UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matèmatica Aplicada

SOBRE LA REPRESENTACIÓ I GENERACIÓ DE RELACIONS D'INDISTINGIBILITAT

Autor: Jorge Recasens Ferrés
Director: Joan Jacas Moral

Desembre, 1991

2. T-indistingibilitats via Max-T. S-mètriques via Min-S.

2.1. Introducció.

El **producte Max-T**, T una t-norma, és un dels mètodes mès usuals de generar T-indistingibilitats i aquí serà analitzat des d'aquest punt de vista.

En la secció 2.2. és donen les principals propietats del producte Max-T. En particular el conjunt R_X de relacions difuses en un conjunt X amb l'operació Max-T és un semigrup topològic i ordenat.

Calcular la clausura Max-Min d'una relació reflexiva i simètrica es equivalent a fer el **single linkage** dels seus **α-talls**. L'efecte de cadena -chaining- que produeix aquest mètode és considerat en general com no desitjable. En la secció 2.3. en canvi, s'aprofitarà aquest efecte per a definir el **grau de pertinença** d'un objecte a una classe i el **grau de consistència** d'aquesta.

El producte Max-Min té justificacions teòriques (via teoria de conjunts o teoria de grafs, per exemple) que difícilment es poden generalitzar per a justificar el producte Max-T amb T arbitrària. A la secció 2.4. es donarà una aproximació topològica natural al producte Max-Min que es generalitzarà al producte Max-T.

Els productes Max-T queden identificats en aquest context amb operadors de clausura en espais de tipus V_D [Schweizer, B., Sklar, A. (1983)].

D'aquesta manera es té una aproximació topològica que dóna substracte teòric al producte Max-T.

El producte Min-S és dual al producte Max-T com es fa palès a la secció 2.5. on es dualitzen els principals resultats de les seccions anteriors.

Els productes Max-T i Min-S donen lloc a mètodes de classificació subdominants que seran estudiats i relacionats al capítol 4, després d'introduir els morfismes de mètodes de classificació.

2.2. Producte Max-T. Propietats.

En aquesta secció es dóna la definició i principals propietats del producte Max-T. Si R_X és el conjunt de relacions difuses en un conjunt X, aleshores R_X té estructura de semigrup ordenat i topològic amb l'operació Max-T. El subconjunt de relacions reflexives i simètriques B_X és un subsemigrup de R_X. L'associativitat permet definir el producte n-èssim d'una relació R, que convergeix o s'estabilitza, en el cas en què R és de B_X, en la seva clausura transitiva R^T. La continuitat del producte Max-T assegura que petites variacions en les dades d'una relació donen lloc a petits canvis en els seus productes i en especial en la seva clausura transitiva, si és de B_X.

Definició 2.2.1. Donada una t-norma T, el producte Max-T, $M \circ_T N$ de dues relacions difuses M, N en un conjunt X és la relació en X definida per

$$(M \circ_T N)(x,y) = \sup_{z \in X}(T(M(x,z), N(z,y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Sigui R_X el conjunt de relacions difuses en X.

A R_X definim la distància d del suprem:

Definició 2.2.2. $\forall M, N \in R_X$

$$d(M,N) = \sup_{x,y \in X} |M(x,y) - N(x,y)|.$$

Lemma 2.2.3. d és una distància en R_X i per tant (R_X, d) és un espai mètric.

Demostració. El suprem de distancies és una distància (Lema 3.6.2). ■

Teorema 2.2.4. Sigui T una t-norma i R_X el conjunt de relacions difuses en el conjunt X. R_X amb el producte Max-T té estructura de semigrup topològic i ordenat.

Demostració. És conseqüència de l'estructura $([0,1],T)$:

a) associativitat:

$$\begin{aligned}
(M\circ(N\circ P))(x,y) &= \sup_{z\in X}(T(M(x,z),(N\circ P)(z,y))) = \\
&= \sup_{z\in X}\left(T(M(x,z),\sup_{t\in X}(T(N(z,t),P(t,y))))\right) = \\
&= \sup_{z\in X}\left(\sup_{t\in X}(T(M(x,z),T(N(z,t),P(t,y))))\right) = \\
&= \sup_{z\in X}\left(\sup_{t\in X}(T(T(M(x,z),N(z,t)),P(t,y)))\right) = \\
&= \sup_{t\in X}\left(\sup_{z\in X}(T(T(M(x,z),N(z,t)),P(t,y)))\right) = \\
&= \sup_{t\in X}\left(T(\sup_{z\in X}(T(M(x,z),N(z,t))),P(t,y))\right) = \\
&= \sup_{t\in X}\left(T((M\circ N)(x,t),P(t,y))\right) = ((M\circ N)\circ P)(x,y).
\end{aligned}$$

b) element neutre: La relació identitat $I(x,y)=\delta_{xy}$.

c) continuitat: Com que T està definida en un compacte, aleshores T és uniformement contínua. Per tant es té

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que } \forall m,n,a,b\in[0,1]$$

$$\mathrm{Max}(|m-a|,|n-b|)<\delta \Rightarrow |T(m,n)-T(a,b)|<\epsilon. \qquad (*)$$

Volem demostrar que donades dues relacions A,B de R_X es compleix

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que } \forall M,N\in R_X$$

$$\mathrm{Max}(d(M-A),d(N-B))<\delta \Rightarrow d(M\circ N,A\circ B)<\epsilon.$$

Donada una $\epsilon > 0$ agafem una $\delta > 0$ que satisfaci (*):

$$d(M \circ N, A \circ B) = \sup_{x,y \in X} \left| \sup_{z \in X}(T(M(x,z), N(z,y))) - \sup_{z \in X}(T(A(x,z), B(z,y))) \right|$$
$$\leq \sup_{x,y \in X} \sup_{z \in X} |T(M(x,z), N(z,y)) - T(A(x,z), B(z,y))| \leq \epsilon.$$

d) <u>monotonia</u>: $M \leq M'$, $N \in N' \Rightarrow M \circ N \leq M' \circ N'$. És conseqüència immediata de la monotonia de T. ■

<u>Corol.lari 2.2.5.</u> El conjunt B_X de relacions reflexives i simètriques en X és un subsemigrup topològic ordenat de R_X.

<u>Demostració.</u> Trivial. ■

<u>Proposició 2.2.6.</u> Un isomorfisme f de t-normes $f : ([0,1], T) \rightarrow ([0,1], T')$, indueix un isomorfisme $f : (R_X, \text{Max} - T) \rightarrow (R_X, \text{Max} - T')$.

<u>Demostració.</u> Donada $A \in R_X$ definim $f(A)$:

$$(f(A))(x,y) = f(A(x,y)) \quad \forall x, y \in X$$

$$\begin{aligned}
(f(A \circ_T B))(x,y) &= f(A \circ_T B)(x,y) = \\
&= f(\sup_{z \in X}(T(A(x,z), B(z,y)))) = \\
&= \sup_{z \in X}(f(T(A(x,z), B(z,y))) = \\
&= \sup_{z \in X}(T'(f(A(x,z)), f(B(z,y)))) = \\
&= \sup_{z \in X}(T'((f(A))(x,z), (f(B)), (z,y))) = \\
&= ((f(A)) \circ_{T'} (f(B)))(x,y). \blacksquare
\end{aligned}$$

Donada l'associativitat del producte Max-T es pot, definir per cada $n \in \mathbb{N}$ la potència n-èssima d'una relació M:

$$M_T^n = \underbrace{M \circ M \circ \ldots \circ M}_{n \text{ vegades}}.$$

Proposició 2.2.7. Donat $n \in \mathbb{N}$ l'aplicació

$$R_X \to R_X$$

$$M \to M_T^n$$

és contínua i creixent.

Demostració. És conseqüència de 2.2.4. ∎

Definició 2.2.8. Sigui M una relació reflexiva i simètrica en X i T una t-norma. La **clausura T-transitiva** (ó **T-clausura**) M^T de M és

$$M^T = \sup_{n \in \mathbb{N}} M_T^n.$$

Si X és finit, de cardinal s, aleshores es pot demostrar que

$$M^T = \sup_{n \in \{1,2,\ldots,s\}} M_T^n.$$

D'altra banda M^T és una T-indistingibilitat i si E és una T-indistingibilitat tal que $M \leq E \leq M^T$, aleshores $E = M^T$.

Proposició 2.2.9. La T-clausura és una aplicació contínua i creixent.

Demostració. És composició d'aplicacions contínues i creixents. ∎

Les següents proposicions i corol.laris són trivials, però importants. Al capítol 4 tindran una interpretació en el context del Cluster Analysis:

Proposició 2.2.10. Si T, T' són dues t-normes tals que $T \leq T'$ i M, N relacions en X, aleshores

$$M \circ_T N \leq M \circ_{T'} N$$

Corol.lari 2.2.11. Si $T \leq T'$, aleshores $M^T \leq M^{T'}$

Si $M \leq N$, aleshores $M^T \leq N^T$.

Tenint en compte que $T \leq \text{Min}$, per qualsevol t-norma T.

Corol.lari 2.2.12. $M^T \leq M^{\text{Min}}$.

2.3. Clausura Max-T.

Definició 2.3.1. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en un conjunt X i $\alpha \in [0,1]$. La relació clàssica R_α en X definida per

$$xR_\alpha y \quad \text{si, i només si} \quad M(x,y) \geq \alpha$$

és una relació reflexiva i simètrica i per tant dona lloc a un recobriment de X que s'anomena l'α-**tall** de M.

Cóm és habitual identificarem una relació amb el recobriment que indueix. En aquest cas R_α amb l'α-tall.

Lemma 2.3.2.

(i) $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha$-tall de M més fi que β-tall de M.

(ii) 0-tall de $M = \{X\}$.

(iii) $M \geq N \Rightarrow \alpha$-tall de N més fí que α-tall de M.

Demostració. Trivial. ■

En general, si R és una relació clàssica reflexiva i simètrica en un conjunt X, la clausura transitiva $\overline{R}$ de R es defineix com la menor relació d'equivalència en X que conté R.

Si X es finit, $\overline{R}$ es pot calcular pel mètode de single linkage:

Definició 2.3.3. Sigui R una relació reflexiva i simètrica clàssica en X. Dos elements a, b de X direm que estan relacionats per single linkage (respecte R) i escriurem $x\overline{R}b$ si, i només si, existeix una cadena $x_0, x_1, \ldots, x_r$ d'elements d'X tal que $x_0 = a$, $x_r = b$ i $x_{i-1}Rx_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r$.

És clar que $\overline{R}$ és la clausura transitiva de R.

Són ben coneguts els següents dos importants Teoremes:

Teorema 2.3.4. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en X. M és una similitud (i.e. $M = M^{\mathrm{Min}}$) si, i només si, $\forall\alpha \in [0, 1]$ l'α-tall de M és una partició (i.e. R_α és una relació d'equivalència).

Teorema 2.3.5. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en X, $\alpha \in [0, 1]$. La clausura transitiva de l'α-tall de M coincideix amb l'α-tall de la clausura via Max-Min (M^{Min}) de M.

Demostració. [Defays, D. (1975)]. ■

Per tant, calcular la clausura Max-Min d'una relació difusa reflexiva i simètrica M equival a efectuar single linkage de tots els α-talls $\alpha \in [0, 1]$ de M.

El procés de single linkage produeix l'anomenat efecte cadena que moltes vegades es considera no desitjable ja que elements en principi "molt allunyats" entre sí, mitjançant una cadena "cauen" en la mateixa classe d'equivalència. Aquest efecte s'aprofitarà aquí per a definir la distància a nivell α entre dos elements d'X i la longitud $l(M)$ d'una relació M.

Donada una relació reflexiva i simètrica M en X, la seva longitud permetrà caracteritzar el menor $r \in \mathbb{N}$ tal que $M^r_{\text{Min}} = M^{\text{Min}}$.

Fins al final de la secció, X serà un conjunt **finit** de cardinal n.

<u>Definició 2.3.6.</u> Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica de X. Donat $\alpha \in [0,1]$ i a, b de X definim

$$\gamma_\alpha(a,b) = \begin{cases} \text{mínim}\{r \in \mathbb{N} \mid \exists x_0, x_1, \ldots, x_r \in X \text{ amb } x_0 = a, & \\ \qquad x_r = b \text{ i } M(x_{i-1}, x_i) \geq \alpha \ i = 1, 2, \ldots, r\}, & \text{si } a\overline{R}_\alpha b \\ n+1, & \text{altrament} \end{cases}$$

γ_α ens medeix el grau de relació o concatenació de dos elements a nivell α.

<u>Proposició 2.3.7.</u> Donat $\alpha \in [0,1]$, l'aplicació

$$d_\alpha : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$(a,b) \to d_\alpha(a,b) = \gamma_\alpha(a,b) - 1$$

és una distància no necessàriament separadora.

<u>Definició 2.3.8.</u> Donat $\alpha \in [0,1]$

$$\deg_\alpha(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_\alpha(a,b)}, & \text{si } \gamma_\alpha(a,b) < n+1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

es dirà el **grau de relació** d'a i b de X a nivell α.

<u>Propietats 2.3.9.</u>

(i) $0 \leq \deg_\alpha(a,b) \leq 1$

(ii) $\deg_\alpha(a,a) = 1$

(iii) $\deg_\alpha(a,b) = \deg_\alpha(b,a)$

(iv) $\deg_\alpha(a,b) = 1$ si, i només si, $M(a,b) \geq \alpha$

(v) $\alpha \geq \beta \Rightarrow \deg_\alpha \leq \deg_\beta$

Demostració. Trivial. ∎

En particular, donats α i M, $\deg_\alpha$ és una relació difusa reflexiva i simètrica en X.

Donats una relació difusa reflexiva i simètrica M en X, $\alpha \in [0,1]$ i un element $a \in X$, sigui $\overline{a}$ la classe d'equivalència de $\overline{R_\alpha}$ a la qual pertany a. Anem a definir el grau de pertinença d'un element a la seva classe i el grau de consistència d'aquesta:

Definició 2.3.10. $p_\alpha(a) = \dfrac{\sum_{b\in\overline{a}} \deg_\alpha(a,b)}{\#\overline{a}}$ on $\#\overline{a}$ és el cardinal de $\overline{a}$ i es dirà el **grau de pertinença** de a a la seva classe.

És clar que si $0 < p_\alpha(a) \leq 1$ i per tant p_α és un conjunt difús de X.

Definició 2.3.11. $c_\alpha(\overline{a}) = \dfrac{\sum_{b\in\overline{a}} p_\alpha(b)}{\#\overline{a}}$ es dirà el **grau de consistència** de la classe $\overline{a}$.

El Teorema 2.3.4. es pot reescriure de la següent manera:

Teorema 2.3.12. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en X. Les següents afirmacions són equivalents:

(i) M és una similitud (i.e. $M = M^{\mathrm{Min}}$).

(ii) $\forall \alpha \in [0,1]\, p_\alpha \equiv 1$.

(iii) $\forall \alpha \in [0,1]\, c_\alpha \equiv 1$.

Les definicions i propietats exposades fins ara en aquesta secció es generalitzen a t-normes arbitràries:

L'associativitat d'una t-norma T permet definir $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

Definició 2.3.13. Donada una t-norma T, es defineix $T(a) = a \quad \forall a \in [0,1]$ i per $n \geq 2$ recurrentment

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = T(a_1, T(a_2, \ldots, a_n)) \, \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1].$$

Definició 2.3.14. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en X. Donat $\alpha \in [0,1] \, a, b \in X$ i una t-norma T definim

$$\gamma_\alpha^T(a,b) \begin{cases} \text{mínim}\{r \in \mathbb{N} \mid \exists x_0, x_1, \ldots, x_r \in X \text{ amb } x_0 = a, x_r = b \text{ i} \\ \qquad T(M(x_0,x_1), M(x_1,x_2), \ldots, M(x_{r-1},x_r)) \geq \alpha\}, & \text{si existeix una tal cadena.} \\ n+1, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Proposició 2.3.15.

(i) $d_\alpha^T = \gamma_\alpha^T - 1$ és una distància no necessàriament separadora en X.

(ii) $\alpha \geq \beta \Rightarrow d_\alpha^T \geq d_\beta^T$

(iii) $T \geq T' \Rightarrow d_\alpha^T \leq d_\alpha^{T'}$

Demostració. Trivial. ■

Teorema 2.3.16. M és una T-indistingibilitat si, i només si, $\gamma_\alpha^T(a,b) = 1$ o $n+1$ $\forall a, b \in X$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

Demostració. $\Rightarrow$) Si $\exists a, b \in X$ amb $\gamma_\alpha^T(a,b) \neq 1$, $n+1$, aleshores $\exists c \in X$ amb $\gamma_{\alpha,M}^T(a,c) = 2$. Si calculem M_T^2, aleshores $\gamma_{\alpha,M^2}^T(a,c) = 1$. Però $M_T^2 = M$. Contradicció.

$\Leftarrow$) Si M no és una T-indistingibilitat, aleshores $M_T^2 \neq M$ i per tant $\exists a, b \in X$ amb $M(a,b) < M_T^2(a,b) = \alpha$.

Per tant $\gamma^T_{\alpha,M}(a,b) = 2 \neq 1,\, n+1$. ■

D'altra banda γ_α ens permetrà trobar una cota al menor enter r tal que $M^r_{\mathrm{Min}} = M^{r+1}_{\mathrm{Min}}$, per M reflexiu i simètrica, és a dir a la "distància" de M a la seva clausura Min-transitiva.

Definició 2.3.17. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en X. $l(M) = \operatorname*{Max}_{\substack{0a,b\in X\\ 0\alpha\in[0,1]}} \{\gamma_\alpha(a,b) \neq n+1\}$ es dirà la **longitud** de M.

Lema 2.3.18. Donat $\alpha \in [0,1]$, si $M^p_{\mathrm{Min}}(a,b) \geq \alpha$ i $M^q_{\mathrm{Min}}(b,c) \geq \alpha$, aleshores $M^{p+q}_{\mathrm{Min}}(a,c) \geq \alpha$.

Demostració. $M^{p+q}_{\mathrm{Min}}(a,c) = \sup_{x\in X}(\mathrm{Min}(M^p(a,x), M^q(x,c)) \geq$
$\geq \mathrm{Min}(M^p(a,b), M^q(b,c)) \geq \alpha$. ■

Teorema 2.3.19. Donada una relació difusa reflexiva i simètrica M en X, sigui p el menor natural tal que $2^p \geq l(M)$. Si r és el menor natural tal que $M^r_{\mathrm{Min}} = M^{r+1}_{\mathrm{Min}}$, aleshores $r \leq p+1$.

Demostració. Si $a, b \in X$ estan relacionades per single linkage a nivell $\alpha \in [0,1]$ i $\gamma_\alpha(a,b) = k$, es té una cadena $x_0, x_1, \ldots, x_k$ d'elements de X amb $x_0 = a, x_k = b$ i

$$M(a,x_1) \geq \alpha,\ M(x_1,x_2) \geq \alpha, \ldots, M(x_{k-1},b) \geq \alpha.$$

Pel lema 2.3.18

$$M^2_{\mathrm{Min}}(a,x_2) \geq \alpha, M^2_{\mathrm{Min}}(x_2,x_4) \geq \alpha, \ldots, M^2_{\mathrm{Min}}(x_{k-2},b) \geq \alpha, \qquad \text{si } k \text{ és par ó}$$

$$M^2_{\mathrm{Min}}(a,x_2) \geq \alpha, M^2_{\mathrm{Min}}(x_2,x_4) \geq \alpha, \ldots, M^2_{\mathrm{Min}}(x_{k-3},x_{k-1}) \geq \alpha,$$
$$M^2_{\mathrm{Min}}(x_{k-1},b) \geq \alpha, \qquad \text{si } k \text{ és impar.}$$

Per tant, si $l(M) = k$ és par, aleshores $l(M^2_{\text{Min}}) \leq \frac{k}{2}$ i

si $l(M) = k$ és impar, aleshores $l(M^2_{\text{Min}}) \leq \frac{k+1}{2}$.

Inductivament i tenint en compte que $l(M^r_{\text{Min}}) = 1$ s'obté el resultat. ∎

<u>Exemple 2.3.19.</u> Sigui $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ i M la relació difusa reflexiva i simètrica en X donada per la següent matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,94 & 0,8 & 0,19 & 0,72 \\ 0,5 & 1 & 0,53 & 0,4 & 0,38 & 0,36 \\ 0,94 & 0,53 & 1 & 0,75 & 0,2 & 0,68 \\ 0,8 & 0,4 & 0,75 & 1 & 0,15 & 0,9 \\ 0,19 & 0,38 & 0,2 & 0,15 & 1 & 0,14 \\ 0,72 & 0,36 & 0,68 & 0,9 & 0,14 & 1 \end{pmatrix}$$

Per $\alpha = 0,8$, $\deg_\alpha$ vé donada per la següent matriu:

$$D_{0,8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$ és una classe d'equivalència de $\overline{R_{0,8}}$.

Els graus de pertinença d'aquests elements són:

$$p_{0,8}(x_1) = \frac{3.5}{4} = 0,875$$
$$p_{0,8}(x_3) = \frac{2,83}{4} = 0,70$$
$$p_{0,8}(x_4) = \frac{3.5}{4} = 0,875$$
$$p_{0,8}(x_6) = \frac{2,83}{4} = 0,70$$

El grau de consistència d'aquesta classe a nivell 0,8 és

$$c_{0,8}(\{x_1, x_3, x_4, x_6\}) = \frac{0,875 + 0,70 + 0,875 + 0,70}{4} = 0,791.$$

D'altra banda, $\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$ també és una classe d'equivalència de $\overline{R_{0,68}}$ i es té

$$p_{0,68}(x_1) = p_{0,68}(x_3) = p_{0,8}(x_4) = p_{0,8}(x_6) = c_{0,8}(\{x_1, x_3, x_6\}) = 1$$

2.4. Aproximació topològica al producte Max-T.

Si M és una relació difusa reflexiva i simètrica en un conjunt X, per cada parella p, q de X $M(p,q)$ es pot interpretar com el **grau de similitud** o **proximitat** entre p i q. De fet, és la interpretació que és dóna quan es fa servir M per a classificar els elements de X.

Donat que **el concepte de proximitat és topològic** és natural donar una estructura topològica a X a través de M. Aquest punt de vista permetrà identificar els productes Max-T amb operadors de clausura d'uns certs espais de tipus V_D.

Donada una relació difusa reflexiva i simètrica M en un conjunt X, si interpretem $M(p,q)$ com el grau de proximitat entre p i q, $p, q \in X$, fixat un nivell $\alpha \in [0,1]$ és natural identificar els elements p, q de X tals que $M(p,q) \geq \alpha$. Això porta a definir els entorns d'un punt p de X de la següent manera:

Definició 2.4.1. Donat $\alpha \in [0,1]$ fixat, per cada $h \in (0,1]$ $N_p^\alpha(h)$ és l'entorn de p donat per

$$N_p^\alpha(h) = \{q \in X \mid M(p,q) > \alpha - h\}$$

És trivial provar que si U, V són entorns de p, aleshores existeix un entorn W de p tal que $W \subset U \cap V$. Per tant X té l'estructura d'espai V_D [Schweizer, B., Sklar, A. (1983)].

Proposició 2.4.2. L'estructura definida a X és una topologia per cada $\alpha \in [0,1]$ si, i només si, M és una similitud.

Demostració. Hem de veure que si $q \in N_p^\alpha(h)$, aleshores existeix $h' \in [0,1]$ tal que $N_q^\alpha \subset N_p^\alpha(h)$. Si agafem $h' = h$, si $x \in N_q^\alpha(h)$, aleshores $M(x,p) \geq \mathrm{Min}(M(p,q), M(q,x)) \geq \mathrm{Min}(\alpha - h, \alpha - h) = \alpha - h$ i per tant $x \in N_p^\alpha(h)$. ■

En el context de la teoria dels espais V_D definim el concepte de **contigüitat**.

Definició 2.4.3. Donat $A \subset X$, $p \in X$ és **contigu** (a nivell α) a A si, i només si, existeix $q \in X$ tal que $M(p,q) \geq \alpha$.

El concepte de contigüitat permet definir una clausura de Čech C^α en el conjunt $P(X)$ de les parts de X:

Definició 2.4.4. $C^\alpha : P(X) \to P(X)$ és l'aplicació que a cada subconjunt A de X li assigna el conjunt $C^\alpha(A)$ d'elements contigus a A (a nivell α).

Propietats 2.4.5. Donats A, B de $P(X)$ i $\alpha, \alpha' \in [0,1]$

2.4.5.1. $C^\alpha(\emptyset) = \emptyset$

2.4.5.2. $C^\alpha(A \cup B) = C^\alpha(A) \cup C^\alpha(B)$

2.4.5.3. $A \subset C^\alpha(A)$

2.4.5.4. $A \subset B \Rightarrow C^\alpha(A) \subset C^\alpha(B)$

2.4.5.5. $C^\alpha(A) = \bigcup_{p \in A} C^\alpha(\{p\})$

2.4.5.6. $\alpha \geq \alpha' \Rightarrow C^\alpha(A) \subset C^{\alpha'}(A)$

Demostració. Standard. ■

Els conjunts $A \subset X$ tals que $C^\alpha(A) = A$ es diuen **C^α-tancats**.

Per tal de construir una topologia en X definim un operador de clausura C_K^α de Kuratowski en $P(X)$:

Definició 2.4.6. $C_K^\alpha : P(X) \to P(X)$ és l'aplicació que a cada subconjunt A de X li assigna el conjunt $C_K^\alpha(A)$ intersecció de tots els conjunts C^α-tancats que contenen A.

Propietats 2.4.7. Donat $A \in P(X)$

2.4.7.1. M és similitud si, i només si, $C^\alpha = C_K^\alpha \ \forall\alpha \in [0,1]$

2.4.7.2. $A \subset C^\alpha(A) \subset C_K^\alpha(A)$

2.4.7.3. $(C^\alpha)^n(A) \subset C_K^\alpha(A)$, on $(C^\alpha)^n(A) = \underbrace{C^\alpha(C^\alpha(\ldots C^\alpha(A)))}_{n \text{ vegades}}$

2.4.7.4. $C_K^\alpha(A) = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in (C^\alpha)^n(A)\}$.

Demostració.

2.4.7.1 és conseqüència de la Proposició 2.4.2.

2.4.7.2 i 2.4.7.3. són trivials

2.4.7.4 Sigui $M = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in (C^\alpha)^n(A)\}$

(i) $M \subset C_K^\alpha(A)$: si $x \in M$, aleshores existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (C^\alpha)^n(A)$ i per 2.4.7.3. $x \in C_K^\alpha(A)$.

(ii) $C_K^\alpha(A) \subset M$: N'hi ha prou de veure que M és C^α-tancat, que és conseqüència immediata de 2.4.5.3. ∎

De la proposició 2.4.7.4 es dedueixen les següents proposicions:

Proposició 2.4.8. Sigui X finit de cardinal s. Aleshores

$$(C^\alpha)^n = C_K^\alpha \quad \text{si } n \geq s.$$

Proposició 2.4.9. Donats $p, q \in X$, o bé $C_K^\alpha(\{p\}) = C_K^\alpha(\{q\})$ o bé $C_K^\alpha(\{p\}) \cap C_K^\alpha(\{q\}) = \emptyset$.

Per tant C_K^α defineix una partició en X. Si R és la relació d'equivalència en X associada a aquesta partició es té

Proposició 2.4.10. R és la relació d'equivalència obtinguda per single linkage a nivell α de l'α-tall de M.

Proposició 2.4.11. Donats $n \in \mathbb{N}$ i $p, q \in X$,

$$M^n_{\mathrm{Min}}(p,q) = \inf\{\alpha \in [0,1] \mid q \in (C^\alpha)^n(\{p\})\}.$$

Aquestes proposicions, en especial l'última, donen una aproximació topològica al producte Max-Min identificant-lo a clausures de Čech, que es generalitzarà tot seguit al producte Max-T amb T una t-norma arbitrària.

Donada una relació difusa reflexiva i simètrica M en un conjunt X, una t-norma T i un nivell $\alpha \in [0,1]$, per cada $n \in \mathbb{N}$ es pot definir la següent aplicació:

$$C_T^{\alpha,n} : X \to P(X)$$

$$p \to C_T^{\alpha,n}(p)$$

on $C_T^{\alpha,n}(p) = \{q \in X \mid \exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que $x_0 = p, x_n = q$ i $T(M(x_0,x_1), M(x_1,x_2), \ldots, M(x_{n-1},x_n)) \geq \alpha\}$

En particular $C_T^{\alpha,1}(p) = \{q \in X \mid M(p,q) \geq \alpha\}$.

L'aplicació $C_T^{\alpha,n}$ definida en X es pot extendre a una aplicació en $P(X)$ de forma usual:

Definició 2.4.12.

$$C_T^{\alpha,n} : P(X) \to P(X)$$

$$A \to C_T^{\alpha,n}(A) = \bigcup_{p \in A} C_T^{\alpha,n}(p).$$

És fàcil de provar que $C_T^{\alpha,n}$ satisfà les propietats 2.4.5. En particular $C_T^{\alpha,n}$ és un operador de clausura de Čech en l'espai V_D definit en X pels entorns $\{N_p^\alpha\}_{p\in X}$.

D'altra banda, si $T = \mathrm{Min}$, aleshores $C_T^{\alpha,n} = (C^\alpha)^n$.

També és fàcil de provar una proposició anàloga a la 2.4.8.:

Proposició 2.4.13. Si X és finit, de cardinal s, aleshores

$$C_T^{\alpha,n} = C_T^{\alpha,n+1}, \qquad \text{si } n \geq s.$$

La següent Proposició relaciona els productes Max-T de relacions reflexives i simètriques amb operadors de clausura d'espais V_D:

Proposició 2.4.14. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en un conjunt X. Donats $n \in \mathbb{N}$ i $p, q \in X$,

$$M_T^n(p,q) = \inf\{\alpha \in [0,1] \mid q \in C_T^{\alpha,n}(\{p\})\}.$$

2.5. Producte Min-S. Dualitat.

El producte Min-S, S una t-conorma, de relacions difuses és un concepte dual al producte Max-T com s'exposarà en aquesta secció.

El conjunt R_X de relacions difuses en un conjunt X, amb el producte Min-S adquireix estructura de semigrup topològic ordenat i si (T, S, φ) és una terna de De Morgan, aleshores hi ha isomorfia entre $(R_X, \mathrm{Max}-T)$ i $(R_X, \mathrm{Min}-S)$ com es deduirà de la dualitat existent entre els productes Max-T i Min-S.

Tot el tractat en aquest capítol pel producte Max-T es pot dualitzar al producte Min-S i en aquesta secció només s'indicarà els resultats més importants d'aquest procés de dualització.

En particular, així com el producte Max-T permet generar T-indistingibilitats a partir de relacions reflexives i simètriques, el producte Min-S genera S- mètriques a partir de relacions de dissimilitud.

Definició 2.5.1. Donada una t-conorma S, el producte Min-S $M \circ_S N$ de dues relacions difuses M, N en un conjunt X és la relació en X definida per

$$(M \circ_S N)(x, y) = \inf_{z \in X} (S(M(y, z), N(z, y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Proposició 2.5.2. Dualitat. Donada una terna de De Morgan (T, S, φ) i dues relacions difuses M, N en un conjunt X, se satisfan les següents igualtats:

(i) $\varphi(M \circ_T N) = \varphi(M) \circ_S \varphi(N)$

(ii) $\varphi(M \circ_S N) = \varphi(M) \circ_T \varphi(N)$

Demostració. (de (i))

$$\begin{aligned}\varphi((M \circ_T N)(x, y)) &= \varphi \sup_{z \in X}(T(M(x, z), N(z, y))) = \\ &= \varphi \sup_{z \in X}(\varphi S(\varphi M(x, z), \varphi N(z, y))) = \\ &= \inf_{z \in X}(S(\varphi M(x, z), \varphi N(z, y)) = (\varphi M \circ_S \varphi N)(x, y). \blacksquare\end{aligned}$$

Conseqüència directa d'aquesta dualitat és el següent Teorema:

Teorema 2.5.3. Sigui S una t-conorma i R_X el conjunt de relacions difuses en el conjunt X. R_X amb el producte Min-S té estructura de semigrup topològic i ordenat.

Demostració. És dual del Teorema 2.2.4. $\blacksquare$

Corol.lari 2.5.4. El conjunt $C(X)$ de relacions de dissimilitud de X es un sub-semigrup topològic ordenat de $(R_X, \text{Min} -S)$.

De fet noti's que si (T, S, φ) és una terna de De Morgan, la proposició 2.5.2. implica que $(R_X, \text{Max} -T)$ i $(R_X, \text{Min} -S)$ són semigrups topològics ordenats isomorfs.

Donada l'associativitat del producte Min-S, es pot definir

$$M_S^n = \underbrace{M \circ_S M \circ_S \ldots \circ_S M}_{n \text{ vegades}}, n \in \mathbb{N}, M \in R_X.$$

què dóna lloc a una aplicació contínua en R_X.

<u>Definició 2.5.5.</u> La **clausura S-transitiva** m^s d'una relació de dissimilitud m en X és

$$m^s = \inf_{n \in \mathbb{N}} m_s^n.$$

Si X és finit, de cardinal s, aleshores $m^s = \inf\limits_{m \in \{1,2,\ldots,s\}} m_s^n$.

m^s és una S-mètrica en X i si m' és una S-mètrica tal que $m \geq m' \geq m^s$, aleshores $m' = m^s$.

<u>Proposició 2.5.6.</u> L'aplicació

$$C(x) \to C(X)$$

$$m \to m^s$$

és contínua.

Donat $\alpha \in [0, 1]$ l'α-tall d'una relació de dissimilitud m en un conjunt X és la relació R_α en X:

$$xR_\alpha y \quad \text{si, i només si} \quad m(x, y) \leq \alpha.$$

R_α és una relació clàssica reflexiva i simètrica i la seva clausura transitiva està lligada a la clausura Min-Max de m com s'explicita en els dos següents Teoremes duals dels 2.3.4 i 2.3.5.

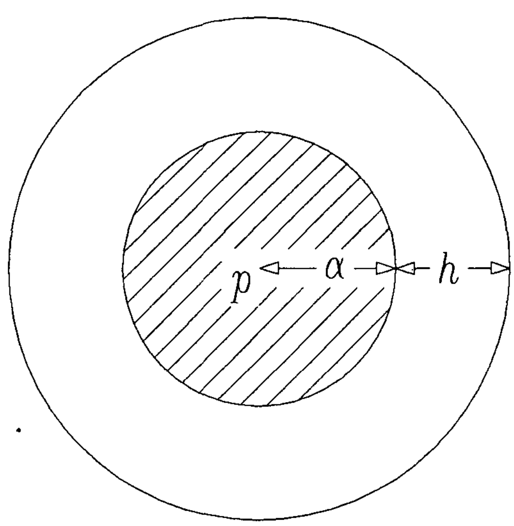
Teorema 2.5.7. Sigui m una relació de dissimilitud en un conjunt X. M és una ultramètrica (i.e., m és una Max-mètrica) si, i només si, $\forall\alpha \in [0,1]$ l'α-tall de m és una partició (i.e., R_α és una relació d'equivalència).

Teorema 2.5.8. Sigui m una relació de dissimilitud en X i $\alpha \in [0,1]$. La clausura transitiva de l'α-tall de m coincideix amb l'α-tall de la clausura Min-Max de m.

D'altra banda, les relacions de dissimilitud també donen lloc a espais V_D:

Definició 2.5.9. Si m és una relació de dissimilitud, en un conjunt X, fixat $\alpha \in [0,1]$, per a cada $h \in (0,1]$ $n_p^\alpha(h)$ és l'entorn de $p \in X$ donat per

$$n_p^\alpha(h) = \{q \in X \mid m(p,q) < \alpha + h\}.$$



Aquests sistemes d'entorns donen a X l'estructura d'espai V_D.

La dualitat entre relacions reflexives i simètriques i relacions de dissimilitud dóna lloc als següents Teoremes:

Teorema 2.5.10. Sigui (T, S, φ) una terna de De Morgan. Sigui M una relació difusa reflexiva i simètrica en X i m la relació de dissimilitud en X dual (i.e., $m = \varphi \circ M$ i, per tant, $M = \varphi \circ m$). Fixat $\alpha \in [0,1]$ l'espai V_D determinat per M amb els entorns N_p^α i l'espai V_D determinat per m amb els entorns $n_p^{\varphi(\alpha)}$ coincideixen.

Demostració.

$$N_p^\alpha(h) = \{q \in X | M(p,q) > \alpha - h\}$$

$$= \{q \in X \mid \varphi \circ M(p,q) < \varphi(\alpha - h)\}$$

i com que $\varphi(\alpha - h) > \varphi(\alpha)$, si $h' = \varphi(\alpha - h) - \varphi(\alpha)$

$$N_p^\alpha(h) = \{q \in X \mid m(p,q) < \varphi(\alpha) + h' = n_p^{\varphi(\alpha)}(h')$$

Per tant cada entorn de p via M també és un entorn de p via m. Anàlogament es prova que cada entorn de p via m és un entorn de p via M. ∎

Definició 2.5.11. Amb les notacions anteriors, donat $A \subset X$, direm que p és contigu a A (a nivell α) si, i només si, existeix $q \in X$ tal que $m(p,q) \leq \alpha$.

Les clausures c^α i c_k^α es defineixen com a 2.4.4. i 2.4.6. es té el següen Teorema:

Teorema 2.5.12. Amb les notacions anteriors $c^\alpha = C^{\varphi(\alpha)}$, $C_K^\alpha = C_K^{\varphi(\alpha)}$.

En particular,

Corol.lari 2.5.13. $m_{\mathrm{Max}}^n(p,q) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid q \in (c^\alpha)^n\{p\}\}$

Les clausures $C_T^{\alpha,n}$ també es poden dualitzar per tal de caracteritzar els productes Min-S per clausures d'espais V_D:

Definició 2.5.14. Donada una t-conorma S, es defineix $S(a) = a\ \forall a \in [0,1]$ i per $n \geq 2$ recurrentment

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = S(a_1, S(a_2, \ldots, a_n))\, \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$$

Definició 2.5.15. Amb les notacions d'aquesta secció, fixat $n \in \mathbb{N}$ es defineix

$$c_s^{\alpha,n} : X \rightarrow P(X)$$

$$p \rightarrow c_s^{\alpha,n}(p)$$

on $c_s^{n,\alpha}(p) = \{q \in X \mid \exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que $x_0 = p,\ x_n = q$ i

$$S(m(x_0, x_1), m(x_1, x_2), \ldots, m(x_{n-1}, x_n)) \leq \alpha\}.$$

Les aplicacions $c_s^{n,\alpha}$ s'extenen a clausures definides en $P(X)$.

Teorema 2.5.16. Amb les notacions anteriors

$$c_s^{\alpha,n} = C_T^{\varphi(a),n}$$

En particular,

Corol.lari 2.5.17. $m_s^n(p,q) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid q \in c_s^{\alpha,n}(\{p\})\}$.

Els productes Min-S queden per tant relacionats amb operadors de clausura d'espais V_D.