

DEPARTAMENT MATEMÀTICA APLICADA I  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

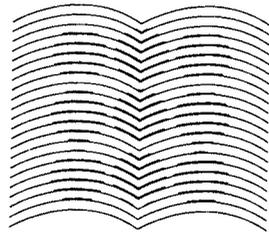
---

**ESTUDIO GEOMÉTRICO  
DE  
FAMILIAS DIFERENCIABLES  
DE  
PAREJAS DE MATRICES**

**Deformaciones versales, cambios de base globales,  
estratificación de Brunovsky**

**Memoria presentada para optar  
al grado de Doctor en Matemáticas  
por: M<sup>a</sup> Isabel García Planas**

UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA



BIBLIOTECA  
EX - LIBRIS

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
ADMINISTRACIÓ D'ASSUNTOS ACADÈMICS

Aquesta Tesi ha estat enregistrada  
a la pàgina 70 amb el número 639

Barcelona, 28-12-94



**Estudio Geométrico**  
De  
**Familias Diferenciables**  
De  
**Parejas de Matrices**

Deformaciones versales, cambios de base globales,  
estratificación de Brunovsky

Memoria presentada para optar  
al grado de Doctor en Matemáticas  
por: M<sup>a</sup> Isabel García Planas



$$A \quad \left( \left( \begin{array}{cc} JL & JL_{J_r} \\ S & M^{\mathfrak{a}I} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} JM^{\mathfrak{a}} & M^{\mathfrak{a}I} \\ JL_{\dagger} & M \end{array} \right) \right)$$



## Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han contribuido a que este trabajo haya podido realizarse.

A José Ferrer que con su esmerada supervisión ha conseguido que la memoria tenga esta presentación.

A los miembros del Departamento de Matemática Aplicada I sección ETSEIB por el apoyo de todos ellos recibido.

Al grupo de Álgebra lineal del País Vasco por habernos introducido en el tema y haber facilitado el intercambio de ideas.



# Índice

## Introducción

### Capítulo 0, Preliminares

- I. Clasificación de aplicaciones lineales definidas módulo un subespacio
  1. Equivalencia entre aplicaciones lineales definidas módulo un subespacio
  2. Dualidad con las “aplicaciones definidas sobre un subespacio”
  3. Familia completa de invariantes
  4. Matriz reducida de Brunovsky de una aplicación definida módulo un subespacio
  5. Cálculo de los invariantes
- II. Clasificación de parejas de matrices respecto a la semejanza por bloques
  1. Semejanza por bloques
  2. Invariantes de la semejanza por bloques
  3. Forma reducida de Brunovsky. Teoremas de clasificación

### Capítulo 1, Forma canónica local de una familia de parejas de matrices

- I. Forma canónica diferenciable local y deformaciones versales
  1. Deformaciones versales

## Capítulo 2, Semejanza por bloques global de clase $C^r$

- 0. La variedad grasmaniana  $Gr_{k,n}$
- I. La métrica gap
- II. Familias diferenciables de subespacios
  - 1. Caracterizaciones locales de familias diferenciables de subespacios
  - 2. Propiedades globales para un espacio de parámetros contráctil
- III. Semejanza global de clase  $C^r$ 
  - 1. Diferenciabilidad de los valores propios
  - 2. Semejanza global de clase  $C^r$  para familias  $C^r(M, M_n(\mathbf{C}))$
  - 3. Bases de Brunovsky de clase  $C^r$  para familias  $C^r(M, \mathcal{M}_{nm})$
- IV. Inversas generalizadas diferenciables de familias diferenciables de matrices

## Capítulo 3, Estratificación de Brunovsky-Kronecker

- 0. Estratificaciones de Whitney
  - 1. Estratificaciones de Whitney
  - 2. Condición de frontera
  - 3. Generación de estratificaciones de Whitney
  - 4. Regularidad de la estratificación “imagen”
  - 5. Homogeneidad y regularidad
  - 6. Ejemplos
- I. Estratificación de Brunovsky-Kronecker
  - 1. Los estratos de Brunovsky-Kronecker
  - 2. Regularidad de los estratos de Brunovsky-Kronecker
  - 3. Otras propiedades de los estratos de Brunovsky-Kronecker
- II. Propiedades de regularidad de la estratificación de Brunovsky-Kronecker

2. La acción del grupo “feedback de estados”
  3. Versalidad y transversalidad
- II. Primera deformación miniversal (ortogonal)
1. Deformación miniversal ortogonal
  2. Descripción de la deformación miniversal ortogonal
  3. Dimensión de la deformación miniversal
- III. Segunda deformación miniversal “minimal”
- IV. Algunas aplicaciones a las perturbaciones locales
1. Parejas de matrices (estructuralmente) estables
  2. Variaciones en la forma de Brunovsky por perturbaciones locales
  3. Ejemplos de diagramas de bifurcaciones
- V. Deformaciones versales de cuaternas de matrices
1. Equivalencia entre cuaternas de matrices
  2. Deformaciones versales de cuaternas de matrices
  3. Estabilidad estructural

## **Anexo al capítulo 1, Resolución de una ecuación matricial**

- I. Dimensión del espacio de soluciones
  1. Producto de Kronecker y operador vectorializador
  2. Dimensión del espacio de soluciones
- II. Solución del sistema de ecuaciones
  2. Resolución del sistema I
  3. Resolución del sistema II
  4. Resolución del sistema III
  5. Resolución del sistema IV
  6. Descripción del conjunto de soluciones del sistema

1. Regularidad sobre estratos simples
2. Regularidad de la estratificación para el caso  $m = 1$

### III. Diagrama de bifurcaciones

1. Familias transversas y diagramas de bifurcaciones
2. Estratos genéricos
3. Diagramas de bifurcaciones locales

## Bibliografía

## Introducción

Se aborda en esta memoria, el estudio de familias diferenciables de parejas de matrices, bajo la relación de equivalencia de semejanza por bloques. Esto es, se considera el espacio de matrices complejas  $\mathcal{M}_{nm} = \{(A, B) \mid A \in M_{n \times n}(\mathbf{C}), B \in M_{n \times m}(\mathbf{C})\}$ , y en él la relación de equivalencia “semejanzza por bloques” dada por  $(A, B) \sim (P^{-1}(A + BR)P, P^{-1}BQ)$ , donde  $P \in Gl(n, \mathbf{C})$ ,  $Q \in Gl(m, \mathbf{C})$ ,  $R \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ . Se trata de estudiar familias  $(A(t), B(t))$  en dicho espacio que dependen diferenciablemente de un parámetro  $t$  que varía en una variedad diferenciable.

Las parejas de matrices, aparecen ya en los trabajos realizados por Kronecker ([17]), sobre haces de matrices, es decir matrices de la forma  $A + \lambda B$ , con  $A, B \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ .

En las últimas décadas se ha reavivado su estudio por su relación con la teoría de sistemas dinámicos lineales. Un sistema lineal a coeficientes constantes viene representado por ecuaciones del tipo

$$\dot{x}(s) = Ax(s) + Bu(s) \quad \text{ó} \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

donde  $x(s)$  son las variables de estado,  $u(s)$  las de entrada (o inputs),  $A$  la matriz del sistema y  $B$  la de realimentación. Dichas ecuaciones se corresponden obviamente con las parejas de matrices  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ , y en esta correspondencia la “semejanzza por bloques” se interpreta como cambios de base en las variables de estado (matriz  $P$ ) y en las de entrada (matriz  $Q$ ), más una realimentación adicional (matriz  $R$ ).

En este contexto aparecen de forma natural familias  $(A(t), B(t))$  como las objeto de nuestro trabajo, asociadas a familias de sistemas lineales. Así (véase, por ejemplo, Hazewinkel [7]), estas familias se presentan en el estudio de perturbaciones de

sistemas, de sistemas con retardo, de incertidumbre en el valor de los parámetros del sistema, etc.

Dentro de este planteamiento general de estudio de familias diferenciables de parejas de matrices, tres son los problemas que abordamos, y que constituyen respectivamente el objeto de los capítulos 1, 2 y 3:

- 1- Forma canónica local de una familia de parejas de matrices: deformación miniversal
- 2- Semejanza por bloques global de clase  $C^r$ : existencia de familias diferenciables de bases de Brunovsky (que en cada punto reducen la pareja de matrices a su forma canónica)
- 3- Estratificación del espacio de parejas de matrices según sus invariantes discretos. Diagramas de bifurcaciones de familias genéricas

En todo momento se ha evitado el uso de técnicas particulares, sólo aplicables a cada problema concreto. Por el contrario, se ha pretendido utilizar técnicas más generales que permitan un tratamiento homogéneo de estos problemas, así como su aplicación a otros de tipo semejante. Así, incluimos una aplicación de las técnicas utilizadas en (1) al caso de las cuaternas de matrices, y de las de (2) a las familias de inversas generalizadas.

Una referencia fundamental la constituye los estudios realizados por diversos autores (Arnold [1],[2], Gibson [20],[21],) para matrices cuadradas. Asimismo, son ya conocidos algunos resultados parciales para el caso particular de parejas controlables (Udilov [47], Tchou [45]). Con todo, como la descomposición de un sistema en un subsistema controlable y un endomorfismo no es directa, los resultados para el caso general no se derivan de los de ambos casos particulares, sino que requieren un estudio específico.

## 1. Forma canónica local de una familia de parejas de matrices.

Siguiendo el planteamiento de Arnold, una herramienta fundamental para el estudio local de familias (perturbaciones, regularidad de la estratificación, bifurcaciones locales,...) es disponer de una *forma canónica diferenciable local* para las familias de parejas de matrices. De forma más precisa, de una llamada *deformación versal*: familia de parejas de matrices tal que cualquiera otra es isomorfa a alguna de las inducidas de ella mediante cambio de variables. Si además su dimensión es la mínima posible (*deformaciones miniversales*) nos da una “representación local” del espacio de parejas de matrices.

Como antecedentes en este tema, destaquemos que Arnold [1], [2] obtiene formas canónicas diferenciables locales para matrices cuadradas respecto a la relación de conjugación. Aplicaremos esos resultados al subsistema “incontrolable” del sistema tratado.

En cuanto a parejas de matrices, Tannenbaum [43] describe formas canónicas locales, pero con respecto a la relación de equivalencia cambio de base en el espacio de estados, por lo que no son de aplicación en nuestro caso.

Señalemos finalmente que, para la relación de equivalencia aquí considerada, Udilov [47] da una deformación versal para el caso particular de parejas controlables y matriz de realimentación de rango máximo.

Por nuestra parte, en el capítulo 1, tales deformaciones miniversales son construídas como variedades lineales minitransversales a las clases de equivalencia. Una primera deformación es obtenida como ortogonal a dichas clases, respecto a un producto escalar hermítico definido en (II.1.2):

DEFORMACIÓN MINIVERSAL “ORTOGONAL” (II.1.4).

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ , una pareja de matrices. Entonces, una deformación miniversal

(ortogonal) de  $(A, B)$  viene dada por

$$(A, B) + \{(X^*, Y^*)\}$$

donde  $X \in M_n(\mathbf{C})$ ,  $Y \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$  recorren el conjunto de soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} AX - XA + BY &= 0 \\ XB &= 0 \\ YB &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y  $X^*$ ,  $Y^*$  indican sus respectivas adjuntas.

Su descripción explícita requiere la resolución de este sistema de ecuaciones matricial, que se detalla en el anexo.

En particular, contiene el mencionado resultado de Udilov [47].

A partir de una deformación ortogonal, se obtiene otra “minimal” en el sentido de que puede expresarse de la forma  $(A, B) + (X, Y)$ , donde  $(X, Y)$  es una pareja de matrices de coeficientes variables, de los cuales los no nulos constituyen los parámetros independientes de la deformación.

DEFORMACIÓN MINIVERSAL “MINIMAL” (III.3).

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  una pareja de matrices, en su forma reducida de Brunovsky,  $r = \text{rang} B$ ,  $k_1 \geq \dots \geq k_r$  los índices de controlabilidad, y  $p = k_1 + \dots + k_r$ . Entonces, una deformación miniversal de  $(A, B)$  viene dada por  $(A, B) + \mathcal{S}$ , donde  $\mathcal{S}$  es la variedad lineal de  $\mathcal{M}_{nm}$  definida por las parejas  $(X, Y)$

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{pmatrix}$$

donde la partición por bloques corresponde a la de la forma de Brunovsky de  $(A, B)$ ,

y

$$(i) \quad X_1^1 = 0, \quad X_2^1 = 0$$

(ii) Todos los elementos de  $X_1^2$  son nulos excepto los indicados por los parámetros

$$x_1^{p+1}, \dots, x_1^n, x_{k_1+1}^{p+1}, \dots, x_{k_1+1}^n, \dots, x_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}^{p+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}^n.$$

(iii)  $X_2^2$  es la forma canónica de Arnold [1]

(iv) Todos los elementos de  $Y_1^2$  son nulos excepto los indicados por los parámetros

$$y_2^{k_2+1}, \dots, y_2^{k_1-1}, y_3^{k_1+k_3+1}, \dots, y_r^{k_1+\dots+k_{r-2}+k_r+1}, \dots, y_r^{k_1+\dots+k_{r-1}-1}.$$

(v)  $Y_2^1$  es tal que

$$y_{r+1}^{k_1} = \dots = y_m^{k_1} = y_{r+1}^{k_1+k_2} = \dots = y_m^{k_1+k_2} = \dots = y_{r+1}^p = \dots = y_m^p = 0$$

(vi)  $Y_1^2 = 0$

(vii) Todos los parámetros de  $Y_2^2$  son arbitrarios.

Diversas consecuencias se siguen de la explicitación de estas deformaciones miniver-sales. Así, la primera de ellas permite calcular (véase (II.3.1) y (II.3.4)) la dimensión de la órbita y del estabilizador de una pareja  $(A, B)$  cualquiera:

#### DIMENSIÓN DE LA ÓRBITA Y DEL ESTABILIZADOR.

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  una pareja de matrices,  $\mathcal{O}(A, B)$  su órbita y  $\mathcal{E}st(A, B)$  su estabilizador. Obviamente:

$$\dim \mathcal{O}(A, B) = n^2 + nm - \dim T\mathcal{O}(A, B)^\perp$$

$$\dim \mathcal{E}st(A, B) = n^2 + nm + m^2 - \dim \mathcal{O}(A, B)$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \dim T\mathcal{O}(A, B)^\perp &= \sum_{i \leq i, j \leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\} + r(n-p) + \\ &+ (m-r)(n-r) + \\ &+ \sum_{\lambda} (\sigma_1(\lambda) + 3\sigma_2(\lambda) + 5\sigma_3(\lambda) + \dots) \end{aligned}$$

donde  $r, k_1, \dots, k_r, p$  son como antes,  $\lambda$  recorre los valores propios de  $(A, B)$ , y  $(\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \dots)$  es la característica de Segre del correspondiente valor propio.

El cálculo de  $\dim \mathcal{E}st(A, B)$  fue planteado por Tanemmbaum ([43], problema abierto). Martin [7], lo resolvió para el caso de matrices completamente controlables y rang  $B$  máximo. Nuestro resultado fue obtenido paralelamente por Beitia, Gracia, Hoyos [4]. Ambos fueron comunicados en “Encuentros de Análisis matricial y aplicaciones”, Valencia 1989.

La segunda deformación miniversal, más “sencilla”, permite estudiar los tipos de parejas de matrices que aparecen en un entorno de una pareja dada. Algunos ejemplos son presentados en (IV.3). En particular, como corolario se deduce el siguiente resultado obtenido por Willems [49].

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL. (IV.1.3)

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  y  $r, k_1 \geq \dots \geq k_r$  como antes. Entonces  $(A, B)$  es estructuralmente estable si y sólo si  $r = \min(n, m)$ , y  $k_1 - k_r \leq 1$ .

Remarquemos que las técnicas utilizadas son aplicables a otros casos. Como ejemplo en este sentido, se ha generalizado el resultado anterior al caso de cuaternas de matrices (con respecto a la relación de equivalencia natural que generaliza la equivalencia por bloques entre parejas de matrices (V.1), [40]):

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE CUATERNAS DE MATRICES. (V.4.3)

Sea  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$  una cuaterna de matrices en su forma reducida de Molinari [40]:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Entonces  $(A, B, C, D)$  es estructuralmente estable (respecto a [40]), si y sólo si  $\text{rang } D = \min(m, p)$  y

- i) para  $m > p$ , si  $\text{rang } B_1 = \min(n, m - p)$  y la pareja de matrices  $(A_1, B_1)$  es estructuralmente estable.
- ii) para  $p > m$ , si  $\text{rang } C_1 = \min(n, p - m)$  y la pareja  $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_1 \end{pmatrix}^t$  es estructuralmente estable.

## 2. Semejanza por bloques global de clase $C^r$ .

La deformación semiuniversal asegura la posibilidad de reducir localmente una familia diferenciable a una forma canónica, mediante un cambio de base asimismo diferenciable. Pero ello no es posible globalmente, en general.

La existencia de bases globales diferenciables que reduzcan una familia a una forma “más simple” requiere hipótesis adicionales sobre la familia considerada. Así, para matrices cuadradas tenemos resultados obtenidos por Philip-Thijse [41], Guralnick [26], Gracia-Evard [10], en los que dan condiciones suficientes para la existencia de bases diferenciables globales que reducen la familia de matrices a su forma de Jordan.

En nuestro caso, y para variedades de parámetros contráctiles, demostramos que una condición suficiente para ello es que los invariantes discretos de la familia permanezcan constantes:

### EXISTENCIA DE CAMBIOS DE BASE GLOBALES (III.3.1).

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad contráctil, y  $(A(t), B(t)), t \in M$ , una familia diferenciable de parejas de matrices con invariantes discretos constantes. Entonces, existen  $P(t) \in Gl(n; \mathbb{C})$ ,  $Q(t) \in Gl(m; \mathbb{C})$  y  $R(t) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  dependientes diferenciablemente de  $t \in M$  tales que

$$P(t)^{-1}(A(t), B(t)) \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ R(t) & Q(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz de Brunovsky, para todo  $t \in M$

Como muestra de que también en este caso las técnicas utilizadas permiten aplicaciones en otros problemas similares, presentamos el estudio de la diferenciabilidad de una familia de matrices en que cada una de ellas es la inversa generalizada de Moore-Penrose de las matrices de una familia diferenciable.

#### DIFERENCIABILIDAD DE LA INVERSA DE MOORE-PENROSE (IV.3).

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad contráctil, y  $A(t)$ ,  $t \in M$ , una familia diferenciable de matrices con rango constante. Entonces:

- (i) la inversa de Moore-Penrose  $A^+(t)$  de  $A(t)$  es diferenciable
- (ii) existen  $T(t) \in Gl(m; \mathbf{C})$  y  $S(t) \in Gl(n; \mathbf{C})$  dependientes diferenciablemente de  $t \in M$ , tales que

$$A^+ = S \left( \begin{array}{c} 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} Id_k & 0 \end{array} T^{-1} A S \begin{pmatrix} 0 \\ Id_k \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ 0 \end{array} \right) T^{-1}$$

Goberg-Lancaster-Rodman [21], hace un estudio de la continuidad de una familia de inversas generalizadas de una familia de matrices continua con relación a la “topología gap”, sobre la variedad grasmaniana. Al inicio del capítulo (I.6), se demuestra que esta topología es equivalente a la usual, por lo que el resultado anterior, engloba dicho estudio.

### 3. Estratificación de Brunovsky-Kronecker.

Se aborda finalmente una de las herramientas geométricas básicas para el estudio de los diagramas de bifurcaciones de familias genéricas de matrices: la estratificación del espacio de parejas de matrices en función de sus invariantes discretos, que denominamos estratificación de Brunovsky-Kronecker y que abreviamos diciendo BK-estratificación. Así, con este lenguaje, la hipótesis del principal resultado del capítulo

2 (que la familia de matrices tenga invariantes discretos constantes) puede expresarse diciendo que la familia de parejas de matrices considerada esté contenida en un estrato.

También en este caso los estudios realizados sobre matrices cuadradas constituye el punto de partida (Arnold [1], [2], Gibson [19], [20]), si bien no son posibles generalizaciones directas.

Tchou [45], ha estudiado la estratificación del espacio de parejas de matrices completamente controlables y con rango de la matriz  $B$  máximo, caso particularmente simple puesto que los estratos coinciden con las propias órbitas.

Los resultados fundamentales pueden resumirse en la siguiente forma:

#### ESTRATIFICACIÓN DE BRUNOVSKY-KRONECKER.

- (i) *Los BK-estratos son subvariedades diferenciables del espacio de parejas de matrices  $\mathcal{M}_{nm}$ , (I.2.3).*
- (ii) *Los BK-estratos son conjuntos constructibles, (I.2.5).*
- (iii) *Los BK-estratos son conjuntos conexos, (I.2.6).*
- (iv) *La BK estratificación verifica la condición de frontera, (II.2.3).*
- (v) *Si  $m = 1$ , la BK-estratificación verifica las condiciones de regularidad de Whitney, (II.2.2).*

Remarquemos que la cuarta afirmación se deduce de las fórmulas de entrelazamiento demostradas por Gracia-Hoyos-Zaballa [23].

En el apartado III, mostramos como los resultados obtenidos en el capítulo 1, permiten la descripción local explícita de esta estratificación así como el cálculo de las dimensiones de los estratos.

Finalmente, mostramos mediante algunos ejemplos, como los anteriores métodos pueden utilizarse para el estudio de diagramas de bifurcaciones de familias genéricas.

Además de estos tres capítulos, y debido a que a lo largo de toda la memoria haremos uso exhaustivo de ello, se han recogido en uno previo el método de obtención de los invariantes, así como de la forma reducida de Brunovsky, de una pareja de matrices, como caso dual del presentado por Ferrer-Puerta [14]. Se construye además, una base en la cual la pareja de matrices adopta su forma reducida.

Por último hacemos notar que cada capítulo está dividido en secciones y que la numeración de cada capítulo es independiente de las de los otros capítulos, por esta razón, al referirnos a un resultado anterior, entendemos que corresponde al mismo capítulo salvo que se especifique el capítulo al que corresponde.

# Capítulo 0

## Preliminares

Vamos a exponer en este capítulo, definiciones y resultados generales que se utilizan a lo largo de esta memoria, relativos a la clasificación de parejas de matrices, con respecto a la semejanza por bloques. En particular, se describe una familia completa de invariantes, y una forma reducida canónica de una pareja de matrices. Asimismo, se dan métodos para el cálculo de dichos invariantes y para la obtención de cambios de base que reduzcan la pareja de matrices a su forma canónica.

La semejanza por bloques, también llamada equivalencia por realimentación o  $\Gamma$ -equivalencia, ha sido tratada, durante las dos últimas décadas, por diversos autores y de diferentes maneras: Brunovsky [2], en 1970, da un sistema completo de invariantes y una forma reducida canónica para el caso en que la pareja de matrices es completamente controlable. Estos resultados son extendidos por Goberg, Lancaster, Rodman [21], a parejas de matrices cualesquiera, refiriendo el problema a equivalencia estricta de haces. Zaballa [51], obtiene una forma reducida canónica para la  $\Gamma$ -equivalencia de parejas de matrices no completamente controlables, mediante transformaciones elementales. Ferrer-Puerta [14], en 1992 dan un tratamiento geométrico del tema, a través de la correspondencia entre parejas (verticales) de matrices y aplicaciones lineales definidas sobre subespacios. Este último trabajo es el que ha servido de base para la confección de este capítulo.

En el apartado I se estudia la clasificación de las aplicaciones definidas módulo un subespacio, respecto la relación de equivalencia natural que se corresponde con la semejanza por bloques de sus matrices. En (I.1) se define esta relación de equivalencia. En (I.2) se muestra que el caso objeto de estudio es dual de de las aplicaciones definidas en un subespacio tratado en [14], lo que permitirá reducir a este caso numerosas demostraciones. En (I.3) se aborda ya el teorema de clasificación (I.3.6), y se describe una familia completa de invariantes (I.3.7). En (I.4) se obtiene la forma canónica de Brunovsky (I.4.1), a través de la construcción explícita de una base adecuada (bases de Brunovsky). Finalmente, en (I.5) se presentan métodos de cálculo de los invariantes, tanto continuos (I.5.5), como discretos ((I.5.2), (I.5.6)).

En el apartado (II) se trasladan los resultados del anterior a la clasificación de parejas de matrices. En (II.1) se define la semejanza por bloques (II.1.2), y se observa (II.1.4) que se corresponde con la considerada en el apartado (I). En (II.2) se definen los invariantes análogos a los considerados en (I). En (II.3) se presenta la forma canónica reducida de una pareja de matrices, y los teoremas de clasificación, que resultan de trasladar los obtenidos en (I).

## **I. Clasificación de aplicaciones lineales definidas módulo un subespacio.**

### **(I.1) Equivalencia entre aplicaciones lineales definidas módulo un subespacio.**

(I.1.1) Se denominan *aplicaciones lineales definidas módulo un subespacio* las del tipo  $f : X \rightarrow X/W$ , donde  $X$  un espacio vectorial sobre  $\mathbf{C}$ , y  $W$  un subespacio vectorial de  $X$ .

(I.1.2) Para definir una relación de equivalencia natural entre un par  $f : X \rightarrow X/W$ ,  $f' : X' \rightarrow X'/W'$  de tales aplicaciones, consideremos el conjunto  $H$  de isomorfismos  $\varphi : X' \rightarrow X$  tales que  $\varphi(W') \subset W$ .

(I.1.3) Nótese que  $H \neq \emptyset$  si y sólo si  $\dim X' = \dim X$  y  $\dim W' = \dim W$ . Supondremos, pues, en adelante  $\dim X = n + m$ ,  $\dim W = n$ , fijos.

(I.1.4) Si  $\varphi \in H$ , se inducen de manera natural isomorfismos

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : X'/W' &\longrightarrow X/W; & \tilde{\varphi}([v']) &= [\varphi(v')] \\ \dot{\varphi} : W' &\longrightarrow W; & \dot{\varphi}(v') &= \varphi(v').\end{aligned}$$

donde  $[a]$  significa “clase de equivalencia” en el espacio cociente correspondiente.

(I.1.5) Con ello podemos ya definir la anunciada relación de equivalencia:

DEFINICIÓN:

Con las notaciones anteriores, diremos que las aplicaciones  $f : X \longrightarrow X/W$  y  $f' : X' \longrightarrow X'/W'$  son equivalentes, y escribiremos  $f \sim f'$ , si y sólo si existe  $\varphi \in H$  tal que  $f \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ f'$ . Esto es, tal que es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & X/W \\ \dot{\varphi} \uparrow & & \varphi \uparrow & & \uparrow \tilde{\varphi} \\ W' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & X'/W' \end{array}$$

(I.1.6) Obviamente, si  $W = \{0\}$  y  $f \sim f'$ , entonces  $W' = \{0\}$ , y la relación de equivalencia se reduce a la habitual conjugación entre endomorfismos.

## (I.2) Dualidad con las “aplicaciones definidas sobre un subespacio”.

(I.2.0) Veamos que el estudio de las anteriores aplicaciones es dual de las “aplicaciones definidas módulo un subespacio”. Esto es, aplicaciones lineales del tipo  $g : Y \longrightarrow X$ , donde  $Y$  es un subespacio vectorial de  $X$ . (Véase, por ejemplo, [14]).

(I.2.1) En efecto si  $f : X \longrightarrow X/W$  es una aplicación lineal de  $X$  en  $X/W$ , la aplicación dual de  $f$ ,  $f^* : (X/W)^* \longrightarrow X^*$ , es una aplicación lineal de  $(X/W)^*$  en

$X^*$ . Y  $(X/W)^*$  es canónicamente isomorfo al subespacio vectorial de  $X^*$ :  $\widetilde{W} = \{\omega \in X^*, W \subset \text{Ker } \omega\}$ . Recíprocamente, si  $g$  es una aplicación lineal definida sobre un subespacio  $g : Y \rightarrow X$ , donde  $Y \subset X$ , tenemos que  $g^*$  es una aplicación de  $X^*$  sobre  $Y^*$ . Puesto que  $Y^*$  es canónicamente isomorfo a  $X^*/\widetilde{Y}$ , resulta que  $g^*$  es una aplicación de las ahora consideradas.

Por otra parte, la definición dada en (I.1.5) no es más que la versión dual de la equivalencia natural entre aplicaciones definidas en un subespacio.

(I.2.2) PROPOSICIÓN.

Sean  $f : X \rightarrow X/W$  y  $f' : X' \rightarrow X'/W'$ . Consideremos las aplicaciones lineales duales respectivas:  $f^* : (X/W)^* \rightarrow X^*$  y  $f'^* : (X'/W')^* \rightarrow X'^*$ . Se tiene

$$f \sim f' \quad \text{si y sólo si} \quad f'^* \sim f^*.$$

DEMOSTRACIÓN:

Si  $f$  y  $f'$  son equivalentes, entonces dualizando el diagrama de (I.1.5) tenemos

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W} \equiv X^*/W^* & \xrightarrow{f^*} & X^* \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \widetilde{\varphi}^* \\ \widetilde{W}' \equiv X'^*/W'^* & \xrightarrow{f'^*} & X'^* \end{array}$$

asimismo conmutativo, y donde  $\varphi^*$  y  $\widetilde{\varphi}^*$  son isomorfismos. Luego  $f'^* \sim f^*$ .

El recíproco se demuestra de forma análoga, teniendo en cuenta que el espacio bidual de un espacio vectorial es canónicamente isomorfo al propio espacio, y que este isomorfismo canónico, permite identificar toda aplicación lineal con su bidual.

(I.3) Familia completa de invariantes.

(I.3.1) Dada  $f : X \rightarrow X/W$  vamos a reducir su estudio al de un par de aplicaciones “más sencillas”, asociadas a ella de forma natural. Para ello, designemos por  $W_1$ , la

imagen por  $f$  de  $W$ , es decir  $W_1 = f(W)$ . Denotando por  $\dot{f}$  la aplicación restricción de  $f$  a  $W$  y por  $f_1$  la aplicación definida sobre el cociente, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\dot{f}} & W_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & X/W \equiv X_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X/W & \xrightarrow{f_1} & X_1/W_1
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones y proyecciones naturales.

Obsérvese que la aplicación  $\dot{f}$  es, por construcción, exhaustiva, mientras que

$$f_1 : X_1 \longrightarrow X_1/W_1 \equiv X_2$$

es del mismo tipo que la aplicación  $f$ , es decir, es una aplicación lineal definida módulo un subespacio, pero con  $\dim X_1 < \dim X$  (salvo si  $W = \{0\}$ ).

(I.3.2) Con ello el siguiente resultado, aplicado reiteradamente nos proporciona un conjunto completo de invariantes.

TEOREMA.

Sean  $f : X \longrightarrow X/W$  y  $f' : X' \longrightarrow X'/W'$ . Entonces,  $f$  y  $f'$  son equivalentes, si y sólo si

$$f_1 \sim f'_1 \quad y \quad \text{rang } f = \text{rang } f'$$

DEMOSTRACIÓN:

Observemos previamente que, dualizando el diagrama (I.1.5), tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 W_1^* & \xrightarrow{f^*} & W^* \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 X_1^* \equiv (X/W)^* & \xrightarrow{f^*} & X^* \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (X_1/W_1)^* & \xrightarrow{f_1^*} & (X/W)^*
 \end{array}$$

Ahora bien

$$X_1^* \equiv (X/W)^* \equiv \widetilde{W}$$

$$W_1^* \equiv X_1^*/\widetilde{W}_1$$

$$W^* \equiv X/\widetilde{W}.$$

por lo que el diagrama queda de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{W}_1 & \longrightarrow & \widetilde{W} & \longrightarrow & W_1^* \\
 \downarrow f_1^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\
 \widetilde{W} & \longrightarrow & X^* & \longrightarrow & W^*
 \end{array}$$

Nótese que  $\widetilde{W}_1 \equiv (f^*)^{-1}(\widetilde{W})$ .

Podemos, pues, aplicar [14], (1,4,3), obteniendo:

$$f^* \sim f'^* \quad \text{si y sólo si} \quad f_1^* \sim f_1'^* \quad \text{y} \quad \text{rang } f^* = \text{rang } f'^*$$

Aplicando nuevamente, (I.2.2) tenemos que

$$f_1^* \sim f_1'^* \quad \Leftrightarrow \quad f_1' \sim f_1$$

Y por la igualdad de rangos de aplicaciones duales, se tiene el resultado.

(I.3.3) Reiterando la construcción hecha en (I.3.1), tenemos definida una cadena de aplicaciones definidas módulo un subespacio, mediante:

$$X_{i+1} \equiv X_i/W_i, \quad W_{i+1} \equiv f_i(W_i), \quad f_{i+1} : X_{i+1} \longrightarrow X_{i+1}/W_{i+1}$$

con el consiguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 W_i & \xrightarrow{f_i} & W_{i+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_i & \xrightarrow{f_i} & X_i/W_i \equiv X_{i+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_{i+1} \equiv X_i/W_i & \xrightarrow{f_{i+1}} & X_{i+1}/W_{i+1} \equiv X_{i+2}
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones y proyecciones naturales respectivamente, y  $f_i$  es exhaustiva.

(I.3.4) Es obvio que existe  $s$  tal que:

$W_{s+1} = 0$ , en cuyo caso  $X_{s+1} = X_{s+\ell}$ ,  $\forall \ell \geq 1$ , y  $f_{s+1} : X_{s+1} \longrightarrow X_{s+2} = X_{s+1}$  es simplemente un endomorfismo.

ó

$W_{s+1} = X_{s+1}$ , en cuyo caso  $X_{s+2} = 0$  y  $f_{s+1}$  es la aplicación nula.

(I.3.5) Podemos, pues, definir los siguientes invariantes (a menudo llamados  $r$ -números):

DEFINICIÓN:

Con las notaciones anteriores

$$r_i = \dim W_i$$

(I.3.6) Si notamos por  $W_0 \equiv W$  y  $W_{-1} \equiv X$ . Es inmediato demostrar

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN.

Sean  $f : X \longrightarrow X/W$  y  $f' : X' \longrightarrow X'/W'$ . Entonces  $f$  y  $f'$  son equivalentes si y sólo si se verifica

i)  $s = s'$

ii)  $\dim W_i = \dim W'_i$ , para  $-1 \leq i \leq s+1$

iii)  $f_{s+1} \sim f'_{s+1}$

(I.3.7) COROLARIO. (*Familia completa de invariantes*)

Una familia completa de invariantes de la aplicación  $f : X \rightarrow X/W$ , viene dada por

i) El entero  $s$  y los enteros  $r_s \leq \dots \leq r_0$ .

ii) Los valores propios de  $f_{s+1}$  y para cada valor propio su característica de Segre.

(I.3.8) En dicha familia de invariantes, los  $r$ -números pueden sustituirse por su partición conjugada.

DEFINICIÓN:

Dada  $f : X \rightarrow X/W$ , llamaremos sus índices de Kronecker a los enteros

$$k_1 \geq \dots \geq k_r$$

tales que  $r = r_0$  y  $[k_1, \dots, k_r]$  es la partición conjugada de  $[r_0, \dots, r_s]$ .

(I.3.9) Los invariantes de Segre de  $f_{s+1}$  los llamaremos simplemente invariantes de Segre de  $f$ :

DEFINICIÓN:

Dada  $f : X \rightarrow X/W$ , decimos que  $\lambda$  es un valor propio de  $f$ , y  $\sigma(\lambda)$  su característica de Segre, si y sólo si es un valor propio de  $f_{s+1}$ , con característica de Segre  $\sigma(\lambda)$ .

**(I.4) Matriz reducida de Brunovsky de una aplicación definida módulo un subespacio.**

(I.4.1) El conjunto completo de invariantes dado en (I.3.7), determina en bases convenientes una matriz reducida canónica.

**PROPOSICIÓN.**

Sea  $f : X \rightarrow X/W$ ,  $k_1 \geq \dots \geq k_r$ , sus índices de Kronecker,  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  los valores propios de  $f$  y  $\sigma(\lambda_1), \dots, \sigma(\lambda_t)$  las características de Segre correspondientes a cada valor propio. Existe una base en  $X$  adaptada a  $W$ , tal que si en  $X/W$  consideramos la base inducida, la matriz de  $f$  en estas bases toma la forma

$$J_f = \begin{pmatrix} N_1 & & & E_1 & & & \\ & N_2 & & & E_2 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & N_r & & & E_r & 0 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

con  $N_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{k_\ell}(\mathbb{C})$  para  $1 \leq \ell \leq r$

$E_\ell = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^t \in M_{k_\ell \times 1}(\mathbb{C})$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

Construimos una base de Brunovsky de la manera siguiente:

Tomemos secciones

$$\sigma'_{i+1} : X_{i+1} \cong X_i/W_i \rightarrow X_i$$

$$\sigma'_1 : X_1 \cong X/W \rightarrow X$$

de manera que

$$X_i = W_i \oplus \sigma'_{i+1} X_{i+1}$$

llamemos

$$\sigma_i = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma'_i$$

entonces

$$X_i = W_i \oplus \sigma'_{i+1} X_{i+1} = W_i \oplus \sigma'_{i+1} (W_{i+1} \oplus \sigma'_{i+2} X_{i+2}) = \dots$$

por lo que

$$X = W \oplus \sigma_1(W_1) \oplus \sigma_2(W_2) \oplus \dots \oplus \sigma_s(W_s) \oplus \sigma_{s+1}(X_{s+1})$$

Y que, como sabemos, hay los dos casos:

i)  $X_{s+1} = W_{s+1}$

ii)  $W_{s+1} = \{0\}$

Claramente se tiene  $f : \sigma_i(W_i) \longrightarrow \pi \sigma_{i+1}(W_{i+1})$ .

Empecemos por determinar la base para el caso i).

En  $\sigma_{s+1}(W_{s+1}) = \sigma_{s+1}(\text{Ker } f_{s+1})$  tomemos una base

$$w_1^{s+1}, \dots, w_{r_{s+1}}^{s+1}$$

En  $\sigma_s(W_s)$  tomemos los vectores  $f^{-1}\pi w_1^{s+1}, \dots, f^{-1}\pi w_{r_{s+1}}^{s+1}$ , y completemos con una base de  $\sigma_s(\text{Ker } f_s)$  hasta obtener una base:

$$f^{-1}\pi w_1^{s+1}, \dots, f^{-1}\pi w_{r_{s+1}}^{s+1}, w_1^s, \dots, w_{r_s - r_{s-1}}^s$$

siguiendo este proceso, obtenemos

$$\begin{array}{cccccccc} w_1^{s+1}, & & \dots, & & w_{r_{s+1}}^{s+1} & & & \\ f^{-1}\pi w_1^{s+1}, & & \dots, & & f^{-1}\pi w_{r_{s+1}}^{s+1}, & w_1^s, & \dots, & w_{r_s - r_{s-1}}^s \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \dots \\ f^{-1}\pi \dots f^{-1}\pi w_1^{s+1}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f^{-1}\pi w_{r_2 - r_3}^2 & w_1^1 \dots w_{r_1 - r_2}^1 \\ f^{-1}\pi f^{-1}\pi \dots f^{-1}\pi w_1^{s+1}, & \dots f^{-1}\pi w_{r_1 - r_2}^1 & w_1 \dots w_{r - r_1} \end{array}$$

en que cada fila es una base de los espacios  $\sigma_{s+1}(W_{s+1}), \sigma_s(W_s), \dots, \sigma_1(W_1), W$ , respectivamente.

Finalmente reordenamos la base de la siguiente manera: tomamos por columnas los elementos de

$$\begin{array}{cccccccc}
 w_1^{s+1}, & \dots, & w_{r_{s+1}}^{s+1} & & & & & \\
 f^{-1}\pi w_1^{s+1}, & \dots, & f^{-1}\pi w_{r_{s+1}}^{s+1}, & w_1^s, & \dots, & w_{r_s-r_{s-1}}^s & & \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \dots \\
 f^{-1}\pi \dots f^{-1}\pi w_1^{s+1}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f^{-1}\pi w_{r_2-r_3}^2 w_1^1 \dots w_{r_1-r_2}^1
 \end{array}$$

y a continuación la base tomada de  $W$

$$f^{-1}\pi f^{-1}\pi \dots f^{-1}\pi w_1^{s+1}, \dots, \dots, \dots, \dots, f^{-1}\pi w_{r_1-r_2}^1, w_1, \dots, w_{r-r_1}$$

Es inmediato que, si tomamos esta base en  $X$  y en  $X/W$  la proyección de los  $n - (r_1 + \dots + r_{s+1})$ -primeros vectores de la base hallada, la matriz de la aplicación  $f : X \rightarrow X/W$  es la deseada.

Con respecto al caso ii), construimos una base de

$$W \oplus \sigma_1(W_1) \oplus \dots \oplus \sigma_s(W_s)$$

de forma análoga al caso anterior. En  $\sigma_{s+1}(X_{s+1})$  tomamos una base  $v_1, \dots, v_{r_s+1}$ , que colocaremos justo antes de la base de  $W$ . Esta base es tal que su proyección sobre  $X_{s+1}$  es una base de Jordan para el endomorfismo  $f_{s+1}$ .

(I.4.2) Una matriz como la dada en la proposición recibe el nombre de *forma reducida de Brunovsky* de  $f$ .

En general diremos que una matriz es de Brunovsky si es de la forma anterior.

Nótese que identificamos las matrices de Brunovsky difiriendo en permutaciones de los bloques de Jordan.

(I.4.3) De (I.3.7) se sigue inmediatamente:

TEOREMA (CLASIFICACIÓN).

Sea  $f : X \rightarrow X/W$  y  $f' : X' \rightarrow X'/Y'$ , una condición necesaria y suficiente para que  $f$  sea equivalente a  $f'$  es que coincidan sus formas reducidas de Brunovsky.

### (I.5) Cálculo de los invariantes.

(I.5.0) Damos en este apartado métodos de cálculo de los invariantes de una aplicación  $f : X \rightarrow X/W$  a partir de su matriz  $(A, B)$  en una base cualquiera de  $X$  adaptada a  $W$ . Omitimos las demostraciones, puesto que, como en los apartados anteriores, basta reducirse por dualidad a los resultados en [14].

(I.5.1) Supongamos  $\dim X = n + m$ ,  $\dim W = m$ . En una base cualquiera de  $X$  adaptada a  $W$ , y tomando en  $X/W$  la base inducida, la matriz de una aplicación  $f : X \rightarrow X/W$  será de la forma  $(A \ B)$  con  $A \in M_n(\mathbb{C})$  y  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$  con  $B$  matriz de  $f|_W$  en las bases correspondientes.

(I.5.2) Los  $r$ -números pueden calcularse como sigue

PROPOSICIÓN.

En las condiciones de (I.4.1), si  $\rho_k = \text{rang}(B, AB, \dots, A^{k-1}B)$ , se tiene que

$$r_{k-1} = \rho_k - \rho_{k-1}.$$

(I.5.3) Nótese que  $s$  es el entero para el cual la cadena de  $\rho_k$ -números estabiliza. Si  $\rho_s = n$ , se dice que  $f$  es completamente controlable.

(I.5.4) Pasemos a calcular ahora los invariantes de Segre de  $f$ , a partir de la matriz  $(A \ B)$ . Veamos primero los valores propios.

PROPOSICIÓN.

Sea  $f : X \rightarrow X/W$  y  $(A \ B)$  su matriz en una base adaptada a  $W$ . Se tiene que,  $\lambda \in \mathbb{C}$  es una valor propio de  $f$  si y sólo si, existe un vector  $v \in \mathbb{C}^n$  tal que

$$\left. \begin{array}{l} A^t v = 0 \\ B^t v = 0 \end{array} \right\}$$

(I.5.5) COROLARIO.

Sea  $f : X \rightarrow X/W$  y  $(A \ B)$  su matriz en una base adaptada a  $W$ .

- i) Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es una valor propio de  $f$ , entonces  $\lambda$  es valor propio de  $A$ . Esto es  $\text{rang}(A - \lambda I) < n$ .
- ii)  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un valor propio de  $f$  si y sólo si

$$\text{rang}(A - \lambda I, B) < n.$$

(I.5.6) Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un valor propio de  $f$  (esto es, de  $f_{s+1}$ ), su característica de Segre es la partición conjugada de  $[n - \nu_1, \nu_2 - \nu_1, \dots]$ , siendo

$$\nu_k = \dim \text{Ker}(f_{s+1} - \lambda I_n)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Veamos como  $\nu_k$  puede calcularse a partir de la matriz  $(A, B)$  de  $f$  en cualquier base adaptada a  $W$ :

PROPOSICIÓN.

Sea  $f : X \rightarrow X/W$  y  $(A \ B)$  su matriz en una base de  $X$  cualquiera adaptada a  $W$ . Entonces, si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un valor propio de  $f$  los enteros  $\nu_k$  anteriores vienen dados por:

$$\nu_k = n - \text{rang}(B, AB, \dots, A^{s-1}B, (A - \lambda I_n)^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

## II. Clasificación de parejas de matrices respecto a la semejanza por bloques.

(II.0) Hemos visto que la matriz de una aplicación lineal  $f : X \rightarrow X/W$ , en una base adaptada a  $W$  es una matriz  $(A \ B)$ . Ello permite trasladar el estudio de tales aplicaciones realizado en el apartado anterior, al de las parejas  $(A, B)$  respecto a la relación de equivalencia *semejanza por bloques*.

### (II.1) Semejanza por bloques.

(II.1.1) Obsérvese que los automorfismos de  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$  que aplican  $\{0\} \times \mathbf{C}^m$  en  $\{0\} \times \mathbf{C}^m$  vienen definidos por matrices inversibles de la forma

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

donde  $P \in GL(n, \mathbf{C})$ ,  $Q \in GL(m, \mathbf{C})$  y  $R \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ .

El conjunto de matrices de esta forma tiene estructura de grupo multiplicativo, y lo denotaremos por  $\mathcal{G}$ .

(II.1.2) Recordemos la definición de semejanza por bloques entre parejas de matrices:

DEFINICIÓN:

Sean  $A, A' \in M_n(\mathbf{C})$  y  $B, B' \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ . Se dice que la pareja de matrices  $(A, B)$  es *semejante por bloques* a la pareja de matrices  $(A', B')$  si existen matrices  $P \in GL(n, \mathbf{C})$ ,  $Q \in GL(m, \mathbf{C})$  y  $R \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$  tales que

$$(A' \ B') = P^{-1} (A \ B) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

(II.1.3) De la definición anterior se deduce inmediatamente que  $(A, B)$  es semejante por bloques a  $(A', B')$ , si y sólo si existen  $P \in GL(n, \mathbf{C})$  y  $Q \in GL(m, \mathbf{C})$  y  $F \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$  tales que

(i)  $A' = P^{-1}(A + BF)P$

$$(ii) B' = P^{-1}BQ.$$

De hecho  $F = RP^{-1}$ .

(II.1.4) El punto clave para poder transferir los resultados del apartado anterior es la siguiente

PROPOSICIÓN.

Sean  $(A \ B)$  y  $(A' \ B')$  las matrices de  $f : X \rightarrow X/W$  y  $f' : X' \rightarrow X'/W'$  en bases cualesquiera de  $X$  y  $X'$  adaptadas a  $W$  y  $W'$ , respectivamente, considerando en los espacios cocientes las bases inducidas. Entonces son equivalentes

$$i) f \sim f'$$

ii)  $(A \ B)$  y  $(A' \ B')$  son semejantes por bloques

DEMOSTRACIÓN:

Basta tener en cuenta que la matriz en bases como las consideradas de un isomorfismo  $\varphi \in H$  (I.1.1) es de  $\mathcal{G}$  (II.1.1).

Por lo que hablaremos indistintamente de parejas de matrices  $(A, B)$  y de matriz  $(A \ B)$  de  $f : X \rightarrow X/W$  en bases adaptadas a  $W$ .

## (II.2) Invariantes de la semejanza por bloques.

(II.2.1) Los resultados de (I.1.1) sugieren la siguiente

DEFINICIÓN:

Sea  $(A \ B)$  con  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  y  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$

i) Para  $k \geq 1$  denotemos

$$\rho_k = \text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{k-1}B)$$

ii) Sea  $s$  el menor entero tal que  $\rho_{s+1} = \rho_s$ .

iii) definimos los  $r$ -números de  $(A, B)$   $r_1, \dots, r_s$ , mediante

$$r_0 = \rho_0 = \text{rang } B \equiv r$$

$$r_k = \rho_{k+1} - \rho_k \quad \text{para } 0 \leq k \leq s-1$$

iv) Sea  $(k_1, \dots, k_r)$  la partición conjugada de  $(r_1, \dots, r_s)$ . Entonces los enteros  $k_1, \dots, k_r$  son los llamados *índices de Kronecker* de  $(A, B)$ .

(II.2.2) Obviamente  $k_1 + \dots + k_r = r_0 + \dots + r_s = \rho_s$ .

(II.2.3) Obsérvese que  $(A, B)$  es completamente controlable si y sólo si  $\rho_s = n$ .

(II.2.4) Asimismo, (I.5.5) y (I.5.6) sugieren la siguiente:

DEFINICIÓN:

Sea  $(A, B)$  con  $A \in M_n(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ .

i) llamaremos *valores propios* de  $(A, B)$  a los elementos  $\lambda \in \mathbf{C}$  tales que

$$\text{rang}(A - \lambda I_n \quad B) < n.$$

ii) Para cada uno de ellos, llamaremos su *característica de Segre* a la partición conjugada de  $(n - \nu_1, \nu_1 - \nu_2, \dots)$ , donde

$$\nu_\ell = \text{rang}(B \quad AB \quad \dots \quad A^{s-1}B \quad (A - \lambda I_n)^\ell).$$

**(II.3) Forma reducida de Brunovsky. Teoremas de clasificación.**

(II.3.1) Según (I.4.1), se tiene:

PROPOSICIÓN.

Sea  $(A, B)$  con  $A \in M_n(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ . Sea  $[k_1, \dots, k_r]$  los índices de Kronecker de la matriz  $(A, B)$  y  $J$  una matriz de Jordan con valores propios y ca-

racterística de Segre correspondientes los determinados en (II.2.4). Entonces  $(A, B)$  es semejante por bloques a la matriz de Brunovsky determinada por estos índices de Kronecker y esta matriz de Jordan, y que notaremos de la forma

$$\left( \left( \begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & J \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} E & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right)$$

siendo  $N$  una matriz diagonal por bloques  $\begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix}$  y cada  $N_\ell, 1 \leq \ell \leq r$ ,

como en (I.4.1). La matriz  $E$  también es una matriz diagonal por bloques  $\begin{pmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_r \end{pmatrix}$  y cada  $E_\ell, 1 \leq \ell \leq r$  como (I.4.1).

(II.3.2) A dicha matriz de Brunovsky la llamaremos *matriz canónica o forma reducida de Brunovsky* de  $(A, B)$ . Obviamente es única salvo permutaciones en los bloques de  $J$ .

(II.3.3) De (I.4.3) se sigue:

TEOREMA.

Las parejas de matrices  $(A, B)$  y  $(A', B')$  con  $A, A' \in M_n(\mathbf{C})$  y  $B, B' \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , son semejantes por bloques si y sólo si, tienen la misma forma reducida canónica de Brunovsky.

(II.3.4) Igualmente, de (I.3.6) se deduce:

TEOREMA.

Sea  $(A \ B)$  con  $A \in M_n(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ . Una familia completa de invariantes por la semejanza por bloques es

- i) la partición  $(r_0, r_1, \dots)$  o equivalentemente  $(k_1, \dots, k_r)$ .
- ii) los invariantes de semejanza. Esto es, sus valores propios, y las respectivas características de Segre.



## Capítulo 1

### Forma canónica local de una familia de parejas de matrices

Ya hemos señalado en la introducción que una herramienta fundamental para el estudio local de familias de parejas de matrices es disponer de una “forma canónica local” de dichas familias.

La familia formada por las parejas de matrices reducidas de Brunovsky de la familia dada no cumple este objetivo puesto que la reducción de una pareja de matrices a su forma reducida de Brunovsky no es una operación estable. Esto es, una pequeña variación en los coeficientes de las matrices puede cambiar notablemente la forma de la reducida de Brunovsky. Así por ejemplo: sea

$$(A, B) = \left( \left( \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

pareja de matrices totalmente incontrolable.

Deformemos ligeramente, la pareja de la manera

$$(A, B) = \left( \left( \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon \end{array} \right) \right)$$

con  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como queramos. La forma reducida de Brunovsky de esta nueva pareja de matrices es

$$(A, B) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

y observamos que es una pareja de matrices completamente controlable.

En general, la parte no controlable de una pareja de matrices, puede ser evitada por pequeñas deformaciones de ésta. En definitiva, la familia de reducidas de Brunovsky, así como la transformación que pasa de la familia dada a su forma reducida, presentan, en general, discontinuidades.

Se plantea pues, el problema de saber a que forma simple se puede reducir una familia diferenciable de parejas de matrices por transformaciones que dependan también diferenciablemente de los parámetros. Las llamadas “deformaciones versales” proporcionan una solución satisfactoria, y constituyen el objeto de este capítulo.

Dedicamos el apartado (I) a presentar, aplicadas a nuestro caso, las técnicas de Arnold [1], [2] para la obtención de deformaciones versales como variedades transversas a la clase de equivalencia. Empezamos haciendo en (I.1) un breve resumen sobre la noción de deformación versal (I.1.3), concretándola en el caso que nos ocupa (I.1.4). En (I.2) se interpretan las clases de equivalencia por la semejanza por bloques como órbitas bajo la acción de un grupo de Lie (I.2.4), a partir de la cual se obtiene una expresión explícita del espacio tangente a las mismas (I.2.7) que vamos a necesitar posteriormente. Finalmente, en (I.3) abordamos la equivalencia entre versalidad y *transversalidad*, dada por Arnold [1], para el caso de matrices cuadradas y la relación de equivalencia conjugación, y que después Tannenbaum [43], demuestra de forma más general, para grupos de Lie que actúan sobre variedades diferenciables. En (I.3.3) presentamos una demostración en el caso particular que nos ocupa.

En el apartado (II) se obtiene una primera deformación miniversal explícita, como

ortogonal a la órbita (y por tanto, minitransversal). En (II.1) se plantean las ecuaciones (II.1.4) para un cierto producto escalar al efecto (II.1.2). La resolución de las mismas se aborda en (II.2), si bien los cálculos detallados, tras sucesivas descomposiciones por bloques (II.2.3,4), se remiten al anexo; las soluciones así obtenidas (II.2.5), permiten explicitar la enunciada deformación miniversal “ortogonal” (II.2.7). Como una primera aplicación, en (II.3) se computa la dimensión de la deformación obtenida (II.3.4), y por tanto la de la órbita y la del estabilizador (II.3.1) de una pareja de matrices.

En el apartado (III) se obtiene una segunda deformación miniversal (III.3), que denominamos “minimal” en el sentido precisado en (III.1). La mayor sencillez de esta segunda deformación miniversal, facilita las aplicaciones a las perturbaciones locales contenidas en (IV). Así, en (IV.1) se caracterizan las parejas de matrices estructuralmente estables (IV.1.3). En (IV.2) se examina el tipo de modificación que aparece en la forma de Brunovsky según se perturben unos u otros invariantes. Y en (IV.3) se detallan algunos ejemplos significativos.

En el apartado (V), las mismas técnicas son aplicadas al caso de cuaternas de matrices, como muestra de su generalidad. En (V.1) se presenta la relación de equivalencia considerada, tanto a través de transformaciones elementales (V.1.1), como mediante la acción de un grupo de Lie (V.1.5), con lo que nuevamente las clases de equivalencia se identifican como órbitas (V.1.6) y podemos especificar su espacio tangente (V.1.7). En (V.2), para un producto escalar natural en el espacio de cuaternas de matrices (V.2.3), se obtiene, las ecuaciones de la deformación miniversal “ortogonal” de una tal cuaterna (V.2.5), desglosándose en sistemas elementales según los bloques de su forma reducida (V.2.1). Finalmente, en (V.3) se aplican dichos resultados a la determinación de las cuaternas estructuralmente estables (V.4.3). así como las “estructuralmente estables respecto a los invariantes discretos” (V.4.4).

En este capítulo, cuando hablamos de funciones, variedades,..., diferenciables nos

referimos a funciones, variedades,... de clase  $C^k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ .

## I. Forma canónica diferenciable local y deformaciones versales.

### (I.1) Deformaciones versales.

(I.1.1) Designemos por  $\mathcal{M}_{nm}$  el conjunto de parejas de matrices  $M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$  y sea  $(A, B)$  un elemento de dicho conjunto. Consideramos una “familia de parejas de matrices”, es decir una pareja de matrices dependiendo de parámetros que para un valor prefijado de éstos, tenemos el elemento  $(A, B)$  objeto de estudio. Si estos parámetros varían ligeramente del valor prefijado se habla entonces de *deformaciones*.

DEFINICIÓN:

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  y  $\Lambda$  un entorno del origen en  $\mathbf{C}^\ell$ . Una *deformación* de  $(A, B)$  es una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned}\varphi : \Lambda &\longrightarrow \mathcal{M}_{nm} \\ \lambda &\longrightarrow (A(\lambda), B(\lambda))\end{aligned}$$

tal que  $\varphi(0) = (A, B)$ .

Al conjunto  $\Lambda$  lo llamaremos *base* de la deformación  $\varphi$  y si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \Lambda$ , diremos que cada  $\lambda_i$  es un *parámetro* de la deformación.

Llamaremos *familia de deformaciones* de  $(A, B)$ , al conjunto imagen por  $\varphi$  de  $\Lambda$ :

$$\{(A(\lambda), B(\lambda))\}_{\lambda \in \Lambda}$$

(I.1.2) Sea  $\Gamma$  un entorno del origen en  $\mathbf{C}^k$ ,  $\varphi$  una deformación de  $(A, B)$  como en (I.1.1) y  $\theta : \Gamma \longrightarrow \Lambda$  una aplicación diferenciable tal que  $\theta(0) = 0$ .

DEFINICIÓN:

Llamaremos *deformación inducida* de  $\varphi$  por  $\theta$ , a la aplicación

$$\theta^*\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

definida por  $\theta^*\varphi = \varphi \circ \theta$ , es decir,  $(\theta^*\varphi)(\mu) = \varphi(\theta(\mu))$ ,  $\mu \in \Gamma$

y al conjunto  $\{(A(\theta(\mu)), B(\theta(\mu)))\}_{\mu \in \Gamma}$  lo llamaremos *familia de deformaciones* de  $(A, B)$  inducida de  $\{(A(\lambda), B(\lambda))\}_{\lambda \in \Lambda}$  por  $\theta$ .

Del mismo modo, podemos hablar de deformaciones de los elementos del grupo  $\mathcal{G}$  definido en cap 0, (II.1.1): llamaremos *deformación* de  $\begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$  a una aplicación diferenciable de un entorno del origen  $\Lambda \subset \mathbf{C}^r$  en  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \varphi : \Lambda &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \mu &\longrightarrow \begin{pmatrix} p(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Llamaremos *familia de deformaciones* de  $\begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$  al conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix} \right\}$$

(I.1.3) De entre todas las deformaciones nos interesan aquellas “distinguidas”, en el sentido de que el estudio de cualquier otra deformación se pueda reducir al de una de aquellas. De forma precisa, si cualquier otra es (globalmente) equivalente a una inducida de la “distinguida”. Este tipo de deformaciones reciben el nombre de *versales*.

DEFINICIÓN:

Una deformación de  $(A, B)$ ,  $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$ , se dice que es *versal* (en 0), si para cada deformación de  $(A, B)$ ,  $\psi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$ , existe un conjunto abierto  $\Gamma' \subset \Gamma$  con  $0 \in \Gamma'$ , una aplicación diferenciable  $\theta : \Gamma \longrightarrow \Lambda$  con  $\theta(0) = 0$ , y una deformación de

$I \in \mathcal{G}$ ,  $\gamma : \Gamma' \longrightarrow \mathcal{G}$ ,  $\gamma(0) = I \in \mathcal{G}$ ,  $\gamma(\mu) = \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix}$  tal que para todo  $\mu \in \Gamma'$   $\psi(\mu)$  es equivalente por bloques, a la inducida de  $\varphi$  por  $\theta$ ,  $\varphi(\theta(\mu))$ , es decir, si

$$(A(\mu), B(\mu)) = P^{-1}(\mu)(A(\theta(\mu)), B(\theta(\mu))) \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix}, \quad \mu \in \Gamma'$$

Y se dice *miniversal* si tiene el mínimo número de parámetros de entre todas las deformaciones versales de  $(A, B)$ .

(I.1.4) La noción de versalidad, más concretamente la miniversalidad, nos permitirá dar de forma precisa la noción de *forma canónica diferenciable local*.

DEFINICIÓN:

Dada una pareja de matrices  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ , una *forma canónica diferenciable local* es una familia miniversal de deformaciones de  $(A, B)$ .

(I.1.5) En los apartados (II) y (III), construiremos familias miniversales de Brunovsky por lo que tendremos descritas explícitamente formas canónicas diferenciables de una cualquiera, ya que tenemos el siguiente

TEOREMA.

Sea  $(A(\lambda), B(\lambda))$  una familia de parejas de matrices dependiendo diferenciablemente del parámetro  $\lambda \in \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^t$ . Fijado un  $\lambda_0 \in \mathcal{U}$ , consideremos la pareja de matrices  $(A(\lambda_0), B(\lambda_0))$  y sea  $(A_0, B_0)$  su forma reducida de Brunovsky. Entonces, existe una familia diferenciable de matrices  $\begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 \\ R(\lambda) & Q(\lambda) \end{pmatrix}$ , tal que

$$(P(\lambda))^{-1}(A(\lambda), B(\lambda)) \begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 \\ R(\lambda) & Q(\lambda) \end{pmatrix} = (A_0, B_0) + (\bar{A}(\theta(\lambda)), \bar{B}(\theta(\lambda)))$$

donde  $(\bar{A}(\lambda), \bar{B}(\lambda))$  es una deformación miniversal de  $(A_0, B_0)$  (por ejemplo, una de las dadas en (II) o (III)).

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato a partir de la definición de versalidad:

Sea  $\begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$  tal que

$$P^{-1}(A(\lambda_0), B(\lambda_0)) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = (A_0, B_0)$$

Consideremos ahora

$$P^{-1}(A(\lambda), B(\lambda)) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = (A_1(\lambda), B_1(\lambda)), \quad \text{para todo } \lambda \in \mathcal{U}$$

por lo que tenemos una deformación de la pareja de matrices  $(A_0, B_0)$ . Por la definición de versalidad (I.1.3), esta deformación viene inducida por una de versal  $(A_0, B_0) + (\bar{A}(\mu), \bar{B}(\mu))$  con  $(\bar{A}(\mu), \bar{B}(\mu))$  como las dadas en (II) o en (III).

$$\begin{aligned} (A_1(\lambda), B_1(\lambda)) &= (P_1(\lambda))^{-1}(A(\theta(\lambda)), B(\theta(\lambda))) \begin{pmatrix} P_1(\lambda) & 0 \\ R_1(\lambda) & Q_1(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (P_1(\lambda))^{-1}((A_0, B_0) + (\bar{A}(\theta(\lambda)), \bar{B}(\theta(\lambda)))) \begin{pmatrix} P_1(\lambda) & 0 \\ R_1(\lambda) & Q_1(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$(P_1(\lambda))^{-1}(A_1(\lambda), B_1(\lambda)) \begin{pmatrix} P_1(\lambda) & 0 \\ R_1(\lambda) & Q_1(\lambda) \end{pmatrix} = (A_0, B_0) + (\bar{A}(\theta(\lambda)), \bar{B}(\theta(\lambda)))$$

por lo que

$$\begin{aligned} (P_1(\lambda))^{-1} \left( P^{-1}(A(\lambda), B(\lambda)) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} P_1(\lambda) & 0 \\ R_1(\lambda) & Q_1(\lambda) \end{pmatrix} = \\ (A_0, B_0) + (\bar{A}(\theta(\lambda)), \bar{B}(\theta(\lambda))). \end{aligned}$$

Llamando  $P(\lambda) = P \cdot P_1(\lambda)$ ,  $Q(\lambda) = Q \cdot Q_1(\lambda)$ , y  $R(\lambda) = R \cdot P_1(\lambda) + Q \cdot R_1(\lambda)$ , tenemos el resultado.

$$(P(\lambda))^{-1}((A(\lambda), B(\lambda)) \begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 \\ R(\lambda) & Q(\lambda) \end{pmatrix}) = (A_0, B_0) + (\bar{A}(\theta(\lambda)), \bar{B}(\theta(\lambda))).$$

(I.2) La acción del grupo “realimentación de estados”.

(I.2.1) Recordemos que el grupo “realimentación de estados” es el subgrupo  $\mathcal{G}$  (definido en cap. 0 (II.1.1)), del grupo lineal  $Gl(n+m; \mathbf{C})$ , formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

donde  $P \in Gl(n, \mathbf{C})$ ,  $Q \in Gl(m, \mathbf{C})$  y  $R \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ .

Nótese que  $\mathcal{G}$  es un subconjunto abierto de  $M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_{m \times n}(\mathbf{C})$ , por lo que  $\mathcal{G}$  es una variedad compleja, de hecho un grupo de Lie.

(I.2.2) Vamos a considerar la acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{M}_{nm}$

$$\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{M}_{nm} \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

definida por

$$\alpha \left( \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}, (A, B) \right) = P^{-1}(A, B) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

(I.2.3) Si fijamos el par  $(A, B)$ , designamos por  $\alpha_{(A,B)}$  la aplicación

$$\alpha_{(A,B)} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

tal que

$$\alpha_{(A,B)} \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = \alpha \left( \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}, (A, B) \right).$$

Claramente las aplicaciones  $\alpha$  y  $\alpha_{(A,B)}$  son diferenciables. Además, se tiene que tanto  $\alpha$  como  $\alpha_{(A,B)}$  son aplicaciones racionales.

(I.2.4) La acción definida por  $\alpha$  permite ver las clases de equivalencia por la semejanza por bloques definida en cap. 0, (II.1.2), como órbitas por la acción de un grupo de Lie:

$$(A, B) \sim (A', B') \text{ si y sólo si existe } g \in \mathcal{G} \text{ tal que } \alpha_{(A,B)}(g) = (A', B'),$$

Notaremos por  $\mathcal{O}(A, B)$ , a las órbitas  $\alpha_{(A,B)}(\mathcal{G})$ ,

(I.2.5) El resultado que damos a continuación es general, válido para grupos algebraicos que actúan sobre una variedad y conocido como teorema de la órbita cerrada, (ver por ejemplo, [43],[28]). Damos a continuación una demostración para nuestro caso particular.

PROPOSICIÓN.

Cada órbita  $\mathcal{O}(A, B)$  es una subvariedad compleja de  $\mathcal{M}_{nm}$ , localmente cerrada cuya frontera es unión de órbitas de dimensión estrictamente menor.

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que  $\alpha_{(A,B)}$  es una aplicación racional y  $\mathcal{G}$  es obviamente un conjunto constructible, el teorema de Chevalley (ver por ejemplo [28] (4.4)) asegura que el conjunto  $\alpha_{(A,B)}(\mathcal{G}) = \mathcal{O}(A, B)$  es también constructible. Por lo tanto  $\mathcal{O}(A, B)$  tiene un punto no singular y teniendo en cuenta que la acción es transitiva sobre las órbitas, esto es: dados dos puntos de la órbita existe un difeomorfismo de  $\mathcal{M}_{nm}$  que aplica un punto sobre el otro, se sigue que cada punto de la órbita es no singular, por lo tanto  $\mathcal{O}(A, B)$  es una variedad compleja.

Ahora bien, la acción  $\alpha$  deja estable  $\overline{\mathcal{O}(A, B)}$ , ya que:

Si  $(C, D) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n, B_n)$ , con  $(A_n, B_n) \in \mathcal{O}(A, B)$ , tenemos que, para todo  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\alpha_{(C,D)}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{(A_n, B_n)}(g)$ , y  $\alpha_{(A_n, B_n)}(g) \in \mathcal{O}(A, B)$ . Por lo tanto  $\mathcal{O}(A, B)$  es abierto en  $\overline{\mathcal{O}(A, B)}$ , así pues  $\overline{\mathcal{O}(A, B)} - \mathcal{O}(A, B)$  es cerrado y de dimensión estrictamente menor que  $\mathcal{O}(A, B)$ .

Puesto que  $\overline{\mathcal{O}(A, B)}$  es estable por la acción de  $\alpha$ , ésta es unión de órbitas.

(I.2.6) Denotamos por  $\mathcal{E}st(A, B)$  al estabilizador de  $(A, B)$  por la acción de  $\mathcal{G}$ ; es decir

$$\mathcal{E}st(A, B) = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{G}; \alpha_{(A,B)} \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = (A, B) \right\}$$

$\mathcal{E}st(A, B)$  es un subgrupo cerrado de  $\mathcal{G}$  y la variedad homogénea  $\mathcal{G}/\mathcal{E}st(A, B)$  es difeomorfa a la variedad  $\mathcal{O}(A, B)$  de manera que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}(A, B) &= \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{E}st(A, B) = \\ &= n^2 + m^2 + nm - \dim \mathcal{E}st(A, B) \end{aligned}$$

Es bien conocido (ver por ejemplo [28] (3.4.2)) que  $\mathcal{E}st(A, B)$  es una variedad compleja. En nuestro caso esto es obvio, ya que  $\mathcal{E}st(A, B)$  es la intersección del conjunto abierto  $\mathcal{G}$  con la variedad lineal de soluciones del sistema

$$(A, B)P = (A, B) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

(I.2.7) Sea  $I$  el elemento unidad de  $\mathcal{G}$ . Vamos ahora, a obtener de forma explícita la diferencial  $d\alpha_{(A, B), I}$ , de  $\alpha_{(A, B)}$  en el punto  $I$ .

Nótese que, puesto que  $\mathcal{G}$  es un subconjunto abierto de  $M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , éste es su espacio tangente  $T_I \mathcal{G}$ . Sus elementos los designaremos igualmente como ternas  $(P, Q, R)$ , siendo ahora  $P$  y  $Q$ , no necesariamente inversibles.

LEMA.

Sea  $\alpha_{(A, B)} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  la acción definida en (I.2.3). Entonces su diferencial  $d\alpha_{(A, B), I}$  en el punto identidad  $I \in \mathcal{G}$ , sobre un elemento cualquiera  $(P, Q, R) \in T_I \mathcal{G} = M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , viene dada por

$$d\alpha_{(A, B), I}(P, Q, R) = ([A, P] + BR, BQ - PB).$$

DEMOSTRACIÓN:

Calculamos  $\alpha_{(A, B)} \left( I + \varepsilon \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \right)$  donde  $\varepsilon \in \mathbf{C}$  es suficientemente pequeño.

$$\begin{aligned} \alpha_{(A, B)} \left( I + \varepsilon \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \right) &= \alpha_{(A, B)} \begin{pmatrix} I + \varepsilon P & 0 \\ \varepsilon R & I + \varepsilon Q \end{pmatrix} = \\ &= (I + \varepsilon P)^{-1} (A, B) \begin{pmatrix} I + \varepsilon P & 0 \\ \varepsilon R & I + \varepsilon Q \end{pmatrix} = \\ &= (I - \varepsilon P + \varepsilon^2 P^2 - \dots) (A, B) \begin{pmatrix} I + \varepsilon P & 0 \\ \varepsilon R & I + \varepsilon Q \end{pmatrix} = \\ &= (A, B) + \varepsilon([A, P] + BR, BQ - PB) + \varepsilon^2(\dots) + \dots \end{aligned}$$

Entonces la aproximación lineal es:

$$(A, B) + \varepsilon([A, P] + BR, BQ - PB)$$

y puesto que  $\alpha$  es diferenciable, se sigue el lema.

(I.2.8) COROLARIO.

- i)  $\text{Ker } d\alpha_{(A,B),I} \cap \mathcal{G} = \mathcal{E}st(A, B)$
- ii)  $\text{Im } d\alpha_{(A,B),I} = T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato a partir de (I.2.6), si bien también es un corolario del lema anterior, por ejemplo

$$\text{Ker } d\alpha_{(A,B)} = \{(P, Q, R) \in T_I\mathcal{G} \mid [A, P] + BR = 0, BQ - PB = 0\}$$

y esta condición es equivalente a

$$(A, B) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = P(A, B).$$

(I.3) Versalidad y transversalidad.

(I.3.1) Como ya hemos mencionado al inicio de este capítulo, la condición de versalidad admite una útil caracterización geométrica, en términos de transversalidad. Empezamos pues, recordando la noción de transversalidad.

DEFINICIÓN:

Sea  $N \subset M$  una subvariedad diferenciable de una variedad  $M$ . Consideremos una aplicación diferenciable  $\varphi : \Lambda \rightarrow M$ , de otra variedad  $\Lambda$  en  $M$ . Sea  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $\varphi(\lambda) \in N$ .

Se dice que la aplicación  $\varphi$  es *transversal* a  $N$  en  $\lambda$ , si el espacio tangente a  $M$ , en  $\varphi(\lambda)$  descompone de la manera:

$$T_{\varphi(\lambda)}M = \text{Im}d\varphi_\lambda + T_{\varphi(\lambda)}N$$

Y diremos que es *minitransversal* si dicha suma es directa.

(I.3.2) En esta situación, es posible obtener trivializaciones locales de la variedad.

En nuestro caso, mediante la transversalidad obtendremos trivializaciones locales a lo largo de las órbitas:

LEMA.

Sea  $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  una deformación de  $(A, B)$  minitransversal a la órbita  $\mathcal{O}(A, B)$  en  $0$ , y  $V \subset \mathcal{G}$  una subvariedad minitransversal a  $\mathcal{E}st(A, B)$  en  $I$ . Entonces la aplicación

$$\beta : \Lambda \times V \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

definida por

$$\beta \left( \lambda, \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \right) = P^{-1}(A(\lambda), B(\lambda)) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

es un difeomorfismo local en  $(0, I)$ .

DEMOSTRACIÓN:

El teorema de la función inversa nos dice que  $\beta$  es un difeomorfismo local en  $(0, I)$ , si y sólo si  $d\beta_{(0, I)}$  es un isomorfismo.

Puesto que  $\dim(V \times \Lambda) = n^2 + nm = \dim \mathcal{M}_{nm}$ , es suficiente ver que  $d\beta_{(0, I)}$  es exhaustiva. Ahora bien, por las condiciones impuestas a  $\varphi$ ,  $\Lambda$  and  $V$  y (I.2.6), tenemos

$$d\beta_{(0, I)}(T_0(\Lambda) \times T_I(V)) = d\beta_{(0, I)}T_0(\Lambda) + d\beta_{(0, I)}T_I(V)$$

cuya suma no es necesariamente directa.

$$d\beta_{(0, I)}T_0(\Lambda) = \text{Im}d\varphi_0$$

$$d\beta_{(0, I)}T_I(V) = \text{Im}d\alpha_I = T_{(A, B)}\mathcal{O}(A, B)$$

luego

$$d\beta_{(0,I)}(T_{(0,I)}(\Lambda \times V)) = \text{Im}d\varphi_0 + T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B)$$

y por la transversalidad tenemos

$$d\beta_{(0,I)}(\mathcal{M}_{nm}) = T_{(A,B)}(T_{(0,I)}(\Lambda \times V))$$

por lo que  $d\beta_{(0,I)}$  es efectivamente exhaustiva.

(I.3.3) Este lema permite caracterizar la versalidad a través de la transversalidad. De hecho, esta caracterización es válida en general, para variedades complejas sobre las que actúa un grupo de Lie, (ver, por ejemplo, [43], (V(1.2))). No obstante, incluimos una demostración de dicho teorema adaptada a nuestro caso, debido al uso que vamos a hacer del mismo.

PROPOSICIÓN.

- 1) Una deformación  $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$  de  $(A, B)$  es miniversal en 0 si y sólo si es minitransversal, en el origen, a la órbita  $\mathcal{O}(A, B)$  por la acción de  $\mathcal{G}$ .
- 2) Entonces,  $\varphi$  es de hecho, transversal a todas las órbitas de un entorno de  $(A, B)$ .

DEMOSTRACIÓN:

- 1) Supongamos que  $\varphi$  es versal en 0. Hemos de demostrar que se verifica

$$\text{Im}d\varphi_0 + T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{M}_{nm}$$

Tomemos  $(C, D) \in \mathcal{M}_{nm}$  y consideremos la deformación de  $(A, B)$

$$\psi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

definida por  $\psi(\mu) = (A, B) + \mu(C, D)$ .

Puesto que  $\varphi$  es versal, se tiene que

$$\psi(\mu) = P^{-1}(\mu)(A(\theta(\mu)), B(\theta(\mu))) \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix}$$

Calculemos  $d\psi_0$ ; para esto decomponemos  $\psi$  como sigue:

$$\mu \xrightarrow{(I, \theta)} (\mu, \Lambda) \xrightarrow{f} \mathcal{M}_{nm}$$

con

$$f(\mu, \lambda) = P(\mu)^{-1}(A(\lambda), B(\lambda)) \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$d\psi_0 = df_{(I, \theta)(0)} \cdot d(I, \theta)_0 = df_{(0,0)} \cdot d(I, \theta)_0$$

$$d(I, \theta)_0 = \begin{pmatrix} dI_0 \\ d\theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ d\psi_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\mu, 0) &= P(\mu)^{-1}(A, B) \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha_{(A,B)} \circ g)(\mu), \end{aligned}$$

siendo  $\gamma : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{G}$ , tal que  $\gamma(\mu) = \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix}$  con  $g(0) = I$ , y  $\alpha_{(A,B)}$  la aplicación dada en (I.1.3)

$$d(f(\mu, 0))_0 = d\alpha_I \circ d\gamma_0, \text{ y por (I.2.7) tenemos}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} = ([A, dP] + BdR, B \cdot dQ - dP \cdot B)$$

$$f(0, \lambda) = (A(\lambda), B(\lambda)) = f_2(\lambda) = \varphi(\lambda)$$

$$d\psi_0 = (d\alpha_I \circ d\gamma_0, d\varphi_0) \begin{pmatrix} I \\ d\theta_0 \end{pmatrix} = d\alpha_I \circ d\gamma_0 + d\varphi_0 \circ d\theta_0$$

$$\text{Im}d\psi_0 \subset \text{Im}d\alpha_I + \text{Im}d\varphi_0$$

Recíprocamente, sea  $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  una aplicación transversal a la órbita de  $(A, B)$ , tomemos  $V \subset \mathcal{G}$  una subvariedad minitransversa a  $\mathcal{E}st(A, B)$ . Por el lema (I.3.2),  $\mathcal{M}_{nm}$  es localmente difeomorfa en  $(A, B)$ , a  $\Lambda \times V$ . Entonces, si

$$\psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

es una deformación de  $(A, B)$ , tendremos que si  $\mu$  es suficientemente pequeño

$$\psi(\mu) = \beta \left( \theta(\mu), \begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix} \right)$$

donde  $\theta(\mu) = \pi_1 \beta^{-1} \psi(\mu)$  y  $\begin{pmatrix} P(\mu) & 0 \\ R(\mu) & Q(\mu) \end{pmatrix} = \pi_2 \beta^{-1} \psi(\mu)$ ,  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las proyecciones naturales sobre  $V$  y  $\Lambda$ , respectivamente.

Luego  $\psi(\mu)$ , es equivalente (por bloques), a la deformación inducida de  $\varphi$  por  $\theta$ , es decir,  $\varphi$  es versal.

2) Apliquemos nuevamente el lema (I.3.2). Puesto que  $\beta$  es un difeomorfismo local,  $\varphi$  es transversal a todas las órbitas que cortan al abierto para el cual  $\beta$  es difeomorfismo.

## II Primera deformación miniversal (ortogonal).

### (II.1) Deformación miniversal ortogonal

(II.1.1) De (I.3.3) se deriva la siguiente técnica para obtener deformaciones miniversales.

COROLARIO.

Supongamos que tenemos definido un producto escalar hermítico en  $\mathcal{M}_{nm}$ . Entonces y de acuerdo con la proposición (I.3.3), la aplicación

$$\varphi : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$$

definida por

$$\text{Im}\varphi = (A, B) + (T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp$$

es una deformación miniversal de  $(A, B)$  en 0.

(II.1.2) Consideremos en  $\mathcal{M}_{nm}$  el producto escalar hermítico definido de la manera

DEFINICIÓN:

Dados  $(A, B), (A', B') \in \mathcal{M}_{nm}$ ,

$$\langle (A, B), (A', B') \rangle = \text{tr}((A, B) \cdot (A', B')^*)$$

donde  $(A', B')^* = \begin{pmatrix} \overline{A'}^t \\ \overline{B'}^t \end{pmatrix}$  es la matriz adjunta de  $(A', B')$  y "tr" la traza.

(II.1.3) El siguiente lema nos proporciona una condición práctica, de obtención de  $(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp$ .

LEMA.

Consideremos en  $\mathcal{M}_{nm}$ , el producto hermítico dado en (II.1.2), y sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ . Se tiene:

$(A', B') \in (T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp$  si y sólo si

$$\left. \begin{aligned} [A, A'^*] + BB'^* &= 0 \\ A'^*B &= 0 \\ B'^*B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

DEMOSTRACIÓN:

$(A', B') \in (T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp$  si y sólo si para cada  $(P, Q, R) \in T_I\mathcal{G} = M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_{m \times n}(\mathbf{C})$

$$\langle d\alpha_{(A,B),I}(P, Q, R), (A', B') \rangle = 0$$

De (I.2.7) tenemos que, esta condición es equivalente a

$$\langle ([A, P] + BR, BQ - PB), (A', B') \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle ([A, P] + BR, BQ - PB), (A', B') \rangle = \text{tr} \left( ([P, A] - BR, PB - BQ) \begin{pmatrix} A'^* \\ B'^* \end{pmatrix} \right) = \\ &= \text{tr} \left( ([P, A] - BR)A'^* + (PB - BQ)B'^* \right) = \\ &= \text{tr} \left( (PA - AP - BR)A'^* + (PB - BQ)B'^* \right) = \\ &= \text{tr}(PAA'^*) - \text{tr}(APA'^*) - \text{tr}(BRA'^*) + \text{tr}(PBB'^*) - \text{tr}(BQB'^*) = \\ &= \text{tr}(AA'^*P) - \text{tr}(A'^*AP) - \text{tr}(A'^*BR) + \text{tr}(BB'^*P) - \text{tr}(B'^*BQ) = \\ &= \text{tr}([A, A'^*]P - A'^*BR + BB'^*P) + \text{tr}(-B'^*BQ) = \\ &= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} [A, A'^*] + BB'^* & -A'^*B \\ 0 & -B'^*B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

Para todo  $(P, Q, R) \in T_I\mathcal{G} = M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C})$ . O, equivalentemente, para todo  $\begin{pmatrix} P & S \\ R & Q \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbf{C})$  ya que  $S$  no interviene en el cálculo de la traza.

Y puesto que el producto escalar es definido positivo ha de ser

$$\begin{pmatrix} [A, A'^*] + BB'^* & -A'^*B \\ 0 & -B'^*B \end{pmatrix} = 0$$

(II.1.4) Según el corolario (II.1.3) y del lema (I.1.3) tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN.

Consideremos  $\mathcal{M}_{nm}$  con el producto escalar definido en (II.1.2) y sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ . Entonces, una deformación miniversal (ortogonal) de la pareja de matrices  $(A, B)$  viene dada por

$$(A, B) + \{(X^*, Y^*)\}$$

donde  $X \in M_n(\mathbf{C})$ ,  $Y \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$  recorren el conjunto de soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} [A, X] + BY &= 0 \\ XB &= 0 \\ YB &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**(II.2) Descripción de la deformación miniversal ortogonal.**

(II.2.1) Vamos a ver que, si  $(A, B)$  está en su forma reducida de Brunovsky es posible describir explícitamente la deformación miniversal de  $(A, B)$  que se ha obtenido en (I.1) y en particular, calcular el número de parámetros.

(II.2.2) Recordemos que, según hemos visto en el capítulo anterior (II.3.1),  $(A, B)$  de Brunovsky tiene la forma diagonal por bloques siguiente

$$A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde a su vez las matrices  $N, J$ , y  $E$  también son las matrices diagonales por bloques:

$$\text{a) } N = \text{diag}(N_1, \dots, N_r), \text{ con } N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{k_i}(\mathbf{C}) \quad 1 \leq i \leq r.$$

Y suponemos que  $k_1 \geq \dots \geq k_r$

$$\text{b) } J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s), \text{ con } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in M_{l_j}(\mathbf{C}), \quad 1 \leq j \leq s$$

$$c) E = \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_r \end{pmatrix}, \text{ con } E_i = (0, \dots, 0, 1)^t \in M_{k_i \times 1}(\mathbf{C}), 1 \leq i \leq r.$$

Designemos por  $p = k_1 + \dots + k_r$

(II.2.3) Con las mismas notaciones de (II.1.4), dividimos las matrices  $X$  e  $Y$  en bloques, correspondientes a los tamaños de los bloques de las matrices  $A$  y  $B$  respectivamente, (así la matriz  $X_1^1$  tiene el mismo tamaño que  $N$  y la matriz  $Y_1^{1t}$  tiene el mismo tamaño que  $E$ ).

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{pmatrix}$$

de manera que, el sistema de ecuaciones dado en el lema (II.1.3), se rompe en los sistemas de ecuaciones siguientes

$$\left. \begin{array}{l} [N, X_1^1] + EY_1^1 = 0 \\ X_1^1 E = 0 \\ Y_1^1 E = 0 \end{array} \right\} \text{ (I)} \quad \left. \begin{array}{l} JX_1^2 - X_1^2 N = 0 \\ X_1^2 E = 0 \end{array} \right\} \text{ (II)}$$

$$NX_2^1 - X_2^1 J + EY_2^1 = 0 \text{ (III)}, \quad Y_1^2 E = 0 \text{ (IV)}, \quad [J, X_2^2] = 0 \text{ (V)}.$$

Obsérvese que:

- a)  $Y_2^2$  es arbitraria
- b) El sistema (I) corresponde, según la definición (II.1.1) y la proposición (II.1.4), a la deformación miniversal ortogonal de la pareja de matrices  $(A, B) = (N, E) \in M_p(\mathbf{C}) \times M_{p \times r}(\mathbf{C})$ , que es completamente controlable y  $\text{rang } B = r$ ,
- c) El sistema (V), corresponde a la deformación miniversal ortogonal de la matriz cuadrada  $J \in M_{n-p}(\mathbf{C})$  respecto la relación de equivalencia conjugación, dada por Arnold [1], [2].

(II.2.4) Si procedemos ahora a una nueva descomposición en bloques de  $X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2, Y_1^1, Y_2^1, Y_1^2, Y_2^2$ , que se corresponda con los de  $N, J, E$ , los sistemas anteriores se reducen a sistemas del tipo

$$\left. \begin{array}{l} N_i X - X N_j + E_i Y = 0 \\ X E_j = 0 \\ Y E_j = 0 \end{array} \right\} (1) \quad \left. \begin{array}{l} J_i X - X N_j = 0 \\ X E_j = 0 \end{array} \right\} (2)$$

$$N_i X - X J_j + E_i Y = 0 \quad (3), \quad Y E_j = 0 \quad (4), \quad [J, X] = 0 \quad (5).$$

(II.2.5) El anexo contiene la resolución de los cuatro primeros sistemas, que resumimos en la siguiente

PROPOSICIÓN.

Sean  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$  los espacios de soluciones de los sistemas (1), ..., (4), respectivamente.

Entonces

i)  $(X, Y) \in \mathcal{S}_1$  si y sólo si

$\alpha)$  Si  $k_j \leq k_i + 1$ ,  $X = 0, Y = 0$ .

$\beta)$  Si  $k_j \geq k_i + 2$ ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & \dots & x_{k_j - k_i - 1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_1^1 & \dots & \dots & x_{k_j - k_i - 2}^1 & x_{k_j - k_i - 1}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_1^1 & \dots & \dots & \dots & x_{k_j - k_i - 1}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{k_i \times k_j}(\mathbf{C})$$

$$Y = (0 \dots 0 \overset{k_i+1}{x_1^1} \dots x_{k_j - k_i - 1}^1 0) \in M_{1 \times k_j}(\mathbf{C})$$

ii)  $X \in \mathcal{S}_2$  si y sólo si  $X = 0$

iii)  $(X, Y) \in \mathcal{S}_3$  si y sólo si los coeficientes de  $X$  y  $Y$  pueden obtenerse de  $x_1^1, \dots, x_l^1$

por medio del siguiente conjunto de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 = \lambda x_1^1 \\ x_2^2 = x_1^1 + \lambda x_2^1 \\ \dots \\ x_l^2 = x_{l-1}^1 + \lambda x_l^1 \end{array} \right\} \dots \left. \begin{array}{l} x_1^k = \lambda x_1^{k-1} \\ x_2^k = x_1^{k-1} + \lambda x_2^{k-1} \\ \dots \\ x_l^k = x_{l-1}^{k-1} + \lambda x_l^{k-1} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y_1^1 = \lambda x_1^k \\ y_2^1 = x_1^k + \lambda x_2^k \\ \dots \\ y_l^1 = x_{l-1}^k + \lambda x_l^k \end{array} \right\}$$

donde  $X = (x_s^r)$ ,  $Y = (y_s^1)$ ,  $1 \leq r \leq k$ ,  $1 \leq s \leq l$

Hemos escrito  $k$  y  $l$  en lugar de  $k_i$  and  $l_j$ . Obsérvese que los parámetros  $x_1^1, \dots, x_l^1$  son independientes.

iv)  $Y \in \mathcal{S}_4$  si y sólo si

$$Y = (y_1^1 \quad \dots \quad y_{k_j-1}^1 \quad 0).$$

(II.2.6) Por lo que respecta al sistema (5), observamos que es el que corresponde a la deformación miniversal (ortogonal), para el caso de las matrices cuadradas estudiadas por Arnold [1], [2] y resuelto por diversos autores, por ejemplo [17], [35].

(II.2.7) Combinando (II.1.4), (II.2.5) y (II.2.6), obtenemos la descripción buscada de la deformación miniversal ortogonal:

TEOREMA.

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ . Una deformación miniversal (ortogonal) de  $(A, B)$  viene dada por

$$(A, B) + \{(X^*, Y^*)\}$$

$$\text{con } X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ 0 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$X_1^1 = \begin{pmatrix} Z_1^1 & \dots & Z_1^r \\ \vdots & & \vdots \\ Z_r^1 & \dots & Z_r^r \end{pmatrix} \quad Y_1^1 = \begin{pmatrix} T_1^1 & \dots & T_1^r \\ \vdots & & \vdots \\ T_r^1 & \dots & T_r^r \end{pmatrix}$$

y cada  $(Z_j^i, T_j^i)$  como en (II.2.5), (i)

$$X_2^1 = \begin{pmatrix} Z_1^1 & \dots & Z_1^s \\ \vdots & & \vdots \\ Z_r^1 & \dots & Z_r^s \end{pmatrix} \quad Y_1^1 = \begin{pmatrix} T_1^1 & \dots & T_1^s \\ \vdots & & \vdots \\ T_r^1 & \dots & T_r^s \end{pmatrix}$$

y cada  $(Z_j^i, T_j^i)$  como en (II.2.5), (iii)

$$X_2^2 = \begin{pmatrix} Z_1^1 & \dots & Z_1^s \\ \vdots & & \vdots \\ Z_r^1 & \dots & Z_r^s \end{pmatrix}$$

y cada  $Z_j^i$  como [1], [2].

$$Y_1^2 = \begin{pmatrix} T_1^1 & \dots & T_1^{m-r} \\ \vdots & & \vdots \\ T_r^1 & \dots & T_r^{m-r} \end{pmatrix}$$

y cada  $T_j^i$  como en (II.2.5), (iv)

$Y_2^2$  es libre.

(II.2.8) EJEMPLO:

Sea  $(A, B)$  la pareja de matrices

$$A = \left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 1 & \\ & 0 \\ & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \right)$$

con  $n = 9$ ,  $m = 4$ ,  $r = 3$ ,  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1$ ,  $l_1 = 2$ .

De (II.2.5) se sigue que  $(A', B') \in (T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp$  si y sólo si es de la forma

$$A'^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_2^3 & 0 & b_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2^3 & b_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^8 & \bar{\lambda}a_1^8 & \bar{\lambda}^2 a_1^8 & \bar{\lambda}^3 a_1^8 & a_5^8 & \bar{\lambda}a_5^8 & a_7^8 & a_8^8 & 0 \\ a_1^9 & a_1^8 + \bar{\lambda}a_1^9 & 2\bar{\lambda}a_1^8 + \bar{\lambda}^2 a_1^9 & 3\bar{\lambda}^2 a_1^8 + \bar{\lambda}^3 a_1^9 & a_5^9 & a_5^8 + \bar{\lambda}a_5^9 & a_7^9 & a_8^9 & a_8^8 \end{pmatrix}$$

$$B'^* = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & b_4^1 & & \\ 0 & 0 & b_3^2 & b_4^2 & & \\ 0 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_4^5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline \bar{\lambda}^4 a_1^8 & \bar{\lambda}^2 a_5^8 & \bar{\lambda} a_7^8 & b_4^8 & & \\ 4\bar{\lambda}^3 a_1^8 + \bar{\lambda}^4 a_1^9 & 2\bar{\lambda} a_5^8 + \bar{\lambda}^2 a_5^9 & a_7^8 + \bar{\lambda} a_7^9 & b_4^9 & & \end{array} \right)$$

donde hemos colocado  $a_j^i$ , en lugar de  $\bar{a}_j^i$  ya que si  $a_j^i$  es un parámetro, también lo es  $\bar{a}_j^i$ .

(II.2.9) A partir de (II.2.7) es posible obtener explícitamente una base de  $(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A,B))^\perp$ : una tal base está formada por el conjunto de matrices  $(X^*, Y^*)$ , con  $(X, Y)$  verificando (II.2.7), obtenidas haciendo igual a 1 uno de los parámetros y cero todos los demás, para todos y cada uno de los parámetros de la solución general.

(II.2.10) Ilustremos esta construcción sobre el ejemplo de (II.2.8). Una base de  $(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A,B))^\perp$  está, entonces, dada por el conjunto de matrices obtenidas haciendo igual a 1, uno de los parámetros y 0 todos los demás. Así una base de  $(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A,B))^\perp$  está formada por:

$$(A_1, B_1) = \left( \left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{\lambda} & \bar{\lambda}^2 & \bar{\lambda}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\bar{\lambda} & 3\bar{\lambda}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 4\bar{\lambda}^3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right)$$









De hecho, en el apéndice se recoge un cálculo directo, sin necesidad de resolver explícitamente los sistemas, vectorializando el sistema de ecuaciones (II.1.4), y calculando su rango:

$$\left. \begin{aligned} (I_n \otimes A - A^t \otimes I_n)vec(X) + (I_n \otimes B)vec(Y) &= 0 \\ (B^t \otimes I_n)vec(X) &= 0 \\ (B^t \otimes I_m)vec(Y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Por otra parte, en [3], [4] Beitia, Gracia y de Hoyos, calculan la dimensión del espacio de soluciones del sistema de ecuaciones matricial

$$(A_1, B_1) \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} - X(A_2, B_2) = (0, 0)$$

que para el caso particular en que  $(A_1, B_1) = (A_2, B_2) = (A, B)$ , nos da la dimensión del espacio tangente al estabilizador de  $(A, B)$ .

Por lo que, utilizando la minitransversalidad

$$\begin{aligned} \dim T\mathcal{O}(A, B)^\perp &= n^2 + nm - \dim \mathcal{O}(A, B) \\ &= \dim \mathcal{E}st(A, B) - m^2 \end{aligned}$$

(II.3.2) Empecemos contando el número de coeficientes independientes en las matrices solución de los sistemas elementales (1), (2), (3), (4) y (5) dados en (II.2.4) y obtenemos el

COROLARIO.

*Con las mismas notaciones que en la proposición tenemos que*

- (i)  $\dim \mathcal{S}_1 = \max\{0, k_j - k_i - 1\}$
- (ii)  $\dim \mathcal{S}_2 = 0$
- (iii)  $\dim \mathcal{S}_3 = l_j$
- (iv)  $\dim \mathcal{S}_4 = k_j - 1$

(II.3.3) Volviendo a los sistemas (I),..., (V), de (II.2.3) y [1] tenemos

PROPOSICIÓN.

Sean ahora  $\mathcal{S}_I, \dots, \mathcal{S}_V$  los espacios de soluciones de los sistemas (I),..., (V) dados en (II.2.3), entonces

$$(i) \dim \mathcal{S}_I = \sum_{1 \leq i, j \leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\}$$

$$(ii) \dim \mathcal{S}_{II} = 0$$

$$(iii) \dim \mathcal{S}_{III} = r(n - p)$$

$$(iv) \dim \mathcal{S}_{IV} = (m - r)(p - r)$$

$$(v) \dim \mathcal{S}_V = \sum_{\lambda} (\sigma_1(\lambda) + 3\sigma_2(\lambda) + 5\sigma_3(\lambda) + \dots)$$

donde  $\sigma_1(\lambda) \geq \sigma_2(\lambda) \geq \sigma_3(\lambda) \geq \dots$  es la característica de Segre correspondiente al valor  $\lambda$  y  $\lambda$  recorre todo el conjunto de valores propios de  $J$ .

(II.3.4) De ahí, obtenemos inmediatamente la

PROPOSICIÓN.

La dimensión del espacio base de la deformación miniversal de  $(A, B)$  en 0 es

$$\begin{aligned} d = \dim(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp &= \sum_{1 \leq i, j \leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\} + r(n - p) + \\ &+ (m - r)(n - r) + \\ &+ \sum_{\lambda} (\sigma_1(\lambda) + 3\sigma_2(\lambda) + 5\sigma_3(\lambda) + \dots). \end{aligned}$$

(II.3.4) Así en el ejemplo (II.2.4), tenemos

$$\dim(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp = 17.$$

### III. Segunda deformación miniversal “minimal”.

(III.0) Vamos a obtener una nueva deformación miniversal de  $(A, B)$

$$(A, B) + \mathcal{S}$$

“minimal” en el sentido de que puede ser expresada en la forma

$$(A, B) + \sum_{i=1}^d \lambda_i (E^i, F^i)$$

donde  $(E^i, F^i)$  son parejas de matrices que forman parte de la base canónica de  $\mathcal{M}_{nm}$ .

Esto es, con todos sus coeficientes nulos excepto uno, de valor unidad.

Dicho de otro modo, puede ser expresado en la forma

$$(A, B) + (X, Y)$$

donde  $(X, Y)$  es una pareja de matrices de coeficientes variables, todos nulos excepto precisamente  $d$ , que constituyen los parámetros de la deformación.

(III.1) Una forma de obtener tales deformaciones “minimales” se recoge en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN.

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  y  $(A_0^i, B_0^i)$ ,  $1 \leq i \leq d$ ; la base de  $(T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B))^\perp$  obtenida de (II.2.9). Si  $(X, Y)$  es una pareja de matrices con  $d$  coeficientes variables (que notamos  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ ), y los demás nulos, y tal que

$$\text{tr} \left( (A^i, B^i) \begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix} \right) = \bar{\lambda}_i, \quad 1 \leq i \leq d$$

entonces  $(A, B) + (X, Y)$  es una deformación miniversal de  $(A, B)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos que  $(A, B) + \mathcal{S}$  es una deformación miniversal de  $(A, B)$  si y sólo si  $\mathcal{S}$  es un suplementario directo de  $T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B)$  en  $\mathcal{M}_{nm}$ . Por tanto, basta comprobar que

$$(X, Y) \notin T_{(A,B)}\mathcal{O}(A, B)$$

para todo  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  (no todos nulos).

Y ahora basta recordar igualmente que  $(C, D) \in T_{(A, B)}\mathcal{O}(A, B)$  si y sólo si

$$\text{tr}(A^i, B^i) \begin{pmatrix} C^* \\ D^* \end{pmatrix} = 0, \quad 1 \leq i \leq d.$$

(III.2) Parejas  $(X, Y)$  de este tipo, pueden obtenerse a partir de las de (II.2.7), evitando la repetición de los parámetros, esto es, escogiendo adecuadamente para cada parámetro un único lugar de la pareja de matrices donde se conserve, y eliminándolo de todos los demás lugares en que aparecía en la pareja de matrices original de (II.2.7).

Ilustrémoslo sobre el ejemplo (II.2.8)

Si consideramos la pareja  $(X, Y)$  con

$$X = \left( \begin{array}{cccc|cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_1^8 & 0 & 0 & 0 & x_5^8 & 0 & x_7^8 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^9 & 0 & 0 & 0 & x_5^9 & 0 & x_7^9 & 0 & x_8^9 & x_9^9 \end{array} \right),$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_4^1 \\ 0 & 0 & y_3^2 & y_4^2 \\ 0 & y_2^3 & y_3^3 & y_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4^8 \\ 0 & 0 & 0 & y_4^9 \end{pmatrix},$$

es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
\langle (A_1, B_1), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_1^8 & \langle (A_2, B_2), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_1^9 \\
\langle (A_3, B_3), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_5^8 & \langle (A_4, B_4), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_5^9 \\
\langle (A_5, B_5), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_7^8 & \langle (A_6, B_6), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_7^9 \\
\langle (A_7, B_7), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_8^8 & \langle (A_8, B_8), (X, Y) \rangle &= \bar{x}_8^9 \\
\langle (A_9, B_9), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_2^3 & \langle (A_{10}, B_{10}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_3^2 \\
\langle (A_{11}, B_{11}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_3^3 & \langle (A_{12}, B_{12}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_4^1 \\
\langle (A_{13}, B_{13}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_4^2 & \langle (A_{14}, B_{14}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_4^3 \\
\langle (A_{15}, B_{15}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_4^5 & \langle (A_{16}, B_{16}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_4^8 \\
\langle (A_{17}, B_{17}), (X, Y) \rangle &= \bar{y}_4^9
\end{aligned}$$

esto es, la pareja anterior, cumple la propiedad deseada.

(III.3) En general se tiene el siguiente

TEOREMA (DEFORMACIÓN MINIVERSAL “MINIMAL”).

Sea  $(A, B)$  una pareja de matrices, en su forma reducida de Brunovsky. Entonces, una deformación miniversal de  $(A, B)$  viene dada por  $(A, B) + S$ , donde  $S$  es la variedad lineal de  $\mathcal{M}_{nm}$  definida por las parejas  $(X, Y)$

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{pmatrix}$$

con

- (i)  $X_1^1 = 0, X_2^1 = 0$
- (ii) Todos los elementos de  $X_1^2$  son nulos excepto los indicados por los parámetros

$$x_1^{p+1}, \dots, x_1^n, x_{k_1+1}^{p+1}, \dots, x_{k_1+1}^n, \dots, x_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}^{p+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_{r-1}+1}^n.$$

- (iii)  $X_2^2$  es la forma canónica de Arnold [1]

(iv) Todos los elementos de  $Y_1^2$  son nulos excepto los indicados por los parámetros

$$y_2^{k_2+1}, \dots, y_2^{k_1-1}, y_3^{k_1+k_3+1}, \dots, y_r^{k_1+\dots+k_{r-2}+k_r+1}, \dots, y_r^{k_1+\dots+k_{r-1}-1}.$$

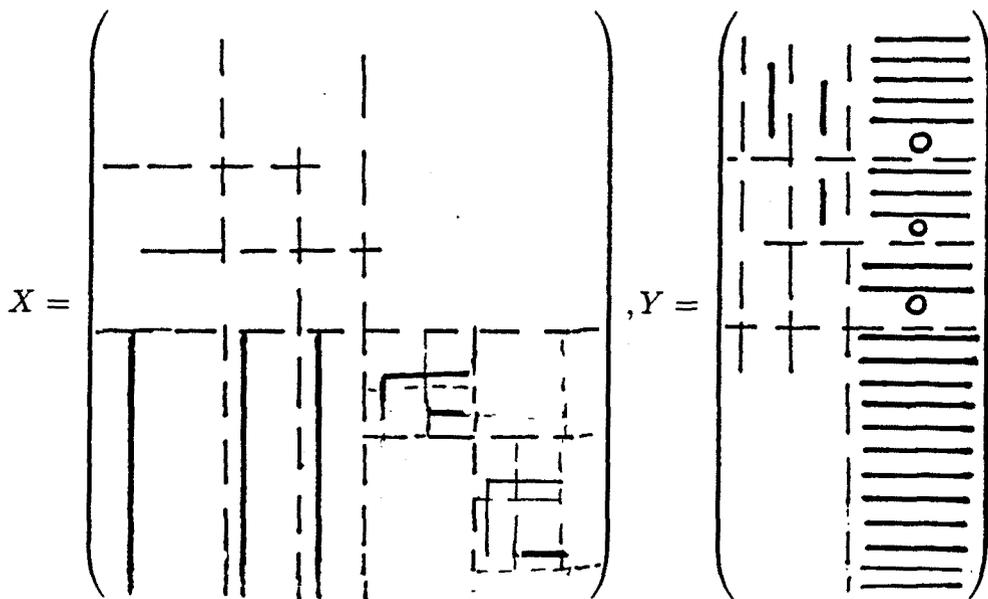
(v)  $Y_2^1$  es tal que

$$y_{r+1}^{k_1} = \dots = y_m^{k_1} = y_{r+1}^{k_1+k_2} = \dots = y_m^{k_1+k_2} = \dots = y_{r+1}^p = \dots = y_m^p = 0$$

(vi)  $Y_1^2 = 0$

(vii) Todos los parámetros de  $Y_2^2$  son arbitrarios.

(III.4) Un dibujo puede ayudar a representar esta deformación. En la figura que sigue cada segmento corresponde al conjunto de parámetros. Recuerdese que los segmentos verticales son cero si  $k_i \leq k_{i+1} + 1$ . Y todos los demás elementos son cero.



#### IV. Algunas aplicaciones a las perturbaciones locales.

(IV.0) Vamos a aplicar los métodos obtenidos para analizar las variaciones en la forma de Brunovsky de una pareja de matrices cuando es sometida a pequeñas perturbaciones. Caracterizamos en primer lugar las parejas cuyos invariantes no se ven afectados.

**(IV.1) Parejas de matrices (estructuralmente) estables.**

(IV.1.1) En general un punto de un espacio topológico se dice estable respecto a una relación de equivalencia si es un punto interior de su clase de equivalencia.

DEFINICIÓN: ([49])

Sea  $E$  un espacio topológico, en el que se tiene definida una relación de equivalencia. Se dice que un punto  $a \in E$  es estructuralmente estable con respecto a dicha relación, si existe un entorno de dicho punto formado por puntos equivalentes a él.

(IV.1.2) Si la relación de equivalencia viene dada por la acción de un grupo, un punto será estructuralmente estable si y sólo si su órbita es un conjunto abierto. Por tanto:

PROPOSICIÓN.

*Una pareja de matrices  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  es estructuralmente estable por la semejanza por bloques, si y sólo si su deformación miniversal es nula. O equivalentemente, si*

$$\dim \mathcal{O}(A, B) = n^2 + nm.$$

(IV.1.3) Por consiguiente,  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  será estructuralmente estable si y sólo si es controlable, rang  $B$  máximo y sus índices de controlabilidad son iguales o difieren en una unidad. Esto es:

COROLARIO. (Willems [49])

*Sean  $c$  y  $d$  enteros positivos, tales que  $n = mc + d$ . Entonces  $(A, B)$  es estructuralmente estable si y sólo si  $r = \min(n, m)$ ,  $k_1 = \dots = k_d = c + 1$ ,  $k_{d+1} = \dots = k_r = c$ .*

DEMOSTRACIÓN:

Si  $(A, B)$  es estructuralmente estable  $\dim \mathcal{S} = 0$ , por lo que, y según la proposición (II.3.3)

$$\text{i) } \dim \mathcal{S}_I = \sum_{1 \leq i, j \leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\} = 0$$

$$\text{ii) } \dim \mathcal{S}_{III} = r(n - p) = 0$$

$$\text{iii) } \dim \mathcal{S}_{IV} = (m - r)(p - r) = 0$$

$$\text{iv) } \dim \mathcal{S}_V = \sum_{\lambda} (\sigma_1(\lambda) + 3\sigma_2(\lambda) + 5\sigma_3(\lambda) + \dots) = 0$$

De (i), y teniendo en cuenta que  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$ , se deduce que si  $i > j$  es  $k_j = k_i$  o  $k_j = k_i + 1$ . Llamemos  $k_1 = c + 1$  y  $d$  el número de veces en que  $k_i = c + 1$ , por lo que tenemos

$$d + rc = p$$

Ahora bien,  $r \neq 0$  de lo contrario  $p = 0$  y  $n = \sum_i (\sigma_1(\lambda_i) + \sigma_2(\lambda_i) + \dots)$  con  $\lambda_i$  recorriendo todos los valores propios. En estas condiciones  $\dim \mathcal{S}_V \neq 0$ .

Al ser  $r \neq 0$  de (ii) se deduce que  $p = n$ . Y ya finalmente de (iii) se deduce que  $m = r$  en cuyo caso  $d + mc = n$ , o  $n = r$  en cuyo caso  $d + nc = n$  por lo que  $c = 0$  por lo tanto, también se tiene  $d + mc = n$ .

Recíprocamente, en estas condiciones y puesto que  $k_1 + \dots + k_r = p$  se tiene  $p = n$ ,  $r = \min(n, m)$ , por lo que  $\dim \mathcal{S}_{III} = \dim \mathcal{S}_{IV} = \dim \mathcal{S}_V = 0$ , además, puesto que de  $i < j$  es  $k_i = k_j$  o  $k_i = k_j + 1$  se deduce que  $k_i - k_i - 1 \leq 0$  para todo  $i, j$ , es decir  $\dim \mathcal{S}_I = 0$ .

## (IV.2) Variaciones en la forma de Brunovsky por perturbaciones locales.

(IV.2.1) Cuando la pareja de matrices no es estable, podemos analizar las variaciones en la forma de Brunovsky a través de las deformaciones miniversales antes obtenidas, ya que dichas deformaciones miniversales cortan (transversalmente) a todas las órbitas próximas a la de la pareja en cuestión.

En definitiva, bastará estudiar las modificaciones en las formas de Brunovsky al variar los parámetros de la deformación.

Detallémoslo, estudiando la influencia de los parámetros de  $(X, Y)$  en una tal variación, vamos a considerar separadamente la incidencia de los parámetros según sean ellos de  $X_1^2$ ,  $Y_1^1$ ,  $Y_2^1$  o  $Y_2^2$ , respectivamente.

(i) Si  $Y_2^1$  o  $Y_2^2$  son no nulos, es claro que

$$\text{rang}(B + Y) > r$$

por lo tanto el número de bloques nilpotentes crece.

(ii) Supongamos que  $Y_2^1 = 0$ ,  $Y_2^2 = 0$ ,  $Y_1^1 \neq 0$ . Esto significa que existe  $k_i$  tal que  $k_i \geq k_{i+1} + 2$ . Podemos suponer que

$$(A, B) + (X, Y) = \left( \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_i & Z \\ 0 & E_j \end{pmatrix} \right)$$

donde  $j = i + 1$  y  $Z = (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_{k_i - k_j - 1}, 0)^t$ . Entonces, si los índices de controlabilidad de la pareja son  $k'_i, k'_j$  es fácil ver que

$$k'_i - k'_j < k_i - k_j.$$

Es decir, si  $Y_1^1 \neq 0$  las diferencias  $k_i - k_{i+1}$  tienden a decrecer. En otras palabras, los índices de controlabilidad tienden a diferir como máximo de 1.

(iii) Supongamos que  $Y = 0$ ,  $X_1^2 \neq 0$ . Esto significa que existe parte no controlable en la pareja  $(A, B)$ . Suponemos pues que

$$(A, B) + (X, Y) = \left( \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ X_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Entonces, el índice de controlabilidad de esta nueva pareja es  $k'_i \geq k_i + 1$ . Esto es, si  $X_1^2 \neq 0$  el tamaño de los bloques de Jordan decrecen.

### (IV.3) Ejemplos de diagramas de bifurcaciones.

(IV.3.1) Como hemos visto en el apartado anterior, el conocimiento de la deformación versal de la pareja  $(A, B)$  nos permite investigar cuáles son las posibles formas reducidas de Brunovsky al perturbar  $(A, B)$ . Tales posibles formas quedan reflejadas geoméricamente en el “diagrama de bifurcaciones”. Esto es, en la partición que resulta de agrupar las parejas de matrices que tienen los mismos invariantes discretos, pudiendo diferir en los invariantes continuos.

Veamos ahora mediante algunos ejemplos como a partir de la deformación versal podemos explicitar localmente dichos diagramas de bifurcaciones.

(IV.3.2) La “partición de Brunovsky” del espacio  $\mathcal{M}_{nm}$  será objeto de estudio detallado en el capítulo III. Por el momento, nos basta señalar que es la que resulta de agrupar las parejas de matrices que tienen los mismos invariantes discretos, esto es, los mismos índices de controlabilidad, el mismo número de valores propios, y las mismas características de Segre de los mismos.

Cada parte la denominaremos “estrato de Brunovsky”. Obviamente será la reunión de las órbitas cuyas formas reducidas de Brunovsky coinciden salvo en los valores de los valores propios.

Como decíamos, veremos en el capítulo III que esta partición verifica las condiciones generales de una “estratificación”, y que, en particular, los estratos son variedades diferenciables. Pero aquí nos limitaremos a describir algunos ejemplos.

(IV.3.3) La observación fundamental es que, en virtud de (I.3.2), en un entorno de una pareja  $(A, B)$  dicha partición es el producto cartesiano de  $\mathcal{O}(A, B)$  por la partición análoga sobre la deformación versal. Por tanto el estudio local de dicha partición, esto es, el diagrama de bifurcaciones, basta hacerlo sobre dicha deformación miniversal.

(IV.3.4) Por otra parte, por homogeneidad del espacio  $\mathcal{M}_{nm}$  a lo largo de las órbitas,

bastará considerar parejas de matrices  $(A, B)$  de Brunovsky.

(IV.3.5) Como ejemplo consideremos la pareja de matrices

$$(A, B) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

con  $\lambda \neq \mu$ .

Cuya deformación miniversal (como (II.2.3)) es

$$(A, B) + \mathcal{S} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & \lambda + z & 0 \\ y & 0 & \mu + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La matriz de controlabilidad de dicha pareja es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & (\lambda + z)x \\ 0 & y & (\mu + t)y \end{pmatrix}$$

Por tanto  $(A, B) + \mathcal{S}$  es completamente controlable si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x & (\lambda + z)x \\ y & (\mu + t)y \end{vmatrix} = xy(\mu + t - \lambda - z) \neq 0$$

Notemos que, puesto que  $\lambda \neq \mu$ , es  $\mu + t - \lambda - z \neq 0$  para valores suficientemente pequeños de  $t, z$ . Luego la condición de controlabilidad anterior equivale a  $xy \neq 0$ . Obsérvese además que estas matrices corresponden a un mismo estrato, ya que, al ser  $m = 1$ , se tiene un único índice de controlabilidad.

Analicemos ahora el caso  $xy = 0$ . Distinguiremos las tres posibilidades siguientes

a)  $x = 0, y \neq 0$ , entonces la pareja de matrices es

$$(A, B) + \mathcal{S} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + z & 0 \\ y & 0 & \mu + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

y es equivalente a

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

b)  $y = 0$ ,  $x \neq 0$ , entonces la pareja de matrices es

$$(A, B) + \mathcal{S} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & \lambda + z & 0 \\ 0 & 0 & \mu + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

y es equivalente a

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

c)  $x = y = 0$ , entonces la pareja de matrices es

$$(A, B) + \mathcal{S} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + z & 0 \\ 0 & 0 & \mu + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

y es equivalente a

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + z & 0 \\ 0 & 0 & \mu + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

pareja de matrices con los mismos invariantes discretos que la pareja de matrices inicial.

En definitiva, vemos que los valores de  $z$ ,  $t$  sólo afectan a los valores propios de la pareja de matrices perturbada, pero no a los invariantes discretos. Es decir, para valores distintos de  $z$ ,  $t$  las correspondientes parejas de matrices pueden pertenecer a órbitas distintas, pero en cualquier caso de su mismo estrato. En otras palabras, cada estrato es un cilindro, cuya generatriz contiene al plano  $zt$ .

Resumimos en la siguiente proposición el resultado de la clasificación

PROPOSICIÓN.

Si  $(A, B)$  es la pareja de matrices

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

con  $\lambda \neq \mu$ . Entonces su diagrama de bifurcaciones local es un cilindro cuya sección es el conjunto de parejas de la forma

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \mu \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

las cuales se estratifican según el origen y los ejes del plano  $xy$ . Esto es, en la siguiente forma

(i) Si  $xy \neq 0$ , es equivalente por bloques a  $\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$

(ii) Si  $x = 0, y \neq 0$ , o bien  $x \neq 0, y = 0$ , es equivalente por bloques a  $\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right)$ , con  $a$  valor próximo a  $\lambda$  o  $\mu$ , respectivamente.

(iii) Si  $x = y = 0$ , es la pareja inicial.

(IV.3.6) Consideremos ahora la pareja de matrices

$$(A, B) = \left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

cuya deformación miniversal (como (II.2.3)) es

$$(A, B) + \mathcal{S} = \left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ x & \lambda & 1 \\ y & z & \lambda + t \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

La matriz de controlabilidad de dicha pareja es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & \lambda x + y \\ 0 & y & zx + (\lambda + t)y \end{pmatrix}$$

Por tanto  $(A, B) + \mathcal{S}$  es completamente controlable si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x & \lambda x + y \\ y & zx + (\lambda + t)y \end{vmatrix} = zx^2 + xyt - y^2 \neq 0.$$

es decir, para todo  $(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4$  y que no pertenezca a la variedad

$$zx^2 + xyt - y^2 = 0.$$

Si hacemos el cambio de coordenadas definido por

$$\begin{aligned} x &= u \\ z &= w - \frac{t^2}{4} \\ y &= v + u\frac{t}{2} \end{aligned}$$

la ecuación anterior se transforma en

$$u^2w - v^2 = 0$$

que es el bien conocido paraguas de Whitney. Y en el exterior del cilindro de  $\mathbf{C}^4$  obtenido moviendo dicho paraguas de Whitney a lo largo del eje  $t$ , las parejas correspondientes son completamente controlables. Como en el caso anterior, forman un solo estrato.

Sea ahora  $u^2w - v = 0$  y  $t$  cualquiera. Distingamos los siguientes casos:

a)  $u = v = w = 0$ , entonces la pareja de matrices es:

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -\frac{t^2}{4} & \lambda + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

y es equivalente a

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{t}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

b) Sea ahora  $u = v = 0$  y  $w \neq 0$ , en este caso la pareja de matrices es

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & w - \frac{t^2}{4} & \lambda + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

y es equivalente a

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda + t + 2\sqrt{w} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda + t - 2\sqrt{w} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

c) Y ya por último, sea  $u \neq 0$  o  $v \neq 0$  y  $w$  cualquiera

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ u & \lambda & 1 \\ v + u\frac{t}{2} & w - \frac{t^2}{4} & \lambda + t \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

y es equivalente a

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

con  $a$  valor propio de la pareja que depende de  $u, v, w, t$  y  $\lambda$

Resumimos en la siguiente proposición el resultado de la clasificación

PROPOSICIÓN.

Si  $(A, B)$  es la pareja de matrices

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right),$$

Entonces su diagrama de bifurcaciones es un cilindro, de sección el llamado “paraguas de Whitney”

$$u^2w - v^2 = 0$$

estratificado de la forma habitual, Esto es, por el origen y el eje  $w$ . De forma precisa, los estratos y las formas de las parejas correspondientes son los siguientes:

$$(i) \quad \left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right) \quad \text{si } u^2w - v^2 \neq 0.$$

$$(ii) \quad \left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right) \quad \text{si } u = v = w = 0,$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad & \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \quad \text{si } u = v = 0, w \neq 0 \\
\text{(iv)} \quad & \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \quad \text{si } u^2 w - v^2 = 0, \text{ con } u \neq 0 \text{ o } v \neq 0
\end{aligned}$$

## V. Deformaciones versales de cuaternas de matrices.

(V.0) Veamos cómo las técnicas empleadas en el estudio de las deformaciones de parejas de matrices pueden también aplicarse, por ejemplo, al de cuaternas de matrices.

En particular, veamos que la estabilidad estructural de tales cuaternas presenta características distintas a las de las matrices cuadradas y a la de las parejas de matrices.

En efecto:

- para matrices cuadradas no hay ninguna órbita abierta, y el único estrato abierto es el de las matrices genéricas (esto es, diagonalizables, con valores propios distintos),
- para parejas de matrices, hemos visto que existen órbitas abiertas, y que los únicos estratos abiertos son los formados por una sola de tales órbitas,
- para cuaternas, veremos en (V.4.4) que existen órbitas abiertas, y también estratos abiertos (formados por la unión no numerable de órbitas no abiertas).

### (V.1) Equivalencia entre cuaternas de matrices.

(V.1.1) Designemos por  $\mathcal{M}_{nmp}$ , al conjunto de cuaternas de matrices

$$M_{n \times n}(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C}) \times M_{p \times n}(\mathbf{C}) \times M_{p \times m}(\mathbf{C}).$$

Dicho conjunto es obviamente isomorfo a  $M_{(n+p) \times (n+m)}(\mathbf{C})$  por lo que escribiremos los cuaternas de matrices indistintamente

$$(A, B, C, D) \circ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

En este conjunto tenemos una relación de equivalencia (ver [40], por ejemplo) que generaliza de forma natural la semejanza de matrices cuadradas y la semejanza por bloques entre parejas de matrices; se admiten: cambios de base en el espacio de estados, en el espacio de entradas, en el espacio de salidas, y las operaciones de realimentación y de inyección de salidas. De forma precisa:

DEFINICIÓN:

Sean  $(A, B, C, D), (A', B', C', D') \in \mathcal{M}_{nmp}$ , decimos que son equivalentes si y sólo si  $(A', B', C', D')$  puede obtenerse de  $(A, B, C, D)$  mediante una o más de las siguientes transformaciones elementales

- i)  $(A, B, C, D) \sim (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D)$
- ii)  $(A, B, C, D) \sim (A, BV, C, DV)$
- iii)  $(A, B, C, D) \sim (A, B, WC, WD)$
- iv)  $(A, B, C, D) \sim (A + BK, B, C + DK, D)$
- v)  $(A, B, C, D) \sim (A + JC, B + JD, C, D)$

donde  $P \in Gl(n, \mathbf{C}), V \in Gl(m, \mathbf{C}), W \in Gl(p, \mathbf{C}), J \in M_{n \times p}(\mathbf{C}), K \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ .

(V.1.2) Es inmediato que esta relación de equivalencia generaliza la semejanza por bloques entre parejas de matrices. Esto es, si  $C = D = 0$ , entonces también  $C' = D' = 0$ , y las parejas  $(A, B)$  y  $(A', B')$  son semejantes por bloques.

E igualmente, que generaliza la semejanza entre matrices cuadradas.

(V.1.3) Análogamente al caso de la semejanza por bloques, esta relación de equivalencia puede verse como inducida por la acción de un grupo en el espacio  $\mathcal{M}_{nmp}$ .

En efecto, sea  $Gl(n+p, \mathbf{C}) \times Gl(n+m, \mathbf{C})$ , con la estructura de grupo dada por la operación

$$(g_1, g_2) \circ (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g'_2 g_2)$$

Consideremos  $\mathcal{G}_1 \subset Gl(n+p, \mathbf{C}) \times Gl(n+m, \mathbf{C})$  definido de la forma

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} P & J \\ 0 & W \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ K & V \end{pmatrix} \right) \left| \begin{array}{l} P \in Gl(n, \mathbf{C}), W \in Gl(p, \mathbf{C}), V \in Gl(m, \mathbf{C}) \\ J \in M_{n \times p}(\mathbf{C}), K \in M_{m \times n}(\mathbf{C}) \end{array} \right. \right\}$$

Claramente  $\mathcal{G}_1$  es un subgrupo:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} P_1 & J_1 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ K_1 & V_1 \end{pmatrix} \right) \circ \left( \begin{pmatrix} P_2 & J_2 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ K_2 & V_2 \end{pmatrix}^{-1} \right) = \\ & = \left( \begin{pmatrix} P_1 & J_1 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & J_2 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ K_2 & V_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ K_1 & V_1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \left( \begin{pmatrix} P_1 & J_1 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2^{-1} & -P_2^{-1} J_2 W_2^{-1} \\ 0 & W_2^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ -V_2^{-1} K_2 P_2 & V_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ K_1 & V_1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \left( \begin{pmatrix} P_1 P_2^{-1} & -P_1 P_2^{-1} J_2 W_2^{-1} + J_1 W_2^{-1} \\ 0 & W_1 W_2^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (P_1 P_2^{-1})^{-1} & 0 \\ -V_2^{-1} K_2 P_2 P_1^{-1} + V_2^{-1} K_1 & V_2^{-1} V_1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Si no hay lugar a confusión a los elementos de  $\mathcal{G}_1$ , los notaremos de la forma  $(P, V, W, J, K)$  con  $P \in Gl(n, \mathbf{C})$ ,  $V \in Gl(m, \mathbf{C})$ ,  $W \in Gl(p, \mathbf{C})$ ,  $J \in M_{n \times p}(\mathbf{C})$  y  $K \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ .

Nótese que  $\mathcal{G}_1$  es un subconjunto abierto de

$$M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_p(\mathbf{C}) \times M_{n \times p}(\mathbf{C}) \times M_{m \times n}(\mathbf{C})$$

por lo que es un grupo de Lie.

(V.1.4) Definimos una acción  $\alpha$  del grupo  $\mathcal{G}_1$  sobre el conjunto de cuaternas de matrices

DEFINICIÓN:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{M}_{nmp} & \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp} \\ \left( (P, V, W, J, K), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) & \longrightarrow \begin{pmatrix} P & J \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ K & V \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(V.1.5) Veamos que la relación de equivalencia inducida por esta acción coincide con la definida en (V.1.1). Esto es, que

$$(A, B, C, D) \sim (A', B', C', D') \Leftrightarrow \exists (P, V, W, J, K) \in \mathcal{G} \text{ tal que}$$

$$\alpha \left( (P, V, W, J, K), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

En efecto, basta observar que

$$\begin{aligned} \alpha \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, (P, I_m, I_p, 0, 0) \right) &= \begin{pmatrix} PAP^{-1} & PB \\ CP^{-1} & D \end{pmatrix} \\ \alpha \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, (I_n, V, I_p, 0, 0) \right) &= \begin{pmatrix} A & BV \\ C & DV \end{pmatrix} \\ \alpha \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, (I_n, I_m, W, 0, 0) \right) &= \begin{pmatrix} A & B \\ WC & WD \end{pmatrix} \\ \alpha \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, (I_n, I_m, I_p, 0, K) \right) &= \begin{pmatrix} A+BK & B \\ C+DK & D \end{pmatrix} \\ \alpha \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, (P, I_m, I_p, J, 0) \right) &= \begin{pmatrix} A+JC & B+JD \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(V.1.6) Por consiguiente, la clase de equivalencia de una cuaterna  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  es su órbita por la acción de  $\alpha$ . Esto es, la imagen de  $\mathcal{G}_1$  por la aplicación

$$\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp}$$

definida por

$$(P, V, W, J, K) \longrightarrow \begin{pmatrix} P & J \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ K & V \end{pmatrix}$$

Notaremos por  $\mathcal{O}(A, B, C, D)$  dicha órbita de  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

Al igual que en (I.2.5) se verifica

PROPOSICIÓN.

Las órbitas  $\mathcal{O}(A, B, C, D)$  son subvariedades complejas de  $\mathcal{M}_{nmp}$ , localmente cerradas cuyo borde es unión de órbitas de dimensión estrictamente menor.

(V.1.7) Claramente la acción  $\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  es diferenciable. Como para parejas de matrices, necesitamos expresión explícita de su diferencial en el elemento unidad  $E$  de  $\mathcal{G}_1$ ,  $d\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, E$ .

Como que  $\mathcal{G}_1$  es un abierto de  $M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_p(\mathbf{C}) \times M_{n \times p}(\mathbf{C}) \times M_{m \times n}(\mathbf{C})$ , tenemos

$$T_E \mathcal{G}_1 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} P & J \\ 0 & W \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -P & 0 \\ K & V \end{pmatrix} \right) \left| \begin{array}{l} P \in M_n(\mathbf{C}), W \in M_p(\mathbf{C}), V \in M_m(\mathbf{C}) \\ J \in M_{n \times p}(\mathbf{C}), K \in M_{m \times n}(\mathbf{C}) \end{array} \right. \right\}$$

que si no hay lugar a confusión escribiremos:

$$(P, V, W, J, K) \in M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C}) \times M_p(\mathbf{C}) \times M_{n \times p}(\mathbf{C}) \times M_{m \times n}(\mathbf{C}).$$

Con esta notación, tenemos

LEMA.

Sea  $\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathcal{G}_1 \rightarrow M_{nmp}$ , la acción definida en (V.1.3). Entonces su diferencial  $d\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, E$  en el punto identidad  $E \in \mathcal{G}_1$ , aplicada en un punto  $(P, V, W, J, K)$  cualquiera del espacio tangente  $T_E \mathcal{G}_1$  es:

$$d\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, E = ([P, A] + BK + JC, BV + PB + JD, -CP + DK + WC, DV + WD)$$

DEMOSTRACIÓN:

Hemos de calcular  $d\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, E(P, V, W, J, K)$ , siendo  $E = \left( \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \right)$

el elemento neutro de  $\mathcal{G}_1$ . Para ello, calculemos

$$\begin{aligned} & \alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (I_n + \varepsilon P, I_m + \varepsilon V, I_p + \varepsilon W, \varepsilon J, \varepsilon K) = \\ & = \begin{pmatrix} I_n + \varepsilon P & \varepsilon J \\ 0 & I_p + \varepsilon W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_n + \varepsilon P)^{-1} & 0 \\ \varepsilon K & I_m + \varepsilon V \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (I_n + \varepsilon P)A(I_n + \varepsilon P)^{-1} + \varepsilon JC(I_n + \varepsilon P)^{-1} + (I_n + \varepsilon P)B\varepsilon K + \varepsilon^2 JDK & ((I_n + \varepsilon P)B + \varepsilon JD)(I_m + \varepsilon V) \\ (I_p + \varepsilon W)C(I_n + \varepsilon P)^{-1} + (I_p + \varepsilon W)D\varepsilon K & (I_p + \varepsilon W)D(I_m + \varepsilon V) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Recordando que  $(I_n + \varepsilon P)^{-1} = I - \varepsilon P + \varepsilon^2 P^2 + \dots$ , se tiene que la aproximación lineal es:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A + \varepsilon([P, A] + JC + BK) & B + \varepsilon(PB + JD + BV) \\ C + \varepsilon(-CP + WC + DK) & D + \varepsilon(DV + WD) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} [P, A] + BK + JC & BV + PB + JD \\ -CP + DK + WC & DV + WD \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y puesto que la acción  $\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  es diferenciable, se tiene el resultado.

## (V.2) Deformaciones versales de cuaternas de matrices.

(V.2.1) De forma análoga a (I.3.3), se demuestra

PROPOSICIÓN.

Una deformación  $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathcal{M}_{nmp}$  de  $(A, B, C, D)$  es versal en 0, si y sólo si es transversal en el origen a la órbita  $\mathcal{O}(A, B, C, D)$  por la acción de  $\mathcal{G}_1$ .

(V.2.2) Por lo que tenemos el siguiente

COROLARIO.

Supongamos que tenemos definido un producto escalar hermítico en  $\mathcal{M}_{nmp}$ . Entonces, una deformación miniversal de la cuaterna de matrices  $(A, B, C, D)$  viene dada por

$$(A, B, C, D) + (T_{(A, B, C, D)}\mathcal{O}(A, B, C, D))^\perp$$

(V.2.3) Definamos pues, un producto escalar en  $\mathcal{M}_{nmp}$ .

DEFINICIÓN:

Sea  $(A, B, C, D), (A', B', C', D') \in \mathcal{M}_{(nmp)}$

$$\begin{aligned} \langle (A, B, C, D), (A', B', C', D') \rangle &= \text{tr}(AA'^*) + \text{tr}(BB'^*) + \text{tr}(CC'^*) + \text{tr}(DD'^*) = \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}^* \end{aligned}$$

siendo  $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}^* = \overline{\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}^t} = \begin{pmatrix} \overline{A'}^t & \overline{C'}^t \\ \overline{B'}^t & \overline{D'}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'^* & D'^* \\ B'^* & C'^* \end{pmatrix}$ .

Claramente se verifican las propiedades de un producto hermítico. (De hecho, es el producto escalar habitual en el espacio de matrices  $M_{(n+p) \times (n+m)}(\mathbf{C})$ ).

(V.2.4) Explicitemos ahora  $(T_{(A,B,C,D)}\mathcal{O}(A, B, C, D))^\perp$

LEMA.

Consideremos en  $\mathcal{M}_{nmp}$  el producto escalar dado en (V.2.2), se tiene

$$(A', B', C', D') \in (T_{(A,B,C,D)}\mathcal{O}(A, B, C, D))^\perp$$

si y sólo si

$$\left. \begin{aligned} [A, A'^*] + BB'^* - C'^*C &= 0 \\ A'^*B + C'^*D &= 0 \\ B'^*B + D'^*D &= 0 \\ CA'^* + DB'^* &= 0 \\ CC'^* + DD'^* &= 0 \end{aligned} \right\}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \left( d\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (P, V, W, J, K) \right), \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} [P, A] + BK + JC & BV + PB + JD \\ -CP + DK + WC & DV + WD \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \text{tr}([P, A] + BK + JC)A'^* + \text{tr}(BV + PB + JD)B'^* + \\
&+ \text{tr}(-CP + DK + WC)C'^* + \text{tr}(DV + WD)D'^* = \\
&= \text{tr}(PAA'^* - APA'^* + BKA'^* + JCA'^*) + \text{tr}(BVB'^* + PBB'^* + JDB'^*) + \\
&+ \text{tr}(-CPC'^* + DKC'^* + WCC'^*) + \text{tr}(DVD'^* + WDD'^*) = \\
&= \text{tr}(AA'^*P - A'^*AP) + \text{tr}(A'^*BK) + \text{tr}(CA'^*J) + \text{tr}(B'^*BV) + \text{tr}(BB'^*P) + \\
&+ \text{tr}(DB'^*J) + \text{tr}(-C'^*CP) + \text{tr}(C'^*DK) + \text{tr}(CC'^*W) + \text{tr}(D'^*DV) + \text{tr}(DD'^*W) = \\
&= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} [A, A'^*] + BB'^* - C'^*C & A'^*B + C'^*D & 0 \\ 0 & B'^*B + D'^*D & 0 \\ CA'^* + DB'^* & 0 & CC'^* + DD'^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & 0 & J \\ K & V & 0 \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\quad \forall \begin{pmatrix} P & 0 & J \\ K & V & 0 \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \forall \begin{pmatrix} P & R & J \\ K & V & U \\ M & N & W \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ya que  $M, N, R, U$  no intervienen en el cálculo de la traza.

Luego, por ser el producto escalar definido positivo

$$\left( \begin{pmatrix} [A, A'^*] + BB'^* - C'^*C & A'^*B + C'^*D & 0 \\ 0 & B'^*B + D'^*D & 0 \\ CA'^* + DB'^* & 0 & CC'^* + DD'^* \end{pmatrix} \right) = 0$$

de donde el resultado.

(V.2.5) Según el corolario (V.2.1), y el lema (V.2.4) se tiene el siguiente

TEOREMA.

Consideremos  $\mathcal{M}_{nmp}$  y sea  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$ . Entonces una deformación miniversal (ortogonal) de la cuaterna de matrices  $(A, B, C, D)$ , viene dada por la variedad lineal

$$(A, B, C, D) + \{(X^*, Y^*, Z^*, T^*)\}$$

donde  $X \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $Y \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $Z \in M_{n \times p}(\mathbb{C})$ ,  $T \in M_{m \times p}(\mathbb{C})$  recorren las soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} [A, X] + BY - ZC &= 0 \\ XB + ZD &= 0 \\ YB + TD &= 0 \\ CX + DY &= 0 \\ CZ + DT &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(V.2.6) Nótese que esta deformación miniversal contiene a las ya conocidas para parejas de matrices y para matrices cuadradas. En efecto, si  $(A, B, C, D) = (A, B, 0, 0)$ , se tiene

$$\left. \begin{aligned} [A, A'^*] + BB'^* &= 0 \\ A'^*B &= 0 \\ B'^*B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con  $C'$  y  $D'$  libres.

Si intersecamos dicha variedad lineal con la variedad lineal

$$\left. \begin{aligned} C' &= 0 \\ D' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

se obtiene la deformación ortogonal de la pareja de matrices  $(A, B)$  obtenida en (II.1.4).

Igualmente, si  $(A, B, C, D) = (A, 0, 0, 0)$  se tiene  $[A, A'^*] = 0$  con  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  libres.

Si como antes, intersecamos esta variedad lineal con

$$\left. \begin{array}{l} B' = 0 \\ C' = 0 \\ D' = 0 \end{array} \right\}$$

obtenemos la deformación ortogonal de las matrices cuadradas dada por Arnold.

(V.2.7) EJEMPLO:

Sea  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{5 \times 2 \times 1}$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad D = (0 \ 0)$$

Llamando

$$X = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & b_5^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 & b_5^2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ c_1^3 \\ c_1^4 \\ c_1^5 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_1^2 \end{pmatrix}$$

Entonces, una deformación miniversal (ortogonal) de  $(A, B, C, D)$ , viene dada por

$$(A, B, C, D) + \{(X^*, Y^*, Z^*, T^*)\}$$

con

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_4^1 & \bar{a}_4^2 & \bar{a}_4^3 & 0 & 0 \\ \bar{a}_4^2 & \bar{a}_5^2 & \bar{a}_5^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{a}_5^2 & \bar{a}_5^3 \\ \bar{b}_5^1 & \bar{b}_5^2 \end{pmatrix}$$

$$Z^* = (\bar{a}_5^2 \quad \bar{b}_5^1 \quad \bar{b}_5^2 \quad 0 \quad 0), \quad T^* = (\bar{d}_1^1 \quad \bar{d}_1^2)$$

(V.2.8) En general, para obtener una descripción explícita de la deformación (V.2.5), por la homogeneidad a lo largo de la órbitas, podemos reducirnos a cuaternas de matrices en su forma reducida (ver [27], o [40]).

Sea pues, la cuaterna  $(A, B, C, D)$  en su forma reducida canónica

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

donde  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2^t, C_1^t)$  son parejas de matrices en su forma reducida de Brunovsky y completamente controlables,  $\begin{pmatrix} A_3 & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}$  es una cuaterna con la misma parte controlable que observable,  $A_4$  es una matriz de Jordan.

(V.2.9) Si partimos ahora las matrices  $X, Y, Z, T$  de (V.2.4) según los bloques de las matrices  $A, B, C$  y  $D$ ,

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 & X_4^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 & X_4^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 & X_4^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 & X_4^4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1^1 & Z_2^1 & Z_3^1 \\ Z_1^2 & Z_2^2 & Z_3^2 \\ Z_1^3 & Z_2^3 & Z_3^3 \\ Z_1^4 & Z_2^4 & Z_3^4 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & Y_3^1 & Y_4^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & Y_3^2 & Y_4^2 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & Y_3^3 & Y_4^3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones que nos determinan dichas matrices se descompone en los siguientes sistemas de ecuaciones independientes:

$$\left. \begin{aligned} A_1 X_1^1 - X_1^1 A_1 + B_1 Y_1^1 &= 0 \\ X_1^1 B_1 &= 0 \\ Y_1^1 B_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (1),$$

$$A_1 X_2^1 - X_2^1 A_2 + B_1 Y_2^1 - Z_1^1 C_1 = 0 \} (2),$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 X_3^1 - X_3^1 A_3 + B_1 Y_3^1 - Z_2^1 C_2 &= 0 \\ X_3^1 B_2 &= 0 \\ Y_3^1 B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (3),$$

$$A_1 X_4^1 - X_4^1 A_4 + B_1 Y_4^1 = 0 \} (4),$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 X_1^2 - X_1^2 A_1 &= 0 \\ X_1^2 B_1 &= 0 \\ C_1 X_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (5),$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 X_2^2 - X_2^2 A_2 - Z_1^2 C_1 &= 0 \\ C_1 Z_1^2 &= 0 \\ C_1 X_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (6),$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 X_3^2 - X_3^2 A_3 - Z_2^2 C_2 &= 0 \\ X_3^2 B_2 &= 0 \\ C_1 Z_2^2 &= 0 \\ C_1 X_3^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (7),$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 X_4^2 - X_4^2 A_4 &= 0 \\ C_1 X_4^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (8),$$

$$\left. \begin{aligned} A_3 X_1^3 - X_1^3 A_1 + B_2 Y_1^2 &= 0 \\ X_1^3 B_1 &= 0 \\ Y_1^2 B_1 &= 0 \\ C_2 X_1^3 &= 0 \end{aligned} \right\} (9),$$

$$\left. \begin{aligned} A_3 X_2^3 - X_2^3 A_2 + B_2 Y_2^2 - Z_1^3 C_1 &= 0 \\ C_2 Z_1^3 &= 0 \\ C_2 X_2^3 &= 0 \end{aligned} \right\} (10),$$

$$\left. \begin{aligned} A_3 X_3^3 - X_3^3 A_3 + B_2 Y_3^2 - Z_2^3 C_2 &= 0 \\ C_2 X_3^3 &= 0 \\ Y_3^2 B_2 &= 0 \\ C_2 Z_3^2 &= 0 \\ X_3^3 B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (11),$$

$$\left. \begin{aligned} A_3 X_4^3 - X_4^3 A_4 + B_2 Y_4^2 &= 0 \\ C_2 X_4^3 &= 0 \end{aligned} \right\} (12),$$

$$\left. \begin{aligned} A_4 X_1^4 - X_1^4 A_1 &= 0 \\ X_1^4 B_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (13),$$

$$A_4 X_2^4 - X_2^4 A_2 - Z_1^4 C_1 = 0 \} (14),$$

$$\left. \begin{aligned} A_4 X_3^4 - X_3^4 A_3 - Z_2^4 C_2 &= 0 \\ X_3^4 B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (15),$$

$$A_4 X_4^4 - X_4^4 A_4 = 0 \} (16),$$

$$\begin{aligned}
Z_3^1 &= 0 & Y_1^3 &= 0 & T_3^1 &= 0 & T_1^3 &= 0 \\
Z_3^2 &= 0 & Y_2^3 &= 0 & T_3^2 &= 0 & T_2^3 &= 0 \\
Z_3^3 &= 0 & Y_3^3 &= 0 & T_3^3 &= 0 & & \\
Z_3^4 &= 0 & Y_4^3 &= 0 & & & & 
\end{aligned} \tag{17},$$

y  $T_1^1, T_2^1, T_1^2, T_2^2$  libres.

(V.2.10) De entre todos estos sistemas observamos que

- i) El sistema (1) es como (I) de (II.2.3) resuelto en el anexo.
- ii) El sistema (4) es como (III) de (II.2.3) resuelto en el anexo.
- iii) El sistema (13) es como (II) de (II.2.3) resuelto en el anexo.
- iv) El sistema (16) es como (V) de (II.2.3) resuelto, por ejemplo en [17], o [35].
- v) El sistema (6) es el sistema traspuesto de (I) de (II.2.3) resuelto en anexo.
- vi) El sistema (8) es el sistema traspuesto de (II) de (II.2.3) resuelto en anexo.
- vii) El sistema (14) es el sistema traspuesto de (III) de (II.2.3) resuelto en anexo.
- viii) El conjunto de soluciones del sistema (5), es la intersección del conjunto de soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned}
A_2 X_1^2 - X_1^2 A_1 &= 0 \\
X_1^2 B_1 &= 0
\end{aligned} \right\}$$

que es como (II), con el conjunto de soluciones del sistema

$$C_1 X_1^2 = 0 \}$$

sistema traspuesto de (IV).

- ix) El conjunto de soluciones del sistema (7), es la intersección del conjunto de soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned}
A_2 X_3^2 - X_3^2 A_3 - Z_2^2 C_2 &= 0 \\
C_1 Z_2^2 &= 0 \\
C_1 X_3^2 &= 0
\end{aligned} \right\}$$

que es traspuesto (I), con el conjunto de soluciones del sistema

$$X_3^2 B_2 = 0 \}$$

que es como (IV).

- x) El conjunto de soluciones del sistema (9), es la intersección del conjunto de soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} A_3 X_1^3 - X_1^3 A_1 + B_2 Y_1^2 &= 0 \\ X_1^3 B_1 &= 0 \\ Y_1^2 B_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que es como (I), con el conjunto de soluciones del sistema

$$C_2 X_1^3 = 0 \}$$

sistema traspuesto de (IV).

- xi) El conjunto de soluciones del sistema (12), es la intersección del conjunto de soluciones del sistema

$$A_3 X_4^3 - X_4^3 A_4 + B_2 Y_4^2 = 0 \}$$

que es como (III), con el conjunto de soluciones del sistema

$$C_2 X_4^3 = 0 \}$$

que es traspuesto del sistema (IV).

- xii) El conjunto de soluciones del sistema (15), es la intersección del conjunto de soluciones del sistema

$$A_4 X_3^4 - X_3^4 A_3 - X_2^4 C_2 = 0 \}$$

que es traspuesto del sistema (III), con el conjunto de soluciones del sistema

$$X_3^4 B_2 = 0 \}$$

que es como sistema (IV).

### (V.3) Estabilidad estructural.

(V.3.1) Vamos ahora a deducir de la deformación miniversal de las cuaternas de matrices, condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad estructural de dichas cuaternas. Partimos de que, por la minitransversalidad de la deformación obtenida antes, se tiene inmediatamente

#### PROPOSICIÓN.

Una cuaterna  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$  es estructuralmente estable por la relación de equivalencia definida en (V.1.1), si y sólo si el conjunto de soluciones del sistema (V.2.3), se reduce al cero.

Vamos a determinar ahora los casos en que se da esta condición.

#### (V.4.2) LEMA.

Consideremos  $\mathcal{M}_{nmp}$  con la relación de equivalencia dada en (V.1.1). Es condición necesaria para que una cuaterna  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$ , sea estructuralmente estable que

$$\text{rang } D = \min(m, p).$$

#### DEMOSTRACIÓN:

Por la homogeneidad a lo largo de las órbitas, podemos suponer que la cuaterna  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$  está en su forma reducida, por lo que el sistema (V.2.3) queda partido en los sistemas (V.3.2). En dichos sistemas vemos que  $T_1^1, T_2^1, T_1^2, T_2^2$  son libres, y que sólo dejan de aparecer si  $D$  es de rango máximo.

(V.4.3) Supongamos pues, que  $\text{rang } D$  es máximo, esto es  $\text{rang } D = \min(m, p)$ , por lo que hay tres posibilidades

- 1)  $m = p$ .

En dicho caso, la forma reducida canónica de una cuaterna cualquiera es

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones que define la deformación miniversal ortogonal de esta cuaterna se reduce al sistema (16)

$$A_4 X_4^4 - X_4^4 A_4 = 0\}$$

que no es más que la deformación miniversal ortogonal de las matrices cuadradas por la relación de equivalencia conjugación, dada por Arnold, por lo que es sabido que la dimensión del espacio de soluciones es

$$\sum (\sigma_1(i) + 3\sigma_2(i) + \dots)$$

siendo  $(\sigma_1(i), \sigma_2(i), \dots)$  la característica de Segre del valor propio  $\lambda_i$  de  $A_4$ .

Esta dimensión es mínima (e igual a  $n$ ), en el caso en que  $A_4$  es diagonal y con todos los valores propios distintos.

2)  $m > p$

En este caso  $\text{rang } D = p$  y la forma reducida canónica de uno de estas cuaternas es

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = (0 \ 0), D = (0 \ I_p).$$

o bien

$$\text{ii) } A = A_1, B = B_1, C = 0, D = I_p$$

El sistema de ecuaciones que define la deformación miniversal ortogonal del primer caso se reduce a los sistemas (1), (4), (13) y (16), que tal y como hemos dicho anteriormente, siempre tiene más de una solución.

El sistema de ecuaciones que define la deformación miniversal ortogonal del segundo caso se reduce al sistema (1), que no es más que la deformación miniversal ortogonal de la pareja de matrices  $(A_1, B_1)$  y que sabemos que es estructuralmente estable si y sólo si  $\text{rang } B_1 = \min(n, m - p)$  y los índices de controlabilidad minimales.

3)  $p > m$

En este caso  $\text{rang } D = m$  y la forma reducida canónica de una de estas cuaternas es

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix}.$$

o bien

$$\text{ii) } A = A_2, B = 0, C = C_1, D = I_m$$

El sistema de ecuaciones que define la deformación miniversal ortogonal del primer caso se reduce a los sistemas (6), (8), (14) y (16), que tal y como hemos dicho anteriormente, siempre tiene más de una solución.

El sistema de ecuaciones que define la deformación miniversal ortogonal del segundo caso se reduce al sistema (6), cuyo sistema traspuesto corresponde con el que define la deformación miniversal ortogonal de la pareja de matrices  $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_1 \end{pmatrix}^t$  y que sabemos que es estructuralmente estable si y sólo si  $\text{rang } C_1 = \min(n, p - m)$  y los índices de controlabilidad minimales.

Por lo que, podemos resumir en el siguiente

TEOREMA.

Una cuaterna  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$  es estructuralmente estable por la acción de  $\mathcal{G}_1$ , si y sólo si  $\text{rang } D = \min(m, p)$  y

- i) para  $m > p$ , si  $\text{rang } B_1 = \min(n, m - p)$  y los índices de controlabilidad de la pareja  $(A_1, B_1)$  verifican la proposición (IV.1.3).

- ii) para  $p > m$ , si  $\text{rang } C_1 = \min(n, p - m)$  y los índices de controlabilidad de la pareja  $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_1 \end{pmatrix}^t$  verifican la proposición (IV.1.3).

(V.4.4) Hemos observado que en el caso en que  $m=p$ , ninguna cuaterna de matrices es estructuralmente estable. Pero en el caso en que  $\text{rang } D = m = p$ , si  $J$  es diagonal con todos los valores propios distintos, las cuaternas de matrices que podemos hallar en un entorno de la dada, son equivalentes a una, evidentemente con  $\text{rang } D = m = p$ , y la matriz  $J$  también diagonal con todos los valores propios distintos. Es decir, en un entorno de una cuaterna de ese tipo, todas las cuaternas tienen los mismos invariantes discretos, aunque no así los invariantes continuos. En otras palabras, una cuaterna de ese tipo no sería interior a su órbita, pero sí interior a su estrato (definido de forma análoga a (IV.3.3)).

En definitiva, si definimos una cuaterna  $(A, B, C, D)$  “estructuralmente estable por  $\mathcal{G}_1$  con respecto a los invariantes discretos” como aquella que admite un entorno formado por cuaternas teniendo sus mismos invariantes discretos, podemos enunciar

TEOREMA.

Una cuaterna  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{nmp}$  es “estructuralmente estable por  $\mathcal{G}_1$  con respecto a los invariantes discretos” si y sólo si:

i) o bien es estructuralmente estable,

ii) o bien  $\text{rang } D = m = p$ , y es equivalente a una del tipo  $\begin{pmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ , donde  $\mathcal{D}$  es una matriz diagonal, con todos los valores propios distintos.



## Anexo

$$\text{Estudio de la ecuación matricial} \quad \left. \begin{array}{l} [A, X] + BY = 0 \\ YB = 0 \\ XB = 0 \end{array} \right\}$$

Pretendemos ahora estudiar y resolver el sistema de ecuaciones matricial

$$\left. \begin{array}{l} [A, X] + BY = 0 \\ YB = 0 \\ XB = 0 \end{array} \right\}$$

con  $A, X \in M_n(\mathbf{C})$ ,  $B \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  y  $Y \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ , obtenido en (II.1.4) al construir la deformación miniversal ortogonal de la pareja de matrices  $(A, B)$ . Según hemos visto, la descripción de una base del espacio de soluciones, nos es necesaria para la construcción de una deformación miniversal de la pareja de matrices  $(A, B) \in M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , que es uno de los objetivos centrales de esta memoria.

Los problemas que tratamos en este capítulo son, por una parte el estudio de la dimensión del espacio de soluciones y por otra, la descripción de dicho espacio. Por supuesto, dando una base del espacio de soluciones, tenemos su dimensión. Sin embargo veremos como es fácil dar dicha dimensión directamente, haciendo uso del *producto de Kronecker* [32], [35], inicialmente llamado producto directo, cuya noción surge de forma natural de la de producto directo en teoría de grupos finitos, y del

operador vectorializador [32], [35], Mac Duffee [35], usa ya estos conceptos para estudiar la ecuación  $A_1XB_1 + \dots + A_rXB_r = C$ .

En el apartado (I) se aborda el primero de dichos problemas, En (I.1) presentamos un breve resumen de las nociones antes mencionadas, esto es, del producto de Kronecker (I.1.1) y del operador vectorializador (I.1.3), así como de las relaciones entre ambas (I.1.4) y de sus propiedades que vamos a utilizar (I.1.5), haciendo notar que pueden ser demostradas fácilmente (I.1.7) haciendo uso del producto tensorial de aplicaciones lineales. En (I.2), se aborda ya la dimensión deseada, remitiéndonos primero a parejas de Brunovsky (I.2.2), transformando a continuación el sistema matricial en uno vectorial mediante las técnicas del apartado anterior (I.2.3), y haciendo finalmente transformaciones por bloques a la matriz del sistema resultante, primero para reducirla a dos bloques diagonales (I.2.4) y después para calcular el rango de cada uno (I.2.5,6), lo que completa el cómputo buscado (I.2.7).

En el apartado (II) se resuelve explícitamente el sistema. Para ello en (II.1) se descompone en 5 sistemas independientes. Remarquemos que el quinto es de la forma  $[X, J] = 0$ , ecuación matricial estudiada por diversos autores y en distintos contextos. Ya en 1885 Cayley [42] hizo una discusión de la ecuación matricial  $AX = XB$  solamente para cuaterniones. De hecho han sido estudiadas las ecuaciones más generales  $AX - YB = C$  y  $AX - XB = C$ . Roth en 1952, [42] da una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones. La solución de esta ecuación (que aparece en diversos textos, por ejemplo Gantmacher [17]), nos da el subespacio director de la variedad lineal de la deformación miniversal ortogonal de la matriz  $J$  dada por Arnold [1], [2]. Los otros cuatro se resuelven explícitamente en (II.2) a (II.5), y las soluciones se recopilan en (II.6). Notemos que el primero de tales sistemas es análogo al inicial, pero la pareja de matrices es completamente controlable, con la segunda de rango máximo.

## I. Dimensión del espacio de soluciones.

### (I.1) Producto de Kronecker y operador vectorializador.

(I.1.1) Recordemos que si  $A = (a_j^i) \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{p \times q}(\mathbf{C})$ , se definen sus productos de Kronecker por la derecha y por la izquierda respectivamente como las matrices  $(a_j^i A)_j^i$  y  $(b_j^i B)_j^i$ . Como sólo haremos uso del primero, adoptamos la siguiente:

DEFINICIÓN:

Sean  $A = (a_j^i) \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{p \times q}(\mathbf{C})$ , el producto de Kronecker por la derecha (o simplemente producto de Kronecker), de  $A$  por  $B$ ,  $A \otimes B$ , es la matriz

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B & \dots & a_m^1 B \\ a_1^2 B & a_2^2 B & \dots & a_m^2 B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n B & a_2^n B & \dots & a_m^n B \end{pmatrix} \in M_{np \times mq}(\mathbf{C})$$

(I.1.2) De las muchas propiedades que verifica este producto (ver [32]), caben destacar:

- 1)  $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
- 2)  $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
- 3)  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- 4)  $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$
- 5) Si  $A \in Gl(n; \mathbf{C})$  y  $B \in Gl(p; \mathbf{C})$ , entonces  $A \otimes B \in Gl(np; \mathbf{C})$  y  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- 6) Si  $A \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ , existe una matriz de permutación  $P \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  tal que  $B \otimes A = P^t(A \otimes B)P$
- 7)  $\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A) \cdot \text{rang}(B)$ .

(I.1.3) Asociados al producto de Kronecker, pueden definirse distintos operadores vectorializadores que transforman una matriz  $A$  cualquiera en un vector fila o vector columna, bien sea colocando las filas de la matriz, una a continuación de otra,

bien colocando las columnas de dicha matriz, una a continuación de otra, o bien trasponiendo estos vectores fila o columna. En esta memoria vamos a adoptar la siguiente

DEFINICIÓN:

Sea  $X = (x_j^i) \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , denotemos  $x_i = (x_1^i, \dots, x_m^i)$  para  $1 \leq i \leq n$  a la  $i$ -ésima fila de la matriz  $X$ . Definimos el operador vectorializador, que notaremos por  $vec$ , de la forma

$$vec: M_{n \times m}(\mathbf{C}) \longrightarrow M_{nm \times 1}(\mathbf{C})$$

$$X \longrightarrow (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t$$

Esta aplicación es, obviamente, un isomorfismo.

(I.1.4) Veamos ahora la estrecha relación que existe entre este operador vectorializador y el producto de Kronecker

PROPOSICIÓN.

Si  $A \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$ ,  $X \in M_{m \times p}(\mathbf{C})$  y  $B \in M_{p \times q}(\mathbf{C})$ , entonces

$$vec(AXB) = (B^t \otimes A)vec(X)$$

(I.1.5) Esta proposición y su corolario, van a ser clave para el cálculo de la dimensión del espacio de soluciones del sistema matricial que nos ocupa.

COROLARIO.

Con las mismas notaciones se tiene

- 1)  $vec(AX) = (I_n \otimes A)vec(X)$
- 2)  $vec(XB) = (B^t \otimes I_m)vec(X)$
- 3)  $vec(AX + XB) = ((I_n \otimes A) + (B^t \otimes I_m))vec(X)$ .

(I.1.6) Las propiedades descritas del producto de Kronecker, pueden demostrarse directamente (ver por ejemplo [32]), o también haciendo uso del producto tensorial de aplicaciones lineales y de su descripción matricial:

$$\text{matriz de } f_1 \otimes \dots \otimes f_m = A_1 \otimes \dots \otimes A_m$$

(Para esta noción, ver por ejemplo [33]). En efecto, para  $1 \leq i \leq m$ , sean  $E_i, F_i$  espacios vectoriales,  $f_i : E_i \rightarrow F_i$  aplicaciones lineales, y  $\{u_1^i, \dots, u_{p_i}^i\}$  y  $\{v_1^i, \dots, v_{q_i}^i\}$ , bases de los espacios  $E_i$  y  $F_i$  respectivamente, y  $A_i$  las matrices asociadas a las aplicaciones  $f_i$  en estas bases. Considerando en  $\bigotimes_{i=1}^m E_i$  la base

$$\{u_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{j_m}^m, j_i \in \{1, \dots, p_i\}, i = 1, \dots, m\}$$

en la que los vectores están ordenados lexicográficamente y en  $\bigotimes_{i=1}^m F_i$ , la base

$$\{v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_m}^m, k_i \in \{1, \dots, q_i\}, i = 1, \dots, m\}$$

en la que también, los vectores están ordenados lexicográficamente. Entonces la matriz de  $f_1 \otimes \dots \otimes f_m$  en estas bases, es

$$B = A_1 \otimes \dots \otimes A_m$$

Donde  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$ , es el producto de Kronecker que ha sido definido en el apartado (I.1.1) independientemente de cualquier consideración acerca de aplicaciones lineales.

Marcus [37] vol II, calcula invariantes de la aplicación  $f \otimes g$ , para el caso en que  $f$  y  $g$  son endomorfismos, en función de los invariantes de  $f$  y  $g$ .

(I.1.7) La observación anterior permite deducir las propiedades del producto tensorial de matrices de las propiedades análogas del producto tensorial de aplicaciones lineales. En particular, es posible dar una demostración particularmente simple de la proposición (I.1.4). En efecto, sea  $v : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow (E \otimes F^{ast})^*$  el isomorfismo natural definido por

$$v(f)(x \otimes w) = \omega(f(x))$$

donde  $x \in E$ ,  $\omega \in F^*$  y los espacios vectoriales son de dimensión finita. Se tiene entonces la

PROPOSICIÓN.

Si  $E, F, G, H$  son espacios vectoriales de dimensión finita,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  y  $h \in \mathcal{L}(G, H)$  se verifica la igualdad

$$v(hgf) = v(g)(f \otimes h^t)$$

donde  $h^t$  es la aplicación dual de  $h$ .

DEMOSTRACIÓN:

Para todo  $x \in E$ ,  $\omega \in H^*$  se tiene

$$\begin{aligned} (v(g)(f \otimes h^t))(x \otimes \omega) &= v(g)(f(x) \otimes h^t(\omega)) = \\ &= h^t(\omega)(gf(x)) = \\ &= \omega(hgf(x)) = \\ &= v(hgf)(x \otimes \omega) \end{aligned}$$

Nótese que la proposición (I.1.4) es la traducción matricial de la proposición anterior.

## (I.2) Dimensión del espacio de soluciones.

(I.2.1) Consideremos el siguiente sistema matricial

$$\left. \begin{aligned} [A, X] + BY &= 0 \\ YB &= 0 \\ XB &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con  $A, X \in M_n(\mathbf{C})$ ,  $B \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  e  $Y \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ .

$[A, X]$  denota el corchete de Lie de  $A$  y  $X$ , es decir,  $[A, X] = AX - XA$ .

Nos proponemos tal y como hemos dicho, encontrar la dimensión del espacio de soluciones de dicho sistema.

(I.2.2) Empezaremos viendo que podemos restringirnos al caso en que la pareja de matrices  $(A \ B)$  está en su forma reducida de Brunovsky.

PROPOSICIÓN.

Sean  $\mathcal{S}$  y  $\overline{\mathcal{S}}$  los conjuntos de soluciones de las ecuaciones matriciales

$$\left. \begin{aligned} [A, X] + BY &= 0 \\ YB &= 0 \\ XB &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

y

$$\left. \begin{aligned} [A_1, X] + B_1Y &= 0 \\ YB_1 &= 0 \\ XB_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

respectivamente.

Si  $(A \ B), (A_1 \ B_1) \in M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$  son equivalentes por la relación de equivalencia semejanza por bloques, definida en el capítulo 0, (II.6.1). Es decir, existen  $P \in GL(n; \mathbf{C}), Q \in GL(m; \mathbf{C})$  y  $R \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ , tales que

$$(A \ B) = P^{-1}(A_1 \ B_1) \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{S} &\longrightarrow \overline{\mathcal{S}} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

es un isomorfismo y por lo tanto  $\dim \mathcal{S} = \dim \overline{\mathcal{S}}$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $X_0, Y_0$  es solución del sistema (\*) comprobemos que

$$X_1 = PX_0P^{-1}, \quad Y_1 = RX_0P^{-1} + QY_0P^{-1}$$

es solución del sistema (\*\*).

Por ser  $X_0, Y_0$  solución del sistema (\*), tenemos

$$\left. \begin{array}{l} [A, X_0] + BY_0 = 0 \\ Y_0B = 0 \\ X_0B = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Sustituyendo en (1), las matrices  $A$  y  $B$ , por su expresión en función de  $A_1$  y  $B_1$  tenemos

$$\left. \begin{array}{l} [P^{-1}A_1P + P^{-1}B_1R, X_0] + P^{-1}B_1QY_0 = 0 \\ Y_0P^{-1}B_1Q = 0 \\ X_0P^{-1}B_1Q = 0 \end{array} \right\}$$

Desarrollando tenemos que el sistema se expresa de la forma

$$\left. \begin{array}{l} A_1PX_0P^{-1} + B_1RX_0P^{-1} - PX_0P^{-1}A_1 - PX_0P^{-1}B_1RP^{-1} + B_1QY_0P^{-1} = 0 \\ QY_0P^{-1}B_1 = 0 \\ P_0XP^{-1}B_1 = 0 \end{array} \right\}$$

De la tercera ecuación de este último sistema, se desprende que

$$PX_0P^{-1}B_1RP^{-1} = 0RP^{-1} = 0$$

por lo que la primera ecuación queda

$$A_1PX_0P^{-1} - PX_0P^{-1}A_1 + B_1(RX_0P^{-1} + QY_0P^{-1}) = 0$$

llamando

$$X_1 = PXP^{-1} \quad Y_1 = RXP^{-1} + QYP^{-1}$$

y sustituyendo queda

$$\left. \begin{aligned} [A_1, X_1] + B_1 Y_1 &= 0 \\ Y_1 B_1 - RP^{-1} X_1 B_1 &= 0 \\ X_1 B_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

pero  $RP^{-1} X_1 B_1 = RX_0 P^{-1} B_1 = RP^{-1} P X_0 P^{-1} B_1 = RP^{-1} = 0$

Por lo que finalmente tenemos

$$\left. \begin{aligned} [A_1, X_1] + B_1 Y_1 &= 0 \\ Y_1 B_1 &= 0 \\ X_1 B_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y  $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \in \bar{S}$ .

Sólo queda ver, pero es obvio, que  $\varphi$  es lineal y biyectiva.

(I.2.3) Pasemos ya a efectuar el cómputo de la dimensión del espacio de soluciones del sistema.

Sea  $(A \ B) \in M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , que por la proposición (I.3.2), podemos considerar que está en su forma reducida de Brunovsky, es decir y según la notación dada en el capítulo 0 (II.3.1) es

$$\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

con  $k_1 \geq \dots \geq k_r$  sus índices de controlabilidad,  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  sus valores propios y  $\sigma(\lambda_i) = (\sigma_1(\lambda_i), \dots, \sigma_{\ell_i}(\lambda_i))$  la característica de Segre para cada valor propio  $\lambda_i$ . Al igual que en el cap 1, (II.2.2), llamaremos  $p = k_1 + \dots + k_r$ .

En primer lugar veamos que gracias a las herramientas dadas en I, nuestro sistema de ecuaciones matricial es equivalente a uno vectorial, por lo que el cálculo de la dimensión del espacio de soluciones del sistema que nos ocupa se remite al cálculo de la dimensión del espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal, bastándonos pues averiguar el rango de la matriz del sistema.

LEMA.

$X_0, Y_0$  es solución del sistema (I.2.1), si y sólo si  $\begin{pmatrix} \text{vec}(X_0) \\ \text{vec}(Y_0) \end{pmatrix}$  es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} I_n \otimes A - A^t \otimes I_n & I_n \otimes B \\ B^t \otimes I_n & 0 \\ 0 & B^t \otimes I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{vec}(X) \\ \text{vec}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando a las tres ecuaciones del sistema (I.2.1) el corolario (I.1.5),

$$\left. \begin{aligned} (I_n \otimes A - A^t \otimes I_n)\text{vec}(X) + (I_n \otimes B)\text{vec}(Y) &= 0 \\ (B^t \otimes I_n)\text{vec}(X) &= 0 \\ (B^t \otimes I_m)\text{vec}(Y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que a su vez equivale a la ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} I_n \otimes A - A^t \otimes I_n & I_n \otimes B \\ B^t \otimes I_n & 0 \\ 0 & B^t \otimes I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{vec}(X) \\ \text{vec}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I.2.4) Para simplificar notaciones llamaremos  $\mathbf{A}$ , a la matriz del sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_n \otimes A - A^t \otimes I_n & I_n \otimes B \\ B^t \otimes I_n & 0 \\ 0 & B^t \otimes I_m \end{pmatrix}$$

como  $\dim \mathcal{S} = n^2 + nm - \text{rang } \mathbf{A}$ , el cálculo de la dimensión de  $\mathcal{S}$  se reduce al cálculo del rango de la matriz  $\mathbf{A}$ .

(I.2.5) Empezaremos viendo qué forma tienen los cuatro bloques no nulos de esta matriz.

El primer bloque  $I_n \otimes A - A^t \otimes I_n$ , es la matriz diagonal por bloques siguiente

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_r & & \\ & & & D_{11} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_{qs} \end{pmatrix}$$

con

$$C_i = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I_n & A & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & A & 0 \\ & & & & -I_n & A \end{pmatrix} \in M_{n \cdot k_i}(\mathbf{C})$$

y

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I_n & A - \lambda_i I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & A - \lambda_i I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A - \lambda_i I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n & A - \lambda_i I_n \end{pmatrix} \in M_{n \cdot \sigma_j(\lambda_i)}(\mathbf{C}).$$

$I_n \otimes B$  también es una matriz diagonal por bloques

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in M_{n^2 \times nm}(\mathbf{C})$$

con

$$B_1 = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \dots & \\ & & & B \end{pmatrix} \in M_{np \times mp}(\mathbf{C})$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \dots & \\ & & & B \end{pmatrix} \in M_{n(n-p) \times m(n-p)}(\mathbf{C}).$$

Finalmente

$$B^t \otimes I_n = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{nm \times n^2}(\mathbf{C})$$

$$B^t \otimes I_m = \begin{pmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m^2 \times nm}(\mathbf{C})$$

con  $F_1$  matriz diagonal por bloques

$$F_1 = \begin{pmatrix} F_{11} & & & \\ & \dots & & \\ & & & F_{1r} \end{pmatrix} \in M_{rn \times np}(\mathbf{C})$$

y  $F_{1i} = (0 \ \dots \ 0 \ I_n) \in M_{n \times nk_i}(\mathbf{C})$

$F_2$  también es una matriz diagonal por bloques

$$F_2 = \begin{pmatrix} F_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & F_{2r} \end{pmatrix} \in M_{rm \times mp}(\mathbf{C})$$

y  $F_{2i} = (0 \ \dots \ 0 \ I_m) \in M_{m \times mk_i}(\mathbf{C})$ .

Tenemos pues que la matriz del sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & D & 0 & B_2 \\ F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que haciendo transformaciones elementales por bloques es equivalente a

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} C & B_1 & 0 & 0 \\ F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$$

con  $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} C & B_1 \\ F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} B_2 & D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

por lo que

$$\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}} = \text{rang } \mathbf{A}_1 + \text{rang } \mathbf{A}_2$$

Pasemos pues a calcular los rangos de las matrices  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$ .

(I.2.6) LEMA.

Con las notaciones anteriores

$$\text{rang } \mathbf{A}_1 = \sum_{i=1}^r (n \cdot k_i + m + r_0 + \dots + r_{k_i-2})$$

DEMOSTRACIÓN:

Según hemos visto en (I.2.5) y partiendo la matriz  $B_1$  en bloques según los tamaños de  $C_i$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{1r} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad B_{1i} = \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix} \in M_{nk_i \times mk_i}(\mathbb{C})$$

tenemos que la matriz  $A_1$  tiene la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & & & & B_{11} & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & C_r & & & & & B_{1r} \\ F_{11} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & F_{1r} & & & & & \\ & & & F_{21} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & F_{2r} \end{pmatrix}$$

que por transformaciones elementales por bloques (permutaciones de bloques), se transforma en

$$\begin{pmatrix} C_1 & B_{11} & & & & & & \\ F_{11} & 0 & & & & & & \\ 0 & F_{21} & & & & & & \\ & & C_2 & B_{12} & & & & \\ & & F_{12} & 0 & & & & \\ & & 0 & F_{22} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & C_r & B_{1r} \\ & & & & & & F_{1r} & 0 \\ & & & & & & 0 & F_{2r} \end{pmatrix}$$

matriz diagonal por bloques, en que todos los bloques son del mismo tipo, variando a lo sumo de tamaño. El rango de dicha matriz es la suma de los rangos de cada bloque, por lo que calcularemos genéricamente el rango de uno de estos bloques.



tal y como queríamos probar.

(I.2.7) Pasemos a calcular  $\text{rango } \mathbf{A}_2 = \text{rango}(B_2 D)$ .

LEMA.

Con las notaciones de (I.2.5), tenemos

$$\begin{aligned} \text{rang } \mathbf{A}_2 &= pn - p^2 + (n - p)^2 - \sum_i (\sigma_1(i) + 3\sigma_2(i) + \dots + (2l_i - 1)\sigma_{l_i}(i)) = \\ &= n^2 - n \sum_{i=1}^r k_i - \sum_i (\sigma_1(i) + 3\sigma_2(i) + \dots + (2l_i - 1)\sigma_{l_i}(i)) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

Partiendo la matriz  $B_2$  en bloques  $B_{ij}$ , correspondientes a los bloques  $D_{ij}$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} B_{11} & & D_{11} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & B_{qt} & & D_{qt} \end{pmatrix}$$

que mediante permutaciones de columnas pasa a ser una matriz diagonal por bloques

$$\begin{pmatrix} B_{11} & D_{11} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & B_{qt} & D_{qt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ij} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & H_{qt} \end{pmatrix}$$

en que cada bloque tiene la forma

$$H_{ij} = B_{ij} D_{ij} = \begin{pmatrix} B & & A - \lambda_i I_n & & \\ & B & & -I_n & \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & B & & \ddots \\ & & & & -I_n & A - \lambda_i I_n \end{pmatrix}$$

y  $\text{rang}(B_2 D) = \sum \text{rang} H_{ij}$ .

Analicemos la matrices  $H_{ij}$ ; teniendo en cuenta la forma de la matriz  $A = \begin{pmatrix} N & \\ & J \end{pmatrix}$

y la de la matriz  $B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , y partiendo la matriz identidad según los bloques de

$A$ ,  $I_n = \begin{pmatrix} I_1 & \\ & I_2 \end{pmatrix}$ , tenemos

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N - \lambda_i I_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & J - \lambda_i I_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 & -I_1 & 0 & N - \lambda_i I_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -I_2 & 0 & J - \lambda_i I_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -I_1 & 0 & N - \lambda_i I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_2 & 0 & J - \lambda_i I_2 \end{pmatrix}$$

que mediante transformaciones elementales por bloques, vemos que es equivalente a

$$\mathcal{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{ij}^1 & \\ & \mathcal{K}_{ij}^2 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\mathcal{K}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} E & & & N - \lambda_i I_1 & & & & & \\ & E & & -I_1 & & N - \lambda_i I_1 & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & E & & & & -I_1 & N - \lambda_i I_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{K}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} J - \lambda_i I_2 & & & & & & & & \\ & -I_2 & & J - \lambda_i I_2 & & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & & & & -I_2 & & J - \lambda_i I_2 & \end{pmatrix}$$

Se tiene  $\text{rang } H_{ij} = \text{rang } \mathcal{K}_{ij}^1 + \text{rang } \mathcal{K}_{ij}^2$ .

Obviamente  $\text{rang } \mathcal{K}_{ij}^1$  es máximo

$$\text{rang } \mathcal{K}_{ij}^1 = (k_1 + \dots + k_r)(\sigma_j(i))$$

Y la matriz  $\mathcal{K}_{ij}^2$  no es más que un bloque de  $I_2 \otimes J - J^t \otimes I_2$ , que es la matriz correspondiente al sistema

$$(I_2 \otimes J - J^t \otimes I_2) \text{vec}(X) = 0$$

que es a su vez equivalente al sistema  $JX - XJ = 0$ , del cual conocemos la dimensión del espacio de soluciones (ver por ejemplo [17]).

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{rang}(B_2 \ D) &= \sum_{ij} p\sigma_i(j) + \text{rang}(I \otimes J - J^t \otimes I) \\ &= pn - p^2 + (n - p)^2 - \sum_i (\sigma_1(i) + 3\sigma_2(i) + \dots + (2l_i - 1)\sigma_{l_i}(i)) \end{aligned}$$

(I.2.8) Combinando los resultados de (I.2.5), (I.2.6), y (I.2.7) obtenemos

PROPOSICIÓN.

$$\dim \mathcal{S} = n^2 + nm - \left( \sum_{i=1}^r (n \cdot k_i + m + r_0 + \dots + r_{k_i-2}) \right) \\ - (pn - p^2 + (n - p)^2 - \sum_i (\sigma_1(i) + 3\sigma_2(i) + \dots + (2l_i - 1)\sigma_{l_i}(i)))$$

## II. Solución del sistema de ecuaciones.

### (II.1) Descomposición del sistema.

(II.1.1) Si bien resolveremos el sistema para el caso en que la pareja de matrices  $(A \ B)$ , está en su forma reducida de Brunovsky, debido a que sólomente hacemos uso de este caso, por (I.2.1), sabemos que conocida la solución para este caso tenemos la solución para cualquier pareja de matrices equivalente a ella, previo conocimiento de la matriz de paso de una a su equivalente.

(II.1.2) Sea pues  $(A \ B) \in M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , en su forma reducida de Brunovsky, es decir y según capítulo 0 (II.3.1)

$$\begin{pmatrix} N & \\ & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Resolveremos el sistema partiéndolo en sistemas independientes y resolviéndolos por separado. La partición a hacer es según los bloques  $N_i, J_\ell, E_j$ . Al igual que hemos hecho en el cap 1 (II.2.3), empezamos sin embargo, haciendo una primera partición según los bloques  $N, J$  y  $E$ , y las correspondientes particiones en las matrices incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{pmatrix}$$

con  $X_1^1 \in M_p(\mathbf{C}), Y_1^1 \in M_{r \times p}(\mathbf{C})$ .

Nos queda el sistema partido en cinco sistemas independientes a saber

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} [N, X_1^1] + EY_1^1 = 0 \\ X_1^1 E = 0 \\ Y_1^1 E = 0 \end{array} \right\} \text{ I} \\
 NX_2^1 - X_2^1 J + EY_2^1 = 0 \} \text{ III} \\
 \left. \begin{array}{l} JX_1^2 - X_1^2 N = 0 \\ X_1^2 E = 0 \end{array} \right\} \text{ II} \\
 Y_1^2 E = 0 \} \text{ IV} \\
 [J, X_2^2] = 0 \text{ V}
 \end{array}$$

Notamos que el primero de ellos es como el general pero para parejas de matrices completamente controlables con  $\text{rang } B = m$ . Y el último es el sistema  $JX_2^2 - X_2^2 J = 0$  resuelto, como ya hemos comentado por diversos autores, por ejemplo [16] [35]. Notamos también que  $Y_2^2$  no interviene en el sistema, por lo que es libre.

## (II.2) Resolución del sistema I.

(II.2.1) Pasemos ahora, a resolver el sistema I, es decir

$$\left. \begin{array}{l} [A, X] + BY = 0 \\ XB = 0 \\ YB = 0 \end{array} \right\}$$

que, tal y como hemos dicho, corresponde al sistema inicial para el caso en la pareja de matrices  $(A, B) \in M_n(\mathbf{C}) \times M_{n \times m}(\mathbf{C})$ , en su forma reducida de Brunovsky, completamente controlable y  $\text{rang } B = m \leq n$ . Es decir,  $A$  y  $B$  son diagonales por bloques:

$$A = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_m \end{pmatrix}$$

con

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{k_i}(\mathbf{C}), \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{k_i \times 1}(\mathbf{C}).$$

siendo  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$  los índices de controlabilidad de la pareja.

Partamos las matrices incógnitas  $X$  e  $Y$  en bloques correspondientes a los bloques de  $A$  y  $B$ :

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_m^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^m & X_2^m & \dots & X_m^m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & \dots & Y_m^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & \dots & Y_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^m & Y_2^m & \dots & Y_m^m \end{pmatrix}$$

con  $X_j^i \in M_{k_i \times k_j}(\mathbf{C})$  y  $Y_j^i \in M_{1 \times k_j}(\mathbf{C})$ .

Por lo que el sistema de ecuaciones queda

$$\left. \begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc} N_1 X_1^1 - X_1^1 N_1 + E_1 Y_1^1 & \dots & N_1 X_m^1 - X_m^1 N_m + E_1 Y_m^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ N_m X_1^m - X_1^m N_m + E_m Y_1^m & \dots & N_m X_m^m - X_m^m N_m + E_m Y_m^m \end{array} \right) = 0 \\ \left( \begin{array}{ccc} X_1^1 E_1 & \dots & X_m^1 E_m \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^m E_1 & \dots & X_m^m E_m \end{array} \right) = 0 \\ \left( \begin{array}{ccc} Y_1^1 E_1 & \dots & Y_m^1 E_m \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_1^m E_1 & \dots & Y_m^m E_m \end{array} \right) = 0 \end{array} \right\}$$

Obsérvese que  $X_j^i E_j$  es una matriz columna, formada por la última columna de  $X_j^i$ .

Y que  $Y_j^i E_j$  es una matriz columna, formada por la última columna de  $Y_j^i$ .

(II.2.2) Acabamos pues, de partir el sistema en  $m^2$  sistemas independientes a saber:

$$\left. \begin{array}{l} N_1 X_1^1 - X_1^1 N_1 + E_1 Y_1^1 = 0 \\ X_1^1 E_1 = 0 \\ Y_1^1 E_1 = 0 \end{array} \right\}, \quad \dots \quad \left. \begin{array}{l} N_1 X_m^1 - X_m^1 N_m + E_1 Y_m^1 = 0 \\ X_m^1 E_m = 0 \\ Y_m^1 E_m = 0 \end{array} \right\}, \\
\left. \begin{array}{l} N_2 X_1^2 - X_1^2 N_1 + E_2 Y_1^2 = 0 \\ X_1^2 E_1 = 0 \\ Y_1^2 E_1 = 0 \end{array} \right\}, \quad \dots \quad \left. \begin{array}{l} N_2 X_m^2 - X_m^2 N_m + E_2 Y_m^2 = 0 \\ X_m^2 E_m = 0 \\ Y_m^2 E_m = 0 \end{array} \right\}, \\
\dots\dots\dots \\
\left. \begin{array}{l} N_m X_1^m - X_1^m N_1 + E_m Y_1^m = 0 \\ X_1^m E_1 = 0 \\ Y_1^m E_1 = 0 \end{array} \right\}, \quad \dots \quad \left. \begin{array}{l} N_m X_m^m - X_m^m N_m + E_m Y_m^m = 0 \\ X_m^m E_m = 0 \\ Y_m^m E_m = 0 \end{array} \right\},$$

Todos estos sistemas, son del mismo tipo diferenciándose a lo sumo en el tamaño de las matrices.

(II.2.3) Es decir, genéricamente, tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} N_1 X - X N_2 + E_1 Y = 0 \\ X E_2 = 0 \\ Y E_2 = 0 \end{array} \right\}$$

con

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_{k_i}(\mathbf{C}) \quad \text{y} \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{k_i \times 1}(\mathbf{C})$$

Para simplificar notaciones, escribiremos  $p = k_1$  y  $q = k_2$ .

De dicho sistema se distinguen dos casos  $q > p + 1$  y  $q \leq p + 1$ , que pasamos a analizar.

(II.2.4) Supongamos primero que  $q > p + 1$ .

$$\text{Sean } X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_q^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p & x_2^p & \dots & x_q^p \end{pmatrix} \text{ y } Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q)$$

Teniendo en cuenta la forma de las matrices  $N_1$  y  $N_2$  el sistema se describe de la manera

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 - x_1^1 & x_3^2 - x_2^1 & \dots & x_p^2 - x_{p-1}^1 & \dots & x_q^2 - x_{q-1}^1 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^2 & x_3^3 - x_2^2 & \dots & x_p^3 - x_{p-1}^2 & \dots & x_q^3 - x_{q-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p & x_2^p - x_1^{p-1} & x_3^p - x_2^{p-1} & \dots & x_p^p - x_{p-1}^{p-1} & \dots & x_q^p - x_{q-1}^{p-1} \\ y_1 & y_2 - x_1^p & y_3 - x_2^p & \dots & y_p - x_{p-1}^p & \dots & y_q - x_{q-1}^p \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_q^1 \\ x_q^2 \\ \vdots \\ x_q^p \end{pmatrix} \\ y_q = 0 \end{array} \right\} = 0$$

de donde se obtienen las igualdades siguientes

$$x_1^2 = x_2^3 = x_3^4 = \dots = x_{p-1}^p = y_p = 0$$

$$x_1^3 = x_2^4 = x_3^5 = \dots = x_{p-2}^p = y_{p-1} = 0$$

$$\dots$$

$$x_1^{p-1} = x_2^p = y_3 = 0$$

$$x_1^p = y_2 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$x_1^1 = x_2^2 = x_3^3 = \dots = x_p^p = y_{p+1}$$

$$x_2^1 = x_3^2 = x_4^3 = \dots = x_{p+1}^p = y_{p+2}$$

$$\dots$$

$$x_{q-p-1}^1 = x_{q-p}^2 = x_{q-p+1}^3 = \dots = x_{q-2}^p = y_{q-1}$$

$$x_{q-p}^1 = x_{q-p+1}^2 = x_{q-p+2}^3 = \dots = x_{q-1}^p = y_q$$

$$x_{q-p+1}^1 = x_{q-p+2}^2 = x_{q-p+3}^3 = \dots = x_q^p$$

...

$$x_{q-2}^1 = x_{q-1}^2 = x_q^3$$

$$x_{q-1}^1 = x_q^2 = 0$$

$$x_q^1 = x_q^2 = \dots = x_q^p = 0$$

$$y_q = 0$$

De las que se desprende que la matriz  $X$  es una matriz triangular superior y que los elementos que ocupan los lugares correspondientes a las  $q - p - 1$  diagonales paralelas a la diagonal principal son iguales y las  $p + 1$  restantes son nulas

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & & \dots & x_{q-p-1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_1^1 & x_2^1 & & \dots & x_{q-p-2}^1 & x_{q-p-1}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{q-p-2}^1 & x_{q-p-1}^1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, es una matriz rectangular, triangular superior de tipo Toeplitz.

La matriz  $Y$  es tal que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

sigue siendo una matriz de tipo Toeplitz, es decir

$$Y = (0 \quad \dots \quad 0 \quad x_1^1 \quad \dots \quad x_{q-p-1}^1 \quad 0)$$

(II.2.6) Sea ahora  $q \leq p + 1$ .

Al igual que en el caso anterior y teniendo en cuenta la forma de las matrices  $N_1$  y

$N_2$  el sistema se describe de la manera

$$\left. \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cccc} x_1^2 & x_2^2 - x_1^1 & x_3^2 - x_2^1 & \dots & x_q^2 - x_{q-1}^1 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^2 & x_3^3 - x_2^2 & \dots & x_q^3 - x_{q-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^q & x_2^q - x_1^{q-1} & x_3^q - x_2^{q-1} & \dots & x_q^q - x_{q-1}^{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p & x_2^p - x_1^{p-1} & x_3^p - x_2^{p-1} & \dots & x_q^p - x_{q-1}^{p-1} \\ y_1 & y_2 - x_1^p & y_3 - x_2^p & \dots & y_q - x_{q-1}^p \end{array} \right) = 0 \\ \left( \begin{array}{c} x_q^1 \\ x_q^2 \\ \vdots \\ x_q^q \\ \vdots \\ x_q^p \end{array} \right) = 0 \\ y_q = 0 \end{array} \right\}$$

de donde se obtienen las igualdades siguientes:

$$x_1^2 = x_2^3 = x_3^4 = \dots = x_q^{q+1} = 0$$

$$x_1^3 = x_2^4 = x_3^5 = \dots = x_q^{q+2} = 0$$

...

$$x_1^{p-q+2} = x_2^{p-q+3} = \dots = x_{q-1}^p = y_q = 0$$

...

$$x_1^p = y_2 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$x_1^1 = x_2^2 = x_3^3 = \dots = x_q^q$$

$$x_2^1 = x_3^2 = x_4^3 = \dots = x_{q-1}^q$$

...

$$x_{q-1}^1 = x_q^2$$

$$x_q^1 = x_q^2 = \dots = x_q^q = \dots = x_q^p = 0$$

$$y_q = 0$$

De las que se desprende que tanto la matriz  $X$  como la matriz  $Y$  son matrices nulas.

**(II.3) Resolución del sistema II.**

(II.3.1) Resolvamos ahora el sistema II:

$$\left. \begin{aligned} JX - XN &= 0 \\ XB &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con  $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_m \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_m \end{pmatrix}$

y  $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_{k_i}(\mathbf{C})$ ,  $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{k_i \times 1}(\mathbf{C})$ .

Partiendo la matriz incógnita  $X$ , en bloques correspondientes a los bloques de  $J$  y  $N$  respectivamente:

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_m^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^s & X_2^s & \dots & X_m^s \end{pmatrix}$$

con  $X_j^i \in M_{l_i \times k_j}(\mathbf{C})$ .

El sistema de ecuaciones queda

$$\left. \begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc} J_1 X_1^1 - X_1^1 N_1 & \dots & J_1 X_m^1 - X_m^1 N_m \\ \dots & \dots & \dots \\ J_s X_1^s - X_1^s N_1 & \dots & J_s X_m^s - X_m^s N_m \end{array} \right) = 0 \\ \left( \begin{array}{ccc} X_1^1 E_1 & \dots & X_m^1 E_m \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^s E_1 & \dots & X_m^s E_m \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \right\}$$

(II.3.2) Quedando pues, el sistema partido en  $s \cdot m$  sistemas, a saber:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} J_1 X_1^1 - X_1^1 N_1 &= 0 \\ &\dots \\ X_1^1 E_1 &= 0 \end{aligned} \right\} & \dots & \left. \begin{aligned} J_1 X_m^1 - X_m^1 N_m &= 0 \\ &\dots \\ X_m^1 E_m &= 0 \end{aligned} \right\} \\ \dots & & \dots \\ \left. \begin{aligned} J_s X_1^s - X_1^s N_1 &= 0 \\ &\dots \\ X_1^s E_1 &= 0 \end{aligned} \right\} & \dots & \left. \begin{aligned} J_s X_m^s - X_m^s N_m &= 0 \\ &\dots \\ X_m^s E_m &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

(II.3.3) Por lo que genéricamente tenemos que resolver

$$\left. \begin{aligned} JX - XN &= 0 \\ XE &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{con } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_p(\mathbf{C}),$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_q(\mathbf{C}),$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{q \times 1}(\mathbf{C}) \text{ y } X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_q^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p & x_2^p & \dots & x_q^p \end{pmatrix} \in M_{p \times q}(\mathbf{C})$$

(II.3.4) Notamos que, el conjunto de soluciones  $\mathcal{S}$  de dicho sistema es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \{X = (x_j^i) \mid x_q^1 = \dots = x_q^p = 0\}$$

siendo  $\mathcal{S}_1$  el conjunto de soluciones de la ecuación matricial  $JX - XN = 0$ , resuelta en diversos libros clásicos de Álgebra lineal, ver por ejemplo [17], [34]; y  $\{X = (x_j^i) \mid x_q^1 = \dots = x_q^p = 0\}$  es el conjunto de soluciones del sistema  $XE = 0$ . Describamos pues  $\mathcal{S}_1$ .

Si  $\lambda$  es no nulo el sistema  $JX - XN = 0$  tiene una única solución, evidentemente idénticamente nula, por lo que  $\mathcal{S} = \{0\}$ . Supongamos pues que  $\lambda = 0$ , en cuyo caso el conjunto de soluciones  $\mathcal{S}_1$  es:

Si  $p = q$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_{p-1}^1 & x_p^1 \\ 0 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{p-2}^1 & x_{p-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_1^1 & x_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^1 \end{pmatrix}$$

Si  $p < q$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_{q-p+1}^1 & x_{q-p+2}^1 & x_{q-p+3}^1 & \dots & x_{q-1}^1 & x_q^1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_{q-p+1}^1 & x_{q-p+2}^1 & \dots & x_{q-2}^1 & x_{q-1}^1 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{q-p+1}^1 & x_{q-p+2}^1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{q-p+1}^1 \end{pmatrix}$$

Si  $p > q$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_{q-1}^1 & x_q^1 \\ 0 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{q-2}^1 & x_{q-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_1^1 & x_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que, para cada  $p$  y  $q$ , la matriz solución  $X$  es una matriz triangular superior de tipo Toeplitz.

Intersecando ahora con  $\{X = (x_j^i) \mid x_q^1 = \dots = x_q^p = 0\}$ , es decir, el conjunto de matrices de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{q-1}^1 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{q-1}^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p & x_2^p & \dots & x_{q-1}^p & 0 \end{pmatrix}$$

resulta que  $\mathcal{S} = \{0\}$ , es decir la matriz  $X$  es la matriz idénticamente nula.

En definitiva tenemos que  $\mathcal{S} = \{0\}$ , independientemente del valor de  $\lambda$ .

(II.3.5) Por tanto  $X_1^2 = 0$ .

### (II.4) Resolución del sistema III.

(II.4.1) Resolvamos ahora el sistema III:

$$NX - XJ + BY = 0\}$$

que al igual que en los sistemas I y II partimos las matrices incógnitas  $X$  e  $Y$ , en bloques correspondientes a los de  $J$  y  $N$ , siendo éstas las matrices diagonales por bloques, como las dadas en I y II.

Tenemos pues

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_s^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^m & X_2^m & \dots & X_s^m \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & \dots & Y_s^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & \dots & Y_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^m & Y_2^m & \dots & Y_s^m \end{pmatrix}$$

con  $X_j^i \in M_{k_i \times l_j}(\mathbf{C})$  y  $Y_j^i \in M_{1 \times k_j}(\mathbf{C})$

Por lo que el sistema de ecuaciones, queda de la forma

$$\begin{pmatrix} N_1 X_1^1 - X_1^1 J_1 + E_1 Y_1^1 & \dots & N_1 X_s^1 - X_s^1 J_s + E_1 Y_s^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ N_m X_1^m - X_1^m J_1 + E_m Y_1^m & \dots & N_m X_s^m - X_s^m J_s + E_m Y_s^m \end{pmatrix} = 0$$

(II.4.2) Hemos partido el sistema en  $ms$ , ecuaciones independientes a saber

$$\{N_1 X_1^1 - X_1^1 J_1 + E_1 Y_1^1 = 0\} \quad \dots \quad \{N_1 X_s^1 - X_s^1 J_s + E_1 Y_s^1 = 0\}$$

...

$$\{N_m X_1^m - X_1^m J_1 + E_m Y_1^m = 0\} \quad \dots \quad \{N_m X_s^m - X_s^m J_s + E_m Y_s^m = 0\}$$

Todas estas ecuaciones matriciales son del mismo tipo, diferenciándose a lo sumo en el tamaño. Por lo que, genéricamente, tenemos que resolver

$$NX - XJ + EY = 0\}$$

con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbf{C}),$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_q(\mathbf{C}),$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{p \times 1}(\mathbf{C}),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_q^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p & x_2^p & \dots & x_q^p \end{pmatrix} \in M_{p \times q}(\mathbf{C})$$

$$Y = (y_1 \quad \dots \quad y_q) \in M_{1 \times q}(\mathbf{C}).$$

Teniendo en cuenta la forma de las matrices  $N$ , y  $J$ , la ecuación matricial, se describe de la manera:

$$\left( \begin{array}{cccc} x_1^2 - \lambda x_1^1 & x_2^2 - x_1^1 - \lambda x_2^1 & \dots & x_q^2 - x_{q-1}^1 - \lambda x_q^1 \\ x_1^3 - \lambda x_1^2 & x_2^3 - x_1^2 - \lambda x_2^2 & \dots & x_q^3 - x_{q-1}^2 - \lambda x_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^p - \lambda x_1^{p-1} & x_2^p - x_1^{p-1} - \lambda x_2^{p-1} & \dots & x_q^p - x_{q-1}^{p-1} - \lambda x_q^{p-1} \\ y_1 - \lambda x_1^p & y_2 - x_1^p - \lambda x_2^p & \dots & y_q - x_{q-1}^p - \lambda x_q^p \end{array} \right) = 0$$

(II.4.3). De donde e inductivamente, se obtienen las igualdades siguientes:

$$x_1^2 = \lambda x_1^1$$

$$x_1^3 = \lambda^2 x_1^1$$

$$\vdots$$

$$x_1^p = \lambda^{p-1} x_1^1$$

$$y_1 = \lambda^p x_1^1$$

$$x_2^2 = x_1^1 + \lambda x_2^1$$

$$x_2^3 = 2\lambda x_1^1 + \lambda^2 x_2^1$$

$$\vdots$$

$$x_2^p = (p-1)\lambda^{p-2} x_1^1 + \lambda^{p-1} x_2^1$$

$$y_2 = p\lambda^{p-1} x_1^1 + \lambda^p x_2^1$$

$$\begin{aligned}
x_j^2 &= x_{j-1}^1 + \lambda x_j^1 \\
x_j^3 &= \binom{2}{0} \lambda x_{j-2}^1 + \binom{2}{1} \lambda x_{j-1}^1 + \binom{2}{2} \lambda^2 x_j^1 \\
&\vdots \\
x_j^i &= \binom{i-1}{a_{ij}-1} \lambda^{i-a_{ij}} x_{j-(a_{ij}-1)}^1 + \dots + \binom{i-1}{1} \lambda^{i-2} x_{j-1}^1 + \binom{i-1}{0} \lambda^{i-1} x_j^1 \\
&\vdots \\
x_j^p &= \binom{p-1}{a_{pj}-1} \lambda^{p-a_{pj}} x_{j-(a_{pj}-1)}^1 + \dots + \binom{p-1}{1} \lambda^{p-2} x_{j-1}^1 + \binom{p-1}{0} \lambda^{p-1} x_j^1 \\
y_j &= \binom{p}{a_{pj}} \lambda^{p-a_{pj}+1} x_{j-(a_{pj}-2)}^1 + \dots + \binom{p-1}{1} \lambda^{p-1} x_{j-1}^1 + \binom{p-1}{0} \lambda^{p-1} x_j^1 \\
&\vdots \\
x_q^2 &= x_{q-1}^1 + \lambda x_q^1 \\
x_q^3 &= \binom{2}{0} \lambda x_{q-2}^1 + \binom{2}{1} \lambda x_{q-1}^1 + \binom{2}{2} \lambda^2 x_q^1 \\
&\vdots \\
x_q^i &= \binom{i-1}{a_{iq}-1} \lambda^{i-a_{iq}} x_{q-(a_{iq}-1)}^1 + \dots + \binom{i-1}{1} \lambda^{i-2} x_{q-1}^1 + \binom{i-1}{0} \lambda^{i-1} x_q^1 \\
&\vdots \\
x_q^p &= \binom{p-1}{a_{pq}-1} \lambda^{p-a_{pq}} x_{q-(a_{pq}-1)}^1 + \dots + \binom{p-1}{1} \lambda^{p-2} x_{q-1}^1 + \binom{p-1}{0} \lambda^{p-1} x_q^1 \\
y_q &= \binom{p}{a_{pq}} \lambda^{p-a_{pq}+1} x_{q-(a_{pq}-2)}^1 + \dots + \binom{p-1}{1} \lambda^{p-1} x_{q-1}^1 + \binom{p-1}{0} \lambda^{p-1} x_q^1
\end{aligned}$$

siendo  $a_{ij} = \min(i, j)$ ,  $a_{pj} = \min(p, j)$ ,  $a_{iq} = \min(i, q)$  y  $a_{pq} = \min(p, q)$

## (II.5) Resolución del sistema IV.

(II.5.1) Por último, resolvamos el sistema IV:

$$YB = 0$$

con  $B$  como antes y  $Y \in M_{m-r \times p}(\mathbb{C})$ , de fácil resolución, pero que también partiremos

para mayor sencillez de escritura. Sea pues

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & \dots & Y_m^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & \dots & Y_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^p & y_2^p & \dots & Y_m^p \end{pmatrix}$$

con  $Y_{ij} \in M_{1 \times k_j}(\mathbf{C})$ .

Por lo que el sistema resulta

$$\begin{pmatrix} Y_1^1 E_1 & \dots & Y_m^1 E_m \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_1^p E_1 & \dots & Y_m^p E_m \end{pmatrix} = 0.$$

(II.5.2) Al igual que en los demás sistemas, la ecuación matricial ha quedado partida en  $s \cdot m$  ecuaciones independientes y observamos que en este caso, las ecuaciones son lineales. Por lo que, genéricamente, sólo hay que resolver

$$YE = 0$$

con  $Y = (y_1 \dots y_q)$  y  $E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(II.5.3) Por lo que  $YE = y_q = 0$  y el conjunto de soluciones de dicha ecuación es

$$Y = (y_1 \dots y_{q-1} \ 0).$$

## (II.6) Descripción del conjunto de soluciones del sistema.

(II.6.1) Finalmente tenemos resuelto el sistema de ecuaciones (II.2.1), cuya solución es:

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ 0 & X_2^2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 \end{pmatrix}$$

con

$$X_1^1 = \begin{pmatrix} X_{11}^{11} & \dots & X_{1m}^{11} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{11}^{1m} & \dots & X_{1m}^{1m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_{1j}^{1i} \quad \text{como en (II.2.3)}$$

$$Y_1^1 = \begin{pmatrix} Y_{11}^{11} & \dots & Y_{1m}^{11} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{11}^{1m} & \dots & Y_{1m}^{1m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y_{1j}^{1i} \quad \text{como en (II.2.3)}$$

$$X_2^1 = \begin{pmatrix} X_{21}^{11} & \dots & X_{2s}^{11} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{21}^{1m} & \dots & X_{2s}^{1m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_{2j}^{1i} = (x_{ab}) \quad \text{como en (II.4.3)}$$

$$Y_2^1 = \begin{pmatrix} Y_{21}^{11} & \dots & Y_{2s}^{11} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{21}^{1m} & \dots & Y_{2s}^{1m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y_{2j}^{1i} = (y_{ab}) \quad \text{como en (II.4.3)}$$

$$Y_1^2 = \begin{pmatrix} Y_{11}^{21} & \dots & Y_{1m}^{21} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{11}^{2t} & \dots & Y_{1m}^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y_{1j}^{2i} \quad \text{como en (II.5.3)}$$

$X_2^2$  como [1]

$Y_2^2$  es libre.



## Capítulo 2

### Semejanza por bloques global de clase $C^r$

Ya hemos hecho notar en la introducción al capítulo anterior que la familia formada por las reducidas de Brunovsky de una familia diferenciable de parejas de matrices no es, en general, diferenciable. Y que tampoco existe, en general, una familia diferenciable de cambios de base que transforme cada pareja de la familia dada en su reducida de Brunovsky. En este capítulo vamos a dar condiciones suficientes para que exista una tal familia diferenciable de cambios de base. Esto es, para que existan familias de matrices inversibles  $\begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ R(t) & Q(t) \end{pmatrix}$  con  $t \in M$ , tales que

$$(P(t))^{-1}(A(t), B(t)) \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ R(t) & Q(t) \end{pmatrix} = (A_0(t), B_0(t))$$

siendo  $(A_0(t), B_0(t))$  la forma reducida de Brunovsky de  $(A(t), B(t))$  para cada  $t \in M$ . Concretamente, probaremos que una condición suficiente para ello es que la familia dada tenga los invariantes discretos constantes, y que la variedad  $M$  sea contráctil.

La herramienta clave para ello va a ser el estudio de las familias diferenciables de subespacios vectoriales de dimensión constante. En primer lugar, se demuestran las siguientes dos caracterizaciones de la diferenciable de una tal familia:

- i) Existencia de bases locales diferenciables.
- ii) Representación local como imagen de un subespacio fijo por una familia de isomorfismos.

Y en segundo lugar la globalización de estas propiedades si la variedad de parámetros es contráctil.

Para este estudio, consideraremos dichas familias de subespacios como aplicaciones diferenciables en la variedad grasmaniana, y sobre ella fibrados principales de bases y de transformaciones. Presentaremos todo ello en un apartado previo. Por otra parte probaremos que la topología habitual sobre la grasmaniana coincide con la llamada métrica gap.

Finalmente, y como muestra de la posibilidad de aplicación de estas técnicas en otros ámbitos, estudiamos la diferenciabilidad de la familia de inversas de Moore-Penrose de una familia de matrices dada.

Como ya hemos dicho, el apartado (0) está destinado a fijar notaciones, y a presentar la topología (0.2) y la estructura diferenciable (0.4) de la grasmaniana, así como diversos fibrados principales sobre ella (0.5.6).

En el apartado (1) se presenta la llamada métrica gap (I.2), y se prueba que la topología métrica que define, coincide con la habitual de la grasmaniana (I.6).

El apartado (II) contiene el estudio de las familias diferenciables de subespacios de dimensión constante. En (II.1) se prueban las dos caracterizaciones antes expresadas de la diferenciabilidad de una tal familia (II.1.2), y se aplican a algunos ejemplos que necesitaremos en lo que sigue (II.1.5,6). En (II.2) se demuestra que dichas caracterizaciones pueden extenderse a toda la variedad de parámetros si ésta es contráctil (II.2.2), aplicándolo en particular a los ejemplos aludidos (II.2.5).

En el apartado (III) se aborda el objetivo central del capítulo. En (III.1) se prueba la diferenciabilidad de los valores propios, tanto de matrices cuadradas (III.1.2), como de parejas de matrices (III.1.5). En (III.2) demostramos con nuestras técnicas el resultado ya conocido de existencia de bases de Jordan diferenciables globales para familias diferenciables de matrices de tipo de Jordan constante, supuesto que la variedad de parámetros es contráctil (III.2.1). Bajo esta misma hipótesis, en (III.3) probamos

el resultado análogo de existencia de familias de bases de Brunovsky de parejas de matrices (III.3.1), que constituirá nuestro objetivo principal.

Finalmente, en el apartado (IV) las técnicas anteriores se aplican para probar que dada una familia diferenciable de matrices de rango constante, la familia de inversas de Moore-Penrose es asimismo diferenciable, y puede obtenerse mediante operaciones matriciales diferenciables si la variedad de parámetros es contráctil (IV.3).

## 0. La variedad grasmaniana $Gr_{k,n}$ .

(0.0) Vamos a fijar las notaciones relativas a la variedad grasmaniana que usaremos a lo largo de este capítulo. A menudo se considera en  $Gr_{k,n}$ , la topología inducida por la llamada métrica *gap*, (ver por ejemplo, [21]). En el próximo apartado vamos a probar que de hecho, estas dos topologías son equivalentes.

(0.1) En lo que sigue,  $(e_1, \dots, e_n)$  es la base canónica de  $\mathbf{C}^n$ , y  $Gr_{k,n}$  el conjunto de todos los subespacios de dimensión  $k$  de  $\mathbf{C}^n$ . Si  $v_1, \dots, v_s$  son vectores de  $\mathbf{C}^n$ , denotaremos  $[v_1, \dots, v_s]$  al subespacio generado por ellos.

Denotaremos por  $Id$  a la aplicación identidad, y por  $Id_k$  a la  $k$ -matriz identidad.

En este contexto entendemos por variedad diferenciable, una  $C^r$ -variedad,  $0 < r \leq \infty$ . También, entendemos por aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables una aplicación de clase  $C^r$  con  $0 < r \leq \infty$ . (Si bien, todo ello es válido también, para el caso  $r = 0$ ).

$M_{n \times k}(\mathbf{C})$ , al igual que en los anteriores capítulos, es el espacio vectorial de matrices con  $n$  filas y  $k$  columnas, y a valores en  $K$ .

$\|\cdot\|_2$  es la norma usual en  $M_{n \times k}(\mathbf{C})$  definida por:  $\|A\|_2 = \|(a_i^j)_{i,j}\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (a_i^j)^2}$   
 $M_{n \times k}^*$  es el subconjunto abierto  $M_{n \times k}(\mathbf{C})$  formado por las matrices  $A$  tales que  $\text{rang } A = k$ ,  $k \leq n$ .

$\mathcal{O}_{n \times k}$  es el subconjunto compacto de  $M_{n \times k}^*$  formado por las matrices  $A$  tales que  $A^*A = Id_k$ , con  $A^* = \overline{A}^t$ .

$Gl(k; \mathbf{C})$  es el grupo lineal de matrices no-singulares de  $M_k(\mathbf{C})$ .

(0.2) Si  $A = (a_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in M_{n \times k}(\mathbf{C})$ , denotamos por  $a_j$  al vector columna  $(a_j^1, \dots, a_j^n)^t$  of  $\mathbf{C}^n$ ,  $1 \leq j \leq k$ , y  $[a_1, \dots, a_k]$  el subespacio vectorial generado por estos vectores  $a_1, \dots, a_k$ .

Consideramos la aplicación  $\pi : M_{n \times k}^* \rightarrow Gr_{k,n}$  definida por

$$\pi(A) = [a_1, \dots, a_k]$$

Si  $\pi(A) = L$ , decimos que  $A$  es una *representación matricial* del subespacio  $L$ .

La topología Grassmann habitual en  $Gr_{k,n}$  es la topología final con respecto a  $\pi$ . Con ello  $Gr_{k,n}$  es un espacio compacto.

(0.3) Para definir las secciones locales de  $\pi$  que usaremos en lo que sigue, introducimos las siguientes notaciones.

Sea  $A \in M_{n \times k}(K)$ . Si  $I = (i_1, \dots, i_k)$  es una familia de enteros tales que  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , notamos por  $A^I$  la submatriz de  $A$  formada por las filas  $i_1, \dots, i_k$ . También, por  $I^0$  denotaremos a los índices de las filas restantes, y por  $A^{I^0}$  a la submatriz de  $A$  formada por estas filas, en el mismo orden.

Con ello definimos las aludidas secciones locales como sigue:

$$V_I = \{A \in M_{n \times k}^* \mid \det A^I \neq 0\}$$

$$U_I = \pi(V_I) \subset Gr_{k,n}$$

$$\sigma_I : U_I \rightarrow V_I$$

definidas por las condiciones

$$\pi \circ \sigma_I = Id, \quad (\sigma_I(L))^I = Id_k$$

esto es, fijado  $I$ ,  $\sigma_I(L)$  es la única representación matricial  $A$  de  $L$  tal que  $A^I = Id_k$

Si  $B \in V_I$  es una representación matricial de  $L \in \mathcal{U}_I$  cualquiera, entonces:

$$\sigma_I(L) = \sigma_I(\pi(B)) = B(B^I)^{-1}$$

(0.4) A partir de las anteriores secciones locales, una familia de cartas locales  $(\mathcal{U}_I, \varphi_I)_I$  de la estructura diferenciable ordinaria de la variedad grasmaniana  $Gr_{k,n}$  viene dada por:

$$\varphi_I : \mathcal{U}_I \longrightarrow M_{(n-k) \times k}, \quad \text{con} \quad \varphi_I(L) = (\sigma_I L)^{I^0}$$

esto es, si  $A$  es la única matriz tal que  $\pi(A) = L$  y  $A^I = Id_k$ , entonces  $\varphi_I(L) = A^{I^0}$  es la submatriz de  $A$  obtenida eliminando las filas  $i_1, \dots, i_k$ .

(0.5) Igualmente, usando las secciones locales de (0.3), es fácil probar que

$$\pi : M_{n \times k}^* \longrightarrow Gr_{k,n}$$

es un fibrado diferenciable.

De hecho es un fibrado  $Gl(k; \mathbf{C})$ -principal respecto a las  $Gl(k; \mathbf{C})$ -acciones sobre  $M_{n \times k}^*$  y  $Gr_{k,n} \times Gl(k, \mathbf{C})$  definidas respectivamente por:

$$A \cdot P = AP$$

$$(L, P)P' = (L, PP')$$

(0.6) Para cada  $L_0 \in Gr_{k,n}$  fijo podemos considerar la aplicación

$$\pi' : Gl(n, \mathbf{C}) \longrightarrow Gr_{k,n}$$

$$\pi'(S) = SL_0$$

Esto es  $SL_0$  es el subespacio  $\pi(SA)$  donde  $A$  es una representación matricial cualquiera de  $L_0$ .

Esta aplicación define también un fibrado sobre  $Gr_{k,n}$ , cuyas secciones locales están definidas como

$$\sigma'_I : \mathcal{U}_I \longrightarrow Gl(n, \mathbf{C}), \quad \sigma'_I = s_I \circ \sigma_I$$

donde  $s_I : V_I \longrightarrow \pi'^{-1}(\mathcal{U}_I)$  está definida por

$$s_I(A) = (A \mid B), \quad B^I = 0, \quad B^{I^0} = Id_{n-k}$$

Si denotemos por  $\mathcal{H}$  la fibra de  $L_0$ , esto es, el subconjunto de  $Gl(n; \mathbf{C})$  formado por las matrices que dejan  $L_0$  fijo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi'^{-1}(L_0) = \{H \in Gl(n) \mid HL_0 = L_0\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} P & C \\ 0 & Q \end{pmatrix} \mid P \in Gl(k), Q \in Gl(n-k) \right\} \end{aligned}$$

se trata de hecho, de un fibrado  $\mathcal{H}$ -principal con respecto a las acciones sobre  $Gl(n; \mathbf{C})$  y  $Gr_{k,n} \times \mathcal{H}$  respectivamente

$$S \cdot H = SH,$$

$$(L, H)H' = (L, (H')^{-1}H).$$

## I. La métrica gap.

(I.1) Empecemos recordando la noción de *distancia gap* entre dos subespacios [21].

DEFINICIÓN:

Dados  $L, L' \in Gr_{k,n}$ , la *distancia gap* entre estos dos subespacios es

$$\Theta(L, L') = \|\Pi_L - \Pi_{L'}\|$$

donde  $\Pi_L, \Pi_{L'}$  son las proyecciones ortogonales sobre  $L$  y  $L'$  respectivamente, y la norma  $\|\cdot\|$  es

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

para algún endomorfismo  $f$  de  $\mathbf{C}^n$ .

De hecho,  $\Theta$  puede definirse entre subespacios de dimensiones distintas. Pero la siguiente proposición demuestra que  $\|\Pi_L - \Pi_{L'}\| = 1$  para cualquier pareja de subespacios  $L, L'$  con  $\dim L \neq \dim L'$ .

(I.2) Recordemos algunas propiedades de la métrica gap

PROPOSICIÓN ([21]- 13-1).

Si  $L, L' \in Gr_{k,n}$

$$1) \Theta(L, L') = \max\left(\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in L}} d(x, L'), \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in L'}} d(x, L)\right), \text{ donde } d(x, L') = \inf_{y \in L'} \|x - y\|$$

$$2) \Theta(L^\perp, L'^\perp) = \Theta(L, L')$$

$$3) \Theta(L, L') \leq 1$$

$$\Theta(L, L') < 1 \Leftrightarrow L \cap L'^\perp = L^\perp \cap L' = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{C}^n = L \oplus L'^\perp = L^\perp \oplus L'$$

(I.3) Nótese que si denotamos por  $B_1(L)$  (respec.  $\overline{B_1(L)}$ ) la bola abierta (respec. cerrada) de radio 1 y centro  $L$ , la propiedad (3) de la anterior proposición puede escribirse como sigue:

$$\overline{B_1(L)} = Gr_{k,n}$$

$$B_1(L) = \{L' \in Gr_{k,n}/\mathbf{C}^n = L' \oplus L^\perp\}$$

(I.4) Podemos interpretar geoméricamente los conjuntos abiertos por la topología habitual,  $\mathcal{U}_I$  definidos en (0.4):

PROPOSICIÓN.

Los abiertos  $\mathcal{U}_I$ , definidos en (0.4), quedan caracterizados por

$$\mathcal{U}_I = \{L \in Gr_{k,n}/\mathbf{C}^n = L \oplus [e_{i_1}, \dots, e_{i_k}]^\perp\} = B_1([e_{i_1}, \dots, e_{i_k}])$$

donde  $(e_1, \dots, e_n)$  es la base canónica de  $\mathbf{C}^n$ ,

La demostración es evidente.

(I.5) Para demostrar que la topología inducida por la métrica gap es equivalente a la topología grassmann. Vamos a necesitar el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN.

Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbf{C}^n$ , y  $A$  su matriz en la base canónica de  $\mathbf{C}^n$ . Entonces:

$$\|f\| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{\text{rang } f} \|f\|$$

(I.6) Con ello podemos ya demostrar:

TEOREMA.

La topología en  $Gr_{k,n}$  inducida por la métrica gap coincide con la topología grassmann.

DEMOSTRACIÓN:

Denotamos por  $(Gr_{k,n})_{gr}$  y  $(Gr_{k,n})_{gap}$  respectivamente, el espacio  $Gr_{k,n}$  con la topología grassmann y con la topología inducida por la métrica gap. Puesto que  $(Gr_{k,n})_{gr}$  es compacto, es suficiente probar que

$$Id : (Gr_{k,n})_{gr} \longrightarrow (Gr_{k,n})_{gap}$$

es continua, o equivalentemente, que la aplicación

$$\bar{\pi} : \mathcal{O}_{n \times k} \longrightarrow (Gr_{k,n})_{gap}$$

definida como la restricción de  $\pi$  a  $\mathcal{O}_{n \times k}$ , es continua.

Sea  $A, B \in \mathcal{O}_{n \times k}$ . Denotamos por  $A_a$  (respec.  $B_a$ ) al endomorfismo de  $\mathbf{C}^n$  cuya matriz en la base canónica es  $A$  (respec.  $B$ ).

Si  $L = \bar{\pi}(A)$  y  $L' = \bar{\pi}(B)$ , las matrices de las proyecciones ortogonales  $\Pi_L$  y  $\Pi_{L'}$  en la base canónica de  $K^n$  son  $AA^t$  y  $BB^t$  respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned}\Theta(\bar{\pi}(A), \bar{\pi}(B)) &= \Theta(L, L') = \|\Pi_L - \Pi_{L'}\| = \|A_a A_a^t - B_a B_a^t\| = \\ &= \|A_a(A_a^t - B_a^t) + (A_a - B_a)B_a^t\| \leq \|A_a\| \|A_a^t - B_a^t\| + \|A_a - B_a\| \|B_a^t\| \leq \\ &\leq \|A\|_2 \|A - B\|_2 + \|A - B\|_2 \|B\|_2 < 2\sqrt{k} \|A - B\|_2\end{aligned}$$

Esto implica que  $\bar{\pi}$  es gap-continua.

## II. Familias diferenciables de subespacios.

(II.0) Vamos a considerar familias diferenciables de subespacios de dimensión constante. Ésto es, aplicaciones de clase  $C^r$  de una variedad diferenciable en  $Gr_{k,n}$ . En particular, esto incluye familias continuas de subespacios, que han sido tratadas por [21] desde el punto de vista de la métrica gap. (Que, y como hemos probado en (I), es equivalente la continuidad respecto la topología usual de grassmann o la continuidad respecto la métrica gap).

Vamos a demostrar, dos caracterizaciones locales de la diferenciabilidad de una tal familia:

- i) La existencia de bases locales diferenciables.
- ii) La representación local como imagen de un subespacio fijo por una familia diferenciable de transformaciones invertibles de  $\mathbb{C}^n$ .

Veremos también, que estas propiedades locales pueden extenderse a toda la variedad de parámetros si ésta es contráctil.

### (II.1) Caracterizaciones locales de familias diferenciables de subespacios.

(II.1.1) Sea  $M$  una variedad diferenciable.

DEFINICIÓN:

Una familia de  $k$ -subespacios de  $\mathbf{C}^n$  parametrizados por  $M$  es una aplicación

$$\mathcal{L} : M \longrightarrow Gr_{k,n}.$$

Si esta aplicación es diferenciable, esto es  $C^r(0 \leq r \leq \infty)$ , escribiremos  $\mathcal{L} \in Dif(M, Gr_{k,n})$ .

Análogamente, escribiremos  $Dif(M, Gl(n; \mathbf{C}))$ ,  $Dif(M, M_{n \times m}(\mathbf{C}))$ ,  $Dif(M, \mathbf{C}^n)$ , etc., para indicar familias diferenciables de matrices inversibles, de matrices, de vectores, etc., parametrizados por  $M$ .

(II.1.2) TEOREMA.

Sea  $M$  una variedad diferenciable, y  $\mathcal{L} : M \longrightarrow Gr_{k,n}$  una familia de subespacios parametrizados por  $M$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i)  $\mathcal{L} \in Dif(M, Gr_{k,n})$ .
- ii) Para cada  $t_0 \in M$  existe un entorno abierto  $W_{t_0}$  de  $t_0$  en  $M$ , y  $k$  aplicaciones  $v_i \in Dif(W_{t_0}, K^n)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , tales que  $\{v_1(t), \dots, v_k(t)\}$  es una base de  $\mathcal{L}(t)$  para todo  $t \in W_{t_0}$ .
- iii) Para cada  $t_0 \in M$  existe un entorno abierto  $W_{t_0}$  de  $t_0$  en  $M$ , y una aplicación  $S_{t_0} \in Dif(W_{t_0}, Gl(n; K))$ , tales que  $\mathcal{L}(t) = S_{t_0}(t)\mathcal{L}(t_0)$ , para cada  $t \in W_{t_0}$ .

DEMOSTRACIÓN:

$$i) \Leftrightarrow ii)$$

Supongamos que se verifica i). Sea  $\mathcal{U}_I$  tal que  $\mathcal{L}(t_0) \in \mathcal{U}_I$ , y  $W_{t_0} = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{U}_I)$ . Para obtener ii), es suficiente tomar  $v_1(t), \dots, v_k(t)$ , los vectores columnas de  $\sigma_I(\mathcal{L}(t))$  para cada  $t \in W_{t_0}$ .

Recíprocamente, sea  $A(t)$  la matriz que tiene  $v_1(t), \dots, v_k(t)$  por columnas. Entonces,  $A \in Dif(W_{t_0}, M_{n \times k}^*)$ , y  $\mathcal{L} = \pi \circ A$  en  $W_{t_0}$ .

$$i) \Leftrightarrow iii)$$

Análogamente si se verifica i), sea  $\mathcal{U}_I$  tal que  $\mathcal{L}(t_0) \in \mathcal{U}_I$  y  $W_{t_0} = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{U}_I)$ . Entonces tomemos  $\bar{\mathcal{S}}(t) = \sigma'_I(\mathcal{L}(t))$  y  $S_{t_0}(t) = \bar{\mathcal{S}}(t)(\bar{\mathcal{S}}(t_0))^{-1}$  para cada  $t \in W_{t_0}$ .

El recíproco es inmediato en virtud de (0.1.5).

(II.1.3) OBSERVACIÓN: En la anterior demostración hemos utilizado los dos fibrados definidos en (0.4) y (0.5) sobre  $Gr_{k,n}$ . De hecho, es fácil demostrar la equivalencia ii)  $\Leftrightarrow$  iii), por lo que para demostrar el teorema basta uno cualquiera de los fibrados.

Así ii)  $\Rightarrow$  iii), se demuestra de la siguiente forma: sea  $A(t)$  la matriz formada por la base  $\{v_1(t), \dots, v_k(t)\}$  de  $\mathcal{L}(t)$ , y sea  $I$  un conjunto de índices para el cual  $\text{rang } A(t)^I = k$ . Consideremos  $S(t) = (A(t)|B)$  siendo  $B^I = 0$  y  $B^{I^c} = I_{n-k}$  y definamos  $S_{t_0}(t) = \bar{S}(t)(\bar{S}(t_0))^{-1}$

(II.1.4) DEFINICIÓN:

En las condiciones anteriores, decimos que la familia de funciones  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{D}(M, K^n)$  es una *base local diferenciable* de la familia  $\mathcal{L}$ .

(II.1.5) Como aplicación tenemos la siguiente:

PROPOSICIÓN.

Sean  $\mathcal{L}_i \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k_i, n})$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , dos familias de subespacios tales que  $\mathcal{L}_1(t) \subset \mathcal{L}_2(t)$  para todo  $t \in M$ . Entonces, existe una familia  $\mathcal{L} \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k_2 - k_1, n})$  tal que

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1(t) \perp \mathcal{L}(t) \quad \text{para todo } t \in M.$$

DEMOSTRACIÓN:

Escribamos  $k = k_2 - k_1$ . Definimos  $\mathcal{L} : M \rightarrow Gr_{k,n}$  por

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_1(t)^\perp \cap \mathcal{L}_2(t)$$

Puesto que  $\mathbf{C}^n = \mathcal{L}_1(t) \oplus \mathcal{L}_1(t)^\perp$ , es claro que  $\dim \mathcal{L}(t) = k$  y  $\mathcal{L}_1(t) \cap \mathcal{L}(t) = \{0\}$ ,  $\forall t$

Para demostrar la diferenciabilidad de  $\mathcal{L}$ , aplicamos (II.1.2-(ii)). De acuerdo con esto, si  $t_0 \in M$  existe una base local diferenciable  $v_1, \dots, v_{k_1} \in \mathcal{D}if(W_{t_0}^1, \mathbf{C}^n)$  de  $\mathcal{L}_1$  y  $w_1, \dots, w_{k_2} \in \mathcal{D}if(W_{t_0}^2, \mathbf{C}^n)$  de  $\mathcal{L}_2$ . Eliminando de la familia

$$(v_1(t_0), \dots, v_{k_1}(t_0), w_1(t_0), \dots, w_{k_2}(t_0))$$

los vectores  $w_j(t_0)$  que dependen linealmente de los precedentes, obtenemos una base

$$(v_1(t_0), \dots, v_{k_1}(t_0), w_{j_1}(t_0), \dots, w_{j_k}(t_0))$$

de  $\mathcal{L}_2(t_0)$ . Entonces, en algún entorno  $W_{t_0}$  de  $t_0$ ,

$$(v_1(t), \dots, v_{k_1}(t), w_{j_1}(t), \dots, w_{j_k}(t))$$

es una base de  $\mathcal{L}_2(t)$ . Si aplicamos Gram-Schmidt a esta familia, obtenemos

$$(\bar{v}_1(t), \dots, \bar{v}_{k_1}(t), \bar{w}_{j_1}(t), \dots, \bar{w}_{j_k}(t))$$

tal que  $\bar{w}_{j_1}, \dots, \bar{w}_{j_k}$  es una base local diferenciable de  $\mathcal{L}$ .

#### (II.1.6) EJEMPLOS.

- 1) En particular, si  $\mathcal{L} \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k,n})$ , entonces  $\mathcal{L}^\perp \in \mathcal{D}if(M, Gr_{n-k,n})$
- 2) Si  $A \in \mathcal{D}if(M, M_{n \times m}(K))$  es tal que  $\text{rang } A(t) = k$  para todo  $t \in M$ , entonces localmente podemos escoger  $k$  columnas de  $A(t)$  tales que formen una base de  $\text{Im } A(t)$ . De donde,  $\text{Im } A \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k,n})$ .
- 3) En las condiciones de (2) y puesto que  $\text{Ker } A(t) = (\text{Im } A(t)^*)^\perp$ , tenemos  $\text{Ker } A \in \mathcal{D}if(M, Gr_{(n-k),n})$
- 4) De los ejemplos anteriores, se sigue que si  $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k_1,n})$ ,  $\mathcal{L}_2 \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k_2,n})$  y  $\dim(\mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t)) = k$  para todo  $t \in M$ , entonces  $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k,n})$  y  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k_1+k_2-k,n})$ .

## (II.2) Propiedades globales para un espacio de parámetros contráctil.

(II.2.0) En lo que sigue, supondremos que  $M$  es una variedad real contráctil de clase  $C^r$ . Por lo que podremos hacer uso del resultado fundamental siguiente.

PROPOSICIÓN [15].

*Si  $M$  es una variedad real contráctil de clase  $C^r$ , cualquier  $C^r$ -fibrado principal sobre  $M$  es trivial.*

(II.2.1) OBSERVACIÓN: Para fibrados principales continuos, Husemoller (ver [29] (p. 52, 10.3) y (p. 48, 9.2)), demuestra que son triviales sobre cualquier espacio topológico paracompacto contráctil. Luego, el siguiente teorema se verifica bajo estas condiciones.

(II.2.2) Si  $M$  es una variedad real contráctil, las propiedades dadas en (II.1.2) pueden globalizarse:

TEOREMA.

*Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad real contráctil, y  $\mathcal{L} \in C^r(M, Gr_{k,n})$ , entonces:*

- i) *Existen  $k$  aplicaciones  $v_i \in C^r(M, \mathbf{C}^n)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , tales que  $\{v_1(t), \dots, v_k(t)\}$  es una base de  $\mathcal{L}(t)$  para cada  $t \in M$ .*
- ii) *Existe una aplicación  $\mathcal{S} \in C^r(M, Gl(n; \mathbf{C}))$  y un  $k$ -subespacio  $L \in Gr_{k,n}$  tal que*

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{S}(t)L, \quad \text{para cada } t \in M$$

*En particular,  $\mathcal{L}(t) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(t_0)^{-1}\mathcal{L}(t_0)$ , para todo  $t, t_0 \in M$ .*

DEMOSTRACIÓN:

i) Puesto que  $(M_{n \times k}^*, \pi, Gr_{k,n})$  es un  $Gl(k; \mathbf{C})$ -fibrado principal ((0.5.2)), el fibrado  $(\mathcal{L}^*(M_{n \times k}^*), \mathcal{L}^*\pi, M)$  inducido por pull-back sobre  $\mathcal{L}$ , es también un  $Gl(k; \mathbf{C})$ -fibrado principal. De donde, y en virtud de (II.2.0) el fibrado es trivial, por lo que,

existe una sección global  $\bar{\sigma}$ . Por consiguiente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^*(M_{n \times k}^*) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{L}}} & M_{n \times k}^* \\ \left( \bar{\sigma} \mathcal{L}^*(\pi) \right) \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Gr_{k,n} \end{array}$$

Entonces, es suficiente tomar  $v_1(t), \dots, v_k(t)$  los vectores columna de  $\bar{\mathcal{L}}(\bar{\sigma}t)$ .

ii) La demostración es análoga a la dada en i), usando el fibrado (0.6.6) en lugar del fibrado (0.5.2):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^*(Gl(n)) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{L}'}} & Gl(n) \\ \left( \bar{\sigma} \mathcal{L}^*(\pi') \right) \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Gr_{k,n} \end{array}$$

Entonces, tomando  $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{L}'} \circ \bar{\sigma}'$ , y  $L = [e_1, \dots, e_k]$ , donde  $(e_1, \dots, e_n)$  es la base canónica de  $\mathbb{C}^n$ , se tiene el resultado.

(II.2.4) OBSERVACIÓN: tal y como hemos observado en (II.1.3), es posible demostrar directamente i)  $\Leftrightarrow$  ii), es decir usando solamente uno de los fibrados por lo que sólo uno de ellos es necesario:

i)  $\Rightarrow$  ii) Por el ejemplo (II.1.6.1) y por i), existen  $v_{k+1}, \dots, v_n \in C^r(M, \mathbb{C}^n)$  tales que  $(v_{k+1}(t), \dots, v_n(t))$  es una base de  $\mathcal{L}(t)^\perp$  para todo  $t \in M$ . Entonces, es suficiente tomar  $L = [e_1, \dots, e_k]$  y  $\mathcal{S}(t)$  matriz invertible que tiene por columnas  $v_1(t), \dots, v_k(t), v_{k+1}(t), \dots, v_n(t)$ .

ii)  $\Rightarrow$  i) Sea  $(v_1^0, \dots, v_k^0)$  una base cualquiera de  $L$ , entonces  $v_i(t) = \mathcal{S}(t)(v_i^0)$ ,  $1 \leq i \leq k$  verifica ii).

(II.2.5) EJEMPLO: De (II.1.5) y (II.2.3), tenemos que si  $M$  es una variedad contráctil y  $\mathcal{L}_i \in C^r(M, Gr_{k_i, n})$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , tal que  $\mathcal{L}_1(t) \subset \mathcal{L}_2(t)$  para todo  $t \in M$ , entonces existen  $v_1, \dots, v_k \in C^r(M, K^n)$ , con  $k = k_2 - k_1$ , tales que:

$$\mathcal{L}_2(t) = \mathcal{L}_1(t) \oplus [v_1(t), \dots, v_k(t)], \quad \text{para todo } t \in M$$

### III. Semejanza global de clase $C^r$ .

(III.0) Finalmente vamos a aplicar los resultados anteriores a la construcción de bases de Brunovsky globales diferenciables para una familia diferenciable de parejas de matrices teniendo tipo de Brunovsky constante. Como paso previo, lo vamos a aplicar a la construcción de bases de Jordan globales diferenciables para una familia diferenciable de matrices cuadradas, teniendo tipo de Jordan constante, parametrizada sobre una variedad contráctil.

#### (III.1) Diferenciabilidad de los valores propios.

(III.1.1) Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad y  $A \in C^r(M, M_n(\mathbf{C}))$ , esto es,  $A(t)$  es una familia de  $n$ -matrices cuadradas complejas, parametrizadas por  $t \in M$ , y de clase  $C^r$ .

#### DEFINICIÓN:

Se dice que la familia  $A(t)$  tiene *tipo de Jordan constante* si el número de valores propios distintos y la lista de tamaños de los bloques de Jordan correspondientes a los diferentes valores propios es independiente de  $t$ . Es decir si  $A(t)$  pertenecen al mismo estrato de Segre, para todo  $t$ .

#### (III.1.2) PROPOSICIÓN.

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad simplemente conexa, y  $A \in C^r(M, M_n(\mathbf{C}))$  con tipo de Jordan constante. Entonces:

- i) existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in C^r(M, \mathbf{C})$  tales que  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t)$  son los  $s$  distintos valores propios de  $A(t)$ , para cada  $t \in M$ .
- ii) las multiplicidades algebraicas respectivas  $m_1, \dots, m_s$  de estos valores propios son constantes.

#### DEMOSTRACIÓN:

Para i) ver por ejemplo [30] (.5.13.a, p.134). Entonces, ii) se sigue de la semicontinuidad de las multiplicidades de las raíces de un polinomio parametrizado continuamente (como en [10] (2.1)).

De hecho, la existencia de  $s$  funciones  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  continuas dando los distintos valores propios de  $A$  es trivial. Entonces, la forma canónica de Arnold de una familia diferenciable de matrices ([1]) demuestra que  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  son de clase  $C^r$  y con multiplicidades localmente constantes.

(III.1.4) Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad y  $(A, B) \in C^r(M, \mathcal{M}_{nm})$ , esto es,  $(A(t), B(t))$  es una familia de parejas de matrices complejas, parametrizadas por  $t \in M$ , y de clase  $C^r$ .

Se dice que la familia  $(A(t), B(t))$  tiene *tipo de Brunovsky constante*

- i) si los índices de controlabilidad son los mismos para todo  $t \in M$ .
- ii) si el número de valores propios distintos y la lista de tamaños de los bloques de Jordan correspondientes a los diferentes valores propios de la pareja de matrices, es independiente de  $t$ ,

Es decir si  $(A(t), B(t))$  pertenecen al mismo estrato de Brunovsky para todo  $t$ .

#### (III.1.5) PROPOSICIÓN.

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad simplemente conexa, y  $(A, B) \in C^r(M, \mathcal{M}_{nm}(\mathbf{C}))$  con tipo de Brunovsky constante. Entonces:

- i) existen  $\ell$  funciones  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in C^r(M, \mathbf{C})$  tales que  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_\ell(t)$  son los  $\ell$  distintos valores propios de  $(A(t), B(t))$ , para cada  $t \in M$ .
- ii) las multiplicidades algebraicas respectivas  $m_1, \dots, m_\ell$  de estos valores propios son constantes.

DEMOSTRACIÓN:

Basta aplicar (III.1.2) a las aplicaciones  $f_{s+1,t} : W_{s+1}(t) \rightarrow W_{s+1}(t)$ , definidas en cap. 0 (I.3.3), y tener en cuenta que tener tipo de Brunovsky constante es equivalente a:

- i) las dimensiones de  $W_i(t)$  son independientes de  $t$ .
- ii) la familia de endomorfismos  $f_{s+1,t}$  pertenece al mismo estrato de Segre.

De hecho, la forma canónica local de una familia diferenciable de parejas de matrices, demuestra que las funciones  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  son de clase  $C^r$  y con multiplicidades localmente constantes.

### (III.2) Semejanza global de clase $C^r$ para familias $C^r(M, M_n(\mathbb{C}))$ .

(III.2.0) El siguiente teorema ha sido demostrado por R.M. Guralnick: el punto clave es que módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de  $C^r$ -funciones sobre  $M$  son libres; luego, [26] (5.5(c)) puede ser aplicado.

La demostración de [26] (6.1) para el caso continuo usa la correspondencia entre fibrados vectoriales y módulos proyectivos finitamente generados, y la trivialidad de los fibrados vectoriales continuos sobre un espacio contráctil [29] (p.29,4.8); entonces, el caso diferenciable se deduce utilizando un teorema de aproximación.

Desde nuestro punto de vista geométrico, aplicamos (II.2.3) para construir bases globales diferenciables de los subespacios que aparecen en la descomposición de Jordan usual. De hecho, el caso local puede deducirse directamente de la descripción geométrica de una familia de subespacios en (II.1), y la globalización se sigue de la trivialidad de los fibrados principales diferenciables (II.2.1).

(III.2.1) Supongamos ahora que  $M$  es contráctil, por lo que puede aplicarse (II.2).

TEOREMA.

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad contráctil, y  $A \in C^r(M, M_n(\mathbf{C}))$  con tipo de Jordan constante. Entonces, existe  $S \in C^r(M, Gl(n; \mathbf{C}))$  tal que

$S(t)^{-1}A(t)S(t)$  es una matriz de Jordan, para todo  $t \in M$

DEMOSTRACIÓN:

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  y  $m_1, \dots, m_s$  como en la proposición (III.1.4). Consideremos las familias de subespacios

$$\mathcal{L}_i(t) = \text{Ker}(A(t) - \lambda_i(t)I)^{m_i}, \quad 1 \leq i \leq s, \quad t \in M$$

claramente, para cada  $t \in M$ ,  $\dim \mathcal{L}_i(t) = m_i$ , y vectores de los distintos subespacios son linealmente independientes. Por lo tanto

$$\mathbf{C}^n = \mathcal{L}_1(t) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_s(t), \quad t \in M$$

Además, las familias  $\mathcal{L}_i(t)$  son de clase  $C^r$  (ver (II.1.6)). Entonces, y en virtud de (II.2.2) existen bases globales de  $\mathcal{L}_i(t)$  de clase  $C^r$ . Si  $P(t)$  es una matriz que tiene por columnas estas bases  $\mathcal{L}_1(t), \dots, \mathcal{L}_s(t)$ , obtenemos que  $P \in C^r(M, Gl(n))$ , y

$$\bar{A}(t) = P(t)^{-1}A(t)P(t) = \text{diag}(\bar{A}_1(t), \dots, \bar{A}_s(t))$$

donde  $\bar{A}_i \in C^r(M, M_{m_i}(\mathbf{C}))$ , y  $\bar{A}_i(t)$  tiene un único valor propio  $\lambda_i(t)$ . Ahora, es suficiente aplicar el siguiente lema.

(III.2.2) LEMA.

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad real y contráctil,  $A \in C^r(M, M_n(\mathbf{C}))$  con tipo de Jordan constante, y  $\lambda \in C^r(M, \mathbf{C})$  tal que  $\lambda(t)$  es un valor propio de  $A(t)$  de multiplicidad  $m$  para cada  $t \in M$ . Entonces, existe una  $C^r$ -familia de bases Jordan de la familia de subespacios  $\text{Ker}(A(t) - \lambda(t)I)^m$ .

DEMOSTRACIÓN:

Es suficiente adaptar la construcción estandar de cadenas de Jordan, por recurrencia sobre su longitud, en orden decreciente. El punto clave es que (II.2.5) nos asegura la existencia de una  $C^r$ -familia de generadores de las nuevas cadenas en cada paso.

Luego, sea

$$T(t) = A(t) - \lambda(t)I$$

$$N_j(t) = \text{Ker } T(t)^j$$

$$n_j = \dim N_j(t)$$

para cada  $t \in M$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Sea  $\alpha$  tal que

$$N_1(t) \subset N_2(t) \subset \dots \subset N_\alpha(t) = N_{\alpha+1}(t) = \dots = N_n(t)$$

En virtud de (III.2.5) existen  $v_1(t), \dots, v_{n_\alpha - n_{\alpha-1}}(t)$  de clase  $C^r$  tales que

$$N_\alpha(t) = N_{\alpha-1} \oplus [v_1(t), \dots, v_{n_\alpha - n_{\alpha-1}}(t)], \quad t \in M$$

Como en el caso estandar, es fácil probar que

$$v_1(t), \dots, v_{n_\alpha - n_{\alpha-1}}(t), T(t)(v_1(t)), \dots, T(t)(v_{n_\alpha - n_{\alpha-1}}(t))$$

son linealmente independientes. Por consiguiente, y de nuevo (III.2.5) nos asegura la existencia de  $v_{n_\alpha - n_{\alpha-1} + 1}(t), \dots, v_{n_{\alpha-1} - n_{\alpha-2}}(t)$  de clase  $C^r$  tal que

$$N_{\alpha-1}(t) = N_{\alpha-2}(t) \oplus [T(t)(v_1(t)), \dots, T(t)(v_{n_\alpha - n_{\alpha-1}}(t))] \oplus \\ \oplus [v_{n_\alpha - n_{\alpha-1} + 1}(t), \dots, v_{n_{\alpha-1} - n_{\alpha-2}}(t)]$$

Siguiendo este camino obtenemos una familia de bases de Jordan de clase  $C^r$  de  $N_\alpha(t)$ .

**(III.3) Bases de Brunovsky de clase  $C^r$  para familias  $C^r(M, \mathcal{M}_{nm})$ .**

(III.3.1) Vamos a construir bases globales diferenciables de Brunovsky.

PROPOSICIÓN.

Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad real y contráctil, y  $(A, B) \in C^r(M, \mathcal{M}_{nm})$  con tipo de Brunovsky constante. Entonces, existen  $P \in C^r(M, Gl(n; \mathbf{C}))$ ,  $Q \in C^r(M, Gl(m; \mathbf{C}))$  y  $R \in C^r(M, M_{m \times n}(\mathbf{C}))$  tales que

$$P(t)^{-1}(A(t), B(t)) \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ R(t) & Q(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz de Brunovsky, para todo  $t \in M$

DEMOSTRACIÓN:

Es suficiente adaptar la construcción de la base de Brunovsky dada en cap 0,(I.4.1).

Las familias  $\sigma_i(W_i)$  son de clase  $C^r$ . En  $\sigma_{s+1}(W_{s+1}(t))$ , tomemos  $w_1^{s+1}(t), \dots, w_{d_{s+1}}^{s+1}(t)$ , base global, que existe por ser  $\sigma_{s+1}(W_{s+1}(t))$  de dimensión constante.

En  $\sigma_s(W_s(t))$ , tomemos la base

$$w_1^s(t), \dots, w_{d_s - d_{s+1}}^s(t), f^{-1}\pi w_1^{s+1}(t), \dots, f^{-1}\pi w_{d_{s+1}}^{s+1}(t)$$

con  $w_1^s(t), \dots, w_{d_s - d_{s+1}}^s(t)$ , base global de  $\sigma_s(Ker f_s)$ , que existe por ser éste de dimensión constante.

Con respecto a los vectores  $f^{-1}\pi w_1^{s+1}(t), \dots, f^{-1}\pi w_{d_{s+1}}^{s+1}(t)$ , puesto que

$$\pi : \sigma_{s+1}(W_{s+1}(t)) \longrightarrow X/W$$

es inyectiva,  $(\sigma_{s+1}(W_{s+1}(t)))$  está contenido en un complementario de  $W$ , para todo  $t$ . Se tiene que los vectores  $\pi w_1^{s+1}(t), \dots, \pi w_{d_{s+1}}^{s+1}(t)$  son linealmente independientes.

Finalmente  $\sigma_{s+1}(W_{s+1}) = Ker(\sigma_{s+1}(W_{s+1}(t)) \longrightarrow \pi\sigma_{s+1}(W_{s+1}(t))) \oplus F$  y  $f : F \longrightarrow \pi\sigma_{s+1}(W_{s+1}(t))$  es biyectiva.

Por lo que respecta a los vectores de la base que describen la parte no controlable de la aplicación

$$f : \sigma_{s+1}(X_{s+1}) \longrightarrow \pi\sigma_{s+1}(X_{s+1})$$

es un endomorfismo y podemos aplicar (III.2.1).

#### IV. Inversas generalizadas diferenciables de familias diferenciables de matrices.

(IV.0) Dada una familia diferenciable de matrices  $A \in \mathcal{D}if(M, M_{m \times n}(\mathbf{C}))$ , definida sobre una variedad de parámetros  $M$ , vamos a aplicar las técnicas obtenidas en (II), al estudio de la existencia de una familia diferenciable de matrices  $X \in \mathcal{D}if(M, M_{n \times m}(\mathbf{C}))$  tal que para cada  $t \in M$ ,  $X(t)$  es una inversa generalizada de  $A(t)$ .

(IV.1) Recordemos primero la noción de inversa generalizada.

DEFINICIÓN:

Dada  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{C})$ , se llama *inversa generalizada* de  $A$  a una matriz  $X \in M_{n \times m}(\mathbf{C})$  tal que

$$AXA = A$$

$$XAX = X$$

Si además verifica

$$(XA)^* = XA$$

$$(AX)^* = AX$$

la inversa generalizada es única y es la llamada inversa de *Moore-Penrose*.

(IV.2) Dada una familia  $A \in \mathcal{D}if(M, M_{m \times n}(\mathbf{C}))$  matrices, llamaremos inversa generalizada de dicha familia a la familia  $X : M \rightarrow M_{n \times m}(\mathbf{C})$  tal que, para cada  $t \in M$  la matriz  $X(t)$  es una inversa generalizada de  $A(t)$ . Si además, para cada  $t \in M$  la matriz  $X(t)$  es la inversa de Moore-Penrose  $A^+(t)$  de  $A(t)$ , diremos que la familia  $X : M \rightarrow M_{n \times m}(\mathbf{C})$  es la inversa de Moore-Penrose de la familia  $A$ , y la notaremos por  $A^+$

(IV.3) Nos preguntamos ahora, bajo que condiciones podemos afirmar que la familia  $A^+$  es diferenciable.

TEOREMA.

Sea  $A \in \mathcal{D}if(M, M_{m \times n}(\mathbf{C}))$  de rango constante, se tiene

- i) la Inversa de Moore Penrose es diferenciable
- ii) si además la variedad  $M$  es real y contráctil, puede ser obtenida de  $A$  mediante operaciones matriciales diferenciables:

$$A^+ = S \left( \begin{array}{c} 0 \\ \left[ (Id_k \ 0) T^{-1} A S \begin{pmatrix} 0 \\ Id_k \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ 0 \end{array} \right) T^{-1}$$

donde  $T \in \mathcal{D}if(M, M_m(\mathbf{C}))$ ,  $S \in \mathcal{D}if(M, M_n(\mathbf{C}))$ .

OBSERVACIÓN: Otras familias locales diferenciables de inversas generalizadas pueden ser obtenidas si no exigimos la ortogonalidad de  $S$  y  $T$  y que serán globales si  $M$  es una variedad real contráctil.

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que la familia es de rango constante  $\text{rang } A(t) = k$  para cada  $t \in M$ , por (II.1.6) tenemos

$$\text{Im } A \in \mathcal{D}if(M, Gr_{k,m})$$

$$\text{Ker } A \in \mathcal{D}if(M, Gr_{(n-k),n})$$

por lo tanto,  $\forall t_0 \in M$  existe  $\mathcal{W}_{t_0}^1$  entorno de  $t_0$  en  $M$  tal que

$$(x_1(t), \dots, x_{n-k}(t))$$

es una base diferenciable de  $\text{Ker } A(t)$  para todo  $t \in \mathcal{W}_{t_0}^1$ , y  $\forall t_0 \in M$  existe  $\mathcal{W}_{t_0}^2$  entorno de  $t_0$  en  $M$  tal que

$$(y_1(t), \dots, y_k(t))$$

es una base diferenciable de  $\text{Im } A(t)$  para todo  $t \in \mathcal{W}_{t_0}^1$ .

Obviamente,  $A^*$  es una familia diferenciable de matrices con  $\text{rang } A^*(t) = k$  constante para cada  $t \in M$ , luego, como antes  $\forall t_0 \in M$  existe  $\mathcal{W}_{t_0}^3$  entorno de  $t_0$  en  $M$  tal que

$$(y_{k+1}(t), \dots, y_m(t))$$

es una base diferenciable de  $\text{Ker } A^*(t) = (\text{Im } A(t))^\perp$  para todo  $t \in \mathcal{W}_{t_0}^3$ , y  $\forall t_0 \in M$  existe  $\mathcal{W}_{t_0}^4$  entorno de  $t_0$  en  $M$  tal que

$$(x_{n-k+1}(t), \dots, x_n(t))$$

es una base diferenciable de  $\text{Im } A^*(t) = (\text{Ker } A(t))^\perp$  para todo  $t \in \mathcal{W}_{t_0}^4$ .

Sea ahora  $\mathcal{W}_{t_0} = \bigcap_{i=1}^4 \mathcal{W}_{t_0}^i$  entorno de  $t_0$  en  $M$ , sobre este entorno tenemos que

$$(y_1(t), \dots, y_k(t), y_{k+1}(t), \dots, y_m(t))$$

es un base diferenciable de  $\mathbf{C}^m$ .

Sea  $T(t)$  la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores de esta base con respecto la base canónica de  $\mathbf{C}^m$ .

En este entorno  $\mathcal{W}_{t_0}$

$$(x_1(t), \dots, x_{n-k}(t), x_{n-k+1}(t), \dots, x_n(t))$$

es un base diferenciable de  $\mathbf{C}^n$ .

Sea  $S(t)$  la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores de esta base con respecto la base canónica de  $\mathbf{C}^n$ .

La matriz de la aplicación  $A(t)$  en estas bases es

$$\begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(t)A(t)S(t)$$

Observamos que  $A_0(t)$  es la matriz en las bases  $(x_{n-k+1}(t), \dots, x_n(t))$  y  $(y_1(t), \dots, y_k(t))$  de la aplicación

$$(\text{Ker } A)^\perp \longrightarrow \text{Im } A$$

restricción de  $A(t)$ . Para cada  $t \in \mathcal{W}_{t_0}$  es invertible y diferenciable.

Consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^m &\longrightarrow \mathbf{C}^n \\ y_j(t) &\longrightarrow A_0^{-1}(t)y_j(t) \quad \forall j = 1, \dots, k \\ y_j(t) &\longrightarrow 0 \quad \forall j = k+1, \dots, m \end{aligned}$$

expresada en las bases

$$(y_1(t), \dots, y_k(t), y_{k+1}(t), \dots, y_m(t))$$

y

$$(x_1(t), \dots, x_{n-k}(t), x_{n-k+1}(t), \dots, x_n(t))$$

de  $\mathbf{C}^m$  y  $\mathbf{C}^n$  respectivamente. Y que en las bases canónicas  $\mathbf{C}^m$  y  $\mathbf{C}^n$  es

$$S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) = X(t)$$

La familia  $X(t)$  así definida es diferenciable en  $\mathcal{W}_{t_0}$  y para cada  $t \in \mathcal{W}_{t_0}$  es (por construcción) una inversa generalizada de  $A(t)$ . Comprobémoslo:

$$\begin{aligned} &A(t)X(t)A(t) = \\ &= T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t)S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t)T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t) = \\ &= T(t) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t) = \\ &= T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t) = A(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &X(t)A(t)X(t) = \\ &S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t)T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t)S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) = \\ &= S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) = \\ &= S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) = X(t). \end{aligned}$$

Por lo que, localmente, existen familias diferenciables de inversas generalizadas.

Si ortonormalizamos por Gram-schmidt las bases  $(y_1(t), \dots, y_k(t), y_{k+1}(t), \dots, y_m(t))$  y  $(x_1(t), \dots, x_{n-k}(t), x_{n-k+1}(t), \dots, x_n(t))$  de  $\mathbf{C}^m$  y  $\mathbf{C}^n$  respectivamente, obtenemos

$$(\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_k(t), \bar{y}_{k+1}(t), \dots, \bar{y}_m(t))$$

y

$$(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{n-k}(t), \bar{x}_{n-k+1}(t), \dots, \bar{x}_n(t))$$

de las que  $(\bar{x}_{n-k+1}(t), \dots, \bar{x}_n(t))$  es una base de  $(Ker(t)A)^\perp$  y  $(\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_k(t))$  es una base de  $Im A(t)$ , por lo que podemos repetir la construcción anterior pero trabajando en estas nuevas bases, obteniendo una familia diferenciable de matrices  $X(t)$ , que para cada  $t \in \mathcal{W}_{t_0}$ ,  $X(t)$  es la inversa de Moore-Penrose. Comprobémoslo:

$$\begin{aligned} & (X(t)A(t))^* = \\ & = \left( S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t)T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t) \right)^* = \\ & = \left( S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t) \right)^* \\ & = \left( S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S^{-1}(t) \right)^* = \\ & = (S^{-1}(t))^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (S(t))^* = \\ & = S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t)T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t) = X(t)A(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A(t)X(t))^* = \\ & = \left( T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t)S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) \right)^* = \\ & = \left( T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) \right)^* \\ & = \left( T(t) \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) \right)^* = \\ & = (T^{-1}(t))^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (T(t))^* = \\ & = T(t) \begin{pmatrix} 0 & A_0(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}(t)S(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_0^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t) = A(t)X(t). \end{aligned}$$

Puesto que para cada  $t \in M$  la inversa de Moore-Penrose  $A^+(t)$ , existe y es única resulta que la familia  $X = A^+$  es diferenciable y localmente puede ser obtenida por operaciones matriciales, para ello basta tener en cuenta que

$$A_0(t)^{-1} = \left[ (Id_k \ 0) T(t)^{-1} A(t) S(t) \begin{pmatrix} 0 \\ Id_k \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

Si el espacio  $M$  es real y contráctil las familias de matrices  $S$  y  $T$  son globales, por lo que globalmente toda la familia puede ser obtenida por operaciones matriciales:

$$A^+ = S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (Id_k \ 0) T^{-1} A S & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

## Capítulo 3

### Estratificación de Brunovsky-Kronecker

El estudio realizado sobre las perturbaciones locales de parejas de matrices (cap. 1 (IV)), nos ha llevado a considerar la partición del espacio  $\mathcal{M}_{nm}$ , en subconjuntos o *estratos*, formados por parejas de matrices con el mismo tipo de Brunovsky. Nos proponemos ahora, estudiar la “regularidad” de dicha partición.

La partición inicial del espacio  $\mathcal{M}_{nm}$  en clases de equivalencia no verifica la condición de finitud local. En efecto, dada la pareja de matrices

$$(A, B) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{M}_{31}$$

consideremos, una bola centrada en este punto y radio  $\varepsilon > 0$  cualquiera. Para cada  $0 < \delta < \varepsilon$ , la pareja de matrices

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{B}((A, B); \varepsilon) \subset \mathcal{M}_{31}$$

pertenece a una órbita distinta. Por lo que, esta bola (cualquiera) corta a una infinidad de órbitas.

De ahí la conveniencia de una nueva partición que agrupe en cada “estrato” las órbitas que tengan los mismos invariantes discretos, aunque difieran en los continuos. Tendremos así una partición localmente finita (de hecho, finita), en que cada

estrato será reunión (no numerable) de órbitas. La denominamos “estratificación de Brunovsky-Kronecker” o simplemente BK-estratificación.

Veremos en primer lugar que el apelativo de “estratificación” es correcto puesto que cada estrato es una variedad diferenciable. A continuación estudiaremos las condiciones de regularidad de la estratificación. Finalmente consideraremos la estratificación inducida por la de Brunovsky-Kronecker en el espacio de parámetros de una familia genérica de parejas de matrices.

El apartado (0) contiene un breve resumen de los conceptos y resultados acerca de las estratificaciones que van a utilizarse en este capítulo. En (0.1) se recuerda las condiciones de regularidad de Whitney (0.1.2) y el teorema de Whitney sobre existencia de puntos que las verifican (0.1.6). En (0.2) se define la llamada “condición de frontera” (0.2.2) y se dan condiciones para que se verifique (0.2.3,4). En (0.3) se relacionan algunas técnicas de obtención de estratificaciones de Whitney a partir de otras: producto cartesiano (0.3.1), intersección (0.3.2,3), antiimágenes (0.3.4). En (0.4) se da un criterio de regularidad para la estratificación “imagen” de una estratificación de Whitney. En (0.5) se recogen las propiedades de homogeneidad que en cierto sentido motivan la definición de Whitney. En (0.6) se presenta la estratificación de Segre del espacio de matrices cuadradas, que vamos a necesitar posteriormente.

El apartado (I) está dedicado a la definición de los BK-estratos, a probar que se trata efectivamente de variedades diferenciables, y a estudiar algunas otras de sus propiedades. En (I.1) se define el símbolo de Brunovsky-Kronecker de una pareja de matrices (I.1.1), a través del cual se agrupan en BK-estratos, las parejas de matrices (I.1.3). En (I.2) se demuestra que dichos estratos son efectivamente variedades diferenciables (I.2.3) y se obtiene su dimensión (I.2.4), a base de reducir el problema a la intersección del estrato con una variedad  $\Gamma$  transversal a las órbitas (I.2.1). El punto clave está en la selección de  $\Gamma$ , de forma que permita tener una descripción apropiada de su intersección con los BK-estratos: en nuestro caso tomamos la deformación

miniversal “minimal” obtenida en (cap 1, (III.3)), con lo que el resultado se sigue de la descripción de dicha intersección y de la regularidad de los estratos de Segre. En (I.3) se presentan otras propiedades de los BK-estratos: son constructibles (I.3.1), conexos (I.3.2), invariantes por la traslación según  $(Id,0)$  (I.3.3).

En el apartado (II) se estudian las propiedades de regularidad de la BK-estratificación. Al igual que hemos hecho para el estudio de la regularidad de los BK-estratos, el primer paso es la reducción, mediante la trivialización local dada en (cap 1, (I.3.2)), a la estratificación inducida sobre la intersección con la variedad  $\Gamma$  anterior. Pero ahora esta estratificación inducida no es una estratificación de Segre, por lo que no podemos concluir simplemente usando los resultados de [19] para matrices cuadradas. Estudiaremos previamente, en (II.1), el caso particular de los estratos llamados “simples” (II.1.1), los cuales verifican una propiedad de homogeneidad (II.1.2) que permite aplicar el teorema de Whitney para probar que la BK-estratificación es Whitney regular sobre dichos estratos (II.1.3). A partir de ahí, en (II.2) se prueba que, para  $m = 1$ , la BK-estratificación es Whitney regular (II.2.2): como antes hemos expuesto, podemos reducirnos a la intersección de la BK-estratificación con la subvariedad  $\Gamma$  seleccionada (II.2.1); y esta estratificación inducida en  $\Gamma$ , gracias a la descripción explícita que tenemos de la misma, podemos relacionarla con un producto cartesiano de estratificaciones sobre estratos simples, si  $m = 1$ . Finalmente, hacemos observar que se verifica la condición de frontera, cualquiera que sea  $m$  (II.2.3).

En el apartado (III) se consideran los diagramas de bifurcaciones inducidos por la BK-estratificación en el espacio de parámetros de una familia genérica. En (III.1) se precisan estas definiciones. En (III.2) se relacionan, para algunos casos particulares, los estratos que aparecen en el diagrama de bifurcaciones de una familia genérica: estratos de codimensión 0 (III.2.3), estratos en familias de hasta 4 parámetros para  $m = 1$  (III.2.4),... Finalmente, en (III.3) se determinan los diagramas de bifurcaciones para familias de hasta 4 parámetros y  $m = 1$ .

## 0. Estratificaciones de Whitney.

Empezamos haciendo un breve resumen sobre los conceptos y resultados acerca de las estratificaciones que vamos a utilizar en este capítulo, ([8], [20], [34]).

### (0.1) Estratificaciones de Whitney.

#### (0.1.1) DEFINICIÓN:

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $V$  un subconjunto de  $M$ . Una estratificación de  $V$  es una partición  $\Sigma$ , de  $V$  en subvariedades diferenciables, llamadas *estratos*. Supondremos siempre estratificaciones localmente finitas, esto es, tal que, para cada punto  $p \in V$ , existe un entorno  $\mathcal{U} \subset M$  que corta sólo a un número finito de estratos.

(0.1.2) Definimos ahora las condiciones de regularidad de Whitney, para el caso en que la variedad  $M$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$ , y que podremos generalizar a una variedad diferenciable cualquiera.

#### DEFINICIÓN:

Sea  $M$  un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$ ,  $X, Y$  subvariedades (disjuntas) diferenciables, de  $M$ , y  $x \in X \cap \bar{Y}$ . Se dice que  $Y$  es *Whitney regular* sobre  $X$  en  $x$  cuando se verifica lo siguiente.

Si  $(x_k), (y_k)$  son sucesiones en  $X$  e  $Y$  respectivamente, tal que  $\lim_k x_k = x = \lim_k y_k$ , la sucesión de espacios tangentes  $T_{y_k} Y$  converge hacia un subespacio  $T \subseteq \mathbf{R}^n$  (con la topología grasmaniana de subespacios vectoriales de dimensión  $q$  de  $\mathbf{R}^n$ ) y la sucesión de rectas  $[x_k - y_k]$  converge hacia  $L \subseteq \mathbf{R}^n$  (con la topología grasmaniana de subespacios de dimensión 1), entonces  $L \subseteq T$ .

(0.1.3) El siguiente lema nos permitirá generalizar esta definición.

LEMA.

Sean  $M, M'$  dos subconjuntos abiertos de  $\mathbf{R}^n$ ,  $X, Y \subset M$  y  $X', Y' \subset M'$  subvariedades diferenciables y  $x \in X \cap \bar{Y}$ . Supongamos que existe un difeomorfismo

$$f : M \longrightarrow M'$$

tal que  $X' = f(X)$ ,  $Y' = f(Y)$ . Entonces,  $Y$  es Whitney regular sobre  $X$  en  $x$ , si y sólo si  $Y'$  es Whitney regular sobre  $X'$  en  $x' = f(x)$ .

(0.1.4) Con ello (0.1.2) se generaliza a variedades diferenciables  $M$  cualesquiera

DEFINICIÓN:

Sea  $M$  una variedad diferenciable y sean  $X, Y \subset M$  dos subvariedades.

- i) Si  $x \in X \cap \bar{Y}$ , se dice que  $Y$  es Whitney regular sobre  $X$  en  $x$  si y sólo si para cualquier carta local  $\varphi : \mathcal{U}_x \longrightarrow \mathbf{R}^n$  de  $M$  en  $x$  es  $\varphi(Y)$  Whitney regular sobre  $\varphi(X)$  en  $\varphi(x)$ .
- ii) Sea  $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ . Decimos que  $Y$  es Whitney regular sobre  $X$  si lo es en cada punto  $x \in X \cap \bar{Y}$ .

(0.1.5) Podemos ya dar la definición de estratificación regular en el sentido de Whitney.

DEFINICIÓN:

Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $V \subset M$ , y  $\Sigma$  una estratificación de  $V$ . Decimos que  $\Sigma$  es Whitney regular, si cada estrato  $Y$  de  $\Sigma$  es Whitney regular sobre cualquier otro estrato  $X$  tal que  $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ .

(0.1.6) Whitney y Thom, demuestran que los conjuntos semialgebraicos admiten estratificaciones de Whitney. Aquí, sólo necesitamos el siguiente resultado, conocido como teorema de Whitney

TEOREMA DE WHITNEY.

Sean  $X, Y$  subvariedades diferenciables constructibles de  $\mathbf{R}^n$ , tales que  $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ .  
Entonces, existe algún punto  $x \in X$ , tal que  $Y$  es Whitney regular sobre  $X$  en  $x$ .

**(0.2) Condición de frontera.**

Veamos que si una estratificación es Whitney regular y sus estratos son conexos, la frontera de cada estrato es unión de estratos de dimensión inferior.

(0.2.1) Veamos en primer lugar esa relación entre las dimensiones de los estratos.

PROPOSICIÓN (Mather).

Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $X$  e  $Y$  dos subvariedades tales que  $Y$  es Whitney regular sobre  $X$  en  $x \in X \cap \bar{Y}$ . Entonces

$$\dim X < \dim Y.$$

(0.2.2) Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\Sigma$  una estratificación de  $M$ .

DEFINICIÓN:

Decimos que  $\Sigma$  verifica la *condición de frontera* si para toda pareja de estratos  $X, Y$  tales que  $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$  se tiene

$$X \subset \bar{Y}$$

(0.2.3) Veamos ya el teorema anunciado.

TEOREMA (Thom, Mather).

Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $\Sigma$  una estratificación de un subconjunto  $V$  y  $X, Y$  dos estratos de  $\Sigma$  tales que  $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ . Si  $Y$  es Whitney regular sobre  $X$  y  $X$  es conexo, entonces

$$X \subset \bar{Y}.$$

(0.2.4) Finalmente veamos como a partir de una estratificación Whitney regular, podemos obtener otra que satisfaga la condición de frontera.

PROPOSICIÓN (Gibson, Wirthmüller).

Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $V \subset M$  un subconjunto localmente cerrado,  $\Sigma$  una estratificación Whitney regular de  $V$ . Consideremos  $\Sigma^c$ , la partición de  $V$  en las componentes conexas de cada estrato  $X \in \Sigma$ . Entonces  $\Sigma^c$  es también una estratificación Whitney regular de  $V$  que satisface además la condición de frontera.

### (0.3) Generación de estratificaciones de Whitney.

(0.3.0) Vamos a ver ahora algunas técnicas de construcción de estratificaciones de Whitney a partir de otras: producto cartesiano, intersección, antiimágenes (ver [20]).

(0.3.1) Empecemos por el producto. Sean  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  estratificaciones de los subconjuntos  $V_1, \dots, V_n$  de las variedades diferenciables  $M_1, \dots, M_n$ . Consideremos sobre  $V_1 \times \dots \times V_n$  la estratificación  $\Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$  cuyos estratos son producto cartesiano de estratos:  $X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n}$  con  $X_{i_j} \in \Sigma_j$  para  $1 \leq j \leq n$

PROPOSICIÓN.

En las condiciones anteriores, si las estratificaciones  $\Sigma_i$  de  $V_i$  son Whitney regulares para cada  $1 \leq i \leq n$ , entonces  $\Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$  es una estratificación Whitney regular de  $V_1 \times \dots \times V_n$ .

(0.3.2) Sea  $\Sigma$  una estratificación de un subconjunto  $V$  de una variedad diferenciable  $M$ . Sea ahora  $\mathcal{U} \subset M$  un subconjunto abierto y consideremos sobre  $V \cap \mathcal{U}$  la estratificación  $\Sigma_{\mathcal{U}}$  cuyos estratos son  $X \cap \mathcal{U}$  para cada  $X \in \Sigma$ .

PROPOSICIÓN.

En las condiciones anteriores, si  $\Sigma$  es una estratificación Whitney regular de  $V$ , entonces  $\Sigma_{\mathcal{U}}$  es una estratificación Whitney regular de  $V \cap \mathcal{U}$ .

(0.3.3) Si en vez de un abierto  $\mathcal{U} \subset M$ , se considera una subvariedad  $N \subset M$  cualquiera, sus intersecciones  $X \cap N$  con los estratos  $X$  de  $\Sigma$  no serán en general variedades diferenciables. Si lo serán si se exige que  $N$  sea transversa a todos los estratos de  $\Sigma$ . Si la estratificación  $\Sigma$  es Whitney regular, la transversalidad a uno solo de los estratos nos asegura la transversalidad a los estratos próximos. Además, en tal caso dicha estratificación local es asimismo Whitney.

PROPOSICIÓN.

Sea  $\Sigma$  una estratificación Whitney regular de un subconjunto  $V$  de  $M$  variedad diferenciable. Sea  $N$  una variedad transversa a un estrato  $X_0 \in \Sigma$  en un punto  $x_0 \in X_0$ . Entonces, existe un entorno  $\mathcal{U}(x_0) \subset M$  tal que

- i)  $N$  es transversa a  $X \cap \mathcal{U}(x_0)$ , para cada estrato  $X \in \Sigma$ .
- ii) La estratificación  $\Sigma_{\mathcal{U}(x_0)} \cap N$  sobre  $V \cap \mathcal{U}(x_0) \cap N$  cuyos estratos son  $X \cap \mathcal{U}(x_0) \cap N$  para cada estrato  $X \in \Sigma$ , es Whitney regular.

(0.3.4) Los apartados anteriores son casos particulares de estratificaciones de Whitney obtenidas por antiimágenes de una  $\Sigma$  dada a través de una aplicación transversa a todos los estratos de  $\Sigma$ , cuando dicha aplicación es la simple inclusión. Veamos ahora la generalización a una aplicación transversa cualquiera.

Sea  $\Sigma$  una estratificación de un subconjunto  $V$  de una variedad diferenciable  $M$ . Sea ahora,  $M'$  otra variedad diferenciable y  $f : M' \rightarrow M$  transversal a cada estrato  $X$  de  $\Sigma$ . Se induce una estratificación  $f^{-1}(\Sigma)$  sobre  $V' = f^{-1}(V)$  de la manera siguiente: los estratos son  $X' = f^{-1}(X)$ , con  $X$  estrato de  $\Sigma$ .

PROPOSICIÓN.

En las condiciones anteriores, si  $\Sigma$  es Whitney regular, entonces  $f^{-1}(\Sigma)$  también es Whitney regular.

#### (0.4) Regularidad de la estratificación “imagen”.

(0.4.1) Vamos a necesitar también el siguiente criterio de regularidad para la estratificación “imagen” de una estratificación de Whitney

PROPOSICIÓN.

Sean, respectivamente  $\Sigma, \Sigma'$  estratificaciones de subconjuntos  $V, V'$  de variedades diferenciables  $M, M'$ . Supongamos que existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M'$  que conserva estratos (es decir, que para cada  $X \in \Sigma$  existe  $X' \in \Sigma'$  tal que  $f(X) \subset X'$ ), y una pareja  $X_0 \in \Sigma, X'_0 \in \Sigma'$ , tal que  $f(X_0) = X'_0$ . Se tiene que, si  $\Sigma$  es Whitney regular sobre  $X_0$ , entonces  $\Sigma'$  es Whitney regular sobre  $X'_0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Por (0.1.3) podemos suponer que  $f$  es la identidad. Supongamos pues  $M = M', V = V', X_0 = X'_0$  y  $X \subset X'$ , para todo  $X \in \Sigma$  y  $X' \in \Sigma'$  adecuado.

Sea ahora,  $x'_0 \in X'_0 \cap \overline{X'_i}$ ,  $x'_n$  una sucesión de puntos de  $X'_0$  y  $y'_n$  una sucesión de puntos de  $X'_i$  ambas convergentes hacia  $x'_0$ . Supongamos que la sucesión de espacios tangentes  $T_{y'_n} X'_i$  converge hacia un espacio  $T'$  y que la sucesión de rectas  $[x'_n - y'_n]$  converge hacia un espacio  $L'$ . Hemos de comprobar que  $L' \subset T'$ .

Puesto que la estratificación  $\Sigma$  es localmente finita los puntos de la sucesión  $y'_n$  se encuentran en un número finito de estratos  $X_1, \dots, X_k$ , por lo que existe una subsucesión  $y'_{\sigma(n)}$  contenida en un estrato  $X_i$ . Consideremos la subsucesión  $x'_{\sigma(n)}$  de  $x'_n$  y tenemos:

$$x'_{\sigma(n)} \rightarrow x'_0$$

$$y'_{\sigma(n)} \rightarrow x'_0$$

con  $x'_0 \in X_0 = X'_0$ .

Tomando una subsucesión de  $T_{y'_{\sigma(n)}} X_i$  si es necesario, podemos suponer

$$T_{y'_{\sigma(n)}} X_i \longrightarrow T$$

(existe ya que la variedad grasmaniana es compacta)

Puesto que  $X_i \subset X'_i$  tenemos que  $T \subset T'$ .

Por otra parte tenemos que  $[x'_{\sigma(n)} - y'_{\sigma(n)}] \longrightarrow L'$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta que  $\Sigma$  es Whitney regular sobre  $X_0$  en  $x'_0$  es  $L' \subset T$ , y por tanto  $L' \subset T'$ .

### (0.5) Homogeneidad y regularidad.

(0.5.1) El teorema que damos a continuación, justifica la definición de estratificaciones de Whitney: “to decompose a variety into a disjoint union of strata each of which consists of equally *bad points*”, ([34]).

TEOREMA (Thom-Mather).

Sea  $\Sigma$  una estratificación de Whitney de un subconjunto  $V$  de una variedad diferenciable  $M$ . Entonces, para todo  $x, x'$  pertenecientes a la misma componente conexa del estrato  $X_i$  de  $\Sigma$ , existe un entorno  $\mathcal{U}(x)$  en  $V$ , un entorno  $\mathcal{U}'(x')$  y un homeomorfismo local

$$\varphi : \mathcal{U}(x) \longrightarrow \mathcal{U}'(x')$$

que conserva estratos, es decir

$$\varphi : X_i \cap \mathcal{U}(x) \longrightarrow X_i \cap \mathcal{U}'(x')$$

que es un homeomorfismo para cada  $i$ .

(0.5.2) Recíprocamente, se dan condiciones de regularidad de Whitney, en el caso en que los estratos verifican hipótesis de homogeneidad.

PROPOSICIÓN.

Sea  $\Sigma$  una estratificación sobre un subconjunto  $V$  de una variedad diferenciable  $M$ . Supongamos que para todo  $X \in \Sigma$  y para todo  $x, x' \in X$ , existe un difeomorfismo local que aplica uno en el otro, y que conserva estratos.

Entonces,  $\Sigma$  es una estratificación Whitney regular.

**(0.6) Ejemplos.**

(0.6.1) Como ejemplo trivial de estratificación Whitney regular tenemos la partición del conjunto de matrices  $M_{n \times m}(\mathbf{C})$  en subconjuntos cada uno de los cuales formado por todas las matrices que tienen el mismo rango, Obviamente hay un número finito de estratos.

La estratificación obtenida verifica las condiciones de regularidad de Whitney ya que los estratos son las órbitas por la acción de un grupo de Lie  $Gl(n; \mathbf{C}) \times Gl(m; \mathbf{C})$  sobre el conjunto de matrices.

(0.6.2) Como ejemplo no trivial, de estratificación de Whitney y debido al uso que haremos de ella, destacamos la estratificación por el símbolo de Segre, del conjunto de matrices cuadradas  $M_n(\mathbf{C})$ .

Sea  $A \in M_n(\mathbf{C})$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  sus valores propios. Recordemos que el símbolo de Segre de  $A$  viene dado por

$$\sigma_S = (\sigma_S(1), \dots, \sigma_S(s))$$

donde  $\sigma(i)$  es la característica de Segre del valor propio  $\lambda_i$  para cada  $i$ .

DEFINICIÓN:

Llamaremos estrato de Segre, y lo notaremos por  $E_S(\sigma_S)$ , al conjunto de todas las matrices  $A$  que tienen el mismo símbolo de Segre  $\sigma$ .

Notaremos por  $E_S(A)$  al estrato al cual pertenece la matriz  $A$ .

Nótese que hay un número finito de estratos dos a dos disjuntos y que  $\cup_{\sigma_S} E_S(\sigma_S) = M_n(\mathbf{C})$ .

Gibson en [19], demuestra que esta partición es una estratificación y que verifica las condiciones de regularidad de Whitney.

## I. Estratificación de Brunovsky-Kronecker.

### (I.1) Los estratos de Brunovsky-Kronecker.

(I.1.1) Dada una pareja de matrices  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  sean

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$$

los índices de controlabilidad de la pareja y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  sus valores propios, y

$$\sigma(1) = (\sigma_1(1), \sigma_2(1), \dots)$$

...

$$\sigma(s) = (\sigma_1(s), \sigma_2(s), \dots)$$

las características de Segre asociadas a los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ . Podemos suponer que  $\sigma_1(i) \geq \sigma_2(i) \geq \dots$ , para cada  $1 \leq i \leq s$ . Escribiremos

$$k = (k_1, \dots, k_r), \quad p = k_1 + \dots + k_r \quad \text{y} \quad \delta_i = \sigma_1(i) + \sigma_2(i) + \dots$$

DEFINICIÓN:

Con las anteriores notaciones, llamaremos *símbolo de Brunovsky-Kronecker*, que abreviaremos diciendo *BK-símbolo* de la pareja  $(A, B)$  y notaremos por  $\sigma$ , al conjunto formado por los índices de controlabilidad y la característica de Segre de cada valor propio:

$$\begin{aligned} \sigma &= (k, \sigma(1), \dots, \sigma(s)) = \\ &= ((k_1, \dots, k_r), (\sigma_1(1), \sigma_2(1), \dots), (\sigma_1(2), \sigma_2(2), \dots), \dots, (\sigma_1(s), \sigma_2(s), \dots)) \end{aligned}$$

(I.1.2) En general, un símbolo de Brunovsky-Kronecker (o abreviadamente un BK-símbolo) es una familia  $\sigma$  de enteros positivos de un tipo, tal que

$$k_1 + \dots + k_r + \sum_j \sigma_j(1) + \dots + \sum_j \sigma_j(s) = n$$

Supondremos  $k_1 \geq \dots \geq k_r$ ,  $\sigma_1(i) \geq \sigma_2(i) \geq \dots$  para  $1 \leq i \leq s$ .

(I.1.3) Un estrato de Brunovsky-Kronecker agrupa todas las parejas de matrices con un mismo BK-símbolo.

DEFINICIÓN:

Dado un BK-símbolo  $\sigma$ , el *estrato de Brunovsky-Kronecker* asociado  $E(\sigma)$ , es el subconjunto de  $\mathcal{M}_{nm}$  formado por todas las parejas de matrices cuyo BK-símbolo es  $\sigma$ .

Notaremos por  $E(A, B)$ , el estrato al cual pertenece la pareja de matrices  $(A, B)$ .

(I.1.4) Obviamente, si  $\sigma \neq \sigma'$  entonces  $E(\sigma) \cap E(\sigma') = \emptyset$  y  $\cup_{\sigma} E(\sigma) = \mathcal{M}_{nm}$ . Esto es, los BK-estratos forman una partición finita de  $\mathcal{M}_{nm}$ . En el próximo apartado veremos que de hecho es una estratificación, esto es, que los estratos son variedades diferenciables.

DEFINICIÓN:

Denotamos por  $\Sigma = \cup_{\sigma} E(\sigma)$  esta partición, que llamaremos *estratificación de Brunovsky-Kronecker* o simplemente *BK-estratificación*.

(I.1.5) Obsérvese que la partición del espacio  $\mathcal{M}_{nm}$  en órbitas no es una estratificación, puesto que, si bien estas son variedades diferenciables, no verifica la condición de finitud local exigida. De hecho, si consideramos  $V$  el subconjunto formado por parejas de matrices completamente controlables, la partición en órbitas si es una estratificación en el sentido de la definición (0.1.1).

## (I.2) Regularidad de los estratos.

(I.2.1) Ya hemos dicho que consideraremos la variedad  $\Gamma = (A, B) + \{(X, Y)\}$ , obtenida en (cap1, (III.3)). En el capítulo 1. (IV.2.1) hemos estudiado la intersección  $\Gamma \cap \mathcal{O}(A, B)$ , de donde se deduce

PROPOSICIÓN.

*Siguiendo las mismas notaciones que en el capítulo 1, (IV.2.1):*

- i) Si  $(X, Y) \neq (0, 0)$ , entonces  $(A, B) + (X, Y)$  no pertenece a la órbita  $\mathcal{O}(A, B)$ .
- ii)  $(A, B) + (X, Y)$  pertenece al estrato  $E(A, B)$  si y sólo si  $X_1^2 = Y = 0$ , y  $J + X_2^2$  tiene el mismo símbolo de Segre que  $J$ .

(I.2.2) Como hemos anunciado, reducimos el problema a probar que  $\Gamma \cap E(A, B)$  es regular:

LEMA.

*Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ ,  $\mathcal{O}(A, B)$  su órbita,  $E(A, B)$  su estrato, y  $\Gamma$  la variedad transversal a la órbita considerada en (I.2.1). Entonces, en un entorno de  $(A, B)$ ,  $E(A, B)$  es una subvariedad regular en  $(A, B)$  si y sólo si  $E(A, B) \cap \Gamma$  lo es.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que  $E(A, B)$  es regular en  $(A, B)$ . Puesto que  $\Gamma$  es transversal a  $\mathcal{O}(A, B)$ , es también transversal a  $E(A, B)$ . Por lo tanto,  $E(A, B) \cap \Gamma$  es regular en  $(A, B)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $E(A, B) \cap \Gamma$  es regular en  $(A, B)$ . Teniendo en cuenta la trivialidad local dada en el lema (I.3.2) del capítulo 1, tenemos

$$E(A, B) = \beta(E(A, B) \cap \Gamma, V)$$

localmente en  $(A, B)$ . Por lo tanto,  $E(A, B)$  es regular en  $(A, B)$ .

(I.2.3) Finalmente, teniendo en cuenta la particular forma de  $E(A, B) \cap \Gamma$  descrita en (I.2.1), tenemos:

TEOREMA.

Los BK-estratos son subvariedades diferenciables de  $\mathcal{M}_{nm}$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ ,  $\mathcal{O}(A, B)$  su órbita y  $E(A, B)$  su BK-estrato. Hemos de probar que  $E(A, B)$  es regular en  $(A, B)$ .

Por la homogeneidad a lo largo de las órbitas, podemos suponer que  $(A, B)$  está en su forma reducida de Brunovsky:

$$(A, B) = \left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Por el lema (I.2.2), es suficiente probar que  $E(A, B) \cap \Gamma$  es regular en  $(A, B)$ , donde  $\Gamma$  es la variedad particular descrita en (I.2.1) y obtenida en el capítulo 1. Se sigue de (I.2.1), que  $E(A, B) \cap \Gamma$  está formada por las parejas de matrices de la forma

$$\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & J + X_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

tales que  $J + X_2^2$  tienen el símbolo de Segre de  $J$ , o equivalentemente, tales que  $J + X_2^2$  recorre el estrato de Segre, que notamos tal y como hemos mencionado en el ejemplo (0.6.2), por  $E_S(J)$  de  $J$ .

Por lo tanto, la aplicación  $\phi : M_{n-s}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  definida por

$$\phi(C) = \left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

es un embebimiento tal que

$$\phi(E_S(J) \cap \Gamma_S(J)) = E(A, B) \cap \Gamma$$

Gibson en [19] demuestra que los estratos de Segre son regulares. Recordemos que  $\Gamma_S(J)$  es una variedad lineal transversal a la órbita de Segre de  $J$ , y por lo tanto

también transversal a  $E_S(J)$  en  $J$ . Por lo que,  $E_S(J) \cap \Gamma_S(J)$  es regular en  $J$ , y por consiguiente  $E(A, B) \cap \Gamma$  es regular en  $(A, B)$ , como queríamos probar.

(I.2.4) La construcción anterior permite también obtener la dimensión de los estratos:

PROPOSICIÓN.

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ ,  $\mathcal{O}(A, B)$  su órbita y  $E(A, B)$  el estrato al cual pertenece.

Entonces

$$\dim E(A, B) = s + \dim \mathcal{O}(A, B)$$

donde  $s$  es el número de valores propios distintos de  $(A, B)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \dim E(A, B) - \dim \mathcal{O}(A, B) &= \\ &= \dim(E(A, B) \cap \Gamma) = \dim(E_S(J) \cap \Gamma_S(J)) = s. \end{aligned}$$

(I.2.5) Así por ejemplo, respecto a los BK-estratos de menor dimensión puede afirmarse:

COROLARIO.

No hay BK-estratos de dimensión 0 (puntos aislados). Los de dimensión 1 son los del tipo  $E(\lambda I_n, 0)$ .

### (I.3) Otras propiedades de los BK-estratos.

#### (I.3.1) PROPOSICIÓN.

*Los BK-estratos son conjuntos constructibles.*

#### DEMOSTRACIÓN:

Sea  $E(\sigma)$  el BK-estrato correspondiente al BK-símbolo  $\sigma = (k, \sigma_1, \dots, \sigma_s)$ . Consideremos el conjunto  $\mathbf{C}^{(s)} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mid \lambda_i \neq \lambda_j\} \subset \mathbf{C}^s$ , dicho conjunto es un abierto de  $\mathbf{C}^s$ . Por lo que es un conjunto constructible.

Para cada  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbf{C}^{(s)}$ , sea  $B(\sigma; (\lambda_1, \dots, \lambda_s))$  la pareja de matrices de Brunovsky de BK-símbolo  $\sigma$  y valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ . Finalmente, consideremos la aplicación  $\psi : \mathcal{G} \times \mathbf{C}^{(s)} \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  definida por

$$\psi(g, (\lambda_1, \dots, \lambda_s)) = \alpha(g, B(\sigma; (\lambda_1, \dots, \lambda_s)))$$

Obviamente,  $\mathcal{G} \times \mathbf{C}^{(s)}$  es un conjunto constructible en  $\mathbf{C}^{n^2+nm+m^2} \times \mathbf{C}^s$ ,  $\psi$  es una aplicación racional, y  $\psi(\mathcal{G} \times \mathbf{C}^{(s)}) = E(\sigma)$ , por lo que, y de acuerdo con el teorema de Chevalley [28],  $E(\sigma)$  es un conjunto constructible.

(I.3.2) Puesto que la aplicación  $\psi : \mathcal{G} \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$ , definida en la demostración del teorema anterior, es continua, el conjunto  $\mathcal{G} \times \mathbf{C}^{(s)}$  es conexo, y la imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua es un conjunto conexo, tenemos:

#### PROPOSICIÓN.

*Los BK-estratos son conjuntos conexos.*

(I.3.3) Finalmente, señalemos que la acción de  $\mathbf{C}$  sobre el conjunto  $\mathcal{M}_{nm}$  definida por

$$(\lambda, (A, B)) \rightarrow (A + \lambda I, B)$$

conserva BK-estratos:

PROPOSICIÓN.

Sea  $E(\sigma)$  un BK-estrato,  $(A, B) \in E(\sigma)$  y  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Entonces:

- i)  $\mu$  es un valor propio de  $(A, B)$  si y sólo si  $\mu + \lambda$  es un valor propio de  $(A + \lambda I, B)$ .
- ii)  $(A + \lambda I, B) \in E(\sigma)$ .

DEMOSTRACIÓN:

i) De acuerdo con la caracterización dada en el capítulo 0 (II.2.4),  $\mu$  es un valor propio de  $(A, B)$  si y sólo si

$$\text{rang}(A - \mu I, B) < n.$$

Y obviamente, esto es equivalente a

$$\text{rang}((A + \lambda I) - (\mu + \lambda)I) < n.$$

ii) Para ver que  $(A, B)$  y  $(A + \lambda I, B)$  tienen los mismos índices de controlabilidad, es suficiente probar que

$$\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^jB) = \text{rang}(B, (A + \lambda I)B, \dots, (A + \lambda I)^iB)$$

para cualquier  $1 \leq j \leq n$ . Y esto es consecuencia de que  $(A + \lambda I)^j B$  es una combinación lineal de  $B, AB, \dots, A^j B$ , para cualquier  $j$ :

$$(A + \lambda I)^j B = \binom{j}{0} A^j B + \binom{j}{1} \lambda A^{j-1} B + \dots + \binom{j}{j-1} \lambda^{j-1} A B^{j-1} + \binom{j}{0} \lambda^j B^j$$

y por tanto

$$\begin{aligned} & \text{rang}(B, (A + \lambda I)B, (A + \lambda I)^2 B, \dots, (A + \lambda I)^{i-1} B, (A + \lambda I)^j B) = \\ & = \text{rang}(B, AB, (A + \lambda I)^2 B, \dots, (A + \lambda I)^{j-1} B, (A + \lambda I)^j B) = \\ & = \dots \\ & = \text{rang}(B, AB, A^2 B, \dots, A^{j-1} B, (A + \lambda I)^j B) = \\ & = \text{rang}(B, AB, A^2 B, \dots, A^{j-1} B, A^j B) \end{aligned}$$

para cualquier  $1 \leq j \leq n$ , (de hecho  $\forall 1 \leq j$ ).

Finalmente, para ver que  $(A, B)$  y  $(A + \lambda I, B)$  tienen el mismo símbolo de Segre y puesto que el primer índice de controlabilidad ya hemos visto que es el mismo para ambas parejas, es suficiente probar que

$$\begin{aligned} & \text{rang}(B, AB, \dots, A^{k_1-1}B, (A - \mu I)^j) = \\ & = \text{rang}(B, (A + \lambda I)B, \dots, (A + \lambda I)^{k_1-1}B, ((A + \lambda I) - (\mu + \lambda)I)^j) \end{aligned}$$

para cualquier  $1 \leq j \leq n$ :

$$\begin{aligned} & \text{rang}(B, (A + \lambda I)B, \dots, (A + \lambda I)^{k_1-1}B, ((A + \lambda I) - (\mu + \lambda)I)^j) = \\ & = \text{rang}(B, AB, \dots, A^{k_1-1}B, ((A + \lambda I) - (\mu + \lambda)I)^j) = \\ & = \text{rang}(B, AB, \dots, A^{k_1-1}B, (A + (\lambda - \mu - \lambda)I)^j) = \\ & = \text{rang}(B, AB, \dots, A^{k_1-1}B, (A - \mu I)^j) \end{aligned}$$

para cualquier  $1 \leq j \leq n$ .

## II. Propiedades de regularidad de la BK-estratificación.

### (II.1) Regularidad sobre estratos simples.

(II.1.1) Tal y como hemos dicho, vamos a probar primero la regularidad de Whitney de la BK-estratificación sobre los estratos llamados *simples*.

DEFINICIÓN:

- 1) Una pareja de matrices  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$  se llama *simple* si tiene a lo sumo un sólo valor propio.
- ii) Decimos que un estrato  $E(\sigma)$  es *simple* si todos sus elementos son simples, es decir, si  $\sigma = (k, \sigma(1))$  (o  $\sigma = (k)$ ).

(II.1.2) Los estratos simples verifican una particular propiedad de homogeneidad, que en cierto sentido es el recíproco de la proposición (I.3.3):

PROPOSICIÓN.

Sea  $E(\sigma)$  un estrato simple. Para cualquier  $(A, B), (A', B') \in E(\sigma)$ , existe un difeomorfismo  $f$  de  $\mathcal{M}_{nm}$ , que conserva estratos, y tal que:  $f(A, B) = (A', B')$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si  $\sigma = (k)$ , es trivial, ya que los estratos son órbitas.

Si  $\sigma = (k, \sigma(1))$ , sean  $\lambda, \lambda'$  los valores propios de  $(A, B)$  y  $(A', B')$  respectivamente. Entonces, por la proposición (I.3.3) tenemos que la pareja de matrices  $(A + (\lambda' - \lambda)I, B)$  es semejante por bloques a  $(A', B')$ . Por lo tanto, existe  $g_0 \in \mathcal{G}$  tal que  $(A', B') = \alpha(g_0, (A + (\lambda' - \lambda)I, B))$ .

Definamos ahora  $f : \mathcal{M}_{nm} \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  de la siguiente forma

$$f(X, Y) = \alpha(g_0, (X + (\lambda' - \lambda)I, Y))$$

Está claro que dicha aplicación verifica las condiciones requeridas.

(II.1.3) El teorema de Whitney asegura que cualquier estrato de una estratificación constructible localmente finita tiene un punto Whitney regular. Por lo tanto, cualquier estrato  $E(\sigma)$  tiene un punto  $(A, B)$  tal que  $\Sigma$  es Whitney regular sobre  $E(\sigma)$  en  $(A, B)$ . En el caso particular en el que  $E(\sigma)$  es simple, la anterior propiedad de homogeneidad implica que todos los puntos de  $E(\sigma)$  son Whitney regulares. Por consiguiente tenemos:

LEMA.

La BK-estratificación  $\Sigma$  es Whitney regular sobre cualquier BK-estrato simple.

(II.2) Regularidad de la estratificación para el caso  $m = 1$ .

(II.2.1) Vamos a ver como podemos restringir el estudio de la regularidad al de la estratificación inducida.

Dado  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ , sea  $\Gamma$  la variedad lineal definida en (3.1), y consideremos la estratificación inducida

$$\Sigma \cap \Gamma = \cup_{\sigma} (E(\sigma) \cap \Gamma)$$

en un entorno suficientemente pequeño de  $(A, B)$ . Nótese que está bien definida puesto que  $\Gamma$  no es sólo transversal a  $\mathcal{O}(A, B)$ , sino también a cada órbita suficientemente próxima  $(A, B)$  (capítulo 1.(I.3.2)), y por lo tanto a cada BK-estrato suficientemente próximo a  $(A, B)$ .

LEMA.

Con las mismas notaciones,  $\Sigma$  es Whitney regular sobre  $E(A, B)$  en  $(A, B)$  si y sólo si  $\Sigma \cap \Gamma$  es Whitney regular sobre  $E(A, B) \cap \Gamma$  en  $(A, B)$ .

DEMOSTRACIÓN:

La condición necesaria se sigue de (0.3.3)

Para ver que es suficiente, usamos de nuevo el difeomorfismo

$$E(\sigma) = \beta(E(\sigma) \cap \Gamma \times V)$$

localmente en  $(A, B)$ . Obviamente, si  $\cup_{\sigma} (E(\sigma) \cap \Gamma)$  es Whitney regular sobre  $E(A, B) \cap \Gamma$  en  $(A, B)$ , la estratificación producto  $\cup_{\sigma} (E(\sigma) \cap \Gamma \times V)$  es también Whitney regular sobre  $E(A, B) \cap \Gamma \times V$  en  $(A, B)$ . Y, el difeomorfismo antes referido  $\beta$ , concluye la demostración.

(II.2.2) Finalmente, podemos ya abordar el teorema principal:

TEOREMA.

Si  $m = 1$  la estratificación de Brunovsky-Kronecker es Whitney regular.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}_{nm}$ ,  $\mathcal{O}(A, B)$  su órbita y  $E(A, B)$  su estrato. Probaremos que  $\Sigma$  es Whitney regular sobre  $E(A, B)$  en  $(A, B)$ . Sea  $\Gamma$  la variedad lineal definida en (I.2.1), y denotemos por el mismo símbolo el entorno de  $(A, B)$  donde el isomorfismo  $\beta$  definido en cap. 1 (I.3.2) se verifica. Entonces, y de acuerdo con (I.3.1), es suficiente probar que  $\Sigma \cap \Gamma$  es Whitney regular sobre  $E(A, B) \cap \Gamma$  en  $(A, B)$ .

Por la homogeneidad a lo largo de las órbitas, podemos suponer que  $(A, B)$  está en su forma reducida de Brunovsky:

$$(A, B) = \left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s)$ , como en cap 0, (II.3.1).

Nótese que  $N$  tiene un único bloque nilpotente y  $E = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^t \in M_{p \times 1}(\mathbf{C})$ .

Consideremos las parejas de matrices:

$$(A_i, B_i) = \left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & J_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{M}_i = M_{p+\delta_i}(\mathbf{C}) \times M_{(p+\delta_i) \times 1}(\mathbf{C})$$

para  $1 \leq i \leq s$ . Y sean  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$  las BK-estratificaciones de los respectivos espacios de matrices  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_s$ . Si denotamos por  $E_i(A_i, B_i)$  el estrato de  $(A_i, B_i)$  en  $\Sigma_i$ ,  $0 \leq i \leq s$ , estamos en las condiciones del lema (II.1.3), por lo que se sigue que  $\Sigma_i$  es Whitney regular sobre  $E_i(A_i, B_i) \cap \Gamma_i$  en  $(A_i, B_i)$ , donde  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$  son las variedades lineales respectivas definidas como en el capítulo 1, (IV.2.1):

$$\Gamma_i = (A_i, B_i) + \left\{ \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_1^{2(i)} & X_2^{2(i)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}, \quad 1 \leq i \leq s$$

Como antes, denotamos por el mismo símbolo  $\Gamma_i$  los entornos de  $(A_i, B_i)$  donde los correspondientes isomorfismos definidos en cap 1 (I.3.2) se verifican, esto es las estratificaciones inducidas  $\Sigma_i \cap \Gamma_i$ ,  $0 \leq i \leq s$ , están bien definidas. De hecho, de acuerdo con (II.2.1),  $\Sigma_i \cap \Gamma_i$  es Whitney regular sobre  $E_i(A_i, B_i) \cap \Gamma_i$  en  $(A_i, B_i)$ ,  $0 \leq i \leq s$ .

Ahora, consideremos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_s &\longrightarrow \Gamma \\ \varphi \left( \left( \left( \begin{array}{cc} N & 0 \\ X_1 & H_1 \end{array} \right), \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right) \dots, \left( \left( \begin{array}{cc} N & 0 \\ X_s & H_s \end{array} \right), \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) &= \\ &= \left( \left( \begin{array}{cccc} N & 0 & \dots & 0 \\ X_1 & H_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_s & 0 & \dots & H_s \end{array} \right), \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

donde  $X_i = X_1^2(i)$  y  $H_i = J_i + X_2^2(i)$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

Sabemos por (0.3.1) que  $\Pi = (\Sigma_1 \cap \Gamma_1) \times \dots \times (\Sigma_s \cap \Gamma_s)$  es una estratificación que es Whitney regular sobre el estrato

$$(E_1(A_1, B_1) \cap \Gamma_1) \times \dots \times (E_s(A_s, B_s) \cap \Gamma_s)$$

en  $((A_1, B_1), \dots, (A_s, B_s))$ . Por lo tanto, y puesto que  $\varphi$  es un difeomorfismo, para finalizar la demostración es suficiente demostrar que  $\varphi(\Pi)$  es una subestratificación de  $\Sigma \cap \Gamma$  localmente en  $(A, B)$ . Es decir, que dados dos puntos

$$z = \left( \left( \begin{array}{cc} N & 0 \\ X_i & H_i \end{array} \right), \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i \leq s} \quad \text{y} \quad z' = \left( \left( \begin{array}{cc} N & 0 \\ X'_i & H'_i \end{array} \right), \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i \leq s}$$

pertenecientes a un mismo estrato de  $\Pi$ , entonces sus imágenes  $\varphi(z)$ ,  $\varphi(z')$  pertenecen al mismo estrato de  $\Sigma \cap \Gamma$ , siempre que ellos esten suficientemente próximos a  $(A, B)$ .

Para probar esto, vamos a ver que los índices de controlabilidad y los símbolos de Segre de  $\varphi(z)$  y  $\varphi(z')$  son los mismos.

(i) Para probar la primera afirmación es suficiente demostrar que si escribimos  $\varphi(z) = (C, D)$

$$C = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ X_1 & H_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_s & 0 & \dots & H_s \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y  $\varphi(z') = (C', D)$ ,

$$C' = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ X'_1 & H'_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X'_s & 0 & \dots & H'_s \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}\rho_j &= \text{rang}(D, CD, \dots, C^{j-1}D) = \\ &= \text{rang}(D, C^j D, \dots, C^{j-1}D) = \rho'_j, \quad 1 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Un simple cálculo demuestra que  $r_j = r'_j = j$  para  $1 \leq j \leq p$ . Luego, podemos suponer  $j > p$ .

Si denotamos por  $Y_i$  la primera columna de la matriz  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , es fácil ver que

$$\rho_j = \text{rang} \begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_1 & HY_1 & \dots & H_1^\ell Y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_s & H_s Y_s & \dots & H_s^\ell Y_s \end{pmatrix}$$

donde  $\ell = j - p - 1$ .

Notamos que, puesto que  $z$  y  $z'$  pertenecen a un mismo estrato, se tiene  $Y_i = 0$  si y sólo si  $Y_i' = 0$ . Por lo tanto, si  $Y_i = 0$  para  $1 \leq i \leq s$  es obvio que  $\rho_j = \rho'_j$  para  $p + 1 \leq j \leq n$ . Luego, supongamos ahora que  $Y_i \neq 0$  para algún  $i$ . Renumerando, si es necesario, podemos suponer que  $Y_i \neq 0$  (por lo que  $Y_i' \neq 0$ ) para  $1 \leq i \leq t$ ,  $t \leq s$ .

Luego  $\rho_j \leq \rho_{j+1} \leq \rho_j + 1$ , en vistas a probar que  $\rho_j = \rho'_j$  para  $s < j \leq n$  es suficiente probar que si  $j$  es el primer índice tal que  $\rho_j = \rho_{j-1}$ , el índice  $j$  es también el primero que verifica la propiedad con respecto a  $\rho'_j$ .

Luego, sea  $j = s + \ell + 1$  el primer índice tal que

$$\rho_j = \rho_{j-1}$$

Entonces, existen  $a_k$ ,  $0 \leq k \leq \ell - 1$ , verificando

$$\begin{pmatrix} H_1^\ell Y_1 \\ \vdots \\ H_t^\ell Y_t \end{pmatrix} + a_{\ell-1} \begin{pmatrix} H_1^{\ell-1} Y_1 \\ \vdots \\ H_t^{\ell-1} Y_t \end{pmatrix} + \dots + a_0 \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\psi(x) = a_0 + \dots + a_{\ell-1} x^{\ell-1} + x^\ell$$

es el polinomio mínimo del vector

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix}$$

con respecto la matriz

$$H = \text{diag}(H_1, \dots, H_t).$$

Sea ahora,  $\varphi_i(x)$  el polinomio mínimo de  $H_i$ , y  $\psi_i(x)$  el polinomio mínimo de  $Y_i$ , con respecto  $H_i$ , para  $1 \leq i \leq t$ . Veamos ahora, que  $\psi(x) = \psi_1(x) \dots \psi_t(x)$ . De hecho, puesto que  $\varphi_i(H_i)(Y_i) = 0$  se tiene que  $\psi_i(x) \mid \varphi_i(x)$  para  $1 \leq i \leq t$ , de manera que  $m.c.d(\psi_i(x), \psi_k(x)) = 1$  si  $i \neq k$ . Por otra parte, puesto que  $\psi(Y) = 0$ , tenemos  $\psi(Y_i) = 0$ ; por lo que,  $\psi_i(x) \mid \psi(x)$  para  $1 \leq i \leq t$ . Consecuentemente,  $\psi_1(x) \dots \psi_t(x) \mid \psi(x)$ . Recíprocamente, es fácil ver que  $\psi_1(H) \dots \psi_t(H)(Y) = 0$ , de manera que  $\psi(x) \mid \psi_1(x) \dots \psi_t(x)$ , y la igualdad se verifica.

Ahora, si denotamos  $m_i = \text{grado } \psi_i(x)$  es obvio que

$$\ell = m_1 + \dots + m_t.$$

Pero  $m_i$  es el menor entero tal que

$$\begin{aligned} & \text{rang} \begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_i & H_i Y_i & \dots & H_i^{m_i} Y_i \end{pmatrix} = \\ & = \text{rang} \begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_i & H_i Y_i & \dots & H_i^{m_i-1} Y_i \end{pmatrix} = p + m_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, y teniendo en cuenta que  $\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ X_i & H_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  y  $\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ X'_i & H'_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  pertenecen a un mismo estrato, se sigue que el polinomio mínimo de  $Y'_i$  (primera columna de  $X'_i$ ) tiene también grado  $m_i$ ,  $i = 1 \dots t$ . Por consiguiente, el grado del polinomio mínimo de  $Y' = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_t \end{pmatrix}$  es  $m_1 + \dots + m_t = \ell$  por lo que queda probada la primera afirmación.

(ii) Ahora debemos probar que el símbolo de Segre de  $\varphi(z)$  y  $\varphi(z')$  son los mismos.

Primeramente, remarcamos que  $\mu$  es un valor propio de  $\varphi(z) = (C, D)$  si y sólo si es un valor propio de  $\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ X_i & H_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ , para algún  $1 \leq i \leq s$ . Par ver esto, es suficiente tener presente la caracterización dada en el capítulo 0 (II.2.4):

$$\mu \text{ es un valor propio de } \varphi(z) = (C, D) \text{ si y sólo si } \text{rang}(C - \mu I, D) < n;$$

por lo que  $\text{rang}((N \ 0)(E)) = p$ , significa que  $\text{rang}((X_i \ H_i - \mu I)(0)) < \delta_i$ , para algún  $1 \leq i \leq s$ ; por lo tanto  $\text{rang} \left( \begin{pmatrix} N - \mu I & 0 \\ X_i & H_i - \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right) < p + \delta_i$ , de manera que  $\mu$  es un valor propio de  $\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ X_i & H_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Y recíprocamente.

Por otra parte, puesto que  $\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ X_i & H_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  y  $\left( \begin{pmatrix} N & 0 \\ X'_i & H'_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  están en el mismo estrato, existe un valor propio  $\mu'$  de la segunda pareja de matrices con la misma característica de Segre que la del valor propio  $\mu$ . Como acabamos de ver,  $\mu'$  es también un valor propio de  $\varphi(z')$ . Entonces, probaremos que  $\mu$  y  $\mu'$  tienen la misma característica de Segre:

A partir de cap 0(II.2.4) basta probar que  $\nu_j = \nu'_j$  para todo  $j$ , siendo

$$\nu_j = \text{rang}(B, AB, \dots, A^{k_1-1}B, (A - \mu I)^j)$$

en nuestro caso

$$\begin{aligned} \nu_j &= \text{rang} \left( \begin{matrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_1 & HY_1 & \dots & H_1^t Y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_s & H_s Y_s & \dots & H_s^t Y_s \end{matrix} \begin{pmatrix} N - \mu I & & & & & & & \\ X_1 & H_1 - \mu I & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & H_s - \mu I \end{pmatrix}^j \right) = \\ &= \text{rang} \left( \begin{matrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_1 & HY_1 & \dots & H_1^t Y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_s & H_s Y_s & \dots & H_s^t Y_s \end{matrix} \begin{pmatrix} (N - \mu I)^j & & & & & & & \\ X_1(N - \mu I)^{j-1} + (H_1 - \mu I)X_1(N - \mu I)^{j-2} + \dots + (H_1 - \mu I)^{j-1}X_1 & (H_1 - \mu I)^j & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & \vdots \\ X_s(N - \mu I)^{j-1} + (H_s - \mu I)X_s(N - \mu I)^{j-2} + \dots + (H_s - \mu I)^{j-1}X_s & & & & & & & (H_s - \mu I)^j \end{pmatrix} \right) = \\ &= \delta_1 + \dots + \delta_{i-1} + \delta_{i+1} + \delta_s + \\ &+ \text{rang} \left( \begin{matrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_i & \dots & H_i^t Y_i \end{matrix} \begin{pmatrix} N - \mu I & & & \\ X_i & H_i - \mu I & & \end{pmatrix}^j \right) = \\ &= \delta_1 + \dots + \delta_{i-1} + \delta_{i+1} + \delta_s + \\ &+ \text{rang} \left( \begin{matrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y'_i & \dots & H_i'^t Y'_i \end{matrix} \begin{pmatrix} N - \mu I & & & \\ X'_i & H'_i - \mu I & & \end{pmatrix}^j \right) = \\ &= \text{rang} \left( \begin{matrix} E & NE & \dots & N^{p-1}E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y'_i & H_i'^t Y'_i & \dots & H_i'^t Y'_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y'_s & H_s'^t Y'_s & \dots & H_s'^t Y'_s \end{matrix} \begin{pmatrix} N - \mu I & & & & & & & \\ X'_1 & H'_1 - \mu I & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & H'_s - \mu I \end{pmatrix}^j \right) = \nu'_j \end{aligned}$$

y la demostración del teorema queda terminada.

(II.2.3) Como los BK-estratos son conexos (I.2.6), del teorema anterior y (0.2.3) se sigue que la BK-estratificación verifica la condición de frontera, para  $m = 1$ . De hecho de (4.7) y (5.6) de [23] se sigue que la condición de frontera se verifica para cualquier valor de  $m$ . Asimismo, de [3] se deduce que los estratos que forman la frontera de uno dado tienen dimensión estrictamente menor que la de éste. Se tiene por tanto:

PROPOSICIÓN.

*La frontera de todo BK-estrato está formada por estratos de dimensión estrictamente inferior.*

### III. Diagrama de bifurcaciones.

#### (III.1) Familias transversas y diagramas de bifurcaciones.

(III.1.1) Sea  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  una familia diferenciable de parejas de matrices, parametrizadas por  $t \in M$ .

Si  $E(\sigma)$  es un estrato de  $\Sigma$ , y  $\varphi$  es transversa a  $E(\sigma)$ , entonces  $\varphi^{-1}(E(\sigma))$ , es una subvariedad de  $M$ , de la misma codimensión

$$\text{codim}_M \varphi^{-1}(E(\sigma)) = \text{codim}_{\mathcal{M}_{nm}} E(\sigma).$$

Si  $\varphi$  es transversa a todos los estratos de  $\Sigma$ , entonces  $\cup_{\sigma} \varphi^{-1}(E(\sigma))$  es una estratificación de  $M$ , cuyos estratos tienen la misma codimensión que sus imágenes en  $\Sigma$  y que se denominan diagramas de bifurcaciones de  $\varphi$ . Esto es:

DEFINICIÓN:

Sea  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  una familia diferenciable de parejas de matrices transversa a la BK-estratificación  $\Sigma$ . Llamaremos *diagrama de bifurcaciones* a la estratificación de  $M$  según los BK-símbolos de  $\varphi(t)$ ,  $t \in M$ .

(III.1.2) A menudo se consideran excluidos los estratos de codimensión nula. Con ello, el diagrama de bifurcaciones de  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  será la anterior estratificación restringida al subconjunto de  $M$  de parámetros  $t$  tales que  $\varphi(t)$  no es estructuralmente estable (ver [1], o [2]).

(III.1.3) Observamos que, por el teorema de transversalidad de Thom, las familias anteriores pueden considerarse “genéricas” en el siguiente sentido:

TEOREMA. (Thom)

*En el espacio de las familias  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  diferenciables, las transversas a la BK-estratificación  $\Sigma$  forman un subconjunto denso. Si  $\Sigma$  verifica las condiciones de regularidad de Whitney, entonces dicho conjunto es abierto.*

### (III.2) Estratos genéricos.

(III.2.1) Tal como se ha hecho notar en (III.1.1), la codimensión de los estratos de un diagrama de bifurcaciones coincide con la de los correspondientes BK-estratos. Por tanto, de (I.2.4) se deducen los estratos que aparecen en un diagrama de bifurcaciones de una familia  $\ell$ -parametrizada, así como su dimensión.

(III.2.2) Así, en una familia genérica  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  sólo se darán parejas de matrices cuyo BK-símbolo  $\sigma$  verifique:

$$\text{codim } E(\sigma) \leq \dim M$$

En particular, si se designa por  $\sigma(t)$  el BK-símbolo de  $\varphi(t)$ , el estrato de codimensión máxima es

$$\{t \in M \mid \text{codim } E(\sigma(t)) = \dim M\}$$

Estos serán los tipos de parejas de matrices que se darán para valores aislados de  $t \in M$ .

(III.2.3) En el estrato de codimensión mínima se darán los tipos estables o genéricos de la familia:

PROPOSICIÓN.

En el diagrama de bifurcaciones de una familia genérica  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$ , el estrato de codimensión 0 es el abierto formado por los  $t \in M$  tales que  $\varphi(t)$  es de tipo  $((n))$ .

(III.2.4) Listemos, por ejemplo, los otros tipos de parejas de matrices posibles en familias genéricas con pocos parámetros, para el caso particular  $m = 1$ .

PROPOSICIÓN.

Sea  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{n1}$  una familia genérica de matrices, y designemos por  $\ell = \dim M$ . Además de las parejas de tipo  $((n))$  (ver (III.2.3)), pueden darse también:

- i) para  $\ell = 1$ : parejas de matrices del tipo  $((n-1), ((1)))$ , en puntos aislados,
- ii) para  $\ell = 2$ : parejas de matrices del tipo anterior en dimensión 1, y parejas de matrices del tipo  $((n-2), ((1), (1)))$  en los puntos singulares de dicha curva,
- iii) para  $\ell = 3$ : parejas de matrices de los dos tipos anteriores en dimensión 2 y 1 respectivamente, y parejas de matrices del tipo  $((n-3), ((1)(1)(1)))$  o bien  $((n-2), ((2)))$  en puntos aislados,
- iv) para  $\ell = 4$ : parejas de matrices de los tres tipos anteriores en dimensión 3, 2 y 1 respectivamente, y parejas del tipo  $((n-4), ((1)(1)(1)(1)))$  o bien  $((n-3), ((2)(1)))$  en puntos aislados.

(III.2.5) Observamos que en general la parte de Jordan de cualquier pareja de matrices que se de en un estrato de codimensión  $\ell$  es de tamaño inferior o igual a  $\ell$ , y que tiene exactamente este tamaño si  $J$  es diagonal con todos los valores propios distintos. De hecho, este resultado es general

PROPOSICIÓN.

Sea  $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}$  una familia genérica de parejas de matrices.

Parejas de índice de controlabilidad  $k_1 (< n)$  sólo puede darse en estratos  $E'$  del diagrama de bifurcaciones de  $M$  tales que

$$n - k_1 \leq \text{codim}_M E' \leq (n - k_1)^2 + (n - k_1) - 1$$

Además:

- i) las únicas parejas de índice de controlabilidad  $k_1$  que pueden darse en estratos de codimensión  $n - k_1$  son aquellas cuya parte de Jordan es genérica es (diagonalizable, con todos los valores propios distintos)
- ii) las únicas parejas de índice de controlabilidad  $k_1$  que pueden darse en estratos de codimensión  $(n - k_1)^2 + (n - k_1) - 1$  son aquellas cuya parte de Jordan es una matriz escalar (diagonal con un sólo valor propio).

DEMOSTRACIÓN:

Basta tener en cuenta (I.2.4), y capítulo 1, (II.3.4) para tener la expresión de la codimensión de un estrato

$$\text{codim}_M E' = n - k_1 + \sum_i (\sigma_1(i) + 3\sigma_2(i) + \dots - 1)$$

(III.2.6) Por ejemplo, las matrices del tipo  $(\lambda I_n, 0) \in \mathcal{M}_{n1}$  se dan en puntos aislados de familias genéricas con  $n^2 + n - 1$  parámetros. Y no se dan genéricamente para un número menor de parámetros.

### (III.3) Diagramas de bifurcaciones locales.

(III.3.1) Dada una familia genérica  $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$ , para el estudio local en un punto  $t \in M$  de su diagrama de bifurcaciones la observación clave es que podemos reducirnos a las estratificaciones  $\Gamma \cap \Sigma$  siendo  $\Gamma$  la subvariedad que define la deformación miniversal construída en el cap 1 (III) y referida en (I.2.0).

En efecto, por la homogeneidad del espacio a lo largo de las órbitas, podemos suponer  $(A, B) = \varphi(t)$  en forma de Brunovsky. Y en segundo lugar al ser  $\Gamma$  miniversal, la aplicación  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{nm}$  debe factorizar por una  $\bar{\varphi} : M \rightarrow \Gamma$  submersiva.

Más aún, si  $(A, B)$  es no controlable (de Brunovsky), obsérvese que los vectores de  $\mathcal{O}(A, B)^\perp$  tangentes a  $E(A, B)$  vienen dados por parejas de matrices de la forma

$$\left( \left( \begin{array}{cc} 0_p & \\ & J \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right)$$

siendo

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I \end{pmatrix}$$

Por tanto, en el estudio local de  $\Gamma \cap \Sigma$  podemos reducirnos al subespacio de parejas de matrices con traza de cada  $X_2^2(i)$  nula, para cada  $1 \leq i \leq s$ .

Como antes, veamos algunos ejemplos de diagramas de bifurcaciones locales para  $m = 1$  y bajo número de parámetros.

### (III.3.2) Familias con 1 sólo parámetro

Como hemos visto en (III.2.4), además de las parejas de matrices estructuralmente estables, sólo pueden aparecer (en codim 1) puntos aislados del tipo  $((n-1), ((1)))$ , es decir, de la forma:

$$\left( \left( \begin{array}{cc} N & \\ & \alpha \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} E \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

siendo

$$\begin{aligned} N &\in M_{n-1}(\mathbf{C}) \text{ nilpotente,} \\ E &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{(n-1) \times 1}(\mathbf{C}), \\ \alpha &\in \mathbf{C} \end{aligned}$$

Una representación local en uno de estos puntos es

$$\left( \left( \begin{array}{cc} N & \\ X & \alpha \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} E \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

$$X = (x \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-1}(\mathbf{C}).$$

En efecto, la matriz de controlabilidad es

$$\begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{n-2}E & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x \end{pmatrix}$$

cuyo rango es  $n$  si y sólo si  $x \neq 0$ . En tal caso, la pareja de matrices es controlable, y por tanto, estructuralmente estable.

### (III.3.3) Familias con 2 parámetros

Según (III.2.4), en codimensión máxima (puntos aislados) aparecerán parejas de matrices del tipo  $((n-2), ((1), (1)))$ .

En un entorno de estos puntos el diagrama de bifurcaciones vendrá dado por

$$\left( \begin{pmatrix} N \\ X & \alpha \\ Y & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

siendo

$N \in M_{n-2}(\mathbf{C})$  nilpotente,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{(n-2) \times 1}(\mathbf{C}),$$

$$X = (x \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-2}(\mathbf{C}),$$

$$Y = (y \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-2}(\mathbf{C}).$$

La matriz de controlabilidad es

$$\begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{n-3}E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x & \alpha x \\ 0 & 0 & & 0 & y & \beta y \end{pmatrix}$$

Por tanto

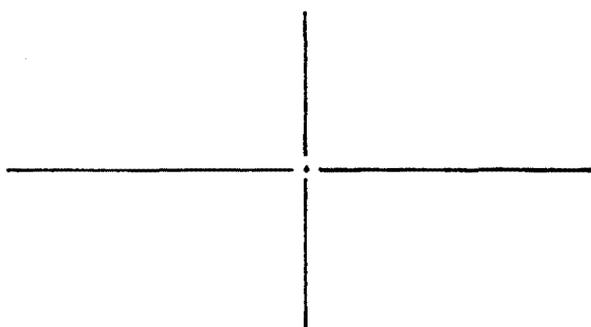
- i) su rango es  $n$  si y sólo si  $xy \neq 0$ , en tal caso la pareja de matrices es completamente controlable.
- ii) su rango es  $n-1$  si y sólo si  $x=0$  o  $y=0$ , en dicho caso la pareja de matrices es del tipo  $((n-1), ((1)))$ .

iii) su rango es  $n - 2$  si y sólo si  $x = y = 0$ , en tal caso pareja de matrices es del tipo  $((n - 2)((1)(1)))$ .

En resumen, se tiene

PROPOSICIÓN.

*El diagrama de bifurcaciones local de una familia genérica 2-parametrizada de parejas de matrices de  $M_{n1}$  es del tipo  $xy = 0$ , con su estratificación de Whitney ordinaria. Estas singularidades son del tipo  $xy = 0$ , con la estratificación de Whitney ordinaria.*



### (III.3.4) Familias con 3 parámetros

Según (III.2.4) en codimensión máxima aparecerán parejas de matrices de los tipos  $((n - 3)((1), (1), (1)))$  y  $((n - 2)((2)))$ .

En un entorno de los puntos aislados del tipo  $((n - 3)((1), (1), (1)))$  el diagrama de bifurcaciones vendrá dado por

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} N & & \\ X & \alpha & \\ Y & & \beta \\ Z & & \gamma \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

siendo

$N \in M_{n-3}(\mathbf{C})$  nilpotente,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{(n-3) \times 1}(\mathbf{C}),$$

$$X = (x \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-3}(\mathbf{C}),$$

$$Y = (y \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-3}(\mathbf{C}),$$

$$Z = (z \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-3}(\mathbf{C}).$$

La matriz de controlabilidad es

$$\begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{n-4}E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x & \alpha x & \alpha^2 x \\ 0 & 0 & & 0 & y & \beta y & \beta^2 y \\ 0 & 0 & & 0 & z & \gamma z & \gamma^2 z \end{pmatrix}$$

por tanto

- i) su rango es  $n$  si y sólo si  $xyz \neq 0$ , en tal caso la pareja de matrices es completamente controlable.
- ii) su rango es  $n - 1$  si y sólo si  $x = 0, yz \neq 0$  o  $y = 0, xz \neq 0$  o  $z = 0, xy \neq 0$  y en tal caso la pareja es del tipo  $((n - 1), ((1)))$ .
- iii) su rango es  $n - 2$  si y sólo si  $x = y = 0, z \neq 0$  o  $x = z = 0, y \neq 0$ , o  $y = z = 0, x \neq 0$ , en tal caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 2), ((1), (1)))$ .
- iv) su rango es  $n - 3$  si y sólo si  $x = y = z = 0$ , y en tal caso es una pareja de matrices del tipo  $((n - 3)((1), (1), (1)))$ .

En un entorno de los puntos aislados del tipo  $((n - 2)((2)))$ , el diagrama de bifurcaciones vendrá dado por

$$\left( \left( \begin{pmatrix} N \\ X & \alpha & 1 \\ Y & z & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

siendo

$N \in M_{n-2}(\mathbf{C})$  nilpotente,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{(n-2) \times 1}(\mathbf{C}),$$

$$X = (x \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-1}(\mathbf{C}),$$

$$Y = (y \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-1}(\mathbf{C}),$$

La matriz de controlabilidad es

$$\begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{n-3}E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x & \alpha x + y \\ 0 & 0 & & 0 & y & zx + \alpha y \end{pmatrix}$$

por tanto

- i) su rango es  $n$  si y sólo si  $x^2z - y^2 \neq 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es completamente controlable.
- ii) su rango es  $n - 1$  si y sólo si  $x^2z - y^2 = 0$   $x \neq 0$  o  $y \neq 0$ , y en dicho caso la pareja es del tipo  $((n - 1), ((1)))$ .
- iii) su rango es  $n - 2$  si y sólo si o bien  $x = y = 0, z \neq 0$  en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 2), ((1), (1)))$ . o bien  $x = y = z = 0$ , en tal caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 2)((2)))$ .

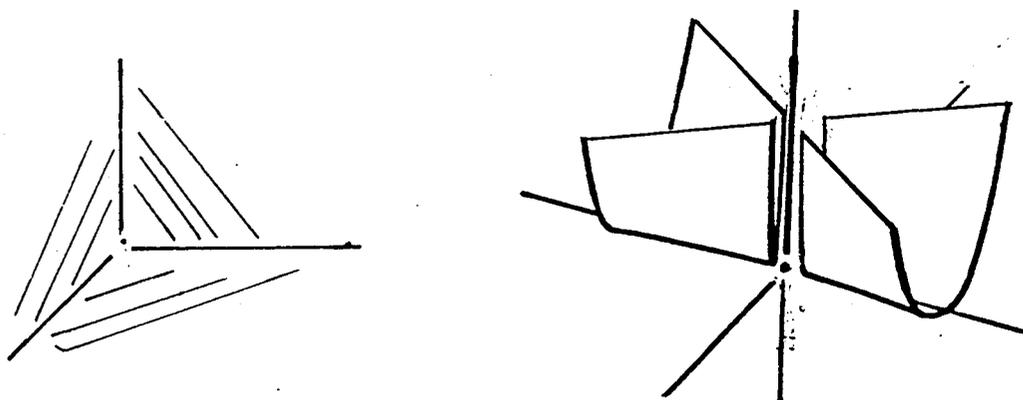
En resumen, se tiene

**PROPOSICIÓN.**

Sea  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{n1}$  una familia genérica 3-parametrizada. Su diagrama de bifurcaciones local en  $t \in M$  puede ser

- i) del tipo  $xyz = 0$  (ejes coordenados de  $\mathbb{C}^3$ )
- ii) del tipo  $x^2z - y^2 = 0$  (paraguas de Whitney)

con sus estratificaciones de Whitney ordinarias, según la pareja  $\varphi(\lambda)$  sea respectivamente del tipo  $((n - 3)((1)(1)(1)))$  o bien del tipo  $((n - 2)(2))$ .



(III.3.5) Familias con 4 parámetros

Según (III.2.4) en codimensión máxima aparecerán parejas de los tipos  $((n - 4), ((1), (1), (1), (1)))$ , y  $((n - 3), ((2), (1)))$ .

En un entorno de los puntos aislados del tipo  $((n-4), ((1), (1), (1), (1)))$ , el diagrama de bifurcaciones vendrá dado por

$$\left( \left( \begin{array}{cccc} N & & & \\ X & \alpha & & \\ Y & & \beta & \\ Z & & & \gamma \\ V & & & & \delta \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

siendo

$N \in M_{n-4}(\mathbf{C})$  nilpotente,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{(n-4) \times 1}(\mathbf{C}),$$

$$X = (x \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-4}(\mathbf{C}),$$

$$Y = (y \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-4}(\mathbf{C}),$$

$$Z = (z \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-4}(\mathbf{C}),$$

$$V = (v \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-4}(\mathbf{C}).$$

La matriz de controlabilidad es

$$\begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{n-5}E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x & \alpha x & \alpha^2 x & \alpha^3 x \\ 0 & 0 & & 0 & y & \beta y & \beta^2 y & \beta^3 y \\ 0 & 0 & & 0 & z & \gamma z & \gamma^2 z & \gamma^3 z \\ 0 & 0 & & 0 & v & \delta v & \delta^2 v & \delta^3 v \end{pmatrix}$$

por tanto

- i) su rango es  $n$  si y sólo si  $xyzv \neq 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es completamente controlable.
- ii) su rango es  $n-1$  si y sólo si  $x=0, yzt \neq 0$  o  $y=0, xzv \neq 0$  o  $z=0, xyv \neq 0$  o  $v=0, xyz \neq 0$ , en dicho caso la pareja de matrices es del tipo  $((n-1), ((1)))$ .
- iii) su rango es  $n-2$  si y sólo si  $x=y=0, zt \neq 0$  o  $x=z=0, yv \neq 0$ , o  $x=v=0, yz \neq 0$  o  $y=z=0, xv \neq 0$ , o  $y=v=0, xz \neq 0$  o  $z=v=0, xy \neq 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n-2), ((1), (1)))$ .

iv) su rango es  $n - 3$  si y sólo si  $x = y = z = 0, v \neq 0$  o  $x = y = v = 0, z \neq 0$  o  $x = z = v = 0, y \neq 0$  o  $y = z = v = 0, x \neq 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 3), ((1), (1), (1)))$ .

v) su rango es  $n - 4$  si y sólo si  $x = y = z = v = 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 4)((1), (1), (1), (1)))$ .

En un entorno de los puntos aislados del tipo  $((n - 3)((2), (1)))$ , el diagrama de bifurcaciones vendrá dado por

$$\left( \left( \begin{array}{c} N \\ X \quad \alpha \quad 1 \\ Y \quad v \quad \alpha \\ Z \quad \beta \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

siendo

$N \in M_{n-3}(\mathbf{C})$  nilpotente,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{(n-3) \times 1}(\mathbf{C}),$$

$$X = (x \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-3}(\mathbf{C}),$$

$$Y = (y \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-3}(\mathbf{C}),$$

$$Z = (z \ 0 \ \dots \ 0) \in M_{1 \times n-3}(\mathbf{C}).$$

La matriz de controlabilidad es

$$\begin{pmatrix} E & NE & \dots & N^{n-3}E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x & \alpha x + y & \alpha^2 x + 2\alpha y + vx \\ 0 & 0 & & 0 & y & vx + \alpha y & 2\alpha vx + vy + \alpha^2 y \\ 0 & 0 & & 0 & z & \beta z & \beta^2 z \end{pmatrix}$$

por tanto

i) su rango es  $n$  si y sólo si  $(x^2v - y^2)((\alpha - \beta)^2 - v)z \neq 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es completamente controlable.

ii) Observamos que en un entorno del origen  $(\alpha - \beta)^2 - v \neq 0$ , por lo que basta considerar  $(x^2v - y^2)z \neq 0$ . El rango es  $n - 1$  si y sólo si  $x^2v - y^2 = 0$ , pero  $x \neq 0$  o  $y \neq 0$  para todo  $v$  y  $z \neq 0$  y en dicho caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 1), ((1)))$ .

- iii) su rango es  $n - 2$  si y sólo si o bien  $x = y = 0, zv \neq 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 2), ((1), (1)))$ , o bien  $x = y = v = 0, z \neq 0$  y en tal caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 2), ((2)))$ ,
- iv) su rango es  $n - 3$  si y sólo si  $x = y = z = 0, v \neq 0$  en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 3), ((1), (1), (1)))$ ,
- v) su rango es  $n - 4$ , si y sólo si  $x = y = z = v = 0$ , en cuyo caso la pareja de matrices es del tipo  $((n - 4)((2), (1)))$ .

En resumen, se tiene

PROPOSICIÓN.

Sea  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}_{n1}$  una familia genérica 4-parametrizada. Su diagrama de bifurcaciones local en  $t \in M$  puede ser

- i) del tipo  $xyzv = 0$  (ejes coordenados de  $\mathbf{C}^4$ )
- ii) del tipo  $(x^2v - y^2)z = 0$

con sus estratificaciones de Whitney ordinarias, según la pareja  $\varphi(t)$  sea respectivamente del tipo  $((n - 3)((1)(1)(1)))$  o bien  $((n - 2)(2))$ .

## Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, *On matrices depending of parameters*, Uspekhi Mat nauk **26** (1971).
- [2] V.I. Arnold, "Chapitres supplémentaires de la theorie des equations différentielles ordinaires," Mir, Moscú, 1984.
- [3] M.A. Beitia, "Ecuación matricial y producto tensorial en la semejanza por bloques. Tesis doctoral," Universidad del Pais Vasco, 1992.
- [4] M.A. Beitia, J.M. Gracia, I. de Hoyos, *A matrix equation related to the block similarity*, L.A.A., (1992).
- [5] R.W. Brockett, *The geometry of the set of controllable linear systems*, Res. Rep. Automat Control Lab. Nagoya Univ. **24** (1977), 1-7.
- [6] P. Brunovsky, *A classification of linear controllable systems* Kibernetika **3(6)** (1970), 173-188.
- [7] C.I. Byrnes, C. Martin "Geometrical Methods for the Theory of Linear Systems" D. Reidel, Boston, (1980).
- [8] A. Dimca, "Singularities and topology of hypersurfaces," Springer, N. York, 1992.
- [9] J.L. Dupont, "Curvature and Characteristic Classes," Springer, L.N.Math. n. 640, 1978.
- [10] J.C. Evard, J.M. Gracia, *On similarities of class  $C^p$  and applications to matrix differential equations*, Linear Algebra and its Applications. **137 (138)** (1990), 363-386.

- [11] J. Ferrer, M<sup>a</sup> I. García, F. Puerta, *Brunovsky local form of a holomorphic family of pairs of matrices* To appear in L.A.A.
- [12] J. Ferrer, M<sup>a</sup> I. García, F. Puerta, "Differentiable families of subspaces" L.A.A. **199** (1994), 229-252.
- [13] J. Ferrer, M<sup>a</sup> I. García, F. Puerta, *Regularity of the Brunovsky-Kronecker stratification*, (preprint).
- [14] J. Ferrer, F. Puerta, *Similarity of non-everywhere defined linear maps*, Linear Algebra Appls, **168** (1992), 27-55.
- [15] J. Ferrer, F. Puerta, *Global block-similarity and pole assignment of class  $C^p$* , aceptado en L.A.A.
- [16] D. Galine, *Sur les matrices réelles dépendant des paramètres*, U.M.N **27** (1) (1972), 241-242.
- [17] F.R. Gantmacher, "The theory of matrices" (I), Chelsea Pub. Co., 1977.
- [18] M<sup>a</sup> I. García Planas, *Versal deformations of pairs of matrices*, L.A.A. **170** (1992), 194-200.
- [19] C.G. Gibson, *Regularity of the Segre stratification*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80** (1976), 91-97.
- [20] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A.A. du Plessis, E.J.N. Looijenga, "Topological Stability of Smooth Mappings," Springer, 1976.
- [21] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, "Invariant Subspaces of matrices with applications," Wiley, 1986.
- [22] I. Gohberg, J. Leiterer, *Über algebren stetiger operatorfunktionen*, Studia Mathematica **57** (1976).
- [23] J.M. Gracia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *Perturbation of linear control systems* L.A.A., **121** (1989), 353-383.
- [24] Ph. Griffiths, J. Harris, "Principles of Algebraic Geometry," Wiley-Interscience, New York, 1978.

- [25] V. Guillemin, A. Pollack, "Differential topology," Prentice-Hall, 1974.
- [26] R.M. Guralnick, *Similarity of matrices over commutative rings*, Linear Algebra and its Applications, **157** (1991), 55-68.
- [27] I. de Hoyos, *Points of continuity of the Kronecker canonical form*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **11** (2) (1990), 278-300.
- [28] J.E. Humphreys, "Linear Algebraic Groups" Springer Verlag, 1981.
- [29] D. Husemoller, "Fibre Bundles," Springer-Verlag, New York, 1975.
- [30] T. Kato "A short introduction to perturbation theory for linear operators," Spriger-Verlag, New York, 1982.
- [31] S.Kobayashi, K.Nomizu, "Foundations of Differential Geometry," Wiley, 1963.
- [32] P. Lancaster, M. Tismentsky, "The theory of matrices with applications," Academic Press, London, 1985.
- [33] S. Lang, "Álgebra," Aguilar, Madrid, 1971.
- [34] Y.C. Lu, "Singularity theory and introduction to catastrophe theory," Springer Verlag, New York, 1976.
- [35] C.C. Mac Duffee, "The theory of matrices," Chelsea, New York, 1946.
- [36] P. Malliavin, "Géométrie différentielle intrinsèque," Hermann, Paris, 1972.
- [37] M. Marcus, "Finite dimensional multilinear algebra," vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.
- [38] J. Mather, *Stratifications and mappings*, Proceedings of the dynamical Systems Conference, Brazil, Academic Press, (1971).
- [39] J.Milnor, "Topology from the Differentiable Viewpoint," Univ. Press of Virginia, 1965.
- [40] B.P. Molinari, *Structural invariants of linear multivariable systems*, Int. J. Control **28** (1978), 493-510.

- [41] G.Philip, A. Thijssse, *Global holomorphic similarity to a Jordan form*, Results in Mathematics, **8** (1985), 78-87.
- [42] W.E. Roth, *The equations  $AX - YB = C$  and  $AX - XB = C$  in matrices*, Proc. Amer Math. Soc. **3** (1952), 392-396.
- [43] A. Tannenbaum, "Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects," LNM n. 845, Springer Verlag, 1981.
- [44] K. Tchon, *On some applications of transversality theory to system theory*, Systems and Control Letters **4** (1984), 149-155.
- [45] K. Tchon, *Bifurcation diagrams for feedback families of linear systems*, Systems and Control Letters, **5** (1985), 397-401.
- [46] K. Tchon, *On structural instability of normal forms of affine control systems subject to static state feedback*, Linear Algebra and its applications, **121** (1989), 95-104.
- [47] W.W. Udilov, *The method of invariant manifolds in control of dinamical systems*, Kyb Vych Tech, **47** (1980), 10-24.
- [48] F.Warner, "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups," Scott, Foresman, 1971.
- [49] J.C. Willems, *Topological Classification and Structural Stability of Linear Systems*, Journal of Differential Equations, **35** (1980), 306-318.
- [50] H. Whitney, *Tangents to an analitic variety*, Linear Ann of Math, **81** (1965), 469-549.
- [51] I. Zaballa, *Matrices with prescribed rows and invariant factors*, Linear Algebra Appl, **87** (1987), 113-146.







