UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matèmatica Aplicada

SOBRE LA REPRESENTACIÓ I GENERACIÓ DE RELACIONS D'INDISTINGIBILITAT

Autor: Jorge Recasens Ferrés
Director: Joan Jacas Moral

Desembre, 1991

5. Relacions T-transitives.

5.1. Introducció.

En aquest capítol s'estudiaran relacions difuses T-transitives (T una t-norma).

En [Valverde, L. (1985)] es dóna un Teorema de Representació per relacions reflexives i T-transitives (preordres difusos). De fet, el Teorema de Representació de T-indistingibilitats és un corol.lari d'aquest fent servir que tota T-indistingibilitat E es pot obtenir per simetrització d'un preordre R (i.e. $E(x,y) = \text{Min}(R(x,y), R(y,x))$. En la propera secció es generalitzarà el Teorema donant un Teorema de Representació per relacions T- transitives i un altre per relacions simètriques i T-transitives. Aquestes relacions es diran **T-indistingibilitats nnr** (no necessàriament reflexives).

Si interpretem $E(x,y)$ com el grau de similitud entre x i y, aleshores $E(x,x)$ dóna **el grau de coherència** de l'element x o el seu **grau d'existència**.

L'estudi de les T-indistingibilitats nnr surgeix del **problema de reducció de clusters**.

Pel capítol anterior s'ha vist que hi ha un isomorfisme de reticles entre el reticle de relacions reflexives i simètriques d'un conjunt X i el de recubriments simètrics minimals de X que identifica les T-indistingibilitats amb les $m_{s,\varphi}$-particions ((T,S,φ) una terna de De Morgan): $\{c_x\}_{x\in X}$ és una $m_{s,\varphi}$-partició si, i només si, una T-indistingibilitat E en X tal que $c_x(y) = E(x,y)$. Per tant només en el cas en què E no és separable el cardinal de $C = \{c | c = c_x \text{ per algún } x \in X\}$ és menor que el de X. Una $m_{s,\varphi}$- partició dóna per tant, en general, tants clusters com elements de X i això és lluny de la idea intuitiva de partició.

Surgeix d'aquí el problema de reduir el nombre de clusters d'una partició. Si a partir de dos clusters c_x, c_y en generem un $c'_{\{x,y\}}$, aleshores aquest nou cluster perd coherència en un cert sentit i es pot esperar per tant que $c_{\{c,y\}}(\{x,y\})$ no sigui necessàriament 1 i la T-indistingibilitat obtinguda no sigui necessàriament reflexiva. Per exemple, si considerem el conjunt $X = \{$gat (c), gos (d), ocell (b) $\}$ i $\{c_x\}_{x\in X}$ una $m_{s,\varphi}$-partició amb la T-indistinguibilitat associada E, té sentit $E(x,x) = 1$ pensant $E(x,y)$ com el grau de similitud entre x i y. Si identifiquem c i d, s'obtindrà una certa partició $(\overline{c}_x)_{x\in\overline{X}}$ en $\overline{X} = \{\{c,d\},\{b\}\}$. Es pot esperar que $c_{\{c,d\}}(\{c,d\})$ sigui diferent de 1. Per tant el problema de reducció de clusters porta a l'estudi de T-indistingibilitats nnr.

D'altra banda en [Jacas, J. (1987)] es defineixen isomorfismes entre T-indistingibilitats que donen lloc a morfismes de dos tipus: Un equivalent als morfismes del capítol anterior i l'altre fent ús de les T- indistingibilitats nnr.

D'altra banda, relacionant T-indistingibilitats nnr amb arbres indexats, $E(x,x)$ es pot identificar amb el **grau d'existència** de x.

5.2. Teorema de Representació

Anem a donar teoremes de representació per relacions T-transitives (T una t- norma) i T-indistingibilitats nnr. Dualment es tindrà teoremes de representació per relacions S-transitives (S una t-conorma) i per relacions simètriques i S-transitives (una generalització de S-mètriques).

En [Valverde, L. (1985)] es dóna el següent Teorema de representació per preordres difusos (i.e. relacions reflexives i T-transitives).

Teorema 5.2.1. (Valverde). Sigui R una relació difusa en un conjunt X i T una t-norma: R és un preordre en X si, i només si, existeix una família $(h_i)_{i\in I}$ de conjunts difusos de X tals que

$$R(x,y) = \operatorname*{Inf}_{i\in I} \hat{T}(h_i(x)|h_i(y)).$$

Aquest Teorema es pot generalitzar de la següent manera:

Definició 5.2.2. Sigui R una relació difusa en un conjunt X i T una t-norma. R és **T-transitiva** si, i només si,

5.2.2.1. $T(R(x,y), R(y,z)) \leq R(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$.

5.2.2.2. $R(x,y) \leq \text{Min}(R(x,x), R(y,y)) \quad \forall x,y \in X$.

En els casos en què R és reflexiva o T =Min, 5.2.2.1. implica 5.2.2.2.

Teorema 5.2.3. Sigui R una relació difusa en un conjunt X i T una t-norma. Sigui $d \in [0,1]^X$ la diagonal de R (i.e.: $d(x) = R(x,x)$). R és una relació T-transitiva si, i només si, existeix una família $(h_i)_{i\in I}$ de conjunts difusos de X tal que

$$R(x,y) = \text{Min}(d(x), d(y), \operatorname*{Inf}_{i\in I} \hat{T}(h_i(x)|h_j(y))).$$

Demostració. $\Rightarrow$) Sigui R' el preordre definit a partir de R de manera natural:

$$R'(x,y) = \begin{cases} R(x,y), & \text{si } x \neq y \\ 1, & \text{si } x = y \end{cases}$$

R' està generada per una certa família $(h_i)_{i\in I}$ pel Teorema 5.2.1. Aquesta família genera R.

$\Leftarrow$) Sigui $(h_i)_{i\in I}$ una família de conjunts difusos. Aquesta família genera un preordre R' pel Teorema 5.2.1.

Per tant $R(x,y)$ =Min $(d(x), d(y), \operatorname*{Inf}_{i\in I} \hat{T}(h_i(x)|h_i(y)))$ és una relació T-transitiva amb diagonal d. ■

A partir del Teorema de Representació de T-indistingibilitats es pot demostrar de forma anàlega el següent Teorema:

Teorema 5.2.4 de Representació de T-indistingibilitats nnr. Sigui E una relació difusa en un conjunt X i T una t-norma. E és una T- indistingibilitat nnr amb diagonal $d \in [0,1]^X$ si, i només si, existeix una família $(h_i)_{i\in I}$ de conjunts difusos de X tal que

$$E(x,y) = \mathrm{Min}(d(x), d(y), \operatorname*{Inf}_{i\in I}(\hat{T}(\mathrm{Max}(h_i(x), h_i(y)) | \mathrm{Min}(h_i(x), h_i(y)))).$$

El teorema anterior fa operativa la definició de T-indistingibilitats nnr perque dóna un mètode efectiu per calcular-les. D'altra banda els Teoremes anteriors posen de manifest que en els Teoremes de Representació de Valverde intervé únicament la T-transitivitat de forma essencial.

Si en una T-indistingibilitat nnr interpretem $E(x,y)$ com el grau de similitud entre x i y, la condició 5.2.2.2. dóna coherència a aquesta interpretació.

Dualment es pot considerar S-mètriques amb diagonal no necessàriament nula (nnn), que correspondran a mesurar distàncies entre punts grollers.

Teorema 5.2.5 de Representació de S-mètriques nnn. Sigui m una relació difusa en un conjunt X i S una t-conorma. m és una S-mètrica nnn amb diagonal $d \in [0,1]^X$ si, i només si, existeix una família $(h_i)_{i\in I}$ de conjunts difusos de X tal que

$$m(x,y) = \mathrm{Max}\left(d(x), d(y), \operatorname*{Sup}_{i\in I} \hat{S}\left(\mathrm{Min}(h_i(x), h_i(y)) | \mathrm{Max}(h_i(x), h_i(y))\right)\right).$$

De la mateixa manera que una T-indistingibilitat nnr E té associada de forma natural una T-indistingibilitat E' a cada S-mètrica nnn m se li associa una S-mètrica m'.

Propietats de E' i m' es traslladen a propietats de E i m. Per exemple té sentit parlar de la dimensió i de bases de E i m pels Teoremes 5.2.4. i 5.2.5.

dim E = dim E' i $(h_i)_{i \in I}$ és una base de E si i només si, $(h_i)_{i \in I}$ és una base de E'. El mateix per S-mètriques.

D'altra banda, en el cas arquimedià, E i m determinen relacions de Betweenness que coincideixen amb les de E' i m'.

Els resultats del capítol 3 valen doncs per T-indistingibilitats nnr i S-mètriques nnn.

5.3. Morfismes. Reducció del nombre de clusters.

En aquesta secció s'introduiran morfismes de T-indistingibilitats nnr que permetran abordar el problema de reducció del nombre de clusters associats a una T-indistingibilitat.

En primer lloc es donarà la noció de homometria [Trillas, E., Alsina, C. (1978)] i es veurà que no és adequada per a reduir el nombre de clusters:

Definició 5.3.1. Siguin X, Y dos conjunts, T una t-norma i E, F T- indistingibilitats en X, Y respectivament. Una **homometria** f entre (X, E) i (Y, F) és una aplicació $f : X \to Y$ tal que $F(f(x), f(y)) = E(x, y) \, \forall x, y \in X$.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "E"] \arrow[d, "f \times f"] & & {[0,1]} \\ Y \times Y \arrow[urr, "F"'] & & \end{tikzcd}$$

Lema 5.3.2. Si $f : (X, E) \to (Y, F)$ és una homometria i F és una T- indistingibilitat, aleshores E és una T-indistingibilitat.

Demostració. $E(x, x) = F(f(x), f(x)) = 1$. ■

Lema 5.3.3. Donada $f : X \to Y$ i F una T-indistingibilitat nnr en Y, es pot trobar una única T-indistingibilitat nnr E en X tal que $f : (X, E) \to (Y, F)$ sigui una homometria.

Demostració. Es defineix $E(x, y) = F(f(x), f(y))$. ∎

Per tant, si $\mathcal{M}_X$ és el conjunt de T-indistingibilitats nnr en X, $f : X \to Y$ defineix una aplicació $f^* : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$:

$$f^*F(x, y) = F(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in X,$$

que pel lema 5.3.2. restringeix a $f^* : \mathcal{M}'_Y \to \mathcal{M}'_X$ on $\mathcal{M}'_X$ és el conjunt de T-indistingibilitats en X. ∎

Lema 5.3.4. Donats tres conjunts X, Y, Z i aplicacions $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ es cumpleix $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Demostració. Trivial. ∎

El problema que interessa, però, en aquesta secció és el recíproc: Donada E T-indistingibilitat nnr en X i $f : X \to Y$ trobar F T-indistingibilitat en Y tal que $f : (X, E) \to (Y, F)$ sigui una homometria:

Definició 5.3.5. Donada $f : X \to Y$ i una T-indistingibilitat nnr E en X direm que (f, E) són **homomètricament compatibles (h- compatibles)** si, i només si, existeix una T-indistingibilitat nnr F en Y tal que $f : (X, E) \to (Y, F)$ és una homometria.

Proposició 5.3.6. (f, E) són h-compatibles si, i només si,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow E(x, z) = E(y, z) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Demostració. $\Rightarrow$) Siguin (f, E) h-compatibles. Siguin $x, y \in X$ amb $f(x) = f(y)$.

$$F(f(x), f(z))) = F(f(y), f(z)) = E(x, z) = E(y, z).$$

$\Leftarrow$) Definim

$$F_{|f(X)}\colon f(X) \times f(X) \to [0,1]$$

$$(a, b) \to F_{|f(X)}(a, b)$$

$F_{|f(X)}(a, b) = E(x, y)$ amb $f(x) = a,\ f(y) = b$.

F està ben definida perque si $f(x) = f(x') = a,\ f(y) = f(y') = b$, aleshores, $E(x, y) = E(x', y) = E(x', y')$.

Si F és exhaustiva, $F_{|f(X)}$ està unívocament determinada per (f, E). En cas contrari s'exten a tot Y de forma arbitrària. ■

La proposició mostra que les homometries no són adequades per reduir el nombre de clusters.

La noció de morfisme de T-indistingibilitats nnr dóna una posible solució al problema:

Definició 5.3.7. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre X i Y i E, F T-indistingibilitats nnr en X, Y respectivament.

$f : (X, E) \to (Y, F)$ és un **morfisme** de T-indistingibilitats nnr si, i només si,

$$F(a, b) = \text{Inf}\{E(x, y) | f(x) = a, f(y) = b\} \quad \forall a, b \in f(X).$$

Definició 5.3.8. Donada una aplicació $f : X \to Y$ i una T- indistingibilitat E en X, es dirà que (f, E) són **compatibles** si, i només si, la relació difusa f_*E en Y definida per

$$f_*E(a, b) = \text{Inf}\{E(x, y) | f(x) = a, f(y) = b\} \quad \forall a, b \in f(X)$$

és una T-indistingibilitat nnr en $f(X)$.

f_*E és trivialment simètrica i també és T-transitiva:

$$T(f_*E(a,b), f_*E(b,c)) \leq f_*E(a,c) \quad \forall a,b,c \in f(X).$$

Donats x, y, z amb $f(x) = a,\ f(y) = b,\ f(z) = c$,

$$T(f_*E(a,b), f_*E(b,c)) \leq T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$$

i aquesta desigualtat val $\forall x, z \in X$ amb $f(x) = a,\ f(z) = c$. Per tant per $f_*E(a,c)$.

f_*E en general, però, no cumplirà la condició de coherència $f_*E(a,b) \leq f_*E(a,a)$ $\forall a,b \in f(X)$.

Exemple 5.3.9.

$$f : X = \{x,y,z\} \rightarrow Y = \{p,q\}$$

$$x \longrightarrow p$$

$$y \longrightarrow p$$

$$z \longrightarrow q$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 1 \end{pmatrix} \qquad f_*E = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}$$

f_*E no cumpleix la condició de coherència.

Anem a donar una condició necessària i suficient perque (f, E) siguin compatibles.

Proposició 5.3.10. Donada $f : X \rightarrow Y$ i E una T-indistingibilitat nnr en X, (f, E) són compatibles sí, i només, si, $f(x) = f(y) \Rightarrow f(z) = f(x) \quad \forall z \in X$ tal que Min $(E(x,z), E(y,z)) > E(x,y)$.

Demostració. Standard. ■

Lema 5.3.11. Siguin X, Y, Z tres conjunts, E una T-indistingibilitat nnr en X i f, g aplicacions $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ compatibles amb E i f_*E respectivament. Aleshores

$$(g \circ f)_*E = g_*(f_*E).$$

Demostració. Standard. ∎

Tota aplicació $f : X \to Y$ defineix una relació d'equivalència $\sim$ en X: $x \sim y$ si, i només si, $f(x) = f(y)$. Si f és exhaustiva es pot identificar $X/\sim$ amb Y.

Definició 5.3.12. Sigui $\sim$ una relació d'equivalència en un conjunt X, $X/\sim$ el conjunt de les classes i $\pi : X \to X/\sim$ la projecció. Sigui E una T-indistingibilitat nnn en X. $(\sim, E)$ són **compatibles** si, i només si, (π, E) són compatibles.

Això vol dir que si $x \sim y$ i $E(x,y) < E(x,z)$, aleshores $x \sim z$. Aquesta condició sembla adequada, perque si identifiquem dos elements x, y amb grau de similitud $E(x,y)$ és natural que amb x i y s'hi identifiqui també els elements amb grau de similitud amb x o y més gran que $E(x,y)$.

Exemple 5.3.13. $\pi : X = \{a,b,c,d\} \to X/\sim = \{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,7 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 & 0,8 & 0,7 \\ 0,7 & 0,2 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix} \qquad \pi_*E = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$(\sim, E)$ són compatibles.

És clar que el vist fins ara en aquesta secció es pot dualitzar a S-mètriques.

D'altra banda tota T-indistingibilitat nnr en X, fixada una negació forta φ, té associat un arbre indexat on a partir de cert nivell les relacions ja no són reflexives i per tant només recubreixen part de X.

Exemple 5.3.14. Sigui E la semblança nnr en $X = \{a, b, c, d\}$ per la següent matriu i $\varphi = 1 - j$.

$$E = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,4 & 0,3 \\ 0,8 & 0,8 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,5 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$$

L'arbre corresponent a $\varphi \circ E$ és

$$c(\lambda) = \begin{cases} \{a, b, c, d\}, & \text{si } \lambda \geq 0,7 \\ \{a, b, c\}\{b, c, d\}, & \text{si } 0,6 \leq \lambda < 0,7 \\ \{a, b\}\{b, c, d\}, & \text{si } 0,5 \leq \lambda \leq 0,6 \\ \{a, b\}\{c, d\}, & \text{si } 0,2 \leq \lambda \leq 0,5 \\ \{a\}\{c, d\}, & \text{si } 0,1 \leq \lambda \leq 0,2 \\ \{c\}\{d\}, & \text{si } \lambda < 0,1 \end{cases}$$

A partir de $\lambda = \varphi(\alpha) < 0,2$ (i.e.: a partir de $\alpha > E(b,b)$) es té recubriments de subconjunts de $X - \{b\}$ i a partir de $\lambda < 0,1$ (i.e.: a partir de $\alpha > E(a,a)$) es té recubriments de subconjunts de $X - \{a, b\}$. Per tant té sentit denominar **grau d'existència** d'un element x el vector $E(x, x)$.