* (1494) de Pacioli[416]. N'hi ha també a d'altres[417] obres, però no apliquen l'algebra a la resolució de problemes geomètricsEl procediment que utilitza Núñez per fer les demostracions, és similar al de Pacioli, amb la diferència que Núñez assenyala i justifica que l'arrel cal considerar-la superfície i que cal distingir-la del costat que és línia.

L'autor més citat per Núñez al llarg de la seva obra és Euclides[418] i la major part de les vegades que hi fa referència, Núñez cita proposicions concretes de la seva obra, per tal de justificar els seus raonaments o les seves demostracions. En la part segona de la segona part principal, on l'autor tracta les arrels, fa referència a una proposició del llibre VI dels *Elements* i especifica que és la 9a de la versió de Campano i la 13a de la versió de Zamberto, tal com ja hem comentat a l'apartat sobre els símbols. Aquest fet mostra el

---

413 Clavius, 1608, 72-76.

414 Clavius va ingressar a l'orde dels Jeuïtes el 1555. Va ser alumne a la Universitat de Coimbra a Portugal i va ser allà on va conèixer Pedro Núñez com a professor.

415 Sesiano, 1993, 324-326.

416 Pacioli, 1494, *op. cit.* 145v.

417 Per exemple al manuscrit *Aliabraa argibra* de 1344 de Dardi, al *Trattato di Fioretti* d'Antonio de Mazzinghi de 1380, al *Flores Almagesti* de Giovanni Bianchini, escrit entre 1446 i 1456), a un manuscrit contingut al *codice Palatino 575,* intitulat *Regola di geometria e della cosa* (ca. 1460), al *Trattato di praticha d'arismetrica* de Benedetto da Firenze de 1463, i a *La regola dell'Argibra* continguda en el *codice Palatino 567.*

418 Núñez el cita 157 vegades, la major part d'elles, a la segona i tercera parts principals.

coneixement que Núñez tenia de l'obra d'Euclides i de les seves versions. De fet, per Núñez, és la referència més important. A la carta final que dedica als lectors, posa de manifest que la base de la seva àlgebra es troba en els *Elements* d'Euclides.

> *Demuestro todas las Reglas de q vso, y no allego a otro Autor sino a Euclides, y onde conuiene, ny traigo mas que lo necessario. Algun tanto me alargue en las proporciones por el gusto que de aquella materia tenia. No cupo en my la emulacion que esotros Autores tuuieron, ny otro ningun respecto, saluo aprouechar a les estudiosos desta arte, que no la saben*[419].

En aquesta carta cita els autors que probablement han tingut més influència en la seva obra. Anomena les obres d'àlgebra que havien arribat a Espanya fins el moment: *La Summa de Arithmetica y Geometria* de Fray Lucas de Burgo, la *Summa* de Hieronymo Cardano[420] i "un libro, que en su casa [de Tartaglia] se halló, en el qual separadamente trata de Algebra". Núñez critica la *Summa* de Pacioli perquè diu que està feta sense ordre de manera que resol moltes qüestions per àlgebra sense haver parlat d'àlgebra. Per aquest motiu, diu l'autor que va dedicar molts anys a escriure el seu llibre i abans de fer-lo imprimir, va aparèixer l'obra de Cardano a la qual Núñez es refereix com la *Summa* i que probablement es tracta de l'*Ars Magna* de 1545, que, segons l'autor, va compondre basant-se en la de Fray Lucas. Diu Núñez que l'obra de Cardano al principi tenia un ordre però després escriu d'una manera confusa i "haze de todo una ensalada mal hecha, y despues embio otro libro de Algebra que es un chaos". Finalment parla profusament de Tartalgia[421] (Nicolao Tartalla), i diu que "el seu llibre" és millor que el de Pacioli i que el de Cardano per aprendre l'àlgebra, tot i que dedica la major part de la carta a criticar-ne molts aspectes concrets que en demostren un bon coneixement. De fet, Núñez utilitza 25 vegades la paraula *quesito,* paraula d'arrel italiana que té el significat de demanda o pregunta. Aquesta paraula, Núñez la podia haver manllevat de l'obra de Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse*, de 1546. Al llarg de l'obra, a part d'Euclides,

---

419 Núñez, 1567, 324v.

420 L'autor es refereix al nom de Cardano de diverses maneres al llarg de l'obra: Hieronymo, Jeronymo, Ieronimo i Hieronimo.

421 Nicolao Tartalla per l'autor.

Cardano i Tartaglia són els autors més citats. Després vindrien Jordano (Jordanus Nemorarius) i Campano i també Oroncio (Oronce Finé). Fa també alguna referència a Menelau, a Ptolemeu[422] , a Theó a Diofant, a Regiomontanus i a Giorgio Valla.

El *Libro de Algebra* va ser molt conegut a la seva època, de manera que alguns autors en tenien notícia abans que fos publicat. És el cas de Peletier (1517-1582), per exemple, que va dir que havia sentit a parlar que "Pierre None", matemàtic de Lisboa havia escrit un tractat d'àlgebra en espanyol però que ell encara no l'havia vist. Altres algebristes com Adriaan van Roomen (1561-1615) i Gosselin també van fer referència a l'àlgebra de Núñez en termes molt elogiosos. Un altre dels que va elogiar l'obra de Núñez, va ser Clavius. La seva correspondència amb Clavius confirma la rellevància atribuïda als treballs del matemàtic lusità[423].

Gosselin cita Núñez diverses vegades en la seva *De Arte Magna* (1577). Ja al principi de la seva obra es refereix a l'art de l'àlgebra i cita diferents autors, entre ells Núñez:

> *Per la il·lustració d'aquest art, els que d'entre tots han fet una obra singular són l'autor grec Diofant,, i el seu traductor Xylander, aquest segon Diofant, l'espanyol Pedro Nunes, Lucas Pacioli, Nicolas Tartaglia, tant hàbil en aritmètica com Diofant ho és en la nostra art, Leonardo de Pisa, que va ser el primer que la va portar d'Aràbia a Itàlia, Jeroni Cardano, encara que s'esplaia en casos particulars, Étienne, Stifel, Rudolff, Volumnius, Achilinus, i nombrosos de més moderns[424]...*

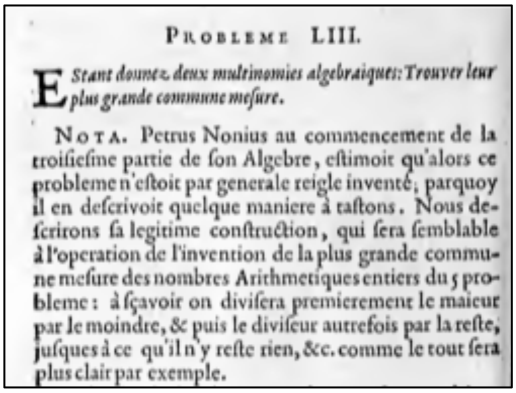
Una de les cites de Clavius fa referència als tipus d'equacions que considera Núñez:

---

[422] A qui Núñez s'hi refereix com Ptoloemeu.
[423] Leitão, Henrique, 2010. "El libro de Álgebra en Arithmética y Geometria (1567) de Pedro Núñez" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **XI,** 9-18. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca". ETSEIB.
[424] In hac autem arte illusgttanda singularem inter mones hi nauarunt operam, Diophantus Græcus autor, & Diophantus alter eius interpres Xylander, Petrus Nonius Hispanus, Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartaglia tam in Arithmeticis peritus quam hac in arte Diophantus, Leonardus Pisanus, quei hanc ex Arabia in Italiam primus attulit, Hieronimus Cardanus quanquam ille particularibus apprime delectatur, Stephanus, Stig¡felius, Ianuerus, Volummmius, Achilinus & recentiuores permulti. Gosselin, 1577, 3^v-4^r.

Petrus Nonius en el capítol 4 de la primera part de la seva Àlgebra cita altres demostracions no menys elegants que aquelles amb què investiga primer de forma geomètrica quin nombre quadrat, o Zensus, és igual a qualsevol nombre absolut, menys qualsevol nombre de les arrels, o bé aquell que sigui igual, juntament amb qualsevol de les arrels, a qualsevol nombre absolut; o bé aquell que sigui igual a qualsevol nombre de les arrels, juntament amb qualsevol nombre absolut; o, finalment, aquell que sigui igual a les arrels menys a qualsevol nombre absolut, o aquell que juntament amb qualsevol nombre absolut sigui igual a qualsevol nombre de les arrels[425].

Stevin cita també Núñez, en el darrer capítol del llibre 2n de la *Arithmetique,* es refereix a Pedro Núñez (Petrus Nonius), explicant que Núñez no va trobar una regla general pel problema de trobar el màxim comú divisor de dues expressions polinòmiques i que ell es disposarà a explicar-la. Fa referència al principi de la tercera part principal de la seva *Algebra*, la qual cosa fa pensar que l'havia estudiat.


PROBLEME LIII.

Estant donnez deux multinomies algebraiques: Trouver leur plus grande commune mesure.

NOTA. Petrus Nonius au commencement de la troisiesme partie de son Algebre, estimoit qu'alors ce probleme n'estoit par generale reigle inventé; parquoy il en descrivoit quelque maniere à tastons. Nous descrirons sa legitime construction, qui sera semblable à l'operation de l'invention de la plus grande commune mesure des nombres Arithmetiques entiers du 5 probleme: à sçavoir on divisera premierement le maieur par le moindre, & puis le diviseur autrefois par la reste, jusques à ce qu'il n'y reste rien, &c. comme le tout sera plus clair par exemple.

Figura 5.8. Problema 53 del llibre 2n de la *Arithmetique* de Stevin[426].

I quan parla de navegació cita també a Núñez, en aquest cas per dir que va ser el primer en adonar-se que no era el mateix navegar seguin un cercle màxim que navegar a rumb constant[427].

---

[425] Petrvs Nonius cap. 4. Primæ partis suæ Algebræ adducit alias demonstrationes non minus elegantes, quibus prius inucstigat Geometrice, quinam quadratus numerus, vel Zensus, æqualis sit cuiumque numero absoluto: Vel qui æqualis sit quotcunque radicibus, vna cum quouis numero absoluto: Vel denique qui sit luto æqualis quotcunque radicibus, minus quolibet numero absoluto, siue qui vna cum quocunque numero absoluto æqualis sit quotlibet radicibus. Clavii, Christophori, 1612. *Operum Mathematicorum.* Tomus Secundus. Algebrae. Cap. XII, 28. Antonii Hierat. Reinhardus Eltz.

[426] Girard, 1620, 224, *op. cit.*

[427] Dijksterhuis, 1970, 83, *op. cit.*

Núñez[428] figura en la imatge que inicia l'obra *Thesaurus Mathematum Reservatus per Algebram Novam* (1646), el professor de matemàtiques de la universitat de Heidelberg, Johannes de Luneschlos, al costat de matemàtics de renom com Euclides, Diofant, Cardano, Stifel o Viète.

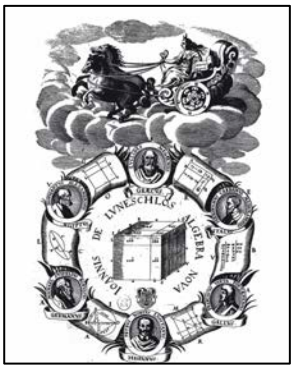


Figura 5.9. Imatge de Núñez en l'obra de Luneschlos

Relacionat també amb les fonts i les possibles influències, mostrem a continuació l'enunciat d'un dels problemes que hem posat com a exemple de resolució amb àlgebra i sense en l'obra de Núñez, el 41, amb dos enunciats més, redactats en termes semblants, que es troben a la *Arithmetica Integra* de Stifel de 1544, i al *De arte magna* de Gosselin de 1577. En el cas de Stifel i Gosselin el posen com a exemple de problema a resoldre per la *regla de la quantitat.* No és així en el cas de Núñez, que com ja hem dit, es mostra una mica escèptic amb relació a la utilització de diverses incògnites:

TRes ſunt ſocij, quorum primus dicit ad ſecundum, Si mihi dares dimidiũ ſummæ tuæ, tunc haberem 100 fl. Et ſecundus dicit ad tertium: Si mihi dares ſummæ tuæ partẽ tertiam, tunc haberem 100 flo. Et tertius ad primum dicit: Si tu mihi dares ſummæ tuæ partem quartam, tunc haberem 100 fl.	Stifel, 1544, 296r
41. Tenemos tres numeros que el primero y el ſegundo con la mitad del tercero, hazen 100. y el ſegundo y tercero con vn tercio del primero, hazen 100. y el primero y tercero con vn quarto del ſegundo, hazen 100. y queremos ſaber, quanto es cada vno deſtos tres numeros.	Núñez, 1567, 162r

[428] És la figura que hi ha en el vèrtex inferior de l'hexàgon.

Partiamur 100 in tres partes , vt prima cum ſecunda ſit triplum tertiæ,tertia cum ſecunda ſit primę quadruplum.	Gosselin, 1577, 80^{v}

De fet, una de les més importants vies de divulgació de l'*Àlgebra* de Núñez van ser els col·legis dels jesuïtes, degut a l'admiració que Clavius, que era jesuïta tenia pel seu mestre[429].

5.5. Conclusions

És evident que l'obra de Núñez no està en la línia de les d'Aurel, Pérez de Moya i Roca. Així com les altres obres estudiades segueixen la línia de l'escola alemanya, el text més rellevant de la qual és el *Coss* de Rudolff, l'obra de Núñez segueix més la línia dels algebristes italians, tot i que per les innovacions amb relació a aquestes obres, no és comparable a cap d'elles[430]. A diferència de les altres obres, la de Núñez conté una bona part de geometria i demostra les regles que utilitza per a resoldre les equacions.

Des del punt de vista del pensament algebraic, la diferència essencial amb les altres obres és que no fa referència a l'*anàlisi*. No parla de què per resoldre una qüestió en àlgebra s'ha de procedir com si ja estigués resolta i es volgués provar. Núñez proporciona regles i les demostra però no reflexiona sobre el significat de les incògnites.

A la primera part de l'obra, Núñez ja ha explicat allò que és essencial a les primeres àlgebres: els tipus d'equacions, el procediment per a resoldre-les amb un exemple concret, la demostració de les regles per a resoldre-les i exemples més elaborats. A la segona mostra com treballar amb les incògnites (dignitats) i amb arrels i destaquen els 15 capítols que dedica l'autor a la teoria de proporcions, el darrer del qual versa sobre les arrels dels binomis. Aquesta dedicació tan extensa a la teoria de proporcions no hi és a les

429 Leitão, 2010, *op. cit.*, 11-13

430 Høyrup, Jens, 2002. "Pedro Nuñez: Innovateur bloqué, et dernier témoin d'une traditions millénaire". *Gazeta de matemàtica,* 143, 52-59.

altres obres estudiades. El mateix autor reconeix que potser s'hi ha allargat una mica més del compte però que ho ha fet perquè li agrada molt. Després d'aquesta visió global de la primera part i de les explicacions sobre com operar amb les diferents objectes de l'àlgebra, aborda la tercera part que és la més extensa de l'obra i en la que destaquen els capítols d'aplicació de l'àlgebra a l'aritmètica i a la geometria. Per tant, a diferència de les altres obres estudiades, en la de Núñez, l'objectiu principal no és exemplificar cada tipus d'equacions sinó mostrar les aplicacions de l'àlgebra i la seva importància per a resoldre problemes de tot tipus, tant si són aritmètics com geomètrics.

Voldríem destacar els nombrosos comentaris que fa quan resol alguns problemes, per tal de convèncer el lector de la validesa dels seus raonaments. Ja hem dit que la intenció de Núñez era didàctica, per tal d'apropar els lectors a l'àlgebra que Pacioli, segons el mateix Núñez manifesta, havia explicat d'una manera tan caòtica.

Núñez es mostra molt crític amb la utilització de dues incògnites. Hem vist que on tracta la *regla de la quantitat,* només hi resol 3 exercicis que a més a més, diu que es podrien resoldre d'una altra manera més senzilla:

> *Y todos los casos que Fray Lucas practica por la quantidad, practicamos nos por las Reglas de la cosa, sin ayuda deste termino quantidad*[431].

I una mica més endavant:

> *Ieronymo Cardano hallo muchas Reglas de quantidad, por las quales resuelve muchas questiones que trae, podiendose muy bien resolver por las Reglas de la cosa, y con mas facilidad*[432].

Quant al desenvolupament de l'àlgebra cal destacar que utilitza $\sqrt{8}$ com a coeficient, encara que aquesta utilització no representa per Núñez cap canvi conceptual. De fet, ho fa per una qüestió pràctica, ja que ha de fer encaixar una equació amb una de les formes

---

[431] Núñez, 1567, 225^{v}.
[432] *Ibid*. 226^{v}.

estàndard per tal de poder-la resoldre. Aquesta mena de canvis, dels quals els autors a vegades no en són plenament conscients, van ampliant el nombre d'objectes de l'àlgebra, que d'alguna manera van establint les seves pròpies regles.

El que representa segurament el pas més important a nivell de pensament algebraic és l'ampliació del càlcul de mitjans proporcionals, de manera progressiva, a diferents objectes algebraics. Núñez es basa en els *Elements* pel càlcul de dos mitjans proporcionals entre dos nombres donats, però amplia el mètode considerant diversos casos, de manera que el càlcul s'aplica a diferents tipus de nombres i expressions, pels quals en principi, no havia estat pensat. A partir de l'aplicació a cubs perfectes, que és el cas que es tracta en els *Elements,* passant per enters qualssevol i nombres irracionals, Núñez amplia el càlcul a quantitats desconegudes i fins i tot, estableix proporcions entre expressions polinòmiques.

Quant a les seves fonts, està clar que es basa en els *Elements* d'Euclides i també en la *Summa* de Pacioli, com ell mateix manifesta. Per establir el tipus d'equacions es basa en l'álgebra d' al-Khwârizmî i està clar que també coneix bé les obres de Cardano i Tartaglia, a qui Núñez cita. Les influències són més difícils determinar en tots els casos, ja que no hem estudiat obres més enllà de principis del segle XVII, però està clar que va influir molt en Clavius, i en Gosselin i que era ben coneguda per Stevin.

Així com Roca, ja havia atorgat a les matemàtiques una categoria superior, volent-la separar de les altres ciències per considerar-la una ciència pura, Núñez dona aquest rang superior específicament a l'àlgebra, que plasma amb la seva frase "quien sabe por àlgebra, sabe científicamente".

CAPÍTOL 6. DIEGO PÉREZ DE MESA. Un manuscrit de finals de segle.

6.1. Introducció

En aquest capítol analitzarem el manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca[433] de Diego Pérez de Mesa, que és el germen d'aquesta tesi. En el cas d'aquest autor disposem de prou dades biogràfiques per tal de fer-nos una idea del personatge, una persona amb múltiples interessos que van des de la filosofia, passant per les matemàtiques i disciplines afins com la geografia, la cosmografia, o la navegació, fins a la política. Va ser molt ben considerat com a matemàtic a la seva època tot i que al no publicar les seves obres no ha tingut el reconeixement que mereix. Cristóbal Suárez de Figueroa (1571-1644), escriptor i enciclopedista espanyol cita Pérez de Mesa en una llista en la qual hi ha destacats matemàtics com Muñoz, Núñez o Clavius.

> *Leense tambien los nombres de otros muchos Geometras antiguos como Seilace Cariandeno, Euclides Hipia, Eleo, Eratostenes, Proclo,....Y entre modernos Francisco Sansovino, Nicolas de Corciuo, Federico Comendino, Christoual Clauio, Dauid Origano, Antonio Magino, Ticobrahe, Guido baldo, pedro Nuñez, iuan Baptista Lauaña, Iulian i Iuilo Cesar, padre y hijo Ferrofino, el Doctor Iuan Arias de Loyola, Diego Perez de Mesa, Geronimo Muñoz, Gabriel de Santana, el Doctor Zamora, sin otros*[434].

Descriurem el contingut del manuscrit i en destacarem, com en els altres autors, els aspectes que considerem essencials en el pensament algebraic. Tot i que al manuscrit 2294 no hi ha demostracions geomètriques, l'autor fa sovint paral·lelismes entre l'aritmètica i la geometria. Veurem que per Pérez de Mesa l'àlgebra és una part de l'aritmètica i en la seva idea d'àlgebra no hi ha la idea d'*anàlisi*, com tampoc hi era a l'obra de Núñez. Després de

---

[433] Pérez de Mesa, Diego, 1598. *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrología y matematicas.* Manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca.
[434] Suárez de Figueroa, Cristóbal, 1629. *Plaza universal de todas las ciències y artes,* 95r. Luys Roure, Perpiñan.

referir-nos als símbols, tractarem les equacions que classifica en 6 tipus en la línia de l'àlgebra àrab, com hem explicat també en el cas de l'àlgebra de Núñez.

Des del punt de vista algebraic, el més reeixit en el manuscrit és la resolució de sistemes d'equacions, la *regla de la quantitat,* on l'equació es transformarà en un nou objecte de l'àlgebra.

6.2. Dades biogràfiques

Diego Pérez de Mesa[435] va néixer a Ronda (Málaga) el 17 de desembre de 1563 on va ser testimoni de la guerra dels moriscs i de la victòria del duc d'Arcos. En el seu llibre sobre *Grandezas de España* promet escriure la història d'aquella guerra. Va estudiar Arts[436] (1577-1581) i Teologia (a partir de 1582) a la Universitat de Salamanca. En aquesta ciutat va seguir els cursos que impartia Jerónimo Muñoz (València 1520- Salamanca 1592) des de la seva càtedra d'astronomia i matemàtiques[437], les teories del qual incorporaria més endavant en les seves classes a Alcalà i Sevilla.

Entre el 1586 i el 1595 va ocupar la càtedra de matemàtiques i astronomia d'Alcalá d'Henares i el 1591 es va presentar a les oposicions a la càtedra de Salamanca que havia deixat vacant Jerónimo Muñoz. En el Mss 970, fol. 450-466 de l'arxiu universitari de Salamanca es conserva l'expedient de l'oposició de Pérez de Mesa. Consta que hi va exposar el 5è capítol del tercer llibre de l'*Almagest* de Ptolemeu i que va obtenir la càtedra d'astrologia per 32 vots contra els 14 i 13 que van obtenir els seus oponents, el llicenciat

[435] De Pérez de Mesa es disposa d'informació biogràfica rellevant gràcies a l'edició crítica de Pereña i Baciero de la seva obra *Política o Razón de Estado*, continguda en el Mss 6021, fol. 1-260 de la Biblioteca Nacional de Madrid.

[436] Els estudis d'Arts tenien un caràcter preparatori per a ingressar a les facultats superiors de Teologia i Medicina. Les facultats d'Arts eren considerades facultats menors. Deriven del *trivium* (gramàtica, retòrica i dialèctica) i el *quadrivium* (aritmètica, geometria, música i astronomia) medievals però en realitat eren facultats de Filosofia.

[437] Aquest destacat científic havia nascut a València on es va graduar en Arts. Va viatjar per Europa per completar la seva formació a París i Lovaina i també va viure a Itàlia on va ensenyar hebreu a la universitat d'Ancona. Quan va tornar a Espanya, va exercir de professor de matemàtiques i hebreu a València i Salamanca, de manera que va adquirir una fama notable com a matemàtic, astrònom i geògraf. A partir del 1579 va ocupar la càtedra d'astronomia i matemàtiques de Salamanca. Navarro, 2014, 53, *op. cit.*

Serrano i el doctor Talavera, respectivament[438]. La va guanyar però no en va prendre possessió i va decidir quedar-se a Alcalá. De fet, havia demanat augment de sou a Alcalà com consta als arxius històrics documentals: "el Rector propuso que el licenciado Mesa, catedrático en Matemáticas de esta universidad, es persona, como el claustro sabe, la más inminente de cuantas hay en su facultad en España, y que éste es tan curioso que es muy sabido su curiosidad y que actualment está vaca la cátedra de matemáticas en Salamanca y le ruegan vaya a tomar la dicha cátedra que vaca, le dan unos cuatrocientos ducados[439]" i com que li van concedir l'augment, va decidir quedar-se a Alcalà. Allà va haver de regular la seva situació acadèmica amb la realització d'un examen públic de convalidació, on va desenvolupar un tema sobre la *Política* d'Aristòtil.

El 1595, sembla que per mandat de Felip II, es va traslladar a Sevilla per ocupar una càtedra entre els anys 1595 i 1600. A partir de 1600-1601, Pérez de Mesa abandona la carrera acadèmica. Va ser conseller del cardenal Gaspar de Borja i Velasco, i probablement va viure a Nàpols i Roma, acompanyant el cardenal quan va ser ambaixador en aquesta ciutat (1616-1618) i virrei de Nàpols (1620). Li va dedicar *Política o Razón de Estado*[440] l'any 1632, quan Gaspar de Borja era arquebisbe de Sevilla on se suposa que seria també Pérez de Mesa. Aquesta obra és una col·lecció de normes de govern que Pérez de Mesa justifica a base de la filosofia política d'Aristòtil, de les lliçons dels fets històrics i de la seva experiència personal de la situació europea, en la qual hi ha una crítica latent constant a la política espanyola.

Va escriure diversos treballs de nàutica, astrologia, astronomia i matemàtiques, però cap d'ells es va arribar a publicar. D'entre aquests treballs destaca *Comentarios de Sphera*, un estudi cosmogràfic de quatre llibres en el que fa referència a autors com Copèrnic, Aristòtil o Ptolemeu. Va traduir de l'italià el *Libro de los maravillosos efectos de la limosna* de Julio Folco (1589). En el pròleg al lector que afegeix a aquest llibre, Pérez de Mesa mostra la seva

[366]Pereña i Baciero, 1980, XV (Pérez de Mesa, ca. 1632).

[439] A.H.N., Universidades, 1128F, fol. 22v, referenciat per Pereña i Baciero, 1980, XXV (Pérez de Mesa, ca. 1632).

[440] Sobre les idees polítiques de Pérez de Mesa, vegeu: Parareda Corrêa, Euclides (2015). *La razón de Estado en el pensamiento político de Pérez de Mesa.* Tesi doctoral. Universidad de León.

preocupació per la pobresa a Espanya i troba arguments filosòfics i morals per sacsejar la consciència dels espanyols.

Cap el 1590, va publicar una nova edició del *Libro de grandezas y cosas memorables de España* de Pedro de Medina[441] (ca. 1493-ca.1567), que va corregir i ampliar i en el qual enriqueix el mètode històric amb l'aplicació de les matemàtiques. Domina el mètode experimental, d'observació directa i experiència personal que invoca sovint. Parlant de Ronda, per exemple, diu: "diré con verdad lo que de ésta sé muy bien como testigo que soy de vista por muchos años" (fol. 150). En un article de Rafael Sabio[442] es comenten les aportacions de Pérez de Mesa al text original de Pedro de Medina del 1548. Segons l'autor de l'article, Pérez de Mesa informa en el pròleg que la seva pretensió és "mejorar el mal lenguaje empleado en su redacción por el autor, así como aumentarle en lo que pueda, que es bastante". La primera part de l'obra de Pedro de Medina és històrica i abasta des dels orígens de caràcter mític atribuïts a Tarifa fins al regnat de Carles V, on Pérez de Mesa hi afegeix fets del regnat de Felip II. La segona part és una descripció d'Espanya dividida en províncies i regnes, i dins de cadascun hi ha capítols dedicats a les poblacions més rellevants. En aquesta part, Pérez de Mesa afegeix poblacions a les tractades a l'edició original i també amplia els comentaris corresponents a algunes de les localitats consignades per Pedro de Medina.

---

[441] Pedro de Medina va ser un matemàtic, nascut probablement a Medina Sidonia, que va tenir el reconeixement de cosmògraf d'honor de la Casa de la Contractació amb autorització oficial per a construir instruments i cartes de navegar, però sense rebre cap salari. El seu *Arte de Navegar* va ser traduït al francès flamenc i anglès i va ser reeditat 15 vegades en aquestes llengües. El seu contingut respon a les matèries que s'havien d'ensenyar a la càtedra de la Casa de la Contractació. Navarro, 2014, *op. cit.* 177-178.

[369] Sabio González, Rafael, 2003. "La historia de Tarifa según dos autores del siglo XVI: Pedro de Medina y Diego Pérez de Mesa". *Aljaranda: revista de estudiós tarifeños,* **50,** 9-14.

Obres manuscrites[443].

La major part de la producció de Pérez de Mesa roman inèdita i es conserva només en forma manuscrita. Donarem a continuació una llista de manuscrits que contenen obres que es poden atribuir a Pérez de Mesa.

Manuscrits de la BNE

- ✓ Mss. 5917, copiat a mitjans del segle XVII que conté diverses obres, entre elles: *Astrología Judiciaria que leyó en Sevilla Diego Pérez de Mesa, Catedrático de Alcalá de Henares, por mandato del Rey Nuestro Señor D. Felipe II, año de 1595.*

- ✓ Mss. 5995, que conté una única obra: : *Tratado de Astrología de diferentes modos de levantar figuras, compuesto por el Maestro Mesa, catedrático de la Universidad de Alcalá.*

Figura 6.1. Mss 8882

- ✓ Mss. 6021, que conté també una única obra: *Política o Razón de Estado sacada de la Doctrina de Aristoteles, por Diego Pérez de Mesa*, a la qual ja ens hem referit.

- ✓ Mss. 8882, que conté una única obra: *Comentarios de esfera por el licenciado Diego Pérez de Mesa, catedrático de Sevilla, a 22 de septiembre de 1596*. Es tracta d'un tractat de cosmografia inspirat en l'obra de Sacrobosco.

- ✓ Mss. 8933, que conté 4 obres, entre les quals els 303 aforismos del Licenciado Diego Pérez de Mesa, astrólogo y matemático, f. 209-257^{v}. L'inventari de manuscrits dela BNE indica que l'obra de Pérez de Mesa està incompleta.

443 Per una descripció detallada del contingut dels manuscrits de Pérez de Mesa, especialment del manuscrit amb signatura BH MSS 205 de La Biblioteca Històrica de la Universitat Complutense (UCM), vegeu: Ortiz de Zárate Leira, José María, 2015. "Manuscrito con obras atribuidas a Diego Pérez de Mesa en la *Biblioteca Histórica* de la Universidad Complutense" a González Redondo, F. A. (coord.), *Ciencia y Técnica entre la Paz y la Guerra. 1714, 1814, 1914,* 1141-1148. SEHCYT, Madrid.

✓ Mss. 9050, que conté una sola obra: *Libro primero de la navegación, compuesta por el Ldo. Diego Pérez de Mesa, cathedrático de Mathematicas de la ciudad y Reyno de Sevilla.*

✓ Mss. 11078, que conté també una única obra: *Tratado del arte de navegar por el Licenciado Diego Pérez de Mesa.* Al final hi ha la data del 6 de setembre de 1603[444].

✓ Mss. 19008: Entre les diverses obres que conté, n'hi ha 4 que es poden atribuir a Pérez de Mesa: *De Arithmeticis, auctore Iacobo de Mesa earum compluti profesore* (f. 64-105). *Tractatus de Algebra* (f. 105-110). *Dilucidus tractatus de regnomonica, seu de fabrica horologiorum (...) a Iacobo Pérez de Mesa* (f.112-123). *Marci Maruli Carmen de Doctrina Domini Nostri Iesu Christi in cruce* (f. 124-126). El tractat d'aritmètica està datat el 1592 i el de gnomònica el 1593. Segons F. J. Juez[445], que ha estudiat aquest manuscrit, la segona part del qual l'atribueix a Pérez de Mesa, es tracta de l'únic manuscrit conegut per ara a Espanya que conté alguna obra del poeta croat Marko Marulic[446].

Manuscrits de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca:

✓ Mss 1726: És un manuscrit que conté documents en castellà i en llatí[447]. S'atribueixen a Pérez de Mesa tres de les obres que conté: *Tractatus astrologiae a doctísimo D. Didaco Perez de Messa Romae perlectus anno 1601* (f. 62-69). *Tratado de la astrología de nacimientos de D. Perez de Messa* (f. 82-104).

---

[444] Per referències sobre aquest tractat, podeu consultar: Vicente, Ma I., 2002. "El arte de navegar", a L. García Ballester (coord.) *Historia de la ciencia y de la técnica en la corona de Castilla, Tomo III, siglos XVI y XVII. Salamanca.* Ediciones de la Junta de Castilla y León, 357 i Navarro, 2014, *op. cit*., 221.

[445] Francisco Javier Juez Gálvez és professor del departament de Filologia Eslava de la facultat de Filologia de la Universitat Complutense de Madrid.

[446] Marko Marulic (Split, 1450 – Split, 1524) és considerat generalment el pare de la literatura croata. Segons el professor Juez, Pérez de Mesa seria un dels més destacats "marulòfils" espanyols dels segles XVI i XVII. La "Marulología", és la disciplina que engloba les investigacions referides al príncep dels humanistes croats, conegut a Europa Occidental amb el seu nom llatí, *Marcus Marulus.* La seva obra va tenir molta difusió en l'Europa dels segles XVI i XVII. Juez Gálvez, Francisco Javier, 2001. "La Marulología en España en los umbrales del siglo XXI" *Eslavística Complutense,* **1,** 347-370.

[447] Lilao, Óscar; Castrillo, Carmen (2002). *Catálogo de manuscritos de la biblioteca universitària de Salamanca*, II, *manuscritos 1680-2777*.

- ✓ Mss 2294: L'estudi d'una part d'aquest manuscrit és l'objectiu d'aquest capítol. S'atribueixen a Pérez de Mesa 4 de les obres que conté: *Libro y tratado de aritmética y arte mayor y algunas partes de astrología y matemáticas (...) por Diego Pérez de Mesa, catedrático de esta real ciudad de Sevilla, del año 1598* (f. 1-100), que de fet, es pot dividir en 2 tractats: *Aritmética* (f.2-60) i *Álgebra (f. 61-100). Libro primero y cuaderno de la geometría práctica por el licenciado Diego Pérez de Mesa, catedrático de esta ciudad de Sevilla este año de 1599* (f. 115-137). *Cuaderno de astrología compuesto por el dicho señor licenciado Diego Pérez de Mesa en Sevilla* (ff. 145-172). *Entra el juzgar de enfermedades por el dicho señor Diego Pérez de Mesa compuesto en Sevilla* (f. 193-207).

Manuscrits de la Biblioteca de la Universitat de Barcelona:

- ✓ Mss 446: Miquel[448] identifica en aquest manuscrit una única obra: *Sphoera sive Scientia de Coelo et de Mundo*, que s'atribueix a Diego Pérez de Mesa. Com el Mss. 6021 de la BNE, està dedicat a Gaspar Borja Velasco i podria ser que procedís de la biblioteca personal del cardenal. No està datat, però menciona a Borja Velasco com Arquebisbe de Sevilla, per la qual cosa seria posterior a 1632.

- ✓ Mss 1561: Miquel[449] identifica en aquest manuscrit dues obres que s'atribueixen a Pérez de Mesa: *Tractatus de arithmetica practica* (f.1-56). *Explicatio in fabricam horologium solarium communen* (f. 89-117).

Manuscrits de la Biblioteca Tomás Navarro (CSIC):

- ✓ BC RM RM/3876: El catàleg de manuscrits del CSIC indica: *Tratado primero de la astronomía judiciaria en el cual se enseñan las introducciones para juzgar astrológicamente Diego Pérez de* Messa; i el data a Salamanca el 1579. Si la datació és correcta, seria el

---

[448] Miquel Rosell, F., 1958. *Inventario general de manuscritos de la Biblioteca Universitaria de Barcelona. Volumen I. Manuscritos 1 – 500, 567-569*. Direcciones Generales de Enseñanza Universitaria y de Archivos y Bibliotecas. Madrid.

[449] Miquel Rosell, F., 1969. *Inventario general de manuscritos de la Biblioteca Universitaria de Barcelona. Volumen IV. Manuscritos 1501 – 2030, 44*. Direcciones Generales de Enseñanza Universitaria y de Archivos y Bibliotecas. Madrid.

manuscrit més antic que es conserva, correspondria a un Pérez de Mesa encara estudiant.

6.3. Manuscrit 2294 de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca

L'àlgebra[450] de Diego Pérez de Mesa forma part del manuscrit 2294 datat el 1598 que es troba a la Biblioteca de la Universitat de Salamanca. Consta de 100 pàgines a doble cara i porta el títol: *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrología y matematicas compuestas por el eroyco y sapentisimo maestro El Licenciado Diego perez de mesa catredatico desta Real ciudad de Sevilla del año de 1598.* L'àlgebra pròpiament dita, que l'autor titula *Tratado y Libro de arte mayor o algebra,* comença a la pàgina 60 i consta d'una introducció i 23 capítols.

En el 1r capítol, *De la naturaleza y propiedades de los numeros*, Pérez de Mesa diferencia els nombres abstractes, que diu que són ens fabricats per l'enteniment i anomena també "numerantes", dels nombres concrets que anomena "numerados". Divideix els nombres en 5 categories: enters, fraccions vulgars, fraccions astronòmiques[451], figurats[452] i proporcionals.

En el 2n capítol, *Del fundamento porqué se puso el álgebra en proporciones o figuras,* considera que de les anteriors categories, la del nombre proporcional és la més universal i la més adient per utilitzar en l'àlgebra ja que, segons l'autor, l'àlgebra és l'art universal per raonar.

En el 3r capítol, *Cómo se entienda haber formas en los números*, tracta una qüestió que ja havia tractat en el llibre 4rt de l'aritmètica que precedeix l'àlgebra en el manuscrit. Allà deia

---

[450] Un estudi exhaustiu de la part algebraica del manuscrit, el podeu llegir a: Romero Vallhonesta, Fátima, 2007, *op. cit.* i sobre els principals aspectes del seu contingut a: Romero Vallhonesta, Fàtima (2014). "Manuscript 2294 from the Library of Salamanca University" a Katsiampoura, Gianna (ed.). *Proceedings of the 5th International Conference "of the European Society for the History of Science,* 369-378.

[451] En el tercer llibre de l'aritmètica, Pérez de Mesa tracta els "quebrados astronómicos" . Diu que els matemàtics, principalment els astròlegs no divideixen les coses en meitats, terceres parts, quartes, etc. com "el vulgo" sinó que la primera divisió que apliquen és en 60 parts, és a dir, quan parla de fraccions astronòmiques es refereix a la divisió sexagesimal de la unitat.

[452] En el *"Libro 4º de los números figurados"* de l'Aritmètica (p. 36), tracta de l'origen de les formes o figures en els nombres i en torna a parlar en el capítol tercer de l'àlgebra com veurem en l'apartat 4.2.

Pérez de Mesa que tots els nombres tenen amagada als sentits una certa figura que només es percep per les seves unitats i que Aristòtil anomena forma:

> *Todo numero tiene en si cierta manera de figura aunque se esconda a los sentidos. Las figuras en la cantidad continua son 3 en genero: linea, superficie y cuerpo. Otras tantas formas ponen los aritmeticos en los numeros haciendo unos lineales, otros superficiales y otros solidos o corporeos. Y por ventura se pueden admitir otras dimensiones o figuras en los numeros que no pueden darse en la cantidad continua. Estas serían cuadrado de cuadrado, relato y supersolidos cuadrados y otros semejantes donde se funda el arte mayor o algebra*[453].

L'autor estableix sovint, paral·lelismes entre els nombres, que pertanyen al terreny de l'aritmètica i les quantitats contínues que pertanyen al de la geometria. Per Pérez de Mesa el terme "forma" és l'equivalent en l'aritmètica del que s'entén per dimensió en geometria.

En el 4rt capítol, titulat *De los principios propios del álgebra,* expressa la seva idea d'àlgebra que completa en el 5è, *Del valor o dimensiones de los números proporcionales,* i en el 6è titulat *De la diversidad de las operaciones aritméticas por la diversidad de las dimensiones.*

Els quatre capítols següents es refereixen a la suma, resta, multiplicació i divisió de dimensions o figures.

En els capítols que van de l'11è al 16è, Pérez de Mesa tracta de la naturalesa de les fraccions, de les formes de reduir-les i de la suma, resta, multiplicació i divisió d'expressions fraccionàries tant si afecten els coeficients com la indeterminada i remet a la definició de fracció que fa en la seva aritmètica menor.

En el capítol 17è titulat "*De la naturaleza de las raíces o lados*" tracta dels nombres racionals i irracionals.

---

[453] Pérez de Mesa, 1598, 36.

Finalment, els sis darrers capítols tracten la resolució de les equacions i dels sistemes d'equacions.

6.3.1. La idea d'àlgebra

En la introducció l'autor presenta l'àlgebra i la defineix com una part de l'aritmètica a la que, segons diu, els autors[454], principalment els italians, anomenen "cosa".

Al començament de la segona part del manuscrit que titula "Tratado y libro del arte mayor o álgebra" considera Pérez de Mesa en l'aritmètica, tres parts principals: la logística que tracta dels comptes ordinaris d'ús públic i dels contractes, una altra d'ordre més elevat que contempla la naturalesa dels nombres segons les seves propietats i la tercera part que és l'àlgebra. Diu que alguns l'anomenen *regla de la cosa* i que aquest nom li escau perquè no es pot considerar una "ciència sencera" sinó una regla amb diferents cànons i preceptes mitjançant els quals es pot descobrir la veritat[455]. Com que hi ha tants cànons, considera que tots junts poden considerar-se un capítol apart dins de "l'aritmètica secreta" perquè la seva manera d'obrar és secreta i enginyosa i per la seva excel·lència alguns l'anomenen "art major de comptar". Continua l'autor:

> *Tiene el algebra otra propiedad excelentissima ques aueriguar qualquiera cosa arismetica si es pusible o es ynpusible y quando es pusible si puede verificarse en solo un nº o en dos o en todos para los quales dos yntentos o fines se ayuda no de... que seran abstratos o numerados sino de nos figurados proporcionales*[456].

Diu l'autor que la finalitat de l'àlgebra és trobar un nombre o nombres quan es coneixen algunes de les seves propietats. En aquesta recerca hi tenen un paper molt important el que

---

[454] Pérez de Mesa es refereix sovint al que diuen els "autors" quan vol posar de manifest algun fet, donant a entendre que algú amb prou autoritat per fer-ho, l'ha establert amb anterioritat. També parla a vegades en el mateix sentit dels "escriptors".
[455] En el context de l'àlgebra, quan Pérez de Mesa parla de descobrir la veritat, sempre fa referència a trobar el valor d'alguna quantitat desconeguda.
[456] Pérez de Mesa, 1598, 61.

ell anomena nombres proporcionals, que són nombres que estan en progressió geomètrica. L'autor ho expressa així:

> *Es el intento y fin principal del algebra descubrir o hallar algun numero o numeros cualesquiera por algunas propiedades suyas las cuales propiedades no pueden ser otras que las que del mismo numero se hallan. Estas son: aumento o disminucion, sumando o restando, multiplicando o partiendo, engendrando figuras o sacando raices*[457]*…*

Algunes d'aquestes propietats, explica l'autor, són particulars del nombre que es busca i d'altres són generals per a tots els nombres. Les propietats generals basten pel coneixement dels accidents singulars i per trobar qualsevol nombre que es busqui en aquells accidents universals que, segons Pérez de Mesa, són sis: sumar, restar, multiplicar, partir, extraure arrels i, finalment, constituir formes o figures. Els quatre primers accidents estan llargament desenvolupats en la primera part del manuscrit, l'aritmètica, així com també l'extracció d'arrels que inclou un tipus d'algorisme per fer l'arrel cúbica. Quan Pérez de Mesa es refereix al càlcul de figures, està parlant del que actualment en diríem càlcul de potències. Diu que, si per exemple, es demana un nombre, el quadrat del qual sigui 36, en aquesta demanda s'hi proposen dues propietats, l'una és general a tots els nombres que consisteix en la capacitat de multiplicar-se per ells mateixos, ja que la multiplicació és accident comú a tota quantitat, però l'altra que és engendrar el 36, no és accident comú a tots les nombres, sinó només al 6 que és l'únic nombre que multiplicat per ell mateix engendra el 36. No té en compte, com era normal a l'època, els nombres negatius.

Fa referència als ensenyaments d'Euclides i cita la vuitena proposició del llibre IX, com es por veure a les línies cinquena i sisena del següent paràgraf extret del manuscrit (figura 6.2) :

[457] Pérez de Mesa, 1598, 65-66.

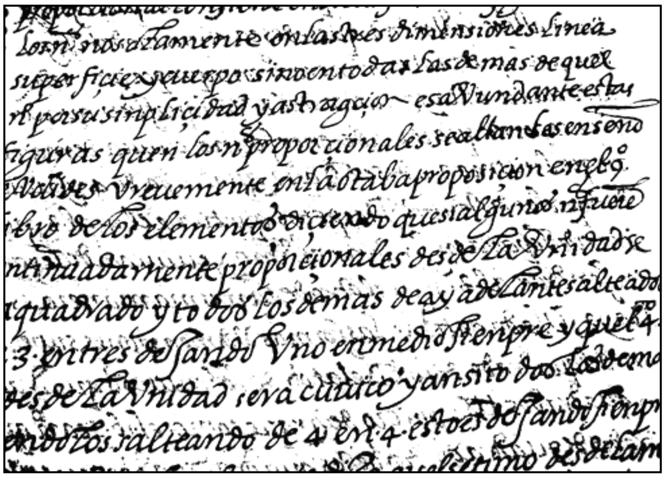


Figura 6.2 . Referència a la proposició (IX,8) dels *Elements.*[458]

Pérez de Mesa explica aquesta proposició:

> *Si tants nombres com es vulgui a partir d'una unitat són contínuament proporcionals, el tercer a partir de la unitat serà quadrat, així com tots els que deixen un interval d'un i el quart serà cub així com tots els que deixen un interval de dos, i el setè serà a l'hora quadrat i cub, així com tots els que deixen un interval de cinc*[459].

Utilitzant la notació actual, podríem escriure-la:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10},\ldots$$ [460]

Aquesta proposició sobre els nombres en proporció contínua, és, per Pérez de Mesa, el fonament de l'àlgebra i és present a tota la seva obra. Al 2n. nombre l'anomena costat, línia o arrel i diu que és el mitjà universal que es fa servir en totes les operacions de l'àlgebra per a trobar la veritat que es busca. És a dir, l'autor situa la incògnita en el 2n. lloc d'una progressió geomètrica de 1r. terme igual a 1 i, per tant, raó igual al valor de la incògnita.

---

[458] Pérez de Mesa, 1598, 66.

[459] *Ibid.*

[460] Euclides, 1994. *Elementos,* **II**, 207-208. Traducció i notes de M. Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos S.A., Madrid.

Amb aquest plantejament Pérez de Mesa posa de manifest la incògnita i les seves potències. Per ell, l'àlgebra és l'art de trobar el valor de la incògnita, encara que a vegades no es troba directament sinó que se'n troba alguna potència i, sabent a quin lloc de la progressió està situada aquesta potència, es pot trobar el terme que ocupa el 2n. lloc, que és el que interessa, fent l'arrel apropiada.

L'àlgebra, per Pérez de Mesa, és una part de l'aritmètica que l'autor diferencia de la logística que tracta de qüestions de caire més aviat comercial, i de l'aritmètica pròpiament dita que tracta dels nombres. La finalitat de l'àlgebra és trobar el valor de la incògnita fent una sèrie d'operacions aritmètiques, mitjançant la proporció contínua de les figures. Com ho expressa Pérez de Mesa, es tracta de trobar un nombre coneixent algunes de les seves propietats. Podríem dir que l'àlgebra és, per l'autor, un procediment per resoldre tot tipus de problemes aritmètics.

6.3.2. Els símbols

Pérez de Mesa no defineix de manera clara la notació que emprarà a la seva àlgebra a diferència dels altres autors que hem estudiat. La va introduint a mida que la necessita i normalment l'escriu al marge. Algunes vegades s'hi refereix explícitament en el text i d'altres no.

La primera anotació al marge apareix en el capítol 3r, a la pàgina 65, i hi posa les dues figures següents, que són un exemple d'allò que dèiem al descriure el manuscrit amb referència als nombres i les quantitats contínues. El que pretén l'autor és il·lustrar la superioritat dels nombres amb relació a les quantitats contínues dient que així com en la "quantitat contínua" hi ha quadrat i rombe, en els nombres no hi pot haver obliqüitat, sinó sempre rectitud. Pérez de Mesa considera les obliqüitats com imperfeccions (figura 6.3):

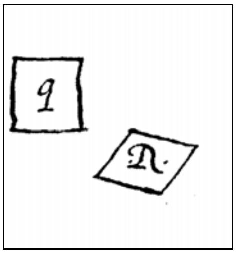


Figura 6.3. Símbols al marge.

...porque esta oblicuidad nace de la materia más crasa de lo continuo[461]*...*

Els símbols que hi ha a les dues figures són les inicials de quadrat i rombe. Si bé en el cas del quadrat es podria pensar que la intenció de l'autor és relacionar les dues dimensions de la figura amb el símbol "q" que utilitza pel quadrat de la potència, en el cas del rombe, el símbol que utilitza és el que, com veurem a continuació, fa servir per indicar el terme lineal, i per tant, les lletres que hi ha a l'interior de les figures, serien les inicials de "quadrat" i "rombe".

A la pàgina 66, després d'establir que els nombres en proporció contínua són el fonament de l'àlgebra, escriu en el marge la taula següent (figura 6.4)[462]:

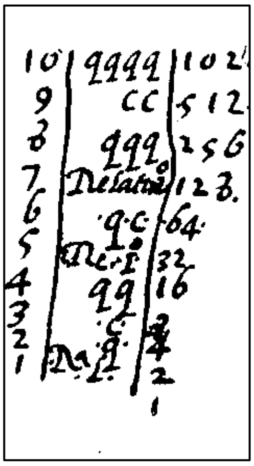


Figura 6.4.Taula de potències en la proporció dupla

461 Pérez de Mesa, 1598, 65.
462 *Ibid.*, 66.

encara que no en dóna cap explicació. A la columna central hi ha representats els símbols que corresponen a les potències de la incògnita[463]. En el cas de la primera potència hi ha dos símbols que són les inicials de "lado" i "raíz" i representen, per tant, la incògnita. Al costat del 2 hi ha la lletra *q* que representa el terme quadràtic i al costat del 3, la lletra *c* que representa el terme de tercer grau. Després es tracta d'anar combinant els símbols de forma multiplicativa per obtenir les potències corresponents. Quan l'exponent de la potència és un nombre primer, aleshores anomena *relat* a la potència. A la 3a columna hi ha els valors de les potències de la incògnita pel cas en què valgui 2 i a la primera columna hi ha el que Pérez de Mesa anomena "valor o dimensió" dels termes de les proporcions[464] geomètriques que són els exponents de les potències, és a dir, els graus de la incògnita. Estableix, doncs, com també hem vist en els altres autors, una correspondència entre les incògnites i els seus graus.

La taula següent és una il·lustració del mateix estil que aquesta però per la progressió que ell anomena tripla i que és la de primer terme 1 i raó 3 (figura 6.5).

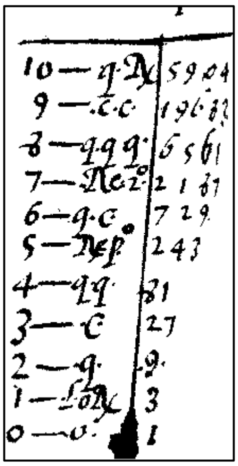


Figura 6.5. Taula de potències en la proporció tripla.

[463] En la representació de la desena potència hi ha una errada ja que els símbols que hi figuren correspondrien en realitat a una setzena potència. Aquesta errada no apareix en una altra taula d'aquest estil que col·loca en el marge de la pàgina 67.

[464] Pérez de Mesa fa servir indistintament els termes "proporció" i "progressió".

Així com a la taula anterior escrivia "relato" amb totes les lletres en el cas de la 7a potència, aquí ho abrevia tal com fa a les dues taules amb el "primer relat". En aquest cas afegeix zeros a la part inferior de la primera i segona columnes a diferència de la taula anterior en la qual al 1r terme no li assignava grau.

Després Pérez de Mesa es pregunta com s'han d'anomenar els termes de les progressions en funció del lloc que ocupen:

> *...conviene tener presto para saber en cualquier limite*[465] *de los que se apartan de la unidad que forma o figura o denominacion deba ponerse. Advertiremos de la doctrina puesta, que la denominacion de cuadrado es 2 y la de cubico 3 y la de q de q es 4*[466]*...*

Vol saber, per exemple, com s'ha d'anomenar un terme que ocupi el 6è lloc i per esbrinar-ho descompon el 6 en factors, que són 2 i 3. Segons la seva nomenclatura, la denominació que correspon al 3 és "cúbic" i al 2 "quadrat", i d'aquí dedueix que la que correspon al 6 és "quadrat de cúbic". En el cas dels termes que ocupin llocs que s'expressin amb nombres primers, correspondrà al 5è lloc la de "primer relat", al 7è la de "segon relat", a l'11è lloc la de "tercer relat" i així successivament. Seguint amb el seu raonament, el nombre que ocupa el 10è lloc s'haurà d'anomenar "quadrat de primer relat" i el que ocupa el lloc 21è és "cúbic de segon relat" i així tots els altres. I viceversa, donada una denominació, podem saber quin lloc de la progressió li correspon. Per exemple, per saber quin lloc correspon a la *denominació* "cúbic de quadrat de primer relat" es multipliquen els nombres corresponents, és a dir, 3, 2 i 5 i s'obté el nombre 30 que és el lloc que correspon a aquesta *denominació*. Pérez de Mesa utilitza, doncs, el terme "denominació", en el mateix sentit que l'utilitzava Núñez, per referir-se al que actualment s'anomena grau de la incògnita. Pérez de Mesa, però, no es refereix a les incògnites com a *dignitats* com Núñez, sinó que s'hi refereix com a *caràcters*, com ho fan els altres autors estudiats.

---

[465] Aquí l'autor utilitza "límit" amb el sentit de "terme".
[466] Pérez de Mesa, 1598, 67.

En el capítol 7è, on explica com es sumen i resten figures simples, és a dir, el que nosaltres anomenem monomis, torna a posar anotacions al marge relacionades amb la notació. Explica Pérez de Mesa que per sumar o restar quantitats han de ser de la mateixa espècie, és a dir, han de ser el que actualment en diem termes semblants.

En el capítol 8è l'autor explica la suma i resta de figures compostes, el que ara anomenem suma i resta de polinomis. Comentarem una de les restes que posa al marge (figura 6.6):

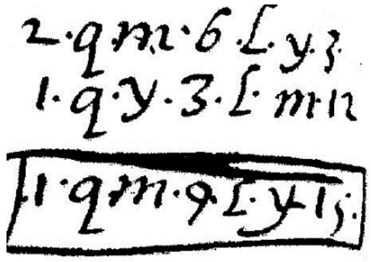
Notació de Pérez de Mesa	Notació actual
	$2x^2 - 6x + 3$ $-(1x^2 +3x -12)$ $1x^2 - 9x +15$

Figura 6.6. Resta de expressions algebraiques.

Cada terme té el seu signe "més" (*y*) o "menys" (*m*) i l'autor fa servir punts per separar els diferents símbols. Als primer termes no els posa signe i sempre considera que són positius. Introdueix en aquest paràgraf la nomenclatura *caracter* per referir-se també als signes "més" i "menys":

> *Por ser primeros no tienen caracter mas ni menos y siempre que fueren primeros se ha de obrar como si ambos tuviesen el caracter mas*[467].

[467] Pérez de Mesa, 1598, 70-71.

Sabem que s'està efectuant una resta perquè en el text ho diu, però igual que en cas de les figures simples, no hi ha cap símbol que ho indiqui. El primer terme començant per la dreta correspon al terme independent i Pérez de Mesa efectua l'operació +3-(-12)=+15. El segon correspon al terme lineal[468]. En aquest cas l'operació seria $-6x-(+3x) = -9x$. Finalment, a l'esquerra, hi ha el terme quadràtic que, com hem indicat abans, l'autor simbolitza amb una *q*. L'operació en aquest darrer cas és: $2x^2 -1x^2=1x^2$.

6.3.3. *Les equacions*

Pérez de Mesa dedica els darrers capítols a les equacions[469], a les quals ell s'hi refereix generalment com *igualacions*, com fan també les altres autors de l'època. Comença a tractar-les en el 18è, *De las igualaciones en genero*, on l'autor explica que la resolució d'equacions, que ell anomena "regla de la igualación", és la finalitat última de l'àlgebra i consisteix en conèixer en quina proporció geomètrica estan les *figures* o *dimensions* o, més concretament, en un cert coneixement del valor d'alguna *figura* o *dimensió* de la progressió. Es tracta de trobar un terme qualsevol d'una progressió geomètrica, la raó de la qual, ens donarà el valor de la incògnita. Per il·lustrar aquesta petita explicació posa com exemple les equacions que en llenguatge actual s'escriurien: $3x^2=12$ i $2x^5=64$. Diu que en el primer cas entendríem que un *quadrat* és 4 i en el segon que un *relat primer* és 32, és a dir, en té suficient amb trobar una potència de la incògnita.

El fet d'anomenar la resolució d'equacions com *regla de la igualación,* no la trobem en els altres autors. Núñez parla de fer "igualació" quan ha de transformar una equació per adaptar-la a una de les formes estàndards, però no dóna cap nom especial al procés específic de resolució de l'equació transformada.

[468] És el terme que Pérez de Mesa anomena "cosa", "línea", "raíz" o "lado".

[469] Sobre les equacions i els sistemes d'equacions al manuscrit 2294 de Pérez de Mesa, vegeu: Romero Vallhonesta, Fàtima, 2008, *op. cit.*

Explica Pérez de Mesa que en una equació[470] o ajustament de dues parts, de dimensió a nombre o de dimensió a dimensió a vegades s'iguala una dimensió simple a una altra de simple i aleshores s'anomena simple igualació i la regla que es fa servir es diu "regla de la simple igualació" o a vegades en una part hi ha dues dimensions iguals a un nombre, com si diguéssim que 1*c* i 4 *q* igualen a 24, que en notació actual seria: $x^3 + 4x^2 = 24$ o que un *relat primer* i 2*q* igualen a 5*c*, que ara s'escriuria: $x^5 + 2x^2 = 5x^3$. Diu que sempre que hi ha 3 quantitats o dimensions igualant-ne dues a una, diuen "els autors" que es tracta d'una igualació composta, encara que a vegades hi ha més de 3 quantitats, y aleshores "se n'igualen tres a una o tres a dues o de diverses maneres[471]". Cal remarcar que la paraula "equació" no la utilitzen els altres autors estudiats.

En el 19è capítol intitulat *"De algunas consideraciones y la igualacion simple y el modo general de obrar en ella"*, Pérez de Mesa tracta la resolució de les equacions que poden reduir-se a dos termes.

En el cas que es tingui una dimensió simple, és a dir, un sol terme igualat a un nombre, s'ha de fer una divisió i s'obté el nombre exacte que es busca si entre les dues parts de la igualació no hi ha dimensió intermèdia. En l'exemple que posa, es tracta de resoldre l'equació que en llenguatge actual s'escriuria: $\frac{4x}{2} = 8$. Primer Pérez de Mesa efectua la divisió que està indicada al primer terme, obtenint $2x=8$ i després divideix el 8 pel 2 i obté 4 com solució de l'equació. L'autor ho expressa així:

> *Supongamos que nos piden un numero que multiplicado por 4 y partido el producto por 2 engendre 8. Supondremos que aquel número que nos demandan es un lado. Haremos todo lo que la cuestion propone que es multiplicarlo por 4 y el producto sera 4£[472]. Partiendo 4£ por 2 salen de la particion 2£*

---

[470] És la primera vegada que apareix la paraula "ecuación" en el manuscrit. Fins aquest punt Pérez de Mesa només havia parlat d'igualacions.
[471] Pérez de Mesa, 1598, 89.
[472] £ no és exactament el símbol que fa servir Pérez de Mesa per a referir-se al terme de primer grau. Hem utilitzat aquest caràcter en el text per raons tipogràfiques.

el cual producto conforme a la demanda habia de ser el numero 8. Tendremos, pues, una igualacion de dos cantidades inmediatas y ambas simples. Partiremos la menor dimension que es el numero 8 por la mayor dimension que son 2 lados y vendra el numero 4 que es el valor de un lado y el numero que se buscaba[473].

Tot seguit fa la comprovació i afegeix que el resultat també ens dóna a conèixer que la progressió sobre la que s'ha treballat és la "quàdrupla".

Tindrem un cas diferent, diu l'autor, quan en una de les dues parts de la igualació hi ha dos termes de diferent grau units per la partícula "més" i la dimensió a la que afecta el signe "més" té el mateix grau que el terme que hi ha a l'altre costat de la igualtat. Aleshores diu l'autor que es resta el terme que té el signe "més" en els dos costats i la igualació queda reduïda a dos termes o dimensions simples. En l'exemple que posa es tracta de resoldre l'equació: $4x + 5 = 25$ i ho fa restant 5 als dos membres amb el que obté l'equació $4x = 20$ i dividint el 20 per 4 s'obté 5 com a solució.

Afegeix que si un cop ajustada la relació, queden dues formes mediates, és a dir entre les dimensions de les quals n'hi ha d'intermèdies, després de partir la menor dimensió per la més gran s'haurà de fer alguna arrel. Per exemple, si haguéssim de resoldre l'equació que ara s'escriuria: $x^2 + 6 = 42$ restaríem 6 unitats a cada membre de la igualtat i a continuació faríem l'arrel quadrada de 36 que és el que quedaria en el segon membre[474].

També fa explícits els passos que s'haurien de seguir si en una part de la igualació hi hagués una fracció: s'hauria d'obtenir una segona igualació multiplicant el nombre enter pel denominador de la fracció i així es convertiria la fracció en un enter.

473 Pérez de Mesa, 1598, 90.
474 Pérez de Mesa, 1598, 91.

Per acabar, resol una equació irracional sense considerar-la un cas especial. De fet, el que fa per resoldre-la és un canvi de variable.

Se pide un número que multiplicado por su raíz cuadrada y al producto quitándole 2, engendra 25[475].

Es tracta de resoldre de l'equació que en notació actual s'escriuria: $x \cdot \sqrt{x} - 2 = 25$.

Pérez de Mesa raona dient que si se'ns demana multiplicar un nombre per la seva arrel quadrada és perquè aquest nombre és un quadrat[476]. Aleshores tindrem un quadrat multiplicat per la seva arrel, del que en resulta un cub i l'equació que ha de resoldre es transforma en la que ara, després d'haver fet el canvi de variable: $y = \sqrt{x}$, s'escriuria $y^3 - 2 = 25$. En aquest punt Pérez de Mesa diu que s'han d'afegir dues unitats a cada membre de la igualtat i després s'ha de fer l'arrel cúbica perquè entre els dos termes hi falten dues dimensions. El valor de la incògnita és, òbviament, 3. Després té en compte que el que havia de buscar era el quadrat de la incògnita i que per tant, el nombre que es buscava és 9. Un cop feta la comprovació, diu que si el resultat de l'arrel fos un nombre irracional, estaríem fora "d'aquest gènere de contractes" i entraríem en el terreny de les quantitats contínues.

En el capítol 20è, Pérez de Mesa estudia les igualacions compostes que són les que s'obtenen "cuando después de haber quitado los superfluo que es lo que viene con el carácter más y añadido lo diminuto[477], quedan tres dimensiones[478]". Diu que aquestes tres dimensions que queden poden ser qualssevol, encara que "els escriptors" fan servir les dimensions: nº, £ i q i poden col·locar-se de tres maneres.

[475] *Ibid.*
[476] Pérez de Mesa, com altres autors de l'època, no atorga als irracionals la categoria de nombres.
[477] Núñez fa servir una expressió semblant quan estudia les equacions de segon grau: " sacando lo superfluo y restaurando lo diminuto..." Núñez, 1567,126.
[478] Pérez de Mesa, 1598, 92.

Veiem com els autors que hem tractat, tot i que utilitzen terminologia diversa i ho expressen de diferent manera, consideren tres casos per a la resolució del que nosaltres entenem ara per equacions de segon grau. Voldríem destacar, però, una diferència pel que fa al terme independent de les equacions.

Aurel l'acompanya del símbol que hem indicat amb una *Q*; Pérez de Moya li assigna el símbol "n" i Roca "N". En canvi, ni Núñez ni Pérez de Mesa, acompanyen de cap símbol el terme independent. Aquest és un element més per considerar que Núñez és una font important per Pérez de Mesa.

En el primer cas que considera per les igualacions compostes, Pérez de Mesa col·loca el nombre en el segon membre de la igualtat, que tindrà en el primer, els termes quadràtic i lineal. L'autor ho expressa dient: "en la segunda parte de la igualación está la menos dimensión que es nº y así será q y £ igual al nº[479]. També pot ser que en el segon membre hi hagi el terme quadràtic i aleshores tindrem en el primer membre el terme lineal i el terme independent o, finalment, pot ser que a la segona part de la igualtat hi hagi el terme lineal, amb el que quedaran al primer membre el termes quadràtic i independent[480].

A continuació Pérez de Mesa posa exemples de resolució de cadascun d'aquests tres casos. Quan resol el primer, fa referència a "la primera regla de las compuestas[481]" i quan resol el segon i el tercer parla del segon i tercer cànons[482].

Per a resoldre el primer cas, Pérez de Mesa diu que s'ha de fer el següent:

---

[479] Pérez de Mesa, 1598, 92.
[480] Els tres tipus d'equacions compostes són els mateixos que proposa al-Khwârazmî a la seva obra *Al-Kitâb al-Mukhtasar fî Hisâb al-Jabr wa al-Muqâbala,* però l'ordre no és el mateix, el segon i el tercer tipus estan intercanviats. L'ordre que proposa Pérez de Mesa és el mateix de Núñez.
[481] Pérez de Mesa, 1598, 92.
[482] *Ibid.,* 92, 93.

Tomaremos la mitad del numero de las lineas[483] *como que fuese nº absoluto sin caracter, cuadrarlo hemos y este cuadrado se añadira a la segunda parte de la igualacion que es al nº. De tal suma se saca la raiz cuadrada y a esta raiz cuadrada le quitaremos la mitad del nº de las lineas y quedara el nº que buscamos*[484].

Així com es refereix al coeficient del terme lineal dient "el número de las líneas" i es refereix al terme independent com el "número", en cap cas fa referència al coeficient del terme quadràtic, que considera sempre 1, igual que Núñez. Els altres autors estudiats, però, parlen del "número de los censos" per referir-se al coeficient del terme de segon grau perquè no consideren que hagi de ser necessàriament la unitat.

En el primer cas resol una equació del tipus: $x^2 + bx = c$ i el procediment que empra equival a l'aplicació de la fórmula: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ que és la que s'utilitza actualment per a resoldre les equacions de segon grau en el cas que el coeficient del terme de grau més alt sigui 1 i sense tenir en compte les dues determinacions de l'arrel. Pérez de Mesa només té en compte la determinació positiva i, per tant, només dóna una solució, que sempre serà positiva perquè, com que c és positiu, l'arrel quadrada de $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$, sempre serà més gran que $\frac{b}{2}$.

L'exemple de resolució que proposa per aquest cànon és l'equació que ara s'escriuria: $x^2+4x+7=52$. El primer que fa és restar 7 als dos membres, resultant l'equació $x^2+4x=45$ que ja no es pot reduir més i aleshores fa els passos corresponents a la fórmula anterior. Vegem com ho expressa Pérez de Mesa:

Pidese un numero que sumados su cuadrado con 4£ de su mismo q y con siete mas monte 52. Supongamos que el nº que nos demandan es un lado, el cuadrado de este, sera un cuadrado. Sumando este q mas 7 sera la suma 1q y 4£ y 7 la cual es igual a 52. Igualando, quitaremos 7 de ambas partes y

483 Es refereix al coeficient del terme lineal.

484 Pérez de Mesa, 1598, 92.

quedaran 1q y 4£ iguales a 45 y no se podran quitar los 4£ de la una parte porque no hay lados en la otra. Quedara pues la igualacion en tres cantidades o dimensiones y porque de ellas el nº esta en la segunda parte y cuadrado y lado en la primera sera la primera regla de las compuestas. Tomaremos pues la mitad de los lados que es 2. Cuadrarle hemos y sera el cuadrado 4. Juntaremos este con el nº de la segunda parte y sera la suma 49. De esta suma tomaremos la Rq[485] *que es 7 de la cual quitaremos la mitad de los lados que es 2 y quedara 5 que es el mismo numero que buscamos porque su cuadrado 25 junto con 4£ que son 20 y siete mas montan 52 como se puso en la demanda, el cual precepto y doctrina es general, fundada en la septima proposicion del segundo de los Elementos*[486] *de Euclides*[487].

L'autor afegeix que si, després de fer el quadrat de la meitat del coeficient del terme lineal i afegir-li el nombre que hi ha al segon membre de la igualtat, resulta un nombre que no té arrel quadrada exacta, direm que l'arrel quadrada irracional de la tal suma menys la meitat del coeficient del terme lineal és el nombre que es busca, és a dir, l'arrel es deixa indicada. Aquest resultat, considera Núñez que el podem tenir en compte si estem treballant amb quantitats contínues però amb nombres i contractes públics és absurd.

A continuació indica els passos a seguir per resoldre les equacions que corresponen als altres dos cànons. En el cas del segon cànon proposa un exemple que correspon a la resolució de l'equació: $x^2 - 4x = 25$ que té dues solucions irracionals. Ell dóna com a solució de l'equació la que correspon a la determinació positiva de l'arrel: $\sqrt{29} + 2$. Sense comprovar res ni fer cap més comentari, proposa la resolució de l'equació: $x^2 - 2x = 80$. Aquesta equació té les solucions 10 i -8, de les quals Pérez de Mesa troba la positiva i comprova que és solució. En aquest cas diu que la resolució està basada en la 6a proposició del llibre II dels *Elements*[488]. Pel tercer cànon, l'exemple que posa porta a resoldre l'equació:

---

485 Símbol que fa servir Pérez de Mesa per a l'arrel quadrada.

486 L'enunciat de la proposició 7a del llibre II dels *Elements*, és el següent: If a straight line be cut at random, the square on the whole and that on one lof the segments both together are equal to twice the rectangle contained by the whole and the said segment and the square on the remaining segment. Heath, Thomas L., 1908. *Euclid. The thirteen books of the Elements*, **1**, 388-389. Cambridge University Press. London. [Si es talla a l'atzar una línia recta, el quadrat de la recta sencera i el d'un dels segments, considerats conjuntament, són iguals a dues vegades el rectangle comprès per la recta sencera i el segment anterior, més el quadrat del segment restant.]

487 Pérez de Mesa, 1598, 92.

488 If a straight line be bisected and a straight line is added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line together with the square on the half is equal to the

$8x - 12 = x^2$. En aquest cas l'equació té dues solucions positives, però, igual que en els casos anteriors, Pérez de Mesa només dóna la que correspon a la determinació positiva de l'arrel, que és 6 i que també comprova.

Hi ha una diferència important amb els altres autors, amb relació a les proposicions dels *Elements* d'Euclides que citen Núñez i Pérez de Mesa quan expliquen la resolució d'equacions. Aquests dos autors fan referència a les proposicions 6 i 7 del llibre II, que és un llibre que en una traducció recent a l'anglès modern[489] de la reconeguda traducció del text grec de Heiberg, se l'ha anomenat: "fonaments d'àlgebra geomètrica" perquè el seu contingut permet relacionar la geometria amb qüestions que actualment es solen resoldre amb procediments algebraics. Per tant, aquests dos autors tenen present les justificacions geomètriques a l'hora de resoldre equacions, a diferència dels altres autors, les obres dels quals hem analitzat, que no citen aquestes proposicions.

Pérez de Mesa explica que aquests cànons han estat estesos a altres dimensions pels escriptors de l'àlgebra amb una de les dues condicions següents: que les tres quantitats siguin immediates o que guardin entre elles la mateixa proporció. Com a exemple d'equacions que compleixen la primera condició posa les següents: $x^3 = 4x^2 + 5x$, corresponent al primer cànon; $x^5 + 2x^4 = 4x^4 + 5x^3$, corresponent al segon i $x^4 + 2x^2 = 6x^3$ al tercer. Diu que alguns escriptors rebaixen aquestes dimensions però que això és superflu i que n'hi ha prou amb tenir com a referència la dimensió intermèdia. Com a exemples d'equacions que compleixen la segona condició dóna els següents: $1x^5 = 2x^3 + 8x$ i $x^7 = 4x^4 + 32x$. En el primer cas, falta una dimensió intermèdia i el que resulta és el quadrat de la "cosa". Per tant, per obtenir-la, s'haurà de fer l'arrel quadrada del resultat. Si falten dues

---

square on the straight line made up of the half and the added straight line. Heath, Thomas L., 1908. *Euclid. The thirteen books of the Elements*, **1**, 385-388. Cambridge University Press. London [Si es divideix en dues parts iguals una línia recta i se li afegeix, en línia recta, una altra recta, el rectangle comprès per la recta sencera i la recta afegida, juntament amb el quadrat de la meitat és igual al quadrat de la recta composta per la meitat i la recta afegida].

[489] Fitzpatrick Richard, 2008. *Euclid's Elements of Geometry. The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885).* Richard Fitzpatrick.

dimensions intermèdies, com en el segon exemple, el nombre que resulta és el cub de la "cosa" i l'arrel cúbica del resultat és el nombre que es busca. Si falten tres dimensions, per obtenir el valor de la "cosa" s'haurà de fer l'arrel de l'arrel del resultat i així infinitament, tal com ho expressa l'autor. Hi ha, doncs, la idea de generalització alhora d'explicar el procediment per a resoldre equacions de grau superior que s'adaptin a cadascun dels tres cànons bàsics que l'autor ha establert.

En el capítol 21è que porta per títol "*Como cualquier caso de igualación simple o compuesta es inmediata*", diu l'autor que les igualacions no han d'estar reduïdes a dues o tres quantitats proporcionals mediates o immediates "como corre la doctrina vulgar de los autores" sinó que s'estenen infinitament. En aquest cas la generalització és més àmplia, ja que no es limita als tres cànons establerts. Continua Pérez de Mesa: "la doctrina dels autors és estreta" perquè només descobreix el valor i progressió de la cosa en el cànon simple i en els tres compostos, deixant apart la invenció de Tartaglia[490] per la qual troba el valor de la cosa quan c i £ s'igualen a un nombre.

Pérez de Mesa afirma que hi ha un camí per trobar el valor de la línia o la cosa en qualsevol igualació o disposició de dimensions, siguin 2, 3 o 4 o més, mediates o immediates, "como ellos dicen proporcionales o no proporcionales[491]" amb la condició que els valors de les figures o dimensions siguin racionals, és a dir, diu que es pot resoldre qualsevol equació de qualsevol grau, sempre que tingui solucions racionals.

[490] Pérez de Mesa posa aquí de manifest que no hi ha un mètode per a resoldre altres equacions amb tres termes que les de segon grau, o les que s'hi puguin transformar. Segons l'autor, l'únic que havia fet un pas endavant era Tartaglia que va trobar la manera de solucionar l'equació: $x^3+mx=n$. De fet, el primer en publicar la solució d'una equació d'aquest tipus va ser Cardano en la seva *Ars Magna,* el 1545. En aquesta obra hi apareix també una quàrtica per reducció a una cúbica.

[491] Pérez de Mesa, a diferència d'altres autors, no parla de proporció contínua entre les incògnites sinó de la progressió geomètrica que formen, tot i que els termes d'una progressió geomètrica estiguin en contínua proporció. Aquí Pérez de Mesa es refereix a com altres autors parlen de la relació entre les potències de la incògnita.

En aquest apartat, les progressions hi són presents d'una manera encara més explícita que a la resta de l'obra. Primer explica com es poden anar reduint les figures depenent de la progressió de la que formin part. Per exemple, diu que en la progressió de raó 2, una cinquena potència és el mateix que dues quartes potències, que quatre terceres potències, que vuit quadrats i, finalment, el mateix que 16 vegades la incògnita. A la progressió de raó 3, en canvi, una quarta potència és el mateix que 3 terceres potències, que 9 quadrats i que 27 vegades la incògnita. Pérez de Mesa ho expressa:

> *...en la progrersion dupla un Relato primo ques 32 es lo mismo que 2qq y lo mismo que 4c y lo mismo que 8q y finalment lo mismo que 16 £ però en la progrersion tripla un qq ques 81*[492] *sera lo mismo que 3c y lo mismo que 9q y lo mismo que 27£*[493]*...*

En notació actual, ho podríem expressar:

$$x^5 = 2x^4 = 4x^3 = 8x^2 = 16x \text{ per la progressió de raó 2.}$$

I per la de raó 3:

$$x^4 = 3x^3 = 9x^2 = 27x$$

Defineix l'autor progressió simple com aquella que té per denominador[494] un nombre primer, com per exemple, la dupla en què el denominador és 2, la tripla en què és 3 o la quíntupla en què és 5 i diu que és d'aquestes progressions que ens servirem per reduir figures, és a dir, per anar rebaixant el grau de la incògnita.

---

[492] Hi ha una errada en el manuscrit: Pérez de Mesa hi posa 18. Pérez de Mesa, 1598, 95.
[493] Pérez de Mesa, 1598, 95.
[494] A l'Aritmètica que precedeix l'àlgebra, Pérez de Mesa dedica un capítol a les progressions, en el que defineix progressió aritmètica i geomètrica i explica com es sumen els seus termes. Anomena "denominación" d'una progressió geomètrica al que actualment anomenem raó. Aquí, en lloc de "denominación" es refereix a la raó com a "denominador".

Si tenim alguna figura o dimensió igualada a un nombre, com passa en tots els casos del cànon simple, anirem reduint les dimensions fins a obtenir una línia per tal que quedin immediats £ i el nombre en la igualació. A continuació partirem el nombre per les línies i obtindrem el nombre que busquem. Posa l'exemple següent:

> *Buscase un nº que multiplicado en si mismo y el producto en si mismo y anidiendo 9 a este ultimo producto engendre 90*[495].

Es tracta de resoldre l'equació: $x^4 + 9 = 90$. Diu que si restem 9 als dos membres, el nombre que resulta és 81 que té el 3 entre les seves parts alíquotes i que com que una d'aquestes parts ha de ser la denominació de la progressió[496], podem suposar que aquesta figura està en la progressió tripla.

El fet que digui que la figura està en la progressió tripla vol dir suposar que la solució de l'equació és 3. Amb aquesta premissa redueix el terme de quart grau de la manera següent: $x^4=3x^3=9x^2=27x$. Aleshores diu que com que es tenia que $x^4=81$, també $27x=81$ i en aquesta darrera igualtat tenim formes immediates. Partint, doncs, 81 per 27 obtindrem el nombre 3 que és el valor de la cosa i el número buscat. A continuació analitza què hauria passat si en comptes de prendre el 3 com a part alíquota de 81, haguéssim considerat el 27 o el 9 i s'adona que és impossible, perquè, per exemple, en el cas d'haver considerat la progressió de raó 9, s'hagués obtingut 729x = 81, quan en la progressió de raó 9, 729x són 6561 i no 81.

Un altre exemple que posa és el següent:

> *Pidese un nº que multiplicado en si mismo y al producto añidiendole 4 tanto del mismo nº y de la suma quitando 3, queden 18*[497].

---

[495] Pérez de Mesa, 1598, 95.
[496] Pérez de Mesa està donant per conegut el fet que la solució de l'equació ha de dividir el terme independent, però no ho justifica.
[497] Pérez de Mesa, 1598, 96.

En aquest cas es tracta de resoldre l'equació : $x^2+4x-3=18$. Primer, passa Pérez de Mesa el 3 al segon membre amb el que resulta $x^2+4x=21$ corresponent al primer cànon dels compostos. El 21 té els factors 3 i 7. Aleshores diu que si es tractés de la progressió de raó 7, cada quadrat equivaldria a 7 termes lineals, els quals, juntament amb els 4, farien 11, que no és divisor de 21. És a dir, en la progressió de raó 7, l'equació $x^2+4x=21$, equival a l'equació $7x+4x=21$, o sigui $11x=21$ i aquí l'autor no continua perquè 11 no és divisor de 21. En canvi, continua l'autor, en la progressió "tripla", un quadrat equival a 3 termes lineals, que juntament amb els 4 faran 7. Partint el 21 per 7 tindrem el valor de la "cosa" que busquem que serà el número 3[498]". En la progressió tripla, l'equació $x^2+4x=21$ equival a l'equació $3x+4x=21$, és a dir, $7x=21$ i, per tant el valor de la x és 3 que, de fet, és el que s'havia suposat al considerar la progressió tripla. En tots els exemples que posa hi ha solucions enteres i l'autor només en busca una.

El que mostra l'autor amb aquests exemples és la resolució d'equacions, a partir dels divisors del terme independent i, per tant, busca només solucions enteres. Un dels mètodes que s'utilitzen per trobar les solucions enteres d'equacions polinòmiques qualssevol, es basa en què les solucions enteres d'una equació polinòmica divideixen el terme independent. Es busquen els divisors d'aquest terme i es prova si verifiquen l'equació. Si un valor a la verifica, el polinomi corresponent és divisible per $x-a$. La divisió per aquest binomi s'efectua per l'anomenat mètode de Ruffini[499] i permet rebaixar el grau de l'equació inicial. Pérez de Mesa no rebaixa el grau de l'equació sinó que només comprova quin dels divisors del terme independent és solució, sense efectuar la divisió que facilitaria la cerca d'altres solucions. Cal remarcar la manera que té l'autor de comprovar la solució, ja que no es tracta de substituir directament el valor a l'equació sinó d'utilitzar la relació entre les incògnites per tal de

---

[498] Pérez de Mesa, 1598, 96.

[499] Paolo Ruffini (Valentano, 1765 - Mòdena, 1822) va ser un matemàtic i físic que va estudiar la resolució d'equacions. Va ser un dels primers matemàtics en intentar mostrar la impossibilitat de trobar una solució algebraica per l'equació general de grau cinquè.

reduir l'equació a una de primer grau, trobar el valor de la incògnita i comprovar que coincideix amb el divisor corresponent del terme independent.

Afegeix Pérez de Mesa que apart dels 3 cànons compostos, a totes les altres disposicions dels nombres que són infinites i possibles, es procedirà com en els exemples.

En el capítol 22è titulat "*De la posibilidad e imposibilidad de las cuestiones*" considera que les qüestions que es plantegen en l'àlgebra, a vegades les verifica un sol nombre, a vegades més d'un, a vegades les verifiquen tots i a vegades, cap.

Fa explícits casos com:

1. Si les dimensions són de la mateixa espècie i els nombres desiguals, el cas és impossible, com en el cas que tinguéssim $4x^3=3x^3$ o $10x=3x$ perquè això seria com afirmar que 10 és igual a 3. Com els altres autors, Pérez de Mesa no considera el 0 com a solució.
2. Quan en la igualació hi hagi dues formes d'una mateixa espècie i els seus coeficients siguin iguals, la demanda és supèrflua i vana perquè es verifica per tots els nombres. Pérez de Mesa no ho exemplifica però es refereix al cas en què per exemple: $4x^2 = 4x^2$. En aquests cas diversos autors d'aquesta època consideren que l'única solució d'aquesta equació és el valor 1[500]. En canvi, Pérez de Mesa, com també hem vist a l'obra de Núñez, considera que qualsevol nombre és solució.
3. Si les formes en la igualació fossin diverses i els nombres iguals, la qüestió és impossible, com si s'igualessin $3x^3$ a $3x$. Està clar com en el primer cas que el 0 no es té en compte com a solució.

---

[500] Pacioli resol un problema que el porta a l'equació $12x=12x$ (12*co*. sonno equalia 12 *co.)* i conclou que el valor de la incògnita és 1: Pacioli, 1494, 145. Aurel considera que si $3x=3x$ *o* $4x^2=4x^2$, el valor de la incògnita és 1Q, en una nota que segueix a la regla de la darrera igualació simple: Aurel, 1552, 78ᵛ. Pérez de Moya en el capítol X del seu *Compendio* posa diversos avisos per a les igualacions, un dels quals es refereix a què si s'igualen 6*cv*. a 6 *cv*. o 2*co*. a 2 *co*., aleshores el valor de la *cosa* o la resposta a la demanda és *uno:* Pérez de Moya, 1558, 62ᵛ-63ʳ.

4. Si les formes són diverses i els nombres també diversos, la qüestió és possible i es verificarà per algun nombre racional o irracional.

Afegeix també que en el cas de les equacions de segon grau del tipus $x^2+c=bx$ no hi ha solució quan $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$.

6.3.3.1. *Els sistemes d'equacions*

Pérez de Mesa resol sistemes d'equacions en el darrer capítol que titula "*de la Regla de la quantidad*[501]". Diu l'autor que els "escriptors" parlen de "regla de la quantitat" quan no poden arribar a la fi que pretenen amb una sola incògnita sinó que en necessiten dues o tres o més i que per resoldre aquest tipus de situacions, no ho fan de la mateixa manera tots els "escriptors". Com que causaria confusió anomenar £ o *cosa* totes les incògnites, solen deixar el nom de cosa per a la primera posició anomenant quantitats a les altres i els posen noms diferents. A la segona l'anomenen "a", a la tercera "b", a la quarta "c" i moltes vegades a cap d'elles l'anomenen cosa sinó que anomenen "a" a la primera, "b" a la segona, "c" a la tercera i així contínuament.

Aquesta darrera possibilitat és la que tria Pérez de Mesa. Per a resoldre el sistema va reduint les expressions fins a obtenir la incògnita igualada a un nombre, i aleshores pel "cànon simple" sabrà el valor de la incògnita. Quan tingui el valor d'una incògnita, d'una en una, anirà trobant totes les altres. Sense més explicació teòrica es posa a plantejar i resoldre un exercici que porta a plantejar el sistema d'equacions que ara s'escriuria: $\begin{cases} \frac{1}{2}b + a = 15 \\ b + \frac{1}{3}a = 10 \end{cases}$ anomenant "a" al nombre gran i "b" al petit, i considera que el primer que s'ha de fer és reduir les fraccions a enters.

[501] Vegeu Romero Vallhonesta, 2012, *op. cit.* 145-146.

Després de treure els denominadors, obté *2a+b=30* i *a+3b=30*. Resol el sistema per reducció multiplicant la segona equació per 2 i restant-li la primera amb el que li queda *5b=30* i d'aquí obté el valor 6 per a la b. Substitueix aquest valor a la primera equació i obté el valor de a que és 12.

> *Dense dos n^os^ que sumando la mitad del menor con el mayor hagan 15 y el menor con el tercio del mayor haga diez. Supongamos ser el mayor 1a y el menor 2b, los cuales ambos son lados en diversas progresiones conforme a la demanda, pues 1a y una* $\frac{1}{2}b$ *son 15 o igualan a 15 y una b con un tercio de a igualan a 10. Igualemos pues reduciendo los quebrados a enteros como arriba se ha enseñado y de esta manera serán 2a y 1b iguales a 30 en la primera demanda o mayor nº y en el menor 1a y 3b serán iguales a 30 y los escribo de esta forma*[502] *y por el valor dos de la primera cantidad multiplico la segunda y salen 2a y 6b y 60. Quito de ahí toda la primera cantidad 2a y b y 30 y quedan 5b iguales a 30. Parto 30 por 5 y salen 6 que es el valor del lado b. Este es uno de los dos números que buscamos. Y porque en una de las igualaciones puestas dijimos 2a y 1b iguales a 30, volviendo a igualar que es quitando pues se sabe ya que una b es 6, será 2a y 6 iguales a 30 y volviendo a igualar que es quitando de ambas partes 6, quedará 2a iguales a 24 o 2 £ iguales a 24. Parto 24 por 2 y sale 12 que es el valor de a o del otro lado y nº que buscamos*[503]

La resolució és retòrica com en el cas de les equacions però en aquest cas escriu el sistema al marge, un cop trets els denominadors, de la manera següent:

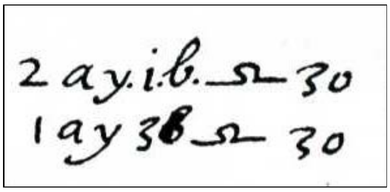


Figura 6.7. Sistema d'equacions explícit[504]

Fa servir la "y" per indicar el signe més i indica amb una Ω la igualtat. És la primera vegada en tota l'obra que utilitza un símbol per a la igualtat. Cal remarcar que ni Bombelli

---

[502] Aquí fa referència al sistema que hi ha reproduït al final de la pàgina i que escriu al marge, no l' insereix en el text.

[503] Pérez de Mesa, 1598, 99.

[504] *Ibid.*

(1572) ni Stevin (1585) ni el mateix Viète (1590) utilitzaven cap símbol per a indicar la igualtat. Pérez de Moya, en el seu *Tratado* de 1573, en el capítol 44è on posa avisos per a les igualacions, parla de la figura que vol dir " ser lo vno ygual, a lo otro[505]", però després no la utilitza per expressar la igualtat. Diu "en su lugar por no auer otra en la emprenta pongo esta yg[506]," expressant-ho de manera molt semblant a com ho expressa quan declara els caràcters i després n'utilitza uns altres tal com hem vist al capítol 3. A l'obra de Pérez de Mesa, el símbol Ω serveix per convertir una equació en un nou objecte de l'àlgebra, de manera que les equacions es poden sumar, cosa que no passa en l'obra de Pérez de Moya, ja que en el *Tratado* de 1573 quan resol problemes per la *regla de la quantitat*, no posa de manifest els sistemes i els resol pel mètode que actualment es coneix com a "substitució", de manera que no ha d'operar amb les equacions.

S'ha de destacar el fet que Pérez de Mesa tracta les incògnites amb rang d'igualtat assignant-les lletres per ordre alfabètic que no pressuposen la jerarquia de cap incògnita respecte les altres.

A part d'aquest pas important en la resolució de sistemes d'equacions, Pérez de Mesa resol també algun sistema no lineal. En aquest cas ho fa utilitzant el mètode de substitució. Vegem-ne un exemple:

> *Dame dos números que multiplicado el uno por 6 y añadiendo al producto 2, haga tanto como multiplicando el otro por 7 y quitando al producto 14 y asimismo que multiplicando el uno por el otro engendren 90[507].*

El sistema al que ara es traduiria aquest enunciat utilitzant les incògnites que fa servir Pérez de Mesa és : $\begin{cases} 6£ + 2 = 7a - 14 \\ £ \cdot a = 90 \end{cases}$. En aquest cas considera primer l'equació *6£+2=7a-14*

[505] Pérez de Moya, 1573, 539.
[506] *Ibid.*, 540.
[507] Pérez de Mesa, 1598, 100.

de la que aïlla "a" que resulta: $\frac{6}{7}£ + 2 + \frac{2}{7} = a$ i diu que s'ha d'actuar com si es conegués el valor de "a", fet que es tradueix en escriure la segona equació en funció de "a": $\frac{6}{7}q\ y\ 2\ y\ \frac{2}{7}£ = 90$, expressió que actualment s'escriuria: $\frac{6}{7}£^2 + \left(2 + \frac{2}{7}\right)£ = 90$. A continuació diu que s'han de reduir les fraccions a enters partint per $\frac{6}{7}$ i quedarà de la forma $1q\ y\ 2\ y\ \frac{2}{3}£$ iguals a 105, que en llenguatge actual és: $£^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)£ = 105$. Com que en aquesta expressió hi ha tres quantitats de tal manera que la més gran i la mitjana són iguals a la més petita, estem en el primer cànon dels compostos. Resol l'equació de segon grau, que té una solució positiva i una de negativa i obté la positiva que és 9.

En la resolució del sistema de tres equacions amb tres incògnites que veurem tot seguit, és destacable la claredat amb què descriu tots els passos que fa. Planteja el problema següent:

> *Pídense 3 números que el mayor con el tercio de los otros dos haga 17 y el segundo con el tercio de los otros 2 haga 15 y el tercero con el tercio de los otros haga 13*[508].

La traducció d'aquest enunciat a sistema d'equacions donaria com a resultat en el llenguatge actual:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = 17 \\ \frac{1}{3}a + b + \frac{1}{3}c = 15 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + c = 13 \end{cases}$$

El primer que fa Pérez de Mesa, és treure denominadors i escriu el sistema al marge una vegada els ha tret, de la següent manera:

---

[508] Pérez de Mesa, 1598, 99.

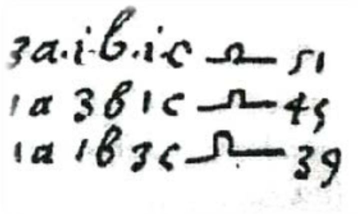


Figura 6.8. Sistema de 3 equacions amb 3 incògnites

A l'hora d'escriure aquest segon sistema no té tanta cura amb la notació i no escriu signes entre els termes. Per resoldre'l multiplica la segona equació per 3 i la resta de la primera. L'autor ho expressa dient "multiplico la segunda parte por el valor de la primera y quito de ahí la primera cantidad[509]". Després multiplica també la tercera equació per 3, la resta de la primera i obté el sistema:

$$\begin{cases} 8b + 2c = 84 \\ 2c + 8c = 66 \end{cases}$$

A continuació multiplica la primera equació pel coeficient de "b" de la segona i la segona pel coeficient de "b" de la primera i les resta, obtenint el valor de "c" que és 6. Aleahores substitueix cap enrere, obtenint la "b" de l'equació [*8b+2c=84*] i finalment la "a" de l'equació [*3a+b+c=51*].

Després de resoldre els sistemes d'equacions lineals, Pérez de Mesa cita a Diofant (ca. 200-ca. 284) i es refereix a la resolució de les equacions que avui s'anomenen diofàntiques.

Ho expressa:

Entre estas reglas de la quantidad se puede suponer lo que Diofanto dize de la ygualacion fingida, esto es quando algunes formes de una progrersion que estan en nº determinado se ygualan a una forma de otra progrersion[510].

[509] *Ibid.*
[510] Pérez de Mesa, 1598, 100.

L'autor posa com a exemple l'equació que actualment s'escriuria: $6x^2+16=y^2$ i diu que per resoldre-la, Diofant suposa que $y=2x+4$, que al substituir-ho en el segon membre de l'equació resulta: $6x^2 +16= 4x^2 +16x+16$ i d'aquí $x=8$. Aquesta és una altra novetat respecte als altres autors estudiats, que quan citen Diofant, ho fan amb relació als possibles orígens de l'àlgebra però no es refereixen a la seva manera de resoldre equacions.

6.4. Fonts

Al principi de la part algebraica del manuscrit, Pérez de Mesa cita Pitàgores i Plató, com a exemples de persones doctes en la part de l'aritmètica que té com a objectiu l'estudi de la naturalesa dels nombres segons les seves propietats.

Cita després a "Triputeon"[511] quan es refereix a diferents denominacions que rep l'àlgebra i diu que aquest autor l'anomena "ciencia de la cuadratura".

En el capítol 1r, que fa referència a la naturalesa dels nombres, fa una sèrie de reflexions de caire més aviat filosòfic i es refereix diverses vegades a Aristòtil[512]. Cita concretament "el primer libro de los posteriores, capítulo 23[513]", en un fragment en el qual disserta sobre la importància de l'aritmètica i la geometria[514]. Després posarà de manifest les diferències entre els nombres i les quantitats contínues i dirà que "Platineo"[515] considera que el nombre i el continu no participen de la mateixa manera de la naturalesa de quantitats, sinó que és el nombre el que té l'essència de quantitat.

[511] No està clar a qui es refereix Pérez de Mesa amb el nom de "Triputeon". Més endavant cita a "Puteon". Podria tractar-se de la mateixa persona, molt probablement Johannes Buteo, nom llatinitzat de Jean Borrell, matemàtic francès nascut al voltant del 1492, i mort entre 1564 i 1572.
[512] Durant el segle XVI es va incrementar la influència humanística sobre l'educació, que plantejava tot un repte a la filosofia aristotèlica. Tot i això, l'autoritat d'Aristòtil va seguir dominant els estudis universitaris fins ben entrat el segle XVII.
[513] Pérez de Mesa, 1598, 62.
[514] Més endavant tornarà a citar Aristòtil. En aquest cas, el capítol onzè del llibre cinquè de la Metafísica.
[515] Aquí podria referir-se Pérez de Mesa a Plotino, filòsof del segle III, nascut a Licòpolis (Egipte).

En el capítol 3r, que tracta de la forma que tenen amagada els nombres, cita a Jordano[516] i al "maestro Ciruelo"(1470-1548) [517].

Continuant amb aquest capítol, que és un dels més espessos del manuscrit, diu que quan es parla de quantitats contínues, sorgeixen els quadrats si es multiplica una línia recta per una altra i, entre els nombres, els quadrats o plans sorgeixen multiplicant un nombre per ell mateix. També hi ha els nombres "planos quadrangulos" o "planos prolongados" que s'obtenen al multiplicar dos nombres diferents. Aquí cita a "puteon" que anomena "contingut" a tot nombre pla, i "continent" a un dels costats que l'ha generat. A l'altre costat diu que se l'anomena normalment "cosa".

Al final d'aquest capítol cita els llibres 2n, 7è, 8è, 9è i 10è dels *Elements* d'Euclides. En les referències a aquest autor, que són moltes, Pérez de Mesa sempre cita llibres concrets i sovint, proposicions concretes. Una proposició que és clau per l'autor com a fonament de l'àlgebra, és la 8a del llibre IX i quan tracti les equacions de segon grau, dirà que la doctrina general per a resoldre-les està basada en la 7a proposició del llibre II dels *Elements* i en el mateix capítol fa referència també a la 6a proposició[518].

Un altre dels autors que cita és "peronuñez"[519] en un fragment del capítol 4rt en el qual parla del nom que es sol donar a la incògnita i diu que aquest autor, a diferència dels italians que l'anomenen "cosa", distingeix entre "lado o raíz".

---

[516] Es pot tractar de Jordanus Nemorarius (1225-1260), matemàtic i filòsof alemany. Va escriure 6 tractats de matemàtiques, el més important dels quals pel que fa referència a la seva contribució al desenvolupament de l'àlgebra és: *De numeris datis.* Per més informació, vegeu Høyrup, Jens, 1988, "Jordanus de Nemore 13th Century Mathematical Innovator", *Archive for History of Exact Science,* **38,** 307-363.

[517] Pedro Sánchez Ciruelo va nèixer a Daroca el 1470 i va ser preceptor de Felip II i professor de teologia a la universitat d'Alcalà de Henares. Va escriure el 1529 *Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium.*

[518] L'expressió algebraica que correspondria a la proposició 6 del llibre II dels *Elements* és: $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$ i la que correspondria a la proposició 7 del mateix llibre: $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$.

[519] Aquí es refereix clarament a Pedro Núñez.

Cap el final del manuscrit Pérez de Mesa critica els autors, en general, perquè diu que només s'han ocupat de les equacions de primer i segon grau i cita "Nicolas Tartalia" (1500-1557)[520] com a excepció, per haver inventat un mètode per a resoldre les equacions de tercer grau sense terme quadràtic.

A la part aritmètica del manuscrit, hi són citats alguns d'aquests autors però també en cita dos més que val la pena destacar. En el llibre 3r de les fraccions astronòmiques, justifica la divisió de la unitat en 60 parts dient que 60 és un nombre que té molts divisors i atribueix aquest motiu a Oroncio Fineo[521]. En el capítol de les "falsas oposiciones" del llibre 5è explica la regla de falsa posició i diu que hi ha dues maneres d'aplicar-la. Una d'elles l'atribueix a "Juanputeon" que ja hem citat anteriorment i l'altra l'atribueix a "Gema Frisio" (1508-1555) [522].

6.5. Conclusions

Pérez de Mesa va ser un personatge destacat a la seva època i amb una producció científica important, que va romandre manuscrita. Com Roca i Núñez va ser també professor universitari, com ja hem vist, i força reconegut com ho mostra el fet que li concedissin un augment de sou a Alcalà per tal que no ocupés la càtedra de Salamanca que havia guanyat.

L'àlgebra que conté el manuscrit 2294 és teòrica, com també ho era la de Roca. Els exemples que posa no tenen context, són numèrics en la línia dels exercicis de l'*Arithmetica* de Diofant. Les qüestions de tipus més pràctic o mercantil formen, per l'autor, part de la

---

[520] Niccolo Fontana, més conegut com a Tartaglia, va nèixer a Brescia el 1500 i va morir a Venècia el 1557. El seu nom està lligat a la fórmula de la resolució de l'equació de tercer grau i a les disputes que va tenir amb Cardano al voltant d'aquesta fórmula.

[521] Oriontius Finaeus és el nom llatinitzat, que ell mateix utilitzava, d'Oronce Finé, matemàtic francès nascut a Briançon el 1494 i mort a París el 1555, al qual ja ens hem referit a la nota 354.

[522] Regnier Gemma Frisius va ser un matemàtic holandès nascut el 1508 a Dokkum i mort el 1555 a Lovaina. Els seus treballs són principalment d'Astronomia i Cosmografia. Va ser professor de Mercator i després col·laborador seu. Jerónimo Muñoz, del qual, com ja hem dit, Pérez de Mesa va ser deixeble, es declara en els seus manuscrits deixeble d'Oronce Finé i Gemma Frisius.

"logística". Els mètodes que explica per a resoldre equacions els exposa en forma retòrica tot i que fa servir símbols que fan més senzilla l'explicació. En canvi, quan fa el que ell anomena operacions amb figures compostes[523], els símbols són operatius. Al final de l'obra, en l'apartat de resolució de sistemes d'equacions és on la seva àlgebra arriba a una fase que podríem qualificar de més madura, ja que aquí l'autor planteja els sistemes i opera amb les equacions. No sembla que Pérez de Mesa sigui conscient del salt qualitatiu que suposa aquest darrer capítol, ja que no posa massa èmfasi en les explicacions ni hi ha gaire exemples resolts. Així com el mètode que utilitza per a la resolució de les equacions de segon grau està en la línia dels que utilitzen Aurel, Pérez de Moya i Núñez, en la resolució dels sistemes d'equacions segueix una metodologia ben diferent.

Cal destacar l'exemple de resolució d'una equació de 2n grau amb 2 incògnites fent referència a Diofant, que cap dels altres autors analitzats han tractat.

Els *Elements* d'Euclides, que eren manual de referència a les universitats de l'època, són un referent molt clar per l'autor, com ho són també per Aurel, Pérez de Moya, Roca i Núñez. Les referències que en fa en el manuscrit l'ajuden a donar suport a algunes de les seves afirmacions. Els *Elements* formen part de la geometria i sovint estableix paral·lelismes entre aquesta i l'aritmètica. Per Pérez de Mesa l'aritmètica és superior a la geometria, o, com ell ho exposa, els nombres són superiors a les quantitats contínues. L'autor expressa sovint opinions d'aquest estil que si bé estan relacionades amb el text no són necessàries per a la seva comprensió. Quan es llegeix el manuscrit es té la sensació que aquestes opinions són reflexions de l'autor en veu alta. Diu Pérez de Mesa que en aritmètica es poden constituir figures de qualsevol dimensió, és a dir, es poden calcular potències de qualsevol grau, mentre que en geometria no es pot passar de la tercera dimensió. Fent ús de la geometria, però, es poden construir quantitats que, com ho expressa l'autor, no es poden pronunciar i a les que Pérez de Mesa no considera nombres, les quantitats irracionals. Per acabar

[523] Pérez de Mesa, 1598, 69-80.

d'entendre quin paper té la geometria per Pérez de Mesa caldria estudiar el manuscrit 1561 de la universitat de Barcelona que conté geometria i del qual també n'és autor.

En una primera lectura del manuscrit 2294, el que més sobta és la presència gairebé constant de les progressions geomètriques que són, per Pérez de Mesa, el fonament de l'àlgebra. És cert que altres autors de l'època hi fan referència però no són tan presents a les seves obres i es refereixen més a termes proporcionals i proporcions continues que a progressions. Quan Pérez de Mesa parla de la importància de les progressions geomètriques explica que n'hi ha prou amb trobar un terme qualsevol de la progressió per saber el valor de la incògnita. Amb aquesta afirmació està apuntant un mètode i li està donant més importància que al fet de trobar el valor de la incògnita. Creiem, per tant, que hi ha una voluntat d'anar més enllà del fet d'arribar a resultats concrets. La nostra interpretació és que l'autor podria estar valorant la importància de les tècniques algebraiques per elles mateixes independentment de la seva potència per resoldre problemes aritmètics.

Voldríem destacar especialment el fet de la introducció de la lletra Ω per indicar la igualtat, símbol que no representa cap abreviació i que al col·locar-la entre els dos membres d'una equació, la converteix en un nou objecte de l'àlgebra amb el qual es pot operar, com s'opera amb les incògnites.

A part dels *Elements* d'Euclides, probablement la principal influència per Pérez de Mesa ha estat Núñez, tal com hem apuntat diverses vegades al llarg del capítol. Pel que fa a la novetat a la Península Ibèrica amb relació a la resolució de sistemes d'equacions, la seva font és molt probablement Buteo, a qui Pérez de Mesa cita. Buteo introdueix la segona incògnita en la seva *Logistica* (1559) on fa explícits els sistemes d'equacions[524], com farà Pérez de Mesa, i opera amb les equacions per a resoldre'ls.

---

[524] Buteo, 1559, f.189^{r}.

CAPÍTOL 7. CONCLUSIONS

L'anàlisi de totes les obres amb contingut algebraic publicades a la Península Ibèrica al segle XVI i també d'altres europees de la mateixa època, ens ha permès tenir una visió força clara de l'estatus de les matemàtiques a la Península al segle XVI, de la importància que se'ls atorgava, i del prestigi d'alguns dels seus practicants. Les conclusions parcials de cadascun dels capítols centrades en els autors, donaran forma a aquestes conclusions que es focalitzaran ara en els objectius que preteníem aconseguir.

En la introducció d'aquesta tesi hem posat de manifest el seu objectiu general: determinar com es va introduir l'àlgebra a la Península Ibèrica, si el seu estatus era comparable al d'altres països europeus, quin va ser el context en el qual es va produir aquesta algebrització, i si va tenir algunes característiques que la diferenciïn del procés seguit en altres països. Aquest objectiu el desglossàvem en tres d'específics que concreten la metodologia a emprar en aquesta recerca. El primer d'ells era l'anàlisi de les primeres obres publicades a la Península Ibèrica amb contingut algebraic al segle XVI. El segon objectiu es referia als públics de la ciència i tractava d'esbrinar a quin públic s'adreçaven les obres dels autors estudiats. El tercer objectiu era situar les obres publicades a la Península Ibèrica en el context europeu, analitzant les fonts i les influències.

Hem analitzat exemplars de totes les obres publicades a la Península Ibèrica durant el segle XVI amb contingut algebraic, i també del manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca. Aquesta anàlisi ens permet afirmar que l'àlgebra es va introduir a la Península Ibèrica, d'una manera formal, el 1552 amb l'obra de Marco Aurel, *Libro Primero de Arithmetica Algebratica.* És a dir, l'àlgebra es va introduir a la Península Ibèrica amb un text escrit en llengua vernacular per un *mestre de primeres* lletres que ensenyava matemàtiques pràctiques a València. Per tant, l'àlgebra que 20 anys més tard es començaria a considerar una disciplina independent, s'introdueix a la Península com una sèrie de regles útils per a la matemàtica comercial, com va passar també, a la majoria de països europeus.

L'obra d'Aurel va ser la font principal del *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor* (1558) de Juan Pérez de Moya, de la seva *Arithmetica Practica y Speculativa* (1562) i de l'*Arithmetica* (1564) d'Antic Roca. El *Compendio* de Pérez de Moya està inclòs en la que després seria l'*Arithmetica* del mateix autor i és l'única d'aquestes obres que només conté àlgebra. Sembla que Pérez de Moya volgués avançar la part més nova del que seria la seva *Arithmetica*, potser per posar de manifest que era coneixedor de les noves tècniques algebraiques que s'estaven introduint a Europa. El *Libro Primero,* l'*Arithmetica* de Pérez de Moya i la de Roca, així com el Mss. 2294 de Pérez de Mesa, segueixen una pauta similar, amb una primera part dedicada a l'aritmètica i una segona als procediments algebraics. El fet que l'obra de Pérez de Moya amb diverses incorporacions posteriors aconseguís més de 25 edicions, permet afirmar la decisiva influència del *Libro Primero* en el desenvolupament de l'àlgebra espanyola, com a font principal de l'obra de Pérez de Moya. L'altra obra estudiada, el *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (1567) de Pedro Núñez no és comparable a les altres quant a la seva estructura, ni pel que fa al seu contingut. La seva estructura és molt més complexa que la de les altres obres analitzades i el seu contingut conté demostracions i també geometria a la qual l'autor aplica l'àlgebra. A part d'aquests aspectes, el coneixement que té l'autor de la teoria euclidiana de les proporcions i també l'aplicació que en fa, no es troben a les altres obres.

Tal com hem comentat a la introducció, hem defugit volgudament la distinció de Nesselmann entre àlgebra retòrica, sincopada i simbòlica com a fases que mostren el desenvolupament de l'àlgebra, tot i que hem utilitzat les expressions "retòrica" i "simbòlica" en el sentit que s'utilitzen en el llenguatge habitual. Aquestes fases de l'àlgebra no creiem que corresponguin a l'evolució del pensament algebraic, que és on hem posat el focus en aquesta tesi. Hem volgut documentar el procés d'algebrització de les matemàtiques, a partir de la gestació de petits canvis conceptuals, que poden passar desapercebuts en una lectura que busqui només grans avenços, però que considerem cabdals per la consolidació de l'àlgebra com una disciplina de ple dret. Per això hem optat per centrar-nos en la idea d'àlgebra dels autors que inclou en molts casos la idea d'anàlisi, en el significat dels símbols que utilitzen i en les equacions i els sistemes d'equacions que resolen.

Sobre la idea d'àlgebra

La idea que té de l'àlgebra cadascun dels autors estudiats, l'hem anat exposant als capítols corresponents a partir de l'anàlisi del procediments que utilitzava cada autor en determinats càlculs i a partir també dels seus raonaments. En alguns casos com el de Núñez, l'autor especifica sovint quan resol un problema per àlgebra i quan el resol sense àlgebra. Tot i que de vegades el que diuen els autors que entenen per àlgebra no és el més rellevant en relació amb els procediments algebraics que utilitzen, analitzarem primer en paraules dels autors, què declaren sobre l'àlgebra.

Tots els autors menys Núñez fan referència al nom de *regla de la cosa* i Aurel, Pérez de Moya i Núñez es refereixen també al possible origen de la paraula "àlgebra". L'autor que diu més clarament que l`àlgebra es basa en una proporció contínua és Aurel, tot i que també fan referència a aquesta proporció Pérez de Moya i Pérez de Mesa. Roca i Pérez de Mesa parlen de l'àlgebra com una regla i els altres autors s'hi refereixen més sovint com una ciència:

MARCO AUREL	La regla vulgarment llamada de la cosa, o arte mayor, que por su propio nombre (como dice Guillelmo de Lunis, que es el primero que trasladó la dicha regla de Arábigo en llengua italiana) se llama Algebra & Almucabala, que es restauratio, & oppositio (como en los avisos de las igualacions verás) es fundada sobre una proporción continua, en la cual ocurren muchos números de diversos géneros, como cuadrados, cúbicos, etc. como en el 9º de Euclides podrás ver[525].
JUAN PÉREZ DE MOYA	Diversos nombres tiene esta regla, acerca de varios autores. Unos la llaman regla de Algebra, que quiere decir, restauratio, o almucabala, que quiere decir oposición o solución: porque por ella se hacen y absuelven infinitas cuestiones (y las que som impossibles las demuestra) así de Aritmética, como de Geometría, como de las demás artes matemáticas. Otros la nombran: regla de la cosa o del cos: porque obrando el nombre bien se allega. Otros reglas reales o arte mayor. Llámese como cada uno quisiere: su fin no es otro, sinó mostrar hallar algun número proporcional, dudoso demandado.
ANTIC ROCA	Habiendo de tratar en este libro cuarto de esta parte segunda de nuestra Aritmética de la Arte mayor. O de las regles Reales, bueno será que expliquemos todo aquello que es

[525] Aurel, 1552, 69r.

	necesario para bien entender esta Arte, y que no dejemos ningún precepto que sea perteneciente a ella. Según lo que he podido colligir de varios autores acerca de la cognición de esta Arte mayor, he visto que esta Arte està fundada en la cognición de quatro admirables operaciones. La una se ejercita en los números cuadrados. La otra en números cúbicos. La tercera en los Bimonios u la cuarta en la regla última y postrera (dicha vulgarmente) de la Cossa, por respecto de la cual se trae todas las precedentes operaciones, y por eso de esta regla dicha de la Cossa hablaremos en la postrera parte de este libro, la cual no se puede alcanzar si primeramente no explicamos las precedentes regles pertenecientes a ella.
PEDRO NÚÑEZ	De tots els llibres que de ciències matemàtiques he compost, molt alt i molt excel·lent príncep, no hi ha cap de tan profitós com aquesta Àlgebra, que explica de manera fàcil i breu com conèixer la quantitat desconeguda en qualsevol propòsit d'Aritmètica i Geometria i en totes les altres art que utilitzen el comptar i el mesurar com són la Cosmografia, l'astrologia, l'arquitectura i el càlcul mercantil. I tenint en compte que els principis d'aquesta art subtilíssima es prenen dels llibres "elementaris" d'Euclides, no es pot, no obstant això, sense ella tenir la mateixa pràctica d'aquests mateixos llibres i dels d'Arquimedes. És Àlgebra nom aràbig que significa "restauracaõ", perquè traient el "sobrant" i restaurant el "diminut" anem coneixent allò que busquem. A d'altres els sembla que s'anomena així perquè l'inventor d'aquesta art va ser un matemàtic moro de nom Gebre i hi ha en algunes llibreries un petit tractat en àrab que conté els capítols que utilitzem. Però Ioanne de Monterégio en un discurs en que lloava les matemàtiques, fa menció dels llibres, que l'autor grec, Diophante va escriure, i que encara no han estat divulgats[526].
DIEGO PÉREZ DE MESA	La aritmètica en toda su universalidad, según nuestra opinión, tiene tres partes principales. La una a la que llaman logística, que es la que se entremete a las cuentas ordinarias del uso público y en contratos aplicando los números a las mismas coses numerades. Otra es más llevantada y de más alto orden, la cual contempla las mismas naturalezas de los números en si mismos según las mismas propiedades suyas y la conformidad que tienen así con las coses naturales como con las mismas esencias de las coses, parte utilísima así para el conocimiento de las verdades de la filosofía como de la metafísica, en la cual parte fueron doctísimos Pitágoras y Platón y se valieron de ella como consta de la lectura del Timeo para i inquirir coses naturales que de otra manera fuera dificultoso alcanzar. De aquí nace la causa i la virtud, propiedad que muchos ponen en los números. Finalmente, la otra tercera parte es el àlgebra que tenemos entre manos, algunos la llaman la regla de la cosa porque la

526 De todos llos livros que nas sciências mathemáticas tenho composto, muito alto e muito excellente Príncipe, nenhum hé de tanto proveito como este de Algebra, que he conta fácil e breve para conhecer a quantidade ignota em qualquer propósito de Arithmética e Geometria e em toda outra arte que usa de conta e de medida, como sam Cosmographia, Astrologia, Architectura e Mercantil. E posto que os princípios desta subtilíssima arte sejam tirados dos livros elementários de Euclides, nam se pode, porém, sem ella ter a práctica dos mesmos livros e dos de Archimedes.
Hé Algebra nome arábigo que significa 'restauracaõ', porque tirando o sobejo e restaurando o diminuto vimos em conhecimento do que buscamos. A outros paresce que se chama assi porque dizem que ho [IIv] inventor desta arte foy hum mathemático mouro cujo nome era Gebre, e há em algunas livrarias hum pequeno tractado em arábigo que contem os capítulos de que usamos. Mas Ioanne de Monterégio, em huã oracaõ que fez dos louvores das Mathemáticas, faz mencaõ dos livros que Diophante, autor grego, desta arte escreveo, que ainda nam sam divulgados. Núñez, 1567, 3.

	raíz o número fundamental de las figures proporcionales y que han puesto los autores los autores, principalmente entre los italianos, cosa, y verdaderamente no es imperfecto el nombre que le dan de regla porque no es ciencia entera, sino una regla con diversos cánones y preceptos por los cuales de ciertas suposiciones o ficciones, viene a descubrir la verdad.

Si no ens cenyim a allò que els autors diuen que entenen per àlgebra, a partir de l'anàlisi dels textos podem afirmar que tots els autors estudiats consideren que l'àlgebra és tot el procés que va des de l'enunciat d'un problema, passant pel plantejament d'una equació, que s'haurà de transformar en una de les formes estàndard, fins acabar amb la resolució de l'equació aplicant la regla corresponent. Per tant, tot i ser la *Summa* de Pacioli un important referent en aquesta època, cap dels autors estudiats, considera, com si que ho feia Pacioli, que l'àlgebra és la resolució d'equacions, un cop tenen alguna de les formes estàndard. De tota manera, l'àlgebra, doncs, tracta la resolució d'equacions, encara que no s'hi limiti. Aurel i Pérez de Moya identifiquen *àlgebra* amb *Art Major* i amb *regla de la cosa*; en canvi, Roca considera que l'*Art Major* és un conjunt de quatre operacions, la darrera de les quals és la *regla de la cosa*, essent les altres tres, les operacions relatives als nombres quadrats, als nombres cúbics i als binomis. Núñez no parla d'*Art Major* amb referència a l'àlgebra però, en canvi, la considera una de les ciències matemàtiques, útil per a resoldre tot tipus de problemes. Per Pérez de Mesa l'àlgebra és una de les tres parts de l'aritmètica.

Les arrels són un element important de l'àlgebra per a tots els autors analitzats. De fet, Aurel i Roca insisteixen en què el cas corresponent a la primera igualació, en el qual hi ha el terme de primer grau a un costat de la igualtat i el número a l'altra, es podria resoldre per *Art Menor* i que, per tant, no caldria l'àlgebra. La diferència entre aquest primer tipus d'equacions i la resta, és que en aquest primer tipus no es necessita efectuar cap arrel. Tots els autors estudiats dediquen un capítol als binomis i residus, previ a l'àlgebra. El motiu, tot i que els autors no el manifesten, és que aquestes expressions apareixeran en el càlcul de les solucions de les equacions de segon grau.

Una idea molt important relacionada amb l'àlgebra és la idea d'anàlisi en el sentit que va definir Pappus, tal com hem explicat en el capítol dedicat a Aurel. Aquesta idea de suposar que es té la solució d'un problema, i operar amb aquesta solució com si volguéssim provar que ho és, és crucial en el desenvolupament de l'àlgebra i va ser clau en l'obra de Viète, que va fer un pas de gegant en l'algebrització de les matemàtiques. A la primera pàgina del seu *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) Viète explica de manera clara aquesta aproximació analítica:

> *Hi ha una certa manera de buscar la veritat en matemàtiques que es diu que Plató va ser el primer en descobrir. Theó la va anomenar anàlisis, que el va definir com l'assumpció d'allò que es busca com si fos admès [i treballant] mitjançant les conseqüències [d'aquesta assumpció] cap a allò que és reconegut com a vertader, oposat a la síntesi*[527]*, […]*

El fet d'operar amb una quantitat desconeguda, és fonamental a l'àlgebra i permet generalitzar els procediments. Potser el més important d'aquest fet rau en acceptar la incògnita amb el mateix grau de realisme que una quantitat numèrica, que conceptualment representa un pas endavant importantíssim. Aurel, Pérez de Moya i Roca tenen clara consciència del mètode analític tot i que no parlin "d'anàlisi" i només per aquesta consciència, considerem que les obres d'aquests autors mereixen ser analitzades amb detall. En canvi, ni Núñez ni Pérez de Mesa reflexionen en termes analítics.

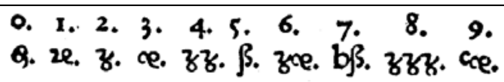
Sobre els símbols

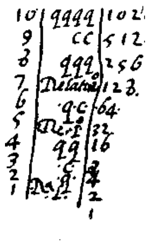
Quant als símbols, Aurel segueix l'escola germànica i els altres autors estudiats, la italiana, encara que Pérez de Moya declara primer els símbols utilitzats a l'escola alemanya. De tota manera, pels autors, no són importants els símbols específics que s'utilitzen, sinó el seu significat. El fet de representar amb un únic símbol, en ambdues escoles, la incògnita i les seves potències, obliga a reunir el que actualment considerem dos símbols, en una sola expressió: el de la quantitat i el de l'operació que es fa amb aquesta quantitat. Per exemple, en l'expressió actual x^2, hi ha un símbol pel nombre, x, i un símbol que indica l'operació que

---

[527] Est veritatis inquirendae via quaedam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, à Theone nominate Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quaesiti tanquam concessi per consequential ad verum concessum. Ut contra Synthesis,… Viète 1591, 3.

s'ha de fer amb aquest nombre, en aquest cas, elevar-lo al quadrat. En canvi el símbol *ce.*, que representa també el que actualment és x^2, no posa de manifest de manera clara la realitat matemàtica que representa. A més a més, els símbols utilitzats per a la incògnita i les seves potències no mostren la relació funcional que hi ha entre elles. Així com queda clara actualment la relació funcional entre x^2 i x^3, no passa el mateix amb *ce.* i *cv.* Aquesta mancança en el simbolisme emprat, la compensen els autors amb la consciència que les incògnites estan en proporció contínua i que els autors utilitzen i remarquen sovint. La proporció contínua explica la relació entre les incògnites que la notació emprada no posa de manifest. Aurel, Pérez de Moya i Roca insisteixen en la proporció contínua entre *caràcters*, en canvi Núñez no hi fa tanta referència. Ell parla més de la teoria euclidiana de proporcions, que domina a la perfecció. De fet, a la carta que adreça al "Principe o Cardeal Iffante Dom Anrique" al principi de la seva obra, ja diu que els principis de l'àlgebra estan extrets dels *Elements* d'Euclides, en els quals fonamenta la seva obra. Pérez de Mesa considera que els nombres proporcionals són el fonament de l'àlgebra, però al llarg de l'obra parla indistintament de proporcions i de progressions, tot i que es refereix més sovint a progressions geomètriques que a proporcions. Tots els autors mostren una taula amb la correspondència entre els *caràcters* o *dignitats* amb les seves *denominacions* o *graus* on remarquen el paral·lelisme entre la multiplicació dels caràcters i la suma dels graus. Així ho simbolitzen els autors:

MARCO AUREL	
JUAN PÉREZ DE MOYA	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. n. co. ce. cv. cce. R. cecv. RR. cccc. ccv.
ANTIC ROCA	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. N. co. ce. cu. cce. R. cecu. rr. cccc. ccu.
PEDRO NÚÑEZ	Co.2.Ce.4.Cu.8.Ce.ce.16.Re.p°.32.Ce.cu.0 Cu.ce.64. Denominaciõ. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

DIEGO PÉREZ DE MESA	

Tots els autors estudiats menys Pérez de Mesa, declaren els símbols que utilitzaran per les incògnites que alguns autors anomenen *caràcters* i d'altres *dignitats.* Pérez de Mesa els va introduint a mesura que els necessita, com faran també els altres autors amb els signes "més" i "menys", llevat de Pérez de Moya, que els declara amb la resta dels símbols. Aquests símbols, hem vist que més que indicar que s'ha de sumar o restar, els utilitzen els autors quan la suma o la resta no es pot efectuar, de manera que serveixen per crear vincles entre dos objectes algebraics que han de romandre junts, creant-ne així un de nou. Hem mostrat, per exemple, un fragment on Aurel diu que s'han de considerar el binomis i el residus com una sola quantitat (Aurel, 1552, 107[v]) i per tant, en aquest cas, els signes són necessaris per a la creació de nous objectes; i un altre de Pérez de Moya on diu que no es poden sumar els caràcters com si fossin d'una mateixa espècie, sinó que s'hi ha d'afegir el *mas,* com si s'ha de sumar *2co.* amb *2ce.* que fan *2co p 2ce* (en llenguatge actual correspondria a $2x+2x^2$), un altre cas on l'operació s'ha de deixar indicada, aquesta vegada entre caràcters. Els símbols "més" i "menys" els utilitzen els autors per a crear l'objecte "binomi", en el sentit euclidià del terme, com a suma o diferència entre un nombre racional, i un d'irracional, o bé dos d'irracionals, i també per a crear l'objecte "polinomi", com un agregat de termes que més endavant s'entendrà com una combinació lineal.

Relacionats amb els símbols, hi ha també els coeficients i els termes independents. Els números que acompanyen les incògnites en les obres que hem estudiat, no tenen els significat actual de coeficients: són números que compten les incògnites i, per tant, tal com hem mostrat en el capítol dedicat a Núñez, no tenia sentit una expressió com $\sqrt{2}x$, ja que el coeficient de la x és $\sqrt{2}$ i els irracionals no serveixen per a comptar, com tampoc serveixen per comptar els negatius que, per aquest motiu, tampoc s'utilitzaven com a coeficients. En canvi, si aquesta expressió s'escriu $\sqrt{2x^2}$, aleshores el coeficient de la x^2 és 2, que és un nombre natural. Hem mostrat en aquest mateix capítol un exemple on Núñez passa per alt aquesta "norma" per una qüestió pràctica, quan ha de transformar una equació en la seva forma estàndard per tal de poder aplicar la regla de resolució. Considera que l'equació que en notació actual s'escriuria: $1x^2 = 2 + \sqrt{8x^2}$, és equivalent a l'equació: $1x^2 = 2 + x\sqrt{8}$, tot i que no fa cap comentari, la qual cosa probablement vol dir que no és conscient del canvi conceptual que suposa aquesta transformació.

Hem mostrat que Aurel, Pérez de Moya i Roca acompanyen d'un símbol el terme independent i, en canvi, no ho fan ni Núñez ni Pérez de Mesa. Aquest símbol que des d'un punt de vista actual pot semblar superflu, juga en alguns casos el paper que fan actualment els parèntesis. Ho hem exemplificat amb un problema d'Aurel corresponent a la cinquena igualació, en el qual hi apareix l'expressió: $1\mathfrak{z} + 2 + \sqrt{2}x$. En aquesta expressió podem observar tant la utilitat del símbol que acompanya el terme independent, com la utilització per part d'Aurel d'un coeficient irracional, que no és $\sqrt{2}$, com podria semblar, sinó, $2 + \sqrt{2}$, de la utilització del qual l'autor no fa cap comentari. En canvi, sí que remarca que el binomi s'ha d'entendre com una sola quantitat i en aquest cas, multiplicada per x. És a dir, es tracta de l'expressió que actualment indicaríem: $1\mathfrak{z} + (2 + \sqrt{2})x$. El símbol amb el terme independent que l'autor posa habitualment : $1\mathfrak{z} + 2Q + \sqrt{2}x$ indicaria que el coeficient de la x és $\sqrt{2}$, en comptes de ser $2 + \sqrt{2}$ com en el cas de no acompanyar el 2 amb el símbol Q.

Hem vist un exemple de l'àlgebra de Núñez en el qual els objectes algebraics amplien el seu rol en un cas en què una $\sqrt{8}$ que no podia figurar com a "coeficient", passa a exercir de coeficient d'una manera natural per necessitats d'encaix d'una equació amb alguna de les formes estàndard. El cas extrem en aquestes obres, de l'ampliació d'operacions a objectes pels quals no havien estat pensades, l'hem vist també a l'obra de Núñez i es tracta del càlcul de mitjans proporcionals. A partir del càlcul de dos mitjans proporcionals entre dos cubs perfectes, tal com està explicat als *Elements*, Núñez l'aplica a enters qualssevol i a quantitats irracionals, per continuar aplicant-lo a quantitats desconegudes i finalment arribar a establir proporcions entre equacions.

A part de la importància de la proporció contínua per tal de donar significat als símbols, cal destacar, com hem mostrat amb exemples de les obres analitzades, com alguns dels símbols emprats, contribueixen a la creació de nous objectes algebraics i també com alguns altres, com els que actualment anomenem coeficients, canvien el seu significat per qüestions pràctiques. Podríem dir que els objectes algebraics van definint les seves pròpies regles, de manera que la notació està en procés d'esdevenir autònoma. El llenguatge retòric de l'àlgebra amb les seves abreviacions que primer tenen l'objectiu de no fer els càlculs feixucs i fer-los més entenedors, va donant pas a un llenguatge on el simbolisme va adquirint importància, de manera que la seva sintaxi, és a dir, les normes per a construir el discurs algebraic a partir dels símbols, preval sobre la semàntica, que s'anirà adaptant a la sintaxi.

Sobre les equacions

Amb relació als tipus d'equacions que consideren els autors, tot i que en declarin un nombre diferent, són pràcticament els mateixos amb la diferència que Aurel, Pérez de Moya i Roca consideren equacions de grau superior al segon, en els tipus compostos i, en canvi, Núñez i Pérez de Mesa consideren les equacions compostes, de segon grau, encara que després resolen equacions de grau superior al segon, a part dels tipus declarats. La resolució és retòrica i s'especifiquen els passos que cal fer per arribar a la solució. En el cas dels tipus d'equacions compostes, Núñez i Pérez de Mesa consideren sempre 1 el coeficient del terme quadràtic i, en canvi els altres autors estudiats consideren que el coeficient del terme de grau més alt pot ser qualsevol nombre. Tot i que els casos que consideren Núñez i Pérez de Mesa, s'ajusten més als de la classificació de l'àlgebra d'al-Khwârizmî que els dels altres autors, l'ordre en què presenten les equacions de 2n grau Aurel, Pérez de Moya i Roca és el mateix que el d'al-Khwârizmî; en canvi, en el cas de Núñez i Pérez de Mesa, l'ordre en què presenten els dos darrers tipus està invertit i coincideix amb el de la *Summa* de Pacioli. Hi ha també altres diferències entre aquests dos grups d'autors pel que fa a la resolució d'equacions. Quan Aurel, Pérez de Moya o Roca tracten equacions de grau superior al segon, conserven l'esquema dels tipus proposats, és a dir, els graus de les incògnites han de guardar la mateixa proporció, de manera que es puguin adaptar al model de les equacions quadràtiques. Núñez, en canvi, proposa la resolució d'equacions de 3r grau a partir de la descomposició en factors dels seus membres i fa referència a Tartaglia; i Pérez de Mesa busca solucions enteres d'equacions a partir dels divisors del terme independent i resol una equació amb dues incògnites de 2n grau, que cap dels altres autors havia tractat. Els dos darrers autors, per tant, amplien el tipus d'equacions que resolen i no es limiten als tipus inicials que han declarat. Roca fa una afirmació essencial al final de la seva àlgebra en la qual manifesta que en les equacions no és necessari prendre 8 tipus o 10 tipus, sinó que es poden reduir tots a dos. Copsa, per tant, la idea de generalització que caracteritza els procediments algebraics, tot i que no concreti aquesta reducció.

Finalment, pel que fa a les equacions, tots les autors posen alguns avisos per a casos que consideren especials, com per exemple: $3x=3x$. Tant Aurel, com Pérez de Moya i Roca, consideren que la solució d'aquesta equació és $x=1$. Aquesta afirmació ja la va fer Pacioli en la seva *Summa* quan al resoldre un problema va obtenir *12co. = 12 co.* i va deduir que el valor de la *cosa* havia de ser 1. És una incorrecció que s'ha anat repetint al llarg de diferents textos, no solament dels espanyols, però que ni Núñez ni Pérez de Mesa cometen. Ambdós autors consideren que aquest és un cas en què qualsevol nombre és solució. Núñez ho expressa: "pronunciaremos que lo que se busca es necessario hallarse en qualquier numero[528]" i Pérez de Mesa: "la demanda es super fula y vana porque se birifica en todos los n^os^"[529].

Sobre els sistemes d'equacions

Amb relació a la segona incògnita, podem veure al llarg dels diferents textos una evolució pel que fa al seu estatus. La resolució de problemes que requereixen més d'una incògnita, o que es poden resoldre amb més d'una incògnita, s'engloba en el que els autors anomenen la *regla de la quantitat* o *regla de la segona quantitat*, fent referència al nom amb què es designa la segona incògnita. Tots els autors estudiats, menys Roca, tracten la *regla de la quantitat.* En el cas del *Libro Primero* d'Aurel, el *Compendio* i *l'Arithmetica* de Pérez de Moya,

---

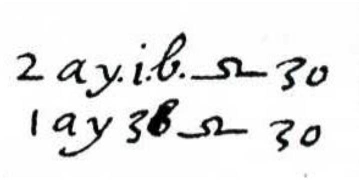
[528] Núñez, 1567, 20r.
[529] Pérez de Mesa, 1598, 98.

s'utilitzen només dues incògnites, a la primera de les quals se li assigna el nom habitual, i a la segona *q*. El mètode de resolució consisteix en posar la segona incògnita en funció de la primera i quan es té aquesta expressió, a la segona incògnita ja no li cal un nom especial i s'assigna *q* a la tercera que es torna a expressar en funció de la primera i així successivament.

En el *Tratado* de 1573, l'autor amplia la seva *Arithmetica* i fa alguns canvis, entre els quals algun de rellevant referent a la *segona quantitat.* Tot i que continua referint-se a la segona incògnita com *quantitat,* no li assigna la lletra *q,* sinó una *a,* i si hi ha més incògnites les anomena: *b, c, d,* etc. De tota manera, el mètode per a resoldre els sistemes és semblant, de manera que aïlla les incògnites i les substitueix en altres equacions i manté la nomenclatura *co.* per a la primera incògnita.

Núñez resol problemes que impliquen més d'una incògnita en el capítol 5è de la tercera part principal, però no fa cap referència en aquest capítol a la *regla de la quantitat*, a la qual dedica el 6è capítol i exemplifica només amb 3 problemes, que resol d'una manera semblant a com ho feia Aurel i també Pérez de Moya en el seu *Compendio* i en la seva l'*Arithmetica.* Així com altres autors fan referència a la r*egla de la quantitat* com la perfecció de la *regla de la cosa,* Núñez creu que la majoria de problemes que es resolen per aquesta regla, es podrien resoldre de manera més senzilla utilitzant només una incògnita.

Pérez de Mesa resol sistemes d'equacions en el darrer capítol que titula "*de la Regla de la quantidad"* i manifesta que els "escriptors" parlen de "regla de la quantitat" quan no poden arribar a la fi que pretenen amb una sola incògnita sinó que en necessiten dues o tres o més i que, per resoldre aquest tipus de situacions, no ho fan de la mateixa manera tots els "escriptors". Pérez de Mesa opta per anomenar "a" a la primera incògnita, "b" a la segona, "c" a la tercera i així successivament. Aquest ja és un pas rellevant perquè es trenca la asimetria que hi havia en les altres obres amb relació a les incògnites, de manera que la primera tenia una mena de estatus diferent. En el primer dels problemes que resol, després d'efectuar diferents passos, obté el sistema que escriu:



És la primera vegada en tota l'obra que Pérez de Mesa fa servir un símbol per indicar la igualtat. La importància d'aquest símbol rau, com en altres casos hem mostrat, en el seu significat, el fet de fer de vincle entre els dos membres d'una equació, que la converteix en un nou objecte amb el qual es pot operar. Pérez de Mesa és l'únic dels autors estudiats que opera amb equacions, resolent els sistemes pel mètode que actualment es coneix com a mètode de reducció. Hem exemplificat, doncs, a partir d'alguns passatges de les obres analitzades, com el fet de la introducció d'una segona incògnita, i a partir de canvis subtils, va contribuir a convertir una equació en un objecte algebraic de ple dret.

Sobre els públics

Totes les obres estudiades tenen una intenció didàctica, com és lògic si tenim en compte que els seus autors tenien relació amb la docència. Totes tenen la seva personalitat en funció del seus objectius i en la majoria dels aspectes que tracten, no es limiten a adaptar obres anteriors sinó que les impregnen amb el seus segells personals, remarcant alguns aspectes i modificant-ne d'altres, de manera que donen lloc a textos coherents. L'obra de Núñez l'hem de considerar a part. No podem dir que n'adapti d'anteriors tot i les influències que pugui tenir. No és comparable ni en estrucutra ni en contingut a cap de les obres publicades fins al moment. En el cas d'Aurel hem donat arguments per mostrar que la seva font principal és l'obra *Coss* de Rudolff, però tot i així, hem mostrat diferències subtils entre les obres, com la insistència d'Aurel en la proporció contínua entre les incògnites o l'admissió de possibles solucions negatives en el cas de la resolució de la sisena igualació, o els comentaris que afegeix sovint a les seves explicacions.

En l'epístola a Bernardo Cimon que precedeix l'obra, Aurel mostra també la seva voluntat de conservar el coneixement dels avantpassats quan expressa les seves intencions en escriure l'obra:

Haze tābien a mi proposito el grā estudio, vigilancia, y trabajo q̄ nuestros antepassados tuuieron por bien de tomar, solo por venir en conoscimiento desta sciencia.

Aquesta voluntat de transmissió del que ell anomena obres dels avantpassats, tot i que la seva font principal sigui propera en el temps, és una manera de construir el coneixement, sobretot en una època en què la informació no circulava de manera fluïda i, per tant, no estava a l'abast de tothom.

Ja hem comentat en el capítol dedicat a Aurel que l'autor també tenia la intenció d'introduir "la ciencia del contar" en els regnes d'Espanya, ja que segons l'autor, n'havia arribat poca notícia. A part d'aquest propòsits sembla que n'hi ha també un de més personal, ja que en la mateixa epístola, una mica més endavant, diu:

...el servicio que creo hazer a vuestra merced no he podido dexar de no declarar en alguna parte las regles tan necessarias a muchos. Y esto lo major que me ha sido possible: para que alomenos de vna cosa tan vtil, como esta, tomen estos Reynos algun principio de mi, y puedan conocer el primor y secreto de esta sciencia...

Potser pel fet de ser estranger, necessitava alguna mena de reconeixement per part dels seus conciutadans, que no obtenia suficientment amb la seva feina de *mestre de scriure e contar.*

El *Compendio* de Pérez de Moya també és una obra, amb la qual l'autor sembla que tingui pressa per difondre els procediments algebraics ja que la publica 4 anys abans que la seva *Arithmetica* que és una obra que s'ajusta més al model de l'època amb una part d'aritmètica que precedeix la part dedicada a l'àlgebra. En aquest cas, la mostra més clara d'intenció didàctica i adreçada a tot tipus de públic la tenim en el llibre 9è de l'*Arithmetica,* escrit en forma de diàleg a cavall entre la tradició oral i la cultura escrita, que vol convèncer el lector de la importància de l'aritmètica. Les qüestions que proposa l'autor són molt interessants i permetrien fer, com hem comentat en el capítol corresponent, un retrat sociològic de l'època.

L'obra de Pérez de Moya està basada en la d'Aurel, tot i que en aquest cas la diferència entre els dos textos és més clara que la que hi havia entre l'obra d'Aurel i la de Rudolff degut a què Aurel reprodueix 143 problems de Rudolff amb idèntic enunciat i dades. No es té gaire informació sobre la vida i interessos d'Aurel però en el cas de Pérez de Moya, tot i que sembla que no tenia formació universitària, era una persona molt culta i amb interessos diversos, com ho posen de manifest els seus biògrafs i com ho mostren diverses anotacions erudites al marge de la seva *Arithmetica* i les que hi ha directament en el text del llibre 9è.

L'*Arithmetica* de Roca té un caràcter més acadèmic que les obres d'Aurel i Pérez de Moya i en aquest cas el públic al qual anava dirigida eren probablement estudiants universitaris. Els motius que ens fan pensar en aquest públic potencial són el caràcter més teòric de l'obra, el fet que remeti als problemes d'altres obres com la d'Aurel ja que la seva obra només conté alguns exemples perquè dóna més importància a la teoria, i el fet que Roca va ser professor de la Universitat de Barcelona i un humanista i comentador d'Aristòtil. Roca va proposar la separació de les matemàtiques de les altres ciències amb la intenció de formar una ciència pura.

Núñez té també voluntat de difondre el coneixement, com ho explica ell mateix a la seva obra quan manifesta que la va escriure primer en portuguès, però que la va traduir a la llengua castellana perquè tingués més difusió. L'àlgebra de Núñez és difícilment classificable degut a la seva extensió, a la diversitat de temes que hi tracta, i a les diferents èpoques en les quals probablement va ser composta, però està clar que és una obra que vol fer "propaganda" de l'àlgebra i que vol convèncer els lectors de la validesa dels raonaments que fa quan resol alguns problemes, com ho mostren els nombrosos comentaris que hi afegeix. De fet, Núñez diu que vol apropar els lectors a l'àlgebra que Pacioli havia explicat d'una manera tan caòtica. De tots els autors estudiats, Núñez és qui té una producció científica més rica. Tot i l'interès de la seva àlgebra com a ciència aplicada a l'aritmètica i a la geometria, potser el fet de tenir tan present els *Elements* d'Euclides com a referència, li va impedir anar més enllà i apropiar-se de la idea d'*anàlisi*, que seria la clau de l'obra de Viète.

Pérez de Mesa va ser també professor universitari, i tal com hem explicat, una persona molt reconeguda a la seva època. Tot i que el seu manuscrit té l'estructura de les obres d'Aurel, Pérez de Moya i Roca, d'entre els autors espanyols, Núñez és la seva principal referència. Com l'obra de Roca, l'àlgebra del manuscrit 2294 és més aviat teòrica. Per Pérez de Mesa, els exercicis de tipus pràctic o mercantil formen part de la "logística" que és una altra de les parts de l'aritmètica. Aquesta obra podia tenir la intenció de servir-li de guia en les seves classes. No se sap per què Pérez de Mesa no va publicar els seus manuscrits. Un dels possibles motius seria la censura[530], tot i que no n'hi ha evidències. Encara que la disciplina més vigilada pel Sant Ofici fos la Teologia, la majoria de professors d'astronomia de les universitats espanyoles en les que s'hi impartia aquesta matèria, no van imprimir els seus manuals. Jerónimo Muñoz va deixar manuscrits els seus tractats d'astronomia i Pérez Mesa va defensar la competència de l'astrònom per a tractar qüestions cosmològiques i va ensenyar idees semblants a les tractades per Muñoz en les seves obres. Podria ser que Pérez de Mesa intentés evitar la censura per part de filòsofs per les seves incursions cosmològiques.

El context europeu

Aquest darrer apartat està relacionat amb el tercer objectiu específic sobre fonts i possibles influències de les obres de la Península Ibèrica amb relació a altres obres europees.

Amb relació a la debilitat de la cultura científica a Espanya que hem comentat en la introducció, i en particular en relació amb la introducció de l'àlgebra, en aquesta recerca hem constatat que moltes obres que mereixerien aparèixer en una història sobre la

[530] Sobre la censura a l'època de la Inquisició, vegeu: Pardo Tomàs, José, 1991. *Ciencia y censura. La Inquisición Española y los libros científicos en los siglos XVI y XVII.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

introducció de l'àlgebra a Europa, són posteriors a la d'Aurel. Podem citar entre elles obres tan importants com les de: Peletier[531] (1554), Forcadel[532] (1556), Buteo[533] (1559), Ramus[534] (1560), Gosselin[535] (1577), Recorde[536] (1557), de manera que aquesta suposada debilitat queda en entredit i, si ens referim a la cultura científica en general, encara hi queda més, tal com hem mostrat a la mateixa introducció.

Els *Elements* d'Euclides són una referència obligada en les matemàtiques del segle XVI i pel que fa a l'àlgebra, també ho és la *Summa de arithmetica geometria proportione e proportionalita* de Pacioli, que és la primera obra impresa de què es té coneixement, que inclou àlgebra. Aquestes obres també ho són de referència pels autors analitzats tal com hem anat mostrant al llarg dels capítols. En el cas de Pérez de Moya és possible que el títol de la seva *Arithmetica practica y especulativa* s'inspirés en una expressió que Pacioli fa servir en la seva *Summa* (Pacioli, 1494, 111v):

Algebra : e Almucabala secondo noi detta pratica speculatiua.

i que també va utilitzar Tartaglia en els seus *Quesiti et inventioni diverse*[537] per explicar de què tracta el seu 9è llibre:

[531] Peletier, Jacques, 1554. *L'algebre de Iaques Peletier du Mans departie en deus libres.* Ian de Tournes. Lyon.

[532] Forcadel, Pierre, 1556. *L'arithmetique de P. Forcadel de Beziers: En laquelle sont traictées quatre reigles briefves, qui contiennent les deux cents quarante anciennes, & plusieurs autres reigles pour l'exercice des nombres entieres, par lesquels on peut facilement parvenir à la cognoissance de l'algebre: le tout nouvellement inventé par l'auteur.* Guillaume Cavellat. Paris.

[533] Borrel, Jean [Ioannis Buteonis], 1559, *Logistica, quæ et arithmetica vulgo dicitur, in libros quinque digesta quòrum index summatim habetur in tergo: Eiusdem, ad locum Vitruuii corruptum restitutio, qui est de proprotione lapidum mittendorum ad balistæ foramen.* Gulielmum Rovillium. Lyon.

[534] Ramus, Petrus, 1560. *Algebra.* Parisiis, apud Andream Wechelum.

[535] Gosselin, Guillaume, 1577, *op. cit.*

[536] Recorde, 1557, *op. cit.*

[537] Tartaglia, 1546, *op. cit.*, 98r.

Sopra la scientia Arithmetica, Geometrica, & in la Pratica Speculatiua
de Algebra, & Almucabala, uolgarmente detta Regola de
la cosa, ouer Arte maggiore, & massime della
inuentione de Capitoli de Cosa, e Cubo
equal à numero, & altri suoi
aderenti et dependenti.

i en canvi no utilitza Aurel ni cap dels altres autors de la Península Ibèrica.

Hem mostrat com la principal font de l'obra d'Aurel és l'obra *Coss* de Rudolff que és de 1525 però està clar que Aurel coneix també textos europeus anteriors, ja que cita Guillermo de Lunis que és citat també per Ghaligai en la *Summa de arithmetica* i en, com a mínim, dos textos italians que romanen manuscrits. Per tant, a part de l'obra alemanya, Aurel coneix també obres italianes. La *Summa* de Ghaligai és també un dels textos que coneix Roca, com ho mostra el nom que dóna a algunes incògnites i el fet que parla també de Lunis i les referències que hi fa. Al llarg de la seva *Arithmetica,* Roca va citant els autors que li han inspirat determinats passatges o conceptes. Cita a Sheubel quan fa referència als nombres irracionals i en el cas de les arrels quadrades i cúbiques dels binomis contrasta el mètode de Scheubel amb el d'Aurel. Cita a Fibonacci i Pérez de Moya quan explica les operacions amb nombres medials. A part dels autors citats, també es refereix a De la Roche i a Albert de Saxònia quan exposa el nombre de tipus d'igualacions que proposen diversos autors i en alguna ocasió fa referència a Diofant i a Regiomontanus. Chuquet és també una de les fonts de Roca, que a part d'incloure'l a la seva llista d'autors, li manlleva una expressió quan ha d'explicar què és l'àlgebra, tal com hem mostrat en l'apartat corresponent del capítol 4. A part de les influències concretes dels autors que Roca inclou a la seva llista, aquesta llista ens permet constatar que 12 anys després de la publicació de la primera àlgebra a la Península Ibèrica, es té constància de les àlgebres europees més importants en aquell moment.

En el cas de Pérez de Moya, hem mostrat que la seva font principal és Aurel i, de fet, l'autor no en cita d'altres relacionats directament amb l'àlgebra a part de Pacioli, i cita, en canvi, a Aristòtil, Zamberto i Boeci.

Núñez manifesta que la seva obra està basada en els *Elements* i que vol explicar el que Pacioli explica en la seva *Summa,* d'una manera més entenedora. A part d'aquestes obres que són de referència per a tots els autors dels segle XVI, Cardano i Tartaglia, són les seves referències principals i els autors més citats a la seva àlgebra. Cita també Oronce Finé al qual va rectificar amb la publicació de la seva obra *De erratis Orontii Finaei,* mostrant que els intents de Finé de resoldre els tres problemes clàssics no van reeixir.

Pel que fa a Pérez de Mesa, ja hem comentat que la seva referència principal pel que fa als autors de la Península Ibèrica és Núñez. A part de citar els autors clàssics, cita també a Tartaglia, com ho havia fet Núñez, i a Diofant. És l'únic dels autors estudiats que planteja una equació de les que actualment s'anomenen diofàntiques. Juntament amb Roca, són els dos autors que citen Gemma Frisius i Buteo, tot i que Roca els posa en la seva llarga llista d'autors però no els cita en el text. En canvi, Pérez de Mesa, probablement es va inspirar en Buteo per la resolució dels sistemes d'equacions, com hem comentat en el capítol 6.

Pel que fa a les possibles influències, Pérez de Moya i Núñez son citats per Stevin. En el primer cas, Stevin diu que segueix Pérez de Moya pel que fa a l'extracció de l'arrel cúbica, en comptes de seguir Tartaglia i en el segon cas, cita Núñez amb relació al màxim comú divisor de dues expressions polinòmiques, encara que no el segueixi en aquest procediment. El cita una altra vegada quan parla de navegació, amb relació a les loxodromes, on lloa Núñez per la seva proposta de navegar seguint aquestes línies de rumb. Peletier deia que havia sentit a parlar de l'obra de Núñez i és citat especialment per Clavius, que havia esta deixeble seu, i diverses vegades per Gosselin a la seva *Algebra.* Cal tenir en compte que l'àlgebra de Núñez va ser també recomanada per Herrera per tal de ser llegida a l'Acadèmia de Matemàtiques.

Després de la realització d'aquest treball, pensem que la nostra contribució demostra que el desprestigi de les obres dels autors espanyols, no té cap fonament. El que ha succeït és que degut a aquest desprestigi, motivat en part, per la publicació de l'article "Espagne" de Mason de Morvilliers, aquestes obres no han estat estudiades com mereixien. La producció científica a la Península Ibèrica del segle XVI va ser molt important i malgrat la Inquisició i malgrat la pragmàtica de Felip II, els autors de les àlgebres publicades a la Península Ibèrica estan en la línia de les d'altres autors europeus reconeguts, de la mateixa època.

A partir d'aquesta recerca, es podria avançar amb l'estudi de les obres d'aquesta època que contenen geometria, com la de Núñez, la de Pérez de Moya, que ha estat estudiada, en part, per Silva (Silva, 2016) i el manuscrit 1561 de Pérez de Mesa. Aquest estudi, que també hauria de contemplar el contingut geomètric de les obres europees, permetria complementar la visió de les obres d'aquests autors pel que fa a les matemàtiques.

Un altre aspecte que està pendent d'investigar, segurament perquè no s'ha donat rellevància a les obres espanyoles, són les possibles influències d'aquestes obres en altres del segle XVII i XVIII tant espanyoles com europees. Les conclusions d'aquesta tesi poden ser un punt de partida per aquestes recerques, que acabarien de situar els textos amb contingut algebraic de la Península Ibèrica del segle XVI en el panorama europeu, del qual han estat absents durant massa temps.

BIBLIOGRAFIA

Álava Viamont, Diego de (1590). *El perfecto capitán instruido en la disciplina militar y nueva ciencia de la artilleria.* Pedro Madrigal. Madrid.

Alberti, León Baptista (1582). *Los diez libros de Architectura.* Alonso Gómez. Madrid. Traducció de Francisco Loçano.

Apiano, Pedro (1575). *Cosmographía.* Juan Bellero. Anvers.

Aurel, Marco (1552). *Libro primero de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantívol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte Mayor o Regla de la cosa: sin la qual no se podrà entender el décimo de Euclides, ni otros muchos primores, asi en Arithmetica como en Geometria: compuesto, ordenado, y hecho Imprimir por Marco Aurel*. En casa de Joan de Mey Flandro. Valencia.

Axworthy, Angela (2004), *Le statut des disciplines mathématiques au XVIè siècle au regard des préfaces aux Élements d'Euclide de Niccolò Tartaglia et de Christophe Clavius*, Mémorie de maîtrise spécialisée "Renaissance".

Baranda, C. (2011). "Formas del discurso científico en el Renacimiento: tratados y diálogos", *Studia Aurea*, **5**, 1-21.

Barrera Osorio, Antonio (2006). *Experiencing Nature. The Spanish American Empire and the Early Scientific Revolution***.** University of Texas Press. Austin. EUA.

Bashmakova, Isabella, Smirnova, Galina (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. The Mathematical Association of America. Washington.

Borrel, Jean [Ioannis Buteonis] (1559), *Logistica, quæ et arithmetica vulgo dicitur, in libros quinque digesta quòrum index summatim habetur in tergo: Eiusdem, ad locum Vitruuii corruptum restitutio, qui est de proprotione lapidum mittendorum ad balistæ foramen.* Gulielmum Rovillium, Lyon.

Bos, Henk J.M. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction,* 120-127. Springer-Verlag. New York

Boyer, Carl (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons. New York (edició de 1985, Princeton University Press, Princeton).

Brown, Gary I. (1991). "The Evolution of the Term "Mixed Mathematics"". Journal of the History of Ideas, 52, n.1, 81-102.

Busard, Hubertus L. (2005) *Campanus of Novara and Euclid's Elements*. Franz Steiner Verlag. Stuttgart.

Cajori, Florian, (1928-1929). *A history of mathematical notations,* (2 vols.) The Open Court Publishing Company, 1928. Chicago. Reimprès per Dover, 1993.

Cañizares-Esguerra, Jorge (2004). "Iberian Science in the Renaissance: Ignored How Much Longer?". *Perspectives on Science*, 12, n. 1.

Carabias Torres, Ana María (2012), *Salamanca y la medida del tiempo*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Cardano, Girolamo (1545). *Ars Magna.* Johann Petreius. Nürnberg (traducció a l'anglès de Witmer, R. T. de 1968. M.I.T. Cambridge, reimpresa per Dover, New York el 1993).

Caunedo del Potro, Betsabé (2009). "Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés". *Pecvnia* **8**, 71-96.

Chuquet, Nicolas (1484). "Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien" a Marre, A. (ed.). *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* **13** (1880), 593–659, 693–814.

Cifoletti, Giovanna (1996). « The creation of the history of algebra in the sixteenth century », in C Goldstein, J Gray and J Ritter (eds), *L'Europe mathématique / Mathematical Europe,* 121-142. Éditions de la Maison des sciences de l'homme. Paris.

Cifoletti, Giovanna (2004). "The Algebraic Art of Discourse: Algebraic *Dispositio, Invention* and *Imitation* in Sixteenth Century France" a Chemla, Karine (ed.), *History of Science, History of Text*, 123-135. Springer. New York..

Cifoletti, Giovanna (2006). "From Valla to Viète: The Rethorical Reform of Logic and Its Use in Early Modern Algebra" a *Early Science and Medicine,* vol. 11, n. 4, 390-423. Brill, Leyde.

Clavius, Christoph, 1608. *Algebra*. Rome.

Cortés de Albacar, Martín (1551). *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar con nuevos instrumentos y reglas: exemplificado con muy subtiles demonstraciones.* Antón Álvarez. Sevilla.

Costa Canas, António; Ferrão, M. Eugénia (coords.) (2009). *A Matemática no tempo do mestre José Vizinho*. Sociedade Portuguesa de Matemàtica/Gradiva Publicaçoes, S.A. Lisboa.

Cuomo, Serafina (2000). *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*. Cambridge University Press. Cambridge.

Davies, T.S. (1833). "On Bernouilli's Solution of the Problem of Shortest Twilight". *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*, **3**, July-Desember 1833, 179. University of London, London.

De Vega Carpio, Lope (1605). *El peregrino en su patria.* Casa de Sebastián de Cormellas. Barcelona.

Delgado Criado; Buenaventura (1993). Historia de la Educación en España y América. La educación en la España Moderna (Siglos XVI-XVIII), 35. Fundación Santa María. Ediciones SM. Madrid.

Dijksterhuis, E.J. (1970). *Simon Stevin: Science in the Netherlands around 1600.* Martinus Nijhoff. The Hague. Netherlands.

Docampo, Rey, Javier (2006). «Reading Luca Pacioli's Summa in Catalonia: An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic», *Historia Mathematica* **33**, 43-62.

Docampo Rey, Javier (2010). "Vernacular algebra in the Iberian Peninsula before Marco Aurel: Notations and terminology", a H Hunger, F Seebacher and G Holzer, (eds), *Styles of thinking in Science and Technology. 3rd. ICESHS*, 85-92. Austrian Academy of Sciences. Vienna.

Donoso Cortés, Rafael (1996). *Una contribución a la historia de la contabilidad: anàlisis de las prácticas contables desarrolladas por la tesorería de la Casa de la Contratación de las Indias de Sevilla (1503-1717*). Universidad de Sevilla.

Dorce Polo, Carlos (2017). *Historia de las matemáticas en España*, **1**, 161-236. Editorial Arpegio. Sant Cugat.

Escalante, Bernardino de (1577). *Discurso de la navegación*. Biuda de Alonso Escrivano, Sevilla.

Esteban Piñeiro, M. (1999). "La Academia de Matemáticas de Madrid" dins les *Actas del Congreso Internacional sobre La Ciencia y la Técnica en la época de Felipe II*, 113-133. FUNDESCO. Madrid.

Euclides, (1991), *Elementos*, Madrid, Editorial Gredos, vol. I i II.

Faleiro, Francisco (1535). "Tratado del Sphera y del Arte del Marear compuesto por Francisco Faleiro natural del Reyno de Portugal"a J. Bensaude (eds.) *Opera Omnia do Academico Titular Fundador da Academia Portuguesa da Historia, Joaquim Bensaude (1859-1952)*, 9-110. Academia Portuguesa da Historia, IV. Lisboa.

Febrer Romaguera, M.V. (2003). *Ortodoxia y Humanismo. Els estudio general de Valencia durante el rectorado de Joan de Salaya (1525*-1558), 267. Servei de Publicacions de la Universitat de València. Sueca.

Fernández de Enciso, Martín (1519). *Suma de Geographia*. Juan Cromberger. Sevilla.

Fernández Luzón, Antonio (2005). *La Universidad de Barcelona en el siglo XVI*. Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona.

Fernández Vallín, Acisclo (1989). *Cultura científica en España en el siglo XVI*, **38**, ed. Facsímil, Sevilla.

Fitzpatrick, Richard (2008). *Euclid's Elements of Geometry. The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885).* Richard Fitzpatrick.

Fontes da Costa, Palmira; Leitão, Henrique (2009). "Portuguese Imperial Science,1450–1800. A Historiographical Review"a Bleichmar, Daniela & altres (eds.) *Science in the Spanish and Portuguese Empires, 1500–1800*, 35-53. Stanford University Press. Stanford, California.

Forcadel, Pierre (1556). *L'arithmetique de P. Forcadel de Beziers: En laquelle sont traictées quatre reigles briefves, qui contiennent les deux cents quarante anciennes, & plusieurs autres reigles pour l'exercice des nombres entieres, par lesquels on peut facilement parvenir à la* *cognoissance de l'algebre: le tout nouvellement inventé par l'auteur.* Guillaume Cavellat. Paris.

Fowler, David (1992). "An invitation to read book X of Euclid's *Elements". Historia Mathematica,* **19**, 233-264.

Franci, Raffaella; Toti, Laura (1979). *Storia della teoria delle equazioni algebriche*. Ugo Mursia editore.

Franci, Raffaella; Toti Rigatelli, Laura (1985), "Towards a history of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli", *Janus: Revue Internationale de l'Histoire des Sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique*, LXXII, 1-3, 17-82.

Franci, Rafaella and Totti Rigatelli, Laura (1988). "Fourteenth-century Italian algebra" a C. Hay (ed), *Mathematics from Manuscript to Print, 1300-1600*, 11-29. Clarendon Press. Oxford.

Franci, Raffaella (2010). "The History of Algebra in Italy in the 14th and 15th Centuries. Some Remarks on Recent Historiography" a *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Nova època **3**:2, 175–194.

García de Palacio, Diego (1587). *Instrucción nàutica*. Pedro de Ocharte, México.

Ghaligai; Francesco (1521). *Summa de arithmetica.* Bernardo Zucchetta. Firenze.

Girard, Albert (1620). *L'arithmetique de Simon Stevin de Bruges (1585).* Edició revisada, corregida i anotada per Albert Girard.

González González, F.J. (2006). "Del "Arte de marear" a la navegación astronómica: Técnicas e instrumentos de navegación en la España de la Edad Moderna". *Cuadernos de Historia Moderna. Anejos*. **V**, 135-166.

González Hernández, C. (2016). "Del francés al castellano: las traducciones en la *Junta de libros*". *Quaderns de Filologia; Estudis Lingüístics XXI,* 165-183.

Gosselin, Guillaume (1577). *De arte magna, seu De occulta parte numerorum & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur, libir quattor, in quibus explicantur æquationes Diophanti, Regulaæ Quantitas simplicis, & Quantitatis surdæ,* Parisiis, apud Ægidium Beys.

Hamon, Gérard (2015). "La mémoire des sources arabes" a Barbin, Évelyne i Maltret, Jean-Louis (dir.), *Les Mathématiques Mediterranéennes d'une rive et de l'autre,* 125-138. Ellipses, Paris.

Heath, Thomas L. (1908). *Euclid. The thirteen books of the Elements*, **(3 vols.)** Cambridge University Press. London.

Heeffer, Albrecht (2008). "Estienne de la Roche's appropriation of Chuquet (1484)" a Hermann Hunger (ed.) *Book of Abstracts, 3rd International Conference of the European Society for the History of Science*, 36-52. Vienna.

Heeffer, Albrecht (2009). "On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism", 1–27 a Bart van Kerkhove (ed.), *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics.* World Scientific. Singapore.

Heeffer, Albrecht (2010), "From the Second Unknown to the Symbolic Equation", a A. Heeffer and M. Van Dyck (eds.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics.* Studies in Logic 26. College Publications. London.

Heefer, Albrecht (2012a). "Surmounting obstacles: circulation and adoption of algebraic symbolism" a Heffer, A. i Massa Esteve, Maria Rosa, *The Epistemic Functions of Algebraic Symbolism: historical Case Studies.Philosophica,* **87,** 5-25**.** Ghent University.

Heeffer, Albrecht (2012b). "The rule of quantity by Chuquet and de la Roche and its influence on German Cossic algebra", a Rommevaux, S.; Spiesser, M. i Massa Esteve; M.R. (eds.), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance,* 127-147. Honoré Champions. Paris.

Heeffer, Albrecht (2014). "How algebra spoiled recreational problems: A case study in the cross-cultural dissemination of mathematics". *Historia Mathematica,* **41**, 400-437.

Herrera, Juan de (1995). *Institución de la Academia Real Mathemática,* edició i estudis preliminars José Simón Díaz i Luis Cervera Vera. Instituto de Estudios Madrileños. Madrid. Reproducció del original de 1584 en facsímil.

Hinojosa, J.R. (1987). "Mercaderes alemanes en la Valencia del siglo XV: la "Gran Compañía " de Ravensburg", a *Anuario de Estudios Medievales*, **17**, 455-468

Høyrup, Jens (1988). "Jordanus de Nemore 13th Century Mathematical Innovator", a *Archive for History of Exact Science* **38** (1988), 307-363.

Høyrup, Jens (2001). "The Founding of Italian Vernacular Algebra", a *Commerce et mathématiques du moyen âge à la renaissance, autour de la Méditerranée*, 129–156. *Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13–16 mai 1999)*. Éditions du C.I.H.S.O. Toulouse.

Høyrup, Jens (2002). "Pedro Nuñez: Innovateur bloqué, et dernier témoin d'une traditions millénaire". *Gazeta de matemàtica,* 143, 52-59.

Høyrup, Jens (2015). "Embedding: Another case of stumbling progress in the history of algebra", *Physis, Rivista Internationale di Storia delle Scienza,* L (1-2), 1-38.

Hunger Parshall, Karen (2017). "A plurality of algebras, 1200-1600: Algebraic Europe from Fibonacci to Clavius. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics,* **32**, 2-16.

Hutton, Charles (1795). *Mathematical and Philosophical Dictionary*, **1**, 125-126. J. Johnson. London.

Jones, Alexander (1986). *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection*. Springer. New York.

Juez Gálvez, Francisco Javier (2001). "La Marulología en España en los umbrales del siglo XXI" *Eslavística Complutense*, **1**, 347-370.

Katz, Victor; Hunger Parshall, Karen (2014). *Taming the unknown. A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century.* Princeton University Press. Princeton and Oxford.

Kaunzner, Wolfgang and Röttel, Karl (2006). *Christoff Rudolff aus Jauer in Schlesien. Zum 500. Geburtstag eines bedeutenden Cossisten und Aritmetikers, der aus diesem seinerzeit hoheitlich zur Krone von Böhem gehörenden Landesteil stammt.* Polygon-Verlag. Eichstätt.

Kvasz, Ladislav (2008). *Patterns of Change,* 167-172. Birkhäuser. Verlag AG. Basel.

Labarthe, Marie-Hélène (2010). "Extensions des operations de l'arithmetique aux nouveaux objets de l'Algèbre: l'argumentation de Perdro Nunes" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **11**, 19-51, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca.

Labrador Gutiérrez, Tomás (2005). "E. A. De Nebrija: Gramática de la llengua castellana. Su utilidad y eficacia para "deprender peregrinas lenguas""a Castillo Carballo, M. A.;

Cruz Moya, O.; García Platero, J.M. & Mora Gutiérrez, J. P. (coord.) a *Las gramáticas y los diccionarios en la enseñanza del español como segunda lengua: deseo y realidad. Asociación para la Enseñanza del Español como Lengua Extranjera. XV Congreso Internacional de la ASELE,* 518-525. Universidad de Sevilla. Sevilla.

Loget, François (2010), "La disgression sur l'angle de contact dans le Libro de Algebra de Pedro Nuñez" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **9**, 79-100, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca.

Leitão, Henrique (2002). *Pedro Nunes 1502-1578. Novas terras, novos mares e o que mays he: novo ceo e noves estrelles*. Biblioteca Nacional. Lisboa.

Leitão, Henrique (2003). "Para uma biografia de Pedro Nunes: O surgimento de un matemático, 1502-1542", *Cadernos de Estudos Sefarditas*, **3**, 50-51.

Leitão, Henrique (2010), "Pedro Nunes e o Libro de Algebra" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **11**, 9-18, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca.

Lilao, Óscar; Castrillo, Carmen (2002). *Catálogo de manuscritos de la biblioteca universitària de Salamanca, II, manuscritos 1680-2777*. Ediciones Universidad de Salamanca.

López Piñero, José Mª (1979). *Ciencia y Técnica en la Sociedad Española de los siglos XVI y XVII,* Editorial Labor. Barcelona.

López Piñero, José Mª (1999). "Actividad científica y sociedad en la España de Felipe II", a Martínez Ruiz (dir.) *Felipe II. La Ciencia y la Técnica,* 17-37. Actas. FUNDESCO. Madrid.

Machado Mota, Bernardo (2011). *O estatuto da matemàtica em Portugal nos séculos XVI e XVII.* Fundaçao Calouste Gulbenkian.

Maierù, Luigi (1992). "Filologia, epistemologia e contenuti matematici in Henry de Monantheuil circa l'angolo di contatto". *La Matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matemàtica tra '500 e '600,* 105-130. Edizioni Porziuncola. Perugia.

Malet, A. (ed.), 1998. *Francesc Santcliment. Summa de l'art d'aritmètica*. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Eumo editorial. Vic.

Malet, Antoni (2006). "Renaissance notions of number and magnitude". *Historia Mathematica* **33**, 63-81.

Marre, Aristide (1880). "Le Triparty en la Science des nombres par Maître Nicolas Chuquet parisien, d'après le manuscrit fonds français, nº 1346 de la Bibliothèque Nationale de Paris". *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche,* **13** (treball original del 1484), 593-659 i 693-814.

Martín-Merás, Luisa (2003). "Las enseñanzas náuticas en la Casa de la Contratación de Sevilla a Acosta Rodríguez; Antonio & González Rodríguez, Adolfo (coord.). *La Casa de la Contratación y la Navegación entre España y las Indias.* CSIC. Universidad de Sevilla.

Masson de Morvilliers, Nicolás 1782. « Espagne », *Encyclopédie méthodique ou par ordre des matières. Géographie moderne.* Vol. I, 554-568. Pandoucke. Paris.

Massa Esteve, Ma. Rosa (2008). "L'àlgebra al segle XVI a Espanya. L'Arithmetica (1564) del gironí Antic Roca" a *Actes d'història de la ciencia i de la técnica*. Nova época, 1(2), 311-317.

Massa-Esteve, Ma. Rosa, (2010a). "The treatment of equations in the Iberian Peninsula after Marco Aurel (1552): The Great Art of Antic Roca", a H. Hunger, F. Seebacher i G. Holzer, (eds). *Styles of thinking in Science and Technology*, 103-111. 3rd ICESHS, Vienna: Austrian Academy of Sciences.

Massa-Esteve, Ma. Rosa, (2010b). "Àlgebra I Geometria al libro de Álgebra en Artihmetica y Geometria (1567)" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **11**, 101-125, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca".

Massa-Esteve, M. Rosa, Roca-Rosell, Antoni i Puig-Pla, Carles (2011). "Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century". *Engineering Studies* , **3**, 233-253.

Massa-Esteve, Ma. Rosa (2012). "Spanish Arte Mayor in the Sixteenth century", a S Rommevaux, M Spiesser and M R Massa Esteve (eds.), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance,* 103-126. Honoré Champions Éditeur. Paris.

Medina Ávila, Carlos J. (2014). ”De la Escuela a la Academia. Los centros de formación de artilleros” en el número extraordinari de la *Revista de Historia Militar* de març de 2014, editada pel “Instituto de Historia y Cultura Militar”

Medina, Pedro de (1545). *Arte de navegar*. Francisco Fernández de Córdova. Valladolid.

Medina, Pedro de (1563). *Regimiento de navegación*. Simón Carpintero. Sevilla.

Micón, Josepe (1578). *Diario y juyzio del grande cometa*. Jayme Sendrat. Barcelona.

Miquel Rosell, F. (1958). *Inventario general de manuscritos de la Biblioteca Universitaria de Barcelona.* Volumen I. Manuscritos 1 – 500, 567-569. Direcciones Generales de Enseñanza Universitaria y de Archivos y Bibliotecas. Madrid.

Miquel Rosell, F. (1969). *Inventario general de manuscritos de la Biblioteca Universitaria de Barcelona.* Volumen IV. Manuscritos 1501 – 2030, 44. Direcciones Generales de Enseñanza Universitaria y de Archivos y Bibliotecas. Madrid.

Molas, J. (1998). “Francesc Calça: Poemes”. *Els Marges* (14), 77-95.

Molina Sangüesa, Itziar (2015). “En torno a las incógnitas del álgebra: Cosa, Segunda cosa y Cantidad. Análisis de una terminología matemática renacentista”, *Cuadernos AISPI. Estudios de Lenguas y Literaturas Hispánicas* **6**, 127-146.

Molina Sangüesa, Itziar (2017). *Letras, números e incógnitas: estudio de las voces aritmético-algebraicas del Renacimiento*. Iberoamericana-Vervuert. Madrid-Frankfurt.

Monmonier, Mark (2004). Rumb Lines and Map Wars. A Social History of the Mercator Projection, 2. The University of Chicago Press. Chicago and London.

Moody, Ernest A. (1953). “Truth and Consequence in Mediaeval logic” a Brouwer, L.E.J.; Beth, E.W. & Heyting, A. (eds.) *Studies in Logic and the Fundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Company. Amsterdam.

Mordechai, Feingold & Navarro-Brotons, Víctor (eds.) (2006). *Unviersities and Science in the Early Modern Period.* Springer. Dordrecht.

Müller, Johann. De Triangulis Omnimodis, traduïda per Barnabas Hughes (1967). University of Wisconsin Press. Madison.

Muñoz, Jerónimo (1573). *Libro del nuevo cometa.* Pedro de Huete, Valencia.

Naets, Jurgen (2010). "How to Define a Number? A General Epistemological Account of Simon Stevin's Art of Defining". *Topoi,* 29, 77-86.

Nauert, Charles G. (2006). "Mentalidad", a Cameron, Euan (ed.), *El siglo XVI.* 136-165. Editorial Crítica. Barcelona.

Navarro, Brotons, Víctor (1992). "La actividad astronómica en la España del siglo XVI: perspectivas historiográficas" *Arbor CXLII, (558-559-560),* 185-216.

Navarro, V.; Salavert, V. L.; Roselló, V.; Darás, V. (1999), *Bibliographia physico-mathematica hispanica (1475-1900)*. Cuadernos Valencianos de Historia de la Medicina y de la Ciencia, LVI. Valencia, Instituto de Historia de la Ciencia y Documentación "López Piñero". Universitat de València-CSIC, **I**.

Navarro, V.; Rodríguez, E. (1998). *Matemáticas, cosmología y humanismo en la España del siglo XVI. Los Comentarios al segundo libro de la Historia Natural de Plinio de Jerónimo Muñoz.* Cuadernos Valencianos de Historia de la Medicina y de la Ciencia, LIV. Instituto de Estudios Documentales e Históricos sobre la Ciencia. Universitat de València-CSIC. Valencia.

Navarro Brotons, Víctor. (2006) "The cultivation of astronomy in Spanish Universities in the latter half of the 16th century" a Feingold, M. i Navarro-Brotons, V. (eds.) *New studies in the History and Philosophy of Science and Technology. Universities and science in the early modern period*. Archimedes, vol. 12, 83-98. Springer. Neherlands.

Navarro Brotons, Víctor (2014). *Disciplinas, saberes y prácticas. Filosofía natural, matemáticas y astronomia en la sociedad española de la época moderna.* Publicacions de la Universitat de València.

Nebrija, Antonio de (1517). *Tabla de la diversidad de los días y horas*. Arano de Guillén de Brocar. Alcalá de Henares.

Nesselmann, Georg Heinrich Ferdinand (1842). *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, I. Die Algebra der Griechen.* Berlín (reimprès per Minerva, Frankfurt, 1969).

Nieto-Galan, Agustí (2008) "The History of Science in Spain: A Critical Overview", *Nuncius,* 23 (2), 211-236.

Nieto-Galan, Agustí (2016). *Science in the Public Sphere. A history of lay knowledge and expertise*. Routledge. New York.

Nuñez Salaciense, Pedro (1546). *De erratis Orontii Finaei Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris, Qui putavit inter duas datas lineas, binas medias proportionales sub continua proportione invenisse, circulum quadrasse, cubum duplicasse, multangulum quodcunque rectilineum in circulo describendi, artem tradidisse, & longitudinis locorum differentias aliter quam per eclipses lunares, etiam dato quovis tempore manifestas fecisse, Petri Nonii, Salaciensis Liber unus*. João Barreira et João Álvares. Coimbra.

Nuñez Salaciense, Pedro, (1567) *Libro de álgebra en arithmetica y geometría.* En casa de los Herederos d'Arnoldo Birkman. Anvers.

Oaks, Jeffrey, A., Alkhateeb, Haitham M. (2005). "*Māl,* enuntiations, and the prehistory of Arabic àlgebra". *Historia Mathematica,* ***32,*** 400-425.

Oaks, Jeffrey A. (2017). "Irrational "Coefficients" in Renaissance Algebra". *Science in Context,* **30** (2), 141-172.

Ordóñez, J.; Navarro, V.; Sánchez, J.M. (2007). *Historia de la Ciencia*, 239-300. Espasa Calpe S.A. Madrid.

Ortega, J. De (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria,* 26^{v}-27^{r}. En casa de Maistro Nicolau de Benedictis. León.

Ortiz de Zárate Leira, José María (2015). "Manuscrito con obras atribuidas a Diego Pérez de Mesa en la *Biblioteca Histórica* de la Universidad Complutense" a González Redondo, F. A. (coord.), *Ciencia y Técnica entre la Paz y la Guerra. 1714, 1814, 1914,* 1141-1148. SEHCYT, Madrid.

Pacioli, Luca (1494), *Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni et Poportionalità,* Venezia, Paganino de Paganini.

Parareda Corrêa, Euclides (2015). *La razón de Estado en el pensamiento político de Pérez de Mesa.* Tesi doctoral. Universidad de León.

Pardo Tomás, J. (1991). Ciencia y censura. *La Inquisión Española y los libros científicos en los siglos XVI y XVII.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

Parshall, Karen Hunger (2017). "A plurality of Algebras, 1200-1600: Algebraic Europe from Fibonacci to Clavius", *BSHM. Bulletin Journal of the British Society for the History of Mathematics*, **32** (1) (2017), 2-16.

Peletier, Jacques (1554). *L'algebre de Iaques Peletier dv Mans, departie an deus liures*. Jean de Tournes. Lyon.

Peralta, Javier (2016). "Los Estudios de Matemáticas en la Universidad de Alcalá en Tiempos de Carlos III y sus Precedentes". *Boletin de Educaçao Matemática*, 30, n. 55, 402-423. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Río Claro. Brasil

Pérez de Mesa, Diego (1598). *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrología y matematicas.* Manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca.

Pérez de Mesa, Diego (ca. 1632). *Política o Razón de Estado.* Edició crítica de Pereña L.; Baciero, C,; Abril, V.; García, A. i Maseda, F. (1980). CSIC. Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1554). *Libro de cuenta.* Juan Ferrer. BNM, R-14.218. Toledo.

Pérez de Moya, Juan (1558). *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor ordenado por el Bachiller Juan Pérez de Moya, natural de Santisteban del Puerto*. Martin de Bitoria. Burgos.

Pérez de Moya, Juan, (1562), *Arithmetica práctica y speculativa* [del Bachiller Juan Pérez de Moya, agora nuevamente corregida y añadidas por el mismo autor muchas cosas con otros dos libros y una tabla muy copiosa de las cosas más notables de todo lo que en este libro contiene]. Mathías Gast. Salamanca.

Pérez de Moya, Juan, (1573). *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural*. Juan Gracian. Alcalá de Henares.

Peset, Mariano (coord.) (2000). *Història de la Universitat de València.* Volum I. Universitat de València.

Picatoste Rodríguez, Felipe (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI: estudios biográficos y bibliográficos de ciencias exactas, físicas y naturales y sus inmediatas aplicaciones en dicho siglo.* Imprenta y fundición de Manuel Tello. Madrid.

Pimentel, Juan; Pardo-Tomás, José (2017). "And yet, we were modern. The paradoxes of Iberian science after the Grand Narratives. *History of Science.* **55** (2), 133-147.

Pisano, Leonardo, *Flos* (1225). Códice Ambrosiano de Milano.

Poça, Andrés de (1585). *Hydrografía*. Mathías Mares, Bilbao.

Portuondo, Maria M. (2009), *Secret Science: Spanish Cosmography and the New World.* University of Chicago Press.

Rabaseda Tarrés, Joaquim (2010). *El Compendi d'Antich Rocha. Primer text sobre la partida doble a la Península Ibèrica*.

Radford, Luis (1997). « L'invention d'un idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre » , *Reperes-Irem* , **28**, 81-98.

Radford, Luis (2006). "The Cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism" a Furringhetti, F.; Kaijser, S. i Tzanakis, C. (eds.), a *Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference &* ESU4, 509-524. Uppsala. Sweden. (Conferència Plenària).

Ramus, Petrus (1560). *Algebra*. Parisiis, apud Andream Wechelum.

Recorde, Robert (1557). *The Whetstone of Witte*. Facsimile reprint New York: Da Capo Press, 1969. London.

Reich, K. (1994). "The "Coss" tradition in algebra", a Grattan-Guinness (ed.), Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, 1. Routledge.

Rényi, Alfréd (1965). *Dialógusok a matematikáról*. Akádemiai Kiadó. Budapest.

Rey Pastor, Julio, (1934), *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas. Monografía 1. Madrid.

Roca, Antic (1564). *Arithmetica recopilación de todas las otras que se han publicado hasta agora.* Claudio Bornat. Barcelona.

Roche, Estienne de la (1520). *L'arismethique novellement compose par maistre Estienne de la Roche dict Villefranche natif de Lyon sou le Rosne*. Lyon (reedició de 1538).

Rodet, Leon (1881). *Sur les notations numèriques et algèbriques antérieurment au XVI siècle*, 69. E. Leroux. Paris.

Rodríguez Vidal, R. (1987.) *Diálogos de Aritmética pràctica y especulativa* (1562), 5-25. Prensas Universitarias de Zaragoza.

Rojas, Cristóbal de (1598). *Teorica y practica de fortificación conforme las medidas y defensas destos tiempos, repartida en tres partes.* Luis Sánchez, Madrid.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2007). *Una aproximació al pensament algebraic a l'Espanya del segle XVI. Estudi del manuscrit 2294 de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca*, Treball de mestratge d'Història de la Ciència, Universitat Autònoma de Barcelona. Barcelona.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2008). "The equalities and the rule of quantity in Pérez de Mesa's work", a Hermann Hunger, Felicitas Seebacher, Gerhard Holzer (ed.) *Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for the History of Science*, 122-130. Vienna.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2010). "Les quantitats irracionals a l'Àlgebra de Pedro Núñez" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **11**, 53-77 editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca".

Romero Vallhonesta, Fàtima, (2011). "The rule of "quantity" in Spanish algebras of the 16th Century. Possible sources". *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Nova època, **4**, 93-115.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2012). "Algebraic symbolism in the first algebraic works in the Iberian Peninsula", *Philosophica,* **87**, 117-152. Ghent University.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2014). "Manuscript 2294 from the Library of Salamanca University" a Katsiampoura, Gianna (ed.). *Proceedings of the 5th International Conference "of the European Society for the History of Science*, 369-378.

Romero Vallhonesta, Fàtima (2016). "Disciplines, sabers i pràctiques" a *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* **15,** 517-537, editat pel Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica "Francesc Santponç i Roca".

Romero Vallhonesta, Fàtima; Massa-Esteve, Ma. Rosa (2018). "The main sources for the *Arte Mayor* in sixteenth century Spain". *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the*

History of Mathematics. Publicat online el 18 de gener de 2018: http://dx.doi.org/10.1080/17498430.2017.1419704.

Ruiz Higueras, Luisa & García García, Francisco Javier (2009). "*Aritmetica Practica y Specvlativa* de J. Pèrez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico". *Llull*, **32,** 103-133.

Sabio, Rafael (2003). " La historia de Tarifa según dos autores del siglo XVI: Pedro de Medina y Diego Pérez de Mesa", *Aljaranda .Revista de Estudios Tarifeños*, **50**, 9-14. Servicio de Publicaciones del Excelentísimo Ayuntamiento de Tarifa.

Sacrobosco, Juan de (1545). *Tractado de la sphera*. Juan de León. Sevilla. Traducció de Hierónymo de Chaves.

Salavert Fabiani, Vicent, (1990a). "Introducción a la historia de la aritmética práctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI". *Dynamis. Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam* **10**, 63-91.

Salavert Fabiani, Vicente (1990b) "Aritmética y sociedad en la España del siglo XVI", a S. Garma, D. Flament i V. Navarro (eds.), *Contra los titanes de la rutina*. Encuentro, en Madrid, de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofía de la matemática, 51-69, CSIC. Madrid.

Sánchez Manzano, Mª Asunción (2002). *Boecio. Institutio Arithmetica.* Universidad de León. Secretariado de Publicaciones. León.

Schreiber, Heinrich, 1518. *Ayn new Kunstlich Buech*. Johannes Stuchs. Nürberg

Secord, James (2004). "Knowledge in Transit". *Isis*, 95, 654-672.

Serfati, Michel (2010). "Symbolic revolution, scientific revolution: mathematical and philosophical aspects" a Heeffer, A. i Van Dyck, M. (eds.). *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics.* College Publications.

Sesiano, Jacques (2000). *An Introduction to the History of Algebra. Soving Equations from Mesopotamia Times to the Renaissance*, 93-140. American Mathematical Society. USA.

Sesma, J. A (2013). *Revolución comercial y cambio social: Aragón y el mundo Mediterráneo (siglos XIV y XV), 405-409*. Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Sierra, Leonor (2004). “Analfabetos y cultura letrada en el siglo de Cervantes: los ejemplos del Quijote”. *Revista de Educación,* núm. extraordinari, 49-59.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci’s Liber Abaci.* Springer-Verlag. New York.

Silva, Maria do Céu, (2016), “On the circulation of algebraic knowledge in the Iberian peninsula: On the sources of Pérez de Moya’s Tratado de Arithmetica (1573)”. *Revue d’Histoire des Mathématiques* **22** (2), 145-184.

Smith, David Eugene (1908). *Rara arithmetica. A Catalogue of the Arithmetics Written Before the Year MDCI with a description of those in the Library of George Arthur Plimpton of New York.*.Ginn. Boston & London.

Sousa Ventura, Manuel (1985). *Vida e Obra de Pedro Nunes.* Biblioteca Breve, **99.** Instituto de Cultura e Lingua Portuguesa. Ministério da Educação. Lisboa.

Spiesser, Maryvonne (2006). “L’algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l’arithmétique commerciale”. *Revue d’historie des mathématiques,* **12**, 7-33.

Stedall, Jacqueline (2011). *From Cardano’s great art to Lagrange’s reflections: filling a gap in the history of àlgebra.* European Mathematical Society. Zürich.

Stedall, Jacqueline (2012). ”Narratives of algebra in early printed European texts”, a S. Rommevaux, M. Spiesser and Ma. R. Massa Esteve (eds). *Pluralité de l’algèbre à la Renaissance, 217-235.* Honoré Champions. Paris.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Johann Petreius. Nürnberg.

Swetz, Frank J. (1987). *Capitalism and Arithmetic. The New Math of the 15th Century.* La Salle, Open Court. Illinois.

Tartaglia, Niccolò (1537). *Nova Scientia.* Venezia.

Tartaglia, Niccolò (1546). *Quesiti et inventione diverse.* Venezia.

Tavares da Conceição, Margarida (2011).“Translating Vitrubius and Measuring the Sky: On Pedro Nunes and Architecture”. *Nexus Network Journal,* **13**, n. 1, 205-220.

Terquem, M. (1857). "Christophe Rudolff". *Annali di Scienze matematiche e fisiche,* **8**, 325-338.

Tovar, Simón de (1595). *Examen y censura del modo de averiguar las alturas de las tierras*. Rodrigo de Cabrera. Sevilla.

Valladares Reguero, A. (1997). "El Bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes biobibliográficos". *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses,* n. 165, 371-412

Van Egmond, Warren (1981). *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*. Editrice Giunti Barbèra. Firenze.

Van Egmond, Warren (1988). "How Algebra came to France?" a Hay, Cynthia (ed.), *Mathematics from Manuscript to Print (1300-1600),* 127-144. Clarendon Press. Oxford.

Vicente Maroto, M. Isabel (2002). "El arte de navegar", a L. García Ballester (coord.) *Historia de la ciencia y de la técnica en la corona de Castilla*, 357. Tomo III, siglos XVI y XVII. Salamanca. Ediciones de la Junta de Castilla y León.

Vicente Maroto, M. Isabel (2003). "El arte de la navegación en el Siglo de Oro", 187-230. Cátedra Jorge Juan. Curso 2000-2001, Jesús Ramón Victoria Meizoso (dir.). A Coruña Universidade.

Viète, François (1591). *In artem Analyticen Isagoge. Seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu algebra nova*. J. Mettayer. Tours.

Vitrubio Pollión, Marco (1582). *De Architectura.* Juan Gracián. Alcalá de Henares. Traducció de Miguel Urrea.

Zamorano, Rodrigo (1581). *Compendio del arte de navegar*. Alonso de la Barrera. Sevilla.

Zinner, Ernst (1990). *Regiomontanus: his life and work.* Traduït per Ezra Brown. Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam.

ANNEX. Les quantitats irracionals: els binomis i els residus.

En aquest annex donarem alguns detalls referents als binomis i els residus, als quals, tal com hem mostrat en la tesi, la majoria d'autors hi dediquen un capítol amb exemples de cada tipus i amb el procediment per extreure'n arrels.

No solament les obres analitzades en aquesta tesi, sinó que la majoria dels tractats d'àlgebra renaixentistes, solen dedicar un capítol a la classificació dels binomis i els apòtomes o residus, que són les expressions que estan formades per la suma, en el cas dels binomis, o per la diferència, en el cas dels residus, d'un nombre racional i una arrel quadrada, o bé de dues arrels quadrades. La inclusió d'aquest capítol es pot justificar per la utilitat que tindrà saber operar amb aquest tipus d'expressions quan s'hagin de resoldre equacions de segon grau.

Els binomis i les seves arrels a Els Elements d'Euclides

La definició de *binomi o línia binomial* la trobem a la proposició 36 del llibre X dels *Elements*: "Si es sumen dues rectes expressables commensurables només en quadrat, la recta sencera no és expressable; anomenem-la binomial"[538]. Després de definir altres tipus de rectes, presenta el que anomena "segones definicions", intercalades entre les proposicions 47 i 48, que classifiquen les binomials ens sis tipus.

[538] Aquesta és la traducció que he fet de la versió de M. Luisa Puertas, que fa servir l'expressió "rectes expressables" en comptes d'irracionals. La mateix proposició en el Heath s'expressa: "If two rational straight lines commensurable in square only be added together, the whole is irrational; and let it be called binomial".

Segons la proposició (X, 36) dels *Elements* "si es sumen dues rectes expressables commensurables només en quadrat, la [recta] sencera no és expressable; s'anomena *binomial"*[539]. Quan als *Elements* es parla de rectes expressables, es fa referència al que actualment en diríem segments commensurables en longitud, o incommensurables en longitud però que els seus quadrats són commensurables[540].

Aquestes "rectes" actualment s'expressarien com la suma (o diferència) d'un nombre racional i una arrel, o bé de dues arrels.

Les línies binomials es classifiquen en 6 tipus, que s'obtenen tenint en compte que els binomis poden estar formats per la suma d'una arrel (que sempre és irracional) i un nombre racional o bé de dues arrels i en el primer cas, diferenciant que el terme més gran sigui l'arrel o el nombre racional. Amb aquesta classificació obtindríem tres tipus de línies binomials. Per a cadascun dels casos se n'obté un altre en funció de si la proporció entre el quadrat del terme més gran i la diferència entre els quadrats dels dos termes, es pot escriure o no com una proporció entre dos nombres quadrats. Concretarem aquesta classificació més endavant amb els exemples i explicacions de Pérez de Mesa. Després d'aquesta classificació de les línies binomials, i de la construcció de cadascuna d'elles[541], en els *Elements* hi ha una sèrie de proposicions en les quals es busca el costat del quadrat equivalent al rectangle format per una recta expressable i una binomial[542]. En el cas que sigui la primera binomial un dels costats d'aquest rectangle, el costat del quadrat equivalent és una binomial, en el cas que un d'aquests costats sigui una segona binomial, el costat del quadrat equivalent és una primera bimedial[543] i així continua fins la sisena binomial. Si la recta expressable es pren com a unitat, el procediment el podríem interpretar actualment com un mètode per a extreure arrels de les expressions binomials.

---

539 Traducció de l'autora de l'edició de M. Luisa Puertas

540 Més aclariments sobre el llenguatge del llibre X a: Fowler, 1992.

541 La construcció de les línies binomials es fa en les proposicions del llibre X de *Els Elements*, que van de la 48 a la 53.

542 Es tracta de les proposicions del llibre X que van de la 54 a la 59.

543 A la proposició 33 del llibre X de *Els Elements*, es defineix recta medial i a la proposició 37, primera bimedial.

El binomis i les seves arrels en el Liber Abaci de Fibonacci

El capítol 14è del *Liber Abaci* tracta de l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques, de les operacions amb arrels i de les línies binomials. En la introducció fa referència a alguns resultats del llibre II dels *Elements* que necessitarà al llarg del capítol, però no cita proposicions concretes[544]. Pel que fa a les binomials, Fibonacci les classifica en la segona part del capítol de manera similar a com estan classificades al llibre X dels *Elements*, però les explicacions estan fetes en termes aritmètics a diferència dels *Elements*, on estan fetes amb termes geomètrics, i a més a més, en el *Liber Abaci* es donen exemples numèrics de cadascuna d'elles[545]. Un cop classificades les binomials, Fibonacci diu de quin tipus són les seves arrels. En el cas de la primera binomial diu que la seva arrel és alguna de les sis binomials ja que si es multiplica qualsevol binomial per ella mateixa, el resultat és una primera binomial[546]. Continua explicant com són les arrels de les altres binomials i també dels apòtomes utilitzant terminologia del llibre X dels *Elements*. Més endavant explica com es fan les arrels de les línies binomials en general i posa exemples concrets per les arrels de la primera, segona i quarta binomial i els apòtomes corresponents. Diu que per trobar l'arrel d'una binomial, el que s'ha de fer és separar el terme major en dues parts tals que multiplicant l'una per l'altra s'obtingui el quadrat del terme més petit. La suma de les arrels de cadascuna d'aquestes parts serà l'arrel buscada[547]. A continuació explica com s'ha de fer per a obtenir aquestes dues parts i el procediment que descriu és equivalent a l'algorisme de la resolució de l'equació de segon grau que s'obtindria al buscar dues quantitats, la suma i el producte de les quals són conegudes, que és el procediment que hem posat de manifest com a exemple de resolució per àlgebra de l'arrel d'una binomial en el capítol dedicat a Aurel. El primer exemple que posa Fibonacci per a il·lustrar el procediment és el càlcul de l'arrel

[544] Sigler, 2002, *op. cit.* 489-490.
[545] *Ibid.* 495-496.
[546] *Ibid.* 495.
[547] *Ibid.* 518.

d'una primera binomial, el terme més gran de la qual és 23 i el més petit $\sqrt{448}$[548]. El que buscarà són, dos nombres que sumats facin 23 (terme més gran del binomi) i multiplicats facin 112 (quarta part del quadrat del terme més petit) i obté que l'arrel quadrada de $23 + \sqrt{448}$, és $4 + \sqrt{7}$.

El binomis i les seves arrels en la Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proportionalità de Luca Pacioli

La *Summa* de Pacioli està dividida en cinc parts principals. Els binomis i residus els estudia en el tercer tractat de la vuitena distinció de la primera part principal. Fa referències al llibre X de *Els Elements*, i, a diferència de Fibonacci en cita moltes proposicions concretes. Classifica els binomis com Euclides i Fibonacci. Així com en el *Liber Abaci* es diu simplement de quin tipus són les arrels de cada binomi, en la *Summa* es posen exemples numèrics. Quan Pacioli ha d'explicar, per exemple, que l'arrel del primer binomi és un altre binomi, el que fa és elevar al quadrat un binomi de cada tipus, mostrar que sempre s'obté un binomi primer i arriba a la conclusió que cada binomi és arrel d'un binomi primer[549]. Més endavant[550], explicarà també detalladament com calcular les arrels dels binomis concrets, seguint les petxades de Fibonacci.

Pel que fa a les expressions binomials, cal destacar en aquesta obra la gran quantitat d'operacions que s'hi mostren tant amb binomis com en residus, totes elles il·lustrades amb exemples.

---

[548] Fibonacci no utilitza el símbol de l'arrel (que no apareix imprès fins el segle XVI), ni cap altre símbol per indicar $\sqrt{448}$, diu simplement "l'arrel de 448"

[549] Pacioli, 1494, 121^{v}-121^{r}.

[550] Pacioli, 1494, 125r.

Els binomis a les àlgebres d'Aurel, Pérez de Moya, Roca, Núñez i Pérez de Mesa

Tant Aurel com Pérez de Moya, Roca i Pérez de Mesa, fan la classificació en sis tipus de les línies binomials.

Aurel tracta els binomis i les seves operacions en el capítol 10è del seu *Libro Primero*. Primer defineix els sis tipus de binomis[551] fent referència a la proposició 42 del llibre X de *Els Elements*[552] i després posa exemples de cadascun d'ells i explica com es sumen, resten, multipliquen i divideixen tant els binomis com els residus. El capítol 11è el dedica Aurel a les arrels quadrades dels binomis[553] i segueix força el llenguatge de *Els Elements:*

> *"La rayz quadrada del primero binomino (como lo demuestra Euclides en la 48ª del 10º; diziendo, si fuere hecha vna superficie de vna linea racional, y de vn binomino primer, el lado, que es la rayz de su quadrado sera siempre binomino) es una linea copuesta de dos lineas que solamente en potencia son racionales, como lo ensenya el mesmo Euclides en la 30ª del 10º, quando dize, si dos lineas que solo en potencia fueren racionales, y ser ajuntada la una co la otra a la larga toda aquella linea assi compuesta sera irracional, llamada binomino, de manera que simepre la √ de binomino primero sera vno de los seys binominos[554]".*

Aquí Aurel ha fet referència a la demostració geomètrica dels *Elements* per justificar que l'arrel d'un binomi primer és un binomi. Més endavant[555], dirà que per trobar l'arrel quadrada d'un binomi s'ha de dividir el terme més gran en dues parts tals que multiplicades facin la quarta part del quadrat de la menor quantitat i anirà calculant les arrels de binomis de cadascun dels sis tipus[556]. També ho fan Pérez de Moya[557], Roca[558] i Pérez de Mesa[559] ,però

---

[551] Aurel parla de "binominos".
[552] Aurel, 1552, f. 55v.
[553] En aquest cas Aurel fa referència a les proposicions 48, 49, 50, 51, 52 i 53 del desè llibre dels *Elements* (Aurel, 1552: 62r-65r). Del text d'Aurel no es pot deduir amb quina versió de *Els Elements* treballa. De tota manera, el contingut d'aquestes darreres proposicions es correspondria amb el de les proposicions 54, 55, 56, 57, 58 i 59 de la versió de M. Luisa Puertas (Euclides, 1991).
[554]Aurel, 1552, 62v.
[555] Aurel,1552, 63r.
[556]Aurel, 1552, 63v.
[557]Pérez de Moya, 1562, 530.

no ho justifiquen a diferència de Núñez qui, a més a més, posa clarament més èmfasi que els altres autors en convèncer el lector. Núñez no fa una classificació tan explícita dels binomis.

La primera vegada que Núñez parla de binomis a la seva *Àlgebra* ho fa en el capítol tercer de la segona subdivisió de la segona part principal, quan explica com s'han de multiplicar les arrels i no en dóna cap definició, en parla com si ja fossin expressions conegudes.

> *Pero para multiplicar un binomio por el su residuo, no ay necessidad de tanta obra, porque las dos multiplicaciones que se hacen en + ninguna cosa montan, porque una deshaze la otra...*[560]

No queda clar aquí si Núñez entén per binomi les expressions que Euclides, Fibonacci i Pacioli classifiquen en sis tipus, però veurem que el concepte de "binomi" de Núñez és més ampli.

Per trobar les arrels dels binomis, diu Núñez que el que més s'utilitza és la regla setena del capítol 14 de les proporcions que es basa en la proposició (II, 5) dels *Elements* d'Euclides.

> *Entre todas estas reglas es la septima de mas frequente vso, y por ella facilmente los Arithmeticso halla la raiz quadrada de qualquier binomio. Porque no es mas necessario, que partir la quantidad mayor, o nombre mayor del binomio en tales dos partes, $\overline{q}$ la vna multiplicada por la otra, haga la quarta parte del quadrado de la menor quantidad, o menor nombre del mismo binomio*[561].

I a la regla setena de les proporcions, diu l'autor:

[558]Roca, 1564, 248ʳ.
[559] Pérez de Mesa, 1598,
[560] Núñez, 1567, 50ʳ.
[561] Núñez, 1567, 112ᵛ.

...Esta regla se demostrara por la. 5. proposicion del .2. libro de Euclides[562]*...*

Aquesta proposició mostra com s'ha de dividir un segment en dues parts de manera que el seu producte sigui una quantitat donada. És la tècnica que permetrà trobar l'arrel d'un binomi.

Núñez posa l'exemple de dividir el número 10 en dues parts, entre les quals el 4 sigui la mitjana proporcional. Això, diu, no és altra cosa que partir 10 en dues parts tals que, l'una multiplicada per l'altra faci 16. La manera de procedir és la següent: es multiplica la meitat del 10 per ella mateixa, i del 25 que resulta en traurem el 16. Farem l'arrel quadrada del resultat, que dóna 3 i sumarem i restarem aquest 3 a la meitat, obtenint d'aquesta manera, les dues parts buscades.

L'autor ja sap, doncs, com s'ha de fer per dividir un nombre en dues parts el producte de les quals sigui conegut. Ho aplica al cas dels binomis i diu que per obtenir l'arrel, el que s'ha de fer és dividir el terme més gran del binomi en dues parts tals que multiplicant l'una per l'altra doni com a resultat la quarta part del quadrat del terme menor, tal com també ho fan Fibonacci i Pacioli. Segons Núñez, els aritmètics fonamenten aquesta regla en el llibre X de *Els Elements* d'Euclides però ell diu que raonarà d'una manera més fàcil que consisteix a estudiar com s'engendra el quadrat d'un binomi[563].

Il·lustrem el raonament de Núñez utilitzant notació actual. Considerem un binomi de la forma $a+\sqrt{b}$. S'ha de trobar una expressió, el quadrat de la qual sigui aquest binomi. Si es pensa en una expressió d'aquest tipus semblant a la donada, és a dir, de la forma $c+\sqrt{d}$, el seu quadrat donarà lloc a tres termes, dos dels quals (c^2 i d) no contenen arrels i la seva suma haurà de ser a. El doble producte dels altres dos ha de donar $\sqrt{b}$, és a dir, $\sqrt{4c^2d}=\sqrt{b}$. Si es

[562] Núñez, 1567, 110v.
[563] Núñez, 1567, 113v-114r.

fa, doncs, la quarta part del quadrat de $\sqrt{b}$, s'obté el producte de dues quantitats que, sumades fan a .

Donat, doncs, un binomi de la forma $a + \sqrt{b}$, per trobar-ne l'arrel n'hi haurà prou amb trobar dos nombres que sumats donin a i que multiplicats donin la quarta part de b.

El primer exemple que posa Núñez consisteix en trobar l'arrel del binomi $8 + \sqrt{60}$. Pren la quantitat més gran, 8, i diu que l'ha de dividir en dues parts de tal manera que el seu producte sigui 15, que és la quarta part del quadrat de la menor quantitat que és $\sqrt{60}$, i que una d'aquestes parts serà 5 i l'altra 3. Diu aleshores que el binomi $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, és arrel quadrada del binomi $8 + \sqrt{60}$ tal i com es pot comprovar multiplicant $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ per ell mateix. Aquí Núñez no detalla com ha obtingut el 5 i el 3 a partir del 8 i del 15 (quarta part del quadrat de $\sqrt{60}$) però ja ha ho havia deixat clar abans amb l'exemple de la divisió del número 10 en dues parts.

Calcula les arrels de dos binomis més: $6 + \sqrt{60}$ per la qual obté la suma d'arrels que actualment expressaríem: $\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} + \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$ i de $\sqrt{60} + \sqrt{40}$ obtenint l'expressió que ara escriuríem: $\sqrt{15 + \sqrt{5}} + \sqrt{15 - \sqrt{5}}$. L'expressió $\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} + \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$ no és un binomi en el sentit euclidià que utilitzaven els autors anteriors, és a dir, no és una suma de dos termes un dels quals és una arrel quadrada i l'altre, és també una arrel quadrada o un nombre racional. Núñez parla de "binomi d'arrels universals":

> *...y sera por tanto la raiz quadrada de* $6\ \tilde{p}\ R.60.$ *este binomio de raizes vniversales, el qual es* $R.V.R.15.\tilde{p}\ R.6.\tilde{p}\ R.V.R.15.\tilde{m}\ R.6.$ *cuyo valor sera tanto como* $R.V.6.\tilde{p}\ R.60.$[564]*...*

---

[564] Núñez, 1567, 113r.

Tant Fibonacci com Pacioli han estudiat quina forma tenen les arrels quadrades dels binomis i remarquen que l'únic binomi que té arrel expressable en forma de binomi en el sentit anterior, és el binomi primer. Segons la classificació en sis tipus dels binomis que utilitzen els autors anteriors, l'expressió $6+\sqrt{60}$ és un binomi cinquè i, per tant, no té arrel expressable en forma de binomi en el sentit d'Euclides.

El que pretén Núñez és expressar l'arrel d'un binomi en forma de binomi. Per tant, el fet que Núñez quedi satisfet expressant $\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}$ com l'arrel de $6+\sqrt{60}$, vol dir que el que ell anomena binomi no és el mateix que el que entenen per binomi els altres autors. Sembla, doncs, que per Núñez, un binomi és una suma de dos termes, almenys un dels quals conté alguna arrel[565].

En tots els exemples que posa d'arrels de binomis diu Núñez que es poden comprovar multiplicant els resultats per ells mateixos i ho explicita en el cas de l'arrel de $6+\sqrt{60}$:

> *Y que el dicho binomio de raizes vniversales, sea raiz quadrada del dicho binomio* 6 p R. 60. *se ve multiplicando en si mismo, porque la primera raiz vniuersal multiplicada en si, hace* R. 15. p R. 6 *, y la segunda multiplicada en si, haze* R. 15. m R. 6 *, que valen tanto como dos raizes de 15, las quales juntas son la R. 60. Multiplicando despues* R. V. R. 15. p R. 6 *, por* R. V. R. 15. m R. 6 *, haremos raiz vniversal de* 15 m 6. *la qual raiz vniuersal es 3 y porque esta* multiplicaciõ *se ha de hazer dos vezes, valdran luego entrambas 6, y toda la multiplicacion junta valdra* 6 p R. 60 *.*[566]

[565] Podríem dir que les línies binomials, tal com les entenen Euclides, Fibonacci i Pacioli, són la suma o diferència d'un nombre racional i una arrel o bé de dues arrels. Tenint en compte la classificació de les línies binomials a la qual faig referència en aquesta nota, només la que s'anomena primera binomial (formada per un terme racional i un d'irracional de manera que el racional és més gran i tal que la proporció entre el quadrat del terme racional i la diferència entre els quadrats dels dos termes es pot expressar com la proporció entre dos nombres quadrats) té arrel expressable en forma de binomi. En canvi, per Núñez, el binomis serien sumes de dos termes que no es poden efectuar i en les quals, al menys un dels dos termes conté alguna arrel.

[566] Núñez, 1567, 113r.

Núñez conclou que tots els binomis tenen arrel perquè sempre es pot partir el terme més gran en dos termes tals que l'un multiplicat per l'altre faci la quarta part del quadrat del més petit. Justifica que es pugui treure la quarta part del quadrat del terme més petit del quadrat de la meitat del terme més gran amb un raonament retòric[567] que traduirem al llenguatge actual de la forma:

$$a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 > \frac{b^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} > 0$$ [568]

A part d'aquesta justificació, més endavant diu que està garantit que es pugui efectuar la resta per la proposició (II, 9) dels *Elements*[569].

Exemples de cada tipus de binomis al manuscrit de Pérez de Mesa

Pérez de Mesa tracta els irracionals en el capítol 17è del seu manuscrit, just abans de tractat les equacions, tal com hem comentat que fan la majoria d'autors d'aquesta època. Vegem els exemples de cada tipus que posa i el criteri per aquesta classificació per a cadascun d'ells.

$3+\sqrt{5}$ és l'exemple que posa Pérez de Mesa pel primer binomi. Aquí la part racional és més gran que la irracional i el quadrat 9 del terme més gran, és a la diferència dels quadrats, 4, com un quadrat és a un quadrat. Un exemple del primer residu serà $3-\sqrt{5}$.

---

567 "Y la razo desto es, que la mitad de la quantidad mayor siendo en si multiplicada, haze un quadrado mayor q la quarta parte del quadrado de la menor, por quanto esa quarta parte del quadrado de la menor, es el quadrado de la mitad desa misma quantidad menor o nombre menor, y poderse ha por tato sacar la quarta parte del quadrado de la menor del quadrado de la mitad de la quantidad mayor o nombre mayor del binomio, y podremos seguir en la dicha particion la dicha septima Regla" (Núñez, 1567,113v).

568 S'ha de tenir en compte que "a" i "b" són enters positius.

569 Núñez, 1567, 114r.

Els casos que corresponen al segon binomi tenen la part irracional més gran que la racional i el quadrat del terme més gran és a la diferència dels quadrats com un quadrat és a un quadrat. Com a exemples del segon binomi i del segon residu posa $\sqrt{12}+3$ i $\sqrt{12}-3$.

Corresponen al tercer binomi els casos en els que els dos termes són irracionals i que es verifica que la relació entre quadrat del terme més gran i la diferència entre els quadrats dels termes és com la raó entre dos quadrats. Els exemples que posa pel binomi i el residu són: $\sqrt{8}+\sqrt{6}$ i $\sqrt{8}-\sqrt{6}$.

El quart binomi correspon al cas en què la part racional és més gran que la irracional però la relació entre el quadrat del terme més gran i la diferència dels quadrats no es pot escriure com el quocient entre dos quadrats perfectes. Posa com a exemple de quart binomi el $5+\sqrt{20}$ i de quarts residu, $5-\sqrt{20}$.

En el cinquè cas la part irracional és més gran que la racional i la raó entre el quadrat de la part més gran i la diferència dels quadrats no es pot escriure com la raó entre dos quadrats perfectes. Aquí els exemples que posa pel binomi i pel residu són: $\sqrt{14}+3$ i $\sqrt{14}-3$.

Finalment els casos corresponents al sisè binomi i al sisè residu, tenen els dos termes irracionals i el quadrat del terme més gran no és a la diferència entre els quadrats dels termes com un quadrat és a un quadrat. Els exemples pel binomi i el residu són: $\sqrt{10}+\sqrt{7}$ i $\sqrt{10}-\sqrt{7}$.

Quan estudiàvem alguns aspectes de les obres europees que podien haver estat fonts de les publicades a la Península Ibèrica, vam anotar els exemples que pels tipus de binomis posaven algun autors, per si podien ser un element que ens ajudés a determinar influències. La taula següent mostra els exemples posats per Fibonacci, Ghaligai, Rudolff, Feliciano, Scheubel, Aurel, Pérez de Moya, Roca, Núñez, Bombelli i Pérez de Mesa per il·lustrar cada tipus de binomi. Es pot veure, per exemple, com Pérez de Moya posa els mateixos exemples que Fibonacci pels binomis primer, segon, cinquè i sisè i que Roca posa també els mateixos exemples que Fibonacci per a tots els tipus de binomis llevat del 3r en el que posa els mateix exemple que Pérez de Moya.

AUTOR	1r binomi	2n binomi	3r binomi	4rt binomi	5è binomi	6è binomi
Fibonacci (1202)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{112}+\sqrt{84}$	$4+\sqrt{10}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Ghaligai (1521)	$7+\sqrt{48}$	$\sqrt{288}+16$	$\sqrt{112}+\sqrt{84}$	$16+\sqrt{128}$	$\sqrt{128}+4$	$\sqrt{128}+\sqrt{48}$
Rudolff (1525)	$27+\sqrt{200}$	Rudolff no dedica un capítol tan extens als binomis com els altres autors però sí que hi dedica també el darrer capítol abans de les equacions. Hi ha més exemples de binomis a part del que hem posat, però l'autor no té tanta cura com els altres autors referenciats, en especificar-ne el tipus.				
Feliciano (1536)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{112}+\sqrt{84}$	$4+\sqrt{10}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Scheubel (1551)	$6+\sqrt{20}$	$\sqrt{18}+4$	$\sqrt{24}+\sqrt{18}$	$6+\sqrt{24}$	$\sqrt{18}+3$	$\sqrt{24}+\sqrt{12}$
Aurel (1552)	$27+\sqrt{200}$	$\sqrt{180}+10$	$\sqrt{96}+\sqrt{72}$	$100+\sqrt{4000}$	$\sqrt{864}+24$	$\sqrt{864}+\sqrt{288}$
Pérez de Moya (1562)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$	$5+\sqrt{12}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Roca (1564)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$	$4+\sqrt{10}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Núñez (1567)	$8+\sqrt{60}$	Núñez no fa una classificació dels binomis com la dels altres autors.				
Bombelli (1572)	$3+\sqrt{5}$	$\sqrt{525}+21$	$\sqrt{500}+\sqrt{375}$	$5+\sqrt{8}$	$\sqrt{17}+2$	$\sqrt{10}+\sqrt{7}$
Pérea de Mesa (1598)	$3+\sqrt{5}$	$\sqrt{12}+3$	$\sqrt{8}+\sqrt{6}$	$5+\sqrt{20}$	$\sqrt{14}+3$	$\sqrt{10}+\sqrt{7}$