UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matèmatica Aplicada

SOBRE LA REPRESENTACIÓ I GENERACIÓ DE RELACIONS D'INDISTINGIBILITAT

Autor: Jorge Recasens Ferrés
Director: Joan Jacas Moral

Desembre, 1991

O. Introducció

0.1. Igualtats difuses.

Les **relacions d'indistingibilitat** en el context de la teoria de conjunts difusos van ser introduïdes per E. Trillas [Trillas, E. (1982)] per tal de donar una estructura matemàtica capaç d'unificar els conceptes d'**igualtat** de diferents branques del coneixement.

La determinació d'una igualtat és essencial en tota teoria perque equival al problema de **discernir** els objectes dels quals tracta.

La seva necessitat, i la importància de l'elecció entre diferents possibilitats, prové del fet que permet **classificar** en el context de la teoria; i classificar és un dels processos més importants del coneixement, doncs permet relacionar, estructurar, generalitzar, abstraure, trobar lleis generals, etc. No és concebible, de fet, un coneixement científic que no precisi d'una igualtat que permeti classificar els objectes del seu estudi.

Borges ho il.lustra perfectament en el següent paràgraf de *Funes, el memorioso, Ficciones*:

> "Éste, no lo olvidemos, era casi incapaz de ideas generales, platónicas. No sólo le costaba comprender que el símbolo genérico *perro* abarcara tantos individuos dispares de diversos tamaños y diversa forma; le molestaba que el perro de las tres catorce (visto de perfil) tuviera el mismo nombre que el perro de las tres y cuarto (visto de frente)... Sospecho... que no era muy capaz de pensar. Pensar es olvidar diferencias, es generalizar, abstraer."

Com a primera aproximació al concepte d'igualtat, es pot partir del Principi d'identitat dels indiscernibles de Leibnitz [Hirsch, (1982), Sacristán, M. (1976)]:

> "Dos objectes són idèntics en un univers de discurs donat, quan els dos comparteixen el mateix conjunt de propietats considerades en aquest univers".

Noti's el relativisme d'aquest principi: objectes idèntics en un univers poden ser diferents en un altre.

Fixat un univers, però, que en aquest context és un conjunt d'objectes i un conjunt de propietats que aquests poden verificar o no, sense cap altre possible matització, el principi implica que la relació "ser idèntic" és una relació d'equivalència. En particular satisfà la propietat transitiva:

Si A i B d'una banda i B i C d'una altra són objectes idèntics en un univers donat (la qual cosa escriurem com $A = B$ i $B = C$), aleshores A i C també són idèntics ($A = C$).

És a dir ($A = B$ i $B = C$) $\Rightarrow A = C$.

De fet aquesta és la primera **noció comuna** dels Elements d'Euclides:

> "Dues coses iguals a una altre cosa, també són iguals entre sí".

En moltes situacions reals, però, en l'univers de discurs els objectes no necessàriament verifiquen (o no) una propietat de forma categòrica, sinó que en general la satisfan només en un cert grau o nivell. (Pensem en les propietats "ser alt" o "ser ric").

Així les propietats en aquests casos passen a ser conceptes **difusos** i com conseqüència el mateix ocorre amb el Principi d'identitat:

No es pot parlar d'objectes idèntics (o diferents), sinó que cal introduir un **grau de similitud** entre ells.

D'aquesta manera la igualtat es torna un concepte difús.

Per tant, un model d'igualtat útil en diferents camps del coneixement ha de basar-se en la idea d'**indistingibilitat**, doncs en una teoria dos elements es consideren iguals si són indistingibles a un cert nivell. Les relacions d'equivalència clàssiques són massa rígides per modelitzar aquest tipus d'igualtat i d'aquí la necessitat d'introduir les relacions d'equivalència difuses.

L'ús de relacions difuses no és per tant una renúncia al rigor i exactitud, sinó que és un enriquiment voluntari, necessari i natural del concepte d'igualtat, que en permet un estudi més precís i real.

Ja en 1901, H. Poincaré [Poincaré, H. (1943)] es va interessar per aquest tipus de qüestions: Planteja que en el món físic (real) igual vol dir indistingible, doncs quan s'afirma que dos objectes són iguals, l'únic que es pot assegurar és la impossibilitat de distingir-los. Aquesta consideració porta a la paradoxa que dos objectes A, B poden ser iguals (indistingibles), l'objecte B pot ser igual (indistingible) a C, però A i C poden ser diferents (distingibles). És a dir: es pot donar la situació:

$$A = B \quad \text{i} \quad B = C, \quad \text{però} \quad A \neq C.$$

Per tant H. Poincaré afirma la no transitivitat de la relació d'igualtat en el món físic.

La no transitivitat de les relacions d'igualtat no és un fenomen estrany i exclusiu del món físic, sinó que es dona en les més variades àrees del coneixement. (Citem, com exemple, la sinonímia a la Lingüística).

Aquest tipus de consideracions porten a E. Trillas a donar la següent definició:

Definició 0.1.1. (Trillas). Donat un conjunt X, univers de discurs, un generador d'indistingibilitat en X és una aplicació

$$E : X \times X \to L$$

tal que satisfà

0.1.1.1. $E(x, x) \geq \lambda$.

0.1.1.2. $E(x, y) = E(y, x)$.

0.1.1.3. $E(x, y) * E(y, z) \leq E(x, z)$.

qualsevol que siguin x, y, z en X i on $(L, \leq)$ és un conjunt parcialment ordenat, $(L, *)$ un semigrup i $\lambda \in L$ un element distingit de L.

En models probabilístics, possibilístics, en l'estudi de lògiques multivaluades i en altres contextos que es veuran més endavant, L és l'interval unitat amb l'ordenació usual i s'imposa la compatibilitat entre l'ordenació i l'operació $*$. Es fa interessant per tant estudiar el següent tipus d'operadors d'indistingibilitat:

Definició 0.1.2. (Trillas). Donada una t-norma T i un conjunt X, una T-indistingibilitat en X és una aplicació $E : X \times X \to [0, 1]$ que satisfà, per tot x, y, z de X

0.1.2.1. Reflexivitat $E(x, x) = 1$.

0.1.2.2. Simetria $E(x, y) = E(y, x)$.

0.1.2.3. T-transitivitat $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$.

Reflexivitat i simetria semblen propietats naturals a imposar a una estructura que modelitzi el concepte d'equivalència difusa.

La transitivitat és la propietat més delicada i mereix un comentari: Si s'interpreta $E(x, y)$ com el grau de similitud o grau de relació entre els objectes x, y, es vol un llindar mínim per $E(x, z)$ coneguts $E(x, y)$ i $E(y, z)$ doncs no és raonable suposar, per exemple, que donats tres objectes el primer i el segon d'una banda i el segon i el tercer d'una altra siguin molt similars i, en canvi, el primer i el tercer siguin molt diferents. Aquest llindar ve donat per la condició 0.1.2.3.

En un altre context, i recordant que les t-normes s'usen per modelitzar la conjunció en lògica multivaluada, es pot donar una segona interpretació a 0.1.2.3.: Si interpretem $E(x, y)$ com el valor de veritat de la proposició $p(x, y)$: "x i y són similars" és a dir $E(x, y) = v(p(x, y))$, aleshores 0.1.2.3. afirma que:

$$v((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)) = 1.$$

Perquè les relacions d'indistingibilitat siguin útils per a modelitzar diferents igualtats, convé flexibilitat a l'hora de determinar el llindar mínim en la transitivitat. Això s'aconsegueix amb l'elecció de la t-norma T (o més en general, de l'operació $*$ en 0.1.1.3).

Aquesta elecció és doncs el que caracteritza els diferents tipus d'igualtat i fa que les relacions d'indistingibilitat es puguin utilitzar en diferents contextos.

En aquest sentit cal recordar que si es tria la t-norma producte s'obtenen les **relacions probabilístiques** estudiades per K. Menger [Menger, K. (1951)].

K. Menger va introduir aquestes relacions en el context dels espais mètrics probabilístics i $E(x, y)$ s'interpreta aquí com la probabilitat de considerar x i y indistingibles.

Si es tria la t-norma de Lukasiewicz s'obtenen les **semblances (likeness)** d'E. Ruspini [Ruspini, E. (1977)] usades ampliament en problemes de raonament aproximat i tractament de la incertesa. La seva aplicació es basa en que estan relacionades amb mètriques clàssiques com veurem més endavant.

Si es tria la t-norma Mínim s'obtenen les **similituds** de L. Zadeh [Zadeh, L.A. (1971)]. Les similituds són usades en Taxonomia perque estan íntimament relacionades amb arbres jeràrquics: Donada una similitud E, la relació clàssica "x està relacionat amb y sí, i només si $E(x, y) \geq \alpha$" dóna una partició, coneguda com l'α-**tall** de E, i per tant els α-talls de les similituds són relacions d'equivalències clàssiques.

D'altra banda, és fàcil provar que una relació clàssica és una relació d'equivalència si, i només si, és una T-indistingibilitat per qualsevol t-norma T. Les relacions d'indistingibilitat, per tant, generalitzen i engloben les relacions d'equivalència clàssiques.

A tota relació d'equivalència clàssica R se li pot associar la distància discreta $d = 1 - R$ de manera que s'estableix una dualitat entre ambdós conceptes. Aquesta **dualitat** es manté entre les relacions d'indistingibilitat i un tipus de **mètriques generalitzades** [Trillas, E., Alsina, C. (1978)] anomenades **S-mètriques**. Els resultats obtinguts en l'estudi de les relacions d'indistingibilitats i de les S-mètriques es poden dualitzar de manera que quedin enriquits semànticament. En particular, es pot aplicar la intuició geomètrica que proporcionen les S-mètriques a l'estudi de les relacions d'indistingibilitats.

Les relacions d'equivalència clàssiques donen lloc a **particions** i d'aquí prové la seva utilitat per a classificar. Recíprocament, tota partició té una relació d'equivalència associada. Perquè una relació d'igualtat difusa sigui útil per a **classificar**, cal que se li pugui associar una **partició difusa**. D'altra banda sorgeix el problema recíproc: com ha de ser una partició difusa perquè tingui associada una relació d'indistingibilitat de forma natural.

En aquest sentit destaquem els treballs de J. Jacas i L. Valverde (per exemple

[Jacas, J., Valverde, L. (1990)] on es caracteritzen aquest tipus de particions, es defineix què vol dir classificar respecte d'una S-mètrica i es completa així el següent triangle

$$\begin{tikzcd} & \text{T-indistingibilitats} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \text{S-mètriques} \arrow[rr, dash] & & \text{m-particions} \end{tikzcd}$$

0.2. Generació i representació de relacions d'indistingibilitat. Estat previ a aquesta memòria.

Hi ha bàsicament dos mètodes de generar relacions d'indistingibilitat: via Max-T i via el Teorema de Representació:

a) Per a la **generació via Max-T** es parteix d'una relació reflexiva i simètrica i es calcula la seva clausura T-transitiva (veure capítol 1). El fet de partir d'una relació reflexiva i simètrica fa que aquest mètode sigui útil en **processos d'aprenentatge** i, en general, en estructures on les dades es representen mitjançant una **matriu de dissimilitud**.
Un aspecte positiu del mètode és la continuïtat: petites distorsions en les dades distorsionen poc la T-indistingibilitat obtinguda.
Tanmateix, la implementació d'aquest mètode, d'una banda requereix un gran nombre de càlculs i memòria i d'una altra provoca el problema, no desitjat en general, del "**chaining**" (veure capítol 2).

b) En [Valverde, L. (1985)] es demostra un **Teorema de Representació** de T-indistingibilitats que dóna un mètode per a generar-les. A grans trets, el

Teorema estableix que tota família de subconjunts difusos d'un conjunt X genera de forma natural una T-indistingibilitat en X i, recíprocament, que tota T-indistingibilitat es pot generar d'aquesta manera.

La primera part del Teorema dóna un mètode per a generar T-indistingibilitats que necessita menys càlculs i memòria que l'anterior i que és especialment útil en el **reconeixement de formes**: si interpretem una família de conjunts difusos com els **graus d'adequació** dels elements a determinats **prototipus**, ens permet generar una T-indistingibilitat a partir d'aquests graus d'adequació.

D'altra banda el Teorema també permet generar T-indistingiblitats a partir de relacions reflexives i simètriques: Si R és una tal relació, en un conjunt X, podem considerar la T-indisintibilitat R^V generada per les columnes de R, és a dir per la família $(R(x,\cdot))_{x\in X}$. R^V es pot considerar com la clausura de R en el context del Teorema de Representació.

El fet que tota T-indistingibilitat es pugui generar mitjançant una família de conjunts difusos fa el Teorema especialment útil per a l'emmagatzegament d'aquestes relacions: Si una relació pot ser generada per un nombre petit de conjunts difusos, serà més econòmic emmagatzemar aquests conjunts que no pas la seva matriu.

Donat que diferents famílies poden generar la mateixa T-indistingibilitat E, és convenient introduir la definició de dimensió de E [Jacas, J. (1987)] com el mínim dels cardinals dels índexs de les famílies que generen E. Una família indexada amb un conjunt de cardinal la dimensió de E es diu un **sistema minimal de generadors** o una **base** de E.

Sorgeix el problema de determinar la dimensió i una base d'una T-indistingibilitat donada.

En aquest sentit en [Jacas, J. (1988)] es caracteritzen les T-indistingibilitats unidimensionals quan T és una t-norma arquimediana o el Mínim i es troben algorismes fàcilment implementables per a la determinació d'una base en aquest últim cas.

També es fa un estudi del conjunt de generadors d'una T-indistingibilitat algebraicament i topològicament [Jacas, J. (1987)].

0.3. Aportacions de la memòria.

Aquesta memòria es proposa aprofondir en l'estudi de l'estructura de les relacions d'indistingibilitat.

Està dividida en cinc capítols, el primer dels quals conté les definicions i propietats bàsiques de les T-indistingibilitats, les S-mètriques i la seva dualitat via ternes de De Morgan.

Al capítol 2 s'estudien les relacions d'indistingibilitat a través del producte Max-T.

Es prova en primer lloc que **el conjunt de relacions difuses** d'un conjunt donat, amb aquest producte, **té estructura de semigrup topològic ordenat** i es treuen conseqüències d'aquest resultat.

L'obtenció de T-indistingibilitats com a clausures T-transitives de relacions reflexives i simètriques produeix el conegut chaining: element molt "allunyats" entre sí en un principi, poden acabar en una mateixa classe d'equivalència. Aquí s'aprofitarà aquest efecte per a definir el **grau de pertinença** d'un element a una classe i el **grau de consistència** d'una classe calculant la "distància mitja" dels seus elements.

Les diferents justificacions teòriques que es donen generalment del producte Max-Min i de les clausures Min-transitives es basen en la Teoria de grafs o en clausures de relacions clàssiques. Aquestes justificacions són difícilment generalitzables a altres t-normes.

Donada una relació difusa reflexiva i simètrica R en un conjunt X, el valor $R(x, y)$ es pot interpretar com el grau de proximitat entre x i y i aquest és un concepte topològic. Explotant aquest fet es defineixen uns conjunts d'entorns que donen a X l'estructura d'espai V_D.

En aquest context, els productes Max-T s'identifiquen amb operadors de clausura d'aquest espai.

Aquesta aproximació topològica als productes Max-T en dóna una justificació teòrica i en permet una millor comprensió.

Els resultats del capítol es dualitzen per a permetre l'estudi de les relacions de dissimilitud i les S-mètriques via el producte Min-S.

El capítol 3 estudia les T-indistingibilitats i les S-mètriques a través del Teorema de Representació de L. Valverde.

Identificant els conjunts difusos d'un conjunt X de cardinal n amb punts de $[0, 1]^n$, es dóna una **interpretació geomètrica al conjunt de generadors** d'una T-indistingibilitat E, que permetrà **determinar una base i la dimensió** de E si T és una t-norma arquimediana.

La interpretació geomètrica és especialment senzilla en els casos en què la t-norma és la t-norma de Lukasiewicz o el producte. En el primer cas el conjunt de generadors és la part d'un prisma continguda en $[0, 1]^n$ i en el segon la part d'una piràmide de vèrtex l'origen de coordenades continguda en $[0, 1]^n$. En ambdos casos es pot trobar una base formada amb punts de les arestes, i el seu càlcul es redueix bàsicament a la resolució d'un sistema d'inequacions lineals especialment senzill.

Aquests resultats, junt amb els de [Jacas, J. (1990)] per similituds, clouen pràcticament el problema de determinar una base i la dimensió d'una T-indistingibilitat (i, dualment, d'una S-mètrica).

D'altra banda es demostra un **Teorema de Representació** (anàleg al de L. Valverde) **per mètriques clàssiques** (tota mètrica clàssica es pot generar per una família de funcions reals i, recíprocament, tota família de funcions reals genera una mètrica). Té per tant sentit parlar també de bases i dimensions de mètriques clàssiques i es demostra que la mètrica derivada de la norma 1 a $\mathbb{R}^2$ és bidimensional, la mètrica derivada de la norma ∞ a $\mathbb{R}^n$ és n-dimensional i la mètrica euclídea a $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) té dimensió infinita.

Es dóna la següent **interpretació geomètrica de la dimensió** d'una S-mètrica (dualitzable a T-indistingibilitats i generalitzable a mètriques clàssiques):

Si m és una S-mètrica en un conjunt X, la dimensió de m és el mínim $n \in \mathbb{N}$ tal que X és isometric [Trillas, E., Alsina, C. (1978)] a un subconjunt de $[0,1]^n$.

Aquesta interpretació geomètrica justifica el nom de dimensió.

Per raons d'economia en l'emmagatzement, convé que la dimensió d'una T-indistingibilitat sigui baixa. Es demostra que si E és una T-indistingibilitat (T-arquimediana) definida en un conjunt X de cardinal n, aleshores la dimensió de E és menor o igual que la part entera de $\frac{n+1}{2}$ i aquesta fita és assolible per cada $n \in \mathbb{N}$.

Aquest resultat també val, per dualitat, per S-mètriques i per mètriques clàssiques.

Cal fer esment que [Wolfe, (1967)] va demostrar (en un altre context i amb mètodes diferents) que la dimensió d'una mètrica clàssica està afitada per $n-2$.

El resultat d'aquesta memòria millora aquesta fita considerablement.

Tanmateix, $\frac{n+1}{2}$ es un nombre molt gran. En moltes situacions, com per exemple en el cas en què la T-indistingibilitat s'hagi obtingut per clausura Max-T d'una relació reflexiva i simètrica, es pot veure que en general la dimensió és considerablement menor.

Escrivint explícitament les condicions que ha de complir la clausura T-transitiva E d'una relació reflexiva i simètrica s'explicita el conjunt de generadors de E i a partir d'aquí s'obté un **nou mètode per calcular la clausura T-transitiva**, que alhora en determina una base. Ultra les seves aplicacions pràctiques, aquest mètode té l'interès teòric d'apropar les dues formes bàsiques de generar T-indistingibilitats.

Per últim, es demostra que una T-indistingibilitat E en un conjunt X (T-arquimediana) determina una **relació de betweenness** en X en el sentit de K. Menger. El cardinal d'aquesta relació està íntimament lligat a la dimensió de E.

En [Jacas, J. (1988)] es demostra que E és unidimensional si, i només si, la relació de betweenness és total; és a dir, si el cardinal de la relació és $2\binom{n}{3}$.

La determinació d'una fita inferior al cardinal de les relacions de betweenness determinades per T-indistingibilitats resulta ser equivalent a la resolució d'un **problema combinatori obert de P. Turán** [Turán, P. (1954), Erdös, P. (1981)]. Aquesta equivalència es prova a través de formulacions geomètriques del problema.

D'aquesta manera s'obre una nova via geomètrica per a resoldre un problema que prové de la teoria d'hipergrafs i que ha estat profusament atacat, sense èxit, des de la seva formulació.

Al capítol 4 es defineixen els **Morfismes de mètodes de classificació** com a eines per poder **comparar-los i relacionar-los**.

Si en un conjunt X tenim dues classificacions, sembla interessant tenir algun mètode per a comparar-les. D'altra banda si els conjunts X, Y estan relacionats entre sí, sembla natural també suposar que classificacions en X i en Y també ho estiguin.

Aquests raonaments han portat a la necessitat d'introduir els morfismes d'aquest capítol.

D'altra banda, els productes Max-T generen mètodes de classificació que es veurà que estàn relacionats per morfismes quan $T \leq T'$.

Les particions d'un conjunt X associades a T-indistingibilitats ($m_{s,\varphi}$-particions) donen en general tantes classes (clusters) com elements de X. Si bé aquest fenomen és justificable des del punt de vista teòric, és lluny de la idea intuïtiva de partició.

En el capítol 5 es tracta de la qüestió de reduir coherentment el nombre de clusters mitjançant la introducció de relacions d'indistingibilitat no necessàriament reflexives.

En aquestes relacions, el valor $E(x, x)$ es pot interpretar com el **grau de coherència** de x.

D'altra banda, si considerem un α-tall de E amb $\alpha > E(x, x)$, resultarà que x no quedarà recobert. Per tant $E(x, x)$ es pot interpretar també com el **grau d'existència** de x.

Per tal de poder generar aquest tipus de relacions es demostra un **Teorema de Representació** de T-indistingibilitats no necessàriament reflexives anàleg al de L. Valverde.

Al dualitzar una T-indistingibilitat no necessàriament reflexiva, s'obté una