UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matèmatica Aplicada

SOBRE LA REPRESENTACIÓ I GENERACIÓ DE RELACIONS D'INDISTINGIBILITAT

Autor: Jorge Recasens Ferrés
Director: Joan Jacas Moral

Desembre, 1991

4. Morfismes de Mètodes de Classificació.

It next will be right

To describe each particular batch:

Distinguishing those that have feathers, and bite,

From those that have whiskers, and scratch.

Lewis Carroll *The Hunting of the Snark*

4.1. Introducció.

Per tal de classificar els elements d'un conjunt X es poden usar diferents mètodes. Cada mètode genera, en general, una classificacion diferent en X. Quina és la millor? Evidentment no es pot donar una resposta objectiva a aquesta pregunta i només experts poden contestar-la usant aspectes extra- teòrics tals com l'experiència i la intuició.

Tanmateix, tant des dels punts de vista teòric com pràctic és útil i interessant **comparar i relacionar** diferents mètodes de classificació.

D'altra banda, si X, Y són dos conjunts i els seus elements estan classificats segons sengles mètodes, és natural esperar alguna relació entre aquest mètodes en el cas que els elements de X i Y també ho estiguin.

Per tractar aquestes qüestions, en aquest capítol s'introdueix el concepte de **morfisme de mètodes de classificació** en el context de la Teoria de Classificació introduida per [Jardine, N., Sibson, R. (1977)].

En particular els productes Max-T i Min-S generen mètodes de classificació i es veurà en quins casos es té un morfisme entre ells. D'aquesta manera es donarà una nova interpretació a resultats del capítol 2.

Els recubriments difusos estan íntimament relacionats amb relacions reflexives i simètriques i en particular amb T-indistingibilitats.

Es provarà que el conjunt de recubriments difusos minimals simètrics en X és un reticle isomorf al reticle de numerically stratified clusterings de X. Els morfismes de mètodes de classificació donaran lloc per tant a morfismes de recubriments i a morfismes de relacions reflexives i simètriques i de T-indistingibilitats.

4.2. Morfismes de Mètodes de Classificació.

Comencem donant la definició de **mètode de classificació** de [Jardine, N., Sibson, R. (1977)].

Donat un conjunt X, $C(X)$ serà el conjunt de relacions de dissimilitud de X i $\Sigma(X)$ el conjunt de relacions clàssiques en X reflexives i simètriques. $E(X) \subset \Sigma(X)$ serà el conjunt de relacions d'equivalència en X.

Tota relació R de $\Sigma(X)$ genera un recubriment $\{A_i\}_{i\in I}$ de X i recíprocament.

Quan convingui identificarem una relació R de $\Sigma(X)$ amb el recubriment que genera en X.

Definició 4.2.1. Un **numerically stratified clustering** o **arbre indexat** en un un conjunt X és una aplicació

$$c : [0,1] \longrightarrow \Sigma(X)$$

que satisfà:

4.2.1.1. $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow c(\lambda) \subset c(\lambda')$

4.2.1.2. $c(\lambda) = X \times X$ si λ és suficientment gran.

4.2.1.3. Donat $\lambda \in [0,1]$, existeix $\delta > 0$ tal que $c(\lambda + \delta) = c(\lambda)$.

Si la imatge de c està continguda en $E(X)$, es diu que c és un **dendograma**.

Si $c(0) = \{(x,x) \mid x \in X\}$, es diu que c és **separador**.

NSC (X) és el conjunt d'arbres indexats de X.

Definició 4.2.2. Un mètode de classificació en X és una regla que assigna a cada relació de dissimilitud en X un arbre indexat. És a dir: una aplicació

$$D : C(X) \longrightarrow NSC(X).$$

Donada una aplicació $f : X \to Y$ entre dos conjunts X, Y definim dues funcions, ambdues denotades per f^*:

Definició 4.2.3.

$$f^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$$

$$m \longrightarrow f^*(m) = m \circ (f \times f)$$

$$f^* : \Sigma(Y) \longrightarrow \Sigma(X)$$

$$R \longrightarrow f^*(R) = \{(a, b) \in X \times X \mid (f(a), f(b)) \in R\}$$

Lema 4.2.4.

4.2.4.1. $\forall R \in \Sigma(Y)$ card $R \leq$ card $f^*(R)$

4.2.4.2. Si X, Y són conjunts finits, aleshores f és bijectiva si, i només si, $\forall R \in \Sigma(Y)$ card $R =$ card $f^*(R)$

4.2.4.3. Si $X \subset Y$ i f és la inclusió, aleshores $R \subset f^*(R)$ $\forall R \in \Sigma(Y)$

4.2.4.4. Si $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, aleshores $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Demostració. Standard. ■

La Definició 4.2.3. es pot generalitzar:

Definició 4.2.5. Donada $f : X \to Y$ definim f^*:

$$f^* : NSC(Y) \longrightarrow NSC(X)$$

$$c : [0,1] \longrightarrow \Sigma(Y) \mapsto f^*(c) : [0,1] \longrightarrow \Sigma(X)$$

$$t \longrightarrow c(t) \quad \mapsto \quad t \longrightarrow f^*(c(t))$$

És una comprovació standard que f^* està ben definida (i.e. $f^*c \in NSC(X)$) i que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Si f és bijectiva direm que c i f^*c són **isomorfs** i si $X \subset Y$ i f és la inclusió, direm que f^*c és un **subarbre indexat** de c.

Hi ha una bijecció natural T entre $C(X)$ i $NSC(X)$ definida per

$$\begin{aligned} C(X) &\xrightarrow{T} NSC(X) \\ m &\longrightarrow Tm : [0,1] \longrightarrow \Sigma(X) \\ & \qquad\qquad t \longrightarrow \{(a,b) \in X \times X \mid m(a,b) \leq t\}. \end{aligned}$$

La inversa T^{-1} vé donada per

$$\begin{aligned} C(X) &\xleftarrow{T^{-1}} NSC(X) \\ T^{-1}c &\longleftarrow c \end{aligned}$$

on $T^{-1}c(a,b) = \inf\{t \in (0,1] \mid (a,b) \in c(t)\}$.

Proposició 4.2.6. Donada una aplicació $f : X \to Y$, el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} C(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "T"'] & C(X) \arrow[d, "T"] \\ NSC(Y) \arrow[r, "f^*"] & NSC(X) \end{tikzcd}$$

Demostració. Sigui $m \in C(Y)$

Per un costat

$$\begin{aligned} Tf^*m = Tm(f \times f) &: [0,1] \longrightarrow \Sigma(X) \\ & \qquad t \longrightarrow \{(a,b) \in X \times X \mid m(f(a), f(b)) \leq t\} \end{aligned}$$

Per l'altre costat

$$\begin{aligned} Tm &: [0,1] \longrightarrow \Sigma(Y) \\ & \qquad t \longrightarrow \{(p,q) \in Y \times Y \mid m(p,q) \leq t\} \end{aligned}$$

$f^*Tm = \{(a,b) \in X \times X \mid (f(a), f(b)) \in Tm\} = \{(a,b) \in X \times X \mid m(f(a), f(b)) \leq t\}$. ■

Anem a donar unes definicions d'inspiració mètrica [Trillas, E., Alsina, C. (1978)] que generalitzarem més tard a mètodes de classificació:

<u>Definició 4.2.7.</u> Donats $m \in C(X)$, $m' \in C(Y)$, una aplicació $f : X, m \to Y, m'$ direm que és una **homometria** (respecte m, m') si, i només si, $m = f^*m'$.

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[rr, "m"] \arrow[d, "f \times f"] & & {[0,1]} \\
Y \times Y \arrow[urr, "m'"'] & &
\end{tikzcd}$$

<u>Definició 4.2.8.</u> Donats $c \in NSC(X)$, $c' \in NSC(Y)$, una aplicació $f : X, c \to Y, c'$ direm que és una **homometria** (respecte c, c') si, i només si, $c = f^*c'$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[rr, "c'"] \arrow[drr, "c"'] & & \Sigma(Y) \arrow[d, "f*"] \\
& & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

<u>Lema 4.2.9.</u> Si c és separador, aleshores f és injectiu.

<u>Demostració.</u> Siguin $a, b \in X$ tals que $f(a) = f(b)$

$$\{(a,a) \in X \times X\} = c(0) = f^*c'(0) =$$

$$= \{(a,b) \in X \times X \mid (f(a), f(b)) \in c'(0)\} \Rightarrow a = b. ■$$

<u>Exemple 4.2.10.</u> Un exemple interessant d'homometria és el següent:

Donat $c \in NSC(X)$ definim la relació d'equivalència $\sim$ en X:

$$a \sim b \quad \text{si, i només si,} \quad (a,b) \in c(0).$$

Sigui $\overline{X} = X/\sim$.

Definim $\overline{c} \in NSC(\overline{X})$ de la següent manera:

$$\overline{c} : [0,1] \longrightarrow \Sigma(\overline{X})$$

$$t \longrightarrow \overline{c}(t) = \{(\overline{a}, \overline{b}) \mid (a,b) \in c(t)\}.$$

Es comprova que $\overline{c}$ està ben definit (i.e. $\overline{c} \in NSC(\overline{X})$ i si $p : X \to \overline{X}$ és la projecció canònica, aleshores $c = p^*\overline{c}$).

En efecte $p^*\overline{c}(t) = \{(a,b) \mid (\overline{a}, \overline{b}) \in \overline{c}(t)\} = c(t)$.

Per construcció, $\overline{c}$ és separador. Per tant, donat c, sempre podem construir un $\overline{c}$ separador, de forma canònica, que coincideix amb c llevat d'una homometria.

Per exemple, si $X = \{a, b, c, d\}$ i $c \in NSC(X)$ està donat per

$$c(t) = \begin{cases} \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, & \text{si } t < 0,3 \\ \{a,b,c\}, \{c,d\}, & \text{si } 0,3 \leq t < 0,7 \\ \{a,b,c,d\}, & \text{si } t \geq 0,7 \end{cases}$$

aleshores $\overline{X} = \{\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}\}$ on $\overline{a} = \{a, b\}$, $\overline{c} = \{c\}$, $\overline{d} = \{d\}$ i

$$\overline{c}(t) = \begin{cases} \{\overline{a}\}, \{\overline{c}\}, \{\overline{d}\}, & \text{si } t < 0,3 \\ \{\overline{a}, \overline{c}\}, \{\overline{c}, \overline{d}\}, & \text{si } 0,3 \leq t < 0,7 \\ \{\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}\}, & \text{si } t \geq 0,7 \end{cases}$$

Una homometria bijectiva direm que és una **isometria**.

<u>Definició 4.2.11.</u> Donada $c \in NSC(X)$,

$\mathcal{H}(X,c)$ és el **semigrup d'homometries** $f : X, c \to X, c$

$\mathcal{J}(X,c)$ és el **grup d'isometries** $f : X, c \to X, c$.

És una comprovació standard que la composició d'homometries és una homometria i per tant que $\mathcal{H}(X,c)$ és un semigrup; i que la inversa d'una isometria és una isometria i per tant que $\mathcal{J}(X,c)$ és un grup.

<u>Proposició 4.2.12.</u> Donats $c \in NSC(X)$ i $c' \in NSC(Y)$, si X, c i Y, c' són isomètrics, aleshores $\mathcal{H}(X,c) \simeq \mathcal{H}(Y,c')$.

Demostració. Sigui $f : X \to Y$ la isometria.

Definim
$$F : \mathcal{H}(X,c) \longrightarrow \mathcal{H}(Y,c')$$
$$\varphi \longrightarrow f \circ \varphi \circ f^{-1}$$

Es comprova que F està ben definida i d'altra banda F és un morfism de semigrups, perque

$$F(\varphi \circ \psi) = f \circ \varphi \circ \psi \circ f^{-1} = f \circ \varphi \circ f^{-1} \circ f \circ \psi \circ f^{-1} = F(\varphi) \circ F(\psi).$$

Per simetria és un isomorfisme.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

■

Corol·lari 4.2.13. Si X, c, Y, c' són isomètrics, aleshores $\mathcal{J}(X,c) \simeq \mathcal{J}(Y,c')$.

Moltes vegades, d'una classificació interessa només l'arbre i no l'arbre indexat. Això porta a les següents definicions:

Definició 4.2.14. Donats $m, m' \in C(X)$ direm que X, m, X, m' són **semblants** si, i només si, $\exists F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tal que $m' = F \circ m$.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "m'"'] & {[0,1]} \arrow[d, "F"] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

(És clar que si $\exists F$, aleshores $F(0) = 0$)

Definició 4.2.15. El conjunt de les imatges d'un arbre indexat $c \in NSC(X)$ es dirà **l'arbre** de c.

Definició 4.2.16. Donats $c, c' \in NSC(X)$ direm que X, c, X, c' són **semblants** si, i només si, $\exists F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tal que $c' = c \circ F$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "F"] & \Sigma(X) \\
{[0,1]} \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 4.2.17. Amb les notacions anteriors, l'arbre de c' està contingut en el de c.

Demostració.

$$c'(t) = c(F(t)).\blacksquare$$

És a dir: els nivells de c' varien respecte dels de c i fins i tot pot "faltar-ne" algun. Això s'evita quan F és bijectiva. En efecte:

Lema 4.2.18. Si $F : [0,1] \to [0,1]$ és monòtona i bijectiva, aleshores preserva els arbres:

Demostració. $c'(t) = c(F(t))$ i com que F és bijectiva, $c'(F^{-1}(t)) = c(t)$. $\blacksquare$

És clar que la relació en $NSC(X) : c \sim c'$ si, i només si, tenen el mateix arbre és una relació d'equivalència.

Si una $F : [0,1] \to [0,1]$ preserva tots els arbres, aleshores F ha de ser bijectiva. Per tant, per la proposició 4.2.18. $\sim$ queda caracteritzada per: $c \sim c'$ si, i només si, $\exists F$ monòtona creixent bijectiva: $[0,1] \to [0,1]$ amb $c' = c \circ F$.

Proposició 4.2.19. Siguin $c, c' \in NSC(X)$. Si c, c' són semblants, aleshores $\mathcal{H}(X, c) \subset \mathcal{H}(X, c')$.

Demostració. Sigui $f \in \mathcal{H}(X, c)$. Aleshores $c = f^*c$ (1)

com que c és semblant a c', aleshores $\exists F$ amb $c' = c \circ F$ (2)

$c' =^{(2)} c \circ F =^{(1)} f^*cF =^{(2)} f^*c'$ i per tant $f \in \mathcal{H}(X, c')$. $\blacksquare$

Corol·lari 4.2.20. Si $c, c' \in NSC(X)$ són semblants, aleshores $\mathcal{J}(X,c) \subset \mathcal{J}(X,c')$.

Corol·lari 4.2.21. Si $c, c' \in NSC(X)$ tenen el mateix arbre, aleshores

$$\mathcal{H}(X,c) \simeq \mathcal{H}(X,c')$$

$$\mathcal{J}(X,c) \simeq \mathcal{J}(X,c')$$

Demostració. 4.2.18., 4.2.19. i 4.2.20. ■

Les nocions d'homometria i semblança permeten definir morfismes entre matrius de dissimilitud i entre arbres indexats:

Definició 4.2.22. Siguin $m \in C(X)$ i $m' \in C(Y)$.
Un **morfisme** $\varphi : (X,m) \to (Y,m')$ és una parella $\varphi = (f,F)$ amb $f : X \to Y$ i $F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tal que $F \circ m = f^* \circ m$.

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f \times f"'] & {[0,1]} \arrow[d, "F"] \\
Y \times Y \arrow[r, "m'"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Definició 4.2.23. Siguin $c \in NSC(X)$ i $c' \in NSC(Y)$. Un **morfisme** $\varphi : (X,c) \to (Y,c')$ és una parella $\varphi = (f,F)$ amb $f : X \to Y$ i $F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona tal que $f^* \circ c' = c \circ F$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "c"] & \Sigma(X) \\
{[0,1]} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "c'"] & \Sigma(X) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

En les Definicions 4.2.22 i 4.2.23,

a) si $X = Y$ i $f = j$, φ és una semblança.

b) si $F = j$, φ és una homometria.

c) si F, f són bijectives, direm que φ és un **isomorfisme**.

Els morfismes acabats de definir donen lloc a morfismes de mètodes de classificació. Aquests morfismes, però en determinats contextes són massa rígids i els direm estrictes. Suavitzant les definicions tindrem morfismes menys rígids que semblen més adequats per a relacionar mètodes de classificació:

Definició 4.2.24. Sigui D, D' mètodes de classificació en els conjunts X, Y respectivament. Una **homometria estricta** entre (X, D) i (Y, D') és una aplicació $f : X \to Y$ tal que $D \circ f^* = f^* \circ D'$.

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, "D"] & NSC(X) \\ C(Y) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "D'"] & C(X) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Si f és bijectiva es diu que és una **isometria**.

Definició i Proposició 4.2.25. $\mathcal{H}(X, D)$ denotarà el **semigrup d'homometries** de D $\mathcal{J}(X, D)$ denotarà el **grup d'isometries** de D. $\mathcal{H}(X, D)$ i $\mathcal{J}(X, D)$ són efectivament un semigrup i un grup respectivament.

Demostració. Anem a veure, més general, que la composició d'homometries és una homometria. És conseqüència del fet que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$:

Si $f : (X, D) \to (Y, D')$ i $g : (Y, D') \to (Z, D'')$ són homometries, aleshores

(1) $D \circ f^* = f^* \circ D'$ i

(2) $D' \circ g^* = g^* \circ D''$

$D \circ (g \circ f)^* = D \circ f^* \circ g^* = f^* \circ D' \circ g^* = f^* \circ g^* \circ D'' \circ (g \circ f)^* \circ D''$ i per tant $g \circ f : (X, D) \to (Z, D'')$ és una homometria. ■

Una propietat molt útil d'un mètode de classificació D és que no depengui de l'ordre en què es tenen els elements de X. Això és equivalent a dir que $\mathcal{J}(X, D)$

sigui el conjunt de totes les permutacions, o aplicacions bijectives, de X. A [Jardine, N., Sibson, R. (1977)] aquesta propietat s'anomena M2.

Proposició 4.2.26. Si D, D' són mètodes de classificació en X, Y respectivament isomètrics, aleshores $\mathcal{H}(X,D) \simeq \mathcal{H}(Y,D')$ i $\mathcal{J}(X,D) \simeq \mathcal{J}(Y,D')$. En particular les isometries conserven la propietat M2.

Demostració. Sigui $f : X \to Y$ la isometria.

Definim

$$F : \mathcal{H}(X,D) \longrightarrow \mathcal{H}(Y,D')$$

$$\varphi \longrightarrow F(\varphi) \circ f \circ \varphi \circ f^{-1}$$

Es comprova que F està ben definida i és un morfisme com a 4.2.12. ■

Definició 4.2.27. Siguin D, D' dos mètodes de classificació en X, $(X, D$ és **semblant estrictament** a (X, D) si, i només si, $\exists F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tal que $D \circ m \circ F = D' \circ m$ $\forall m \in C(X)$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[rr, "D'm"] \arrow[dr, "F"'] & & \Sigma(X) \\
& {[0,1]} \arrow[ur, "Dm"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposició 4.2.28. $\forall m \in C(X)$ l'arbre de $D'm$ està contingut en el de Dm.

Si F es monòtona i bijectiva, aleshores els arbres de $D'm$ de Dm coincideixen.

Demostració. 4.2.17 i 4.2.18. ■

Juntant les definicions 4.2.24 i 4.2.27 es té la següent:

Definició 4.2.29. Siguin D, D' mètodes de classificació en X, Y respectivament. Un **morfisme estricte** $\varphi : (X, D) \to (Y, D')$ **de mètodes de classificació** és una parella $\varphi = (f, F)$ amb $f : X \to Y$ i $F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tal que

$$D \circ f^*(m) \circ F = f^*(D'm) \qquad \forall m \in C(X).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
C(X) & \xrightarrow{\quad D \quad} & NSC(X) & & & & \\
f^*(m) & & Df^*(m): & [0,1] & \xrightarrow{\quad Df^*(m) \quad} & \Sigma(X) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle f^*} & & & \Big\uparrow{\scriptstyle F} & & \Big\uparrow{\scriptstyle f^*} \\
C(Y) & \xrightarrow{\qquad\quad} & NSC(Y) & & & \\
m & D' & D'm: & [0,1] & \xrightarrow{\quad D'm \quad} & \Sigma(Y)
\end{array}$$

En la definició anterior,

a) Si $X = Y$ i $f = j$, φ és una semblança.

b) Si $F = j$, φ és una homometria.

c) Si F, f són bijectives direm que φ és un **isomorfisme**.

Convé suavitzar les definicions 4.2.24, 4.2.27 i 4.2.28.:

Definició 4.2.30. Siguin D, D' dos mètodes de classificació en X, Y respectivament. Una **homometria** entre (X, D) i (Y, D') és una aplicació $f : X \to Y$ tal que

$$f^*D'm(t) \subset Df^*m(t) \quad \forall m \in C(Y), \forall t \in [0,1].$$

Definició 4.2.31. Siguin D, D' dos mètodes de classificació en X. (X, D) és **semblant** a (X, D') si, i només si, $\exists F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tal que $DmF(t) \subset D'm(t)$ $\forall m \in C(X)$, $\forall t \in [0,1]$.

La relació "ser semblant" és una relació de preordre en el conjunt de mètodes de classificació de X i la relació "ser estrictament semblant" es una relació d'equivalència en el mateix conjunt.

Definició 4.2.32. Siguin D, D' mètodes de classificació en X, Y respectivament. Un **morfisme de mètodes de classificació** $\varphi : (X, D) \to (Y, D')$ és una parella $\varphi = (f, F)$ amb $f : X \to Y$ i $F : [0,1] \to [0,1]$ monòtona creixent tals que

$$DfmF(t) \subset f^* D'm(t) \qquad \forall m \in C(Y)\, \forall t \in [0,1].$$

Exemple 4.2.33. Donada una aplicació $f : X \to Y$ i un arbre indexat c' en Y, existeix un únic arbre indexat c en X tal que (X, c) i (Y, c') són homomètrics estrictes i per tant homomorfs estrictes.

En efecte: Definim $c = f^* \circ c'$. Per tant es poden transportar les classificacions de Y a classificacions de X.

Exemples 4.2.34. Donada una t-conorma S, i $n \in \mathbb{N}$, l'aplicació

$$C(X) \longrightarrow C(X)$$
$$m \longrightarrow m_s^n$$

composta amb l'aplicació T (Proposició 4.2.6.) dóna lloc a un mètode de classificació que denotarem D_s^n.

Si S, S' són t-conormes amb $S \leq S'$, $n \leq n'$ i SL és el mètode de classificació obtingut per la clausura Max-Min, (i.e. single linkage) es té el següent diagrama commutatiu de morfismes de mètodes de classificació:

$$\begin{tikzcd}
D^n_s \arrow[r] \arrow[d] & D^{n'}_s \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
D^n_{s'} \arrow[r] \arrow[d] & D^{n'}_{s'} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
D^n_{\mathrm{Max}} \arrow[r] & D^{n'}_{\mathrm{Max}} \arrow[r] & SL
\end{tikzcd}$$

4.3. Classificacions i recubriments difusos.

A la secció anterior hem vist que hi ha una bijecció natural T entre el conjunt $C(X)$ de relacions de dissimilitud en X i el conjunt $NSC(X)$ d'arbres indexats en X. De fet $C(X)$ i $NSC(X)$ tenen estructura de reticle i T és un isomorfisme de reticles.

El conjunt $RS(X)$ de recubriments difusos simètrics minimals de X (Definició 4.3.2.) també té estructura de reticle i trobarem isomorfismes P i L de reticles que faran commutatiu el següent diagrama

$$\begin{tikzcd}
NSC(X) \arrow[rr, "P"] & & RS(X) \\
& C(X) \arrow[ul, "T"] \arrow[ur, "L"'] &
\end{tikzcd}$$

D'aquesta manera els arbres indexats s'identifiquen amb recubriments difusos i els mètodes de classificació de [Jardine, N., Sibson, R. (1977)] estudiats a la secció anterior s'identifiquen amb mètodes per a obtenir recubriments.

Un arbre indexat fixa l'atenció en quins objectes estan relacionats en els determinats nivells i per tant dona una lectura horitzontal. En les particions, en canvi, donat un objecte podem saber quins graus de relació té amb els altres i es té per tant una lectura vertical de l'arbre indexat.

Una família de recubriments difusos especialment interessant i profusament estudiada en [Valverde, L. (1985), Jacas, J. (1987), Jacas, J., Valverde, L. (1990)], són les $m_{s,\varphi}$-particions.

En aquesta secció es veurà que les $m_{s,\varphi}$-particions es corresponen amb S-mètriques via L i amb arbres indexats particulars via P.

Definició 4.3.1. Sigui X un conjunt. Un **recubriment difús** de X és una família de conjunts difusos de X $\{c_i\}_{i\in I}$ tal que

$$\operatorname*{Sup}_{i\in Y} c_i(x) = 1 \quad \forall x \in X \quad \text{i} \quad \operatorname*{Sup}_{x\in X} c_i(x) = 1 \quad \forall i \in I.$$

Definició 4.3.2. Un recubriment difús $\{c_i\}_{i\in I}$ de X és **minimal** si, i només, si $\forall i \in I \; c_i \not\subset \bigcup_{j\in I-L_i} c_j$ on $L_i = \{j \in I \mid c_j = c_i\}$.

Definició 4.3.3. Una **partició difusa** de X és un recubriment $\{c_i\}_{i\in I}$ de X tal que les mèdules dels c_i (la mèdula d'un conjunt difús h de X és el conjunt d'elements $x \in X$ tals que $h(x) = 1$) donen una partició clàssica.

Lema 4.3.4. Tota partició difusa és un recubriment minimal.

Demostració. Donat $i \in I$, sigui $x \in X$ amb $c_i(x) = 1$. Donat que les mèdules són particions, $c_j(x) \neq 1 \; \forall j \notin L_i$ i per tant $c_j(x) < c_i(x) \; \forall j \notin L_i$. ∎

Proposició 4.3.4. Si $\{c_i\}_{i\in I}$ és un recubriment minimal de X i $C = \{c|c = c_i$ per alguns $i \in I\}$, aleshores card $C \leq$ card X.

Demostració. Contrarecíproca: Suposem card $C >$ Card X. Donat $x \in X$ existeix $c \in C$ tal que $c(x) = 1$.

Escollim un $c \in C$ amb $c(x) = 1$ i el denotem c_x.

Com que card $C >$ card X, existeix $c \in C$ que no és del tipus c_x, $x \in X$.

Es té $c(y) \leq \bigcup_{x \in X} c_x(y) = 1 \ \forall y \in Y$ i per tant $\{c_i\}_{i \in I}$ no és minimal. ■

<u>Corol·lari 4.3.5.</u> Els recubriments minimals de X es poden reindexar amb els elements de X (És a dir: es poden considerar del tipus $\{c_x\}_{x \in X}$ (amb possiblement $c_x = c_y$ i $x \neq y$)) i de tal manera que $c_x(x) = 1 \ \forall x \in X$.

A partir d'ara suposarem que els recubriments minimals estan indexats com en el corol·lari anterior.

<u>Definició 4.3.6.</u> Un recubriment minimal $\{c_x\}_{x \in X}$ de X és **simètric** si, i només si, $c_x(y) = c_y(x) \ \forall x, y \in X$. $RS(X)$ denotarà el conjunt de recubriments simètrics (minimals) de X.

<u>Definició 4.3.7.</u> [Valverde, L. (1985)] Sigui φ una negació i S una t-conorma. Es defineix la S-mètrica $m_{s,\varphi}$ en $[0,1] : m_{s,\varphi}(a,b) = \hat{S}(\varphi \operatorname{Max}(a,b) \mid \varphi \operatorname{Min}(a,b))$. Un recubriment $\{c_x\}_{x \in X}$ simètric en X és una $m_{s,\varphi}$-partició si, i només si

$$m_{s,\varphi}(c_x(y), c_x(z)) \leq \varphi c_y(z)$$

<u>Corol·lari 4.3.8.</u> Les $m_{s,\varphi}$-particions són recubriments difusos minimals simètrics.

Els conjunts $C(X)$, $NSC(X)$ i $RS(X)$ tenen estructura natural de reticle:

Donades $m, m' \in C(X)$ definim $m \vee m'$ i $m \wedge m'$ de la següent manera:

$$(m \vee m')(x,y) = \operatorname{Max}(m(x,y), m'(x,y))$$

$$(m \wedge m')(x,y) = \operatorname{Min}(m(x,y), m'(x,y))$$

Donats $c, c' \in NSC(X)$

$$(c \vee c')(t) = c(t) \cup c'(t)$$

$$(c \wedge c')(t) = c(t) \cap c'(t)$$

Donats $\{c_x\}_{x\in X}$, $\{c'_x\}_{x\in X}$

$$\{c_x\}_{x\in X} \vee \{c'_x\}_{x\in X} = \{c''_x\}_{x\in X} \quad \text{on} \quad c''_x(y) = \mathrm{Max}(c_x(y), c'_x(y))$$

$$\{c_x\}_{x\in X} \wedge \{c'_x\}_{x\in X} = \{c''_x\}_{x\in X} \quad \text{on} \quad c''_x(y) = \mathrm{Min}(c_x(y), c'_x(y))$$

Amb aquestes definicions és clar que l'aplicació $T : C(X) \to NSC(X)$ de la secció anterior és un isomorfisme de reticles. Fixem una funció de negació φ.

Anem a definir isomorfismes entre $RS(X)$ i $NSC(X)$ i $C(X)$:

<u>Definició 4.3.9.</u>

$$NSC(X) \xrightarrow{P} RS(X)$$

$$c \xrightarrow{P} \{c_x\}_{x\in X} \quad \text{amb} \quad c_x(y) = \varphi(\inf\{t(x,y) \in c(t)\})$$

la inversa P^{-1} vé donada per

$$\{c_x\}_{x\in X} \xrightarrow{P^{-1}} c : [0,1] \longrightarrow \Sigma(X)$$

$$t \longrightarrow \{(x,y) \mid \varphi(c_x(y)) \leq t\}$$

<u>Definició 4.3.10.</u>

$$C(X) \xrightarrow{L} RS(X)$$

$$m \xrightarrow{L} \{c_x\}_{x\in X} \quad \text{amb} \quad c_x(y) = \varphi(m(x,y))$$

La inversa vé donada per

$$\{c_x\}_{x\in X} \xrightarrow{L^{-1}} m \quad \text{on} \quad m(x,y) = \varphi(c_x(y))$$

És clar que tant P com L són isomorfismes de reticles i es té el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
NSC(X) \arrow[rr, "P"] & & RS(X) \\
& C(X) \arrow[ul, "T"] \arrow[ur, "L"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.3.11. Les $m_{s,\varphi}$-particions d'un conjunt finit X es corresponen amb les relacions m de $C(X)$ que són S-mètriques via L i amb els arbres indexats $c \in NSC(X)$ tals que $(x,y) \in c(t)$, $(y,z) \in c(t') \Rightarrow (x,z) \in S(c(t),c(t'))$ via P.

Demostració. És clar que via T les S-mètriques es corresponen amb els arbres indexats que cumpleixen la condició de l'enunciat del Teorema.

Per tant n'hi ha prou en veure la correspondència entre $m_{s,\varphi}$- particions i S-mètriques via L:

Sigui m una S-mètrica. Hem de veure que $\{c_x\}_{x\in X}$ és una $m_{s,\varphi}$-partició on $C_x(y) = \varphi(m(x,y))$, és a dir $m_{s,\varphi}(c_x(y), c_x(z)) \leq m(y,z)$.

Per (2.2.5) de [Valverde, L. (1985)] aquesta desigualtat és equivalent a

$$S(m(y,z), \mathrm{Min}(m(x,y), m(x,z))) \geq \mathrm{Max}(m(x,y), m(x,z))$$

Cas 1): $m(x,y) \leq m(x,z)$:

$$S(m(y,z), \mathrm{Min}(m(x,y), m(x,z))) = S(m(y,z), m(x,y)) \geq$$
$$\geq m(x,z) \geq \mathrm{Max}(m(x,y), m(x,z)).$$

Cas 2): $m(x,z) \geq m(x,y)$ és anàleg al cas 1)

Sigui $\{c_x\}_{x\in X}$ una $m_{s,\varphi}$-partició. Anem a veure que m és una S-mètrica, on $m(x,y) = \varphi(c_x(y))$:

Es té $m_{s,\varphi}(\varphi m(x,y), \varphi(m(x,z)) \leq m(x,y)$ és a dir

$$\hat{S}(\varphi\,\mathrm{Max}(\varphi m(x,y), \varphi m(x,z)) \mid \varphi\,\mathrm{Min}(\varphi m(x,y), m(x,z))) \leq m(y,z)$$
$$\hat{S}(\mathrm{Min}(m(x,y), m(x,z)) \mid \mathrm{Max}(m(x,y), m(x,z))) \leq m(y,z)$$

i per (2.2.5) de [Valverde], aquesta desigualtat és equivalent a

$$* \qquad S(m(y,z), \mathrm{Min}(m(x,y), m(x,z)) \geq \mathrm{Max}(m(x,y), m(x,z))$$

Cas 1) Si $m(x,y) \geq m(x,z)$, * es transforma en

$$S(m(y,z), m(x,z)) \geq m(x,y)$$

Cas 2) Si $m(x,y) \leq m(x,z)$, * es transforma en

$$S(m(y,z), m(x,z)) \geq m(x,y)$$

i per tant m és una S-mètrica. ∎