2.2.12 - REQUISITOS DE LOS DIFERENTES ENTORNOS

2.2.12.1 - Orden de la entrada de datos. Interrelación entre entornos

El modelo matemático que hemos venido definiendo tiene una serie de características que se deben conocer para evitar errores a la hora de definir los diferentes entornos.

En general todos los contornos que vamos definiendo, tienen en cuenta los anteriores y no pueden modificar las alturas ya asignadas sin dificultad (esa dificultad está prevista a propósito) ya que cualquier error supondría destrozar lo realizado con anterioridad sin poder recuperarlo viéndonos obligados a comenzar de nuevo.

Eso ha hecho que la elección del orden en que vamos a introducir los datos sea muy importante, así como los puntos que debemos elegir para obtener el resultado apetecido.

Cuando generamos una cúspide mediante sus puntos principales, la zona de influencia de esa cúspide queda totalmente asignada en cuanto a alturas si esta zona no formaba parte de otra asignada con anterioridad por lo que no será posible sin un mayor esfuerzo modificar esa zona para que se desasignen algunos puntos que por error estaban fuera de lo que debiera haber sido la zona de influencia.

Un ejemplo claro está en la realización de un cráter encima de una montaña (tipo volcán). La forma lógica de proceder es introducir en primer lugar el valle o cráter (según forma) que constituye la parte central, con lo que esta zona queda asignada para posteriormente definir la cúspide como cúspide normal y utilizando los mismos puntos ladera (si se cree conveniente) que se habían utilizado antes para el cráter, con lo que quedarán asignados todos los puntos que no lo hubieran sido antes por no pertenecer a dicho cráter.

En el caso de tratarse de dos cúspides, una muy cerca de la otra, y cuyas laderas se interfieren, introducirlas una a una sin más sería un error (a no ser que se tomara como frontera de las montañas los puntos de intersección), ya que la primera cúspide que introdujésemos quedaría bien definida en su totalidad, mientras que la segunda tendría una discontinuidad en los puntos que pertenecieran a ambas cúspides, cosa que en general no es lo que se pretende, aunque pueda haber algún caso en que realmente sea ese efecto el que interese.

Estos casos no se pueden generalizar, porque en algunas ocasiones nos interesará que prevalezca la altura superior de las que corresponden al mismo punto en varios entornos (como sucede en el segundo caso, y en otras nos interesará lo contrario (como en el primer caso del cráter).

2.2.12.2 - Rectificación de puntos de una zona

Puesto que podemos equivocarnos, y debe haber una opción para rectificar en caso que queramos que un entorno prevalezca en su intersección con otro, debemos poder obligar a que se cumpla este requisito.

También debemos poder hacer que prevalezca la zona más alta de las que interfieren (cosa que sucede en el segundo caso de las cúspides). La solución sería coger la mayor de las alturas calculadas por pertenecer a ambas cúspides.

De igual modo debemos poder hacer que sea al revés, es decir, que sea la de menor altura la que predomine.

Esto se efectúa en el modelo TOPOGRÁFICO merced a una variable llamada IW. Esta variable tendrá normalmente valor 0, y para que pueda realizarse una de estas opciones debemos darle valor distinto de cero.

Cuando se haya realizado la operación en cuestión, la variable debe volver a su estado habitual de valor 0.

Cuando IW = 1 solamente queda asignada la nueva altura en caso de ser superior a la altura asignada con anterioridad.

Cuando IW = 2 solamente queda asignada la nueva altura en caso de ser inferior a la altura asignada con anterioridad.

Cuando IW = 3 se asigna la altura nueva a pesar de estar ya asignada mediante otro sistema (esta opción posibilita rectificar cualquier zona).

Las instrucciones del programa TOPOGRÁFICO que realizan estas opciones son las que van desde el nº de líneas 1751 a 1759.

Conviene pues hacer una reflexión a la hora de entrar los puntos para que la asignación sea lo más rápida posible. El primer paso sería elegir el orden en que vamos a introducir los puntos de los diferentes entornos.

Una vez elegidos y su orden de introducción, tendríamos que entrar los puntos de la forma que se especifica en cada uno de ellos, para que el sistema pueda asimilarlos y procesarlos como corresponde a cada caso.

En las cúspides, valles, mesetas o cráteres aislados, la entrada de los puntos situados alrededor del principal debe hacerse siguiendo el sentido antihorario y a partir de la horizontal que parte desde dicho punto hacia la derecha.

En la entrada de estos puntos se ha pensado que sería suficiente para la gran mayoría de los casos el contar con 9 puntos de cada clase, pero si fueran necesarios más de 9, también sería posible introducirlos fuera de programa, y si esto se diera con frecuencia, bastaría una pequeña modificación cambiando las instrucciones GET por instrucciones INPUT con la única repercusión de tener que pulsar cada vez la tecla retorno de carro tal como se hace en la entrada de coordenadas, y dando a las variables la dimensión adecuada.

2.2.12.3 - Coordenadas reales y coordenadas del modelo

Merece la pena también mencionar lo que habría que hacer para adaptar unas coordenadas reales a las que utilizamos aquí para que el sistema pueda recibirlas y tratarlas dentro de su ámbito de aplicación.

Supongamos que el terreno que tenemos que introducir tiene coordenadas horizontales en el sentido de las X que van desde 1747 hasta 2521 (franja vertical) acotada para estos valores. Como nosotros obligamos a que las coordenadas X estén comprendidas entre 10 y 200, debemos hacer que el valor 1747 corresponda a 10 y 2521 a 200.

Veamos el proceso para hacer el cambio de coordenadas X:

Nº de intervalos en nuestra malla   200 - 10 = 190
Valor de un intervalo en el terreno real I=(2521-1747)/190
La transformación de coordenadas de un valor cualquiera X, sería:XN=10+(X-1747)/I

Para la coordenada Y deberíamos seguir un proceso similar, pero considerando las coordenadas máxima y mínima reales en el sentido del eje Y. Naturalmente si el terreno es rectangular lo habremos transformado en cuadrado deformando entonces la visión de conjunto, por lo que en determinadas aplicaciones deberemos exigir al terreno que sea cuadrado o bien que las distancias reales de referencia sean iguales. En este segundo caso puede definirse un entorno rectangular plano que complete la diferencia de distancias en las dos direcciones principales y asignarles altura cero.

Para el eje vertical, las posibilidades también son muchas, ya que puede hacer el cambio de coordenadas de manera que las alturas queden proporcionales al terreno en sus otras dos proyecciones o bien exagerar o disminuir las alturas con relación a éstas, cosa que es frecuente en determinadas aplicaciones.

Proceso a seguir con las alturas reales:

Cota real mínimaZI
Cota real máximaZM
Altura máxima en el modelo200
Altura mínima en el modelo0
Máxima exageración en alturas: ZI = 0ZM = 200

Con lo que una altura cualquiera sería:

$$ZN = (Z - ZI) / \left[(ZM - ZI) / 200 \right]$$

Ajustando la cota máxima del modelo a valores más pequeños, se podrían obtener valores menos resaltados dentro siempre de los límites que nos hemos planteado.

Este cambio de coordenadas propuesto puede aplicarse antes de entrar en el modelo (versión 1 del programa TOPOGRÁFICO) o bien en cada entrada de puntos mediante una subrutina que efectúe las operaciones que hemos indicado (versión 2 del programa TOPOGRÁFICO).

De todos los entendidos es conocido que las coordenadas cartesianas no son las habituales en los planos topográficos. El sistema de entrada que se ha concebido al establecer este modelo está íntegramente basado en la utilización de coordenadas cartesianas, por lo que las coordenadas horizontales difieren de las normales en topografía, sin embargo esto está justificado por la utilización mucho más frecuente de coordenadas cartesianas en casi todos los periféricos gráficos, tanto plotters como pantallas gráficas.

Podría variarse la forma de concretar las coordenadas horizontales para que fuesen directamente aplicables las que provienen de hojas de campo topográficas, sin embargo no se ha creído conveniente debido sobre todo a la variedad de aplicaciones.

También sucede otro tanto a la hora de hacer particiones radiales de los diferentes entornos. Podíamos haber utilizado grados centesimales en lugar de sexagesimales, ya que los más utilizados en topografía son los primeros. No se ha hecho así debido a que los sistemas informáticos utilizan radianes para el cálculo de senos, cosenos, tangentes y arcos tangentes en lugar de grados, y, de todas formas, tendríamos que hacer la conversión tanto si utilizásemos grados centesimales como sexagesimales.

2.2.12.4 - Multiplicidad de formas de entrada

En algunas formas de superficies, el entorno que puede definirlas es múltiple, pudiendo elegir entre varios de ellos para conseguir una determinación de puntos semejante. Es el caso de los precipicios únicos para la malla, de los planos horizontales, de las cordilleras, cauces de ríos, etc., como veremos seguidamente.

En el caso de un precipicio único en la malla y que va de lado a lado atravesándola, puede definirse a través del entorno llamado "PRECIPICIO" (figura 2-2-12-1) dando los puntos de la poligonal donde se produce la discontinuidad, un punto de la zona alta y uno de la zona baja.

No obstante, también puede definirse como una meseta en la que una parte de la misma se sale fuera (figura 2-2-12-2).

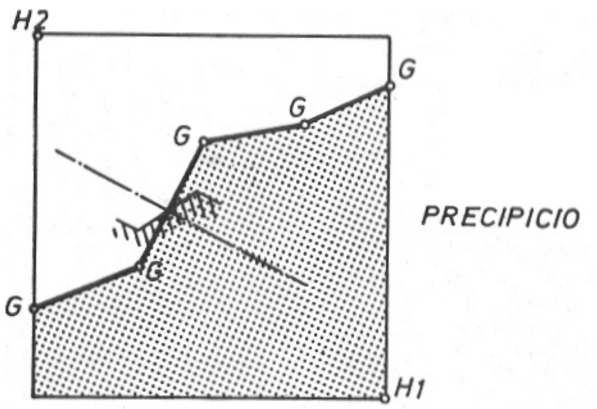


FIGURA 2-2-12-1

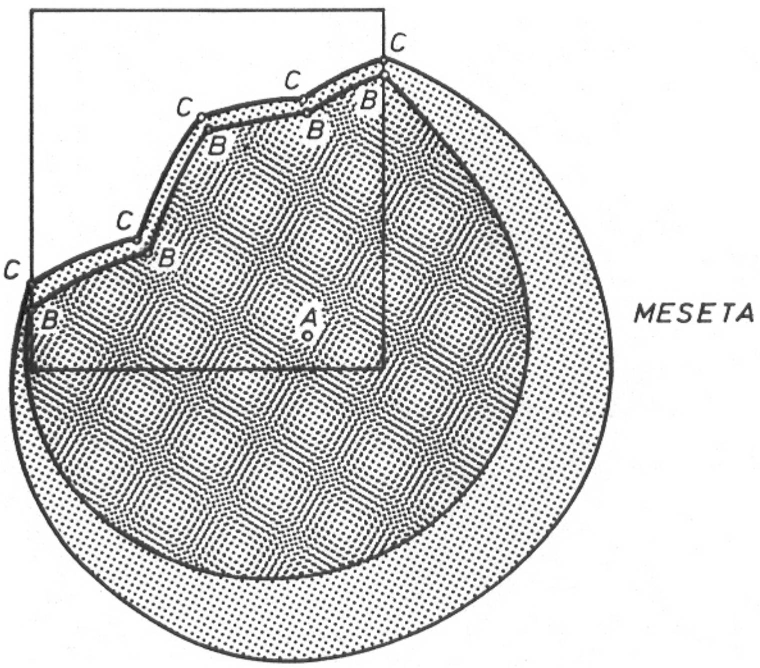


FIGURA 2-2-12-2

Asimismo puede definirse mediante un perfil deslizante en el que incluso los puntos de la poligonal itinerario serían los mismos que se utilizarían en caso de elegir el primer sistema de entrada (figura 2-2-12-3).

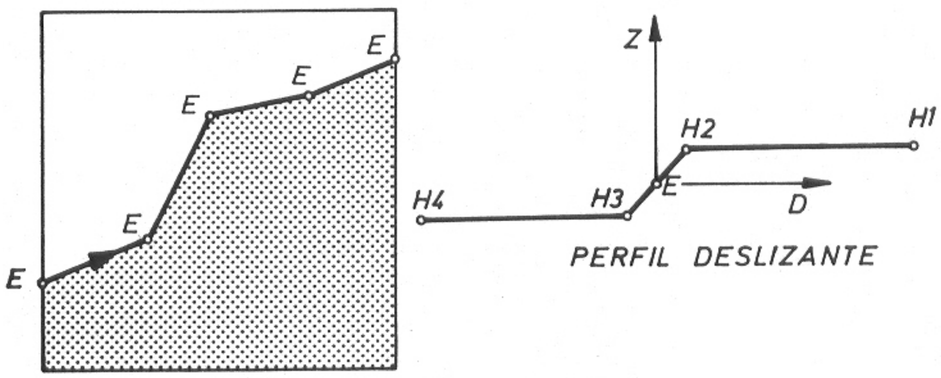


FIGURA 2-2-12-3

El cauce de un río podría definirse con el entorno denominado "cauce", sin embargo el perfil deslizante es más apropiado tanto si su sección es uniforme como si aumenta progresivamente.

En lugar de una "cordillera" normal, se podrían entrar independientemente las cúspides aisladas que la integran haciendo que los puntos con dos alturas asignadas adoptaran la más alta de ellas.

En definitiva y como veremos en la SÍNTESIS, los resultados serían análogos mientras que algunas de estas formas de entrada son más cómodas que otras.

Otras veces, sin embargo, sólo existe para estos tipos de entorno una forma de entrada óptima, mientras que las otras no son posibles o son de mucha dificultad. Esto es típico de las cordilleras cuyas cúspides no están situadas siguiendo una poligonal sino que su posición está desordenada (también con las hendiduras tipo inverso de cordillera) siendo difícil o imposible establecer un ordenamiento adecuado para utilizar el entorno "cordillera", mientras que mediante la entrada de cúspides aisladas no habría problema (figura 2-2-12-4) utilizando la mencionada opción de altura superior preferente ya vista. En la SÍNTESIS también se detalla un ejemplo claro para ilustrar esta parte.

2.2.12.5 - Visualización de la matriz de resultados analíticos

Opcionalmente puede obtenerse sobre el monitor una representación numérica de los cuatrocientos puntos que integran la malla. Esta visualización permite tener una referencia sobre el mismo programa TOPOGRÁFICO sin acudir a representación gráfica, cosa que se efectúa debido a la capacidad limitada de este equipo, por medio de otros programas que utilizan dichos puntos una vez grabados en un archivo. La matriz de resultados analíticos tiene varias características que conviene conocer:

- Los resultados numéricos que aparecen en pantalla son únicamente la altura de los puntos.

- Esos resultados no son exactos, sino que corresponden a la parte entera de dichos resultados. De esta forma se obtiene un alineamiento por filas y columnas que a su vez nos ofrecen la sensación de estar contemplando la propia malla.

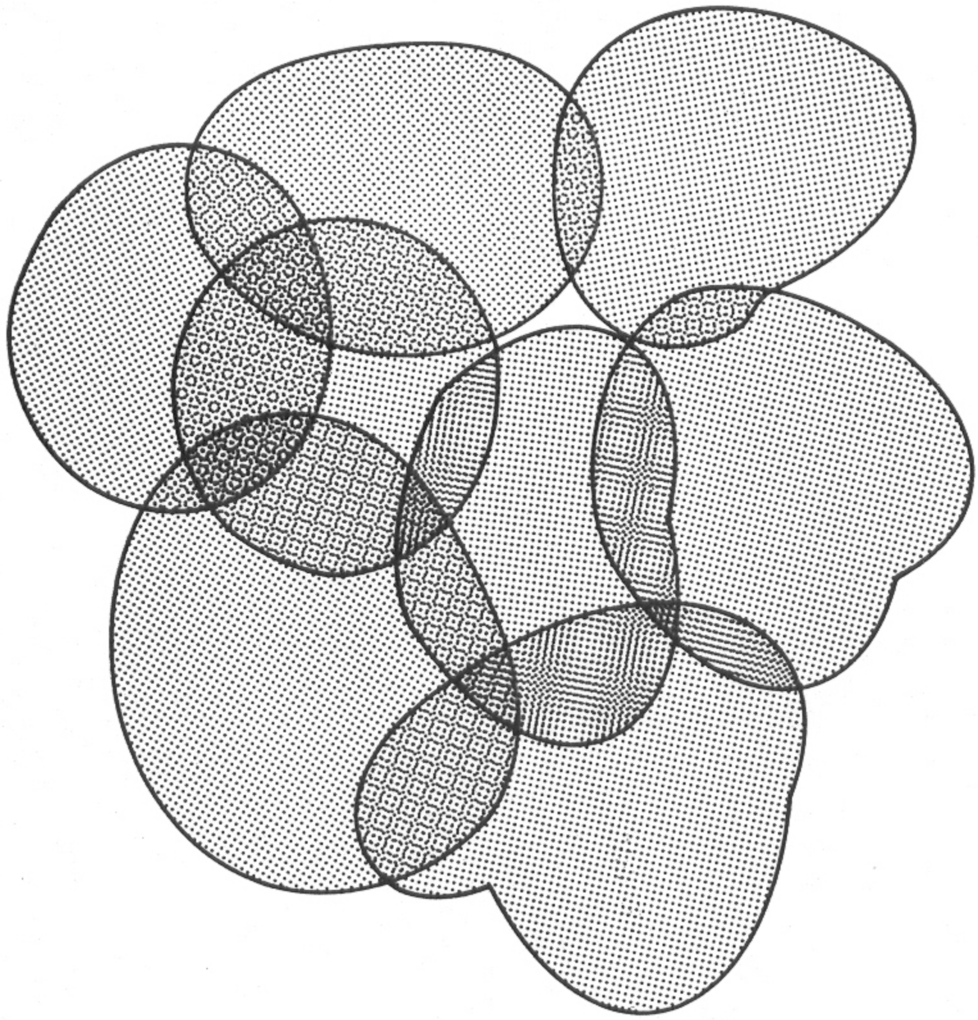


FIGURA 2-2-12-4

Para posibilitar la aparición de la malla completa por pantalla, los números se han reducido de tamaño (representación de 80 caracteres por línea).

La subrutina que efectúa esta visualización en el programa topográfico se encuentra en la línea 7100. Junto a los resultados gráficos que podemos ver en la SÍNTESIS, se encuentran también las alturas obtenidas mediante el programa TOPOGRÁFICO.

A modo de ejemplo veamos en la hoja siguiente la matriz de resultados analíticos obtenidos tras definir la superficie.

EJEMPLO DE MATRIZ DE RESULTADOS

03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	12	12	12	03	03	03	03	03	03	03	12	12	12	03	03	03
03	03	03	03	11	11	11	03	03	03	03	03	03	03	11	11	11	03	03	03
03	03	03	03	11	11	11	11	03	03	03	03	03	11	11	11	11	03	03	03
03	03	03	03	10	10	10	10	10	03	03	03	10	10	10	10	10	03	03	03
03	03	03	03	30	10	10	10	10	03	03	10	10	10	10	10	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	09	09	09	09	09	09	09	09	09	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	09	09	09	09	09	09	09	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	03	03	08	08	08	03	03	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	03	03	08	08	08	03	03	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	07	07	07	07	07	07	07	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	07	07	07	07	07	07	07	07	07	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	06	06	06	06	06	03	06	06	06	06	06	03	03	03	03
03	03	03	03	06	06	06	06	06	03	03	03	06	06	06	06	06	03	03	03
03	03	03	03	05	05	05	05	03	03	03	03	03	05	05	05	05	03	03	03
03	03	03	03	05	05	05	03	03	03	03	03	03	03	05	05	05	03	03	03
03	03	03	03	04	04	04	03	03	03	03	03	03	04	04	04	04	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03	03

2.3 - MÉTODOS MATEMÁTICOS A UTILIZAR EN LA CONFECCIÓN DE CURVAS

2.3.1 - POLIGONAL SIMPLE

Los procedimientos para efectuar el trazado de líneas en los sistemas gráficos por computadora, pasan siempre por el camino más simple: la línea recta entre dos puntos. Las curvas, ya sean arcos de circunferencia o líneas de curvatura más complicada, se obtienen a base de aproximar suficientemente los puntos para dar la sensación de que no se trata de segmentos rectilíneos.

En los gráficos que vamos a obtener, utilizaremos varios métodos para aproximarnos a las curvas teóricas.

Como el modelo que hemos creado para representar las superficies es un modelo de alambre (no hay información fuera de las líneas de la malla), sólo dispondremos de puntos situados sobre dicho alambre, es decir, sobre las líneas que van ordenadamente de uno a otro vértice de la malla.

El método en el que la unión ordenada de los puntos se efectúa a través de líneas rectas sin ningún otro requisito se denomina poligonal simple.

Cuando el sistema físico dispone de la función "desplazarse del punto de coordenadas (A,B) hasta el punto de coordenadas (C,D) pintando", esta función no tiene que realizarse mediante programación. Si no es así, habría que ir obteniendo puntos del segmento:
Vector director de la recta$(V1,V2) = \left[(C-A),(D-B)\right]$
Ecuación$(X-A)/V1 = (Y-B)/V2\, Y = (V2/V1)*(X-A)+B$

Los valores de X comprendidos entre A y C nos darían valores de Y correspondientes al segmento.

Esto es particularmente útil en la posterior eliminación de líneas ocultas al dibujar sobre la misma pantalla del monitor mediante la función SET, en ese caso los valores de X se van incrementando de unidad en unidad (puntos de pantalla) y para segmentos muy verticales variaríamos Y de unidad en unidad obteniendo valores de X:

$$X = (V1/V2)*(Y-B)+A$$

2.3.2 - MÉTODO DE SPLINE. GENERALIDADES

En el trazado de curvas que se adapten a puntos, existen varios métodos, y entre ellos el denominado método Spline. La base de este método consiste en la utilización en el plano de curvas correspondientes a funciones de X con grado tres, es decir, ecuaciones de la forma $AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$.

Las curvas se van empalmando unas con otras de manera que globalmente se puede considerar una sola, pues no se producen discontinuidades. Para evitar la falta de continuidad en los empalmes de las curvas, se las obliga a tener en sus extremos tangente común, o sea, el principio de una debe ser continuación del final de la anterior.

Hay tres variantes con sus respectivas características que merece la pena considerar y que van a ser objeto de reflexión por nuestra parte; son los denominados **Splines locales, Splines Cardinales y B-Splines**.

Vamos a desarrollar los tres casos de una forma muy simplificada. Para mayor información al respecto, consultar "Mathematical Elements for Computer Graphics" y "A practical Guide to Splines".

Veamos cual es la base de estos sistemas para poder aplicar a los puntos que vayamos obteniendo.

- En todos los casos partiremos del conjunto de puntos ordenados y cuyas coordenadas serán (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ... , (X_i,Y_i), ... , (X_n,Y_n).

En algunos casos buscaremos una curva que se adapte a dichos puntos pasando por ellos, y en otros, simplemente nos acercaremos sin que necesariamente la curva tenga que pasar por los puntos en cuestión.

- Se calcula el espacio recorrido para cada punto a lo largo de la poligonal (esto se denomina parametrización del recorrido).

Para el punto 1 el parámetro será t_1, para el punto 2 será t_2 y así sucesivamente hasta t_n.

Para el punto genérico i el valor de t_i será:

$$t_i = t_{i-1} + \sqrt{\left[(X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2\right]}$$

- Ya que el valor de la raíz cuadrada es la distancia entre el punto i y su inmediato anterior (i-1).

- Se calculan en función del parámetro t los valores de las curvas X(t), Y(t) obteniendo las gráficas correspondientes (ver ejemplo en figuras 2-3-2-1 y 2-3-2-2).

El procedimiento es similar al que utilizamos nosotros para obtener la altura de los puntos según el perfil deslizante.

Una vez confeccionada la ecuación matemática de la curva, podemos obtener los valores de X e Y para cualquier posición de la curva sin más que conocer su distancia al punto inicial a través de la poligonal.

Cuando la ecuación de la curva se hace por tramos entre cada dos puntos, y se ajusta a un polinomio de tercer grado tenemos:

$$X = A1 + A2u + A3u^2 + A4u^3$$
$$Y = B1 + B2u + B3u^2 + B4u^3$$

Donde $u = t - t_i$ para el intervalo que va desde t_i hasta t_{i+1}.

Para poder empalmar las curvas deben calcularse las pendientes en los puntos 1, 2, 3, ... , i, ..., n. Sean éstas (X'1, X'2, ..., X'n / Y'1, Y'2, ..., Y'n).

La curva en un intervalo cualquiera (entre t_1 y t_{i+1}) será la que cumpla:

1: Pasará por el punto i
2: Pasará por el punto i+1
3: En el punto i tendrá pendiente S'i, Y'i
4: En el punto i+1 tendrá pendiente X'i+1, Y'i+1

Una vez tenemos la ecuación de la curva, únicamente hay que determinar unos cuantos puntos en cada tramo (lo cual supone que el número de puntos entre cada dos de los entrados sea constante).

La parametrización es igual en todos los casos, por lo que podemos generalizarla para todos ellos. Para hacerlo así necesitamos definir una variable indexada para contener las distancias correspondientes a cada punto.

Para poder relacionar las coordenadas X, Y con el parámetro correspondiente, vamos a utilizar la variable P(I,J) donde I será el orden del punto y J el elemento que pretendemos definir. Por ejemplo:

P(I,1) Coordenada X del punto I
P(I,2) Coordenada Y del punto I
P(I,3) Parámetro correspondiente al punto I (antes llamado t_i).

Si consideramos que el parámetro en el primer punto es cero, el resto podría obtenerse a través del algoritmo siguiente:

Sea N el nº total de los puntos de la curva.

FOR I= 1 TO N
$P(I,3) = P(I-1,3) + \sqrt{\left[\ (P(I-1,1) - P(I,1)^2 + (P(I-1,2) - P(I,2))^2\ \right]}$
NEXT I

El valor de los coeficientes de las dos ecuaciones de tercer grado que planteamos con anterioridad puede deducirse aplicando las condiciones de contorno en cada tramo.

Ecuaciones:

$X = A1 + A2 * u + A3 * u^2 + A4 * u^3$
$Y = B1 + B2 * u + B3 * u^2 + B4 * u^3\ u = t - t_i$

En el punto i deben cumplirse las ecuaciones.

Como $u = t - t_1$ y $t = t_1 \rightarrow u = 0$ con lo que:

X = A1A1 = P(I,1)
Y = B1B1 = P(I,2)

En el punto i+1 resulta que u es igual a la distancia entre el punto i y el punto i+1 por lo que su valor en función de las variables ya definidas será:

$D = P(I+1,3) - P(I,3)$
$P(I+1,1) = P(I,1) + A2 * D + A3 * D^2 + A4 * D^3$(1)
$P(I+1,2) = P(I,2) + B2 * D + B3 * D^2 + B4 * D^3$(2)

En el punto I la tangente es conocida (posteriormente hablaremos de los valores que puede adoptar).

El valor de la derivada será puesto que u = 0 en ese punto:
$X'_X = A2$
$Y'_X = B2$

En el punto I+1 tendremos: $X'_{X+1} = A2 + 2 * A3 * u + 3 * A4 * u^2$

Como A2 es conocido queda:
$X'_{X+1} = X'_X + 2 * A3 * u + 3 * A4 * u^2$(3)

Para la otra función tendríamos:
$Y'_{X+1} = Y'_1 + 2 * B3 * u + 3 * A4 * u^2$(4)

Como en ese punto u=D tendremos ecuaciones (1), (2), (3) y (4).

$$A3*(D^2)+A4*(D^3)=\left[P(I+1,1)-P(I,1)-X'_X*D\right]$$
$$A3*(2*D)+A4*(3*D^2)=\left[X'_{X+1}-X'_X\right]$$

De donde podemos deducir A3 y A4.

Por otra parte:

$$B3*(D^2)+B4*(D^3)=\left[P(I+1,2)-P(I,2)-Y'_X*D\right]$$
$$B3*(2*D)+B4*(3*D^2)=\left[Y'_{X+1}-Y'_X\right]$$

De donde podemos deducir B3 y B4.

$$A3=\left[\left[P(I+1,1)-P(I,1)-X'_X*D\right]-\left[A4*(D^3\right]\right]/D^2$$
$$A3=\left[\left[X'_{X-1}-X'_X\right]-\left[A4*(3*D^{2)}\right]\right]/2*D$$

Igualando ambas tendremos:

$$2*\left[\left[P(I+1,1)-P(I,1)-X'_X*D\right]-\left[A4*(D^3)\right]\right]=D*\left[\left[X'_{X+1}-X'_X\right]-\left[A4*(3*D^{2)}\right]\right]$$
$$A4\left[3*D^3-2*D^3\right]=D*\left[X'_{X+1}+X'_X\right]+2*\left[-P(I+1,1)+P(I,1)+X'_X*D\right]$$
$$A4=\left[D*\left[X'_{x+1}+X'_x\right]+2*\left[P(I,1)-P(I+1,1\right]\right]/D^3$$
$$A3=\left[(X'_{X+1}+X'_X)-(A4*3*D^2)\right]/(2*D)$$

Por analogía:

$$B4=\left[D\left[Y'_{X+1}+Y'_X\right]+2*\left[P(I,2)-P(I+1,2)\right]\right]/D^3$$
$$B3=\left[(Y'_{X+1}-Y'_X)-(B4*3*D^2)\right]/(2*D)$$

Con lo cual tenemos todos los coeficientes determinados y por consiguiente las ecuaciones de las curvas en cada tramo.

Únicamente nos queda concretar cuántos puntos vamos a determinar en cada tramo para de esa forma tener mayor o menor continuidad (recordemos que los trazadores gráficos van de un punto a otro en línea recta).

2.3.2.1 - Splines Locales

Las pendientes de las curvas que hemos definido anteriormente no estaban determinadas, sino que las habíamos considerado prefijadas. Para concretar estas pendientes hay muchas posibilidades. Cuando la dependencia de dicha pendiente es sólo con respecto a los puntos de alrededor, estamos ante lo que se denomina trazado de curvas por Splines locales. Es muy frecuente que la relación con los puntos de alrededor sea la que sigue:

La pendiente en un punto I sea igual a la pendiente del segmento que une el punto I-1 con el punto I+1, es decir, la pendiente que va desde el punto anterior al posterior. Analíticamente se expresaría de la forma:

$$X'_x = \left[P(I+1,1) - P(I-1,1) \right] / \left[P(I+1,3) - P(I-1),3) \right]$$

Recordemos que el dividendo sería la suma de las distancias entre el punto (I-1) y el punto I más la que hay entre el punto I y el punto (I+1). Ver figura 2-3-2-1-1.

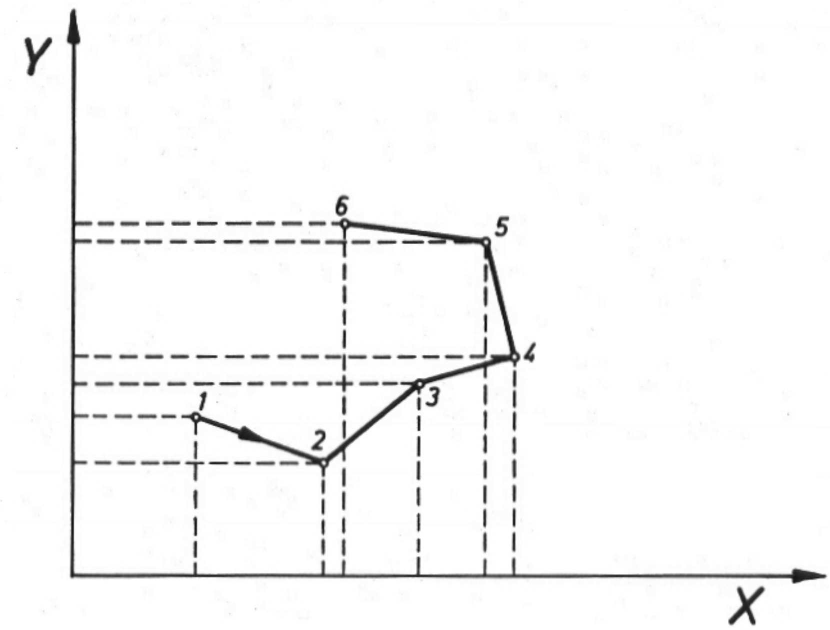


FIGURA 2-3-2-1-1

Y, analógicamente, tendríamos (figura 2-3-2-1-2):

$$Y'_X = \left[P(I+1,2) - P(I-1,2) \right] / \left[P(I+1,3) - P(I-1,3) \right]$$

Dado que el primer punto no tiene anterior, la pendiente en ese punto debe ser definida previamente. Lo mismo sucede con el último punto. Esto es normalmente una ventaja, ya que nos puede servir para empalmar la curva con algo que ya está determinado.

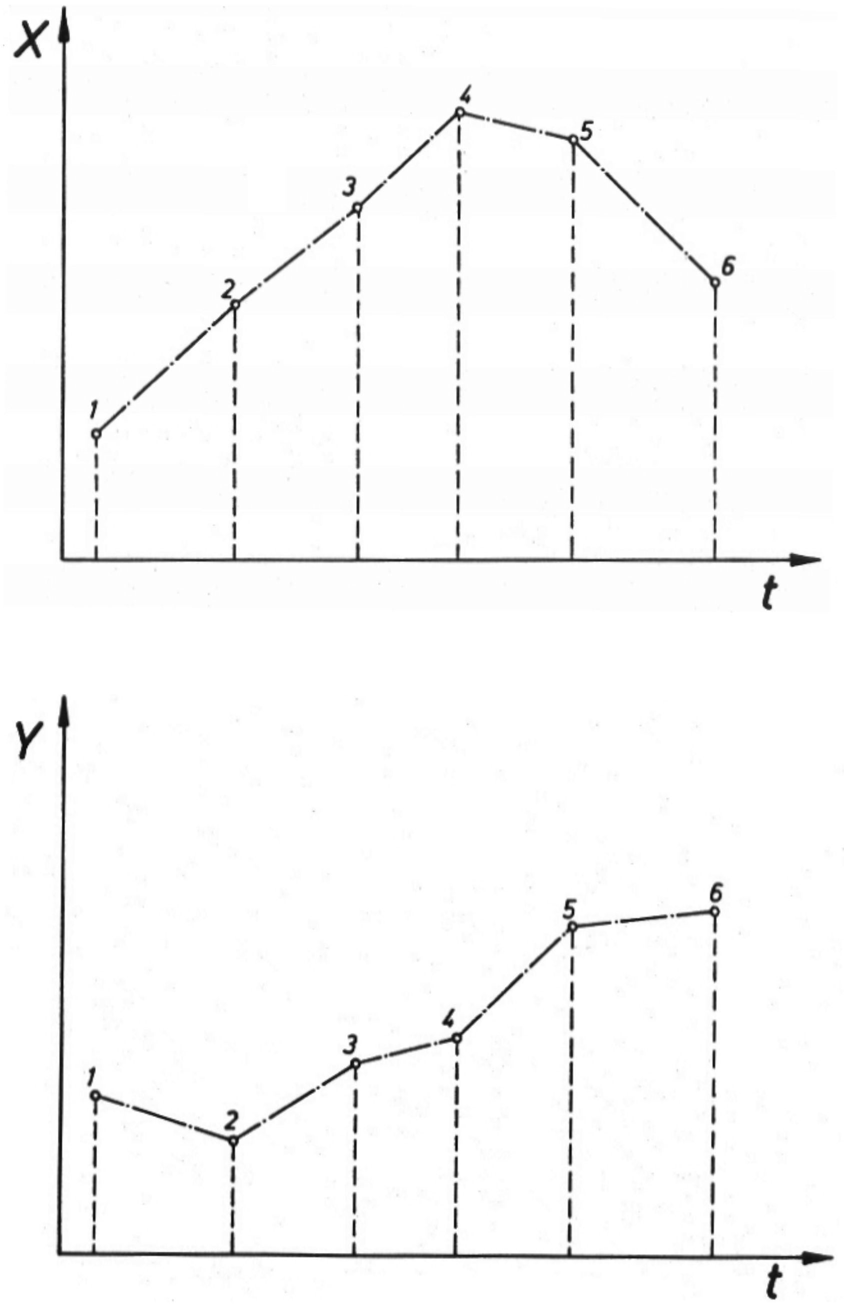


FIGURA 2-3-2-1-2

Este requisito deja de ser necesario cuando la curva es cerrada, pues en este caso se puede considerar el último punto de la curva como el anterior al primero y el primero como posterior al último, aplicando entonces la condición de pendiente que habíamos previsto.

Hay que resaltar que la pendiente que hemos definido es una de las posibles, pero no la única (podíamos hacer que la pendiente fuera 1/2 de la anterior, etc.); en cualquier caso el requisito es que en esa relación sólo están implicados los puntos que rodean al que se está tratando.

2.3.2.2 - Splines Globales

El inconveniente que tienen las curvas trazadas mediante splines locales, es que su curvatura no es continua. Eso produce cambios de dirección en ocasiones bastante pronunciados.

Se pueden calcular las pendientes de manera que su curvatura sea continua a lo largo de toda la curva.

Las figuras 2-3-2-2-1 y 2-3-2-2-2 muestran la forma de las tangentes en los puntos intermedios.

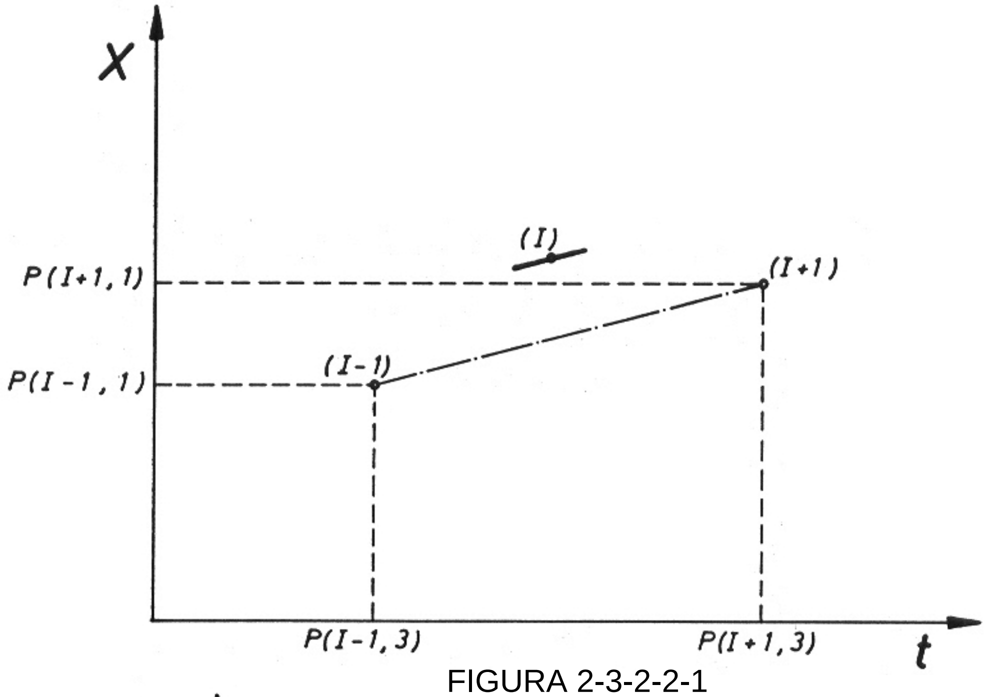


FIGURA 2-3-2-2-1

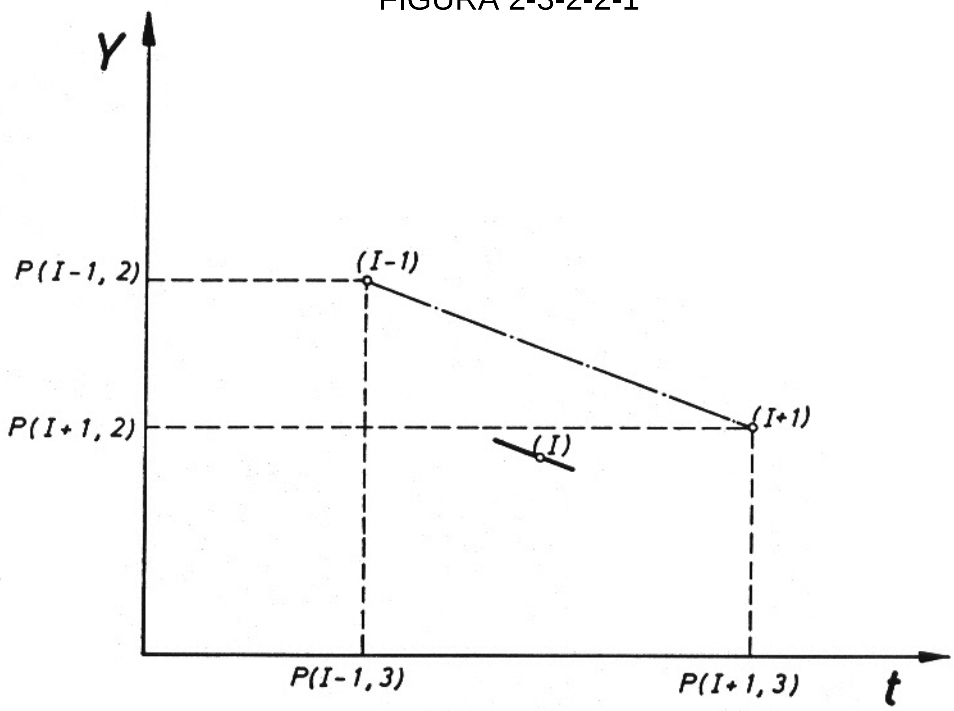


FIGURA 2-3-2-2-2

Con los elementos (variables indexadas) que ya hemos definido, vamos a establecer un procedimiento que nos permita obtener dichas pendientes.

Previamente hemos de definir otra variable indexada que nos servirá de vector auxiliar S(I).

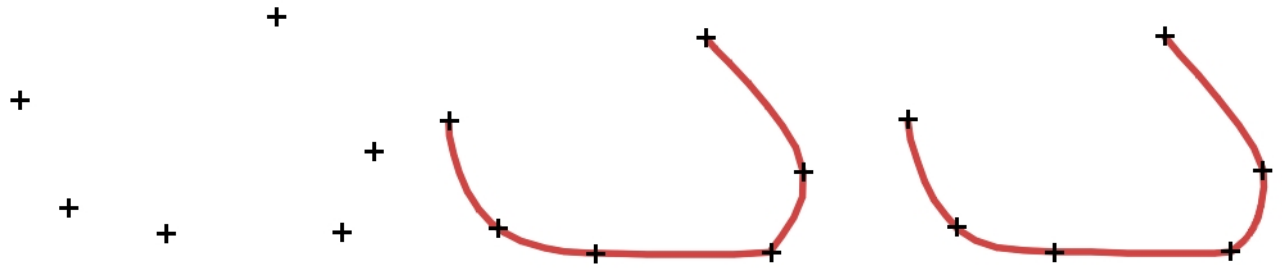
Para utilizar los algoritmos que corresponden a estos cálculos vamos a crear una variable indexada P(N,5) en la que los valores de P sean los siguientes:

P(I,1)Coordenada X del punto I
P(I,2)Coordenada Y del punto I
P(I,3)Valor que obtendremos para cada tramo X'_x
P(I,4)Valor que obtendremos para cada tramo Y'_x
P(I,5)Parámetro correspondiente al punto I.

Y el algoritmo:

```
FOR K=1 TO 2
FOR I=1 TO N : S(I)=0 : NEXT I
S(1)=P(1,K+2) : S(N)=P(N,K+2)
D=10
IF D < 0.0001 THEN A
D=0 : FOR I=2 TO (N-1)
AX=P(I+1,5)-P(I,5) : AY=P(I,5)-P(I-1,5) : BX=P(I,K)-P(I-1,K)
BY=P(I+1,K)-P(I,K)
D1=[-AY*S(I+1)-AX*S(I-1)+3*AX*BX/AY+3*AY*BY/AX]/(2*AX+2*AY)
IF ABS(D1-S(I)) > D THEN D=ABS(D1-S(I))
S(I)=D1 : NEXT I
GOTO B
A) FOR I=2 TO (N-1) : P(I,K+2)=S(I) : NEXT I
NEXT K
```

La figura 2-3-2-2-3 muestra un ejemplo de trazado para el que se ha utilizado este algoritmo.



PUNTOS UTILIZADOS *SPLINE LOCAL* *SPLINE CARDINAL*

FIGURA 2-3-2-2-3

También en este caso, si la curva es cerrada, podemos incorporar el cálculo correspondiente a la pendiente del primer y último punto.

2.3.2.3 - Curvas de Bezier

Supongamos las coordenadas de n puntos de un plano (X_1,Y_1) para i=1,2,...,n y sus respectivas funciones de forma B_1(t) ... B_n(t). Se construye la curva definida como:

$$X(t) = \sum X_1 B_1(t)$$

$$Y(t) = \sum Y_1 B_1(t)$$

Consideremos que t va desde 0 hasta 1 (figura 2-3-2-3-1) siendo 0 en el primer punto y 1 en el último, ya que las funciones de la base son:

$$B_1(t) = (n-1, i-1)t^{i-1}(1-t)^{n-1}$$

Siendo: $(n-1, i-1) = (n-1)!/\left[(i-1)!(n-i)!\right]$

El resultado es la denominada curva de Bezier, donde a diferencia de las anteriores, t no tiene el sentido de espacio recorrido a lo largo de la curva.
Como puede observarse las características de la curva son las siguientes:

- La curva pasa por los puntos inicial y final, pero en general no por los intermedios.
- La dirección de la curva en el punto inicial es la del primer segmento de la poligonal que une el primer punto con el segundo.
- La dirección de la curva en el último punto es la del último segmento de la poligonal, es decir, del segmento que une el último punto con el penúltimo.
- La forma de la curva es semejante a la de la poligonal dados una serie de puntos PA(I,0), PA(I,1).

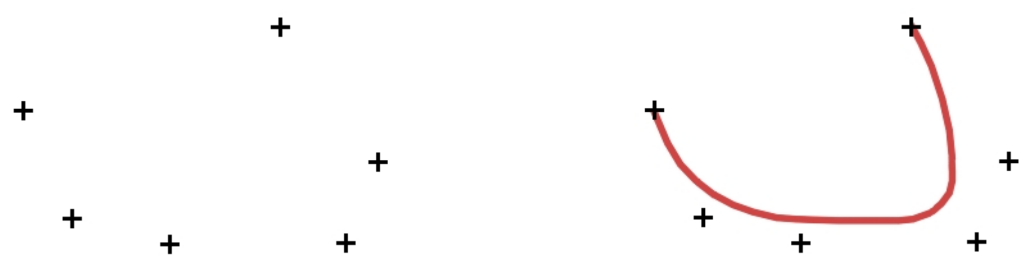
```
N=NP : IF TA=1 THEN N=N+1: PA(NP,0)=PA(0,0) : PA(NP,1)=PA(0,1)
FOR I=0 TO N : PA(I,2)=1 : NEXT I
FOR I=3 TO N : I1=I-1 : K=PA(0,2)
FOR J=1 TO I1-1 : I2=PA(J,2)+K
K=PA(J,2) : PA(J,2)=I2 : NEXT J:NEXT I
N1=NI∗(N-1) : IF TA=1 THEN N1=N1-1
FOR I=0 TO N1: V=I/(NI∗(N-1) : PU(I,0)=0 : PU(I,1)=0: FOR J TO N-1
U1=PA(J,2) : IF J > 0 THEN FOR K=1 TO J : U1=U1∗U : NEXT K
IF J < N-1 THEN FOR K=1 TO (N-1-J) : U1=U1∗(1-U) : NEXT K
PU(I,0)=PU(I,0)+U1∗PA(J,0) : PU(I,1)=PU(I,1)+U1∗PA(J,1)
NEXT J:NEXT I
NF=N1+1
```

Los puntos de la curva quedarán ubicados en la variable indexada PU(NF,2).

NP es el número de puntos.

TA es una variable que permite que la curva sea cerrada haciendo que el último punto sea la repetición del primero.

La figura 2-3-2-3-1 muestra un ejemplo en el que se ha utilizado este algoritmo.



PUNTOS UTILIZADOS *CURVA DE BEZIER*

FIGURA 2-3-2-3-1

2.3.2.4 - B-Spline

Una variante que incorpora parte de todas las anteriores es el método B-Spline para el trazado de curvas.

Se trata de una combinación lineal de elementos de la base.

$$X(t) = \sum \alpha_1 B_1(t)$$

$$Y(t) = \sum \beta_1 B_1(t)$$

La diferencia con respecto a las curvas de Bezier es que se trata de un conjunto de tramos polinómicos unidos entre ellos. Los tramos van a ser de grado tres como ya venía siendo habitual en los métodos anteriores.

La curva no pasará necesariamente por los puntos.

El número de tramos polinómicos será menor que n-1.

Veamos algunos ejemplos gráficos que ilustran este tipo de curvas (figura 2-3-2-4-1) en los que se aprecian las siguientes circunstancias:

- Si todos los vértices (puntos) son diferentes, la curva es continua en todos sus puntos hasta la segunda derivada (máxima suavidad).
- Si se repite un punto, sólo hay continuidad en la primera derivada en esa parte de la curva.
-Si se repiten dos puntos consecutivos, la curva es tangente a la recta que une los puntos.
- Si se repite un punto tres veces, se produce una discontinuidad en la pendiente (cambia de dirección la curva) y además pasa por el punto.

Siendo NP el número de puntos (denominados vértices de control) de coordenadas $\left[PA(I,0),PA(I,1)\right]$ y TA la variable de control que permite cerrarse a la curva, veamos el algoritmo de cálculo por B-Spline que dará los NF puntos de la curva $\left[PU(J,0),PU(J,1)\right]$:

```
FOR I=1 TO NO:PA(I,2)=PA(I-1,0) :PA(I,3)=PA(i-1,1) :NEXT I
IF TA=0 THEN N=NP-1 : FOR I=2 TO 3 : PA(0,I)=2∗PA(1,I)-PA(2,I) :
PA(NP+1,I)=2∗PA(NP,I)-PA(NP-1,I) : NEXT I
NF=0
FOR I=1 TO N
L=NI : IF I=N THEN IF TA=9 THEN L=NI+1
FOR J=1 TO L
U=(J-1)/NI : U1=U∗U : U2=U1∗U : A=-U2+3∗U1-3U+1
B=3∗U2-6∗U1+4 : C=-3∗U2+3∗U1+1 : D=U2
FOR K=1 TO 2 :
PU(NF,K-1)=(A∗PA(I-1,K+1)+B∗PA(I,K+1)+C∗PA(I+1,K+1)
+D∗PA(I+2,K+1))/6 : NEXT K
NF=NF+1
NEXT J
NEXT I
```

PUNTOS UTILIZADOS *CURVA B-SPLINE*

FIGURA 2-3-2-4-1