

LIBRERIA T GAR

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
PROGRAMA DE DOCTORAT DE MATEMÀTICA DISCRETA I TELEMÀTICA  
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I TELEMÀTICA

---

UPC  
BIBLIOTECA RECTOR GABRIEL FERRATÉ  
Campus Nord

CONTRIBUCIÓ A LA TEORIA ESPECTRAL DE GRAFS  
PROBLEMES MÈTRICS I DISTÀNCIA-REGULARITAT

Aquesta tesi ha estat enregistrada  
amb el núm. 726

TESI

presentada per Ernest Garriga Valle  
per optar a la titulació de Doctor en Matemàtiques

Directors de tesi

Dr. José Luis Andrés Yebra      Dr. Miquel Àngel Fiol Mora

Barcelona, 1997









*Als meus pares,  
Enric i Dolores.*

*'The postman always rings twice'*



## Pròleg i agraïments

Aquesta tesi és conseqüència de feina realitzada pels professors Miquel Àngel Fiol, José Luis Andrés Yebra i el doctorant durant el trienni 94/96. El seu punt de partida va ser un resultat de Delorme i Solé sobre fitació del diàmetre d'un graf via els seus autovalors, que va motivar l'autor a passar d'un tractament continu a un de discret, en harmonia amb la naturalesa del problema. Els primers resultats van ser exposats al febrer del 94 en el Seminari de Combinatòria i Teoria de Grafs, que es realitza amb regularitat en el Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica. Els Drs. Fiol i Yebra van interessar-se en les possibilitats del mètode, iniciant una labor conjunta amb l'autor. La seva experiència i qualitats van donar empenta a la feina, obrint camins que el doctorant, novici en teoria de grafs, és improbable hagués recorregut sol. Fruit d'aquesta labor són nou articles, tres d'ells publicats, tres acceptats i tres més sotmesos, en els que es desenvolupen resultats mètrics, descrits per inequacions, i caracteritzacions estructurals, quan les inequacions passen a ser igualtats. En un treball conjunt no té sentit que l'autor pretengui delimitar els seus possibles mèrits. Només puc respondre amb la meva dedicació al tema i descansar en el criteri dels Drs. Fiol i Yebra, directors d'aquesta tesi, respecte que el treball realitzat pel doctorant compleix els requisits per ser presentat a la consideració del tribunal.

És costum extesa que un autor dediqui unes línies de cortesia a les persones i institucions que han donat suport al seu treball. En el meu cas, potser per la llarga vida personal i professional, em permeto prescindir de tota mena de convencionalisme en aquest tema. Donat que sóc de natural pessimista i em moc, més bé m'estic quiet, voltat de dubtes, dec molt a les persones que aportant-me positivitat m'han empès a l'acció. Per això em sento tan agraït a Miguel Carlos Muñoz, que del seu ànim va fer el meu per retornar i seguir a la UPC. La capacitat i qualitat professional dels meus Directors de Tesi són paleses, de manera que la meva lloança a aquest respecte, a més de no correspondre'm, seria superflua. És un honor per a mi haver treballat i publicat amb ells. El seu tracte cordial, l'afecte i la generositat demostrada em fan deutor seu. No ho oblidaré.

Al llarg dels anys que he passat en el Departament he tingut la sort que bastants dels meus companys han esdevingut amics. El temps pot liquidar neurones, afegir dioptries, úlceres duodenals o prostatitis al currículum, però invariablement et fa més sentimental i sensible a l'afecte. Especialment en aquests darrers anys, molts de vosaltres heu hagut de suportar les meves tristeses. No he rebut una paraula de rebuig i en la vostra paciència he trobat consol. Fa molt em vaig adonar que l'única persona amb la que cal lluitar és un mateix. Per això no sento altra enemistat que les meves limitacions. En tot cas vull disculpar-me si en aquest temps he ofès algú.

Mencionar algunes de les persones que estimes suposa no mencionar-ne d'altres, de manera que no ho faré. Us agraeixo quan heu vingut a veure'm, quan us heu interessat per la meva feina o m'heu parlat de la vostra, quan m'heu donat alegria sense rebre'n a canvi, quan m'heu tret del despatx per anar a dinar, el no haver mostrat impaciència davant la meva ruqueria informàtica. Gràcies.

Ben mirat sóc una persona afortunada.



# Índex

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>0</b> | <b>Introducció i resum de continguts</b>                                 | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>Espectre d'un graf i espectre local d'un conjunt</b>                  | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>Autovalors i propietats mètriques</b>                                 | <b>13</b> |
| 2.1      | Cardinals d'espectres locals i distàncies . . . . .                      | 13        |
| 2.2      | Autovalors locals i distàncies . . . . .                                 | 14        |
| <b>3</b> | <b>Polinomis alternants</b>  | <b>19</b> |
| 3.1      | Introducció . . . . .  | 19        |
| 3.2      | Sobre les seves arrels i caracteritzacions . . . . .                     | 22        |
| 3.3      | Algunes propietats i cassos particulars . . . . .                        | 25        |
| 3.4      | Sobre el càlcul de polinomis alternants . . . . .                        | 27        |
| <b>4</b> | <b>Optimització de resultats mètrics. Aplicacions</b>                    | <b>33</b> |
| 4.1      | Diàmetre i autovalors en grafs bipartits . . . . .                       | 34        |
| 4.2      | Sobre el pes d'un conjunt i la seva excentricitat . . . . .              | 35        |
| 4.3      | Sobre pesos i cardinals de conjunts i els seus $k$ -exterioris . . . . . | 36        |
| 4.4      | Sobre el $k$ -nombre d'independència . . . . .                           | 37        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.5      | Sobre el $(r, s)$ -diàmetre . . . . .  | 39         |
| 4.6      | Aplicació a la vèrtex connectivitat . . . . .                                  | 40         |
| <b>5</b> | <b>Conjunts i grafs <math>P</math>-frontera</b>                                | <b>43</b>  |
| 5.1      | Conjunts $P_k$ -frontera . . . . .   | 43         |
| 5.2      | Grafs $P_k$ -frontera . . . . .  | 49         |
| 5.3      | Conjugació de vèrtexs en grafs $P_k$ -frontera . . . . .                       | 52         |
| 5.4      | Grafs $P_k$ -frontera de diàmetre $k + 1$ . . . . .                            | 57         |
| 5.5      | Grafs $P$ -frontera extremals . . . . .  | 61         |
| 5.6      | El polinomi alternant en grafs $P$ -frontera extremals . . . . .               | 66         |
| 5.7      | Grafs $P$ -frontera de diàmetre petit . . . . .                                | 70         |
| 5.7.1    | Els grafs $\tilde{Q}_k \times K_2^s$ . . . . .                                 | 73         |
| 5.7.2    | Grafs $O_k$ cargolats . . . . .  | 74         |
| <b>6</b> | <b>Polinomis ortogonals de variable discreta</b>                               | <b>83</b>  |
| 6.1      | De recurrència de polinomis a producte escalar discret . . . . .               | 83         |
| 6.2      | De producte escalar discret al sistema ortogonal canònic . . . . .             | 88         |
| 6.3      | Relacions entre $g$ i $p_d$ per a una malla donada . . . . .                   | 90         |
| 6.4      | Sistema ortogonal canònic i semblances sobre una malla . . . . .               | 93         |
| 6.5      | Polinomis ortogonals en anells quocient de polinomis . . . . .                 | 96         |
| 6.6      | Sistema maximal de polinomis associat a $(\mathcal{M}, g)$ . . . . .           | 98         |
| 6.7      | Sobre el sistema de polinomis $p_k^\sigma = p_0 + p_1 + \dots + p_k$ . . . . . | 99         |
| 6.8      | Sistema canònic associat al polinomi alternant d'una malla . . . . .           | 102        |
| <b>7</b> | <b>Espectre local i propietats mètriques</b>                                   | <b>105</b> |
| 7.1      | Distància entre conjunts i espectre local . . . . .                            | 106        |

## ÍNDIX

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 7.2       | Polinomis d'adjacència d'un conjunt de vèrtexs . . . . .                     | 107        |
| <b>8</b>  | <b>Conjunts Q-frontera</b>   | <b>111</b> |
| <b>9</b>  | <b>Distància-regularitat i pseudo-distància-regularitat</b>                  | <b>117</b> |
| 9.1       | Extensió del concepte de partició equitativa . . . . .                       | 117        |
| 9.2       | Generalitats sobre grafs distància-regulars i el seus espectres . . . . .    | 120        |
| 9.3       | Extensions de la distància-regularitat . . . . .                             | 124        |
| 9.4       | Pseudo-distància-regularitat local . . . . .                                 | 125        |
| 9.5       | Una caracterització de la distància-regularitat . . . . .                    | 130        |
| <b>10</b> | <b>Aplicacions de la caracterització espectral</b>                           | <b>133</b> |
| 10.1      | Grafs $P$ -frontera i distància-regularitat . . . . .                        | 133        |
| 10.2      | Grafs distància-regulars $r$ -antipodals . . . . .                           | 134        |
| 10.3      | Conjunts $P$ -frontera i pseudo-distància-regularitat . . . . .              | 137        |
| 10.3.1    | Sobre grafs amb pesos a les arestes . . . . .                                | 137        |
| 10.3.2    | Grafs $C$ -local pseudo-fortament regulars amb pesos a les arestes . . . . . | 141        |
| 10.3.3    | Una caracterització dels conjunts $P$ -frontera . . . . .                    | 143        |
| <b>11</b> | <b>Conclusions i perspectives</b>  | <b>147</b> |
|           | <b>Bibliografia</b>  | <b>149</b> |





## Capítol 0

# Introducció i resum de continguts

El llenguatge de grafs és una forma de modelar un conjunt, els elements del qual presenten entre si alguna mena de relació. Aquesta ambigüitat fa que una amplia quantitat de situacions puguin ser descrites i tractades, amb més o menys èxit, usant recursos que genera la teoria de grafs. Com és natural aquests recursos augmenten quan la generalitat que s'admet en la relació és menor. En primer lloc el conjunt pot ser finit o no. La relació entre elements pot o no ser dirigida, és a dir, establerta entre parelles o parelles ordenades d'elements. La relació pot ser en termes digitals 'sí o no', o analògica quantificable per un nombre. Cadascuna d'aquestes opcions condueix a camps en els que es desenvolupen mètodes específics, que conviuen amb d'altres com combinatoris, algebraics, analítics, ... Aquest aspecte de punt de concurrència, en forma similar a com ho és la teoria de nombres, fa que problemes portats a llenguatge de grafs siguin tractables amb mètodes fora del seu primer entorn.

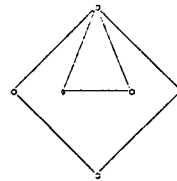
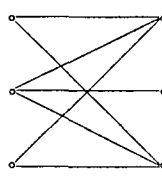
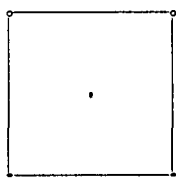
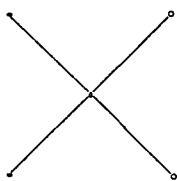
El fet que un graf sigui finit i no dirigit, de manera natural ens encamina a descriure'l mitjançant una matriu simètrica, indexada pels elements del conjunt, que contingui la informació corresponent a cada parell d'elements. Els invariants de la matriu, en particular l'espectre, queden associats al graf independentment de l'ordenació dels elements del conjunt. Excepte esment en contra, suposarem que la relació entre parelles d'elements és qualitativa, podent-se descriure amb *sí* o *no* per a cada parella. Els elements del conjunt s'anomenen *vèrtexs* del graf i *arestes* del graf les parelles de vèrtexs que sí estan en relació. Un *autollaç* és una arista on els dos vèrtexs són iguals. Usarem la notació  $\Gamma = (V, E)$  per indicar un graf, on  $V$  serà el conjunt de vèrtexs i  $E$  el d'arestes. Dos vèrtexs es diuen *adjacents* quan determinen una arista i el *grau* d'un vèrtex és el nombre de vèrtexs que l'hi són adjacents. Un graf es diu *regular de grau  $k$*  quan tots els seus vèrtexs tenen grau  $k$ . Un graf es diu *bipartit* quan  $V$  és unió disjunta de subconjunts  $V_1$  i  $V_2$ , *parts estables*, tals que qualssevol dos vèrtexs en la mateixa part estable no són adjacents. Una bijecció entre els conjunts de vèrtexs de dos grafs, resp. d'un mateix graf, tal que respecti les adjacències se l'anomena un *isomorfisme* entre els grafs, resp. /it automorfisme del graf. Donats dos vèrtexs  $u, v$ , un *camí* entre ells serà una col·lecció d'arestes que els enllacin i la *longitud del camí* serà el nombre d'arestes usades. Si tota parella de vèrtexs és enllaçable el graf s'anomena *connex* i el sentit de *component connexa* del graf és el natural. La *distància*,  $\partial(u, v)$ , entre dos vèrtexs d'una mateixa component connexa, és la mínima longitud dels camins entre ells. Donat un vèrtex  $u$ , en un graf connex. la seva *excentricitat*,  $\varepsilon(u)$ , és la màxima de les distàncies de  $u$  als demés vèrtexs del graf. S'anomena

diàmetre d'un graf connex,  $D(\Gamma)$ , a la màxima de les excentricitats dels seus vèrtexs. Agruparem les qüestions referents a distància, excentricitat i diàmetre, sota l'expressió *propietats mètriques* del graf. Per a cada ordenació dels vèrtexs del graf es té una identificació natural de l'espai de funcions reals sobre  $V$  amb  $\mathbb{R}^{|V|}$ , donada per  $f \mapsto (f(u_1), \dots, f(u_{|V|}))$ . En particular cada vèrtex, a través de la seva funció característica, s'associa, amb un vector,  $u \mapsto e_u$ , de la base canònica de  $\mathbb{R}^{|V|}$ .

La representació d'un graf per una matriu simètrica té amplis marges de llibertat, en tant permeti recuperar les relacions entre vèrtexs. La utilitat d'una representació prové de que propietats del graf puguin ser descrites a través de recursos algebraics sobre la matriu associada. La nostra atenció es centrarà sobre l'espectre de la matriu, conjunt d'autovalors i multiplicitats respectives, que resumirem en la forma

$$\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda_0^{m_0}, \lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_d^{m_d}\}, \quad (0.1)$$

on  $m_i$  indica la multiplicitat de  $\lambda_i$ . L'indexat es realitza de forma que la successió d'autovalors sigui decreixent. Dues formes típiques de representació són les següents. La *matriu d'adjacència*  $A = (a_{uv})_{u,v \in V}$ , definida per  $a_{uv} = 1$  quan  $u, v$  són adjacents i 0 en altre cas. La *matriu laplaciana*, definida  $L = D - A$ , on  $D$  és la matriu diagonal d'elements el grau de cada vèrtex. La matriu d'adjacència té al seu favor, respecte qualsevol altra representació, el fet que  $A^k$  calcula el nombre de camins de longitud  $k$  entre cada parella de vèrtexs. La matriu laplaciana té sempre l'autovalor 0 i un autovector associat és  $j = (1, \dots, 1)$ . En general, són diferents les inferències que, a partir de l'espectre d'adjacència o de l'espectre laplaciana, poden fer-se respecte del graf. La posició a l'apropar-se a l'estudi de teoria espectral de grafs, ha de contemplar que, per un i altre espectre, l'aplicació entre grafs i conjunt de símbols de la forma (0.1) donada per  $\Gamma \mapsto \text{Spec}(\Gamma)$  no és exhaustiva ni injectiva. No es coneix una descripció del conjunt imatge, però si ventalls de condicions necessàries, *condicions de realització*, per pertanyer-hi. L'existència de grafs no isomorfs coespectrals va ser establerta, mitjançant exemple, a principis dels anys 50, trencant la conjectura de que l'espectre del graf el determinava completament. Posteriorment s'han establert resultats que limiten el sentit excepcional de la coespectralitat. Per exemple, un resultat de Hoffman, veure Schwenk i Wilson[48], estableix l'existència, per a qualsevol  $k$  natural, de  $k$  grafs coespectrals dins la classe de grafs regulars i connexos. Grafs coespectrals estableixen per negació propietats no deduïbles de l'espectre. El teorema de Perron-Frobenius, veure per exemple Godsil [31], permet d'establir que el caràcter bipartit d'un graf es descriu, en termes de l'espectre de  $A$ , pel fet que  $\lambda_d = -\lambda_0$ . En canvi l'espectre de  $L$  no decideix respecte del caràcter bipartit d'un graf. En contrapartida l'espectre laplaciana informa, a través de la multiplicitat de l'autovalor 0, del nombre de components connexes del graf, informació que no pot deduir-se, en general, de l'espectre de la matriu d'adjacència. Dos exemples que il·lustren aquests fets, són



Espectre d'adjacència comú:  $\{2^1, 0^3, -2^1\}$ .

Espectre laplaciana comú.

on la parella de grafs de l'esquerra són, a més, els grafs coespectrals amb menor nombre de vèrtexs. El segon exemple està extret de Van Dam [13]. Altres fets, com per exemple la regularitat del graf, pot ser decidida indistintament sobre els dos espectres. Un resum de relacions de l'espectre d'adjacència amb

l'estructura del graf pot veure's en Schwenk i Wilson [48]. Una visió extensa i detallada es troba en Cvetković, Doob i Sachs [10] i Cvetković, Doob, Gutman i Torĝasev [11] que conté una extensió de la teoria per a grafs infinits i aplicacions a química orgànica. Respecte de la matriu laplaciana, pot acudir-se a Mohar [41] o també al mateix [10].

En aquest treball dins la qualificació de graf entendrem, per omissió, graf connex sense autollaços. La representació matricial usada, si no s'adverteix expressament, és per la matriu d'adjacència, l'espectre de la qual anomenarem espectre del graf.

L'estudi de propietats mètriques d'un graf, extretes d'invariants de la seva matriu, el dividim en dos supostos de nivell d'informació:

(P) Coneixement dels autovalors  $\{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$ .

(Q) Coneixement de l'espectre (autovalors i multiplicitats)  $\{\lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$ .

Fem una descripció de resultats coneguts corresponents al nivell (P). Prescindint de la magnitud dels autovalors i observant només el seu nombre, grau del polinomi anulador, val la fitació

$$D(\Gamma) \leq d \tag{0.2}$$

per a qualsevol graf connex. En els darrers anys s'han obtingut diverses fitacions per al diàmetre de grafs regulars a partir del coneixement de  $|V| = n$  i alguns o tots els autovalors. Usant els dos primers autovalors, Alon i Milman [1] estableixen

$$D(\Gamma) \leq \left\lceil \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} \log_2 n} \right\rceil, \tag{0.3}$$

que Mohar [42] millora en la forma

$$D(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{2\lambda_0 - \lambda_1}{4(\lambda_0 - \lambda_1)} \ln(n-1) \right\rceil. \tag{0.4}$$

Usant  $\lambda_0$  i el segon autovalor en valor absolut  $\lambda_* = \max\{\lambda_1, -\lambda_d\}$ , Chung [6] obté

$$D(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{\ln(n-1)}{\ln(\lambda_0/\lambda_*)} \right\rceil + 1, \tag{0.5}$$

i Sarnak [46], Chung, Faber i Manteuffel [7]:

$$D(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{\cosh^{-1}(n-1)}{\cosh^{-1}(\lambda_0/\lambda_*)} \right\rceil + 1. \tag{0.6}$$

Amb  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_d$ , Van Dam i Hammers [15] usant el mètode d'*'interlacing'* (Haemers [34]), estableixen

$$D(\Gamma) < \frac{\ln 2(n-1)}{\ln \frac{\sqrt{\lambda_0 - \lambda_d} + \sqrt{\lambda_0 - \lambda_1}}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda_d} - \sqrt{\lambda_0 - \lambda_1}}} + 1. \tag{0.7}$$

Usant tots els autovalors, Delorme i Solé [17] obtenen

$$\frac{\lambda_0^{k-1}(\lambda_0 + t)}{n} > |\lambda_i|^{k-1}|\lambda_i + t| \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (i = 1, \dots, d) \quad \text{per algun } t > 0 \implies D(\Gamma) \leq k. \quad (0.8)$$

En general aquests resultats, estableixen condicions suficients per a que un polinomi  $p \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}_k[x]$  compleixi  $(p(A))_{uv} \neq 0$ , per a tots  $u, v \in V$ , el que garanteix  $D(\Gamma) \leq k$ . Pot donar-se la presentació unificada

$$p(\lambda) > (|V| - 1)\|p\|_\infty \implies D(\Gamma) \leq k \quad \text{on} \quad \|p\|_\infty = \max_{l=1, \dots, d} |p(\lambda_l)|. \quad (0.9)$$

L'àmbit  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}_k[x]$  en que es considera  $p$  és variable. Chung [6] considera  $p = x^k$ , Delorme i Sole [17] generalitzen prenent  $p = x^k + tx^{k-1}$ , que té l'avantatge de poder-se aplicar a grafs bipartits biregulars (la funció grau és constant a cada part estable). Una altra línia passa per usar  $T_k$ , polinomi de Chebyshev traslladat a l'interval  $[\lambda_d, \lambda_1]$ . Llavors  $T_k(\lambda)$  és màxim prescindint dels valors concrets de la resta d'autovalors en  $[\lambda_d, \lambda_1]$ . Aquesta tècnica és usada per Sarnak [46], Chung, Faber i Manteuffel [7] i Chung, Grigor'yan i S.T. Yau [9]. Van Dam i Hammers [15] usen polinomis de Chebyshev dins el marc proporcionat per l'interlacing'.

El punt inicial del nostre treball és estendre (0.9) a grafs no necessàriament regulars i abordar-ne l'optimització sense sortir-se de l'àmbit discret natural del problema. En Fiol, Garriga i Yebra [25] s'introdueixen i estudien els polinomis alternants  $P_k$  que, per a cada grau, maximitzen  $\frac{p(\lambda)}{\|p\|_\infty}$ . Donada una malla real  $\mathcal{M} = \{x_d < \dots < x_1 < x_0\}$ , es prova l'existència i unicitat de  $P_k$  tal que  $P_k(x_0) = \sup\{p(x_0) : p \in \mathbb{R}_k[x], |p(x_l)| \leq 1, l = 1, \dots, d\}$ . El Capítol 3 està dedicat a la presentació i estudi d'aquests polinomis, que són solució de la versió discreta del problema continu del minimax, que resolen els polinomis de Chebyshev.

Prescindint de la regularitat del graf es treballa amb el vector propi  $\nu$  de mínima component la unitat associat a  $\lambda$  (teorema de Perron-Frobenius). L'esperit és 'regularitzar' el graf mitjançant la funció de pesos sobre els vèrtexs definida per  $u \mapsto \nu_u$ , única funció de pesos amb la propietat

$$\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u)} \nu_v = \lambda \quad \text{per a tot } u \in V, \quad (0.10)$$

on  $\Gamma(u)$  indica el conjunt de vèrtexs adjacents a  $u$ . La funció de pesos s'exten a tot subconjunt de  $V$  i permet injectar  $\mathcal{P}(V)$  en  $\mathbb{R}^{|V|}$  per  $C \subset V \mapsto \rho C = \sum_{u \in C} \nu_u e_u$ .

L'elaboració de resultats mètrics s'inicia des del punt de vista local. En el Capítol 1 s'introdueix la noció d'espectre local d'un conjunt (malla d'autovalors locals i multiplicitats locals) i en la Secció 2.1 es generalitza la fitació (0.2) a les corresponents a distància entre conjunts, excentricitat d'un conjunt i diàmetre del graf, vinculant-les amb els cardinals de les malles d'autovalors locals. Establert el resultat paral·lel a (0.9), en el Capítol 4 es presenta la seva optimització per l'ús dels polinomis alternants  $P_k$  associats a la malla d'autovalors locals. Per exemple, el resultat sobre el diàmetre es ara

$$P_k(\lambda) > \|\nu\|^2 - 1 \implies D(\Gamma) \leq k. \quad (0.11)$$

És natural esperar que les fitacions puguin millorar-se quan, a més dels autovalors, es disposi d'informació complementària adequada sobre l'estructura del graf. Aquest és el cas quan el graf és bipartit. Com feien Delorme i Sole [17], també nosaltres millorem (0.11) per a grafs bipartits. Les desigualtats mètriques

llegides al contrarrecíproc, proporcionen fitacions en la línia: si la funció mètrica (distància, excentricitat, diàmetre) és més gran que  $k$ , llavors el pes del(s) conjunt(s) implicat(s) és major que una expressió en termes de  $P_k(\lambda)$ . Aquesta visió es treballa en les Seccions 4.3, 4.4, 4.5 i 4.6. Les implicacions mètriques obtingudes subministren informació respecte qüestions diverses. Així, entre d'altres, es presenten resultats, en termes dels polinomis alternants, sobre:

- fitació del  $k$ -nombre d'independència, concepte introduït per Delorme i Tillich [18], que generalitza la noció usual de nombre d'independència d'un graf,
- en el context del diàmetre condicional d'un graf, noció introduïda per Balbuena, Carmona, Fàbrega i Fiol [2], s'estudia el  $(r, s)$ -diàmetre, màxima distància entre parelles de conjunts de cardinals  $r$  i  $s$ ,
- la vèrtex connectivitat d'un graf, incloent una condició suficient per a la no existència de vèrtexs de tall en termes de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_d$  i  $\|\nu\|$ .

Aquesta part del treball es correspon amb Fiol, Garriga i Yebra [29], i Fiol i Garriga [22]. El resultat sobre  $k$ -nombre d'independència de la Secció 4.4, que millora l'inclòs en [22], ha estat últimament superat, quantitativa i qualitativament, per Fiol [21]. Aquesta part, corresponent a resultats mètrics, ha estat paral·lelament desenvolupada en Rodríguez [45] (tesi), treballant amb els polinomis alternants construïts sobre l'espectre de la matriu laplaciana. Sobre exemples mostra que, com era esperable, no hi ha superioritat general en l'ús d'un o altre espectre.

Una conseqüència de l'optimització aconseguida amb els polinomis alternants, és l'obtenció de propietats estructurals pel graf quan les condicions suficients per resultats mètrics, formulades en termes de desigualtats estrictes, passen a ser igualtats. El Capítol 5 està dedicat a l'estudi d'aquesta situació 'frontera'. Inspirats en (0.11) el caràcter  $P_k$ -frontera d'un graf s'introdueix per la validesa de

$$P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1 \quad (\text{Graf } P_k\text{-frontera}). \quad (0.12)$$

Des d'el punt de vista local, el polinomi alternant  $P_k^C$  de grau  $k$  associat als autovalors locals del conjunt  $C$ , satisfà la desigualtat  $P_k^C(\lambda) \leq \Phi(C)\Phi(E_k^C)$ , on  $E_k^C$  és el conjunt de vèrtexs amb distància a  $C$  major que  $k$ , i  $\Phi$  és la funció  $\Phi(X) = \frac{\|\rho(V \setminus X)\|}{\|\rho X\|}$ , actuant sobre  $\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ . És natural, paral·lelament amb (0.12), definir un conjunt  $C$  com  $P_k$ -frontera quan

$$P_k^C(\lambda) = \Phi(C)\Phi(E_k^C) \quad (\text{Conjunt } P_k\text{-frontera}). \quad (0.13)$$

Els grafs  $P_k$ -frontera han estat introduïts i estudiats per Fiol, Garriga i Yebra en [28] i [30]. Els conjunts  $P_k$ -frontera s'introdueixen formalment en Fiol i Garriga [24], però el concepte, en el cas en que el conjunt es redueix a un vèrtex, ja és present en Fiol, Garriga i Yebra [26]. El resultat que guia molt del treball posterior, és l'equivalència de la igualtat numèrica (0.13) amb el fet que el  $k$ -entorn de  $C$  (conjunt de vèrtexs amb distància a  $C$  fins a  $k$ ) s'expressi a través de  $P_k(A)(\rho C)$ . Aquest és, juntament amb un resultat semblant corresponent al problema (Q), el nucli de la feina que aquí es presenta. El cas més interessant, respecte de conjunts  $P_k$ -frontera, és produeix quan  $k = d_C - 1$ , essent  $\{\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_{d_C}\}$  el conjunt d'autovalors locals de  $C$ . Llavors, es passa de  $C$  a l'antipodal  $\bar{C}$ , conjunt de vèrtexs a distància  $d_C$  de  $C$ , usant només la malla d'autovalors locals.

Essent  $\{\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  els autovalors d'un graf, considerarem els grafs  $P_{d-1}$ -frontera, anomenants simplement  $P$ -frontera. El seu diàmetre queda només sotmés a la limitació bàsica  $D(\Gamma) \leq d$  i el graf es diu extremal quan  $D(\Gamma) = d$ . En aquest cas, el nombre de circuits, que passen per qualsevol vèrtex que

és extrem d'un diàmetre, és constant i calculable en termes dels autovalors. Això motiva plantejar-se la possibilitat d'obtenir una forma explícita del  $(d - 1)$ -polinomi alternant  $P$ , en termes dels autovalors i del nombre de circuits de cada longitud per vèrtexs diametral. Aquesta qüestió es resol en la Secció 5.6. És natural plantejar-se si el caràcter  $P$ -frontera d'un graf imposa alguna fita inferior significativa al diàmetre. No s'ha donat resposta, però per via d'exemples s'estableix que existeixen grafs  $P$ -frontera tals que la relació  $\frac{D(\Gamma)}{d}$  és qualsevol racional en  $(\frac{1}{2}, 1]$ . Poden veure's en la Secció 5.7 dues famílies de grafs en aquesta situació.

Estudis mètrics i estructurals d'un graf suposant coneguda la totalitat de l'espectre, que hem anomenat problemes (Q), ocupen la resta del treball. Per un conjunt  $C$  els termes no nuls de la descomposició espectral, per la matriu d'adjacència, del vector unitari  $e_C = \frac{1}{\|\rho_C\|} \rho_C$ , proporcionen amb els autovalors locals  $\mu_i$ , les multiplicitats locals,  $m_C(\mu_i)$ , de  $C$  definides com les normes al quadrat de les projeccions en els subespais propis. Aquesta informació es reuneix en l'anomenat *espectre local* de  $C$ ,

$$\text{Spec}(C) = \left\{ (\lambda = \mu_0)^{m_C(\mu_0)} > \mu_1^{m_C(\mu_1)} > \dots > \mu_{d_C}^{m_C(\mu_{d_C})} \right\}.$$

Les tècniques usades descansen en la consideració del producte escalar

$$\langle p, q \rangle_C = \sum_{l=0}^{d_C} m_C(\mu_l) p(\mu_l) q(\mu_l) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}_{d_C}[x]. \quad (0.14)$$

S'introdueix la família de *polinomis d'adjacència*  $C$ -locals,  $Q_k^C$ , definida per a cada grau  $k$  com el polinomi que maximitza  $p(\lambda)$  entre els polinomis de  $\mathbb{R}_k[x]$  unitaris per la norma deduïda de (0.14). La motivació, similar a la que condueix als polinomis alternants, és l'optimització de resultats mètrics i referents als pesos de  $N_k^C$ ,  $k$ -entorn de  $C$ , i de  $E_k^C = V \setminus N_k^C$ ,  $k$ -exterior de  $C$ . Com en el cas (P) s'estableix l'equivalència entre una igualtat numèrica i una de vectorial,

$$Q_k^C(\lambda) = \frac{\|\rho N_k\|}{\|\rho C\|} \iff Q_k^C(e_C) = e_{N_k}, \quad (0.15)$$

i en cas de ser certes es diu que  $C$  és un conjunt  $Q_k$ -frontera. Com abans, el cas més interessant és el  $Q$ -frontera ( $k = d_C - 1$ ).

L'obtenció dels polinomis d'adjacència passa per la construcció d'una família ortogonal especial, el *sistema ortogonal canònic*, associada al producte escalar discret (0.14). L'interés, a banda de l'aplicació que en fem, del sistema canònic i la conveniència de no interrompre l'exposició amb l'obtenció de resultats tècnics relacionats amb productes escalars discrets, ha fet que es dediqui un capítol a aquesta qüestió. Partint de les lectures fetes en Godsil [31] i Nikiforov, Suslov i Uvarov [43], l'autor presenta, en el Capítol 6, una nova introducció a la teoria de polinomis ortogonals de variable discreta, orientada a les nostres finalitats i sobre la que després es fan les referències necessàries.

En un graf  $\Gamma = (V, E)$  i per a un conjunt  $C$  d'excentricitat espectralment màxima,  $\varepsilon_C = d$  (conjunt *extremal*), considerarem la descomposició de  $V$  en 'capes'  $C = C_0, C_1, \dots, C_d = \bar{C}$ , segons la distància a  $C$ . El caràcter  $Q$ -frontera equival a l'existència d'un polinomi  $p_d$  que transforma  $\rho C$  en  $\rho \bar{C}$ . És natural preguntar-se si també les demés capes poden obtenir-se en forma similar a partir de  $C$ . La resposta és positiva, i són els polinomis del sistema ortogonal canònic corresponent al producte escalar (0.14) els que efectuen la transformació. Llavors, l'expressió polinomial de totes les capes  $C_k$ , en termes de  $C$ , queda

caracteritzada pel compliment d'una igualtat numèrica, justament la que equival al caràcter  $Q$ -frontera,

$$\|\rho\overline{C}\|^2 = \frac{\frac{1}{m_0^2\pi_0^2}}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l\pi_l^2}} \|\rho C\|^2 \quad \text{on} \quad \pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\mu_l - \mu_i| \quad (l = 0, 1, \dots, d), \quad (0.16)$$

en termes de l'espectre local de  $C$  i la relació de pesos entre el conjunt i el seu antipodal.

El Capítol 9 s'inicia amb una generalització del concepte de partició equitativa o regular, paralelitzant el fet en Godsil[31]. Considerem la funció de pesos  $u \mapsto \nu_u$  que 'regularitza' el graf. El *nombre de pseudo-intersecció*, associat a la parella  $X_h, X_k$  de conjunts de la partició, és  $\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in X_k \cap \Gamma(u)} \nu_v$ , en el supòsit de ser independent de  $u \in X_h$ . Llavors la partició  $X_1, \dots, X_r$  s'anomena *pseudo-equitativa*. Un graf és  $C$ -local pseudo-distància regular quan la partició  $C = C_0, C_1, \dots, C_d = \overline{C}$ , determinada per la distància a  $C$ , sigui pseudo-equitativa. En la Secció 9.4 establim que un conjunt és  $Q$ -frontera si i només si la partició que per ell indueix la funció distància és pseudo-equitativa i llavors direm que el graf és  $C$ -local pseudo-distància-regular.

La distància-regularitat d'un graf és la situació més amable des del punt de vista de la partició per la distància. Considerem en un graf regular  $C = \{u\}$  i  $\{u\} = C_0, C_1, \dots, C_d$  els conjunts a distància  $0, 1, \dots, d$  de  $u$ . Suposem que aquesta partició és equitativa, és a dir que el nombre  $c_k$  de vèrtexs de  $C_{k-1}$ , el nombre  $a_k$  de vèrtexs de  $C_k$  i el nombre  $b_k$  de vèrtexs de  $C_{k+1}$ , que són adjacents a un vèrtex de  $C_k$  només depen de  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, d$ ). Aquests nombres s'acostumen a disposar en forma de matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & \dots & c_d \\ 0 & a_1 & \dots & a_d \\ b_0 & b_1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

que s'anomena *matriu d'intersecció* i el graf es diu  $u$ -local distància-regular. Finalment, el graf és *distància-regular* quan és  $u$ -local distància-regular per a tot vèrtex amb la mateixa matriu d'intersecció. Per exemple, el graf de Petersen

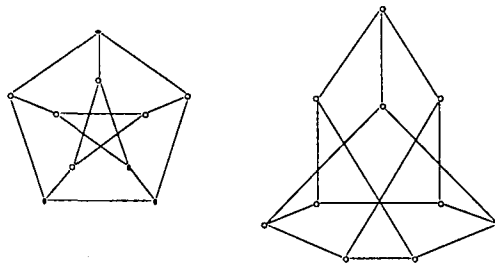


Figura 0.1: Un graf distància-regular.

és distància-regular amb matriu d'intersecció  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . En la Secció 9.2 es presenta un resum, usant

les tècniques que hem treballat, de grafs distància-regulars. La visió més àmplia publicada sobre grafs distància-regulars, amb referències exhaustives, és a Brouwer, Cohen i Neumaier [5].

L'objectiu central del Capítol 9 és establir una caracterització de la distància-regularitat per a un graf  $\Gamma$  regular amb  $d + 1$  autovalors, via l'espectre i el grau de  $\Gamma_d$ . Per a  $d = 1$  no cal la caracterització, ja que els grafs amb dos autovalors són els complets (tots els vèrtexs estan connectats) que són distància-regulars. Per a  $d = 2$  també el graf és sempre distància-regular (és fortament regular connex, veure per exemple Godsil [31]). Per el cas  $d = 3$  un resultat parcial en aquest sentit es troba en Haemers [36] i una caracterització, també per a  $d = 3$ , en Van Dam i Haemers [16] i Van Dam [14], que és coincident, per aquest valor de  $d$ , amb l'obtinguda per nosaltres. Partint de (0.16) i incloent una caracterització del caràcter espectralment regular del graf, es presenta en aquest treball el següent resultat, Fiol i Garriga [23] i [24],

Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular i  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 \equiv \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$  el seu espectre. El graf  $\Gamma$  és distància-regular si i només si

$$\Gamma_d \text{ és regular amb grau } \frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{i=0}^d \frac{1}{m_i \pi_i^2}}, \quad (0.17)$$

on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\lambda_l - \lambda_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ).

Un graf distància-regular s'anomena  $r$ -antipodal quan el graf  $\Gamma_d$  és unió de còpies del graf  $K_r$  (graf de  $r$  vèrtexs on tota parella de vèrtexs és adjacent). En un treball anterior, Fiol, Garriga i Yebra [26] estableixen una caracterització dels grafs distància-regulars 2-antipodals en llenguatge de grafs  $P$ -frontera. En forma precisa: un graf és distància-regular 2-antipodal si i només si és  $P$ -frontera amb diàmetre espectralment màxim i tot vèrtex és diametral. En el context del resultat general (0.17) és ara un cas particular.

La darrera part d'aquest treball, Capítol 10.1, està dedicada a la caracterització de dos tipus especials de grafs distància-regulars. Poden emmarcar-se en l'esquema

$\Gamma$  és distància-regular amb certa propietat suplementària  
si i només si

$\Gamma_d$  és regular i el seu grau, ordre i l'espectre de  $\Gamma$  compleixen una condició més estricta que (0.17)

En la Secció 10.2 es dona una caracterització de la distància-regularitat  $r$ -antipodal en termes de que  $\Gamma_d$  sigui regular de grau  $r - 1$  i una forma explícita de les multiplicitats en termes de  $r$  i els autovalors. Més recentment que la redacció d'aquesta part, Fiol [21] presenta una caracterització pel fet que  $\Gamma_d$  sigui unió d'un nombre de còpies de  $K_r$  expressat en termes dels autovalors i el nombre de vèrtexs.

Un graf, no necessàriament connex, es diu *fortament regular amb paràmetres*  $(n, \lambda; a, c)$  quan té  $n$  vèrtexs, és regular de grau  $\lambda$  i per a qualssevol dos vèrtexs el nombre de veïns comuns sigui  $a$  si són adjacents i  $c$  si no ho són. Per a grafs regulars connexos són equivalents els caràcters *fortament regular*, *distància-regular* de diàmetre dos i que el graf tingui tres autovalors. En una variant local d'aquest context establirem una equivalència entre que  $C$  sigui un conjunt  $P$ -frontera i el ser  $Q$ -frontera més una estructuració de tipus fortament regular local quan posem pesos convenients a les arestes del graf. Resultat que, en l'àmbit d'aquest treball, representa la confluència de les dues línies (P) i (Q) seguides. Passant a global l'estudi local, presentarem una caracterització dels grafs  $\Gamma$  distància-regulars tals que  $\Gamma_d$  és fortament regular amb paràmetres  $(n, \lambda; c, c)$ . El resultat, a més de la regularitat de  $\Gamma_d$ , demanarà l'obtenció del seu grau d'una expressió només en termes dels autovalors i l'ordre del graf. Aquest enunciat conté el cas particular  $d = 3$  establert per Van Dam [12] i també la nostra caracterització, corresponent al cas  $c = 0$ , dels grafs distància-regulars 2-antipodals.



## Capítol 1

# Espectre d'un graf i espectre local d'un conjunt

Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf. Considerem una bijecció entre  $V$  i la base canònica de  $\mathbb{R}^{|V|}$ , que mantindrem fixada al llarg del nostre estudi. Indicarem  $e_u$  el vector assignat al vèrtex  $u$ . D'aquesta forma l'espai  $l^2(V)$  de funcions reals sobre  $V$ , amb el producte escalar  $\langle f, g \rangle = \sum_{u \in V} f(u)g(u)$ , s'identifica amb l'espai euclidià  $\mathbb{R}^{|V|}$ , a través de  $f \equiv \mathbf{f} = \sum_{u \in V} f(u)e_u$ . Anomenem *funció de pesos* sobre els vèrtexs de  $\Gamma$  a tota funció  $g : V \rightarrow [0, +\infty)$ . En particular, podem identificar una funció de pesos  $g$  amb el vector de components no negatives  $\mathbf{g} = (g(u_1), \dots, g(u_{|V|})) \in \mathbb{R}^{|V|}$ . Essent  $A$  la matriu d'adjacència del graf, la identificarem amb l'endomorfisme de  $\mathbb{R}^{|V|}$  que la té per matriu en la base  $\{e_u : u \in V\}$ . Notem que  $A_{uv} = \langle Ae_u, e_v \rangle$  i que  $A$  és un endomorfisme simètric, amb el que els seus autovalors seran reals, diagonalitza i autovectors corresponents a valors propis diferents són ortogonals. Indicarem els seus autovalors  $\mathcal{M} = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  i farem referència a aquest conjunt com la *mallà d'autovalors* del graf. També serà del nostre interès la *mallà reduïda*  $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \setminus \{\lambda\} = \{\lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$ . Per a  $k = 0, 1, \dots, d$ , la multiplicitat  $m_k = m(\lambda_k)$  coincideix amb la dimensió de l'espai  $\text{Ker}(A - \lambda_k I) \equiv \text{Ker}(x - \lambda_k)$ . Resumirem la informació donada per autovalors i multiplicitats com l'*espectre del graf*, que representarem en la forma

$$\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$$

Del fet que la diagonal principal de  $A$  és nul·la (el graf no té autollaços) i del teorema de Perron-Frobenius per a matrius simètriques no negatives, Godsil [31], resulten les primeres propietats

$$m_0 = 1 \quad , \quad \sum_{k=0}^d m_k = |V| \quad , \quad \sum_{k=0}^d m_k \lambda_k = 0 \quad , \quad [\lambda_d, \lambda_0] \subset [-\lambda_0, \lambda_0],$$

i la igualtat en la darrera inclusió equival a  $\lambda_{d-k} = -\lambda_k$  i  $m_{d-k} = m_k$ . També tot vector no nul de  $\text{Ker}(x - \lambda)$  té totes les components del mateix signe. Individuarem un vector propi per  $\lambda$  triant-lo de forma que la mínima de les seves components sigui la unitat. Indicarem  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{|V|})$  aquest vector i pot veure's alternativament com la funció de pesos  $V \rightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $u \mapsto \nu_u$ .

El paper central que donem a la funció de pesos  $\nu$ , deriva de la intenció de 'regularitzar' el graf. En efecte, donada una funció de pesos  $g$ , és natural estendre la idea de grau a la funció, que anomenarem *densitat d'adjacència* respecte de  $g$ , definida  $u \mapsto \frac{1}{g(u)} \sum_{v \in \Gamma(u)} g(v)$ , per a tot  $u \in V$ . Triar  $g$  de manera que la densitat d'adjacència sigui constant,  $\xi$ , per a tot vèrtex, porta a la igualtat  $A(g(u_1), \dots, g(u_n))^T = \xi(g(u_1), \dots, g(u_n))^T$ . El requeriment de que la funció de pesos sigui positiva, obliga, pel teorema de Perron-Frobenius, a que  $\xi = \lambda$  i la funció sigui proporcional a  $\nu$ . Si imposem que el pes mínim d'un vèrtex sigui la unitat, com a condició de normalització, resulta la funció  $\nu$  com l'única que indueix densitat d'adjacència constant ( $=\lambda$ ). En el cas particular que el graf sigui regular,  $\nu = j$  i la funció de densitat d'adjacència retorna a ser el grau.

A partir de la funció de pesos  $\nu$ , podem representar  $\mathcal{P}(V)$  en  $l^2(V)$ , associant a cada  $U \subset V$  la 'funció característica' de  $U$ , indicada  $\rho U$ , definida per  $u \mapsto \nu_u$  si  $u \in U$ ,  $u \mapsto 0$  si  $u \notin U$ . Per tant,

$$\rho U = \sum_{u \in U} \nu_u e_u \quad (U \neq \emptyset) \quad , \quad \rho \emptyset = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Notem que  $\rho V = \nu$  i és també immediat

$$\|\rho U\|^2 + \|\rho(V \setminus U)\|^2 = \|\nu\|^2 \quad , \quad \|\rho U\|^2 \geq |U| \quad (1.2)$$

Per a les nostres finalitats associarem a tot conjunt  $C \in V$  no buit, el vector unitari

$$e_C = \frac{1}{\|\rho C\|} \rho C = \frac{1}{\sqrt{\sum_{v \in C} \nu_v^2}} \sum_{v \in C} \nu_v e_v \quad (1.3)$$

Aquesta notació és coherent amb l'associació  $u \mapsto e_u$ , ja que  $e_{\{u\}} = e_u$ . També,  $e_V = \frac{1}{\|\nu\|} \nu$ . Per a  $p \in \mathbb{R}[x]$  i  $f \in \mathbb{R}^{|V|}$  la notació  $pf \equiv p(x)f$  indicarà  $p(A)f \in \mathbb{R}^{|V|}$ , acció de l'endomorfisme  $p(A)$ , element de l'àlgebra generada per  $A$ , sobre  $f$ .

Fixem un conjunt de vèrtexs  $C$  no buit. Considerem la descomposició espectral  $e_C = z_0 + z_1 + \dots + z_d$ , on  $z_l \in \text{Ker}(x - \lambda_l)$ , per a  $l = 0, 1, \dots, d$ . El càlcul

$$e_C = \frac{1}{\|\rho C\|} \sum_{u \in C} \nu_u e_u = \frac{1}{\|\rho C\|} \sum_{u \in C} \nu_u \left( \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp \right) = \frac{1}{\|\rho C\|} \sum_{u \in C} \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp = \frac{\|\rho C\|}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp \quad (1.4)$$

estableix  $\|z_0\| = \frac{\|\rho C\|}{\|\nu\|}$ . Notem que sempre  $z_0 \neq \mathbf{0}$ . En el cas particular  $C = \{u\}$ , la descomposició és

$$e_u = \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp \quad , \quad \rho u = \nu_u e_u = \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp.$$

Els autovalors  $\lambda_l$  tals que  $z_l \neq \mathbf{0}$  els anomenarem *autovalors C-locales* i definirem  $\|z_l\|^2 \equiv m_C(\lambda_l)$  com la *multiplicitat C-local* de  $\lambda_l$ . Notem que  $\lambda$  és sempre autovalor C-local amb multiplicitat C-local

$$m_C(\lambda) = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \quad (1.5)$$

Resumirem aquesta informació introduint l'*espectre C-local*, definit per

$$\text{Spec}(C) = \{\mu_0^{m_C(\mu_0)} > \mu_1^{m_C(\mu_1)} > \dots > \mu_{d_C}^{m_C(\mu_{d_C})}\}. \quad (1.6)$$

Similarment, parlarem de la malles d'autovalors  $C$ -local i  $C$ -local reduïda,  $\mathcal{M}_C = \{\lambda\} \cup \mathcal{M}_C^* = \{\lambda = \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_{d_C}\}$ .

Observem que el caràcter unitari de  $e_C$  es tradueix en que les multiplicitats  $C$ -locals sumen la unitat. Sumant les multiplicitats  $u$ -locals de cada autovalor, per a cada vèrtex del graf,  $\sum_{k=1}^d \sum_{u \in V} m_u(\lambda_k) = |V| = \sum_{k=1}^d m_k$ , que comença a fer raonable la denominació de multiplicitat local. Un millor resultat en aquest mateix sentit s'estableix a continuació.

**Proposició 1.0.1** *Per a tot autovalor del graf es compleix  $m_k = \sum_{u \in V} m_u(\lambda_k)$ .*

**Demostració** Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ , considerem el polinomi  $q_k = \prod_{l=0, \dots, d, l \neq k} (x - \lambda_l)$ . Calculem la traça de la matriu  $q_k \mathbf{A}$  per dos procediments. Directament, observant els elements de la diagonal principal,

$$\text{tr}(q_k \mathbf{A}) = m_k q_k(\lambda_k).$$

D'altra banda, usant les descomposicions espectrals  $e_u = z_{u0} + z_{u1} + \dots + z_{ud}$ , tenim

$$\text{tr}(q_k \mathbf{A}) = \sum_{u \in V} \langle q_k e_u, e_u \rangle = \sum_{u \in V} \langle q_k(\lambda_k) z_{uk}, e_u \rangle = q_k(\lambda_k) \sum_{u \in V} m_u(\lambda_k)$$

Igalant les dues expressions, de ser  $q_k(\lambda_k) \neq 0$ , segueix l'enunciat.  $\square$

Associats a una malla  $\mathcal{N} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_r\}$ , introduïm els nombres  $\pi_k(\mathcal{N})$  definits per

$$\pi_k(\mathcal{N}) = \prod_{l=0, 1, \dots, r, (l \neq k)} |x_k - x_l|, \quad \text{per a } k = 0, 1, \dots, r. \quad (1.7)$$

Quan en el context estigui fora de confusió la malla usada, simplifiquem la notació a  $\pi_k \equiv \pi_k(\mathcal{N})$ . Una propietat elemental d'aquests nombres ens serà posteriorment d'utilitat.

**Lema 1.0.2** *Els nombres  $\pi_k$  ( $0 \leq k \leq r$ ), associats a la malla  $\mathcal{N} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_r\}$ , compleixen*

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{x_k^i}{\pi_k} = \delta_{ir}, \quad \text{per a } i = 0, 1, \dots, r.$$

*En particular,  $\sum_{k=0, (k \text{ parell})}^r \frac{1}{\pi_k} = \sum_{k=1, (k \text{ imparell})}^r \frac{1}{\pi_k}$ .*

**Demostració** Usem interpolació de Lagrange. Per a  $0 \leq k \leq r$ , els polinomis  $Z_k = \prod_{l=0, (l \neq k)}^r (x - x_l)$  compleixen  $Z_k(x_h) = (-1)^k \pi_k \delta_{kh}$ . Qualsevol  $p \in \mathbb{R}_r[x]$  s'expressa  $p = \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{p(x_k)}{\pi_k} Z_k$ . En particular,  $x^i = \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{x_k^i}{\pi_k} Z_k$ , per a  $i = 0, 1, \dots, r$ . Igualant els coeficients de grau  $r$  obtenim l'enunciat. El cas particular resulta de  $i = 0$ , amb el que és vàlid per a tota malla amb almenys dos elements.  $\square$

Per a un graf regular amb malla d'autovalors  $\mathcal{M}$ , és ben sabut que el *polinomi de Hoffman*  $H = \frac{|V|}{\pi_0} \prod_{\lambda_i \in \mathcal{M}^*} (x - \lambda_i)$ , introduït en Hoffman [39], compleix  $H(\mathbf{A}) = \mathbf{J}$ . La generalització natural a grafs

no necessàriament regulars

$$H = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} \prod_{\lambda_i \in \mathcal{M}^*} (x - \lambda_i), \quad (\text{polinomi de Hoffman generalitzat}), \quad (1.8)$$

complex

$$He_u = H(A)e_u = H\left(\frac{\nu_u}{\|\nu\|^2}\nu + \nu^\perp\right) = \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2}H(\lambda)\nu = \nu_u\nu \quad \text{i, per tant, } (H(A))_{uv} = \nu_u\nu_v.$$

Des d'un punt de vista local, per a un conjunt  $\emptyset \neq C \subset V$ , és útil la consideració del polinomi

$$H_C = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0(\mathcal{M}_C)\|\rho C\|^2} \prod_{\mu_i \in \mathcal{M}_C^*} (x - \mu_i), \quad (C\text{-local polinomi de Hoffman}), \quad (1.9)$$

que verifica

$$H_C(\rho C) = H_C(A)(\rho C) = H_C\left(\frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}\nu + z_1 + \dots + z_{d_C}\right) = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}H_C(\lambda)\nu = \nu.$$

**Exemple 1.0.3** El graf de la Figura 1.1 té autovalors  $\mathcal{M} = \{\sqrt{6} + 1, 1, \sqrt{2} - 1, 0, -1, 1 - \sqrt{6}, -\sqrt{2} - 1\}$  i vector  $\nu$  amb components:  $\nu_u = 4$  pel vèrtex  $u$  central,  $\nu_v = \sqrt{6} - 1$  pels vèrtexs  $v$  del quadrat i  $\nu_w = 1$  pels  $w$  terminals.

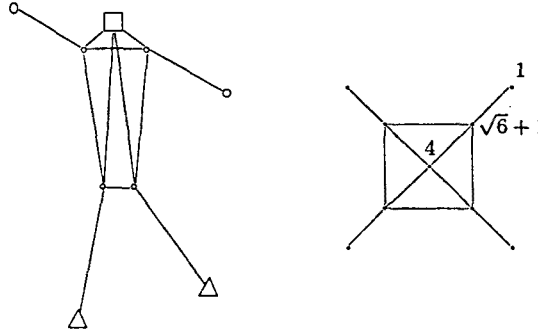


Figura 1.1: Graf abans i després de veure's 'pseudo-regularitzat'.

Finalitzem aquesta part de generalitats amb la introducció, per a un conjunt  $C \subset V$ , de famílies de subconjunts que ens facilitaran el llenguatge. Definim  $k$ -entorn de  $C$  per  $N_k(C) = \{u : \partial(u, C) \leq k\}$  i indiquem  $n_k(C)$  el seu cardinal. Similarment,  $E_k(C)$ ,  $k$ -exterior de  $C$ , serà el conjunt  $\{u : \partial(u, C) > k\}$  i el seu cardinal l'anomenarem  $k$ -excés de  $C$  i s'indicarà  $e_k(C)$ . Quan no sigui possible la confusió eliminarem  $(C)$  Per exemple,  $N_0 = C$ ,  $n_0 = |C|$  i  $e_k = |V| - n_k$ . L'excentricitat de  $C$ , definida com  $\varepsilon_C = \max\{\partial(u, C) : u \in V\}$ , pot interpretar-se com el mínim  $k$  tal que  $N_k = V$ .

Donat un conjunt  $C$  considerarem la partició de  $V$  en capes respecte de  $C$ , *distància partició*,  $V = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{\varepsilon_C}$ , on  $C_k = \{v \in V : \partial(v, C) = k\}$ . És clar que  $C_0 = C$  i  $N_k = \cup_{i=0}^k C_i$ . Indicarem  $\overline{C}$ , que anomenarem conjunt *antipodal* de  $C$ , el conjunt de vèrtexs a distància  $\varepsilon_C$  de  $C$ , equivalentment,  $\overline{C} = C_{\varepsilon_C}$ . Per a un graf  $\Gamma = (V, E)$ , es defineix, per a cada  $k = 0, 1, \dots, D(\Gamma)$ , el graf  $\Gamma_k = (V, E^{(k)})$  on dos vèrtexs són adjacents quan la seva distància en  $\Gamma$  és  $k$ . Llavors és natural la notació equivalent  $\Gamma_k(C)$  per indicar  $C_k$ .

## Capítol 2

# Autovalors i propietats mètriques

### 2.1 Cardinals d'espectres locals i distàncies

Establirem una primera classe de resultats mètrics a partir del coneixement del nombre d'autovalors locals. Si  $\mathcal{M}^*$  és la malla reduïda d'autovalors del graf, indicarem  $d = |\mathcal{M}^*|$ . Similarment, donat un conjunt de vèrtexs  $C$ , el cardinal de  $\mathcal{M}_C^*$  s'indicarà  $d_C$ . Per a una parella de conjunts  $C, D$ , indicarem  $\mathcal{M}_{CD}^* = \mathcal{M}_C^* \cap \mathcal{M}_D^*$  i  $d_{CD} = |\mathcal{M}_{CD}^*|$ , el nombre d'autovalors comuns, a banda de  $\lambda$ , en els espectres de  $C$  i  $D$ .

**Proposició 2.1.1** *Siguin  $C, D$  conjunts no buits de vèrtexs de  $\Gamma$ . Llavors  $\partial(C, D) \leq d_{CD}$ .*

**Demostració** Considerem les descomposicions  $e_C = e'_C + e''_C$ ,  $e_D = e'_D + e''_D$ , on  $e'_C$  i  $e'_D$  són les projeccions respectives de  $e_C$  i  $e_D$  sobre el subespai  $\mathcal{H}$ , suma dels subespais propis corresponents als autovalors en  $\mathcal{M}_C \cap \mathcal{M}_D$ . Si  $r$  és el polinomi anulador de  $\mathcal{H}$ , que notem té grau  $|\mathcal{M}_C^* \cap \mathcal{M}_D^*| + 1 (=d_{CD} + 1)$ , es compleix  $\langle re_C, e_D \rangle = \langle re'_C, e'_D \rangle = 0$ . Si  $\partial(C, D) > |\mathcal{M}_C^* \cap \mathcal{M}_D^*|$ , tindriem  $\langle se_C, e_D \rangle = 0$ , per a tot polinomi  $s$  de grau menor o igual que  $d_{CD}$ . En conseqüència, per a tot  $k \in \mathbb{N}$ , de  $x^k = rq + s$ , amb grau( $s$ )  $\leq d_{CD}$ , resulta  $\langle x^k e_C, e_D \rangle = 0$ , que contradiu el caràcter connex del graf.  $\square$

Donat un conjunt  $C$  i indicant  $d_C = |\mathcal{M}_C^*|$ , l'aplicació de la Proposició 2.1.1 a tota parella  $C, \{u\}$ , on  $u$  és qualsevol vèrtex del graf, permet establir  $\partial(C, \{u\}) \leq |\mathcal{M}_C^* \cap \mathcal{M}_u^*| \leq d_C$ . En conseqüència,

**Corollari 2.1.2** *L'excentricitat  $\varepsilon_C$  de tot conjunt de vèrtexs  $C$  compleix  $\varepsilon_C \leq d_C$ .*

Notem que quan  $C = \{u\}$  es redueix a un vèrtex es retroba la definició d'excentricitat d'un vèrtex,  $\varepsilon_u$ , i el Corollari 2.1.2 estableix  $\varepsilon_u \leq d_{\{u\}}$ . Més en particular, retrobem la ben coneguda fitació pel diàmetre del graf, màxima excentricitat dels seus vèrtexs,  $D(\Gamma) \leq d$ , essent  $d = |\mathcal{M}^*|$ .

La Proposició 2.1.1 motiva destacar el cas en que una parella de conjunts compleix que la distància entre ells assoleixi el màxim valor que li permeten els respectius espectres locals. Introduïm les següents definicions.

**Definició 2.1.3** *Dos conjunts de vèrtexs  $C, D$ , direm que formen una parella extremal si  $\partial(C, D) = d_{CD}$ . Similarment, un conjunt de vèrtexs  $C$  direm que és extremal o d'excentricitat espectralment màxima, quan  $\varepsilon_C = d_C$ . Finalment, per homogenitzar definicions, el graf  $\Gamma$  serà un graf extremal o de diàmetre espectralment màxim, quan  $D(\Gamma) = d$ .*

Notem que  $C$  és un conjunt de vèrtexs extremal si i només si

$$|C| = |N_0| < |N_1| < \dots < |N_{d_C-1}| < |N_{d_C}| = |V|, \quad (2.1)$$

equivalentment,  $\partial(C, \overline{C}) = d_C$ .

## 2.2 Autovalors locals i distàncies

Siguin  $C, D$  una parella de subconjunts no buits de  $V$ . Descomposem els vectors unitaris  $e_C, e_D$ , en la forma

$$e_C = \frac{\|\rho_C\|}{\|\nu\|^2} \nu + z_C + z'_C, \quad e_D = \frac{\|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} \nu + z_D + z'_D \quad (2.2)$$

essent  $z_C, z_D$  les respectives projeccions sobre  $\text{Ker} \prod_{\mu_i \in \mathcal{M}_{CD}^*} (x - \mu_i)$ . Dotem l'espai de polinomis  $\mathbb{R}_{d_{CD}-1}[x]$  d'estructura d'espai normat mitjançant  $\|p\|_\infty^{CD} = \max\{|p(\mu_i)| : \mu_i \in \mathcal{M}_{CD}^*\}$ .

**Lema 2.2.1** *Siguin  $C, D$  una parella de subconjunts de  $V$ . Suposem existeixen polinomis  $p, q$  en  $\mathbb{R}_{d_{CD}-1}[x]$  tals que*

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_\infty^{CD}} \frac{q(\lambda)}{\|q\|_\infty^{CD}} > \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho_C\|} \frac{\|\rho(V \setminus D)\|}{\|\rho_D\|},$$

llavors  $\partial(C, D) \leq \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$ .

**Demostració** Per provar l'existència d'algun camí de longitud no superior a  $\text{gr}(p) + \text{gr}(q)$  entre algun vèrtex de  $C$  i algun de  $D$ , serà suficient establir que la nostra hipòtesi garanteix la desigualtat

$$\langle p e_C, q e_D \rangle = \frac{1}{\|\rho_C\| \|\rho_D\|} \sum_{u \in C, v \in D} \nu_u \nu_v \langle p e_u, q e_v \rangle > 0$$

Efectuem el càlcul,

$$\begin{aligned} \langle p e_C, q e_D \rangle &= \frac{\|\rho_C\| \|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda) q(\lambda) + \langle p z_C, q z_D \rangle \geq \frac{\|\rho_C\| \|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda) q(\lambda) - \|p z_C\| \|q z_D\| |\cos \gamma| \geq \\ &\geq \frac{\|\rho_C\| \|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda) q(\lambda) - \|p\|_\infty^{CD} \|q\|_\infty^{CD} \|z_C\| \|z_D\| |\cos \gamma| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|\rho C\| \|\rho D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda)q(\lambda) - \|p\|_\infty^{CD} \|q\|_\infty^{CD} \sqrt{1 - \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} - \|z'_C\|^2} \sqrt{1 - \frac{\|\rho D\|^2}{\|\nu\|^2} - \|z'_D\|^2} |\cos \gamma| \geq \\
&\geq \frac{\|\rho C\| \|\rho D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda)q(\lambda) - \|p\|_\infty^{CD} \|q\|_\infty^{CD} \frac{\|\rho(V \setminus C)\| \|\rho(V \setminus D)\|}{\|\nu\|^2} |\cos \gamma| \geq \\
&\geq \frac{\|\rho C\| \|\rho D\|}{\|\nu\|^2} \|p\|_\infty^{CD} \|q\|_\infty^{CD} \left[ \frac{p(\lambda)}{\|p\|_\infty^{CD}} \frac{q(\lambda)}{\|q\|_\infty^{CD}} - \frac{\|\rho(V \setminus C)\| \|\rho(V \setminus D)\|}{\|\rho C\| \|\rho D\|} \right] > 0,
\end{aligned}$$

que prova el nostre resultat.  $\square$

Fem unes observacions respecte d'aquest lema. En primer lloc notem que, per la Proposició 2.1.1, només és d'interés el cas en que  $\text{gr}(p) + \text{gr}(q) < d$ . A més de  $|(pq)(\mu_i)| = |p(\mu_i)| |q(\mu_i)| \leq \|p\|_\infty^{CD} \|q\|_\infty^{CD}$ , resulta  $\|pq\|_\infty^{CD} \leq \|p\|_\infty^{CD} \|q\|_\infty^{CD}$ , d'on  $\frac{(pq)(\lambda)}{\|pq\|_\infty^{CD}} \geq \frac{p(\lambda)}{\|p\|_\infty^{CD}} \frac{q(\lambda)}{\|q\|_\infty^{CD}}$ . Per tant, per obtenir una mateixa fitació per a la distància,  $\partial(C, D) \leq k$ , és millor considerar com a parella de polinomis  $pq$ , 1. Per simplificar expressions introduïm la funció  $\Phi : \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow (0, +\infty)$ , definida per

$$\Phi(X) = \frac{\|\rho(V \setminus X)\|}{\|\rho X\|}. \quad (2.3)$$

El Lema 2.2.1 adopta ara la forma més convenient,

**Teorema 2.2.2** *Siguin  $C, D$  una parella de subconjunts de  $V$ . Suposem que  $p \in \mathbb{R}_{d_{CD}-1}[x]$  compleix*

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_\infty^{CD}} > \frac{\|\rho(V \setminus C)\| \|\rho(V \setminus D)\|}{\|\rho C\| \|\rho D\|} = \Phi(C)\Phi(D),$$

*llavors  $\partial(C, D) \leq \text{gr}(p)$ ,*

que generalitza a grafs no necessàriament regulars i amb l'ús dels autovalors locals el resultat de Van Dam i Haemers [15]. Recordant que  $\nu$  està triat amb mínima component 1, es compleix la desigualtat

$$\Phi(X) \leq \sqrt{\frac{\|\nu\|^2 - |X|}{|X|}}. \quad (2.4)$$

Notem que  $\Phi$  és estrictament decreixent, en el sentit que si  $Y \subset X$ ,  $Y \neq X$ , llavors  $\Phi(Y) > \Phi(X)$ . Per tant el màxim de  $\Phi$  s'assolirà en conjunts formats per un sol vèrtex. Sobre ells,  $\Phi(\{u\}) = \frac{\sqrt{\|\nu\|^2 - \nu_u^2}}{\nu_u} \leq \sqrt{\|\nu\|^2 - 1} = \Phi(\{v\})$ , per a tot  $u \in V$  i cada  $v$  tal que  $\nu_v = 1$ .

Fent ús del Teorema 2.2.2 per a parelles  $C, X$ , amb  $C$  fixat i  $X$  subconjunt arbitrari no buit de  $V$ , podem passar a un resultat sobre  $\varepsilon_C$ , excentricitat de  $C$ . Considerem la norma  $\|p\|_\infty^C = \max\{|p(\mu_i)| : \mu_i \in \mathcal{M}_C^*\}$  en l'espai  $\mathbb{R}_{d_C-1}[x]$ .

**Teorema 2.2.3** *Sigui  $C$  un conjunt no buit de vèrtexs i  $p \in \mathbb{R}_{d_C-1}[x]$ , tal que*

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_\infty^C} > \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - 1} = \Phi(C) \sqrt{\|\nu\|^2 - 1},$$

*llavors  $\varepsilon_C \leq \text{gr}(p)$ .*

**Demostració** Sigui  $X$  un subconjunt arbitrari no buit de  $V$ . Segons l'anterior  $\Phi(X) \leq \sqrt{\|\nu\|^2 - 1}$ . Per altra banda, com  $\mathcal{M}_{CX}^* \subset \mathcal{M}_C^*$ ,  $\|p\|_{\infty}^{CX} \leq \|p\|_{\infty}^C$ . La nostra hipòtesi proporciona,

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_{\infty}^{CX}} \geq \frac{p(\lambda)}{\|p\|_{\infty}^C} > \Phi(C)\sqrt{\|\nu\|^2 - 1} \geq \Phi(C)\Phi(X),$$

amb el que, Teorema 2.2.2,  $\partial(C, X) \leq \text{gr}(p)$ . De l'arbitrarietat de  $X$  segueix el resultat.  $\square$

Amb la tècnica anterior, prenent en el Teorema 2.2.2 conjunts  $X, Y$  no buits arbitraris, o aplicant el Teorema 2.2.3 a tot conjunt format per un vèrtex, resulta

**Teorema 2.2.4** *Sigui  $p \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ , tal que*

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_{\infty}} > \|\nu\|^2 - 1,$$

*llavors el diàmetre del graf compleix  $D(\Gamma) \leq \text{gr}(p)$ .*

És natural preguntar-se si el Teorema 2.2.4 pot millorar-se quan es disposa d'informació addicional sobre el graf. Aquest és el cas quan el graf és bipartit, com estableixen Delorme i Solé [17], article que va ser l'origen de la nostra línia de treball. Presentarem un resultat en termes més generals.

Sigui ara  $\Gamma = (V, E)$  un graf bipartit. Indiquem  $V_1$  i  $V_2$  els seus conjunts estables. La malla  $\mathcal{M}$  d'autovalors compleix  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ , essent  $\sigma(x) = -x$ . Si  $\mathcal{M} = \{\lambda_d < \lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 = \lambda\}$ , indicarem, com sempre,  $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \setminus \{\lambda\}$  i introduïm ara  $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M} \setminus \{\lambda_d, \lambda\}$ . Notem que també  $\sigma(\mathcal{M}^{**}) = \mathcal{M}^{**}$ .

**Proposició 2.2.5** *Donat un graf bipartit  $\Gamma$  amb autovalors  $\mathcal{M} = \{\lambda_d < \lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 = \lambda\}$ , sigui  $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M} \setminus \{\lambda_d, \lambda\}$ . Essent  $\nu$  un vector propi positiu associat a  $\lambda$ , sigui  $\alpha_r$  la mínima component de  $\nu$  entre les corresponents al subconjunt de vèrtexs estable  $V_r$ ,  $r = 1, 2$ . Sigui  $p$  un polinomi de grau  $k \leq d - 2$  i  $p = p^+ + p^-$  la seva descomposició en les parts parella i imparella. Llavors,*

$$\text{Si } k \text{ és parell } \quad \frac{p^+(\lambda)}{\|p^+\|_{\infty}} > \max_r \left\{ \frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_r^2} - 1 \right\} \implies D(\Gamma) \leq k + 1,$$

$$\text{Si } k \text{ és imparell } \quad \frac{p^-(\lambda)}{\|p^-\|_{\infty}} > \prod_r \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_r^2} - 1} \implies D(\Gamma) \leq k + 1,$$

*on la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  és l'associada a la malla  $\mathcal{M}^{**}$ .*

**Demostració** Sigui  $n_r = |V_r|$ , per a  $r = 1, 2$ . Descomposem  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n_1}, \nu_{n_1+1}, \dots, \nu_{n_1+n_2}) = (\nu_1 | \nu_2)$ , on  $\nu_r$  conté les components corresponents a  $V_r$ ,  $r = 1, 2$ . Llavors  $\bar{\nu} = (\nu_1 | -\nu_2)$  és vector propi per a l'autovalor  $-\lambda$ . Són immediates les descomposicions espectrals,

$$\begin{aligned} e_u &= \frac{\nu_u}{\|\nu\|_2}(\nu + \bar{\nu}) + z_u & \text{si } u \text{ és de } V_1; \\ e_u &= \frac{\nu_u}{\|\nu\|_2}(\nu - \bar{\nu}) + z_u & \text{si } u \text{ és de } V_2. \end{aligned}$$



Signi  $k$  parell. Per establir  $D(\Gamma) \leq k + 1$  serà suficient demostrar que existeix un camí de longitud menor o igual que  $k$  entre qualssevol dos vèrtexs,  $u, v$ , en el mateix conjunt estable. Suposant que els dos vèrtexs són a  $V_1$ , tenim

$$\begin{aligned}
\langle pe_u, e_v \rangle = \langle p^+ e_u, e_v \rangle &= \left\langle \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} (p^+(\lambda)\nu + p^+(-\lambda)\bar{\nu}) + p^+ z_u, \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} (\nu + \bar{\nu}) + z_v \right\rangle = \\
&= 2 \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} p^+(\lambda) + \langle p z_u, z_v \rangle \geq 2 \frac{\alpha_1^2}{\|\nu\|^2} p^+(\lambda) - \|p z_u\| \|z_v\| \geq \\
&\geq 2 \frac{\alpha_1^2}{\|\nu\|^2} p^+(\lambda) - \|p^+\|_\infty \sqrt{1 - 2 \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2}} \sqrt{1 - 2 \frac{\nu_v^2}{\|\nu\|^2}} \geq \\
&\geq 2 \frac{\alpha_1^2}{\|\nu\|^2} \|p^+\|_\infty \left[ \frac{p^+(\lambda)}{\|p^+\|_\infty} - \left( \frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_1^2} - 1 \right) \right] > 0,
\end{aligned}$$

que garanteix l'existència d'algun camí de longitud menor o igual que  $k$  entre qualssevol vèrtexs de  $V_1$ . Similarment, la hipòtesi assegura el mateix per als vèrtexs de  $V_2$ . Per tant  $D(\Gamma) \leq k + 1$ .

Signi ara  $k$  imparell. Prenent  $u \in V_1$  i  $v \in V_2$ , fent un càlcul similar a l'anterior,

$$\begin{aligned}
\langle pe_u, e_v \rangle = \langle p^- e_u, e_v \rangle &= \left\langle \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} (p^-(\lambda)\nu + p^-(-\lambda)\bar{\nu}) + p^- z_u, \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} (\nu - \bar{\nu}) + z_v \right\rangle \geq \\
&\geq 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\|\nu\|^2} p^-(\lambda) - \|p^-\|_\infty \sqrt{1 - 2 \frac{\alpha_1^2}{\|\nu\|^2}} \sqrt{1 - 2 \frac{\alpha_2^2}{\|\nu\|^2}} = \\
&= 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\|\nu\|^2} \|p^-\|_\infty \left[ \frac{p^-(\lambda)}{\|p^-\|_\infty} - \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_1^2} - 1} \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_2^2} - 1} \right] > 0,
\end{aligned}$$

assegura, ara per a  $k$  imparell, que el diàmetre de  $\Gamma$  és menor o igual que  $k + 1$ . \(\square\)



## Capítol 3

# Polinomis alternants

### 3.1 Introducció

Donat un interval  $[\lambda_d, \lambda_1]$  en  $\mathbb{R}$  i  $\lambda \notin [\lambda_d, \lambda_1]$ , el problema de maximitzar en  $\mathbb{R}_k[x]$ , per a cada  $k$ , el quocient

$$\frac{p(\lambda)}{\max\{|p(x)| : x \in [\lambda_d, \lambda_1]\}}, \quad (3.1)$$

és de solució ben coneguda, que s'assoleix en un polinomi únic excepte producte per una constant positiva. Per a l'interval  $[-1, 1]$ , el màxim per a  $\lambda > 1$  el proporciona el polinomi de Chebyshev  $T_k$  i, per a  $\lambda < -1$ , el màxim el dona el polinomi  $(-1)^k T_k$ . Per a l'interval  $[\lambda_d, \lambda_1]$ ,  $T_k \left( \frac{2x - \lambda_d - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_d} \right)$ , maximitza a la dreta de  $\lambda_1$ , mentre  $T_k \left( \frac{-2x + \lambda_d + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_d} \right)$  ho fa a l'esquerra de  $\lambda_d$ . Recordem  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$  i la recurrència  $T_r = 2xT_{r-1} - T_{r-2}$ , per a  $r \geq 2$ .

El que ens ocuparà, en aquest capítol, és l'estudi de la versió discretitzada d'aquest problema d'optimització. Substituïm l'interval  $[\lambda_d, \lambda_1]$  per una malla finita  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$  i sigui  $\lambda \notin [\lambda_d, \lambda_1]$ . Per a polinomis de  $\mathbb{R}_k[x]$  amb  $0 \leq k \leq d-1$ , té sentit plantejar-se, paral·lelament a (3.1), el problema de maximitzar en  $\mathbb{R}_k[x]$  l'expressió

$$\frac{p(\lambda)}{\max\{|p(\lambda_l)| : l = 1, \dots, d\}}. \quad (3.2)$$

Presentarem, en el que segueix, solució al problema en termes de l'existència, unicitat, caracteritzacions i propietats de la família de polinomis òptims, que anomenarem *k-polinomis alternants* per raons que més endavant es faran paleses. No s'ha obtingut una forma explícita general o recurrent per aquests polinomis, però sí donarem solució a casos particulars importants i una descripció de possibilitats per tractar el problema amb mètodes numèrics.

Sigui  $\mathcal{M}$  una malla de  $d+1 \geq 3$  nombres reals  $\lambda_d < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 (= \lambda)$ . Indiquem  $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \setminus \{\lambda\}$ . Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d-1$ , l'aplicació de  $\mathbb{R}_k[x]$  en  $\mathbb{R}$  definida per  $p \mapsto \|p\|_\infty = \max_{1 \leq l \leq d} \{|p(\lambda_l)|\}$  és

una norma en  $\mathbb{R}_k[x]$ . Considerem la bola tancada  $\mathcal{B}_k = \{p \in \mathbb{R}_k[x] : \|p\|_\infty \leq 1\}$ . Sobre aquest compacte la funció contínua  $\Psi : p \mapsto p(\lambda)$  té màxim, absolut en algun punt  $P_k$  que anomenarem, per a cada  $k = 0, 1, \dots, d-1$ , un  $k$ -polinomi alternant associat a la malla  $\mathcal{M}$ . Respecte de la unicitat, és clar que val per a  $k = 0, 1$ , amb

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_d} x - \frac{\lambda_1 + \lambda_d}{\lambda_1 - \lambda_d} \quad (3.3)$$

per una clara consideració geomètrica del fet  $P_1(\lambda_1) = 1$  i  $P_1(\lambda_d) = -1$ . També és fàcil el càlcul de  $P_{d-1}$ . Observem que per a  $p \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ , fent interpolació de Lagrange podem expressar  $p(\lambda) = \sum_{k=1}^d (-1)^{k+1} \frac{\pi_0}{\pi_k} p(\lambda_k)$ , amb  $\pi_k = \pi_k(\mathcal{M})$  definits com a (1.7). Essent  $p \in \mathcal{B}_{d-1}$ , el màxim valor de  $p(\lambda)$  s'assolirà per a  $p(\lambda_k) = (-1)^{k+1}$ . Per tant,

$$P_{d-1} = \sum_{k=1}^d \frac{\lambda - \lambda_k}{\pi_k} \prod_{l=1, l \neq k}^d (x - \lambda_l), \quad P_{d-1}(\lambda) = \sum_{k=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_k}. \quad (3.4)$$

Notem que  $P_0, P_1$  i  $P_{d-1}$  són únics i independents de  $\lambda$ . Anticipem que, més endavant, establim aquest mateix fet per a tot  $P_k$ .

Comencem observant que de ser  $\Psi$  lineal resulta, en particular, que  $P_k$  pertany a la frontera de  $\mathcal{B}_k$ , és a dir,  $\|P_k\|_\infty = 1$ , o equivalentment que la submalla  $\mathcal{N}_k$  de  $\mathcal{M}^*$  on  $P_k$  pren valors  $\pm 1$  no és buida.

**Lema 3.1.1** *Segui  $P_k$  un  $k$ -polinomi alternant,  $1 \leq k \leq d-1$ , associat a la malla  $\mathcal{M}$ . Les submalles  $\mathcal{N}_k^+$  i  $\mathcal{N}_k^-$  de  $\mathcal{N}_k$  on  $P_k$  pren, respectivament, valors  $+1, -1$ , són no buides. En particular,  $P_k$  té almenys una arrel real en  $(\lambda_d, \lambda_1)$ . La malla  $\mathcal{N}_k$  té almenys  $k+1$  elements.*

**Demostració** Suposem  $\mathcal{N}_k^+ = \emptyset$ . Llavors existiria  $M$  tal que  $-1 \leq P_k(x) \leq M < 1$ , per a tot  $x \in \mathcal{M}^*$ . Considerem el polinomi  $q_k = P_k + \frac{1-M}{1+M}(P_k + 1)$ . És immediat que  $-1 \leq q_k(x) \leq 1$ , per a tot  $x \in \mathcal{M}^*$ , i que  $q_k(\lambda) > P_k(\lambda)$ , en contradicció amb el caràcter maximal de  $P_k(\lambda)$ . Similarment per  $\mathcal{N}_k^-$ . Suposem ara que  $|\mathcal{N}_k| = h \leq k$ . Indiquem  $\alpha = \max\{|P_k(x)| : x \in \mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}_k\} < 1$ . Segui  $q_h = \prod_{\mu \in \mathcal{N}_k} (x - \mu)$  i  $\beta = \max\{|q_h(x)| : x \in \mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}_k\}$ . Considerem el polinomi, de grau fins a  $k$ ,  $r_k = P_k + \frac{1-\alpha}{\beta} q_h$ . Aquest polinomi pertany a  $\mathcal{B}_k$ . En efecte, si  $\mu \in \mathcal{N}_k$  es té

$$|r_k(\mu)| \leq |P_k(\mu)| + \frac{1-\alpha}{\beta} |q_h(\mu)| = 1$$

i si  $\mu \in \mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}_k$

$$|r_k(\mu)| \leq |P_k(\mu)| + \frac{1-\alpha}{\beta} |q_h(\mu)| \leq \alpha + \frac{1-\alpha}{\beta} \beta = 1.$$

Com  $r_k(\lambda) = P_k(\lambda) + \frac{1-\alpha}{\beta} q_h(\lambda) > P_k(\lambda)$ , contradicció amb ser  $P_k$  un  $k$ -polinomi alternant.  $\square$

Observem ara que si  $p \in \mathcal{B}_r$  i  $q \in \mathcal{B}_s$ , llavors  $pq \in \mathcal{B}_{r+s}$ . Per tant, per a  $0 \leq k \leq d-1$ ,

$$P_k(\lambda) \geq \max_{r+s=k} \{P_r(\lambda)P_s(\lambda)\}. \quad (3.5)$$

En (3.3) hem establert que  $P_1$  és de grau 1 i  $P_1(\lambda) > 1$ , per tant de (3.5) resulta

**Proposició 3.1.2** *Siguin  $P_k$ ,  $0 \leq k \leq d-1$ ,  $k$ -polinomis alternants per a la malla  $\mathcal{M}$ . Llavors  $P_0(\lambda) < P_1(\lambda) < P_2(\lambda) < \dots < P_{d-1}(\lambda)$  i  $\text{gr}(P_k) = k$ . També,  $P_k(\lambda) \geq (P_1(\lambda))^k$ .*

Orientem ara el treball a establir, per a cada  $k$ , la unicitat del  $k$ -polinomi alternant. Sigui  $2 \leq k \leq d-1$ . Si  $P_k$  és un  $k$ -polinomi alternant, segons el Lema 3.1.1 té associada una malla d'almenys  $k+1$  elements on  $P_k$  pren valors  $\pm 1$  i la informació d'aquesta malla i els valors que hi pren determina  $P_k$ . Des d'aquest punt de vista els polinomis de  $\mathcal{B}_k$ , candidats a ser un  $k$ -polinomi alternant, formen una família finita  $\mathcal{F}$  de com a màxim  $\binom{d}{k+1} 2^{k+1} - 2$  polinomis. Suposem ara que existissin dos  $k$ -polinomis alternants,  $P_k$  i  $Q_k$ . Tot polinomi de la forma  $r_\theta = \theta P_k + (1-\theta)Q_k$ , amb  $\theta \in [0, 1]$ , pertany a  $\mathcal{B}_k$  i  $r_\theta(\lambda)$  seria també maximal. Per a  $\theta \neq \tau$  els polinomis  $r_\theta$  i  $r_\tau$  són diferents, doncs de  $r_\theta = r_\tau$  resulta  $(\theta - \tau)P_k = (\theta - \tau)Q_k$ , és a dir  $P_k = Q_k$ , que és contradicció. Per tant, cas d'haver dos  $k$ -polinomis alternants diferents, n'hi haurien infinits, el que és incompatible amb el caràcter finit de  $\mathcal{F}$ . Tenim doncs,

**Proposició 3.1.3** *Per a una malla  $\mathcal{M} = \{\lambda > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  i per a cada  $k = 0, 1, \dots, d-1$ , existeix un únic  $k$ -polinomi alternant.*

En (3.3) hem observat que la independència de  $P_0$  i  $P_1$  respecte de  $\lambda$ . Veiem-ho ara per a tot  $k \leq d-1$ .

**Proposició 3.1.4** *El  $k$ -polinomi alternant associat a la malla  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \cup \{\lambda\}$  és el mateix per a tot  $\lambda > \lambda_1$ .*

**Demostració** Sigui, com abans,  $\mathcal{F}$  la família finita de polinomis en  $\mathcal{B}_k$  tals que prenen valor 1 o  $-1$  en  $k+1$  punts de  $\mathcal{M}^*$ . Indiquem  $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}^* \cup \{t\}$  amb  $t > \lambda_1$ . En particular  $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}$ . Sigui  $P_k^t$  el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}_t$ , és a dir,  $P_k^t(t) = \max\{r(t) : r \in \mathcal{F}\} = M(t)$ . Notem que la funció  $t \mapsto M(t)$ , definida com a màxim d'un nombre finit de funcions contínues, és contínua. Com que per a cada  $r \in \mathcal{F}$  distint de  $P_k^t$  val  $P_k^t(t) > r(t)$ , per continuïtat la desigualtat s'extindrà a un entorn de  $t$ . Per la finitud de  $\mathcal{F}$  existirà  $\delta > 0$  tal que, per a tot  $x \in (t - \delta, t + \delta)$ ,  $P_k^t(x) = M(x)$ , o equivalentment,  $P_k^t = P_k^x$ . Considerem  $A_+ = \{t \in [\lambda, +\infty) \text{ tals que } \forall x \in [\lambda, t] \text{ es compleix } P_k^t = P_k^x\}$ . Si  $A$  fos fitat superiorment,  $\xi = \sup A$ , considerem una successió  $(x_n)$  en  $A_+$  tal que  $P_k^\lambda(x_n) = M(x_n)$ . Per continuïtat,  $P_k^\lambda(\xi) = M(\xi)$ , amb el que  $\xi \in A_+$  i  $A_+$  s'extendria a la dreta de  $\xi$ , contravenint el seu caràcter de suprem. Per tant  $A_+ = [\lambda, +\infty)$ . Sigui ara  $\mu \in (\lambda_1, \lambda)$ . Segons l'anterior  $P_k^\mu = P_k^x$ , per a tot  $x \geq \mu$ . En particular,  $P_k^\mu = P_k^\lambda$ . En conclusió,  $P_k^\lambda$  és el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^* \cup \{x\}$ , per a tot  $x > \lambda_1$ .  $\square$

La definició amb que hem introduït la noció de  $k$ -polinomi alternant, contenia globalment la malla  $\mathcal{M}$ . Si bé el paper dels elements de  $\mathcal{M}^*$  i el de  $\lambda$  eren evidentment asimètrics, ha estat necessari un procés d'elaboració, fins a la Proposició 3.1.4, per establir la unicitat de la família de polinomis  $P_k$ ,  $k = 0, \dots, d-1$ , i que només depen de  $\mathcal{M}^*$ . El paper de  $\lambda$  queda diluït en una propietat general de maximització del valor del polinomi en tot l'interval  $(\lambda_1, +\infty)$ . Més endavant veurem que, amb la salvetat d'un eventual signe, aquesta propietat de màxim s'exten a  $(-\infty, \lambda_d)$ . En conseqüència, a la vista dels resultats obtinguts, convé donar la següent definició.

Sigui  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  la norma associada i  $\mathcal{B}_k$  la bola unitat en  $\mathbb{R}_k[x]$ . Llavors,

**Definició 3.1.5** Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d-1$ , el  $k$ -polinomi alternant associat a la malla  $\mathcal{M}^*$  és l'únic polinomi  $P_k \in \mathcal{B}_k$  tal que, per a algun  $x > \lambda_1$ , compleix  $P_k(x) \geq r(x)$ , per a tot  $r \in \mathcal{B}_k$ .

Destaquem la justificació de l'expressió  $P_k$  associat a  $\mathcal{M}^*$  en comptes de  $P_k$  associat a  $\mathcal{M}$ , que usavem fins ara. Dos resultats senzills i útils, ja en aquest llenguatge es donen a continuació.

Tornant a la Proposició 3.1.4, podem assegurar que, per a tot  $x > \lambda_1$ ,  $P_k(x) > P_0(x) = 1$ . Per continuïtat,  $P_k(\lambda_1) \geq 1$  i com  $P_k \in \mathcal{B}_k$ ,  $P_k(\lambda_1) \leq 1$ . Per tant, el  $k$ -polinomi alternant  $P_k$  associat a la malla  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$ , compleix

$$P_k(\lambda_1) = 1 \quad (k = 0, 1, \dots, d-1). \quad (3.6)$$

Donades dues malles  $\mathcal{M}_2^* \subset \mathcal{M}_1^*$ . Sigui  $\mu$  el màxim element de  $\mathcal{M}_1^*$  i  $d$  el cardinal de  $\mathcal{M}_2^*$ . Per a  $0 \leq k \leq d-1$  és clara la contenció  $\mathcal{B}_k(\mathcal{M}_1^*) \subset \mathcal{B}_k(\mathcal{M}_2^*)$ . Amb aquestes notacions es té,

**Proposició 3.1.6** Si  $\mathcal{M}_2^* \subset \mathcal{M}_1^*$ , llavors els respectius  $k$ -polinomis alternants  $P_k^1, P_k^2$ , compleixen  $P_k^2(x) \geq P_k^1(x)$ , per a tot  $x > \mu$  i  $k = 0, 1, \dots, d-1$ .

## 3.2 Sobre les seves arrels i caracteritzacions

Una qüestió respecte dels polinomis alternants, natural de plantejar-se, és l'estudi dels seus zeros. Tornant a la visió d'aquests polinomis com a discretització dels de Chebyshev modificats a l'interval  $[\lambda_d, \lambda_1]$ , és esperable una conducta similar respecte de les seves arrels, és a dir, la factorització completa amb arrels simples en l'interval. La tècnica d'una eventual demostració no pot reposar en l'existència d'un producte escalar, del qual no es disposa, respecte del qual formin una família ortogonal. En el Teorema 3.2.4 provarem que  $P_k$  té associada, almenys, una col·lecció de  $k+1$  punts de  $\mathcal{M}^*$  on pren alternativament valors 1 i  $-1$ , amb el que, en particular, es tanca el problema de la factorització. Emperò, es presenta també una prova directa, paral·lelitzant, en el que és possible, demostracions pel cas de polinomis ortogonals (veure per exemple Godsil [31]). Amb aquest propòsit veiem en primer lloc el lema següent.

**Lema 3.2.1** Sigui  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant associat a la malla  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$ . Suposem que és possible factoritzar  $P_k$  en la forma  $P_k = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_r)q$ , amb  $1 \leq r \leq k$ ,  $\lambda_d < \xi_r < \dots < \xi_1 < \lambda_1$  i  $q$  complint  $q(x) \geq 0$  per a tot  $x \in [\lambda_d, \lambda_1]$ . Llavors  $r = k$ .

**Demostració** Suposem que tal factorització fos possible amb  $1 \leq r < k$ . Com abans  $\mathcal{N}_k$  indica  $\mathcal{M}^* \cap P_k^{-1}(\{1, -1\})$ . Per a  $\delta > 0$ , definim  $q^\delta \in \mathbb{R}_k[x]$  com

$$q^\delta = P_k + \delta p = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_r)q + \delta(x - \lambda_1)(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_r).$$

Raonarem ara que per a  $\delta$  convenientment petit es compleix  $q^\delta \in \mathcal{B}_k$ . Calculem  $q^\delta(\lambda_l)$ , per a  $\lambda_l \in \mathcal{M}^*$ , distingint els casos:

- a) Suposem  $\lambda_l \in \mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}_k$ . Com ara  $-1 < P_k(\lambda_l) < 1$ , existirà  $\delta_0 > 0$  tal que  $|q^\delta(\lambda_l)| < 1$ , per a tot  $0 < \delta \leq \delta_0$ ;
- b) Sigui ara  $\lambda_l \in \mathcal{N}_k$ . Considerem les tres situacions possibles:
- b1)  $\lambda_l \in (\xi_1, \lambda_1]$ . D'acord amb la factorització,  $P_k(\lambda_l)$  seria positiu i per tant  $P_k(\lambda_l) = 1$ . Com  $p(\lambda_l) \leq 0$ , per a  $0 < \delta \leq \delta_1$ , es complirà  $|q^\delta(\lambda_l)| \leq 1$ ;
- b2)  $\lambda_l \in (\xi_{h+1}, \xi_h]$  per a algú  $1 \leq h \leq r-1$ . Ara  $P_k(\lambda_l) = (-1)^h$ , mentre que  $(-1)^{h+1}p(\lambda_l) \geq 0$ . Per a  $\delta_2$  convenient,  $|q^\delta(\lambda_l)| \leq 1$ , per a tot  $0 < \delta \leq \delta_2$ ;
- b3)  $\lambda_l \in [\lambda_d, \xi_r]$ .  $P_k(\lambda_l)$  serà ara  $(-1)^r$  i  $(-1)^{r+1}p(\lambda_l) \geq 0$ . Com abans per a  $\delta_3$  convenient,  $|q^\delta(\lambda_l)| \leq 1$ , per a tot  $0 < \delta \leq \delta_3$ .

Triant per  $\delta$  el mínim dels  $\delta_i$  respectius associats a cada  $\lambda_l$ ,  $q^\delta \in \mathcal{B}_k$ . Per altra banda, si  $\lambda > \lambda_1$ , es té  $q^\delta(\lambda) = P_k(\lambda) + \delta p(\lambda) > P_k(\lambda)$ , contradint la maximalitat de  $P_k(\lambda)$ . Per tant  $r = k$ .  $\square$

Estem ara en disposició d'establir l'esperable resultat respecte de les arrels dels polinomis alternants.

**Proposició 3.2.2** *Per a cada  $1 \leq k \leq d-1$ , sigui  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant associat a la malla  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$ . Totes les arrels de  $P_k$  són reals, simples i contingudes a l'interval  $(\lambda_d, \lambda_1)$ .*

**Demostració** Notem primer que de les Proposicions 3.1.2 i 3.1.4 se'n despren que  $P_k$  no pot tenir cap arrel en  $[\lambda_1, +\infty)$ , doncs per a tot  $x > \lambda_1$  es compleix  $P_k(x) > P_0(x) = 1$ . Considerem les  $k$  arrels de  $P_k$  en  $\mathbb{C}$  amb les respectives multiplicitats,

$$\begin{array}{llll} \xi_i & (2\alpha_i + 1) & i = 1, \dots, r & \text{arrels reals contingudes en } (\lambda_d, \lambda_1) \text{ amb multiplicitat senar,} \\ \eta_j & (2\beta_j) & j = 1, \dots, s & \text{arrels reals contingudes en } (\lambda_d, \lambda_1) \text{ amb multiplicitat parell,} \\ \nu_h & (\gamma_h) & h = 1, \dots, t & \text{arrels reals contingudes en } (-\infty, \lambda_d], \\ \sigma_l \pm i\tau_l & (\delta_l) & l = 1, \dots, u & \text{arrels no reals.} \end{array}$$

Llavors podríem expressar  $P_k = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_r)q$ , on

$$q = \prod_{i=1}^r (x - \xi_i)^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^s (x - \eta_j)^{2\beta_j} \prod_{h=1}^t (x - \nu_h)^{\gamma_h} \prod_{l=1}^u ((x - \sigma_l)^2 + \tau_l^2)^{\delta_l}.$$

Per a  $x \in [\lambda_d, \lambda_1]$  observem que  $q(x) \geq 0$ . Usant el Lema 3.2.1 podem afirmar  $r = k$  i obtenim el nostre enunciat.  $\square$

Seguint amb el trasfons dels polinomis de Chebyshev, plantegem si el  $k$ -polinomi alternant pren alternativament valors 1 i  $-1$  en  $k+1$  punts de la malla sobre la que s'han construït. En realitat, veurem més que això. Establirem en el que segueix, que l'existència d'una submalla amb aquesta propietat caracteritza el que un polinomi de  $\mathcal{B}_k(\mathcal{M}^*)$  sigui el  $k$ -polinomi alternant. Necessitem primer un resultat tècnic.

**Lema 3.2.3** *Sigui  $r \in \mathbb{R}_k[x]$  tal que existeixen  $k+2$  punts,  $\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_{k+1}$ , en els que  $(-1)^l r(\mu_l) \geq 0$ , per a  $l = 0, 1, \dots, k+1$ . Llavors  $r = 0$ .*

**Demostració** Fem inducció sobre  $k$ . Per a  $k = 0$  és evident. Suposem-ho cert fins a  $k - 1$ . Considerem  $r \in \mathbb{R}_k[x]$  complint la hipòtesi de l'enunciat. Aplicant el teorema del valor mitjà a  $r$  en cadascun dels intervals  $[\mu_{l+1}, \mu_l]$  ( $0 \leq l \leq k$ ), es té

$$(-1)^l r'(\xi_l) = \frac{1}{\mu_l - \mu_{l+1}} [(-1)^l r(\mu_l) + (-1)^{l+1} r(\mu_{l+1})] \geq 0 \quad \text{per a algun } \xi_l \in (\mu_{l+1}, \mu_l)$$

Per tant associats a  $r' \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$  tenim  $k + 1$  punts,  $\xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_k$ , en els que  $(-1)^l r'(\xi_l) \geq 0$ . Així que  $r' = 0$ ,  $r$  és constant i per l'alternança de signe és nul.  $\square$

**Teorema 3.2.4** *Sigui  $\mathcal{M}^*$  una malla de  $d$  punts. Per a cada  $1 \leq k \leq d - 1$ , un polinomi  $p \in \mathcal{B}_k$  és el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$  si i només si existeix una submalla  $\mathcal{N}_k^\pm = \{\mu_{k+1} < \dots < \mu_1\} \subset \mathcal{M}^*$  tal que  $p(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ , per a  $l = 1, \dots, k + 1$ .*

**Demostració** De l'observació (3.3) és clar que l'enunciat és cert per a  $k = 1$ . Considerem  $2 \leq k \leq d - 1$ . Sigui  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant i, com al Lema 3.1.1,  $\mathcal{N}_k = \mathcal{M}^* \cap P_k^{-1}\{1, -1\}$ . Construïm progressivament i fins que deixi de ser possible, la submalla  $\mathcal{N}_r^\pm = \{\mu_{r+1} < \dots < \mu_1\} \subset \mathcal{N}_k$ , amb  $\mu_1 = \lambda_1$  (notem que, per el Corollari 3.6,  $P_k(\mu_1) = 1 = (-1)^{1+1}$ ) i, per a  $i \geq 2$ ,  $\mu_i$  està determinat per  $P_k(\mu_i) = (-1)^{i+1}$  i  $P_k(\lambda_i) = (-1)^i$  per a tot  $\lambda_i \in (\mu_i, \mu_{i-1}) \cap \mathcal{N}_k$ . Observem que, del mateix Lema 3.1.1 i del grau de  $P_k$ , resulta  $1 \leq r \leq k$ .

Suposem  $r \leq k - 1$ . Considerem, per a  $\delta > 0$ , el polinomi  $p^\delta = P_k + \delta q_r$  on  $q_r = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_r)$ . Provarem que per a  $\delta$  prou petit  $p^\delta \in \mathcal{B}_k$ . Sigui  $\lambda_l \in \mathcal{M}^*$  arbitrari. Llavors:

- Si  $\lambda_l \in \mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}_k$ , és a dir  $|P_k(\lambda_l)| < 1$ , és clar que existeix  $\delta_l > 0$  tal que  $|p^\delta(\lambda_l)| < 1$ , per a  $\delta < \delta_l$ .
- Si  $\lambda_l \in \mathcal{N}_r^\pm$  llavors  $|p^\delta(\lambda_l)| = |P_k(\lambda_l)| = 1$ .
- Sigui  $\lambda_l \in (\mu_i, \mu_{i-1}) \cap \mathcal{N}_k$ , per a algun  $i = 1, \dots, r$ . Llavors  $q_r(\lambda_l)$  té signe  $(-1)^{i-1}$ , mentre que per la construcció de  $\mathcal{N}_r^\pm$ ,  $P_k(\lambda_l) = (-1)^i$ . És immediat que per a  $\delta < \delta_l = \frac{2}{|q_r(\lambda_l)|}$  es compleix  $|p^\delta(\lambda_l)| < 1$ .
- Si  $\lambda_l \in [\lambda_d, \mu_r) \cap \mathcal{N}_k$ , llavors  $q_r(\lambda_l)$  té signe  $(-1)^r$  i  $P_k(\lambda_l) = (-1)^{r+1}$ . Per tant, podem definir  $\delta_l$  com a l'apartat anterior.

Prenent  $\delta = \min_{\lambda_l \in \mathcal{M}^*} \{\delta_l\}$  podem assegurar  $p^\delta \in \mathcal{B}_k$ . Sigui  $\lambda > \lambda_1$ . Com  $p^\delta(\lambda) = P_k(\lambda) + \delta q_r(\lambda) > P_k(\lambda)$ , obtindríem contradicció amb el caràcter maximal de  $P_k(\lambda)$  entre els polinomis de  $\mathcal{B}_k$ . Per tant  $r = k$ , i la malla  $\mathcal{N}_k^\pm$  compliria l'enunciat.

Recíprocament, sigui  $p \in \mathcal{B}_k$  i  $\mathcal{N}_k^\pm = \{\mu_{k+1} < \dots < \mu_1\} \subset \mathcal{M}^*$ , tal que  $p(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ ,  $l = 1, \dots, k + 1$ . Considerem el polinomi  $q = P_k - p \in \mathbb{R}_k[x]$ . Llavors els  $k + 2$  punts,  $\mu_{k+1} < \dots < \mu_1 < \mu_0$ , on  $\mu_0$  és qualsevol real major que  $\lambda_1$ , compleixen

$$\begin{aligned} q(\mu_0) &= P_k(\mu_0) - p(\mu_0) \geq 0, \\ (-1)^l q(\mu_l) &= (-1)^l q(\mu_l) = (-1)^l P_k(\mu_l) - (-1)^l p(\mu_l) = 1 + (-1)^l P_k(\mu_l) \geq 0 \quad l = 1, \dots, k + 1. \end{aligned}$$

El Lema 3.2.3 permet assegurar  $q = 0$ . Per tant  $p$  seria el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$ .  $\square$



Com ja havíem anunciat la Proposició 3.2.2 sobre les arrels de  $P_k$ , és ara conseqüència immediata del Teorema 3.2.4.

Sabem, Corollari 3.6, que  $P_k(\lambda_1) = 1$ . Calculem ara  $P_k(\lambda_d)$ . Associem a  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$ , la malla  $-\mathcal{M}^* = \{-\lambda_1 < \dots < -\lambda_d\}$ . Segons el Teorema 3.2.4 existirà  $\mathcal{N}_k^\pm = \{\mu_{k+1} < \dots < \mu_1\} \subset \mathcal{M}^*$ , tal que  $P_k(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ . Considerem  $-\mathcal{N}_k^\pm = \{\nu_{k+1} < \dots < \nu_1\} = \{-\mu_1 < \dots < -\mu_{k+1}\} \subset -\mathcal{M}^*$ . El polinomi  $Q_k(x) = (-1)^k P_k(-x)$  pertany a la bola unitat  $\mathcal{B}_k^-$  associada a  $-\mathcal{M}^*$  i sobre la submalla  $-\mathcal{N}_k^\pm$  compleix

$$Q_k(\nu_l) = (-1)^k P_k(\mu_{k+2-l}) = (-1)^k (-1)^{k+1+l} = (-1)^{l+1}.$$

Pel mateix Teorema 3.2.4, obtenim que els  $k$ -polinomis alternants,  $P_k$  associat a  $\mathcal{M}^*$  i  $Q_k$  associat a  $-\mathcal{M}^*$ , estan relacionats per

$$Q_k(x) = (-1)^k P_k(-x). \quad (3.7)$$

En particular,  $1 = Q_k(-\lambda_d) = (-1)^k P_k(\lambda_d)$ . Per tant,

$$P_k(\lambda_d) = (-1)^k. \quad (3.8)$$

Veient  $x < \lambda_d$  com  $-x > -\lambda_d$ ,  $Q_k(-x) = \max\{q(-x) : q \in \mathcal{B}_k^-\}$ . Com l'aplicació  $q(x) \mapsto q(-x)$  bijectiva  $\mathcal{B}_k$  amb  $\mathcal{B}_k^-$ , la igualtat anterior pot expressar-se com

$$(-1)^k P_k(x) = \max\{q(x) : q \in \mathcal{B}_k\} \quad \text{per a tot } x < \lambda_d. \quad (3.9)$$

Distingint la paritat de  $k$  tenim, per a tot  $x < \lambda_d$ ,

$$P_k(x) = \max\{q(x) : q \in \mathcal{B}_k\} \quad (k \text{ parell}) \quad , \quad P_k(x) = \min\{q(x) : q \in \mathcal{B}_k\} \quad (k \text{ senar}) \quad (3.10)$$

Podem donar ara una nova caracterització del  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d-1$ .

**Proposició 3.2.5** *Un polinomi  $p$  és el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$  si i només si  $p \in \mathcal{B}_k$ , té primer coeficient positiu i  $|p(x)| = \max\{r(x) : r \in \mathcal{B}_k\}$  per algun  $x \notin [\lambda_d, \lambda_1]$ .*

**Demostració** La necessitat deriva de la definició, la Proposició 3.1.4 i (3.9). Respecte de la suficiència, si  $x > \lambda_1$  un dels polinomis  $p, -p$ , seria  $P_k$ , seguint la Definició 3.1.5. De ser positiu el primer coeficient,  $P_k = p$ . Si  $x < \lambda_d$ , el polinomi  $q(t) = (-1)^k p(-t)$  complirà:  $q \in \mathcal{B}_k(-\mathcal{M}^*)$  i  $|q(x)|$  seria maximal entre els polinomis de  $\mathcal{B}_k(-\mathcal{M}^*)$ . Com abans,  $q$  o  $-q$  seria el  $k$ -polinomi alternant per  $-\mathcal{M}^*$ . De (3.7) resulta que  $P_k$  seria  $(-1)^k q(-t) = p(t)$  o bé  $-(-1)^k q(-t) = -p(t)$ . Observant el signe del primer coeficient obtenim el resultat.  $\square$

### 3.3 Algunes propietats i cassos particulars

Podem explotar una mica més (3.7), aplicant-ho al cas en que  $\mathcal{M}^*$  sigui simètrica respecte de l'origen. Llavors de  $-\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*$ , resulta  $P_k(x) = (-1)^k P_k(-x)$ , és a dir

**Proposició 3.3.1** *Si  $\mathcal{M}^*$  és simètrica respecte de l'origen. Llavors el  $k$ -polinomi alternant és una funció parell si  $k$  és parell i una funció imparell si  $k$  és imparell.*

Considerem ara dues malles  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$ ,  $\mathcal{N}^* = \{\mu_d < \dots < \mu_1\}$ , tals que existeixi una transformació afí,  $\sigma : x \mapsto ax + b$ , tal que  $\sigma(\mathcal{M}^*) = \mathcal{N}^*$ . Indiquem  $\varepsilon = \pm 1$  el signe de  $a$ . En aquesta situació es té,

**Corol·lari 3.3.2** *Si  $P_k$  i  $Q_k$  són els respectius  $k$ -polinomis alternants per a les malles  $\mathcal{M}^*$  i  $\mathcal{N}^* = \sigma(\mathcal{M}^*)$ , es compleix  $Q_k = \varepsilon^k P_k \circ \sigma^{-1}$ .*

**Demostració** L'aplicació  $p \mapsto p^\sigma$ , definida per  $p^\sigma = p \circ \sigma^{-1}$  és un automorfisme de  $\mathbb{R}_k[x]$  que bijectiva les boles unitat  $\mathcal{B}_k(\mathcal{M}^*)$  i  $\mathcal{B}_k(\mathcal{N}^*)$ . El polinomi  $\varepsilon^k P_k^\sigma$  pertany a  $\mathcal{B}_k(\mathcal{N}^*)$  i té primer coeficient positiu. Com que  $\mu \notin (\mu_d, \mu_1)$  és equivalent a  $\lambda = \sigma^{-1}(\mu) \notin (\lambda_d, \lambda_1)$ , tenim

$$|(\varepsilon^k P_k \circ \sigma^{-1})(\mu)| = |P_k(\lambda)| = \max\{p(\lambda) : p \in \mathcal{B}_k(\mathcal{M}^*)\} = \max\{q^\sigma(\mu) : q^\sigma \in \mathcal{B}_k(\mathcal{N}^*)\}.$$

La Proposició 3.2.5 estableix el resultat.  $\square$

Per abreviar anomenem *submalla alternant* associada a  $P_k$  a tota malla  $\mathcal{N}_k^\pm$  complint l'enunciat del Teorema 3.2.4. Per a  $k = 1$  i  $k = d - 1$  hi ha una única submalla alternant,  $\mathcal{N}_1^\pm = \{\lambda_d, \lambda_1\}$ ,  $\mathcal{N}_{d-1}^\pm = \mathcal{M}^*$ . Per a  $2 \leq k \leq d - 2$  no és certa, en general, la unicitat. Per exemple, essent  $\mathcal{M}^* = \{-2, -1, 1, 2\}$ , tant  $\{-2, -1, 2\}$  com  $\{-2, 1, 2\}$  serien submalles alternants corresponents a  $P_2 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}$ . Aquesta falta d'unicitat podem matitzar-la, almenys en el que respecte al primer i darrer element de tota submalla alternant. Es pot afirmar:

**Proposició 3.3.3** *Sigui  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$ . Per a  $k = 1, \dots, d - 1$ , qualsevulla submalla alternant del  $k$ -polinomi alternant conté  $\lambda_1$  i  $\lambda_d$ .*

**Demostració** Podem suposar  $2 \leq k \leq d - 2$ . Sigui  $\mathcal{N}_k^\pm$  una submalla alternant associada a  $P_k$  i suposem  $\lambda_1 \notin \mathcal{N}_k^\pm$ . Essent  $\mathcal{M}_1^* = \mathcal{M}^* \setminus \{\lambda_1\}$ , es compliria  $P_k \in \mathcal{B}_k(\mathcal{M}_1^*)$  i  $\mathcal{N}_k^\pm \subset \mathcal{M}_1^*$ . Pel Teorema 3.2.4,  $P_k$  seria també el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}_1^*$ . Per tant  $P_k(\lambda_1) > 1$ , el que és absurd. Similar per  $\lambda_d$ .  $\square$

Finalitzarem el nostre estudi de propietats dels  $k$ -polinomis alternants, amb la consideració d'una situació que es produirà quan, al tornar al món dels grafs, tractem grafs bipartits: Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{\lambda_d < \lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda\}$ , simètrica respecte l'origen. Sigui  $\mathcal{M}^*$  i  $\mathcal{M}^{**}$  les obtingudes a l'eliminar, respectivament, l'element màxim i els elements màxim i mínim de  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1\} \quad , \quad \mathcal{M}^{**} = \{\lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1\}$$

Indiquem  $P$  el  $(d - 1)$ -polinomi alternant per  $\mathcal{M}^*$  i  $\tilde{P}$  el  $(d - 2)$ -polinomi alternant per  $\mathcal{M}^{**}$ . Llavors  $P(\lambda_l) = (-1)^{l+1}$  per a  $l = 1, \dots, d$ . Per (3.7) el polinomi  $R(x) = (-1)^{d-1}P(-x)$  serà el  $(d - 1)$ -polinomi alternant per a la malla  $-\mathcal{M}^*$ , que ara és  $\{\lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda\}$ . En particular,  $R(\lambda_l) = (-1)^l$  per a  $l = 0, 1, \dots, d - 1$ . El polinomi  $\frac{1}{2}(P - R)$  és a  $\mathcal{B}_{d-2}(\mathcal{M}^{**})$  i, per a  $l = 1, \dots, d - 1$ ,  $\frac{1}{2}(P(\lambda_l) - R(\lambda_l)) = \frac{1}{2}((-1)^{l+1} - (-1)^l) = (-1)^{l+1}$ . Per tant

$$\tilde{P}(x) = \frac{P(x) - R(x)}{2} = \frac{P(x) + (-1)^d P(-x)}{2}. \quad (3.11)$$

Observant que  $d$  parell, imparell, equival a  $0 \in \mathcal{M}$ ,  $0 \notin \mathcal{M}$ , podem enunciar,

**Proposició 3.3.4** *Sigui  $\mathcal{M}$  simètrica respecte de l'origen. Si  $0 \in \mathcal{M}$ , respectivament  $0 \notin \mathcal{M}$ , el  $(d-2)$ -polinomi alternant per a  $\mathcal{M}^{**}$  és la part parella, respectivament imparella, del  $(d-1)$ -polinomi alternant per a  $\mathcal{M}^*$ .*

Observem que de (3.11) podem expressar  $\tilde{P}(\lambda)$  en termes de  $P(\lambda)$ . En efecte,  $\tilde{P}(\lambda) = \frac{P(\lambda)+(-1)^d P(-\lambda)}{2} = \frac{P(\lambda)+(-1)^d P(\lambda_d)}{2} = \frac{P(\lambda)+(-1)^d (-1)^{d+1}}{2}$ . Per tant, en les nostres notacions,

$$\tilde{P}(\lambda) = \frac{P(\lambda) - 1}{2}. \quad (3.12)$$

És natural interrogar-se per l'eventual igualtat entre  $\tilde{P}_{k-1}(\lambda)$  i  $\frac{P_k(\lambda)-1}{2}$  per a valors de  $k$  inferiors a  $d-1$ , en base a que és certa per a  $k = d-1$  (3.12). Donat que  $P_k(-\lambda) = (-1)^k$ , els polinomis  $P_k^+$ ,  $P_k^-$ , part parella, imparella de  $P_k$ , compleixen

$$(k \text{ imparell}) \quad P_k^+(\lambda) = \frac{P_k(\lambda) + P_k(-\lambda)}{2} = \frac{P_k(\lambda) - 1}{2}, \quad (k \text{ parell}) \quad P_k^-(\lambda) = \frac{P_k(\lambda) - P_k(-\lambda)}{2} = \frac{P_k(\lambda) - 1}{2},$$

són, per a cada paritat de  $k$ , de grau  $k-1$  i pertanyen a  $\mathcal{B}_{k-1}(\mathcal{M}^{**})$ . Per tant,

$$\tilde{P}_{k-1}(\lambda) \geq \frac{P_k(\lambda) - 1}{2} \quad (1 \leq k \leq d-1). \quad (3.13)$$

La igualtat, per a  $1 \leq k \leq d-2$ , no s'assoleix en general.

**Exemple 3.3.5** Considerem la malla simètrica  $\mathcal{M} = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$  (fem notar que aquests són els autovalors de l'hipercub  $Q_5$ ). Llavors  $\mathcal{M}^* = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$ ,  $\mathcal{M}^{**} = \{-3, -1, 1, 3\}$ . Anticipant l'ús de tècniques que es presentaran a la Secció 3.4, donem els respectius polinomis alternants i els seus valors en  $\lambda = 5$ .

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{3}{8}, & P_4(5) &= 31 \\ P_3 &= \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{9}{16}x - \frac{11}{16}, & P_3(5) &= 9 & ; & \quad \tilde{P}_3 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{6}x, & \tilde{P}_3(5) &= 15 \\ P_2 &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}, & P_2(5) &= \frac{7}{2} & ; & \quad \tilde{P}_2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}, & \tilde{P}_2(5) &= 5 \\ P_1 &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & P_1(5) &= \frac{3}{2} & ; & \quad \tilde{P}_1 = \frac{1}{3}x, & \tilde{P}_1(5) &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

A efectes dels nostres actuals interessos notem, Proposició 3.3.1, que  $\tilde{P}_k$  té la paritat de  $k$ . També, d'acord amb la Proposició 3.3.4, el polinomi  $\tilde{P}_3$  és la part imparella de  $P_4$  i es compleix la igualtat (3.12). En canvi observem que en (3.13) es produeix la desigualtat estricta per a  $k \leq 3$ .

### 3.4 Sobre el càlcul de polinomis alternants

Per a una malla  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_d < \dots < \lambda_1\}$  i  $\lambda \notin [\lambda_d, \lambda_1]$ , el treball fet fins ara, ha donat resposta teòrica respecte de l'existència, unicitat i algunes propietats, del polinomi que, per a cada  $0 \leq k \leq d-1$ , aconseguim:

- maximitzar el valor  $p(\lambda)$
- per els polinomis en  $\mathbb{R}_k[x]$  sotmesos a les restriccions  $|p(\lambda_l)| \leq 1$ , per a  $l = 1, \dots, d$ .

Hem establert que la solució és  $P_k$  per a  $\lambda > \lambda_1$  i  $(-1)^k P_k(-x)$  si  $\lambda < \lambda_d$  i hem donat caracteritzacions per aquests polinomis, per exemple el Teorema 3.2.4 i la Proposició 3.2.5. El que no hem fet per ara és donar una expressió general o almenys algorismes de càlcul per els  $k$ -polinomis alternants. En el que segueix mostrarem l'aconseguit a aquest respecte.

- A) Respecte de la relació amb els polinomis de Chebyshev. Si  $\sigma(x) = \frac{2x - \lambda_1 - \lambda_d}{\lambda_1 - \lambda_d}$ , el polinomi de Chebyshev "traslladat",  $T_k \circ \sigma$ , pertany a  $\mathcal{B}_k$ . De la representació  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ , vàlida en  $[-1, 1]$ , la malla  $T_k^{-1}(\{-1, 1\})$  és  $T_k = \left\{ \mu_l = \cos \frac{(l-1)\pi}{k} : l = 1, \dots, k+1 \right\}$ , amb  $T_k(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ . Llavors,

**Proposició 3.4.1** *El  $h$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$  compleix*

$$P_h(\lambda) \geq \text{ch} \left[ h \operatorname{argch} \left( \frac{2\lambda - \lambda_1 - \lambda_d}{\lambda_1 - \lambda_d} \right) \right]$$

per a tot  $h = 0, 1, \dots, d-1$ , i  $\lambda > \lambda_1$ . Si  $\sigma^{-1}T_k \subset \mathcal{M}^*$ , llavors el  $h$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$  és  $P_h = T_h \circ \sigma$ , per a  $h$  divisor de  $k$ . Aquest és l'únic cas en que la desigualtat anterior és igualtat.

**Demostració** És conseqüència dels comentaris anteriors, del Teorema 3.2.4 i de la representació  $T_h(x) = \text{ch}(h \operatorname{argch} x)$ , per a  $x > 1$ .  $\square$

- B) Donada una malla  $\mathcal{N}^* = \{\mu_{k+1} < \dots < \mu_1\}$  i un punt  $x$  que no hi pertanyi, indiquem  $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}^* \cup \{x\}$ . En particular, si  $\mathcal{N} = \{\mu_{k+1} < \dots < \mu_1 < \mu_0 (= \lambda)\}$ ,  $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}$ . Introduïm la notació,

$$[y, \mathcal{N}_x] = \prod_{z \in \mathcal{N}_x^* \setminus \{y\}} (y - z)$$

Indicarem, per a  $h = 0, 1, \dots, |\mathcal{N}|$ ,

$$\pi_h(\mathcal{N}) = |[\mu_h, \mathcal{N}]| = \prod_{\mu_l \in \mathcal{N} \setminus \{\mu_h\}} |\mu_h - \mu_l| \quad (3.14)$$

El polinomi  $p(\mathcal{N}^*)$ , definit per  $p(\mathcal{N}^*)(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ , per a tot  $l = 1, \dots, k+1$ , pot expressar-se, usant el mètode d'interpolació de Newton, en la forma ( $s$  indica la funció signe),

$$p(\mathcal{N}^*)(x) = [x, \mathcal{N}_x] \sum_{l=1}^{k+1} \frac{s(x - \mu_l)}{|[\mu_l, \mathcal{N}_x]|} \quad (3.15)$$

Segui  $\mathcal{S}_k$  el conjunt de les submalles

$$\mathcal{N}^* = \{\lambda_d = \mu_{k+1} < \dots < \mu_2 < \mu_1 = \lambda_1\} \subset \mathcal{M}^* .$$

Segons el Teorema 3.2.4 i la Proposició 3.3.3, determinar  $P_k$  associat a la malla  $\mathcal{M}^*$  i calcular  $P_k(\lambda)$ , per a  $\lambda > \lambda_1$ , equival a trobar un element de  $\mathcal{S}_k$  tal que,

- complint  $[\mu_h, \mathcal{N}_{\mu_h}] \sum_{l=1}^{k+1} \frac{s(\mu_h - \mu_l)}{||[\mu_l, \mathcal{N}_{\mu_h}]||} \in [-1, 1], \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}^*, \quad (3.16)$

- maximitzi  $p(\mathcal{N}^*)(\lambda) = [\lambda, \mathcal{N}] \sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{||[\mu_l, \mathcal{N}]||} = \pi_0(\mathcal{N}) \sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{\pi_l(\mathcal{N})}. \quad (3.17)$

La recerca es realitza sobre  $|\mathcal{S}_k| = \binom{d-2}{k-1}$  submalles. Determinada una submalla solució (recorrem que no té per que ser única), el  $k$ -polinomi alternant el dóna (3.15).

C) Cassos particulars senzills. Ja al començament, (1), havíem establert

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_d} x - \frac{\lambda_1 + \lambda_d}{\lambda_1 - \lambda_d},$$

mitjançant una consideració geomètrica. Notem que  $P_1$  també és immediat de la Proposició 3.4.1 o també usant (3.16) i (3.17), ja que  $\mathcal{S}_1$  es redueix a la submalla  $\{\lambda_d < \lambda_1\}$ . Per a  $k = 2$ , raonem sobre la malla  $\sigma(\mathcal{M}^*) \subset [-1, 1]$ . Llavors  $p(\sigma(\mathcal{N}^*)) \in \mathcal{B}_2$  si i només si  $\sigma(\mathcal{N}^*) = \{-1 < \sigma(\lambda_l) < 1\}$ , amb  $\lambda_l$  triada de manera que  $|\sigma(\lambda_l)|$  sigui mínim. Existirà una submalla única, excepte si  $-\sigma(\lambda_l) \in \sigma(\mathcal{M}^*)$  en el qual cas n'hi haurien dues que serien simètriques respecte de l'origen i que determinarien el mateix polinomi. Per tant,  $P_2 = p(\mathcal{N}^*)$ , amb  $\mathcal{N}^* = \{\lambda_d < \lambda_l < \lambda_1\}$ , tal que  $\lambda_l$  estigui a mínima distància de  $\frac{\lambda_1 + \lambda_d}{2}$ . Llavors,

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{2}{(\lambda_1 - \lambda_l)(\lambda_l - \lambda_d)} \left( x^2 - (\lambda_1 + \lambda_d)x + \frac{\lambda_1 \lambda_l + \lambda_1 \lambda_d + \lambda_l \lambda_d - \lambda_l^2}{2} \right) \\ P_2(\lambda) &= \pi_0(\mathcal{N}) \left( \frac{1}{\pi_1(\mathcal{N})} + \frac{1}{\pi_l(\mathcal{N})} + \frac{1}{\pi_d(\mathcal{N})} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

D) Podem interpretar el  $k$ -polinomi alternant com solució del següent problema de programació lineal. Associem a cada polinomi  $p \in \mathbb{R}_d[x]$  el vector  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_d)$  definit per  $x_i = p(\lambda_i)$ , per a  $i = 0, \dots, d$ . La funció a optimitzar és  $x_0$  amb les restriccions,

a) Sobre  $p(\lambda_l)$ . S'expressen per

$$x_l \geq -1, \quad x_l \leq 1, \quad \text{per a } l = 1, \dots, d.$$

b) Sobre el grau de  $p$ . Usant diferències dividides,  $p$  pot posar-se en la forma,

$$p = [p; \lambda_0] + \sum_{m=1}^d [p; \lambda_0, \dots, \lambda_m] (x - \lambda_0) \cdots (x - \lambda_{m-1})$$

on els símbols  $[p; \dots]$  estan definits per  $[p; \lambda_l] = p(\lambda_l) = x_l$ , per a  $l = 0, 1, \dots, d$ , i la recursió  $[p; \lambda_i, \dots, \lambda_j] = \frac{[p; \lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}] - [p; \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_j]}{\lambda_i - \lambda_j}$ . Per tant  $p \in \mathbb{R}_k[x]$  és equivalent a

$$[p; \lambda_0, \dots, \lambda_m] = 0, \quad \text{per a } m = k + 1, \dots, d.$$

La recerca dels  $k$ -polinomis alternants associats a una malla  $\mathcal{M}^*$ , així com el seu valor en  $\lambda$  prefixat, pot tractar-se, en aquesta interpretació amb el mètode del simplex. Es dóna a continuació una rutina, usant el paquet simplex que té implementat Maple V i es mostra la seva acció sobre un exemple.

```

with(linalg):
with(simplex):
Entra els elements de la malla  $\mathcal{M} = \{\lambda\} \cup \mathcal{M}^*$  en ordre decreixent
malla:=[6, 4, 3, 1, 0, -2, -3, -5]:
Calculem els  $k$ -polinomis alternants per a la malla  $\mathcal{M}^*$ 
d:=nops(malla)-1:mallaestrella:=array(1..d)::sortida:=array(1..d):
for l from 2 to d+1 do mallaestrella[l-1]:=malla[l]: od:print(malla[1], ' ', mallaestrella):
xx:=array(1..d+1):Difd:=array(1..d+1,1..d+1):valors:=array(1..d-1,1..d+1):
for i from 1 to d+1 do Difd[1,i]:=xx[i]:od:
for k from 2 to d+1 do
  for h from 1 to d-k+2 do
    Difd[k,h]:=(Difd[k-1,h]-Difd[k-1,h+1])/(malla[h]-malla[h+k-1]):
  od:
od:
graucond:=array(1..d):
for t from 1 to d do graucond[t]:=Difd[d+2-t,1]=0:od:
intcond:=array(1..2*d):
for u from 1 to d do intcond[2*u-1]:=xx[u+1]<=1:intcond[2*u]:=xx[u+1]>=-1:od:
totcondicions:=convert(intcond,set):
for r from 1 to d-1 do
  totcondicions:=totcondicions union graucond[r]:
  xopt[r]:=convert(maximize(xx[1],totcondicions),list):
  for j from 1 to d+1 do
    for i from 2 to d+1 do
      if convert(lhs(xopt[r][j]),string)=cat('xx[' ,convert(i,string),']') then
        sortida[i-1]:=rhs(xopt[r][j]):
      fi:
    od:
  od:
  polalt:=x->subs(w=x,interp(mallaestrella, sortida, w)):
  print(sortida, ' ', cat('grau=' ,convert(d-r,string)), ' P = ', polalt(x), ' ',
    cat('P(' ,convert(malla[1],string), ') = ', polalt(malla[1]))):
od:

```

**Exemple 3.4.2** Obtenim, per a  $1 \leq k \leq 6$ , els valors dels  $k$ -polinomis alternants sobre la malla  $\mathcal{M}^* = \{4, 3, 1, 0, -2, -3, -5\}$ , els propis polinomis i els seus valors en  $\lambda = 6$ .

$$\begin{array}{rcccccccc}
 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & P_6 = \frac{1}{112}x^6 + \frac{9}{560}x^5 - \frac{27}{112}x^4 - \frac{29}{112}x^3 + \frac{81}{56}x^2 + \frac{36}{35}x - 1 & P_6(6) = \frac{1613}{7} \\
 1 & -1 & 1 & \frac{1}{9} & -1 & 1 & -1 & P_5 = \frac{1}{81}x^5 + \frac{1}{54}x^4 - \frac{8}{27}x^3 - \frac{29}{162}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} & P_5(6) = \frac{173}{3} \\
 1 & -1 & \frac{2}{7} & 1 & \frac{1}{14} & -1 & 1 & P_4 = \frac{11}{504}x^4 + \frac{5}{126}x^3 - \frac{211}{504}x^2 - \frac{5}{14}x + 1 & P_4(6) = \frac{289}{14} \\
 1 & -\frac{5}{9} & -1 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{6} & 1 & -1 & P_3 = \frac{5}{108}x^3 + \frac{2}{27}x^2 - \frac{73}{108}x - \frac{4}{9} & P_3(6) = \frac{49}{6} \\
 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & P_2 = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{10}x - 1 & P_2(6) = \frac{16}{5} \\
 1 & \frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & -1 & P_1 = \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} & P_1(6) = \frac{13}{9}
 \end{array}$$

Comparem els valors en  $\lambda = 6$  dels  $k$ -polinomis alternants, construïts sobre  $\mathcal{M}^* = \{4, 3, 1, 0, -2, -3, -5\}$  i els respectius polinomis de Chebyshev “translladats”,  $T_k$ , corresponents a l'interval  $[-5, 4]$ .

$$\begin{array}{ll}
 T_1(6) = 1.444\dots & P_1(6) = 1.444\dots \\
 T_2(6) = 3.172\dots & P_2(6) = 3.2 \\
 T_3(6) = 7.721\dots & P_3(6) = 8.166\dots \\
 T_4(6) = 19.133\dots & P_4(6) = 20.642\dots \\
 T_5(6) = 47.553\dots & P_5(6) = 57.666\dots \\
 T_6(6) = 118.244\dots & P_6(6) = 230.428\dots
 \end{array}$$





## Capítol 4

# Optimització de resultats mètrics. Aplicacions

Tornem als resultats presentats a la Secció 2.2 respecte de distàncies entre conjunts, excentricitat d'un conjunt i diàmetre d'un graf. El problema de maximitzar el quocient  $\frac{P(\lambda)}{\|P\|_\infty}$  en  $\mathbb{R}_k[x]$  ha estat l'objecte de la introducció i estudi, fets al Capítol 3, dels  $k$ -polinomis alternants associats a una malla. Els Teoremes 2.2.2, 2.2.3 i 2.2.4, s'optimitzen en la forma,

**Teorema 4.0.3** *Siguin  $C, D$  una parella de subconjunts de  $V$  i  $P_k^{CD}$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d_{CD} - 1$ , el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}_{CD}^*$ . Si  $P_k^{CD}(\lambda) > \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho C\|} \frac{\|\rho(V \setminus D)\|}{\|\rho D\|} = \Phi(C)\Phi(D)$ , llavors  $\partial(C, D) \leq k$ .*

**Teorema 4.0.4** *Sigui  $C$  un subconjunt no buit de  $V$  i  $P_k^C$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d_C - 1$ , el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}_C^*$ . Llavors, si  $P_k^C(\lambda) > \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - 1} = \Phi(C) \sqrt{\|\nu\|^2 - 1}$ , l'excentricitat de  $C$  compleix  $\varepsilon_C \leq k$ .*

**Teorema 4.0.5** *Sigui  $P_k$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d - 1$ , el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^*$ . Llavors, si  $P_k(\lambda) > \|\nu\|^2 - 1$ , el diàmetre del graf compleix  $D(\Gamma) \leq k$ .*

Aquests teoremes s'usaran sovint en la seva lectura pel contrarrecíproc. Reunim aquestes presentacions, reformulant els Teoremes 4.0.3, 4.0.4 i 4.0.5 en la forma,

**Proposició 4.0.6** *En les notacions dels teoremes anteriors, es compleix*

$$1. \partial(C, D) \geq k \Rightarrow \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho C\|} \frac{\|\rho(V \setminus D)\|}{\|\rho D\|} \geq P_{k-1}^{CD}(\lambda) \quad \text{per a } 1 \leq k \leq d_{CD}.$$

$$2. \varepsilon_C \geq k \Rightarrow \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - 1} \geq P_{k-1}^C(\lambda) \quad \text{per a } 1 \leq k \leq d_C.$$

$$3. D(\Gamma) \geq k \Rightarrow \|\nu\|^2 - 1 \geq P_{k-1}(\lambda) \quad \text{per a } 1 \leq k \leq d.$$

Estudiem-ne ara diverses aplicacions en diversos contextos.

## 4.1 Diàmetre i autovalors en grafs bipartits

Tractarem de millorar el resultat general del Teorema 4.0.5 en el cas de grafs bipartits. Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf bipartit i  $V = V_1 \cup V_2$  la descomposició en subconjunts estables. Sigui  $\mathcal{M} = \{\lambda_d < \lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 = \lambda\}$  la malla d'autovalors del graf i  $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M} \setminus \{\lambda_d, \lambda\}$ . Tornem a la Proposició 2.2.5 amb intenció d'optimitzar-ne l'enunciat usant els polinomis alternants. Donat  $k \leq d - 2$ , el  $k$ -polinomi alternant  $\tilde{P}_k$  associat a la malla  $\mathcal{M}^{**}$  té, d'acord amb la Proposició 3.3.1, la mateixa paritat que  $k$ . Per tant, essent  $\|\cdot\|_\infty$  la norma discreta del suprem associada a  $\mathcal{M}^{**}$ , si  $k$  és parell (resp. imparell),

$$\sup\{p(\lambda) : p \in \mathbb{R}_k[x], \|p\|_\infty = 1, p \text{ parell (resp. imparell)}\} = \tilde{P}_k(\lambda).$$

Així l'optimització de la Proposició 2.2.5 és,

**Proposició 4.1.1** *Sigui  $\Gamma$  un graf bipartit amb autovalors  $\mathcal{M} = \{\lambda_d < \lambda_{d-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 = \lambda\}$ , ( $\lambda_{d-k} = -\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ ). Indiquem  $\nu$  un vector propi positiu associat a  $\lambda$  i  $\alpha_r$  la mínima component de  $\nu$  entre les corresponents al subconjunt de vèrtexs estable  $V_r$ ,  $r = 1, 2$ . Essent  $\tilde{P}_k$ , per a  $k \leq d - 2$ , el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M} \setminus \{\lambda_d, \lambda\}$ , es té*

$$\tilde{P}_k(\lambda) > \xi(k) \implies D(\Gamma) \leq k + 1 \quad , \quad \text{essent} \quad \xi(k) = \begin{cases} \prod_r \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_r^2} - 1} & (k \text{ imparell}) \\ \max_r \left\{ \frac{\|\nu\|^2}{2\alpha_r^2} - 1 \right\} & (k \text{ parell}) \end{cases}.$$

En el cas particular de ser  $\Gamma$  regular, podem prendre  $\nu = (1, \dots, 1)$ , amb el que l'enunciat anterior s'unifica en,

**Proposició 4.1.2** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular bipartit amb  $n$  vèrtexs. Llavors,*

$$\tilde{P}_k(\lambda) > \frac{n}{2} - 1 \implies D(\Gamma) \leq k + 1.$$

Com és lògic d'esperar, per l'afegit al raonament del caràcter bipartit del graf, la Proposició 4.1.1 és més forta que el general Teorema 4.0.5. Observem on es produeix la millora. Pel caràcter homogeni de les expressions que apareixen en la Proposició 4.1.1, podem triar  $\nu = (\nu_1 | \nu_2)$  amb mínima component la unitat. És clar que  $\xi(k) \leq \frac{\|\nu\|^2}{2} - 1$ , i que la igualtat és sempre certa per a  $k$  parell, i per a  $k$  imparell quan

els vectors  $\nu_1, \nu_2$  tinguin ambdós mínima component 1. Suposem que es verifica  $P_{k+1}(\lambda) > \|\nu\|^2 - 1$ . Recordant (3.13) tenim,

$$\tilde{P}_k(\lambda) \stackrel{(a)}{\geq} \frac{1}{2} (P_{k+1}(\lambda) - 1) \stackrel{(b)}{>} \frac{\|\nu\|^2}{2} - 1 \stackrel{(c)}{\geq} \xi(k), \quad (4.1)$$

amb el que es compleix la hipòtesi de la Proposició 4.1.1 i s'obté la conclusió comuna, via aquesta proposició o el Teorema 4.0.5,  $D(\Gamma) \leq k + 1$ . Fem una observació complementària en el cas en que  $d$  és parell i  $k = d - 2$ . Llavors la desigualtat (a) és igualtat segons (3.12). També com  $k$  és parell (c) és igualtat. Per tant en aquest cas la Proposició 4.1.1 i el Teorema 4.0.5 són equivalents. A més, en aquest cas, la igualtat  $P_{d-1}(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$  es tradueix en  $\tilde{P}_{d-2}(\lambda) = \frac{\|\nu\|^2}{2} - 1 = \xi(d - 2)$ . Aquesta observació s'insereix en la definició de graf P-frontera en el Capítol 5. Per a  $k < d - 2$  és d'esperar, via la desigualtat estricta en (3.13), la conversió de la igualtat  $P_{k+1}(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$  en la desigualtat  $\tilde{P}_k(\lambda) > \xi(k)$  i, per tant, la conclusió  $D(\Gamma) \leq k + 1$ . El màxim progrés entre un i altre enunciat és esperable quan  $k$  és imparell i menor que  $d - 2$ .

## 4.2 Sobre el pes d'un conjunt i la seva excentricitat

Donat que  $P_k^C(\lambda) \geq P_k(\lambda)$ , Proposició 3.1.6, podem debilitar el Teorema 4.0.4 en la forma

$$P_k(\lambda) > \frac{\|\rho(V \setminus C)\|}{\|\rho C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - 1} \Rightarrow \varepsilon_C \leq k \quad (4.2)$$

en la que el conjunt  $C$  només apareix a través del seu pes. Operant podem expressar (4.2) en la forma

**Proposició 4.2.1** *Sigui  $P_k$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d - 1$ , el  $k$ -polinomi alternant associat a la malla  $\mathcal{M}^*$ . Per a tot conjunt de vèrtexs  $C$  es compleix*

$$\|\rho C\| > \frac{\|\nu\|}{\sqrt{1 + \frac{P_k^2(\lambda)}{\|\nu\|^2 - 1}}} \Rightarrow \varepsilon_C \leq k.$$

**Demostració** Per a  $k \leq d_C - 1$  val el càlcul a partir de (4.2). Per a  $k \geq d_C$  el resultat s'obté de la Proposició 2.1.2.  $\square$

Notem algunes situacions particulars per a aquest enunciat.

1. Si  $P_k(\lambda) > \|\nu\|^2 - 1$ , llavors  $\frac{\|\nu\|}{\sqrt{1 + \frac{P_k^2(\lambda)}{\|\nu\|^2 - 1}}} < 1$ . En conseqüència, tot conjunt de vèrtexs, en particular qualsevol vèrtex, té excentricitat menor o igual que  $k$ , reobtenint el Teorema 4.0.5.
2. Si  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$ , la Proposició 4.2.1 es converteix en  $\|\rho C\| > 1 \Rightarrow \varepsilon_C \leq k$ . En particular, tot conjunt de més d'un vèrtex té excentricitat menor o igual que  $k$  i el diàmetre del graf és menor o igual que  $k + 1$ . També observem que, cas de tenir diàmetre  $k + 1$ , els vèrtexs de pes unitari són els únics que poden ser diametral.

3. Sigui  $0 \leq k \leq d-1$ . Per a cada vèrtex  $u$  considerem el seu  $k$ -exterior  $E_k^u$ . Si  $E_k^u$  no és buit, la seva excentricitat serà major que  $k$ . De la Proposició 4.2.1 es complirà

$$\|\nu\|^2 - \|\rho N_k^u\|^2 = \|\rho E_k^u\|^2 \leq \frac{\|\nu\|^2}{1 + \frac{P_k^2(\lambda)}{\|\nu\|^2 - 1}}$$

que, trivialment, seria també cert si  $E_k^u$  fos buit. Calculant i de l'arbitrarietat de  $u$  s'obté

$$\min_{u \in V} \{\|\rho N_k^u\|^2\} \geq \frac{\|\nu\|^2 P_k^2(\lambda)}{\|\nu\|^2 - 1 + P_k^2(\lambda)} \quad (0 \leq h \leq d-1) \quad (4.3)$$

que proporciona una fita inferior, per a cada  $h$ , del pes del  $h$ -entorn de tot vèrtex.

### 4.3 Sobre pesos i cardinals de conjunts i els seus $k$ -exteriors

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$ . Per a cada conjunt  $C \subset V$  i cada  $0 \leq k \leq \varepsilon_C - 1$ , hem definit el  $k$ -exterior de  $C$ ,  $E_k^C$ , com el conjunt de vèrtexs amb distància a  $C$  major que  $k$ . Usant la Proposició 4.0.6 i tenint en compte la Proposició 3.1.6, es té  $\Phi(C)\Phi(E_k^C) \geq P_k(\lambda)$ . Elevant al quadrat i aïllant  $\|\rho E_k^C\|^2$ , obtenim,

$$\|\rho E_k^C\|^2 \leq \frac{\|\nu\|^2 (\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2)}{\|\nu\|^2 + (P_k^2(\lambda) - 1) \|\rho C\|^2}, \quad 0 \leq k \leq \varepsilon_C - 1, \quad (4.4)$$

que podem estendre trivialment a  $0 \leq k \leq D(\Gamma) - 1$ .

Fitant (4.4), podem enunciar

**Proposició 4.3.1** *Sigui  $\Gamma$  un graf de diàmetre  $D$ . Per a  $0 < r < |V|$ ,  $0 \leq k \leq D-1$ , indiquem  $g(r) = \min\{\|\rho C\|^2 : |C| = r\}$ ,  $G_k(r) = \max\{\|\rho E_k^C\|^2 : |C| = r\}$ . Llavors,*

$$G_k(r) \leq \frac{\|\nu\|^2 (\|\nu\|^2 - g(r))}{\|\nu\|^2 + (P_k^2(\lambda) - 1) g(r)}$$

De la definició de  $\nu$  es té  $g(1) = 1$ . Per tant  $G_k(1) \leq \frac{\|\nu\|^2 (\|\nu\|^2 - 1)}{\|\nu\|^2 + P_k^2(\lambda) - 1} = \frac{\|\nu\|^2}{1 + \frac{P_k^2(\lambda)}{\|\nu\|^2 - 1}}$ . Podem treure'n

algunes conseqüències,

1. Si  $P_k(\lambda) > \|\nu\|^2 - 1$  llavors  $G_k(1) < 1$  i, per tant, és nul, d'on no existeix cap parell de vèrtex és a distància major que  $k$ . Per tant  $D(\Gamma) \leq k$ , reobtenint el Teorema 4.0.5.
2. Si  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$  obtenim  $G_k(1) \leq 1$ . Hi han dues opcions: (i)  $G_k(1) = 0$ , amb el que  $D(\Gamma) \leq k$ ; (ii)  $G_k(1) = 1$ , el que implica que  $D(\Gamma) = k + 1$  i que cada vèrtex diametral només pot tenir-ne un de diametralment oposat i, a més, tot vèrtex diametral té pes unitat. Tornarem sobre aquest fet en el Capítol 5.

Restringint-nos a grafs regulars, amb el que  $g(r) = r$ , tenim

**Corol·lari 4.3.2** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular de  $n$  vèrtexs i diàmetre  $D$ . Per a  $0 < r < |V|$ ,  $0 \leq k \leq D - 1$ , llavors,  $G_k(r)$ , màxim nombre de vèrtexs que tenen almenys  $r$  vèrtexs a distància major que  $k$ , compleix*

$$G_k(r) \leq \left\lfloor \frac{n(n-r)}{n+r(P_k^2(\lambda)-1)} \right\rfloor.$$

Si el nostre graf regular té diàmetre espectralment màxim, prenent  $r = 1$ , podem concloure,

**Corol·lari 4.3.3** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular de  $n$  vèrtexs i diàmetre  $D(=d)$ . Indiquem  $P$  el  $(d-1)$ -polinomi alternant. El grau màxim,  $\Delta^*$ , del graf  $\Gamma_d = (V, E^*)$ , on dos vèrtexs són adjacents quan són a distància  $d$ , compleix*

$$\Delta^* \leq \left\lfloor \frac{n(n-1)}{n-1+P^2(\lambda)} \right\rfloor.$$

Per exemple, en el graf de Petersen, amb autovalors 3, 1,  $-2$  i diàmetre 2, es té  $P(3) = \frac{7}{3}$ . Llavors, el resultat anterior dóna  $\Delta^* \leq \left\lfloor \frac{90}{9+\frac{49}{9}} \right\rfloor = 6$ , i la fita s'assoleix. En la part final d'aquest treball, Teorema 10.3.8, s'establirà una conseqüència estricta sobre l'estructura del graf, en cas de produir-se la igualtat en una expressió d'aquest tipus.

## 4.4 Sobre el $k$ -nombre d'independència

Donat un graf  $\Gamma$  indiquem  $n$  el nombre de vèrtexs i per  $D$  el seu diàmetre. Per a cada  $k = 0, 1, \dots, D-1$ , direm que un conjunt de vèrtexs  $X$  és  $k$ -independent quan qualsevulla parella de vèrtexs de  $X$  diferents, compleixen que la distància entre ells és major que  $k$ . Al màxim cardinal dels conjunts  $k$ -independents,  $\alpha_k$ , se l'anomena  $k$ -nombre d'independència de  $\Gamma$  (veure Delorme i Tillich [18]). Aquesta definició generalitza l'estàndar de nombre d'independència o nombre d'estabilitat del graf, que correspon a l'anterior definició per a  $k = 1$ . Trivialment  $\alpha_0 = n$  i  $\alpha_{D-1} \geq 2$ . Farem ús de la Proposició 4.0.6(1) per obtenir una fitació per a  $\alpha_k$  en termes dels autovalors del graf. Com per  $k = 0$  tenim el valor exacte de  $\alpha_0$ , les desigualtats que obtindrem, tot i ser certes en aquest cas, seran irrelevantes. Suposarem, doncs,  $k = 1, \dots, D-1$  i també que el graf és d'almenys tres vèrtexs o equivalentment  $\|\nu\|^2 \geq 3$ .

Notem primer l'equivalència entre les afirmacions (a)  $X$  és  $k$ -independent i (b) per a tota partició  $X = X_1 \cup X_2$  en subconjunts no buits, es compleix  $\partial(X_1, X_2) > k$ . En efecte, sigui  $e_r$  un vèrtex de  $X$ . Llavors, si (b) és cert,  $\partial(\{e_r\}, X \setminus \{e_r\}) > k$  i per tant  $\partial(e_r, e_s) > k$  per a tot vèrtex  $e_s \in X$  diferent de  $e_r$ . L'altra implicació és evident.

**Proposició 4.4.1** *En les notacions anteriors, per a tot  $k = 1, \dots, D-1$ , es compleix*

$$\alpha_k < \frac{2\|\nu\|^2}{P_k(\lambda)+1} + \sqrt{5} - 2$$

essent  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^*$ .

**Demostració** Sigui  $X$  un conjunt  $k$ -independent amb cardinal  $\alpha_k$ . Per a tota partició  $X = X_1 \cup X_2$ , amb  $1 \leq |X_1| = x_1$  i  $1 \leq |X_2| = x_2$ , es compleix  $\partial(X_1, X_2) \geq k + 1$ . Usant (2.4), la Proposició 3.1.6 i la Proposició 4.0.6(1) tenim

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\|\nu\|^2 - x_1}{x_1}} \sqrt{\frac{\|\nu\|^2 - x_2}{x_2}} \geq \frac{\|\rho(V \setminus X_1)\|}{\|\rho X_1\|} \frac{\|\rho(V \setminus X_2)\|}{\|\rho X_2\|} \geq P_k^{X_1 X_2}(\lambda) \geq P_k(\lambda),$$

per a tota parella d'enters  $(x_1, x_2)$  amb  $x_1 + x_2 = \alpha_k$ , i on  $f$  és la funció  $(0, \alpha_k) \times (0, \alpha_k) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $f(x, y) = \sqrt{\frac{(\|\nu\|^2 - x)(\|\nu\|^2 - y)}{xy}}$ . Per tant,

$$P_k(\lambda) \leq \min\{f(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y = \alpha_k\} = \gamma$$

La funció  $f$  restringida a la diagonal,  $x + y = \alpha_k$ , del quadrat té, en el punt  $(\frac{\alpha_k}{2}, \frac{\alpha_k}{2})$ , mínim absolut de valor  $\frac{2\|\nu\|^2 - \alpha_k}{\alpha_k}$ . En cas de ser  $\alpha_k$  parell,  $\gamma$  coincideix amb el mínim absolut. Si  $\alpha_k$  és senar,  $2r + 1$ ,

llavors  $\gamma = f(r + 1, r) = f(r, r + 1) = \sqrt{\frac{(2\|\nu\|^2 - \alpha_k)^2 - 1}{\alpha_k^2 - 1}}$ . De  $P_k(\lambda) \leq \gamma$ , obtenim

$$(\alpha_k \text{ parell}) \quad \alpha_k \leq \frac{2\|\nu\|^2}{P_k(\lambda) + 1} = (\star) \quad (4.5)$$

$$(\alpha_k \text{ senar}) \quad \alpha_k \leq \frac{\sqrt{(P_k^2(\lambda) - 1)^2 + 4\|\nu\|^4 P_k^2(\lambda)} - 2\|\nu\|^2}{P_k^2(\lambda) - 1} = (\star\star) \quad (4.6)$$

Tractem d'expressar-ho en forma més agradable. Notem que de la Proposició 4.0.6(3), es té  $P_k(\lambda) \leq \|\nu\|^2 - 1$ , per a tot  $0 \leq k \leq D - 1$ . Llavors, indicant  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3, 1 < y \leq x - 1\}$ , i introduint la funció  $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $H(x, y) = \frac{\sqrt{(y^2 - 1)^2 + 4x^2 y^2} - 2x}{y^2 - 1} - \frac{2x}{y + 1}$ , resulta  $(\star\star) - (\star) = H(\|\nu\|^2, P_k(\lambda))$ . Estudiada  $H$ , resulta ser no negativa. Per tant una expressió comuna en els dos casos és

$$\alpha_k \leq \frac{\sqrt{(P_k^2(\lambda) - 1)^2 + 4\|\nu\|^4 P_k^2(\lambda)} - 2\|\nu\|^2}{P_k^2(\lambda) - 1} \quad (k = 1, \dots, D - 1). \quad (4.7)$$

La restricció  $H_x$  de  $H$  a la secció de  $\Delta$  obtinguda fixant  $x$ , té màxim absolut en  $y = x - 1$  amb valor  $K(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - 12x + 8} - 2x + 2}{x - 2}$ , ( $x \geq 3$ ). Per tant, una segona versió de la fitació, seria

$$\alpha_k \leq \frac{2\|\nu\|^2}{P_k(\lambda) + 1} + \frac{\sqrt{5\|\nu\|^4 - 12\|\nu\|^2 + 8} - 2\|\nu\|^2 + 2}{\|\nu\|^2 - 2} \quad (k = 1, \dots, D - 1). \quad (4.8)$$

i notem que una condició necessària per a la igualtat és  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$ . La funció  $K$  és monòtona creixent i fitada. El seu extrem superior, no assolible, és  $\sqrt{5} - 2$ . Per tant, una altra versió del resultat, és

$$\alpha_k < \frac{2\|\nu\|^2}{P_k(\lambda) + 1} + \sqrt{5} - 2 \quad (k = 1, \dots, D - 1). \quad (4.9)$$

que és el nostre enunciat. ☒

Les fitacions (4.5) i (4.6), les més estrictes, són poc operatives desconeixent la paritat del  $k$ -nombre d'independència. Les (4.7), (4.8) i (4.9), són, de manera suau, progressivament més febles. L'enunciat amb la versió (4.9) es justifica per el seu agradable aspecte i en l'estimació, despres del caràcter enter de  $\alpha_k$  i del valor  $\sqrt{5} - 2 \simeq 0.236068\dots$ , que en la pitjor situació ( $\alpha_k$  parell), la pèrdua de precisió només es produiria en l'ordre d'un 23% dels cassos i en magnitud d'una unitat. Una situació en la que es mostra la bondat de la nostra fitació, és el cas en que  $\Gamma$  és distància-regular  $r$ -antipodal. El diàmetre en un graf distància-regular és  $d = |\mathcal{M}^*|$  (caràcter extremal). De ser  $r$ -antipodal  $\alpha_{d-1} = r$  i veurem, més endavant, Proposició 5.5.7 que, per a aquests grafs,  $P_{d-1}(\lambda) = \frac{2}{r}|V| - 1$ . Llavors la Proposició 4.4.1 proporciona la fitació  $\alpha_{d-1} < \frac{2|V|}{P_{d-1}(\lambda) + 1} + \sqrt{5} - 2 = r + 0.236\dots$ , és a dir,  $\alpha_{d-1} \leq r$ , que en el nostre cas és igualtat.

## 4.5 Sobre el $(r, s)$ -diàmetre

Per a un graf  $\Gamma = (V, E)$ , indiquem  $\mathcal{P}_l$  el conjunt dels  $\binom{|V|}{l}$  subconjunts de  $V$  de  $l$  elements,  $l = 1, \dots, n$ , on  $n = |V|$ . Per a una parella de naturals  $r, s$  amb  $r+s \leq n$ , considerem la restricció de l'aplicació distància entre conjunts,  $(C, D) \mapsto \partial(C, D)$ , a  $\partial_{r,s} : \mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_s \rightarrow \mathbb{R}$ . El màxim,  $D_{r,s}$ , d'aquesta funció el definim com el  $(r, s)$ -diàmetre del graf. Notem que la noció ordinària de diàmetre correspon a  $D_{1,1}$ . Establirem una fitació superior per  $D_{r,s}$ , en forma similar al Teorema 4.0.5.

**Proposició 4.5.1** *Sigui  $P_k$  el polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^*$ . Llavors:*

$$P_k(\lambda) > \sqrt{\left(\frac{\|\nu\|^2}{r} - 1\right) \left(\frac{\|\nu\|^2}{s} - 1\right)} \Rightarrow D_{r,s} \leq k \quad (0 \leq k \leq d-1).$$

**Demostració** Usant l'aplicació  $\Phi$  i la propietat (2.4) per a qualsevulla parella  $(C, D)$  de  $\mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_s$ , es té

$$\Phi(C) \leq \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{r} - 1}, \quad \Phi(D) \leq \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{s} - 1}$$

De la Proposició 3.1.6 resulta  $P_k^{CD}(\lambda) \geq P_k(\lambda)$ , per a  $0 \leq k \leq d_{CD} - 1$ . La hipòtesi de l'enunciat permet establir la cadena de desigualtats

$$P_k^{CD}(\lambda) \geq P_k(\lambda) > \sqrt{\left(\frac{\|\nu\|^2}{r} - 1\right) \left(\frac{\|\nu\|^2}{s} - 1\right)} \geq \Phi(C)\Phi(D)$$

Aplicant el Teorema 4.0.3 tenim  $\partial(C, D) \leq k$ , que també serà cert per a  $d_{CD} \leq k \leq d-1$  per la Proposició 2.1.1. L'arbitrarietat de  $C$  i  $D$  prova el resultat. ☒

Notem que per a  $r = s = 1$  retrobem el Teorema 4.0.5.

Usant una tècnica similar, podem obtenir una nova fitació per al diàmetre del graf. Donada una parella  $u, v$  de vèrtexs, considerem els respectius entorns  $N_l(u), N_l(v)$ , on  $l$  serà fixat posteriorment. Introduïm

$\rho_i^*$  com el mínim del conjunt  $\{\|\rho N_i(w)\|^2 : w \in V\}$ . Llavors, si es complis la hipòtesi  $P_k(\lambda) > \frac{\|\nu\|^2}{\rho_i^*} - 1$ , tindriem les desigualtats

$$P_k(\lambda) > \frac{\|\nu\|^2}{\rho_i^*} - 1 \geq \sqrt{\left(\frac{\|\nu\|^2}{\|\rho N_i(u)\|^2} - 1\right) \left(\frac{\|\nu\|^2}{\|\rho N_i(v)\|^2} - 1\right)} = \Phi(N_i(u))\Phi(N_i(v))$$

i del Teorema 4.0.3 i la definició dels entorns es té  $\partial(u, v) \leq k + 2l$ . Com aquesta conclusió pot establir-se per a tota parella de vèrtexs, resulta

**Proposició 4.5.2** *Sigui  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^*$ . Llavors:*

$$P_k(\lambda) > \frac{\|\nu\|^2}{\rho_i^*} - 1 \Rightarrow D \leq k + 2l$$

Definim  $\delta_i^* = \min_{u \in V} |N_i(u)|$ . Com el pes d'un conjunt de vèrtexs majora el seu cardinal es té  $\delta_i^* \leq \rho_i^*$ , amb el que podem debilitar la Proposició 4.5.2 en la forma:

**Corollari 4.5.3** *Sigui  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^*$ . Llavors:*

$$P_k(\lambda) > \frac{\|\nu\|^2}{\delta_i^*} - 1 \Rightarrow D \leq k + 2l$$

Indiquem  $g$  el 'girth' del graf, mínima longitud d'un cicle. Observem que prenent  $l = \ell \equiv \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor$  i essent  $\delta$  el grau mínim, podem estimar  $\delta_\ell^*$  per la desigualtat

$$\delta_\ell^* \geq 1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \dots + \delta(\delta - 1)^{\ell-1} \equiv n(\delta, \ell).$$

Per tant, en les notacions introduïdes, hem establert

**Corollari 4.5.4** *Sigui  $P_k$  el  $k$ -polinomi alternant per a la malla  $\mathcal{M}^*$  associada a un graf  $\Gamma$  de 'girth'  $g$ . Llavors:*

$$P_k(\lambda) > \frac{\|\nu\|^2}{n(\delta, \ell)} - 1 \Rightarrow D \leq k + 2\ell$$

## 4.6 Aplicació a la vèrtex connectivitat

Un conjunt de vèrtexs  $T$  d'un graf connex  $\Gamma = (V, E)$ , es diu que és un *conjunt de tall* quan el graf induït en  $V \setminus T$  deixa de ser connex. El mínim cardinal dels conjunts de tall de  $\Gamma$  se l'anomena *connectivitat* (o *vèrtex connectivitat*) del graf i s'acostuma a representar per  $\kappa \equiv \kappa(\Gamma)$ . És clar que, si  $\delta$  és el mínim grau del graf, sempre  $\kappa \leq \delta$ . El fet que un conjunt  $T$  sigui de tall és equivalent a la possibilitat d'una



descomposició disjunta  $V = X \cup T \cup Y$ , amb  $\partial(X, Y) \geq 2$ . Llavors si  $|X| = x$ ,  $|Y| = y$ , es compleix  $D_{x,y} \geq 2$ , i llegint al contrarrecíproc la Proposició 4.5.1, tindriem,

$$f(x, y) = \left( \frac{\|\nu\|^2}{x} - 1 \right) \left( \frac{\|\nu\|^2}{y} - 1 \right) \geq P_1^2(\lambda).$$

Si  $|T| = t$ , llavors  $x, y$  estan sotmesos a la lligadura  $x + y = n - t$  i, a més, com a mínim han d'esser  $\delta - t + 1$ . Si  $H$  és el conjunt de parelles de naturals complint aquestes limitacions,

$$\max\{f(x, y) : (x, y) \in H\} = 1 + \|\nu\|^2 \frac{\|\nu\|^2 - n + t}{\min\{xy : (x, y) \in H\}},$$

i s'assoleix quan  $x, y$  prenen valors  $\delta - t + 1, n - \delta - 1$ . Recordant el valor de  $P_1(\lambda)$  donat en (3.3), l'acompliment de la desigualtat

$$\sqrt{\left( \frac{\|\nu\|^2}{\delta - t + 1} - 1 \right) \left( \frac{\|\nu\|^2}{n - \delta - 1} - 1 \right)} < \frac{2\lambda - \lambda_1 - \lambda_d}{\lambda_1 - \lambda_d},$$

fa impossible l'existència d'un conjunt de tall de  $t$  elements. Indicant  $K$  la part esquerra de la desigualtat anterior, podem disposar-ho en el següent enunciat.

**Proposició 4.6.1** *Sigui  $\Gamma$  un graf d'ordre  $n$ , grau mínim  $\delta$  i autovalors,  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$ . Donat  $t < \delta$ , si*

$$\lambda_0 > \frac{K+1}{2}\lambda_1 - \frac{K-1}{2}\lambda_d \quad \text{on} \quad K = \sqrt{\left( \frac{\|\nu\|^2}{\delta - t + 1} - 1 \right) \left( \frac{\|\nu\|^2}{n - \delta - 1} - 1 \right)}$$

llavors  $\delta \geq \kappa > t$ .

En cas de ser el graf regular l'enunciat anterior adopta un aspecte més simple. Considerem la inequació en la variable real  $t$ ,

$$\lambda_0 > \frac{K+1}{2}\lambda_1 - \frac{K-1}{2}\lambda_d \quad \text{amb} \quad K = \sqrt{\left( \frac{n}{\lambda_0 - t + 1} - 1 \right) \left( \frac{\lambda_0 + 1}{n - \lambda_0 - 1} \right)}$$

Resolent-la, obtenim  $t < \frac{\lambda_0 + 1}{\xi + 1}$ , on  $\xi = \frac{n(\lambda_1 - \lambda_d)^2}{4(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_d)(n - \lambda_0 - 1)}$ . Respecte de la connectivitat del graf resulta,

**Corol·lari 4.6.2** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular d'ordre  $n$  amb autovalors,  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$ . La connectivitat del graf compleix*

$$\lambda_0 \geq \kappa \geq \left\lceil \frac{\lambda_0 + 1}{\xi + 1} \right\rceil, \quad \text{on} \quad \xi = \frac{n(\lambda_1 - \lambda_d)^2}{4(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_d)(n - \lambda_0 - 1)}.$$

És suggestiva l'expressió d'aquest resultat en el cas particular en que, a més, el graf sigui bipartit. És a dir  $\lambda_d = -\lambda_1$ . Llavors, l'enunciat és,

**Corollari 4.6.3** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular bipartit d'ordre  $n$  amb autovalors,  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$ . Llavors*

$$\lambda_0 \geq \kappa \geq \left\lceil \frac{\lambda_0 + 1}{\xi + 1} \right\rceil, \quad \text{on } \xi = \frac{n(\lambda_0 + \lambda_1)^2}{8\lambda_0(\lambda_0 - \lambda_1)(n - \lambda_0 - 1)}$$

Una observació més sobre grafs regulars i la connectivitat. En les notacions del Corollari 4.6.2, una condició suficient per a que el nombre de tall coincideixi amb  $\lambda_0$  és que  $\lambda_0 \leq \left\lceil \frac{\lambda_0 + 1}{\xi + 1} \right\rceil$ , o equivalentment,  $\frac{\lambda_0 + 1}{\xi + 1} > \lambda_0 - 1$ . Calculant amb l'expressió de  $\xi$  obtenim,

**Corollari 4.6.4** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular d'ordre  $n$  amb autovalors,  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$ . Llavors,*

$$n > \frac{\lambda_0 + 1}{1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_d)^2(\lambda_0 - 1)}{8(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_d)}} \implies \kappa = \lambda_0.$$

**Exemple 4.6.5** Testegem els resultats obtinguts sobre alguns grafs. Si considerem  $C_n$ , circuit de  $n$  vèrtexs, Figura 4.1(a), els paràmetres involucrats són, si  $n$  és parell ( $n = 2p$ ),  $\lambda_0 = 2$ ,  $\lambda_1 = 2 \cos \frac{\pi}{p}$ ,  $\lambda_d = -2$  i si  $n$  és imparell,  $\lambda_0 = 2$ ,  $\lambda_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{n}$ ,  $\lambda_d = 2 \cos \frac{n-1}{n}\pi$ . Realitzant el càlcul de la fita segons el Corollari 4.6.2, obtenim, reunint els cassos segons la paritat de  $n$ ,  $\kappa = 2$  per a  $n \leq 8$ , donant-nos la fita òptima, mentre que per a  $n \geq 9$ , ja només obtenim  $2 \geq \kappa \geq 1$ .

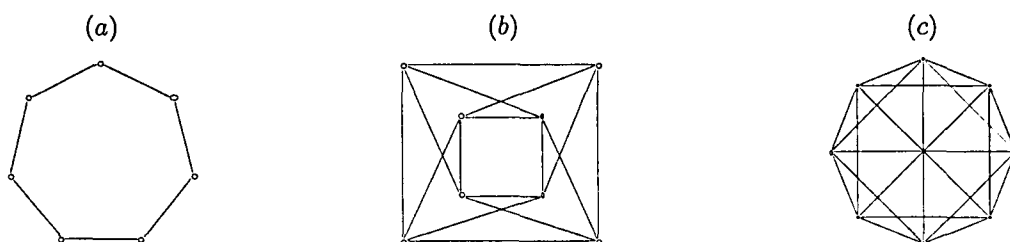


Figura 4.1: Exemples per a la connectivitat.

El graf regular bipartit de la Figura 4.1(b), té autovalors 4, 0, -4. En aquest cas,  $n = 8$ ,  $\lambda_0 = 4$ ,  $\lambda_1 = 0$ , amb el que el Corollari 4.6.3 proporciona  $\kappa \geq \lceil 3.75 \rceil = 4$ , amb el que  $\kappa = 4$ . Per el graf representat en la Figura 4.1(c), es té  $\lambda_0 = 5$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_d = -2.4142\dots$ , i ara la desigualtat del Corollari 4.6.4 és  $8 > 7.4676\dots$ , i per tant la vèrtex connectivitat és 5.

## Capítol 5

# Conjunts i grafs P-frontera

### 5.1 Conjunts $P_k$ -frontera

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i un subconjunt  $C$  de vèrtexs. L'acció d'un polinomi  $p \in \mathbb{R}_k[x]$  sobre el vector  $\rho C = \sum_{u \in C} \nu_u e_u$ , proporciona un vector pertanyent a l'envoltura lineal dels vectors  $e_v$  associats als vèrtexs  $v \in N_k^C$ . Per tant, es compleix l'equació  $\langle p\rho C, \rho E_k^C \rangle = 0$ . El fet que  $\partial(C, E_k^C) = k + 1$ , per a  $k \leq \varepsilon_C - 1$ , ens condueix, usant el Teorema 2.2.2, a que per a tot polinomi de grau fins a  $k$ , es compleix  $\frac{p(\lambda)}{\|p\|_{\infty}^{C E_k^C}} \leq \Phi(C)\Phi(E_k^C)$ , desigualtat que optimitzada amb l'ús del  $k$ -polinomi alternant associat a la malla reduïda intersecció, corresponent a  $C$  i  $E_k^C$ , proporciona  $P_k^{C E_k^C}(\lambda) \leq \Phi(C)\Phi(E_k^C)$ . Tenint en compte la Proposició 3.1.6, ampliant la malla a l'associada a  $C$ , obtenim

$$P_k^C(\lambda) \leq \Phi(C)\Phi(E_k^C) \quad (k = 0, 1, \dots, \varepsilon_C - 1). \quad (5.1)$$

**Definició 5.1.1** Direm que  $C$  és un conjunt  $P_k$ -frontera, on  $0 \leq k < \varepsilon_C$ , quan  $P_k^C(\lambda) = \Phi(C)\Phi(E_k^C)$ .

Trivialment, tot conjunt és  $P_0$ -frontera. Essent  $\lambda \equiv \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_{d_C}$  els autovalors locals de  $C$ , anomenarem  $C$  simplement conjunt  $P$ -frontera quan sigui  $P_{(d_C-1)}$ -frontera. Les desigualtats  $k < \varepsilon_C \leq d_C$  estableixen que si  $C$  és  $P$ -frontera llavors  $\varepsilon_C = d_C$ , és a dir, el caràcter extremal de  $C$ . Per no fer farragosa la notació suprimirem l'índex  $C$  quan la confusió no sigui possible.

Establirem ara una caracterització, important en el nostre treball, del caràcter  $P_k$ -frontera.

**Teorema 5.1.2** El conjunt  $C$  és  $P_k$ -frontera si i només si  $\rho N_k = \frac{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|}{\|\rho C\| \|\rho E_0\|} P_k \rho C$ . En aquest cas els autovalors locals de  $C$  i  $N_k$  coincideixen i el  $k$ -polinomi alternant pren valors  $\pm 1$  en tots els autovalors de l'espectre reduït de  $C$ .

**Demostració** Suposem el caràcter  $P_k$ -frontera de  $C$ . Considerem, en forma similar a (2.2), les descomposicions espectrals,

$$\rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z_1, \quad \rho N_k = \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z_2. \quad (5.2)$$

Establim la següent cadena de desigualtats,

$$\langle P_k z_1, z_2 \rangle \stackrel{(a)}{\leq} |\langle P_k z_1, z_2 \rangle| = |\langle P_k z'_1, z'_2 \rangle| \stackrel{(b)}{\leq} \|P_k z'_1\| \|z'_2\| \stackrel{(c)}{\leq} \|z'_1\| \|z'_2\| \stackrel{(d)}{\leq} \|z_1\| \|z_2\|, \quad (5.3)$$

on els  $z'_i$  són les projeccions dels  $z_i$  en la suma dels subespais propis corresponents als autovalors comuns dels espectres reduïts de  $C$  i  $N_k$ . Explorem ara la definició de  $E_k$  i la condició  $P_k$ -frontera de  $C$ .

$$\begin{aligned} 0 = \langle P_k \rho C, \rho E_k \rangle &= \left\langle \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \nu + P_k z_1, \rho E_k \right\rangle = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \|\rho E_k\|^2 + \langle P_k z_1, \nu - \rho N_k \rangle = \\ &= \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \|\rho E_k\|^2 + \left\langle P_k z_1, \left(1 - \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\nu\|^2}\right) \nu - z_2 \right\rangle = \\ &= \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \|\rho E_k\|^2 - \langle P_k z_1, z_2 \rangle \geq \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \|\rho E_k\|^2 - \|z_1\| \|z_2\| = \quad (5.4) \\ &= \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \|\rho E_k\|^2 - \sqrt{\|\rho C\|^2 - \frac{\|\rho C\|^4}{\|\nu\|^2}} \sqrt{\|\rho N_k\|^2 - \frac{\|\rho N_k\|^4}{\|\nu\|^2}} = \\ &= \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \|\rho E_k\|^2 - \frac{\|\rho C\| \|\rho N_k\|}{\|\nu\|^2} \|\rho E_0\| \|\rho E_k\| = \\ &= \frac{\|\rho C\|^2 \|\rho E_k\|^2}{\|\nu\|^2} [P_k(\lambda) - \Phi(C)\Phi(E_k)] = 0. \end{aligned}$$

Per tant la desigualtat en (5.4) és igualtat, el que es tradueix en la validesa en (5.3) de les igualtats en (a), (b), (c) i (d). La igualtat en (d) equival a  $z'_i = z_i$ , és a dir, la identitat entre els autovalors locals de  $C$  i  $N_k$ . De (b) es dedueix la proporcionalitat dels vectors  $P_k z_1$  i  $z_2$ , el que juntament amb (a), fa que  $P_k z_1 = \xi z_2$ , per a algun  $\xi$  positiu. Finalment (c) equival a  $P_k(\mu_i) = \pm 1$ , per a tot autovalor de l'espectre reduït de  $C$ . Podem calcular  $\xi$  per

$$\xi = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} = \frac{\|\rho C\| \|\rho E_0\|}{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|}.$$

Obtenim el nostre resultat efectuant el càlcul de  $P_k \rho C$ ,

$$P_k \rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \nu + P_k(z_1) = \frac{\|\rho C\| \|\rho E_0\|}{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|} \left[ \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z_2 \right] = \frac{\|\rho C\| \|\rho E_0\|}{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|} \rho N_k.$$

Recíprocament, projectem, en el subespai generat per  $\nu$ , la igualtat  $\rho N_k = \frac{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|}{\|\rho C\| \|\rho E_0\|} P_k \rho C$ . De

$$(5.2) \text{ obtenim, } \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\nu\|^2} = \frac{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|}{\|\rho C\| \|\rho E_0\|} \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda), \text{ és a dir, } P_k(\lambda) = \frac{\|\rho E_0\| \|\rho N_k\|}{\|\rho C\| \|\rho E_k\|} = \Phi(C)\Phi(E_k).$$

⊠

Treiem una mica més de rendiment als aspectes complementaris d'aquest teorema. Mantenint la hipòtesi de ser  $C$  conjunt  $P_k$ -frontera, observem que al tenir  $C$  i  $N_k$  els mateixos autovalors locals, de  $\rho N_k + \rho E_k =$

$\nu$ , resulta que també són comuns els autovalors locals de  $C$  i  $E_k$ . En particular els  $k$ -polinomis alternants,  $P_k^C$  i  $P_k^{E_k}$  coincideixen, amb el que

$$P_k^{E_k}(\lambda) = \Phi(C)\Phi(E_k) \geq \Phi(E_k^{E_k})\Phi(E_k), \quad (5.5)$$

ja que  $C$  és subconjunt del  $k$ -exterior de  $C$  i la funció  $\Phi$ , recordem (2.3), és estrictament decreixent. També, Proposició 3.1.6, al restringir la malla augmenta el valor en  $\lambda$  del  $k$ -polinomi alternant respectiu. Per tant, es compleixen les desigualtats

$$P_k^{E_k E_k^{E_k}}(\lambda) \geq P_k^{E_k}(\lambda) = \Phi(C)\Phi(E_k) \geq \Phi(E_k^{E_k})\Phi(E_k). \quad (5.6)$$

Si  $P_k^{E_k E_k^{E_k}}(\lambda) > \Phi(E_k^{E_k})\Phi(E_k)$ , el Teorema 4.0.3 ens proporcionaria, l'evidentment falsa conclusió, que la distància entre  $E_k$  i el seu  $k$ -exterior seria menor o igual que  $k$ . Per tant les desigualtats en (5.6) són igualtats. Així que  $C$  coincideix amb el  $k$ -exterior del seu  $k$ -exterior i  $E_k$  és també  $P_k$ -frontera. En conseqüència,

**Proposició 5.1.3** *L'aplicació "pas al  $k$ -exterior" sobre els conjunts  $P_k$ -frontera és interna i involutiva.*

Podem explicitar aquesta aplicació mitjançant  $H^C = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2 \pi_0} \prod_{l=1}^{d_C} (x - \mu_l)$ ,  $C$ -local polinomi de Hoffman,

que recordant (5.2) és immediat compleix  $H^C \rho C = \rho V = \nu$ . Fent ús del Teorema 5.1.2 es té que els polinomis de grau  $d_C$

$$T_d^C = H^C - \frac{\|\rho E_k\| \|\rho N_k\|}{\|\rho E_0\| \|\rho C\|} P_k, \quad T_d^{E_k} = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\rho E_k\|^2} H^C - \frac{\|\rho E_0\| \|\rho C\|}{\|\rho E_k\| \|\rho N_k\|} P_k, \quad (5.7)$$

compleixen,

$$T_d^C \rho C = \rho E_k, \quad T_d^{E_k}(\rho E_k) = \rho C; \quad T_d^C(\lambda) = \frac{\|\rho E_k\|^2}{\|\rho C\|^2}, \quad T_d^{E_k}(\lambda) = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\rho E_k\|^2}. \quad (5.8)$$

Com més endavant tractarem, notem que ambdós polinomis són inversos, en el sentit que  $T_d^C T_d^{E_k} \equiv 1$  mòdul el polinomi  $\prod_{l=0}^{d_C} (x - \mu_l)$ .

Tornant al Teorema 5.1.2 i explicitant la descomposició espectral de  $\rho C$ , obtenim per càlcul directe les descomposicions espectrals dels vectors  $\rho N_k$  i  $\rho E_k$  associats al nostre conjunt  $P_k$ -frontera. Es té,

**Proposició 5.1.4** *Sigui  $C$  un conjunt  $P_k$ -frontera. Essent  $\rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + \sum_{l=1}^{d_C} z_l$  la descomposició espectral del vector  $\rho C$ , es compleix*

$$\rho N_k = \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + \frac{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|}{\|\rho C\| \|\rho E_0\|} \sum_{l=1}^{d_C} s_l z_l, \quad \rho E_k = \frac{\|\rho E_k\|^2}{\|\nu\|^2} \nu - \frac{\|\rho N_k\| \|\rho E_k\|}{\|\rho C\| \|\rho E_0\|} \sum_{l=1}^{d_C} s_l z_l$$

on  $s_l = P_k(\mu_l) = \pm 1$  ( $1 \leq l \leq d_C$ ).

Indiquem  $\overline{C}$ , *antipodal de C*, el conjunt de vèrtexs a distància  $\varepsilon_C$  de  $C$ . En el següent resultat establirem una caracterització del caràcter  $P$ -frontera d'un conjunt en termes de les multiplicitats  $C$ -locals,  $m_i^C \equiv m_i = \|z_i\|^2$ , on  $z_i$  és la projecció de  $e_C = \frac{1}{\|\rho C\|} \rho C$  en  $\text{Ker}(x - \mu_i)$ , per a tot  $i = 0, 1, \dots, d \equiv d_C$ .

**Teorema 5.1.5** *Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$  considerem  $C \subset V$ . Siguin  $\lambda \equiv \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d$  els autovalors  $C$ -locals,  $P$  el  $(d-1)$ -polinomi alternant associat i  $m_0, m_1, \dots, m_d$ , les respectives multiplicitats  $C$ -locals. Suposem  $C$  extremal ( $\varepsilon_C = d$ ) i indiquem  $\overline{C}$  l'antipodal de  $C$ . Les tres afirmacions següents són equivalents:*

$$(a) \quad P(\lambda) = \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - 1} \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{\|\rho \overline{C}\|^2} - 1}, \text{ equivalentment, } P(\lambda) = \Phi(C)\Phi(\overline{C}).$$

$$(b) \quad \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} P\rho C + \rho \overline{C} = \nu.$$

$$(c) \quad \text{Les multiplicitats } C\text{-locals són } m_0 = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}, m_i = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \frac{\Phi(C)}{\Phi(\overline{C})} \frac{\pi_0}{\pi_i} \quad (1 \leq i \leq d).$$

*i expressen el caràcter  $P$ -frontera del conjunt  $C$ .*

**Demostració** (a) és directament la definició 5.1.1 de conjunt  $P_k$ -frontera, aplicada al nostre cas. (b) és l'aplicació de la Proposició 5.1.2 a quan  $k = d - 1$ . Suposem ara (b) cert. Usant la Proposició 5.1.4, les descomposicions espectrals de  $\rho C$  i  $\rho \overline{C}$  són

$$\rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + \sum_{i=1}^d z_i, \quad \rho \overline{C} = \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\nu\|^2} \nu - \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} z_i.$$

En particular,  $m_0 = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}$ , igualtat establerta també en (1.5). Per a cada  $i = 1, \dots, d$ , sigui  $Z_i = \prod_{l=1, \dots, d (l \neq i)} (x - \mu_l) \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ . Notem  $Z_i(\lambda) = \frac{\pi_0}{\lambda - \mu_i}$ , i també  $Z_i(\mu_i) = (-1)^{i-1} \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i}$ . Del caràcter extremal de  $C$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Z_i \rho C, \rho \overline{C} \rangle = \left\langle \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} Z_i(\lambda) \nu + Z_i(\mu_i) z_i, \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\nu\|^2} \nu - \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} \sum_{j=1}^d (-1)^{j+1} z_j \right\rangle = \\ &= \frac{\|\rho C\|^2 \|\rho \overline{C}\|^2}{\|\nu\|^2} Z_i(\lambda) + (-1)^i \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} Z_i(\mu_i) \|z_i\|^2 = \\ &= \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i} \frac{\|\rho \overline{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} \left( \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \frac{\Phi(C)}{\Phi(\overline{C})} \frac{\pi_0}{\pi_i} - m_i \right) \quad (1 \leq i \leq d), \end{aligned}$$

on, per definició  $m_i = \frac{\|z_i\|^2}{\|\rho \overline{C}\|^2}$ . Amb això obtenim l'expressió (c) de les multiplicitats  $C$ -locals. Recíprocament, suposem (c) cert. Sumant les multiplicitats  $C$ -locals,

$$1 = m_0 + \sum_{i=1}^d m_i = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \left( 1 + \frac{\Phi(C)}{\Phi(\overline{C})} P(\lambda) \right) \quad (5.9)$$

on hem usat  $\sum_{i=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} = P(\lambda)$ . Aïllant  $P(\lambda)$  en (5.9) obtenim

$$P(\lambda) = \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} \left( \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - 1 \right) = \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} \frac{\|\rho E_0\|^2}{\|\rho C\|^2} = \frac{\Phi(\overline{C})}{\Phi(C)} \Phi^2(C) = \Phi(C)\Phi(\overline{C}),$$

establint que  $C$  és un conjunt  $P$ -frontera. ☒

**Exemple 5.1.6** Considerem el graf  $P_3 \times P_3$ . Els seus autovalors són  $2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$  i el vector  $\nu$  té per components les indicades en la figura.

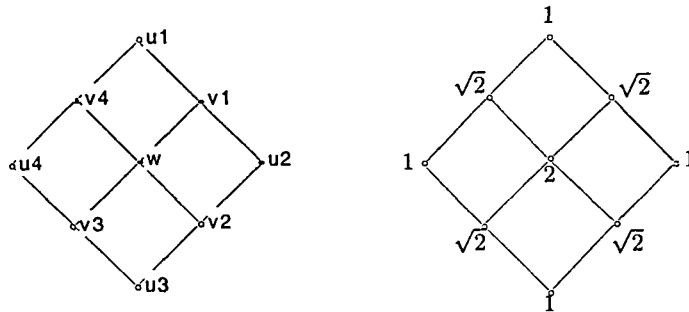


Figura 5.1:  $P_3 \times P_3$  i components de  $\nu$ .

Els conjunts  $C_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  i  $C_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  amb excentricitats  $\varepsilon(C_1) = 2$ ,  $\varepsilon(C_2) = 1$ , tenen espectres locals  $\text{Spec}(C_1) = \{(2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}, 0^{\frac{1}{2}}, (-2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\}$ ,  $\text{Spec}(C_2) = \{(2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}, (-2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\}$ , essent doncs conjunts extrems. Veiem que ambdós són conjunts  $P$ -frontera.

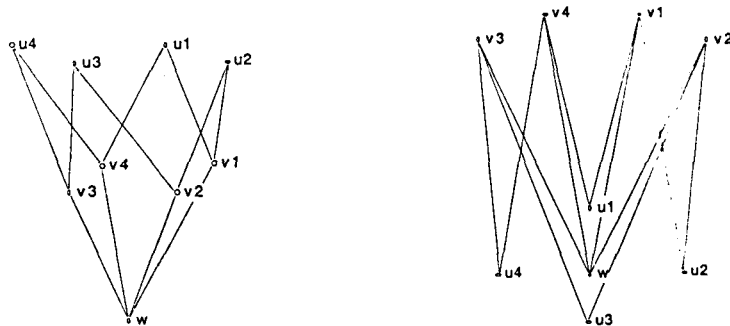


Figura 5.2:  $P_3 \times P_3$  des dels conjunts  $P$ -frontera  $C_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  i  $C_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

El polinomi alternant per a  $C_1$  és  $P = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ , i  $\Phi(C_1) = \frac{\|(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)\|}{\|(1, 1, 1, 1)\|} = \sqrt{3}$ ,  $\Phi(\overline{C}_1) = \frac{\|(1, 1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})\|}{\|(2)\|} = \sqrt{3}$ . Es compleix  $P(2\sqrt{2}) = 3 = \Phi(C_1)\Phi(\overline{C}_1)$  i  $C_1$  és  $P$ -frontera. Variem, usant

per  $C_2$  la caracterització via multiplicitats del Teorema 5.1.5. Ara  $\frac{\|\rho_{C_2}\|^2}{\|\nu\|^2} = \frac{8}{16} = m_0$ ,  $\frac{\|\rho_{C_2}\|^2}{\|\nu\|^2} \frac{\Phi(C_2)}{\Phi(\overline{C_2})} \frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{8}{16} \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = m_1$ . Per tant,  $C_2$  és  $P$ -frontera. Notem, Proposició 5.1.3, que els conjunts  $\{w\}$  i  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, w\}$ , antipodals respectius de  $C_1$  i  $C_2$  també són  $P$ -frontera.

**Exemple 5.1.7** Considerem el graf  $O_4$ , veure la Subsecció 5.7.2. Té 35 vèrtexs, és regular de grau 4, tot vèrtex té excentricitat 3 i autovalors locals 4, 2, -1, -3.

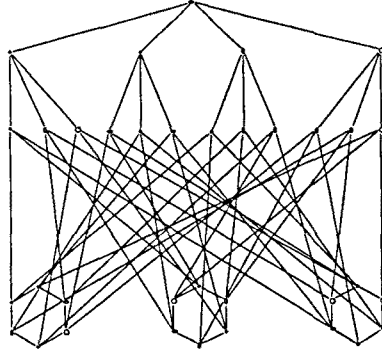


Figura 5.3: Conjunts  $P$ -frontera en  $O_4$ .

Cada vèrtex  $u$  té antipodal  $\bar{u}$  amb 18 elements. Llavors,  $\Phi(u)\Phi(\bar{u}) = \sqrt{34} \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}} = \frac{17}{3}$ . Com  $P(4) = \sum_{i=1}^3 \frac{\pi_0}{\pi_i} = \frac{17}{3}$ , tot conjunt format per un vèrtex és  $P$ -frontera i, Proposició 5.1.3, també ho és cada conjunt de 18 vèrtexs antipodal d'algun vèrtex. Tornarem a usar aquest exemple en la Subsecció 10.3.3, en la que deduirem una propietat estructural de  $O_4$ .

Especialitzarem els resultats anteriors respecte de conjunts  $P$ -frontera en el cas en que els pesos del conjunt i del seu antipodal coincideixin (aquest cas l'illustran els diversos conjunts  $P$ -frontera presentats en l'exemple 5.1.6).

**Proposició 5.1.8** En un graf  $\Gamma = (V, E)$  considerem un conjunt  $C \subset V$  extremal i  $\overline{C}$  el seu antipodal. Sigui  $\mathcal{M}_C = \{\lambda \equiv \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d\}$  la malla d'autovalors  $C$ -locals i  $\mathcal{M}_C^* = \mathcal{M}_C \setminus \{\lambda\}$  la malla reduïda. Indiquem  $P_d$  i  $P_{d-1}$  els respectius polinomis alternants de grau màxim ( $d$  i  $d-1$ ) associats, respectivament, a  $\mathcal{M}_C$  i  $\mathcal{M}_C^*$  i considerem  $H^C = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho_C\|^2 \pi_0} \prod_{i=1}^d (x - \mu_i)$  el  $C$ -local polinomi de Hoffman. Les afirmacions següents són equivalents:

(a)  $P_d \rho_C = \rho_{\overline{C}}$ .

(b)  $C$  és  $P$ -frontera amb  $\|\rho_{\overline{C}}\| = \|\rho_C\|$ .

(c) Les multiplicitats  $C$ -locals són proporcionals a  $\frac{1}{\pi_i}$  ( $0 \leq i \leq d$ ) i a més  $\|\rho_{\overline{C}}\| = \|\rho_C\|$ .

(d)  $P_{d-1}(\lambda) = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho_C\|^2} - 1$  i es compleix  $\|\rho_{\overline{C}}\| \geq \|\rho_C\|$ .



(e)  $P_{d-1} + P_d = H^C$  amb  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$ .

### Demostració

(a)  $\Rightarrow$  (b). De  $P_d(\lambda) = 1$ ,  $\frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\nu\|^2}\nu + \bar{z} = \rho\bar{C} = P_d\rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}\nu + P_d(z)$ . En particular,  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$ . D'altra banda, el polinomi  $P_d + P_{d-1}$ , de grau  $d$ , compleix  $(P_d + P_{d-1})(\mu_i) = (-1)^i + (-1)^{i-1} = 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ . És doncs proporcional al  $C$ -local polinomi de Hoffman,  $P_d + P_{d-1} = \xi H$ . Aplicant-ho a  $\rho C$  es té  $\rho\bar{C} + P_{d-1}\rho C = P_d\rho C + P_{d-1}\rho C = \xi H\rho C = \xi\nu$ . Fent producte escalar per a qualsevol  $e_\nu$ , amb  $\nu \in \bar{C}$ , obtenim  $\xi = 1$ . Per tant,  $P_{d-1}\rho C + \rho\bar{C} = \nu$ , que juntament amb  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$ , estableix, Teorema 5.1.5(b), el caràcter  $P$ -frontera de  $C$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Immediat de  $\Phi(C) = \Phi(\bar{C})$  i l'apartat (c) del Teorema 5.1.5.

(c)  $\Rightarrow$  (d). Sigui  $m_i = \xi \frac{1}{\pi_i}$ , per a  $i = 0, 1, \dots, d$ . Calculant,

$$\pi_0 = \xi \sum_{i=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} = \xi \left( 1 + \sum_{i=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} \right) = \xi (1 + P_{d-1}(\lambda)) \quad \text{d'on} \quad m_0 = \frac{1}{1 + P_{d-1}(\lambda)}.$$

Igualant amb  $m_0 = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}$ , obtenim el resultat.

(d)  $\Rightarrow$  (e). Si  $\|\rho\bar{C}\| > \|\rho C\|$ , de la desigualtat estricta  $P_{d-1}(\lambda) > \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - 1} \sqrt{\frac{\|\nu\|^2}{\|\rho\bar{C}\|^2} - 1}$ , per el Teorema 2.2.2, en resultaria la contradicció  $\partial(C, \bar{C}) \leq d - 1$ . Per tant,  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$ . D'altra banda,

$$(H^C - P_{d-1})(\lambda) = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho\bar{C}\|^2} + 1 = 1 \quad , \quad (H^C - P_{d-1})(\mu_i) = -(-1)^{i+1} = (-1)^i$$

amb el que  $H^C - P_{d-1} = P_d$ .

(e)  $\Rightarrow$  (a). Calculant  $P_{d-1} + P_d = H^C$  en  $\lambda$ , resulta  $P_{d-1}(\lambda) = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - 1 = \Phi(C)\Phi(C) = \Phi(C)\Phi(\bar{C})$  i  $C$  és  $P$ -frontera. Usant el Teorema 5.1.5(b) i tenint en compte la igualtat  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$ , es té  $P_d\rho C = (H^C - P_{d-1})\rho C = \nu - P_{d-1}\rho C = \rho\bar{C}$ .  $\square$

## 5.2 Grafs $P_k$ -frontera

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i sigui  $\mathcal{M} = \{\lambda \equiv \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  la seva malla d'autovalors. Com sempre  $\nu$  indicarà el vector propi associat a  $\lambda$  amb mínima component la unitat. Indicarem  $P_k$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d - 1$ , el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$  i  $P_{d-1}$  el representarem per  $P$ . En el Teorema 3.2.4 hem caracteritzat  $P_k$  pel fet que existeixi una submalla  $\{\mu_1 > \dots > \mu_{k+1}\} = \mathcal{N}_k^* \subset \mathcal{M}^* = \{\lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$ , que anomenem submalla alternant per  $P_k$ , tal que  $P_k(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ ,  $l = 1, \dots, k + 1$ . Sempre  $\mu_1 = \lambda_1$  i  $\mu_{k+1} = \lambda_d$ . Aquesta submalla alternant no és necessàriament única. Encara que la situació genèrica serà que l'equació  $P_k^2 = 1$  no tingui solució en  $\mathcal{M}^* \setminus \mathcal{N}_k^*$ , només podem assegurar

$|\mathcal{M}^* \cap P_k^{-1}\{1, -1\}| \geq k + 1$ . Quan es produeixi la igualtat, situació que descriurem dient que  $\mathcal{M}^*$  és  $k$ -pròpia, o equivalentment quan  $\mathcal{N}_k^*$  és unívoca, es produeixen algunes conseqüències interessants, que estudiarem més endavant. Notem que tota malla és 1-pròpia i  $(d - 1)$ -pròpia.

En el Teorema 4.0.5 hem establert que la desigualtat  $P_k(\lambda) > \|\nu\|^2 - 1$  implica  $D(\Gamma) \leq k$ . Ens proposem extreure informació sobre els grafs en que es produeixi, per algun  $k$  la situació "frontera"  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$ . Amb aquest propòsit donem la següent definició.

**Definició 5.2.1** Un graf  $\Gamma = (V, E)$  amb malla d'autovalors  $\mathcal{M} = \{\lambda \equiv \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  direm que és  $P_k$ -frontera ( $0 \leq k \leq d - 1$ ) quan es compleixi la igualtat  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$ .

Ens referirem al cas  $P_{d-1}$ -frontera simplement com a  $P$ -frontera. Notem, de  $P_{k+1}(\lambda) > P_k(\lambda)$ , que un tal graf té diàmetre  $D(\Gamma) \leq k + 1 \leq d$ . Essent  $\mathcal{N}_k^*$  submalla alternant i  $\mathcal{N}_k = \{\lambda\} \cup \mathcal{N}_k^*$ , indicarem, per a  $i = 0, 1, \dots, k + 1$ ,  $\prod_{\mu_i \in \mathcal{N}_k \setminus \{\mu_i\}} |\mu_i - \mu_i| = \pi_i(\mathcal{N}_k) \equiv \pi_i$  si la confusió no és possible. La condició

$P_k$ -frontera pot expressar-se

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\pi_0}{\pi_i} = \|\nu\|^2 - 1, \text{ o en forma més simètrica, } \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\pi_0}{\pi_i} = \|\nu\|^2. \quad (5.10)$$

En cas de ser  $\Gamma$  un graf regular el caràcter  $P_k$ -frontera es descriu per  $P_k(\lambda) = |V| - 1$ . Comencem presentant alguns exemples de grafs  $P_k$ -frontera.

### Exemple 5.2.2

1. El graf no regular  $\Gamma = K_n \setminus \{uv\}$  ( $n \geq 4$ ), obtingut eliminant una aresta de  $K_n$ ,

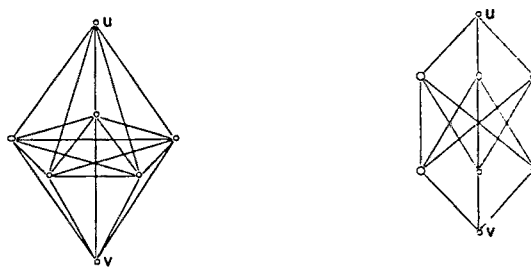


Figura 5.4:  $K_7 \setminus e, K_{4,4} \setminus e$ .

té autovalors

$$\lambda \equiv \lambda_0 = \frac{n-3 + \sqrt{n^2 + 2n - 7}}{2} \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = \frac{n-3 - \sqrt{n^2 + 2n - 7}}{2}$$

i les components de  $\nu$ , autovector positiu normalitzat corresponent a  $\lambda$ , són  $\nu_u = \nu_v = 1$ ,  $\nu_w = \frac{\lambda}{n-2}$  per a tot altre vèrtex  $w$ . El 1-polinomi alternant és  $P_1 = -\frac{2}{\lambda_3}x + 1$ . El càlcul

$$P_1(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\lambda_3} + 1 = \frac{\lambda^2}{n-2} + 1 = \|\nu\|^2 - 1$$

estableix que  $K_n \setminus \{uv\}$  és  $P_1$ -frontera. D'altra banda el diàmetre és 2.

2. Considerem  $\Gamma = K_{n,n} \setminus \{uv\}$  ( $n \geq 3$ ), resultat d'eliminar una aresta del graf bipartit complet  $K_{n,n}$ . Els  $d + 1 = 5$  autovalors són

$$\pm \frac{\sqrt{(n-1)(n+3)} + n - 1}{2}, \quad 0, \quad \pm \frac{\sqrt{(n-1)(n+3)} - n + 1}{2}$$

Les components de  $\nu$  són  $\nu_u = \nu_v = 1$ ,  $\nu_w = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{n+3}{n-1}} \right)$  per als demés vèrtexs. El 2-polinomi alternant pren valors  $\pm 1$  en  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ , que és doncs la 2-malla alternant. Calculant,

$$P_2(\lambda) = n + 2 + \sqrt{(n-1)(n+3)} = \|\nu\|^2 - 1$$

així que  $K_{n,n} \setminus \{uv\}$  és  $P_2$ -frontera amb diàmetre 3.

3. El graf de la Figura 5.5 resultat d'intercanviar dues adjacències en el 4-cub, és regular amb autovalors  $\{4; 2, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2, -4\}$ .

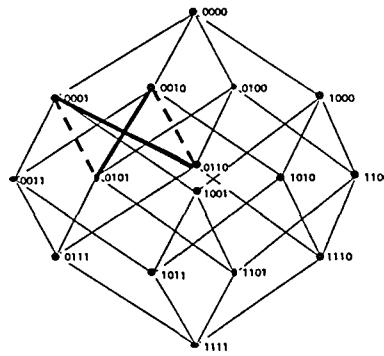


Figura 5.5: Graf  $P_3$ -frontera de diàmetre 4 amb  $|\mathcal{M}^*| = 6$ .

El polinomi alternant de grau 3,  $P_3 = \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 - 4x - 6)$ , compleix  $P_3(4) = 15 = |V| - 1$ . És doncs  $P_3$ -frontera i el diàmetre és 4.

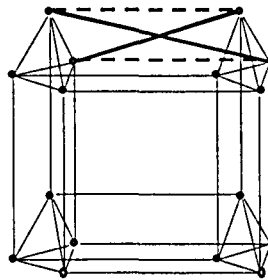


Figura 5.6: Graf  $P_3$ -frontera de diàmetre 3 amb  $|\mathcal{M}^*| = 6$ .

4. En la Figura 5.6 es mostra un graf resultat de modificar  $K_4 \times K_2 \times K_2$  intercanviant-ne dues adjacències. És regular amb malla d'autovalors  $\{5; 3, 1, \sqrt{2} - 1, -1, -\sqrt{2} - 1, -3\}$ . El polinomi alternant de grau 3 és  $P_3 = \frac{1}{6}(x^3 - 7x)$ . Es compleix  $P_3(5) = 15 = |V| - 1$ . Dóna un exemple de graf  $P_3$ -frontera amb diàmetre 3, amb 6 autovalors en la malla reduïda.

Tractem de relacionar la noció de conjunt frontera, introduïda en la secció anterior, en l'ambient de grafs  $P_k$ -frontera.

**Proposició 5.2.3** *Sigui  $\Gamma$  un graf  $P_k$ -frontera. Llavors només pot tenir conjunts  $P_h$ -frontera amb  $h \leq k$ . Si existeixen conjunts  $P_k$ -frontera llavors  $D(\Gamma) = k + 1$  i cadascun d'aquests conjunts està format per un sol vèrtex diametral de pes unitat. A més els polinomis  $P_k^u$  i  $P_k$  seran iguals i prendran valors  $\pm 1$  en la malla reduïda d'autovalors locals de tot vèrtex  $u$  que sigui  $P_k$ -frontera.*

**Demostració** Si  $C$  és  $P_h$ -frontera,  $h + 1 \leq \varepsilon_C \leq D(\Gamma) \leq k + 1$ . Si  $h = k$  llavors  $\varepsilon_C = D(\Gamma) = k + 1$ . Essent  $C$   $P_k$ -frontera,  $\|\nu\|^2 - 1 = P_k(\lambda) \leq P_k^C(\lambda) = \Phi(C)\Phi(E_k^C) \leq \sqrt{\|\nu\|^2 - 1}\sqrt{\|\nu\|^2 - 1}$ , estableix  $\Phi(C) = \Phi(E_k^C) = \sqrt{\|\nu\|^2 - 1}$ , amb el que  $C$  i  $E_k^C = \bar{C}$  estan formats per un sol vèrtex de pes unitat (l'afirmació sobre  $E_k^C$  podia deduir-se de la Proposició 5.1.3). A més  $P_k(\lambda) = P_k^C(\lambda)$ . Si  $\mathcal{M}_C^* = \{\mu_1 > \dots > \mu_{d_C}\}$  és la malla reduïda d'autovalors locals de  $C$ , el polinomi  $P_k$  pren, en particular, sobre  $\mathcal{M}_C^*$  valors en  $[-1, 1]$ . La unicitat del  $k$ -polinomi alternant per a  $\mathcal{M}_C^*$ , assegura la igualtat  $P_k^C = P_k$ . Del Teorema 5.1.2 resulta  $\mathcal{M}_C^* \subset P_k^{-1}\{1, -1\} \cap \mathcal{M}^*$ .  $\square$

En particular, si en un graf  $P_k$ -frontera tots els vèrtexs són  $P_k$ -frontera, el graf és regular. Si  $\mathcal{M}^* = \{\lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  és  $k$ -pròpia (recordem que això sempre és cert per a  $k = 1$  i  $k = d - 1$ ), podem prosseguir el raonament de la prova anterior, assegurant la desigualtat  $(*)$  en

$$k + 1 = D(\Gamma) = \varepsilon_u \leq d_u \stackrel{(*)}{\leq} k + 1.$$

En conseqüència,

**Proposició 5.2.4** *Sigui  $\Gamma$  un graf  $P_k$ -frontera amb malla reduïda d'autovalors  $\mathcal{M}^*$  que sigui  $k$ -pròpia. Els vèrtexs  $u$  que siguin  $P_k$ -frontera, que ja sabem són diametral, són a més a més extremals. La malla reduïda d'autovalors locals de tot vèrtex  $P_k$ -frontera coincideix amb la submalla  $k$ -alternant  $\mathcal{N}_k^* \subset \mathcal{M}^*$ .*

### 5.3 Conjugació de vèrtexs en grafs $P_k$ -frontera

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i sigui  $\mathcal{M} = \{\lambda\} \cup \mathcal{M}^* = \{\lambda \equiv \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  la seva malla d'autovalors. Indiquem  $P_k$ , per a  $0 \leq k \leq d - 1$ , el  $k$ -polinomi alternant associat a  $\mathcal{M}^*$ . Si  $\Gamma$  tingues diàmetre  $k + 1$  existiria almenys una parella  $(u, v)$  de vèrtexs tals que  $\langle P_k e_u, e_v \rangle = 0$ . El nostre propòsit en aquest apartat és estudiar les conseqüències que es poden extreure de l'anul·lació d'aquest producte escalar, és a dir, de quan algun element de la matriu  $P_k(A)$  s'anul·li. El fet de que els coeficients de  $P_k$  no són, en general, del mateix signe, fa que no és esperable, sense cap més hipòtesi, el recíproc:  $(P_k(A))_{uv} = 0$  implica  $\partial(u, v) = k + 1$ . Emperò veurem que si poden extreure's conclusions d'interès

quan el nostre graf sigui  $P_k$ -frontera, és a dir, quan  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1$ . Comencem establint un resultat sobre afirmacions equivalents involucrant l'acció del polinomi  $P_k$ .

**Proposició 5.3.1** *Sigui  $\Gamma$  un graf  $P_k$ -frontera amb malla d'autovalors  $\mathcal{M} = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\} = \{\lambda\} \cup \mathcal{M}^*$ . Indiquem  $\mathcal{N}_k^*$  la submalla de  $\mathcal{M}^*$ , d'almenys  $k+1$  elements, on  $P_k$  pren valors  $\pm 1$ . Indiquem  $\nu$  l'autovector associat a  $\lambda$  amb mínima component la unitat. Considerem dos vèrtexs  $u$  i  $v$ . Les tres afirmacions següents són equivalents:*

(a) *Essent  $\nu_u \leq \nu_v$ , es compleix  $\langle P_k e_u, e_v \rangle = \nu_u^2 - 1$ ;*

(b) *Les descomposicions espectrals de  $e_u$  i  $e_v$  són de la forma*

$$e_u = \frac{\nu}{\|\nu\|^2} \nu + z_u, \quad e_v = \frac{\nu}{\|\nu\|^2} \nu + z_v,$$

*les malles locals reduïdes compleixen  $\mathcal{M}_u^* = \mathcal{M}_v^* \subset \mathcal{N}_k^*$  i es verifica  $P_k z_u = -z_v$ ;*

(c)  $P_k e_u + e_v = \nu_u \nu$ .

**Demostració** Expressem les descomposicions espectrals de  $e_u$  i  $e_v$  en la forma

$$e_u = \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} \nu + \tilde{z}_u + \gamma_u = \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} \nu + \alpha_u + \beta_u + \gamma_u, \quad e_v = \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} \nu + \tilde{z}_v + \gamma_v = \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} \nu + \alpha_v + \beta_v + \gamma_v, \quad (5.11)$$

on  $\alpha_u, \alpha_v$  corresponen als autovalors en  $\mathcal{M}_u^* \cap \mathcal{M}_v^* \cap \mathcal{N}_k^*$ ,  $\beta_u, \beta_v$  als autovalors en  $(\mathcal{M}_u^* \cap \mathcal{M}_v^*) \setminus \mathcal{N}_k^*$  i, finalment,  $\gamma_u, \gamma_v$  als que són només en una de les malles  $\mathcal{M}_u^*$  i  $\mathcal{M}_v^*$ . Suposem  $\nu_u \leq \nu_v$  i efectuem el càlcul:

$$\begin{aligned} \langle P_k e_u, e_v \rangle &= \left\langle \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) \nu + P_k \tilde{z}_u + P_k \gamma_u, \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} \nu + \tilde{z}_v + \gamma_v \right\rangle = \\ &= \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) + \langle P_k \tilde{z}_u, \tilde{z}_v \rangle \geq \\ &\stackrel{(i)}{\geq} \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \|P_k \tilde{z}_u\| \|\tilde{z}_v\| \cos \theta = \\ &= \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \sqrt{\|\alpha_u\|^2 + \|P_k \beta_u\|^2} \sqrt{1 - \frac{\nu_v^2}{\|\nu\|^2} - \|\gamma_v\|^2} |\cos \theta| \geq \\ &\stackrel{(ii)}{\geq} \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \sqrt{\|\alpha_u\|^2 + \|\beta_u\|^2} \sqrt{1 - \frac{\nu_v^2}{\|\nu\|^2} - \|\gamma_v\|^2} |\cos \theta| \geq \\ &\stackrel{(iii)}{\geq} \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \sqrt{1 - \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2} - \|\gamma_u\|^2} \sqrt{1 - \frac{\nu_v^2}{\|\nu\|^2}} |\cos \theta| \geq \\ &\stackrel{(iv)}{\geq} \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \sqrt{1 - \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2}} \sqrt{1 - \frac{\nu_v^2}{\|\nu\|^2}} |\cos \theta| \geq \\ &\stackrel{(v)}{\geq} \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \sqrt{1 - \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2}} \sqrt{1 - \frac{\nu_v^2}{\|\nu\|^2}} \geq \\ &\stackrel{(vi)}{\geq} \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2} (\|\nu\|^2 - 1) - \left(1 - \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2}\right) = \nu_u^2 - 1, \end{aligned}$$

on  $\theta$  és l'angle entre  $P_k z_u$  i  $z_v$ . La igualtat  $\langle P_k e_u, e_v \rangle = \nu_u^2 - 1$  serà equivalent a que totes les desigualtats intermèdies siguin igualtats. Respectivament les igualtats expressen: (i)  $\cos \theta \leq 0$ , (ii)  $\beta_u = 0$ , (iii)  $\gamma_v = 0$ , (iv)  $\gamma_u = 0$ , (v)  $\cos \theta = \pm 1$ , (vi)  $\nu_v = \nu_u$ . Aquestes condicions es reuneixen equivalentment en  $\mathcal{M}_u^* = \mathcal{M}_v^* \subset \mathcal{N}_k^*$ ,  $\nu_v = \nu_u (= \nu)$  i  $P_k z_u = -z_v$ . Amb això queda establerta l'equivalència de les afirmacions (a) i (b).

Sigui (b) cert. Llavors,  $P_k e_u + e_v = \frac{\nu}{\|\nu\|^2}(\|\nu\|^2 - 1)\nu + P_k z_u + \frac{\nu}{\|\nu\|^2}\nu + z_v = \nu\nu = \nu_u\nu$  estableix (c).

Suposem (c) cert. Desglossant la igualtat  $P_k e_u + e_v = \nu_u\nu$  fent ús de l'expressió (5.11) de les descomposicions espectrals de  $e_u$  i  $e_v$ , obtenim:

$$\frac{\nu_u}{\|\nu\|^2}(\|\nu\|^2 - 1)\nu + P_k z_u + \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2}\nu + z_v = \nu_u\nu, \quad \text{que equival a } \nu_u = \nu_v, P_k z_u = -z_v$$

En particular,  $\|P_k z_u\| = \|z_v\| = \|z_u\|$ . De  $P_k \gamma_u = -\gamma_v$ , resulta  $P_k \gamma_u = \gamma_v = 0$ . La igualtat entre els extrems de la cadena

$$\|P_k z_u\|^2 = \|P_k \alpha_u\|^2 + \|P_k \beta_u\|^2 = \|\alpha_u\|^2 + \|P_k \beta_u\|^2 \leq \|\alpha_u\|^2 + \|\beta_u\|^2 \leq \|\alpha_u\|^2 + \|\beta_u\|^2 + \|\gamma_u\|^2 = \|z_u\|^2,$$

estableix  $\gamma_u = 0$ ,  $\|P_k \beta_u\| = \|\beta_u\|$ , d'on  $\beta_u = 0$ . També  $\beta_v = -P_k \beta_u = 0$ . Per tant  $z_u = \alpha_u$  i  $z_v = \alpha_v$ . Amb això completem que l'afirmació (b) és certa.  $\square$

Aspectes laterals de la demostració anterior tenen interès. Així el càlcul fet al començament estableix:

**Corol·lari 5.3.2** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera i  $A$  la seva matriu d'adjacència. Llavors, tots els elements de la matriu  $P_k(A)$  són no negatius. Amb més precisió, per a tota parella de vèrtexs  $u, v$ , es compleix  $(P_k(A))_{uv} \geq \nu^2 - 1$ , essent  $\nu = \min\{\nu_u, \nu_v\}$ .*

Notem, en l'apartat (b), que de  $P_k z_u = -z_v$  se'n despren  $P_k z_v = -P_k^2 z_u = -z_u$ , ja que  $P_k$  pren valors  $\pm 1$  en  $\mathcal{M}_u^* \subset \mathcal{N}_k^*$ . Per tant, el paper dels dos vèrtexs, en la Proposició 5.3.1 és intercanviable.

**Definició 5.3.3** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera. Dos vèrtexs  $u, v$ , direm que són  $k$ -conjugats, o formen una parella  $k$ -conjugada, quan es compleixi qualsevulla de les afirmacions equivalents de la Proposició 5.3.1.*

D'acord amb l'anterior comentari, la relació de conjugació és simètrica. Notem també que en el cas de vèrtexs de pes unitat, per exemple en tots els vèrtexs d'un graf regular, la conjugació equival a  $\langle P_k e_u, e_v \rangle = 0$ . En forma precisa, ordenant els vèrtexs de manera que  $\nu_u \leq \nu_v$ , si  $\langle P_k e_u, e_v \rangle = 0$ , de  $0 = (P_k(A))_{uv} \geq \nu^2 - 1 \geq 0$ , resulta,

**Proposició 5.3.4** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera. Es compleix  $(P_k(A))_{uv} = 0$  si i només si  $u, v$  són  $k$ -conjugats i  $\nu_u = \nu_v = 1$ .*

Aquest fet i la definició via Proposició 5.3.1(c) de la  $k$ -conjugació proporcionen:

**Corol·lari 5.3.5** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular  $P_k$ -frontera. Si un element de la matriu  $P_k(\mathbf{A})$  és nul, els demés elements de la seva fila i columna són 1.*

Destaquem un altre fet immediat, implícit en la definició de la  $k$ -conjugació.

**Corol·lari 5.3.6** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera. Els dos vèrtexs,  $u, v$ , d'una parella  $k$ -conjugada tenen el mateix espectre local i les projeccions  $z_u^l, z_v^l$  de  $e_u, e_v$ , en  $\text{Ker}(x - \mu_l)$ , per a cada autovalor local, compleixen  $z_v^l = -P_k(\mu_l)z_u^l = \pm z_u^l$ .*

**Demostració** De la Proposició 5.3.1(b), si  $u, v$  són  $k$ -conjugats, tenen els mateixos autovalors locals,  $\mathcal{M}_u^* = \mathcal{M}_v^* \subset \mathcal{N}^*$ . A més,  $P_k z_u = -z_v$ . Desglossant aquesta igualtat en autovectors,

$$\sum_{\mu_l \in \mathcal{M}_u^*} z_v^l = -P_k \sum_{\mu_l \in \mathcal{M}_u^*} z_u^l = - \sum_{\mu_l \in \mathcal{M}_u^*} P_k(\mu_l) z_u^l = \sum_{\mu_l \in \mathcal{M}_u^*} s_l z_u^l \quad \text{on} \quad s_l = \pm 1.$$

Per tant,  $m_v(\mu_l) = \|z_v^l\|^2 = \|z_u^l\|^2 = m_u(\mu_l)$ . □

Direm que un vèrtex  $u$  és  $k$ -conjugat, quan formi part d'una parella  $k$ -conjugada. En cas de que  $(u, u)$  sigui una parella  $k$ -conjugada direm que  $u$  és  $k$ -autoconjugat. Abreujarem la  $k$ -conjugació, en el nostre context de grafs  $P_k$ -frontera, referint-nos-hi simplement com a conjugació.

Recordem l'acció del polinomi de Hoffman generalitzat,  $H = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0(\mathcal{M})} \prod_{\lambda_l \in \mathcal{M}^*} (x - \lambda_l)$ , per a grafs no necessàriament regulars. Per a tot vèrtex complex  $H e_u = \nu_u \nu$ . Per tant, l'apartat (c) de la Proposició 5.3.1 pot reformular-se, en forma equivalent, per  $(H - P_k)e_u = e_v$ .

**Corol·lari 5.3.7** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera. Dos vèrtexs  $u, v$  són conjugats si i només si  $(H - P_k)e_u = e_v$ .*

Una variació d'aquest enunciat eludeix tenir que establir primer el caràcter  $P_k$ -frontera.

**Proposició 5.3.8** *Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i dos vèrtexs  $u$  i  $v$ . Les dues afirmacions següents són equivalents.*

- (a) *Es compleix  $\nu_u = \nu_v$ ,  $(H - P_k)e_u = e_v$ .*
- (b)  *$\Gamma$  és  $P_k$ -frontera i els vèrtexs  $u$  i  $v$  són conjugats.*

**Demostració** Igualant els coeficients de  $\nu$  en la igualtat

$$\frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} \nu + z_v = e_v = (H - P_k)e_u = \nu_u \nu - P_k \left( \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} \nu + z_u \right) = \nu_u \nu - \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} P_k(\lambda) \nu + z_u$$

s'obté  $P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - \frac{\nu_u}{\nu_u} = \|\nu\|^2 - 1$ , amb el que  $\Gamma$  és  $P_k$ -frontera i  $u$  i  $v$  són conjugats. El recíproc resulta del Corol·lari 5.3.7 i la Proposició 5.3.1. □

En un graf  $\Gamma = (V, E)$  que sigui  $P_k$ -frontera, indiquem  $V^*$  el conjunt de vèrtexs conjugats. Suposant  $V^* \neq \emptyset$ , l'aplicació 'pas al conjugat',  $\sigma : V^* \rightarrow V^*$ , és una permutació involutiva i pot expressar-se, identificant vèrtexs amb la base canònica de  $\mathbb{R}^{|V^*|}$ , com  $\sigma = H - P_k$ . Considerem  $\Gamma^*$  el subgraf induït en  $V^*$ . Llavors,

**Proposició 5.3.9** *Essent  $\Gamma$  un graf  $P_k$ -frontera, l'aplicació  $\sigma$  és un automorfisme de  $\Gamma^*$ . A més, la distància en  $\Gamma$  compleix  $\partial(\sigma u, \sigma v) = \partial(u, v)$ , per a  $u, v \in V^*$ .*

**Demostració** L'endomorfisme de  $\mathbb{R}^{|V^*|}$  definit per  $\tilde{\sigma}x = \langle x, \nu \rangle \nu - P_k x$ , és simètric, commuta amb  $A$  i extén  $\sigma$ . Reordenant convenientment els vèrtexs,

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^* & B^\top \\ B & C \end{pmatrix},$$

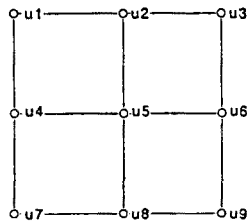
essent  $A^*$  la matriu d'adjacència de  $\Gamma^*$ . Del fet que les dues matrius permuten resulta, en particular,  $\sigma A^* = A^* \sigma$ . A més, essent  $u, v \in V^*$ ,

$$\langle A^r \sigma e_u, \sigma e_v \rangle = \langle A^r \tilde{\sigma} e_u, \tilde{\sigma} e_v \rangle = \langle \tilde{\sigma} A^r \tilde{\sigma} e_u, e_v \rangle = \langle A^r \tilde{\sigma}^2 e_u, e_v \rangle = \langle A^r \sigma^2 e_u, e_v \rangle = \langle A^r e_u, e_v \rangle,$$

amb el que  $\sigma$  manté, en  $\Gamma$ , les distàncies entre elements de  $V^*$ . \(\square\)

Presentem alguns exemples que il·lustrin els resultats obtinguts.

**Exemple 5.3.10** Considerem  $P_3 \times P_3$ . Per aquest graf,  $\mathcal{M} = \{2\sqrt{2}\} \cup \mathcal{M}^* = \{2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$ .



$$\nu = (1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1)$$

El polinomi de Hoffman és  $H = \frac{1}{6}(x - \sqrt{2})x(x + \sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$  i el polinomi 3-alternant  $P_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 + x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x - 1$ . Llavors,

$$(H - P_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Del resultat obtingut, les components de  $\nu$  i la Proposició 5.3.8, resulta que  $P_3 \times P_3$  és  $P_3$ -frontera i tota parella  $(u_i, u_{10-i})$  és conjugada. Notem que  $u_5$  és autoconjugat i que, en la Proposició 5.3.1(b), es produeix la contenció estricta  $\{0, -2\sqrt{2}\} = \mathcal{M}_{u_5}^* \subset \mathcal{N}^* = \{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$ .

**Exemple 5.3.11** Considerem el graf regular de grau 3 de la Figura 5.7. Ara  $\mathcal{M} = \{3\} \cup \mathcal{M}^* = \{3, 2, 1, 0, -1, -2\}$  i el diàmetre és 3. El polinomi de Hoffman és  $H = \frac{1}{4}(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$  i el polinomi 3-alternant  $P_3 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ , amb  $\mathcal{N}_3^* = \{2, 1, -1, -2\}$ .

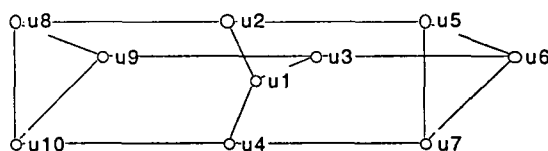


Figura 5.7: Exemple de vèrtexs conjugats en un graf  $P_3$ -frontera de diàmetre 3

El càlcul de  $H - P_3$  sobre  $A$ , matriu d'adjacència del graf, proporciona

$$(H - P_3)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, Proposició 5.3.8, el graf és  $P_3$ -frontera, els vèrtexs  $u_1, u_2, u_3, u_4$  són autoconjugats i les parelles  $(u_5, u_8), (u_6, u_9), (u_7, u_{10})$  són conjugades.

## 5.4 Grafs $P_k$ -frontera de diàmetre $k + 1$

Les dues nocions principals introduïdes en aquest capítol, conjunts  $P_k$ -frontera i grafs  $P_k$ -frontera, tenen per el que hem vist fins ara un diferent nivell de conseqüències. El caràcter  $P_k$ -frontera d'un conjunt implica, Teorema 5.1.2, la propietat estructural estricta d'obtenir el seu vector  $k$ -entorn per l'acció d'un polinomi sobre el vector associat al conjunt. Aquesta traducció rígida de l'assoliment de la igualtat en (5.1) no té equivalència en el caràcter  $P_k$ -frontera d'un graf. És natural pensar que la diferència prové de la que hi ha qualitativament entre el caràcter local de l'afirmació sobre conjunts, que condueix a una propietat del graf "vist des del conjunt", amb el caràcter global  $P_k$ -frontera del graf. Sembla convenient treballar en el sentit iniciat en la Proposició 5.2.3, aprofundint l'estudi de conjunts frontera

en un graf frontera, esperant obtenir resultats globals sobre el graf per la confluència de propietats locals. Els resultats més rellevants en aquest sentit es presentaran en la darrera part d'aquest treball.

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  que sigui  $P_k$ -frontera amb diàmetre  $k + 1$ , assolint la fita que l'imposa el seu caràcter  $P_k$ -frontera. En els darrers resultats de l'apartat anterior hem vist que els únics conjunts candidats a ser  $P_k$ -frontera es redueixen a vèrtexs diametral de pes unitat. D'altra banda, la suau condició de que la malla reduïda  $\mathcal{M}^*$  del graf sigui  $k$ -pròpia, comporta el fet uniformitzador que tots els eventuals vèrtexs  $P_k$ -frontera tenen els mateixos autovalors locals,  $\mathcal{M}_u = \{\lambda\} \cup \mathcal{N}_k^*$ , amb  $\mathcal{N}_k^*$  la submalla  $k$ -alternant ( $k + 1$  elements) de  $\mathcal{M}^*$ . També de  $\varepsilon_u = k + 1 = d_u$  se'n deriva el caràcter extremal d'aquests vèrtexs. El seu caràcter ( $P_k \equiv P_{d_u-1}$ )-frontera el descrivim, com en la Secció 5.1, simplement per  $P$ -frontera. Organitzem aquests fets des de l'òptica d'un vèrtex diametral.

**Proposició 5.4.1** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera de diàmetre  $k + 1$  amb malla reduïda d'autovalors,  $\mathcal{M}^*$ ,  $k$ -pròpia. Siguin  $\mathcal{N}_k^* = \{\mu_1 > \dots > \mu_{k+1}\}$  la submalla  $k$ -alternant i  $\mathcal{N}_k = \{\lambda (\equiv \mu_0)\} \cup \mathcal{N}_k^*$ . Indiquem  $P_{\mathcal{N}_k^*}$ ,  $P_{\mathcal{N}_k}$ , respectivament, els polinomis  $k$  i  $k + 1$  alternants per a les malles  $\mathcal{N}_k^*$  i  $\mathcal{N}_k$ , és a dir,  $P_{\mathcal{N}_k^*}(\mu_l) = (-1)^{l+1}$  ( $1 \leq l \leq k + 1$ ) i  $P_{\mathcal{N}_k}(\mu_l) = (-1)^l$  ( $0 \leq l \leq k + 1$ ). Sigui  $u$  un vèrtex diametral de  $\Gamma$  i  $\bar{u}$  el seu conjunt antipodal. Llavors,*

- (1)  $\bar{u}$  es redueix a un vèrtex i tant  $u$  com  $\bar{u}$  són de pes unitat;
- (2) L'espectre local de  $u$  és  $\{\lambda^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_{k+1}^{m_{k+1}}\}$  amb  $m_i = \frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\pi_i}$  ( $0 \leq i \leq k + 1$ ), on  $\pi_i$  està calculat sobre  $\mathcal{N}_k$ ;
- (3) El vèrtex  $u$  és  $P$ -frontera i es compleix  $P_{\mathcal{N}_k^*} e_u = \rho \mathcal{N}_k = \nu - e_{\bar{u}}$ ;
- (4)  $P_{\mathcal{N}_k} e_u = e_{\bar{u}}$ ;
- (5) Es compleix  $P_{\mathcal{N}_k^*} + P_{\mathcal{N}_k} = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} \prod_{\mu_l \in \mathcal{N}_k^*} (x - \mu_l)$ .

**Demostració** Com  $k + 1 = \varepsilon_u \leq |\mathcal{M}_u^*|$  podem considerar el polinomi  $P_k^u$ . La cadena de desigualtats  $P_k^u(\lambda) \geq P_k(\lambda) = \|\nu\|^2 - 1 \geq \Phi(u)\Phi(\bar{u})$ , no pot conduir a la desigualtat estricta  $P_k^u(\lambda) > \Phi(u)\Phi(\bar{u})$ , que implicaria l'absurd  $\partial(u, \bar{u}) \leq k = \varepsilon_u - 1$ . Per tant, el vèrtex  $u$  és  $P_k$ -frontera. Com el pas al  $k$ -exterior, Proposició 5.1.3, és ara el pas a l'antipodal, el conjunt  $\bar{u}$  també és  $P_k$ -frontera. De la Proposició 5.2.3 resulta (1), la igualtat  $P_k = P_k^u$  i que  $\mathcal{M}_u^* \subset P_k^{-1}\{1, -1\} \cap \mathcal{M}^* = \mathcal{N}_k^*$ . Com  $k + 1 \leq |\mathcal{M}_u^*| \leq |\mathcal{N}_k^*| = k + 1$ , les submalles  $\mathcal{M}_u^*$  i  $\mathcal{N}_k^*$  coincideixen. Com que  $k = d_u - 1$  el vèrtex  $u$  és simplement  $P$ -frontera. Amb aquesta observació ens colloquem en l'afirmació (b) de la Proposició 5.1.8 (notem que  $P_k = P_k^u$  i el caràcter  $P_k$ -frontera del graf també ens porten a l'afirmació (d) de la mateixa proposició). De l'equivalència (c) de la Proposició 5.1.8, resulta (2), ja que  $m_0 = \frac{1}{\|\nu\|^2} = \frac{1}{\|\nu\|^2} \pi_0 \frac{1}{\pi_0}$ . Obtenim (3) del Teorema 5.1.2 al ser  $\|\rho \mathcal{N}_k\| = \sqrt{\|\nu\|^2 - 1} = \|\rho E_0\|$ . Tornant a la Proposició 5.1.8, les equivalències (a) i (e) proporcionen (4) i (5).  $\square$

En les mateixes hipòtesis, podem explotar el caràcter coespectral dels vèrtexs diametral, per obtenir una fita superior del nombre de vèrtexs diametral. En efecte, si  $u$  és un vèrtex diametral llavors  $e_u \in \langle \nu \rangle \oplus \text{Ker} \prod_{\mu \in \mathcal{N}_k^*} (x - \mu)$ , amb el que el nombre de vèrtexs diametral no pot superar la dimensió  $1 + \sum_{\mu \in \mathcal{N}_k^*} m(\mu)$  d'aquest espai. Notant que els vèrtexs diametral poden agrupar-se per parelles, que el pes de tot vèrtex diametral és la unitat i indicant  $\lfloor r \rfloor_p = \max\{i : i \in \mathbb{Z}, i \text{ parell}, i \leq r\}$ , tenim

**Corollari 5.4.2** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera de diàmetre  $k + 1$  amb malla reduïda d'autovalors  $\mathcal{M}^*$ ,  $k$ -pròpia. Sigui  $\mathcal{N}_k^* = \{\mu_1 > \dots > \mu_{k+1}\}$  la submalla  $k$ -alternant. El cardinal del conjunt  $V_D$  de vèrtexs diametral de  $\Gamma$  compleix*

$$|V_D| \leq \left[ \left( 1 + \sum_{\mu \in \mathcal{N}_k^*} m(\mu) \right) \right]_p$$

*En particular, si tots els vèrtexs d'un graf  $P_k$ -frontera de diàmetre  $k + 1$  amb malla reduïda d'autovalors  $k$ -pròpia, són diametral, llavors el graf és regular,  $|V|$  és parell i  $k = d - 1$ .*

Notem que el recíproc de l'última afirmació no és cert. El graf de Hoffman, Figura 5.8, és un graf  $P_3$ -frontera de diàmetre 4, amb 16 vèrtexs i  $d = 4$ . Però només els vèrtexs etiquetats ( $a$ ) són diametral.

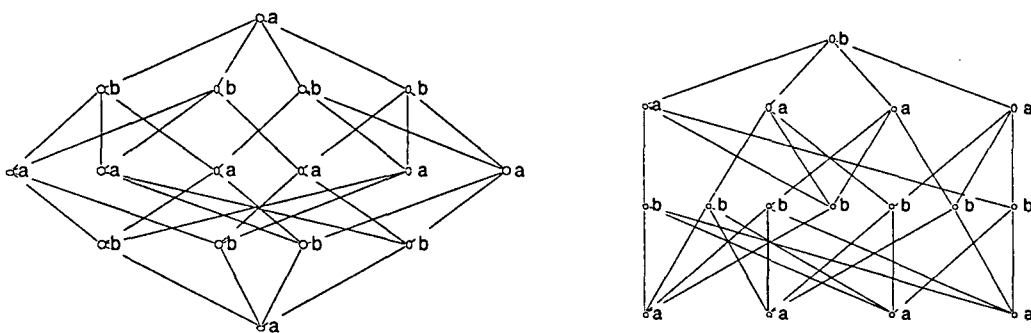


Figura 5.8: Vèrtexs diametral en el graf de Hoffman.

Podem establir, partint de resultats precedents, una presentació unificadora del caràcter diametral,  $P$ -frontera i conjugat d'un vèrtex, en el nostre context actual.

**Proposició 5.4.3** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P_k$ -frontera de diàmetre  $k + 1$  amb malla reduïda d'autovalors  $\mathcal{M}^*$ ,  $k$ -pròpia. Sigui  $\mathcal{N}_k^* = \{\mu_1 > \dots > \mu_{k+1}\}$  la submalla  $k$ -alternant i  $\mathcal{N}_k = \{\lambda (\equiv \mu_0)\} \cup \mathcal{N}_k^*$ . Considerem un vèrtex  $u$ . Les tres afirmacions següents són equivalents:*

- (a)  $u$  és diametral;
- (b)  $\{u\}$  és  $P_k$ -frontera;
- (c)  $u$  és conjugat i les seves multiplicitats locals són  $m_u(\mu_i) = \frac{1}{\|v\|^2} \frac{\pi_i \alpha}{\pi_i}$ , on  $\pi_i \equiv \pi_i(\mathcal{N}_k)$  ( $0 \leq i \leq k + 1$ ).

**Demostració** L'equivalència entre (a) i (b) ja està establerta. El sentit (a)  $\Rightarrow$  (b) és part de la Proposició 5.4.1 i el recíproc és evident. Per provar (a)  $\Rightarrow$  (c) observem primer que, essent  $v$  amb  $\partial(u, v) = k + 1$ , de la igualtat  $(P_k(A))_{uv} = 0$  resulta, Proposició 5.3.4, que  $u$  és conjugat. La mateixa Proposició 5.4.1 estableix les multiplicitats locals. Suposem cert (c). Com que les expressions donades

per a les multiplicitats són no nul·les, la malla local  $\mathcal{M}_u = \mathcal{N}_k$ . Notant que  $\frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2} = m_u(\lambda) = \frac{1}{\|\nu\|^2}$ , la descomposició espectral de la Proposició 5.3.1 és ara

$$e_u = \frac{1}{\|\nu\|^2} \nu + z_u^1 + \dots + z_u^{k+1}, \quad e_v = \frac{1}{\|\nu\|^2} \nu + z_v^1 + \dots + z_v^{k+1}, \quad z_u^i, z_v^i \in \text{Ker}(x - \mu_i) \quad (1 \leq i \leq k+1),$$

complint-se  $z_v^i = -P_k(\mu_i)z_u^i = (-1)^i z_u^i$ . Considerem, per a  $i = 1, \dots, k+1$ , els polinomis, de grau  $k$ ,  $Z_i = \prod_{l=1, \dots, k+1 (l \neq i)} (x - \mu_l)$ . Compleixen  $Z_i(\lambda) = \frac{\pi_0}{\lambda - \mu_i}$ ,  $Z_i(\mu_i) = (-1)^{i-1} \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i}$ . Efectuem el càlcul

$$\begin{aligned} \langle Z_i e_u, e_v \rangle &= \left\langle \frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\lambda - \mu_i} \nu + (-1)^{i-1} \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i} z_u^i, e_v \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\lambda - \mu_i} \nu + (-1)^{i-1} \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i} z_u^i, \frac{1}{\|\nu\|^2} \nu + z_v^i \right\rangle = \\ &= \frac{\pi_0}{\lambda - \mu_i} \frac{1}{\|\nu\|^2} + (-1)^{i-1} \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i} \langle z_u^i, (-1)^i z_u^i \rangle = \\ &= \frac{\pi_0}{\lambda - \mu_i} \frac{1}{\|\nu\|^2} - \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i} m_u(\mu_i) = \frac{\pi_i}{\lambda - \mu_i} \left[ \frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\pi_i} - m_u(\mu_i) \right] = 0. \end{aligned}$$

De ser els polinomis  $Z_1, \dots, Z_{k+1}$ , base de  $\mathbb{R}_k[x]$  resulta  $\partial(u, v) = k+1$ , que estableix (a).  $\square$

**Exemple 5.4.4** Considerem el graf regular de grau 4 de l'Exemple 5.2.2(3) d'autovalors  $\mathcal{M} = \{4\} \cup \mathcal{M}^* = \{4, 2, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2, -4\}$  i diàmetre 4. És un graf  $P_3$ -frontera, on  $P_3 = \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 - 4x - 6)$  i  $\mathcal{N}_3^* = \{2, 0, -2, -4\}$ . Per tant,  $\mathcal{M}^*$  és 3-pròpia.

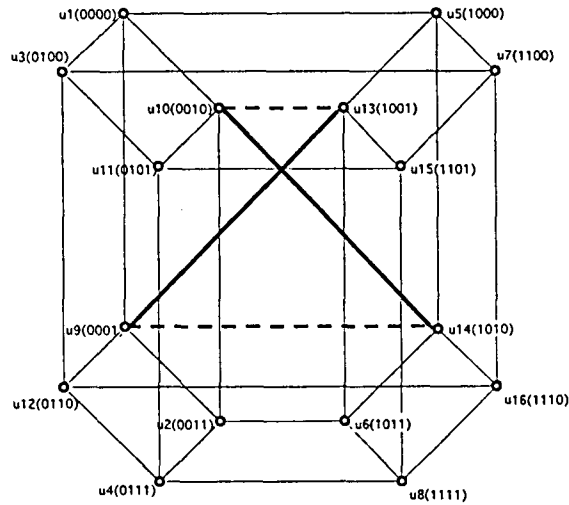


Figura 5.9: Graf  $P_3$  frontera de diàmetre 4 (vèrtexs conjugats)

Calculant  $P_3(A)$  (l'ordenació dels vèrtexs és segons els índexs a la figura), obtenim

$$P_3(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que les parelles de vèrtexs  $(u_i, u_{9-i})$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) són conjugades. També, Corollari 5.3.5, les files i columnes que contenen un zero tenen per demés elements la unitat i tota línia de  $P_3(A)$  suma  $\|\nu\|^2 - 1 = 15$ . La malla d'autovalors locals de cada  $u_i$ , per a  $1 \leq i \leq 8$ , és  $\mathcal{N}_3^* = \{2, 0, -2, -4\}$ , d'acord amb la Proposició 5.4.1(2). Les multiplicitats locals són comunes, Corollari 5.3.6. Si observem que aquests vèrtexs són diametral, podem assegurar de la Proposició 5.4.1(4) que les multiplicitats locals de cadascun d'ells, calculades per  $\frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\pi_i}$ , són  $(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ . Recíprocament, calculades directament les multiplicitats obtenim de la Proposició 5.4.3 que les parelles de vèrtexs anteriors són les úniques diametral. Els restants vèrtexs, d'excentricitat 3 (observem que en  $P_3(A)$  s'aprecia que és menor o igual que 3), són coespectrals, amb malla local tot  $\mathcal{M}$  i multiplicitats  $(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16})$ . Notem per ells la severa desigualtat  $3 = \varepsilon_v \leq |\mathcal{M}_v^*| = 6$ . El polinomi  $P_{\mathcal{N}_k}$  en aquest exemple és  $\frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1$  i observem, d'acord amb l'apartat (6) de la Proposició 5.4.1,  $P_3 + P_{\mathcal{N}_k} = \frac{1}{24}(x - 2)x(x + 2)(x + 4)$ , polinomi de Hoffman  $u_i$ -local ( $1 \leq i \leq 8$ ).

### 5.5 Grafs $P$ -frontera extremals

Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf i  $\mathcal{M} = \{\lambda\} \cup \mathcal{M}^* = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  la seva malla d'autovalors. Descrivim el graf com *extremal* quan  $D(\Gamma) = d$ , assolint la fita imposada per  $|\mathcal{M}^*|$ . Si  $\Gamma$  és  $P_k$ -frontera, de  $D(\Gamma) \leq k + 1$  resulta  $k = d - 1$ , situació que descrivim simplement com a  $P$ -frontera. Notem que ara la malla  $(d - 1)$ -alternant  $\mathcal{N}_{d-1}^*$  és unívocament  $\mathcal{M}^*$ , que és doncs  $(d - 1)$ -pròpia. Recordem que, com a conseqüència del Corollari 5.4.2, els grafs  $P$ -frontera extremals són els únics candidats, en el marc dels grafs  $P_k$ -frontera, a que tots els seus vèrtexs siguin diametral. No és una condició suficient, com hem vist en el graf de Hoffman, Figura 5.8. Recopilem per a un graf  $P$ -frontera extremal els resultats obtinguts en les Proposicions 5.4.1 i 5.4.3.

**Corollari 5.5.1** Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P$ -frontera extremal i  $\mathcal{M} = \{\lambda\} \cup \mathcal{M}^* = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  la seva malla d'autovalors. Indiquem  $P$  el  $(d-1)$ -polinomi alternant de  $\mathcal{M}^*$  i  $\bar{P}$  el  $d$ -polinomi alternant de  $\mathcal{M}$ . Donat  $u \in V$  sigui  $\bar{u}$  el seu conjunt antipodal. Llavors,

$$u \text{ és diametral} \iff P e_u = \rho N_k^u = \nu - e_{\bar{u}} \quad (\{u\} \text{ és } P\text{-frontera}) \iff \bar{P} e_u = e_{\bar{u}}.$$

En aquest cas,

(a)  $\bar{u}$  es redueix a un vèrtex i tant  $u$  com  $\bar{u}$  són de pes unitat;

(b) L'espectre local de  $u$  és  $\{\lambda^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$  amb  $m_i = \frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\pi_i}$ .

Alternativament, és il·lustratiu veure els grafs  $P$ -frontera extremals partint del seu diàmetre. Essent  $D(\Gamma) = d$ , el Teorema 4.0.5 estableix  $P(\lambda) \leq \|\nu\|^2 - 1$ . Llavors un graf de diàmetre  $d$  és  $P$ -frontera extremal quan  $P(\lambda)$  assoleix aquesta fita.

L'ús de la matriu d'adjacència, associant pes unitat a cada aresta del graf, té la particularitat de calcular, amb les seves potències, el nombre de camins de longitud donada entre cada dos vèrtexs. Donem entrada a l'obtenció d'uns primers resultats en aquest sentit.

**Proposició 5.5.2** Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf extremal ( $D(\Gamma) = d \equiv |\mathcal{M}^*|$ ) i  $u, v$  una parella diametral de vèrtexs. Siguin  $e_u = z_{u0} + z_{u1} + \dots + z_{ud}$ ,  $e_v = z_{v0} + z_{v1} + \dots + z_{vd}$ , les respectives descomposicions espectrals. El nombre de camins diametral  $C_{u,v}$  entre  $u$  i  $v$  pot calcular-se per

$$C_{u,v} = (-1)^i \pi_i \langle z_{ui}, z_{vi} \rangle, \quad \text{per a qualsevol } i = 0, 1, \dots, d.$$

En particular, es compleixen les igualtats: (a)  $C_{u,v} = \pi_0 \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2}$ ; (b)  $\langle z_{ui}, z_{vi} \rangle = (-1)^i \frac{\pi_0}{\pi_i} \frac{\nu_u \nu_v}{\|\nu\|^2}$ .

**Demostració** Considerem els polinomis, de grau  $d$ ,  $Z_i = \prod_{l=0,1,\dots,d} (x - \lambda_l)$ , per a cada  $i = 0, 1, \dots, d$ . Llavors,

$$C_{u,v} = \langle A^d e_u, e_v \rangle = \left\langle Z_i \left( \sum_{l=0}^d z_{ul} \right), \sum_{l=0}^d z_{vl} \right\rangle = \langle Z_i(\lambda_i) z_{ui}, z_{vi} \rangle = (-1)^i \pi_i \langle z_{ui}, z_{vi} \rangle.$$

De  $z_{u0} = \frac{\nu_u}{\|\nu\|^2} \nu$ ,  $z_{v0} = \frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} \nu$ , resulta (a) i igualant obtenim (b). □

Aplicant-ho a grafs  $P$ -frontera extremals, obtenim

**Corollari 5.5.3** Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P$ -frontera extremal i  $u, v$  una parella diametral de vèrtexs. El nombre de camins diametral entre ells és  $\frac{\pi_0}{\|\nu\|^2}$ . En particular, si el graf és regular és  $\frac{\pi_0}{|V|}$ .

**Proposició 5.5.4** Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P$ -frontera extremal. El nombre de circuits de longitud  $r$  a través de qualsevol vèrtex diametral és  $C_r = \frac{\pi_0}{\|\nu\|^2} \sum_{l=0}^d \frac{\lambda_l^r}{\pi_l}$ .

**Demostració** Sigui  $u$  un vèrtex diametral. Podem expressar  $C_r$  en termes de l'espectre local del vèrtex per

$$C_r = \langle A^r e_u, e_u \rangle = \sum_{l=0}^d \lambda_l^r m_u(\lambda_l) = \frac{\pi_0}{\|\nu\|^2} \sum_{l=0}^d \frac{\lambda_l^r}{\pi_l},$$

on hem usat el Corollari 5.5.1. En el resultat obtingut s'observa la independència respecte del vèrtex diametral considerat.  $\square$

Notem que per a  $r = 0$  l'expressió anterior retorna la condició  $P$ -frontera del graf. Per a  $r = 1$  i  $r = 2$  en resulten dues conseqüències interessants.

**Corollari 5.5.5** *Els autovalors d'un graf  $P$ -frontera extremal compleixen*

$$\sum_{l=0}^d \frac{\lambda_l}{\pi_l} = 0 \quad ; \quad \frac{\pi_0}{\|\nu\|^2} \sum_{l=0}^d \frac{\lambda_l^2}{\pi_l} = \delta$$

essent  $\delta$  el grau de qualsevol vèrtex diametral.

La primera d'aquestes igualtats proporciona una restricció per els autovalors d'un eventual graf  $P$ -frontera extremal. Així, per a  $d = 2$ , és

$$\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} = 0, \quad \text{que es redueix a } \lambda_1 = 0$$

el que condueix a  $K_n \setminus F$  ( $n$  parell) com a únic graf  $P$ -frontera regular amb 3 autovalors. Analogament, per a  $d = 3$  la restricció equival a  $\lambda_0 \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_3$ . Els grafs de Taylor, veure [5], en són exemples i, de fet, són els únics grafs  $P$ -frontera regulars de diàmetre tres amb  $d + 1 = 4$  autovalors (veure Rodríguez [45]).

La segona de les igualtats en la Proposició 5.5.5 posa de manifest que tot vèrtex diametral té el mateix grau. Per tant, un graf  $P$ -frontera extremal i diametral (tot vèrtex és extrem d'un diàmetre) és regular. De la Proposició 5.5.4 resulta l'afirmació més potent, de que tals grafs són camí regulars (el nombre de circuits a través d'un vèrtex, de longitud donada és independent del vèrtex considerat). Aquest concepte el tractarem posteriorment, Secció 9.5, comentant-ne dues equivalències. Diem només ara que la camí regularitat és equivalent a la coespectralitat dels vèrtexs. Per tant, del Corollari 5.5.1, també es desprèn la camí regularitat dels grafs  $P$ -frontera extremsals i diametral.

Recordem que, en tot graf, la multiplicitat d'un autovalor coincideix amb la suma de les seves multiplicitats locals sobre tots els vèrtexs del graf, Proposició 1.0.1. Llavors, de la coespectralitat dels vèrtexs i de l'expressió donada per a les multiplicitats locals,  $m_u(\lambda_i) = \frac{1}{\|\nu\|^2} \frac{\pi_0}{\pi_i}$  (si el graf és regular) =  $\frac{1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_i}$ , per a tot  $u \in V$ , en deriva el següent fet:

**Proposició 5.5.6** *Sigui  $\Gamma$  un graf  $P$ -frontera extremal i diametral. La totalitat del seu espectre es dedueix dels autovalors,  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$ , per*

$$\text{Spec}(\Gamma) = \left\{ \lambda_0^{\frac{\pi_0}{\pi_0}} > \lambda_1^{\frac{\pi_0}{\pi_1}} > \dots > \lambda_k^{\frac{\pi_0}{\pi_k}} > \dots > \lambda_d^{\frac{\pi_0}{\pi_d}} \right\},$$

essent  $\pi_k = \prod_{l=0,1,\dots,d} (l \neq k) |\lambda_k - \lambda_l|$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d$ .

Notem que, interpretat sobre l'espectre, el caràcter  $P$ -frontera expressa que la suma de les multiplicitats és  $|V|$ .

Forma part dels nostres propòsits caracteritzar els grafs que són  $P$ -frontera extremals i diametral, nascuts d'una propietat de l'espectre i del caràcter diametral de tot vèrtex, dins el marc estàndar de la distància-regularitat. Ens serà útil en aquest camí establir una relació entre la  $r$ -antipodalitat d'un graf i el polinomi alternant. En farem ús en el context de la distància-regularitat, Capítol 9. Fem uns comentaris per introduir el caràcter antipodal d'un graf.

Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$  de diàmetre  $D$ , indicarem  $\Gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq D$ , el graf  $(V, E_k)$ , on les adjacències estan definides per considerar  $\{u, v\} \in E_k$  quan  $\partial(u, v) = k$  en  $\Gamma$ . En particular,  $\Gamma_1 = \Gamma$ . Notem que si  $\Gamma$  és  $P$ -frontera extremal i diametral, llavors  $\Gamma_D$  és la unió de  $\frac{|V|}{2}$  còpies de  $K_2$ . Seguint aquesta línia definim  $\Gamma$  com un graf *antipodal* quan  $\Gamma_D = \cup_{i=1}^s K_{i_i}$ . Si es compleix  $i_1 = \dots = i_s = r$ , direm que  $\Gamma$  és  $r$ -antipodal. Equivalentment, pot introduir-se l'antipodalitat de  $\Gamma$  pel fet que la relació " $u \sim v$  quan  $u = v$  o  $\partial(u, v) = D$  sigui d'equivalència en  $V$ . La  $r$ -antipodalitat equival llavors a que totes les classes d'equivalència tinguin  $r$  elements. Notem que llavors, amb una ordenació adequada dels vèrtexs,  $A_D$ , matriu d'adjacència de  $\Gamma_D$ , adopta la forma diagonal per capsos, amb  $rs = |V|$ ,

$$A_D = \left( \begin{array}{ccc} \square_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \square_s \end{array} \right) \quad \text{on} \quad \square_1 = \dots = \square_s = \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{array} \right) \quad (\text{matriu } r \times r) \quad (5.12)$$

Per a aquests grafs el següent resultat treballa en el sentit de relacionar la matriu d'adjacència de  $\Gamma_D$  amb el polinomi alternant de  $\Gamma$ .

**Proposició 5.5.7** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular extremal  $r$ -antipodal,  $D$  el seu diàmetre i  $A$  la seva matriu d'adjacència. Suposem que  $A_D$ , matriu d'adjacència de  $\Gamma_D$ , pertany a l'àlgebra generada per  $A$ , és a dir,  $A_D = T(A)$ , per a un polinomi  $T \in \mathbb{R}_D[x]$ . Llavors  $T = H - 1 - \frac{r}{2}(P - 1)$ , on  $H$  és el polinomi de Hoffman i  $P$  el polinomi alternant de  $\Gamma$ . A més,  $P(\lambda) = \frac{2}{r}|V| - 1$ .*

**Demostració** Notem primer que de ser  $j$  vector propi per  $A_D$  amb autovalor  $r-1$ , resulta  $T(\lambda) = r-1$ . Introduïm el polinomi  $R = H - T$ . Com l'element de  $R(A) = J - A_D$  corresponent a una parella diametral de vèrtexs és nul·la, es compleix  $R \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ . Sigui  $\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$  ( $d = D$ ) els autovalors de  $\Gamma$ . Per a  $i = 1, \dots, d$ , sigui  $u_i$  un autovector de  $A$  corresponent a l'autovalor  $\lambda_i$ . De  $R(\lambda_i)u_i = Ru_i = Ju_i - A_D u_i = -A_D u_i$ , resulta que  $-R(\lambda_i)$  és autovalor de  $A_D$ . Com  $\text{Spec}(A_D) = \{r - 1^s, -1^{n-s}\}$ , on  $s = \frac{|V|}{r}$ , es compleix  $R(\lambda_i) \in \{1, 1 - r\}$ . A més,  $R(\lambda) = H(\lambda) - T(\lambda) = |V| - r + 1$ . Introduïm  $P = \frac{2}{r}R + 1 - \frac{2}{r}$ , amb el que  $T = H - R = H - 1 - \frac{r}{2}(P - 1)$ . Aquest polinomi verifica  $P(\lambda) = \frac{2}{r}|V| - 1$ ,  $P(\lambda_i) = 1$  quan  $R(\lambda_i) = 1$  i  $P(\lambda_i) = -1$  quan  $R(\lambda_i) = 1 - r$ . Per acabar la prova hem de veure que  $P$  és el polinomi alternant de  $\Gamma$ .

Sigui  $\{1, 2, \dots, d\} = C^+ \cup C^-$ , on  $C^+$  i  $C^-$  són, respectivament, els conjunts d'índexs  $l$  tals que  $P(\lambda_l) = 1$  i  $P(\lambda_l) = -1$ . Notem que  $A_D z = -z$  per a  $z \in \oplus_{l \in C^+} \text{Ker}(x - \lambda_l)$  i  $A_D z = (r - 1)z$  per a  $z \in \oplus_{l \in C^-} \text{Ker}(x - \lambda_l)$ . Sigui  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  una classe de vèrtexs antipodals i considerem les descomposicions espectrals

$$e_{u_i} = \frac{1}{|V|}j + z_i^+ + z_i^- = \frac{1}{|V|}j + z_{i1} + \dots + z_{id} \quad (i = 1, \dots, r),$$

on  $z_i^+ \in \oplus_{l \in C^+} \text{Ker}(x - \lambda_l)$ ,  $z_i^- \in \oplus_{l \in C^-} \text{Ker}(x - \lambda_l)$ . De  $A_D e_{u_1} = e_{u_2} + \dots + e_{u_r}$  obtenim  $A_D z_1^+ = -z_1^+ = z_2^+ + \dots + z_r^+$  i  $A_D z_1^- = (r - 1)z_1^- = z_2^- + \dots + z_r^-$ . Calcularem ara els conjunts  $C^+$  i  $C^-$ .



(i) Si  $l \in C^+$  llavors  $z_{2l} + \dots + z_{r_l} = -z_{1l}$ , amb el que almenys existeix un  $i$  entre 2 i  $r$  tal que  $\langle z_{1l}, z_{il} \rangle \leq 0$ . Acudint a la Proposició 5.5.2(b), podem assegurar que  $l$  és imparell.

(ii) Similarment, si  $l \in C^-$  llavors  $z_{2l} + \dots + z_{r_l} = (r-1)z_{1l}$ , amb el que existeix almenys  $2 \leq i \leq r$  tal que  $\langle z_{1l}, z_{il} \rangle \geq 0$ . Per la mateixa referència anterior, es conclou que  $l$  ha de ser parell.

En conseqüència,  $C^+$  i  $C^-$  són, respectivament, els conjunts d'índexs imparells i parells. Amb això establim que  $P$  és el polinomi alternant de  $\Gamma$ .  $\square$

Seguint amb les mateixes hipòtesis i notacions de la Proposició 5.5.7, notem que si  $l$  és parell, partint de cadascun dels vèrtexs d'una mateixa classe d'equivalència, obtenim les equacions  $z_{1l} + z_{2l} + \dots + z_{r_l} = rz_{il}$ , per a  $i = 1, \dots, r$ . Per tant,  $z_{il}$  és independent de  $i$ . Usant la Proposició 5.5.2,

$$m_{u_i}(\lambda_l) = \|z_{il}\|^2 = \langle z_{il}, z_{il} \rangle = \langle z_{il}, z_{jl} \rangle = \frac{1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_l} \quad (l \text{ parell}). \quad (5.13)$$

En el cas  $l$  imparell, obtenim l'única equació  $z_{1l} + z_{2l} + \dots + z_{r_l} = 0$ . Usant també la Proposició 5.5.2, els productes escalars entre aquests vectors s'expressen

$$\langle z_{il}, z_{jl} \rangle = -\frac{1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_l} \quad (i \neq j) \text{ entre } 1 \text{ i } r. \quad (5.14)$$

Fem el càlcul,

$$m_{u_i}(\lambda_l) = \|z_{il}\|^2 = \langle z_{il}, z_{il} \rangle = -\sum_{j=1 (j \neq i)}^d \langle z_{il}, z_{jl} \rangle = \sum_{j=1 (j \neq i)}^d \frac{1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_l} = \frac{r-1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_l} \quad (l \text{ imparell}). \quad (5.15)$$

De (5.13) i (5.15) obtenim la coespectralitat de  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , vèrtexs d'una mateixa classe d'equivalència. De la independència de les multiplicitats locals respecte de la classe, en resulta la coespectralitat de tots els vèrtexs de  $\Gamma$ . Sumant les multiplicitats locals per a tots els vèrtexs, es té:

**Proposició 5.5.8** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular extremal  $r$ -antipodal tal que la matriu d'adjacència de  $\Gamma_{D(\Gamma)}$  pertanyi a l'àlgebra generada per la matriu d'adjacència de  $\Gamma$ . Llavors,  $\Gamma$  és espectralment regular i  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$  compleix*

$$m_k = \frac{\pi_0}{\pi_k} \quad (k \text{ parell}), \quad m_k = (r-1) \frac{\pi_0}{\pi_k} \quad (k \text{ imparell}),$$

on  $\pi_k = \prod_{l=0,1,\dots,d (l \neq k)} |\lambda_k - \lambda_l|$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d$ .

Considerem les classes d'equivalència  $V^1, \dots, V^s$ , en que parteix  $V$  per la relació antipodal. Siguin  $u_1, \dots, u_r$  el elements de la classe  $V^i$ . Donat  $k$  imparell entre 1 i  $d$ , considerem en l'espai afí, de dimensió  $m_k$ , subjacent a  $\text{Ker}(x - \lambda_k)$ , els punts determinats per  $z_{u_1 k}, \dots, z_{u_r k}$ . De (5.14) i (5.15) resulta que aquests  $r$  punts determinen un tetraedre regular  $T_k^i$  de centre 0 i de costat  $a_k^i$  determinat per

$$(a_k^i)^2 = \langle z_{u_i k} - z_{u_j k}, z_{u_i k} - z_{u_j k} \rangle = 2 \frac{r-1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_k} + 2 \frac{1}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \frac{2r}{|V|} \frac{\pi_0}{\pi_k}.$$

Per  $k$  parell les projeccions, en cada  $\text{Ker}(x - \lambda_k)$ , dels  $r$  vèrtexs de cada classe  $V^i$ , es redueixen a un punt  $p_k^i$ . Així, les projeccions defineixen  $V \rightarrow \prod_{k=0}^d \text{Ker}(x - \lambda_k)$ , amb la que

$$V^i \mapsto p_0^i \quad T_1^i \quad p_2^i \quad T_3^i \quad \dots \quad p_d^i \quad T_d^i \quad \text{segons la paritat de } d = D(\Gamma).$$

Seria interessant de poder prosseguir amb l'estudi de la geometria dels conjunts de punts  $\{p_{2l}^1, \dots, p_{2l}^s\}$ . No hem fet més que observar que per  $l = 0$  es redueix a un punt i que el baricentre de cadascun d'aquests conjunts és 0. L'existència dels tetraedres regulars  $T_k^i$  en  $\text{Ker}(x - \lambda_k)$ , implica que la dimensió de l'espai no pot ser inferior a  $r - 1$ . En les mateixes hipòtesis que en la Proposició 5.5.8, es té

**Corollari 5.5.9** *Es compleix  $r \leq 1 + \min\{m_k : k = 1, \dots, d : k \text{ imparell}\}$*

## 5.6 El polinomi alternant en grafs P-frontera extremals

Sigui  $\Gamma$  un graf  $P$ -frontera extremal i  $\lambda_d < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 = \lambda$  els seus autovalors. Per a cada subconjunt  $\{i_1 < \dots < i_r\}$  de  $\{0, 1, \dots, d\}$ , considerem

$$(p, q) \mapsto \sum_{l=1}^r \frac{1}{\pi_l\{i_1, \dots, i_r\}} p(\lambda_{i_l}) q(\lambda_{i_l}) \quad \text{on} \quad \pi_l\{i_1, \dots, i_r\} = \prod_{j \neq l} |\lambda_{i_l} - \lambda_{i_j}| \quad (l = 1, \dots, r).$$

És un producte escalar en  $\mathbb{R}_{r-1}[x]$ , que indicarem  $\langle p, q \rangle_{\{i_1, \dots, i_r\}}$ . De  $\frac{1}{\pi_l\{0, 1, \dots, r\}} = \frac{\lambda_l - \lambda_{r+1}}{\pi_l\{0, 1, \dots, r+1\}}$ , resulta per iteració,

$$\langle p, q \rangle_{\{0, 1, \dots, r\}} = \langle (x - \lambda_{r+1})p, q \rangle_{\{0, 1, \dots, r+1\}} = \dots = \langle (x - \lambda_{r+1})(x - \lambda_{r+2}) \dots (x - \lambda_d)p, q \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}} \quad (5.16)$$

per a tota parella  $p, q$  en  $\mathbb{R}_{r-1}[x]$ . En particular, per a  $r \geq 2$ , val

$$\langle 1, 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, r\}} = \|1\|_{\{0, 1, \dots, r\}}^2 = \langle (x - \lambda_{r+1})(x - \lambda_{r+2}) \dots (x - \lambda_d), 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}}; \quad (5.17)$$

$$\langle x, 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, r\}} = \langle x(x - \lambda_{r+1})(x - \lambda_{r+2}) \dots (x - \lambda_d), 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}}. \quad (5.18)$$

Sigui  $P$  el polinomi alternant. Indiquem  $[P; \lambda_i, \dots, \lambda_{i+r}]$ , com a la Secció 3.4, les diferències dividides de  $P$ . Recordem que llavors:

$$P = \sum_{r=1}^d [P; \lambda_1, \dots, \lambda_r] (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{r-1}). \quad (5.19)$$

Definint  $\|1\|_{\{i\}} = 1$ , podem vincular aquestes diferències dividides amb normes associades als productes escalars anteriors, mitjançant el següent fet,

**Lema 5.6.1** *Es compleix  $[P; \lambda_i, \dots, \lambda_{i+r}] = (-1)^{i+1} \|1\|_{\{i, \dots, i+r\}}^2$ , per a  $1 \leq i \leq i+r \leq d$ .*

**Demostració** Per a  $r \geq 2$ , fem el càlcul,  $\|1\|_{\{i, \dots, i+r-1\}}^2 + \|1\|_{\{i+1, \dots, i+r\}}^2 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi_i\{i, \dots, i+r-1\}} + \sum_{l=i+1}^{i+r-1} \left( \frac{1}{\pi_l\{i, \dots, i+r-1\}} + \frac{1}{\pi_l\{i+1, \dots, i+r-1\}} \right) + \frac{1}{\pi_{i+r}\{i+1, \dots, i+r\}} = \\ &= \frac{\lambda_i - \lambda_{i+r}}{\pi_i\{i, \dots, i+r\}} + \sum_{l=i+1}^{i+r-1} \left( \frac{\lambda_l - \lambda_{i+r}}{\pi_l\{i, \dots, i+r\}} + \frac{\lambda_l - \lambda_l}{\pi_l\{i, \dots, i+r\}} \right) + \frac{\lambda_i - \lambda_{i+r}}{\pi_{i+r}\{i, \dots, i+r\}} = \\ &= (\lambda_i - \lambda_{i+r}) \|1\|_{\{i, \dots, i+r\}}^2. \end{aligned}$$

Obtenim, per a  $r \geq 2$ , la relació recurrent,  $\|1\|_{\{i, \dots, i+r\}}^2 = \frac{\|1\|_{\{i, \dots, i+r-1\}}^2 + \|1\|_{\{i+1, \dots, i+r\}}^2}{\lambda_i - \lambda_{i+r}}$ . Aquesta recurrència s'exten a  $r = 1$  definint  $\|1\|_{\{i\}}^2 = 1$ , per a tot  $i = 1, \dots, d$ . En efecte, per a  $i = 1$ ,  $\|1\|_{\{i, i+1\}}^2 = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{i+1}} = \frac{\|1\|_{\{i\}}^2 + \|1\|_{\{i+1\}}^2}{\lambda_i - \lambda_{i+1}}$ . Provem ara la nostra afirmació per inducció. Per a  $r = 0$  resulta de les definicions  $[P, \lambda_i] = (-1)^{i+1}$  i  $\|1\|_{\{i\}} = 1$ . Suposem-ho cert fins a  $r - 1$  ( $r \geq 1$ ). Llavors:

$$\begin{aligned} [P; \lambda_i, \dots, \lambda_{i+r}] &= \frac{[P; \lambda_i, \dots, \lambda_{i+r-1}] - [P; \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+r}]}{\lambda_i - \lambda_{i+r}} = \\ &= \frac{(-1)^{i+1} \|1\|_{\{i, \dots, i+r-1\}}^2 - (-1)^i \|1\|_{\{i+1, \dots, i+r\}}^2}{\lambda_i - \lambda_{i+r}} = (-1)^{i+1} \|1\|_{\{i, \dots, i+r\}}^2. \end{aligned}$$

□

Podem ara obtenir una expressió no recurrent per a  $[P; \lambda_1, \dots, \lambda_r]$ . En efecte, del lema anterior i de (5.17) i (5.18) es té,

$$\begin{aligned} [P; \lambda_1, \dots, \lambda_r] &= \|1\|_{\{1, \dots, r\}}^2 = \sum_{l=1}^r \frac{1}{\pi_l \{1, \dots, r\}} = \sum_{l=0}^r \frac{\lambda - \lambda_l}{\pi_l \{0, 1, \dots, r\}} = \lambda \|1\|_{\{0, 1, \dots, r\}}^2 - \langle x, 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, r\}} = \\ &= \lambda \langle (x - \lambda_{r+1}) \cdots (x - \lambda_d), 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}} - \langle x(x - \lambda_{r+1}) \cdots (x - \lambda_d), 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}} = \\ &= \langle (x - \lambda_{r+1}) \cdots (x - \lambda_d)(\lambda - x), 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Suposem ara que  $\Gamma$  és un graf P-frontera extremal. Llavors, Proposició 5.5.4, el nombre de circuits de longitud  $k$  per a tot vèrtex diametral és

$$C_k = \frac{\pi_0 \{0, 1, \dots, d\}}{\|\nu\|^2} \sum_{l=0}^d \frac{\lambda_l^k}{\pi_l \{0, 1, \dots, d\}} = \frac{\pi_0 \{0, 1, \dots, d\}}{\|\nu\|^2} \langle x^k, 1 \rangle_{\{0, 1, \dots, d\}} = \frac{\pi_0}{\|\nu\|^2} \langle x^k, 1 \rangle,$$

entenem, per defecte, que els  $\pi_l$  i el producte escalar estan construïts sobre el total d'autovalors del graf. Introduïm un *operador següent*,  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tal que  $SC_k = C_{k+1}$ , per a tot  $k \geq 0$ . Considerem l'àlgebra generada per  $S$  sobre  $\mathbb{R}$  prenent la composició per producte. Amb aquest formalisme,  $C_k = S^k C_0 = \frac{\pi_0}{\|\nu\|^2} \langle x^k, 1 \rangle$ . Llavors (5.20) pot expressar-se  $[P; \lambda_1, \dots, \lambda_r] = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} (S - \lambda_{r+1}) \cdots (S - \lambda_d) (\lambda C_0 - C_1)$ . Portant-ho a (5.19), obtenim el  $(d - 1)$ -polinomi alternant en la forma,

$$P = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} \sum_{r=1}^d q_{\{1, \dots, r-1\}}(x) q_{\{r+1, \dots, d\}}(S) (\lambda C_0 - C_1), \quad \text{on } q_{\{i_1, \dots, i_k\}}(z) = (z - \lambda_{i_1}) \cdots (z - \lambda_{i_k}). \quad (5.21)$$

En el que segueix farem el càlcul dels coeficients de  $P$ , a partir d'aquesta darrera expressió. Simplificarem les expressions introduint, per a un conjunt d'índexs  $X \subset \{1, \dots, d\}$ , el símbol  $\sigma_X^r = \sum_{Z \subset X, |Z|=r} \prod_{i \in Z} \lambda_i$ , per a  $r = 1, \dots, |X|$ , i  $\sigma_X^0 = 1$ . Per exemple,  $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_d) = \sum_{r=0}^d (-1)^r \sigma_{\{1, \dots, d\}}^r x^{d-r}$ .

Considerem l'expansió del polinomi en dues variables,

$$p(u, v) = \sum_{r=1}^d q_{\{1, \dots, r-1\}}(u) q_{\{r+1, \dots, d\}}(v) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^d \left( \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \sigma_{\{1, \dots, r-1\}}^i u^{r-1-i} \right) \left( \sum_{j=0}^{d-r} (-1)^j \sigma_{\{r+1, \dots, d\}}^j v^{d-r-j} \right) = \\
&= \dots = \\
&= \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^h (-1)^k \left[ \sum_{s=0}^k \sigma_{\{1, \dots, d-h+s-1\}}^s \sigma_{\{d-h+s+1, \dots, d\}}^{k-s} \right] v^{h-k} \right] u^{d-1-h} = \sum_{h=0}^{d-1} a_h u^{d-1-h} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Expressarem  $a_h = \sum_{k=0}^h (-1)^k c_{hk} v^{h-k}$ , en forma més convenient donant una forma simplificada de  $c_{hk}$ . En aquest sentit s'han establert els següents resultats combinatoris.

**Lema 5.6.2** Per a tot  $d \geq 1$  val la igualtat

$$\sum_{s=0}^k \binom{h+s}{s} \binom{d-h-s-1}{k-s} = \binom{d}{k} \quad \text{per a } h+k \leq d-1.$$

**Demostració** Fem una prova per inducció. Per a  $d=1$ ,  $k$  i  $h$  són nuls i el resultat és cert. Suposem-ho cert per a  $d-1$  i provem-ho per a  $h+k \leq d-1$ . Si  $k=0$  és immediat i per a  $h=0$  és un resultat fàcilment comprobable sobre el triangle de Tartaglia. Suposem  $h \geq 1$  i  $k \geq 1$ . Aplicant el resultat a les parelles  $h-1, k$  i  $h, k-1$ , de suma menor o igual que  $d-2$ , es té

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^k \binom{h+s}{s} \binom{d-h-s-1}{k-s} &= \sum_{s=0}^k \binom{h-1+s}{s} \binom{d-h-s-1}{k-s} + \sum_{s=1}^k \binom{h-1+s}{s-1} \binom{d-h-s-1}{k-s} = \\
&= \binom{d-1}{k} + \sum_{s=0}^{k-1} \binom{h+s}{s} \binom{d-h-s-2}{k-1-s} = \binom{d-1}{k} + \binom{d-1}{k-1} = \binom{d}{k}.
\end{aligned}$$

□

**Proposició 5.6.3** Sigui  $h = 0, 1, \dots, d-1$ . Donat qualsevol subconjunt  $X \subset \{1, \dots, d\}$  de  $k$  elements, amb  $0 \leq k \leq d-h-1$ , existeix un únic  $s$  entre 0 i  $k$ , tal que  $X = Y \cup Z$  on  $Y \subset \{1, \dots, h+s\}$ ,  $Z \subset \{h+s+2, \dots, d\}$ , amb  $|Y| = s$  i  $|Z| = k-s$ .

**Demostració** El nombre de reunions possibles  $Y \cup Z$  és  $\sum_{s=0}^k \binom{h+s}{s} \binom{d-h-s-1}{k-s}$ , que segons el Lema 5.6.2 coincideix amb el nombre de subconjunts de  $\{1, \dots, d\}$  de  $k$  elements. El resultat s'establirà provant que no és possible la igualtat  $X = Y_1 \cup Z_1 = Y_2 \cup Z_2$ , essent  $Y_i, Z_i$  corresponents a  $s_i$  amb  $s_1 \neq s_2$ . Modelem el problema considerant la matriu de  $k$  files idèntiques i  $d$  columnes, on  $a_{s,j} = 1$  si  $j \in X$  i  $a_{s,j} = 0$  si  $j \notin X$ , per a  $j = 1, \dots, d$ . Suposem que existissin dues files,  $s_1 < s_2$ , tals que, per a  $i = 1, 2$ , es compleix  $a_{s_i, h+s_i+1} = 0$  i entre  $a_{s_i, 1}, \dots, a_{s_i, h+s_i}$  hi hagin exactament  $s_i$  uns. Llavors tindriem la contradicció de que entre els  $s_2 - s_1 - 1$  termes  $a_{s_2, h+s_1+2}, \dots, a_{s_2, h+s_2}$  tindrien d'haver exactament  $s_2 - s_1$  uns. □

Interpretant els conjunts  $Y, Z$  com a conjunts de factors, una conseqüència immediata és:

**Corollari 5.6.4** Per a  $k = 0, 1, \dots, d-1-h$ ,  $h = 0, 1, \dots, d-1$ , es compleix

$$\sum_{s=0}^k \sigma_{\{1, \dots, h+s\}}^s \sigma_{\{h+s+2, \dots, d\}}^{k-s} = \sigma_{\{1, \dots, d\}}^k.$$

Tornem al càlcul dels coeficients en (5.22). Podem ara proseguir en la forma,

$$\begin{aligned}
 p(u, v) &= \sum_{h=0}^{d-1} a_{d-1-h} u^h = \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^{d-1-h} (-1)^k \left[ \sum_{s=0}^k \sigma_{\{1, \dots, h+s\}}^s \sigma_{\{h+s+2, \dots, d\}}^{k-s} \right] v^{d-1-h-k} \right] u^h = \\
 &= \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^{d-1-h} (-1)^k \sigma_{\{1, \dots, d\}}^k v^{d-1-h-k} \right] u^h = \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^h (-1)^k \sigma_{\{1, \dots, d\}}^k v^{h-k} \right] u^{d-1-h} = \\
 &= \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^h \alpha_k v^{h-k} \right] u^{d-1-h} \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

on  $\alpha_k$  és el coeficient de  $x^{d-k}$  en el polinomi  $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_d)$ . Usant el polinomi  $p$ , l'expressió (5.21) del  $(d-1)$ -polinomi alternant, és

$$P = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} p(x, S)(\lambda C_0 - C_1)$$

que amb (5.23) estableix:

**Proposició 5.6.5** *El  $(d-1)$ -polinomi alternant d'un graf P-frontera extremal pot explicitar-se en la forma*

$$P = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^h (\lambda C_{h-k} - C_{h-k+1}) \alpha_k \right] x^{d-1-h}$$

on  $C_r$  és el nombre de circuits de longitud  $r$  per qualsevol vèrtex diametral i  $\alpha_k$  és el coeficient de  $x^{d-k}$  en el polinomi  $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_d)$ .

Una expressió condensada relacionant el  $(d-1)$ -polinomi alternant amb el polinomi de Hoffman generalitzat,  $H = \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_d) = \sum_{k=0}^d H_k x^{d-k}$ , es deriva de la lectura dels elements de  $\mathbb{R}_d[x]$  a través de la identificació

$$p = \sum_{k=0}^d a_k x^{d-k} \longleftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_d) = (a_k),$$

El producte de convolució discret  $(a_k) \star (b_k) = (c_k)$ , on  $c_k = \sum_{h=0}^k a_h b_{k-h}$ , es transllada a un producte convolutori  $p \star q$  en  $\mathbb{R}_d[x]$ . Introduint el polinomi  $\delta \equiv (0, \lambda C_0 - C_1, \lambda C_1 - C_2, \dots, \lambda C_{d-1} - C_d)$ , i calculant a partir de l'expressió donada a la Proposició 5.6.5, es té

$$P = \sum_{h=0}^{d-1} \left[ \sum_{k=0}^h \delta_{h-k+1} H_k \right] x^{d-1-h} = \sum_{h=0}^d \left[ \sum_{k=0}^h \delta_{h-k} H_k \right] x^{d-h} = \delta \star H \tag{5.24}$$

Apliquem-ho a calcular els primers coeficients de  $P$ . El polinomi  $\delta \equiv (0, \lambda, -g, \lambda g - \Delta, \dots)$ , on  $g$  i  $\Delta$  són el grau i el nombre de triangles per a tot vèrtex diametral. Per tant de (5.24) resulta

$$\begin{aligned}
 P &= (0, \lambda, -g, \lambda g - \Delta, \dots) \star (H_0, H_1, H_2, H_3, \dots) = (0, \lambda H_0, \lambda H_1 - g H_0, \lambda H_2 - g H_1 + (\lambda g - \Delta) H_0, \dots) \\
 &= \frac{\|\nu\|^2}{\pi_0} [\lambda x^{d-1} - (\lambda S_1 + g) x^{d-2} + (\lambda S_2 + g S_1 + \lambda g - \Delta) x^{d-3} + \dots], \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

on  $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq d} \lambda_i$ ,  $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j$ .

## 5.7 Grafs P-frontera de diàmetre petit

Essent  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P$ -frontera amb espectre  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 \equiv \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$ , hem estudiat anteriorment el cas en que  $D(\Gamma) = d$ . El propòsit d'aquest capítol és estudiar grafs  $P$ -frontera amb diàmetre sensiblement inferior a la fita que imposa el nombre d'autovalors. Introduint la funció

$$\mathcal{D} : \{\text{grafs } P\text{-frontera}\} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad \text{definida per} \quad \mathcal{D}(\Gamma) = \frac{D(\Gamma)}{d} \quad (5.26)$$

la fitació, sempre vàlida,  $D(\Gamma) \leq d$ , es tradueix en  $\mathcal{D}(\Gamma) \in (0, 1]$ . Presentarem famílies de grafs  $P$ -frontera que establiran la inclusió  $(\frac{1}{2}, 1] \subset \text{Im } \mathcal{D}$ . Malgrat els nostres esforços, el problema d'obtenir l'ínfim de  $\mathcal{D}$  sobre els grafs  $P$ -frontera, seguirà obert després d'aquest treball. Notem que la mateixa funció extesa a grafs arbitraris amb més d'un vèrtex, que és clar segueix verificant  $\mathcal{D}(\Gamma) \in (0, 1]$ , compliria  $\inf \mathcal{D} = 0$ . Per exemple, el graf roda  $W_{4n-1} = K_1 + C_{4n-2}$  amb  $n \geq 3$ , té espectre  $(\sqrt{4n-1} + 1)^1, (2 \cos \frac{k}{2n-1}\pi)^2$  ( $k = 1, \dots, 2n-2$ ),  $-2^1, (1 - \sqrt{4n-1})^1$ , amb el que  $d = 2n$ , i té diàmetre 2. Per tant, per a tot  $n \geq 3$ ,  $\mathcal{D}(W_{4n-1}) = \frac{1}{n}$ .

Començarem establint dos resultats que caracteritzen el caràcter  $P$ -frontera en termes de l'ordre del graf quan la malla d'autovalors segueix certes pautes.

**Lema 5.7.1** *Considerem un graf regular  $\Gamma = (V, E)$ . Llavors:*

- si els seus autovalors són  $k, \pm(k-1), \pm(k-2), \dots, \pm 2, \pm 1$ ,  $\Gamma$  és  $P$ -frontera si i només si  $|V| = \binom{2k-1}{k-1}$ ;*
- si els autovalors són  $\pm k, \pm(k-1), \pm(k-2), \dots, \pm 2, \pm 1$ ,  $\Gamma$  és  $P$ -frontera si i només si  $|V| = 2 \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k}{k}$ .*

**Demostració** Els resultats són d'anàloga demostració. Exposarem només una prova per a). Indexem els  $2k-1$  autovalors de  $\Gamma$  per  $\mu_0 = k, \mu_i = i, i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k-1)$ . Llavors

$$\pi_0 = \frac{(2k-1)!}{k}, \quad \pi_i = \frac{(k-i)!(k+i-1)!}{i}, \quad \pi_{-i} = \frac{(k+i)!(k-i-1)!}{i} \quad (1 \leq i \leq k-1),$$

d'on

$$\frac{\pi_0}{\pi_i} = \frac{i}{k} \binom{2k-1}{k-i}, \quad \frac{\pi_0}{\pi_{-i}} = \frac{i}{k} \binom{2k-1}{k+i} = \frac{i}{k} \binom{2k-1}{k-i-1} \quad (1 \leq i \leq k-1).$$

En camí d'estudiar el caràcter  $P$ -frontera, efectuem el càlcul

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\pi_0}{\pi_i} + \frac{\pi_0}{\pi_{-i}} \right) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \binom{2k}{k-i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k-i}{k} \binom{2k}{i} = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \binom{2k}{i}.$$

Calculem aquests darrers sumatoris,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k}{i} &= \frac{1}{2} \left( 2^{2k} - \binom{2k}{k} \right) - 1 = 2^{2k-1} - \binom{2k-1}{k-1} - 1, \\ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \binom{2k}{i} &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \frac{(2k)!}{i!(2k-i)!} = 2 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k-1}{i-1} = 2 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{2k-1}{i} = 2^{2k-1} - 2 \binom{2k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Finalment tenim

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\pi_0}{\pi_i} + \frac{\pi_0}{\pi_{-i}} \right) = \binom{2k-1}{k-1} - 1,$$

i, per tant,  $\Gamma$  és  $P$ -frontera si i només si  $|V| = \binom{2k-1}{k-1}$ .  $\square$

Direm que una malla és *equiespaiada* quan els seus elements estan en progressió aritmètica. Si  $\delta$  és la diferència de la progressió ho precisarem dient que la malla és  $\delta$ -*equiespaiada*. En aquest cas l'ordre del graf caracteritza l'eventual caràcter  $P$ -frontera.

**Lema 5.7.2** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular amb  $d+1$  autovalors equiespaiats. Llavors,  $\Gamma$  és  $P$ -frontera si i només si  $|V| = 2^d$ .*

**Demostració** Essent  $\delta = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ , es té

$$\pi_0 = \delta \cdot 2\delta \cdot 3\delta \cdots d\delta = d! \delta^d, \quad \pi_k = k\delta \cdot (k-1)\delta \cdots \delta \cdot \delta \cdots (d-k)\delta = k!(d-k)! \delta^d \quad (1 \leq k \leq d).$$

Llavors,

$$\frac{\pi_0}{\pi_k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \binom{d}{k}, \quad \sum_{k=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_k} = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} = 2^d,$$

així que el caràcter  $P$ -frontera de  $\Gamma$  equival a  $|V| = 2^d$ .  $\square$

Per als nostres interessos posteriors interessa estudiar quan el producte per  $K_2$  preserva el caràcter equiespaiat dels autovalors. Després en farem ús quan  $\delta = 2$  i  $\delta = 4$ .

**Lema 5.7.3** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf amb autovalors  $\delta$ -equiespaiats:  $\lambda_0 > \lambda_1 = \lambda_0 - \delta > \cdots > \lambda_d = \lambda_0 - d\delta$ . Llavors  $\Gamma \times K_2$  també té autovalors equiespaiats si i només si*

a)  $\delta = 4$ . En tal cas  $\Gamma \times K_2$  té  $2d + 2$  autovalors 2-equiespaiats i espectre

$$\{(\lambda_0 + 1)^{m_0}, (\lambda_0 - 1)^{m_0}, (\lambda_0 - 3)^{m_1}, (\lambda_0 - 5)^{m_1}, \dots, (\lambda_0 - 4d + 1)^{m_d}, (\lambda_0 - 4d - 1)^{m_d}\};$$

b)  $\delta = \frac{2}{j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, d+1$ . Llavors  $\Gamma \times K_2$  té  $d + j + 1$  autovalors  $\delta$ -equiespaiats i espectre

$$\{(\lambda_0 + 1)^{m_0}, (\lambda_1 + 1)^{m_1}, \dots, (\lambda_{j-1} + 1)^{m_{j-1}}, (\lambda_j + 1)^{m_j + m_0}, \dots, (\lambda_d + 1)^{m_d + m_{d-j}}, (\lambda_{d-j+1} - 1)^{m_{d-j+1}}, \dots, (\lambda_d - 1)^{m_d}\}.$$

**Demostració** Donat que els autovalors de  $K_2$  són 1,  $-1$ , de cada autovalor  $\lambda_k$  de  $\Gamma$  es desprenen els autovalors  $\lambda_k + 1$  and  $\lambda_k - 1$  de  $\Gamma \times K_2$ , veure per exemple Schwenk [47]. Llavors és fàcil verificar que la malla d'autovalors resultant és equiespaiada només en els cassos enunciats.  $\square$

Considerarem ara el comportament de l'espectre i conservació del caràcter  $P$ -frontera quan el graf es sotmet a algunes transformacions simples. Comparem els espectres dels grafs de la Figura 5.10. El graf

transformat (en aquests exemples partim de grafs distància-regulars 2-antipodals) s'obté afegint arestes entre cada parella de vèrtexs diametralment oposats.

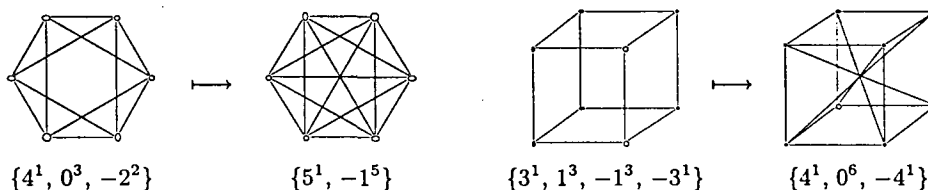


Figura 5.10: Exemples d'espectres en front la unió de conjugats.

Obtindrem l'expressió de l'espectre del graf transformat en una situació més general.

**Proposició 5.7.4** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf  $P$ -frontera regular amb espectre  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 \equiv \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$ , tal que cada vèrtex és conjugat, i indiquem  $\bar{\Gamma}$  el graf obtingut de  $\Gamma$  adjuntant una arista entre cada parella de vèrtexs conjugats. Llavors l'espectre de  $\bar{\Gamma}$  és*

$$\text{Spec}(\bar{\Gamma}) = \{(\lambda_0 + 1)^{m_0}, (\lambda_1 - 1)^{m_1}, (\lambda_2 + 1)^{m_2}, \dots, (\lambda_d + (-1)^d)^{m_d}\},$$

on els nous autovalors no són necessàriament diferents.

**Demostració** Essent  $A$  la matriu d'adjacència de  $\Gamma$ , la de  $\bar{\Gamma}$  és  $\bar{A} = A + J - P(A) = A + H(A) - P(A)$ , així que  $\bar{A}$  pertany a l'àlgebra d'adjacència de  $\Gamma$  i, per a cada autovalor  $\lambda_k$  de  $\Gamma$  amb multiplicitat  $m_k$ ,  $\lambda_k + H(\lambda_k) - P(\lambda_k)$  és autovalor de  $\bar{\Gamma}$  amb la mateixa multiplicitat  $m_k$ . Per tant, els nous autovalors són

$$\lambda_0 + |V| - (|V| - 1) = \lambda_0 + 1 \quad , \quad \lambda_k + 0 - (-1)^{k+1} = \lambda_k + (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

□

Una de les famílies de grafs  $P$ -frontera, sobre la que estudiarem la relació entre diàmetre i nombre d'autovalors, es construirà a partir de parelles formades per un graf i un automorfisme involutiu. Donarem ara uns resultats generals que ens seran d'utilitat.

**Definició 5.7.5** *Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i  $\sigma$  un automorfisme involutiu de  $\Gamma$ . Indicarem  $\Gamma^\sigma$  el graf  $(V, E^\sigma)$  on dos vèrtexs  $v_1, v_2$  són adjacents quan, en  $\Gamma$ ,  $v_1$  és adjacent amb  $\sigma v_2$  (equivalentment,  $v_2$  adjacent amb  $\sigma v_1$ ).*

Notem que  $\Gamma^\sigma$  no tindrà autollaços si i només si,  $\sigma u$  i  $u$  no són adjacents en  $\Gamma$ , per a tot vèrtex  $u$ . Si  $A, A_\sigma$  són respectivament les matrius d'adjacència de  $\Gamma$  i  $\Gamma^\sigma$ , de  $A_\sigma = A\sigma = \sigma A$  es dedueix  $A_\sigma^2 = A^2$  i, per tant, si  $\mu$  és autovalor de  $\Gamma^\sigma$  llavors almenys un dels nombres  $\mu, -\mu$  és autovalor de  $\Gamma$ . És a dir, si el conjunt d'autovalors de  $\Gamma$  és  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ , el conjunt d'autovalors de  $\Gamma^\sigma$  està contingut en  $\{\pm\lambda_0, \pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_d\}$ . Si indiquem  $H_\mu$  ( $H_\mu^\sigma$ ) el subespai propi d'autovalor  $\mu$  per  $A$  ( $A_\sigma$ ) és fàcil de veure



que per cada autovalor  $\mu$  de  $\Gamma$  es compleix  $H_\mu \perp H_{-\mu} = H_\mu^\sigma \perp H_{-\mu}^\sigma$ . Donat un graf introduïm la funció multiplicitat  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ), definida associant a cada  $x$  la multiplicitat, ordinàriament nul·la, de  $x$  com autovalor del graf. En aquest llenguatge podem formular,

**Proposició 5.7.6** *Considerem un automorfisme involutiu  $\sigma$  d'un graf  $\Gamma$ . Sigui  $m, m^\sigma$  les funcions multiplicitat associades, respectivament, a  $\Gamma$  i a  $\Gamma^\sigma$ . Es compleix  $m^\sigma(x) + m^\sigma(-x) = m(x) + m(-x)$ , per a tot  $x$ .*

Si dos vèrtexs  $u, v$  són a distància parell (diguem  $2p$ ) en  $\Gamma$ , d'un camí  $u \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \dots \mapsto u_{2p-1} \mapsto v$  en  $\Gamma$ , es dedueix el camí  $u \mapsto \sigma u_1 \mapsto u_2 \mapsto \dots \mapsto \sigma u_{2p-1} \mapsto v$  en  $\Gamma^\sigma$ . En resulta l'observació següent.

**Lema 5.7.7** *Sigui  $\sigma$  un automorfisme involutiu d'un graf  $\Gamma$ . Indiquem  $\partial$  i  $\partial^\sigma$  les distàncies respectives en  $\Gamma$  i en  $\Gamma^\sigma$ . Si  $\partial(u, v)$  és parell llavors  $\partial^\sigma(u, v) \leq \partial(u, v)$ .*

Considerem ara un vèrtex  $u$  invariant per l'automorfisme involutiu,  $\sigma u = u$ . Sigui  $v$  un vèrtex arbitrari i  $r = \partial(u, v)$ . Si  $r$  és parell, el Lema 5.7.7 proporciona  $\partial^\sigma(u, v) \leq r$ . Si  $r$  és imparell, d'un camí  $u \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \dots \mapsto u_{r-1} \mapsto v$ , deduïm que els vèrtexs  $u = \sigma u, u_1, \sigma u_2, \dots, u_{r-2}, \sigma u_{r-1}, v$ , defineixen un camí de longitud  $r$ , en  $\Gamma^\sigma$ , entre  $u$  i  $v$ . Per tant, per a qualvevol  $v$ ,  $\partial^\sigma(u, v) \leq \partial(u, v)$ , així que les excentricitats de  $u$  en  $\Gamma$  i  $\Gamma^\sigma$ , compleixen  $\varepsilon^\sigma(u) \leq \varepsilon(u)$ . Del caràcter involutiu de  $\sigma$  en resulta la igualtat. Per tant,

**Lema 5.7.8** *Sigui  $\sigma$  un automorfisme involutiu de  $\Gamma$ . Els eventuals vèrtexs invariants per  $\sigma$  tenen en  $\Gamma^\sigma$  la mateixa excentricitat que en  $\Gamma$ .*

### 5.7.1 Els grafs $\tilde{Q}_k \times K_2^s$

El  $k$ -cub  $Q_k$  té espectre  $\{k \binom{k}{0}, (k-2) \binom{k}{1}, (k-4) \binom{k}{2}, \dots, (-k) \binom{k}{k}\}$ , veure per exemple Biggs [4]. Del Lema 5.7.2, autovalors equiespaiats i  $|V| = 2^k$ , es desprén que és un graf  $P$ -frontera.

Començant per  $Q_k$ ,  $k \geq 2$ , considerem primer el graf  $\tilde{Q}_k$ . El seu diàmetre és  $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$  i per la Proposició 5.7.4, el seu espectre és

$$\begin{aligned} & \{(k+1) \binom{k}{0}, (k-3) \binom{k}{1} + \binom{k}{2}, \dots, (k-4j+1) \binom{k}{2j-1} + \binom{k}{2j}, \dots\} \\ & = \{(k+1) \binom{k+1}{0}, (k-3) \binom{k+1}{2}, \dots, (k-4j+1) \binom{k+1}{2j}, \dots\}, \end{aligned}$$

on el darrer terme és  $(1-k) \binom{k+1}{k}$  si  $k$  és parell i  $-(k+1) \binom{k+1}{k+1}$  si  $k$  és imparell. (L'espectre de  $\tilde{Q}_k$  pot establir-se també observant que el graf és el  $(k+1)$ -cub plegat, veure [5].) Considerem ara el graf  $\tilde{Q}_k \times K_2^s = \tilde{Q}_k \times K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$  on  $k$  és parell ( $k = 2k'$ ). Donat que  $\tilde{Q}_k$  té  $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 = k' + 1$  autovalors diferents que són 4-equiespaiats, aplicant el Lema 5.7.3 iteradament, obtenim:

$\tilde{Q}_k \times K_2$  té  $2k' + 2 = k + 2$  autovalors diferents 2-equiespaiats;

$\tilde{Q}_k \times K_2^2$  té  $k + 3$  autovalors diferents 2-equiespaiats;

⋮

$\tilde{Q}_k \times K_2^s$  té  $k + s + 1$  autovalors diferents 2-equiespaiats.

Del Lema 5.7.2, donat que  $\tilde{Q}_k \times K_2^s$  té ordre  $2^{k+s}$ , resulta que és un graf  $P$ -frontera. A més el seu diàmetre és  $D(\tilde{Q}_k \times K_2^s) = D(\tilde{Q}_k) + s = k' + s$ , mentre  $d$ , nombre d'autovalors menys ú, és  $k + s = 2k' + s$ . En el formalisme de la funció  $\mathcal{D}$  definida en (5.26) hem establert,

**Corol·lari 5.7.9** *Es verifica  $\mathcal{D}(\tilde{Q}_k \times K_2^s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{s}{k}}\right)$ . En particular, l'ínfim de la funció  $\mathcal{D}$  sobre els grafs  $P$ -frontera compleix  $\inf \mathcal{D} \leq \frac{1}{2}$ .*

**Corol·lari 5.7.10** *Donat qualsevol racional  $\frac{p}{q} \in (\frac{1}{2}, 1]$ , el graf  $\tilde{Q}_k \times K_2^s$  amb  $k = 2p - q$ ,  $s = 2(q - p)$ , compleix  $\mathcal{D}(\tilde{Q}_k \times K_2^s) = \frac{p}{q}$ .*

### 5.7.2 Grafs $O_k$ cargolats

Donat  $k \geq 2$ , sigui  $\Omega$  un conjunt de  $2k - 1$  elements. Definim el  $(k)$  odd graf, indicat  $O_k$ , com el graf de vèrtexs els  $\binom{2k-1}{k-1}$  subconjunts de  $\Omega$  d'ordre  $k - 1$  i adjacències definides pel caràcter disjunt dels subconjunts associats als vèrtexs. Per exemple,  $O_2$  és  $K_3$  i  $O_3$  és el graf de Petersen. Els odd grafs han estat introduïts i estudiats per Biggs [3]. En el que segueix considerarem  $\Omega = \{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ . Remarquem algunes propietats dels odd grafs.

- Els valors propis de  $O_k$  són  $\lambda_i = (-1)^i(k - i)$  amb multiplicitats  $m(\lambda_i) = \frac{k-i}{k} \binom{2k}{i}$  ( $i = 0, 1, \dots, k - 1$ ).

- El diàmetre de  $O_k$  és  $k - 1$ . En forma més precisa, la distància entre vèrtexs és

$$d(u, v) = \begin{cases} 2|u \cap v| + 1 & \text{quan } |u \cap v| \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1 \\ 2(k - 1 - |u \cap v|) & \text{quan } |u \cap v| \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \end{cases}$$

En particular, una parella de vèrtexs  $u, v$ , és diametral quan  $|u \cap v| = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ .

- El grup d'automorfismes de  $O_k$  és el grup simètric  $S_{2k-1}$ .

L'espectre de  $O_k$ , la Proposició 5.7.6 i el Lema 5.7.1 ens orienten cap a l'eventual obtenció d'una família de grafs  $P$ -frontera. Considerant un automorfisme involutiu  $\sigma$  de  $O_k$ , el conjunt d'autovalors del graf  $O_k^\sigma$  complirà

$$\text{Autovalors}(O_k^\sigma) \subseteq \{k, \pm(k - 1), \dots, \pm 1\}. \quad (5.27)$$

És senzill de veure que el graf  $O_k^\sigma$  no té autollaços si i només si el nombre  $s$  de trasposicions en què descomposa  $\sigma$  compleix  $s \leq k - 2$ . Mantindrem aquest supòsit d'ara en endavant. És el nostre propòsit provar la igualtat en (5.27). Llavors  $O_k^\sigma$  entrarà en la jurisdicció del Lema 5.7.1 que establirà el seu caràcter  $P$ -frontera (amb  $d = 2k - 2$ ). En realitat, a més dels autovalors de  $O_k^\sigma$ , obtindrem l'espectre complet, sotmetent les multiplicitats a una expressió recurrent sobre el nombre de trasposicions de l'automorfisme.

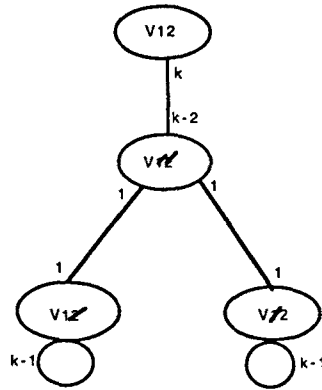


Figura 5.11:  $O_k^{(12)\tau}$  (esquema)

Per comoditat suposem  $\sigma = (12) \dots (2s-1, 2s)$  i destaquem la primera trasposició expressant  $\sigma = (12)\tau$ . Disposem el conjunt de vèrtexs  $V$  de  $O_k^\sigma$  com  $V_{12} \cup V_{1\cancel{2}} \cup V_{1\cancel{2}} \cup V_{12}$ , on  $V_{12}$  està format pels vèrtexs que contenen 1 i 2,  $V_{1\cancel{2}}$  pels que no contenen ni 1 ni 2,  $V_{1\cancel{2}}$  els que contenen 1 però no 2 i  $V_{12}$  els que no contenen 1 però sí 2. En  $V_{12}$  i  $V_{1\cancel{2}}$  establim l'ordre lexicogràfic. Observant que cada vèrtex de  $V_{1\cancel{2}}$  i  $V_{12}$  només està connectat amb un vèrtex de  $V_{1\cancel{2}}$  els hi traslladem l'ordre d'aquest. Els subgrafs induïts en  $V_{1\cancel{2}}$  i  $V_{12}$  són isomorfs a  $O_{k-1}^\tau$  a través de  $\{1, i_1, \dots, i_{k-2}\} \longleftrightarrow \{i_1, \dots, i_{k-2}\}; \{2, j_1, \dots, j_{k-2}\} \longleftrightarrow \{j_1, \dots, j_{k-2}\}$ .

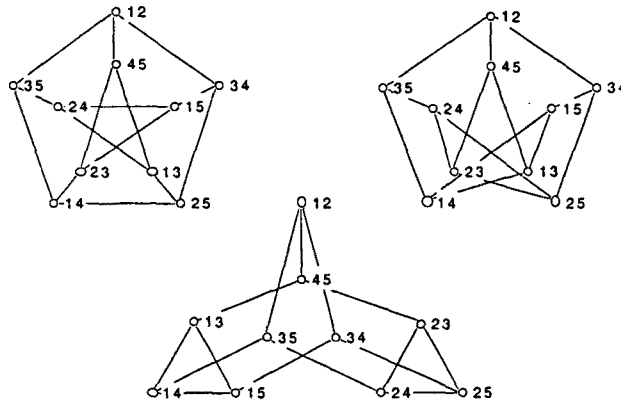


Figura 5.12: De  $O_3$  a  $O_3^{(12)}$ .

El diagrama de la Figura 5.11 ilustra la nostra descomposició i en la Figura 5.12 es mostra la construcció de  $O_3^{(12)}$  i la seva representació adient.

Amb la descomposició i ordre introduïts a  $V$  la matriu d'adjacència de  $O_k^\sigma$  s'expressa

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 & 0 \\ C^\top & 0 & I & I \\ 0 & I & B_\tau & 0 \\ 0 & I & 0 & B_\tau \end{pmatrix}$$

on  $B_\tau$  és matriu d'adjacència de  $O_{k-1}^\tau$ .

**Lema 5.7.11** *Es compleix  $B_\tau^2 = C^\top C + I$ .*

**Demostració** Veiem  $C^\top C$  com l'expressió dels camins de longitud 2 entre dos vèrtexs de  $V_{\mathcal{Y}}$  en el subgraf (bipartit)  $G$  induït en  $V_{12} \cup V_{\mathcal{Y}}$ . Totes les entrades de la diagonal principal de  $C^\top C$  són  $k-2$  i les de  $B_\tau^2$  són  $k-1$ , per tant el resultat és vàlid sobre la diagonal principal. Siguin ara  $u, v$  ( $u \neq v$ ) dos vèrtexs de  $V_{\mathcal{Y}}$  i  $\bar{u}, \bar{v}$  els vèrtexs de  $V_{12}$  connectats amb ells. Observem que els únics camins de longitud 2 entre  $u$  i  $v$  poden produir-se en  $G$  i el seu nombre serà el de subconjunts, amb  $k-1$  elements, de  $(\sigma u \cup \sigma v)^c$ . La seva existència és equivalent a  $|\sigma u \cup \sigma v| \leq k$ , on el menor estricte no és possible per ser  $u, v$  diferents. Com  $|\sigma u \cup \sigma v| = k$  equival a  $|u \cup v| = k$ , es té

$$(C^\top C)_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si } |u \cap v| = k-2 \\ 0 & \text{si } |u \cap v| < k-2 \end{cases} \quad (u \neq v).$$

En  $V_{12}$ ,  $\bar{u} = \{1\} \cup u_1$  amb  $u_1 = (\sigma u)^c - \{1, 2\}$  i similarment  $\bar{v} = \{1\} \cup v_1$  amb  $v_1 = (\sigma v)^c - \{1, 2\}$  i ara considerarem  $u_1, v_1$  com a vèrtexs de  $O_{k-1}^\tau$ . Raonant igual que abans es té

$$(B_\tau^2)_{u_1 v_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } |u_1 \cap v_1| = k-3 \\ 0 & \text{si } |u_1 \cap v_1| < k-3. \end{cases}$$

Les equivalències

$$|u \cap v| = k-2 \iff |u_1^c \cap v_1^c| = k \iff |u_1 \cup v_1| = k-1 \iff |u_1 \cap v_1| = k-3$$

acaben la prova. \(\square\)

Per a  $\mu$  enter, indiquem  $m_{k,s}(\mu)$  la seva multiplicitat com a autovalor de  $O_k^\sigma$ , on  $s$  és el nombre de trasposicions de  $\sigma$  (evidentment  $m_{k,s}(\mu) = 0$  quan  $\mu$  no és autovalor). En aquestes notacions establím el següent resultat:

**Proposició 5.7.12** *Per a  $s \leq k-2$ ,  $k \geq 3$ , les multiplicitats verifiquen la relació recurrent*

$$m_{k,s}(\mu) = m_{k-1,s-1}(\mu+1) + m_{k-1,s-1}(\mu) + m_{k-1,s-1}(\mu-1) + m_{k-1,s-1}(-\mu).$$

**Demostració** Si  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  és un autovector de  $O_k^\sigma$  associat a  $\mu$ ,  $A_\sigma v = \mu v$  es tradueix en el sistema

$$Cv_2 = \mu v_1 \tag{5.28}$$

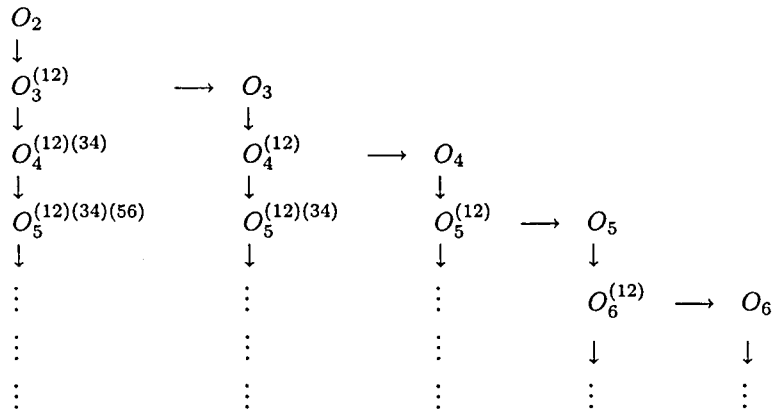
$$C^\top v_1 + v_3 + v_4 = \mu v_2 \tag{5.29}$$

$$v_2 + B_\tau v_3 = \mu v_3 \tag{5.30}$$

$$v_2 + B_\tau v_4 = \mu v_4 \tag{5.31}$$



Observem que per raó de l'anterior podem obtenir, seguint l'esquema següent, l'espectre de qualsevol  $O_k^\sigma$  a partir del de  $O_2$ .



Tornant al nostre fil principal, del Corollari 5.7.13 i el Lema 5.7.1 obtenim una família de grafs  $P$ -frontera.

**Proposició 5.7.15** *El graf  $O_k^\sigma$ , on  $k \geq 3$  i  $\sigma$  és una permutació formada per  $s$  trasposicions ( $1 \leq s \leq k - 2$ ), és  $P$ -frontera amb  $2k - 1$  autovalors.*

Establím ara el diàmetre de  $O_k^\sigma$ . Observem primer una eina interessant.

**Lema 5.7.16** *Siguin  $\partial_0$  i  $\partial$  les respectives funcions distància en els grafs  $O_k = (V, E)$  i  $O_k^\sigma = (V, E^\sigma)$ . Si  $u, v \in V$  compleixen  $|u \cap v| \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ , llavors  $\partial(u, v) \leq \partial_0(u, v)$ .*

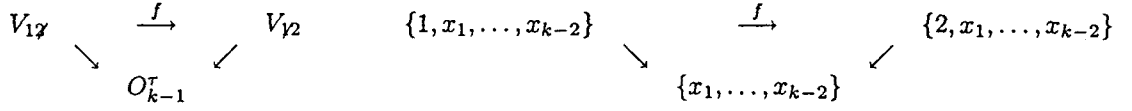
**Demostració** De l'expressió de la distància entre vèrtexs de  $O_k$ , donada al principi d'aquesta secció, se'n deriva que  $|u \cap v| \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  implica que  $\partial_0(u, v)$  és parell. El Lema 5.7.7 prova l'afirmació.  $\square$

**Proposició 5.7.17** *Sigui  $\sigma$  un automorfisme involutiu de  $O_k$  ( $k \geq 3$ ) que descomposa en  $s$  trasposicions ( $0 \leq s \leq k - 2$ ). Llavors  $O_k^\sigma$  té diàmetre  $k - 1 + s$ . Essent  $\sigma = (1, 2) \cdots (2s - 1, 2s)$ , les parelles diametral de vèrtexs són de la forma  $\{a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_{k-1-s}\}$ ,  $\{b_1, \dots, b_s, y_1, \dots, y_{k-1-s}\}$ , on  $\{a_i, b_i\} = \{2i - 1, 2i\}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , i  $\{x_1, \dots, x_{k-1-s}\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_{k-1-s}\}$  són una parella diametral en  $O_{k-s}$ , ara representat per els subconjunts d'ordre  $k - s - 1$  de  $\{2s + 1, \dots, 2k - 1\}$ .*

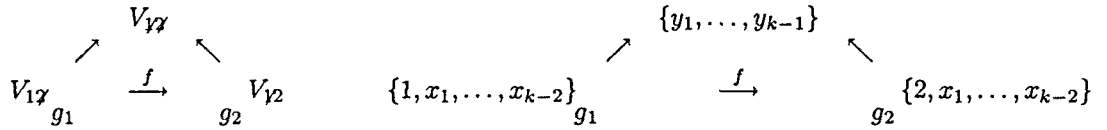
**Demostració** Fem inducció sobre  $k$ . Per a  $k = 3$ ,  $s = 0$  el graf és el de Petersen i per a  $s = 1$  és el graf de la Figura 5.12 amb diàmetres respectius 2 i 3 i les parelles diametral són les enunciades. Suposem el resultat cert fins a  $k - 1$  i  $0 \leq s \leq k - 3$ . Considerem ara  $O_k^\sigma$  amb  $\sigma = (1, 2) \cdots (2s - 1, 2s)$ , on el cas  $s = 0$  seria trivial. Sigui doncs  $s \geq 1$  i indiquem  $\sigma = (1, 2)\tau$ . Considerem un vèrtex  $u$  de  $O_k^\sigma$ .

1. Si  $u$  fos invariant per  $\sigma$ , és a dir continguéss, per a cada trasposició, els seus dos elements o a cap d'ells, usant el Lema 5.7.8, la seva excentricitat en  $O_k^\sigma$ , compliria  $\varepsilon^\sigma(u) = \varepsilon(u) \leq k - 1 < k - 1 + s$ .

2. Suposem ara que  $u$  conté, per alguna trasposició, exactament un dels dos elements. Sigui  $u = \{1, x_1, \dots, x_{k-2}\}$ , amb  $x_i \geq 3$ ,  $i = 1, \dots, k-2$ . Llavors, en l'esquema de la Figura 5.11, al que anirem fent referència,  $u \in V_{1\mathcal{X}}$ . Recordem que els subgrafs induïts en els conjunts de vèrtexs  $V_{1\mathcal{X}}$  i  $V_{\mathcal{Y}2}$  són isomorfs entre si i amb  $O_{k-1}^r$ , modelat pels subconjunts de  $k-2$  elements de  $\{3, 4, \dots, 2k-1\}$ , a través de



Recordem també l'esquema donat per les bijeccions



on  $\{x_1, \dots, x_{k-2}\} \cup \{y_1, \dots, y_{k-1}\} = \{3, \dots, 2k-1\}$ , i que el subgraf induït en  $V_{\mathcal{Y}\mathcal{X}}$  és totalment desconnex.

- (a) Si  $\{x_1, \dots, x_{k-2}\}$  no és diametral en  $O_{k-1}^r$ , la seva excentricitat en aquest graf és menor que  $k+s-3$ , amb el que  $\partial(u, v) < k+s-2$  si  $v \in V_{\mathcal{Y}\mathcal{X}}$  i  $\partial(u, v) < k+s-1$  si  $v \in V_{\mathcal{Y}2}$ . Sigui ara  $v \in V_{\mathcal{Y}2}$ . Existeix un camí de longitud  $l < k+s-3$  entre  $u$  i  $f^{-1}(v)$ ,

$$u \mapsto u_1 \mapsto \dots \mapsto u_{r-1} \mapsto u_r \mapsto \dots \mapsto u_{l-1} \mapsto f^{-1}(v),$$

llavors el camí

$$u \mapsto u_1 \mapsto \dots \mapsto u_{r-1} \mapsto g_1(u_{r-1}) \mapsto f(u_{r-1}) \mapsto f(u_r) \mapsto \dots \mapsto f(u_{l-1}) \mapsto v,$$

estableix  $\partial(u, v) < k+s-1$ , per a tot  $v \in V_{\mathcal{Y}2}$ . Per tant  $\varepsilon^\sigma(u) < k+s-1$ .

- (b) Suposem ara que  $u \in V_{1\mathcal{X}}$  és diametral en el subgraf induït en  $V_{1\mathcal{X}}$ , isomorf amb  $O_{k-1}^r$ . Llavors per la hipòtesi d'inducció, i sense pèrdua de generalitat,  $u = \{1, 3, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\}$ , amb  $y_i > 2s$  ( $1 \leq i \leq k-1-s$ ). Considerem un vèrtex  $v \in O_k^\sigma$ . Si  $\sigma v = v$  usant també el Lema 5.7.8,  $\partial^\sigma(u, v) = \partial(u, v) \leq k-1 < k-1+s$ . Suposem doncs que  $v$  pertany a  $V_{2l-1, \mathcal{X}}$  o a  $V_{2l \neq 1, 2l}$ , per algun  $l$  entre 1 i  $s$ .

- i. Si  $v$  no fos diametral en el subgraf induït, segons l'apartat (a) aplicat a  $v$ ,  $\partial(u, v) < k-1+s$ .

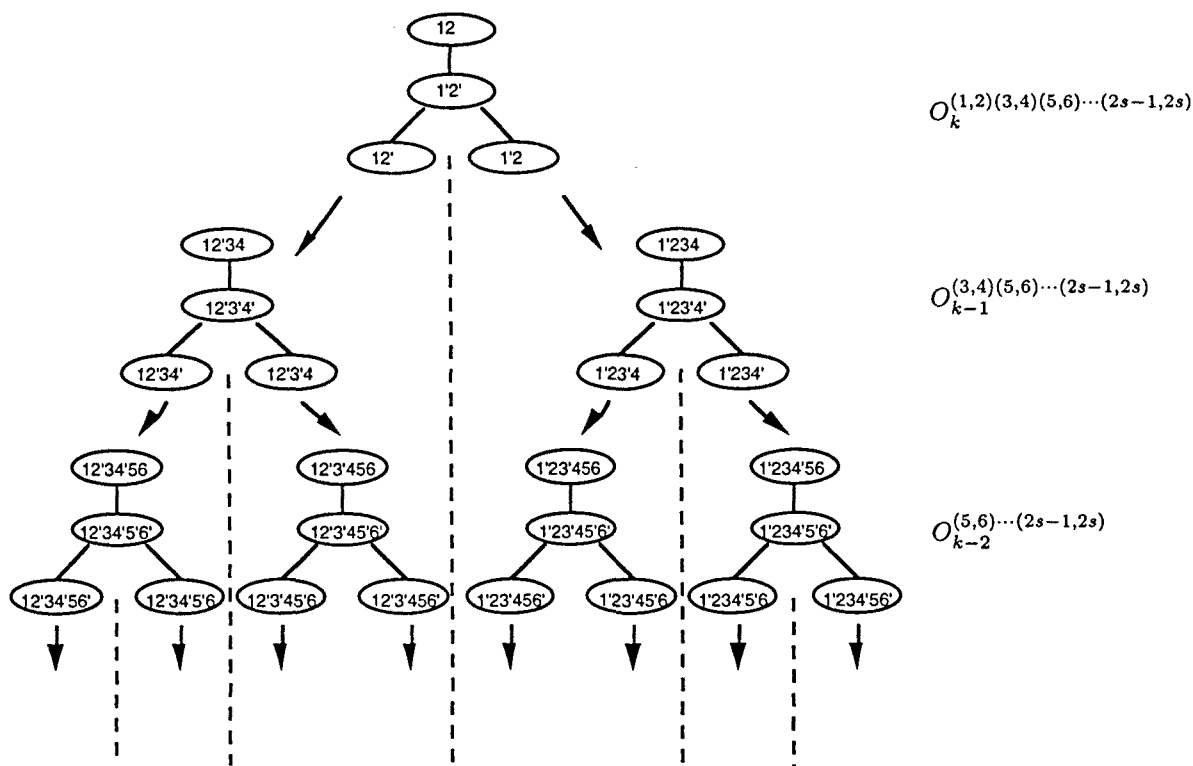


Figura 5.13: Descomposició de  $O_k^\sigma$

- ii. En altre cas,  $v = \{b_1, b_2, \dots, b_s, z_1, \dots, z_{k-1-s}\}$  amb  $b_i \in \{2i-1, 2i\}$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Si  $\{1, 3, \dots, 2s-1\}$  i  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  tinguessin algun element comú, per exemple,  $u = \{1, \dots, 2r-1, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\}$ ,  $v = \{2, \dots, 2r, 2r+1, \dots, 2s-1, z_1, \dots, z_{k-1-s}\}$ , amb  $r < s$ , seguint l'esquema de la Figura 5.13, podem obtenir un camí de  $u$  a  $v$  seguint els passos donats per simetries respecte de les línies puntejades,

$$\begin{aligned}
 u &= \{1, 3, 5, \dots, 2r-3, 2r-1, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\} ; \\
 & ; \{2, 3, 5, \dots, 2r-3, 2r-1, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\} ; \\
 & ; \{2, 4, 5, \dots, 2r-3, 2r-1, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\} ; \\
 & ; \{2, 4, 6, \dots, 2r-3, 2r-1, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\} ; \\
 & ; \dots ; \\
 & ; \{2, 4, 6, \dots, 2r-2, 2r-1, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\} ; \\
 & ; \{2, 4, 6, \dots, 2r-2, 2r, 2r+1, \dots, 2s-1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\} = v_1
 \end{aligned}$$

on cada pas és de longitud dos. Per tant  $\partial(u, v) \leq \partial(u, v_1) + \partial(v_1, v) \leq 2r + k - s - 1 < k - 1 + s$ .

Queda per considerar el cas



$$u = \{1, 3, \dots, 2s - 1, y_1, \dots, y_{k-1-s}\}, v = \{2, 4, \dots, 2s, z_1, \dots, z_{k-1-s}\}.$$

Usant camins en que no hi participin vèrtexs que continguin els dos termes d'una mateixa trasposició (en direm camins de tipus *I*), un de mínima longitud contindrà el pas de  $V_{1\mathcal{I}}$  a  $V_{2\mathcal{I}}$ , longitud 2, enllaçat amb un de longitud mínima en  $O_{k-1}^r$  que uneixi  $f(u)$  amb  $v$ . Per hipòtesi d'inducció la mínima longitud serà menor o igual que  $2 + k - 2 + s - 1 = k - 1 + s$  i la igualtat s'assolirà si i només si  $\{y_1, \dots, y_{k-1-s}\}$  i  $\{z_1, \dots, z_{k-1-s}\}$  són diametralment oposats en  $O_{k-s}$ .

Considerem ara camins entre  $u, v$ , que continguin vèrtexs amb els dos elements d'alguna trasposició (camins de tipus *II*). Provarem que donat qualsevol camí de tipus *II* n'existeix un de tipus *I* de longitud no superior, amb el que s'establirà  $\partial(u, v) \leq k - 1 + s$  i la igualtat valdrà només en el cas abans esmentat.

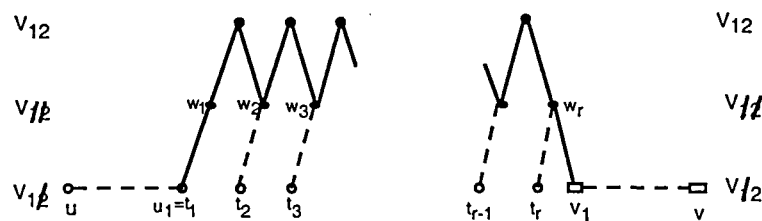


Figura 5.14: Passos per  $V_{12}$

Considerem un camí que contingui  $r - 1$  visites consecutives a  $V_{12}$ . La longitud entre  $u_1$  i  $v_1$  serà  $2r$ . Cada parella de vèrtexs  $t_i, t_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq r - 1$ ), on  $t_i = g_1^{-1}(w_i) \in V_{1\mathcal{I}}$ , és a distància menor o igual que 2 en el subgraf induït en  $V_{1\mathcal{I}}$ , ja que, en les notacions del Lema 5.7.11,  $(C^T C)_{w_i w_{i+1}} = (B_r^2)_{t_i t_{i+1}}$ . Per tant, el camí, de tipus *I*,  $u_1 = t_1 ; t_2 ; \dots ; t_{r-1} ; t_r \mapsto w_r \mapsto v_1$ , té longitud menor o igual que  $2r$ .  $\square$

Reunint les Proposicions 5.7.15 i 5.7.17, obtenim per els odd grafs cargolats resultats paral·lels als grafs  $\tilde{Q}_k \times K_2^s$ .

**Corollari 5.7.18** *Essent  $\sigma$  un automorfisme de  $O_k$  que descomposa en  $s$  trasposicions disjunctes, el graf  $P$ -frontera  $O_k^\sigma$  verifica  $\mathcal{D}(O_k^\sigma) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s}{k-1} \right)$ .*

**Corollari 5.7.19** *Donat qualsevol racional  $\frac{p}{q} \in (\frac{1}{2}, 1)$ , el graf  $P$ -frontera  $O_{q+1}^\sigma$  amb  $\sigma$  producte de  $2p - q$  trasposicions disjunctes, compleix  $\mathcal{D}(O_{q+1}^\sigma) = \frac{p}{q}$ .*

Com hem comentat a l'inici d'aquest capítol, queda obert establir  $\inf\{\mathcal{D}(\Gamma) : \Gamma \text{ graf } P\text{-frontera}\}$  o, més feblement, subministrar algun exemple de graf  $P$ -frontera sobre el que la funció  $\mathcal{D}$  prengui valor en  $(0, \frac{1}{2}]$ .



## Capítol 6

# Polinomis ortogonals de variable discreta

### 6.1 De recurrència de polinomis a producte escalar discret

Sigui  $M$  una matriu real infinita tridiagonal. Indexem els seus elements en la forma

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d-1} & c_d & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{d-1} & a_d & c_{d+1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_d & a_{d+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Imposem als elements de les subdiagonals 'b' i 'c' la condició  $b_{l-1}c_l > 0$ , per a tot  $l \geq 1$ . En el nostre context, una matriu en aquestes hipòtesis l'anomenarem una *matriu de recurrència*. En forma canònica podem associar a  $M$  l'única successió de polinomis  $r_0, r_1, \dots, r_d, \dots$ , que compleix

$$(i) \quad r_0 = 1 \qquad (ii) \quad xr_d = b_{d-1}r_{d-1} + a_dr_d + c_{d+1}r_{d+1} \quad (d \geq 0) \quad (6.2)$$

on hem inclòs, per uniformitat, el símbols  $b_{-1}, r_{-1}$ , que suposarem nuls.

Explorem algunes propietats dels polinomis d'aquesta successió.

**Proposició 6.1.1** *Sigui  $M$  una matriu de recurrència. Els polinomis  $r_d$  de la successió associada compleixen:*

- (i)  $\text{gr}(r_d) = d$ ,  $d \geq 0$ ;  
(ii) Tot polinomi  $r_d$ ,  $d \geq 1$ , té les arrels reals i diferents;  
(iii) Per a tot  $d \geq 2$ , les  $d - 1$  arrels de  $r_{d-1}$  intercalen estrictament les  $d$  arrels de  $r_d$ .

**Demostració** (i) és immediat de la definició recurrent que deriva de (6.2) i de  $c_d \neq 0$ . Provarem conjuntament (ii) i (iii) per inducció. Els dos primers polinomis de la successió,

$$r_1 = \frac{1}{c_1}(x - a_0) \quad , \quad r_2 = \frac{1}{c_1 c_2} [(x - a_0)(x - a_1) - b_0 c_1] \quad , \quad (6.3)$$

verifiquen els enunciats, ja que  $r_2$  compleix  $\text{sg}(r_2(\pm\infty))\text{sg}(r_2(a_0)) = -\text{sg}(c_1 c_2)\text{sg}(b_0 c_2) = -\text{sg}(b_0 c_1) = -1$ . Suposem (ii) i (iii) vàlids per el grau  $k - 1$  i siguin  $\nu_0 > \nu_1 > \dots > \nu_{k-2}$  les arrels de  $r_{k-1}$ . Com les arrels de  $r_{k-2}$  intercalen les de  $r_{k-1}$ , es compleix  $\text{sg}(r_{k-2}(\nu_l)) = (-1)^l \text{sg}(c_1 \dots c_{k-2})$ , per a  $l = 0, 1, \dots, k - 2$ . Usant la igualtat  $c_k r_k = (x - a_{k-1})r_{k-1} - b_{k-2}r_{k-2}$ , obtenim  $\text{sg}(r_k(\nu_l)) = -\text{sg}(c_k)\text{sg}(b_{k-2})\text{sg}(r_{k-2}(\nu_l)) = (-1)^{l+1} \text{sg}(b_{k-2} c_k)\text{sg}(c_1 \dots c_{k-2}) = (-1)^{l+1} \text{sg}(c_1 \dots c_{k-2} c_{k-1} c_k)$ , per a tot  $l = 0, \dots, k - 2$ . La conducta de  $r_k$  en les branques a l'infinit és, per la recurrència,  $\text{sg}(r_k(+\infty)) = \text{sg}(c_1 \dots c_k)$  i  $\text{sg}(r_k(-\infty)) = (-1)^k \text{sg}(c_1 \dots c_k)$ . Observant la variació de signes es desprén la validesa de (ii) i (iii) per a  $r_k$ .  $\square$

A partir de la matriu de recurrència  $M$ , introduïm les submatrius  $M_d$  per

$$M_d = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{d-1} & c_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{d-1} & a_d \end{pmatrix} \quad \text{per a tot } d \geq 0. \quad (6.4)$$

Hi ha una estreta relació entre la successió de polinomis associada a  $M$  i les submatrius  $M_d$ .

**Proposició 6.1.2** Els polinomis  $r_d$ , associats a la matriu de recurrència  $M$ , poden expressar-se en la forma  $r_d = \frac{1}{c_1 \dots c_d} p_c(M_{d-1})$ , ( $d \geq 1$ ), on  $p_c(\cdot)$  indica el polinomi característic de la matriu corresponent.

**Demostració** De (6.3) es té,  $c_1 r_1 = x - a_0 = p_c(M_0)$ ,  $c_1 c_2 r_2 = (x - a_0)(x - a_1) - b_0 c_1 = p_c(M_1)$ . Suposem el resultat vàlid per a valors menors que  $d$  ( $d \geq 3$ ). Llavors,

$$c_1 \dots c_d r_d = c_1 \dots c_{d-1} (x - a_{d-1}) r_{d-1} - c_1 \dots c_{d-1} b_{d-2} r_{d-2} = (x - a_{d-1}) p_c(M_{d-2}) - c_{d-1} b_{d-2} p_c(M_{d-3}).$$

Desenvolupant  $\det(xI - M_{d-1})$  per l'última columna i usant l'anterior,

$$\begin{aligned} p_c(M_{d-1}) &= (x - a_{d-1}) p_c(M_{d-2}) + c_{d-1} \begin{vmatrix} x - a_0 & -c_1 & \dots & 0 & 0 \\ -b_0 & x - a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x - a_{d-3} & -c_{d-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{d-2} \end{vmatrix} = \\ &= (x - a_{d-1}) p_c(M_{d-2}) - c_{d-1} b_{d-2} p_c(M_{d-3}) = c_1 \dots c_d r_d, \end{aligned}$$

que prova l'enunciat. □

Ara és fàcil establir l'espectre de les matrius  $M_d$ .

**Proposició 6.1.3** *La matriu  $M_d$  diagonalitza amb autovalors les arrels de  $r_{d+1}$  ( $\mu_0 > \dots > \mu_d$ ). Un autovector associat a  $\mu_i$  és  $(r_0(\mu_i), r_1(\mu_i), \dots, r_d(\mu_i))$ , per a tot  $0 \leq i \leq d$ .*

**Demostració** Podem resumir en forma matricial la recurrència (6.2), fins el grau  $d$ , per

$$x \begin{pmatrix} r_0(x) \\ r_1(x) \\ \vdots \\ r_{d-1}(x) \\ r_d(x) \end{pmatrix} = M_d \begin{pmatrix} r_0(x) \\ r_1(x) \\ \vdots \\ r_{d-1}(x) \\ r_d(x) \end{pmatrix} + c_{d+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{d+1}(x) \end{pmatrix}.$$

L'enunciat s'obté substituint  $x$  per cada arrel de  $r_{d+1}$ . També la primera part de l'enunciat és conseqüència de les Proposicions 6.1.2 i 6.1.1(ii). □

Notem ara que la matriu  $M^\top$  és també una matriu de recurrència. Usant la Proposició 6.1.2 i la invariança del polinomi característic en front de la trasposició, els polinomis de la successió  $(s_d)$ , associada a  $M^\top$ , poden expressar-se:

$$s_d = \frac{1}{b_0 \cdots b_{d-1}} p_c(M_{d-1}^\top) = \frac{1}{b_0 \cdots b_{d-1}} p_c(M_{d-1}) = \frac{c_1 \cdots c_d}{b_0 \cdots b_{d-1}} r_d. \quad (6.5)$$

En conseqüència, les matrius de canvi  $R_d, S_d$ , amb columnes respectives els vectors propis donats a la Proposició 6.1.3, compleixen

$$S_d = F_d^{-1} R_d, \quad \text{on} \quad F_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{b_0}{c_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{b_0 \cdots b_{d-1}}{c_1 \cdots c_d} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Indiquem  $D_d$  la matriu diagonal  $d \times d$  amb  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d$ , arrels de  $r_{d+1}$  (i també de  $s_{d+1}$ ), en la diagonal. Trasposant  $S_d^{-1} M_d^\top S_d = D_d$ , obtenim  $S_d^\top M_d (S_d^\top)^{-1} = D_d$ . Per tant la matriu  $(S_d^\top)^{-1}$  té en la columna  $i$ -èssima,  $0 \leq i \leq d$ , un autovector no nul de  $M_d$  associat a  $\mu_i$ . Podem assegurar, doncs, l'existència d'una matriu diagonal  $G_d$  tal que  $(S_d^\top)^{-1} = R_d G_d$ . Usant (6.6) podem expressar-ho,  $F_d (R_d^\top)^{-1} = R_d G_d$ . També,  $G_d^{-1} = S_d^\top R_d = R_d^\top F_d^{-1} R_d$ . Obtenim, doncs, les igualtats

$$R_d G_d R_d^\top = F_d, \quad R_d^\top F_d^{-1} R_d = G_d^{-1}. \quad (6.7)$$

Indiquem  $(f_0, \dots, f_d)$  i  $(g_0, \dots, g_d)$  les diagonals principals respectives de  $F_d$  i  $G_d$ . Establirem ara un resultat que posteriorment serà d'utilitat.

**Lema 6.1.4** Indiquem  $e = (1, 0, \dots, 0)^\top$ ,  $j = (1, 1, \dots, 1)^\top$ ,  $f = (f_0, f_1, \dots, f_d)^\top$ . Les igualtats

$$(a) M_d^\top j = \mu_0 j \quad (b) R_d e = f \quad (c) R_d^\top j = \frac{1}{g_0} e$$

són equivalents.

### Demostració

((a)  $\Rightarrow$  (b)). De  $S_d^{-1} M_d^\top S_d = D_d$  i de  $S_d = F_d^{-1} R_d$ , resulta  $D_d R_d^{-1} F_d = R_d^{-1} F_d M_d^\top$ . Calculant,  $D_d R_d^{-1} f = D_d R_d^{-1} F_d j = R_d^{-1} F_d M_d^\top j = \mu_0 R_d^{-1} F_d j = \mu_0 R_d^{-1} f$ . Per tant, el vector  $R_d^{-1} f$  al ser propi per  $D_d$  amb valor propi  $\mu_0$ , ha de ser proporcional a  $e$ . Així que també  $R_d e$  és proporcional a  $f$ . D'observar que la primera component dels dos vectors és la unitat, en resulta (b).

((b)  $\Rightarrow$  (c)). Fem el càlcul,  $R_d^\top j = R_d^\top F_d^{-1} f = R_d^\top F_d^{-1} R_d e = G_d^{-1} e = \frac{1}{g_0} e$ .

((c)  $\Rightarrow$  (a)).  $M_d^\top j = (R_d^{-1})^\top D_d R_d^\top j = \frac{1}{g_0} (R_d^{-1})^\top D_d e = \frac{\mu_0}{g_0} (R_d^{-1})^\top e = \mu_0 (R_d^{-1})^\top R_d^\top j = \mu_0 j$ .  $\square$

Les igualtats matricials establertes en (6.7) poden desglossar-se en

$$\sum_{l=0}^d g_l r_l(\mu_i) r_l(\mu_j) = \delta_{ij} f_i \quad , \quad \sum_{l=0}^d \frac{1}{f_l} r_l(\mu_i) r_l(\mu_j) = \delta_{ij} \frac{1}{g_i} \quad (0 \leq i, j \leq d). \quad (6.8)$$

Com, per a tot  $i$ ,  $f_i > 0$  i  $g_i = \frac{1}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{f_l} (r_l(\mu_i))^2} > 0$ , les aplicacions  $\mathbb{R}_d[x] \times \mathbb{R}_d[x] \rightarrow \mathbb{R}$ , donades per

$$\langle p, q \rangle_* = \sum_{l=0}^d g_l p(\mu_l) q(\mu_l) \quad , \quad \langle p, q \rangle^* = \sum_{l=0}^d \frac{1}{f_l} p(\mu_l) q(\mu_l), \quad (6.9)$$

són productes escalars. La primera part de (6.8) es tradueix en el caràcter ortogonal dels polinomis  $r_0, r_1, \dots, r_d$  respecte del producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Per a cada  $i = 0, 1, \dots, d$ , definim  $r_i^*$  com l'únic polinomi de  $\mathbb{R}_d[x]$  que compleix  $r_i^*(\mu_l) = r_l(\mu_i)$  per a tot  $l = 0, 1, \dots, d$ , que anomenarem *polinomis duals* dels  $r_i$ . De la segona igualtat de (6.8) se'n despren

$$\langle r_i^*, r_j^* \rangle^* = \sum_{l=0}^d \frac{1}{f_l} r_i^*(\mu_l) r_j^*(\mu_l) = \sum_{l=0}^d \frac{1}{f_l} r_l(\mu_i) r_l(\mu_j) = \delta_{ij} \frac{1}{g_i}. \quad (6.10)$$

La construcció feta, reposa exclusivament en la matriu de recurrència  $M$ . Per a un valor donat de  $d$ , del coneixement de la matriu truncada  $M_d$ , deriven els elements que participen en la definició dels productes escalars introduïts. Així,  $\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d$  són les arrels del polinomi  $h$  definit per  $xr_d = b_{d-1}r_{d-1} + a_d r_d + h$ ;  $f_0 = 1$  i  $f_i = \frac{b_0 \dots b_{i-1}}{c_1 \dots c_i}$  i també els  $g_i$  per la via indirecta que dona la segona igualtat de (6.8). Millorem ara la seva obtenció, procurant-ne una forma més simple. Per això, indicant  $\alpha_d$  el primer coeficient de  $r_d$ , podem expressar

$$h = \alpha_d \prod_{l=0}^d (x - \mu_l) \quad , \quad h' = \sum_{j=0}^d h_j \quad , \quad \text{on } h_j = \alpha_d \prod_{l=0, l \neq j}^d (x - \mu_l) = r_d + \text{termes de grau inferior}$$

Calculem ara el producte escalar  $\langle h_j, r_d \rangle_*$  ( $j = 0, 1, \dots, d$ ) per dues vies,

$$\langle h_j, r_d \rangle_* = \begin{cases} \langle r_d, r_d \rangle_* = f_d \\ \sum_{l=0}^d g_l h_j(\mu_l) r_d(\mu_l) = g_j h_j(\mu_j) r_d(\mu_j) = g_j h'(\mu_j) r_d(\mu_j). \end{cases}$$

Per tant,

$$g_j = \frac{f_d}{h'(\mu_j)r_d(\mu_j)} \quad (j = 0, 1, \dots, d). \quad (6.11)$$

Reunim aquests darrers resultats en una proposició.

**Proposició 6.1.5** *Donada una matriu de recurrència  $M$  i fixat  $d \geq 1$ , siguin  $\mu_0 > \dots > \mu_d$  les arrels del  $d+1$  polinomi recurrent  $o$ , equivalentment, les arrels del polinomi  $h$  definit per  $h = xr_d - b_{d-1}r_{d-1} - a_d r_d$ . Els polinomis  $r_0 = 1, r_1, \dots, r_d$ , obtinguts de la recurrència, i els polinomis duals  $r_0^*, r_1^*, \dots, r_d^*$ , són respectives famílies ortogonals per els productes escalars*

$$\langle p, q \rangle_* = \sum_{l=0}^d g_l p(\mu_l) q(\mu_l) \quad , \quad \langle p, q \rangle^* = \sum_{l=0}^d \frac{1}{f_l} p(\mu_l) q(\mu_l) \quad ,$$

on  $f_0 = 1$ ,  $f_l = \frac{b_0 \dots b_{l-1}}{c_1 \dots c_l}$  ( $l = 1, \dots, d$ ),  $g_l = \frac{f_d}{h'(\mu_l)r_d(\mu_l)}$ , ( $l = 0, 1, \dots, d$ ). A més, les normes induïdes compleixen  $\|r_i\|_* = \sqrt{f_i}$ ,  $\|r_i^*\|_* = \frac{1}{\sqrt{g_i}}$ .

De  $\|r_0\|_*^2 = \langle r_0, r_0 \rangle_* = \sum_{l=0}^d g_l$ , resulta

**Corollari 6.1.6** *Els  $g_l$ , pesos del producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ , compleixen  $g_0 + g_1 + \dots + g_d = 1$ .*

Ens referirem a aquesta observació dient, indistintament, que el producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  o els pesos  $g_l$  associats estan *normalitzats*. Associats a una malla  $\mathcal{M} = \{\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d\}$ , usarem en el que segueix els símbols  $\pi_i$ , ja introduïts. Recordem,  $\pi_i \equiv \pi_i(\mathcal{M}) = \prod_{l=0, \dots, d, (l \neq i)} |\mu_i - \mu_l|$ , per a tot  $i = 0, 1, \dots, d$ .

Tornem als polinomis  $s_0, s_1, \dots, s_d$  construïts amb la matriu de recurrència  $M^T$ . Notem, de (6.5) i (6.6),

$$s_i(\mu_0) = \frac{r_i(\mu_0)}{\|r_i\|_*^2} \quad (i = 0, 1, \dots, d). \quad (6.12)$$

Podem ara establir,

**Proposició 6.1.7** *Sigui  $M$  una matriu de recurrència i  $r_0, r_1, \dots, r_d, \dots$  la successió de polinomis associada. Donat  $d \geq 1$ , sigui  $\mu_0$  la major arrel de  $r_{d+1}$ . Les tres afirmacions següents són equivalents:*

1. *Les columnes de  $M_d$  sumen  $\mu_0$  (genèricament,  $c_i + a_i + b_i = \mu_0$  per a  $0 \leq i \leq d$ ).*

2.  $\|r_i\|_*^2 = r_i(\mu_0)$ , per a tot  $i = 0, 1, \dots, d$ .

3.  $\sum_{i=0}^d r_i = \frac{1}{g_0 \pi_0} \prod_{l=1}^d (x - \mu_l)$ .

**Demostració** Notem que (1) és la igualtat vectorial  $M_d^T j = \mu_0 j$ . Així mateix (2) és  $f = R_d e$ . La part (3) pot expressar-se dient que el polinomi  $\sum_{i=0}^d r_i$  és l'únic polinomi de grau fins a  $d$  tal que els seus valors en  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d$  són, respectivament,  $\frac{1}{g_0}, 0, \dots, 0$ . Expressant-ho vectorialment és  $R_d^T j = \frac{1}{g_0} e$ . En el Lema 6.1.4 hem provat que aquestes tres igualtats vectorials són equivalents.  $\square$

És clar que, en general, donada una matriu de recurrència no es compliran, per a cap valor de  $d \geq 1$ , les condicions equivalents de la Proposició 6.1.7. El procés presentat fins ara, esquemàticament,

de matriu de recurrència a un producte escalar normalitzat,

serà invertit en el que segueix. A manca de precisar-ne detalls,

d'un producte escalar normalitzat, via cada sistema ortogonal, a una matriu de recurrència.

Veurem que el grau de llibertat que proporciona l'elecció del sistema ortogonal, permet d'obtenir  $M_d$  complint les condicions de la Proposició 6.1.7.

## 6.2 De producte escalar discret al sistema ortogonal canònic

Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  de nombres reals i una funció de pesos  $g$  sobre  $\mathcal{M}$ ,  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , per la que indicarem  $g_l = g(x_l)$ ,  $l = 0, 1, \dots, d$ . Suposem que  $g$  és una funció de pesos normalitzada, és a dir  $g_0 + g_1 + \dots + g_d = 1$ . Associat a la parella  $(\mathcal{M}, g)$ , definim un producte escalar en  $\mathbb{R}_d[x]$ , per

$$\langle r, s \rangle = \sum_{l=0}^d g_l r(x_l) s(x_l) \quad (6.13)$$

i  $\|r\| = \sqrt{\langle r, r \rangle}$  la norma induïda. Anomenarem *sistema ortogonal* per aquest producte escalar, a una col·lecció  $r_0, r_1, \dots, r_d$  de polinomis ortogonals amb grau el subíndex i la condició suplementària, motivada per els nostres propòsits,  $r_0 = 1$ .

**Lema 6.2.1** *Considerem dues parelles  $(\mathcal{M}, g')$ ,  $(\mathcal{M}, g'')$ , tals que admetin un sistema ortogonal comú. Llavors  $g' = g''$ .*

**Demostració** Només cal notar que fixada una malla, si  $r_0, r_1, \dots, r_d$  és sistema ortogonal per  $(\mathcal{M}, g)$ , podem recuperar la funció de pesos a partir del sistema ortogonal. De ser  $r_0 = 1$  i la funció de pesos normalitzada, les igualtats  $\langle 1, r_i \rangle = \delta_{0i}$ , per a  $i = 0, 1, \dots, d$ , condueixen al sistema,  $R \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ , on  $R = (p_i(x_j))$ . Per ser cada  $p_i$  de grau  $i$  és clar que no pot haver dependència lineal entre les files d'aquesta matriu.  $\square$

Sigui  $r_0, r_1, \dots, r_d$  un sistema ortogonal. Indiquem  $\alpha_d$  el primer coeficient de  $r_d$  i  $h = \prod_{l=0,1,\dots,d} (x - x_l)$ . És ben conegut i immediat que, per a  $l = 0, 1, \dots, d - 1$ , el polinomi  $x r_l$  és combinació lineal de  $r_{l-1}, r_l$  i



$r_{l+1}$ . És també immediat que el polinomi  $xr_d - \alpha_d h$ , de  $\mathbb{R}_d[x]$ , és combinació de  $r_{d-1}$  i  $r_d$  (en particular, és de grau  $d$ ). Per tant, els polinomis  $r_0, r_1, \dots, r_d, \alpha_d h$ , són els polinomis, fins a grau  $d+1$ , de la successió recurrent definida per una matriu

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{d-1} & c_d & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{d-1} & a_d & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

on els símbols  $*$  són arbitraris, complint  $b_{l-1}c_l > 0$  per  $l > d$ , i

$$a_l = \frac{\langle xr_l, r_l \rangle}{\|r_l\|^2} \quad (l = 0, \dots, d) \quad ; \quad b_l = \frac{\langle xr_{l+1}, r_l \rangle}{\|r_l\|^2} \quad (l = 0, \dots, d-1) \quad ; \quad c_l = \frac{\langle xr_{l-1}, r_l \rangle}{\|r_l\|^2} \quad (l = 1, \dots, d).$$

Per concloure que  $M$  és una matriu de recurrència queda per veure  $b_{l-1}c_l > 0$  per  $1 \leq l \leq d$ . Això deriva de la següent igualtat,

$$\|r_l\|^2 = \langle r_l, r_l \rangle = \frac{1}{c_l} \langle xr_{l-1}, r_l \rangle = \frac{1}{c_l} \langle r_{l-1}, xr_l \rangle = \frac{b_{l-1}}{c_l} \|r_{l-1}\|^2 \quad (6.14)$$

Seguint el fet a la Secció 6.1 la submatriu  $M_d$  i el polinomi  $r_{d+1}$  defineixen el producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ . Tancarem el cercle provant  $\langle \cdot, \cdot \rangle_* = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Primer notem que les arrels de  $r_{d+1} = \alpha_d h$  són justament  $\{x_0 > x_1 > \dots > x_d\} = \mathcal{M}$ . També

$$\|r_l\|^2 = \frac{b_{l-1}}{c_l} \|r_{l-1}\|^2 = \dots = \frac{b_{l-1} \cdots b_0}{c_l \cdots c_1} \|r_0\|^2 = \frac{b_{l-1} \cdots b_0}{c_l \cdots c_1} = \|r_l\|_*^2,$$

on hem usat (6.14), el caràcter normalitzat de  $g$  i la Proposició 6.1.5. Per l'ortogonalitat dels  $r_l$  respecte d'ambdós productes escalars la igualtat  $\|r_l\|_* = \|r_l\|$ , ( $l = 0, \dots, d$ ) s'extén a  $\langle p, q \rangle_* = \langle p, q \rangle$ , per a  $p, q \in \mathbb{R}_d[x]$  arbitraris.

Fixada la parella  $(\mathcal{M}, g)$ , malla i funció de pesos normalitzada, a cada sistema ortogonal  $\mathcal{S}$  podem associar la matriu

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

que anomenarem *matriu condensada* del sistema ortogonal  $\mathcal{S}$ . Estem ara en disposició de provar l'existència d'un sistema ortogonal de polinomis que verifiqui les condicions equivalents establertes en la Proposició 6.1.7.

**Lema 6.2.2** *Donades una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i una funció de pesos normalitzada  $g$ , existeix una única família de polinomis,  $r_0, r_1, \dots, r_d$ , tal que: (i)  $\text{gr}(r_l) = l$ ,  $0 \leq r \leq d$ , (ii)  $\langle r_i, r_j \rangle = \delta_{ij} r_i(x_0)$ ,  $0 \leq i, j \leq d$ .*

**Demostració** Suposem  $r_0, r_1, \dots, r_d$  i  $s_0, s_1, \dots, s_d$  verificant les condicions. De  $r_0 = r_0(x_0) = \langle r_0, r_0 \rangle = \sum_{l=0}^d g_l = 1$ , es té  $r_0 = s_0$ . Suposem  $r_l = s_l$ ,  $l = 0, \dots, k-1$ . Expressant  $s_k = \sum_{l=0}^k \xi_l r_l$ , és clar que  $\langle s_k, r_l \rangle = 0$ ,  $l = 0, \dots, k-1$ . Per tant,  $s_k = \xi_k r_k$ . De  $\xi_k r_k(x_0) = s_k(x_0) = \|s_k\|^2 = \xi_k^2 \|r_k\|^2 = \xi_k^2 r_k(x_0)$  i ser  $r_k(x_0) \neq 0$ , resulta  $s_k = r_k$ .

El mètode de Gram-Schmidt aplicat a la base  $1, x, \dots, x^d$  dona un sistema ortonormal de polinomis  $s_0, s_1, \dots, s_d$ . Triarem  $\xi_k$ ,  $0 \leq k \leq d$ , de forma que els polinomis  $r_k = \xi_k s_k$  compleixin la condició demanada. Imposant  $\|r_k\|^2 = \xi_k^2 = \xi_k s_k(x_0)$  i tenint en compte que les arrels de  $s_k$  són a l'interior de l'interval  $[x_d, x_0]$ , obtenim  $\xi_k = s_k(x_0) \neq 0$ . Aleshores els polinomis  $r_k = s_k(x_0) s_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ , compleixen l'enunciat.  $\square$

Amb això i la Proposició 6.1.7 es justifiquen els termes de la definició següent.

**Definició 6.2.3** Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i una funció de pesos normalitzada  $g$ . Definim sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, g)$  com el sistema ortogonal  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  que compleix qualsevulla de les següents propietats:

1. Les columnes de la matriu condensada  $M_{\mathcal{S}}$  sumen  $x_0$ .
2. Es compleix  $\|p_i\|^2 = p_i(x_0)$ , per a tot  $i = 0, 1, \dots, d$ .
3. Es verifica la igualtat  $p_0 + p_1 + \dots + p_d = \frac{1}{g_0 \pi_0} \prod_{l=1}^d (x - x_l)$ .

### 6.3 Relacions entre $g$ i $p_d$ per a una malla donada

Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  una malla de nombres reals, que restarà fixada al llarg d'aquesta secció. Indiquem  $\mathcal{G}$  el conjunt de funcions de pes normalitzades, sobre  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{G} = \{g : \mathcal{M} \rightarrow (0, +\infty) : g_l = g(x_l) \text{ compleixen } \sum_{l=0}^d g_l = 1\}.$$

Si indiquem

$$\mathcal{P}_d = \{p \in \mathbb{R}_d[x] : (-1)^l p(x_l) > 0, l = 0, 1, \dots, d\},$$

associant a cada element de  $\mathcal{G}$  el darrer polinomi del sistema ortogonal canònic corresponent, tenim establerta una aplicació

$$\Omega : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}_d \tag{6.16}$$

Ens proposem fer l'estudi d'aquesta aplicació. Establim primer la relació següent.

**Lema 6.3.1** Sigui  $g \in \mathcal{G}$  i  $p_d$  el polinomi  $\Omega(g)$ . Es compleix

$$\frac{g_i}{g_0} = (-1)^i \frac{\pi_0 p_d(x_0)}{\pi_i p_d(x_i)} \quad (i = 0, 1, \dots, d).$$

**Demostració** Essent  $\alpha_d$  el primer coeficient de  $p_d$ , el polinomi  $h = \alpha_d \prod_{l=0}^d (x - x_l)$ , compleix  $h'(x_i) = (-1)^i \alpha_d \pi_i$ . Usant (6.11) es té  $g_i = (-1)^i \frac{f_d}{\alpha_d \pi_i p_d(x_i)}$ , ( $0 \leq i \leq d$ ). Dividint  $g_i$  per  $g_0$  s'obté l'enunciat.  $\square$

**Proposició 6.3.2** Donada  $g \in \mathcal{G}$ , el polinomi  $p_d = \Omega(g)$  associat pot determinar-se directament per

$$p_d(x_i) = (-1)^i \frac{1}{\frac{\pi_0 \pi_i g_0 g_i}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2 g_l}}} \quad (i = 0, 1, \dots, d).$$

**Demostració** De ser  $p_d$  element del sistema ortogonal canònic associat a  $g$ , usant el Lema 6.3.1, es té

$$p_d(x_0) = \langle p_d, p_d \rangle = \sum_{l=0}^d g_l (p_d(x_l))^2 = \sum_{l=0}^d g_l \frac{\pi_0 g_0^2}{\pi_l g_l^2} (p_d(x_0))^2. \text{ Per tant,}$$

$$p_d(x_0) = \frac{1}{\frac{\pi_0^2 g_0^2}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2 g_l}}}. \quad (6.17)$$

Substituint en la igualtat donada en el Lema 6.3.1 obtenim el resultat.  $\square$

Mitjançant interpolació de Lagrange podem donar una forma explícita de l'aplicació  $\Omega$ .

**Proposició 6.3.3** El pas de  $g \in \mathcal{G}$  al darrer polinomi del sistema ortogonal canònic associat, pot expressar-se en la forma

$$\Omega : g \mapsto p_d = \frac{1}{\frac{\pi_0 g_0}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2 g_l}}} \sum_{i=0}^d \frac{1}{\pi_i^2 g_i} \prod_{l=0, l \neq i}^d (x - x_l).$$

Considerem ara  $p \in \mathcal{P}_d$ . Si  $p$  fos  $\Omega(g)$  tindria de complir-se, segons el Lema 6.3.1,  $g_i = (-1)^i \frac{\pi_0 p(x_0)}{\pi_i p(x_i)} g_0$ .

$0 \leq i \leq d$ . Imposant que  $g$  sigui normalitzada obtenim  $g_0 = \frac{1}{\frac{\pi_0 p(x_0)}{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l p(x_l)}}}$ . Per tant,

$$g_i = \frac{(-1)^i}{\frac{\pi_i p(x_i)}{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l p(x_l)}}} \quad (i = 0, 1, \dots, d), \quad (6.18)$$

on notem que  $g_i > 0$  per tal com hem definit  $\mathcal{P}_d$ . Notem que per a que  $p$  sigui el darrer polinomi del sistema ortogonal canònic associat a  $g$  és condició necessària que  $\|p\|^2 = p(x_0)$ , on el producte escalar és el definit per la funció de pesos definida en (6.18). El paper precís d'aquesta condició s'estableix a continuació.

**Teorema 6.3.4** Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  una malla de nombres reals. Un polinomi  $p \in R_d[x]$ , complint  $(-1)^l p(x_l) > 0$  ( $0 \leq l \leq d$ ), és el polinomi terminal d'un sistema ortogonal canònic sobre  $\mathcal{M}$  si i només si compleix

$$\sum_{l=0}^d (-1)^l \frac{1}{\pi_l} \left[ \frac{p(x_0)}{p(x_l)} - p(x_l) \right] = 0.$$

**Demostració** El caràcter necessari deriva de

$$p(x_0) = \|p\|^2 = \sum_{i=0}^d g_i (p(x_i))^2 = \sum_{i=0}^d \frac{(-1)^i}{\pi_i p(x_i)} (p(x_i))^2 = \frac{\sum_{i=0}^d \frac{(-1)^i p(x_i)}{\pi_i}}{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l p(x_l)}},$$

que és equivalent a la nostre condició. Suposem ara que aquesta es satisfà. La funció de pesos deduïda de  $p$  segons (6.18), tindrà associat un sistema ortogonal canònic  $\tilde{p}_0 = 1, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d$ . Hem de veure  $\tilde{p}_d = p$ . Per a cada  $i = 0, 1, \dots, d$ , usant (6.3.2),

$$\tilde{p}_d(x_i) = (-1)^i \frac{1}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2 g_l}} = \frac{1}{(-1)^i \pi_0 \pi_i \sum_{l=0}^d \frac{g_0 g_i}{\pi_l^2 g_l}}. \quad (6.19)$$

Calculem aquest denominador usant l'expressió (6.18) de la funció de pesos associada a  $p$ .

$$\begin{aligned} (-1)^i \sum_{l=0}^d \frac{g_0 g_i}{\pi_l^2 g_l} &= (-1)^i \frac{1}{\sum_{s=0}^d \frac{(-1)^s}{\pi_s p(x_s)}} \frac{\frac{(-1)^i}{\pi_i p(x_i)}}{\sum_{s=0}^d \frac{(-1)^s}{\pi_s p(x_s)}} \sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2} \frac{\sum_{s=0}^d \frac{(-1)^s}{\pi_s p(x_s)}}{\frac{(-1)^l}{\pi_l p(x_l)}} = \\ &= \frac{1}{\pi_0 \pi_i p(x_0) p(x_i)} \frac{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l p(x_l)}{\pi_l}}{\sum_{s=0}^d \frac{(-1)^s}{\pi_s p(x_s)}} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi_0 \pi_i p(x_i)}, \end{aligned}$$

on en (\*) hem usat la condició de l'enunciat. Portant-ho a (6.19) obtenim  $\tilde{p}_d(x_i) = p(x_i)$ .  $\square$

La condició donada en el Teorema 6.3.4 admet diverses presentacions equivalents.

**Corol·lari 6.3.5** *Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  una malla de nombres reals. Donat  $p \in \mathbb{R}_d[x]$ , complint  $(-1)^l p(x_l) > 0$  ( $0 \leq l \leq d$ ), qualsevol de les següents afirmacions és equivalent a que  $p$  sigui polinomi terminal d'un sistema ortogonal canònic sobre  $\mathcal{M}$ .*

1.  $\|p\|^2 = p(x_0)$ , on el producte escalar té per funció de pesos la determinada per  $p$  segons (6.18).

$$2. \sum_{l=0}^d (-1)^l \frac{1}{\pi_l} \left[ \frac{p(x_0)}{p(x_l)} - p(x_l) \right] = 0.$$

$$3. p(x_0) = \frac{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} p(x_l)}{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} \frac{1}{p(x_l)}}.$$

$$4. p(x_0) = \frac{1}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2 g_l}}, \text{ on la funció de pesos és la determinada per } p \text{ segons (6.18).}$$

5. Sigui  $\tilde{p} \in \mathbb{R}_d[x]$  determinat per  $\tilde{p}(x_i) = \frac{1}{p(x_i)}$ ,  $0 \leq i \leq d$ . Llavors  $p - p(x_0)\tilde{p} \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ .

$$6. \sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} p(x_l) = \frac{1}{\pi_0 g_0}, \text{ és a dir, } p = \frac{1}{\pi_0 g_0} x^d + \dots \text{ (amb } g_0 \text{ obtingut de } p \text{ per (6.18)).}$$

**Demostració** L'equivalència entre (1), (2) i (3) està vista al principi de la prova del Teorema 6.3.4. Indiquem, per simplificar,  $(\star)$  i  $(\star\star)$  les expressions de la dreta en (3) i (4). Usant (6.18) s'obté la igualtat  $(\star)(\star\star) = (p(x_0))^2$ , d'on es desprèn l'equivalència entre (3) i (4). Expressant  $p$  i  $\bar{p}$  per interpolació de Lagrange notem els seus respectius primers coeficients són el numerador i el denominador de  $(\star)$ , amb el que s'estableix l'equivalència entre (3) i (5). Si  $p$  és polinomi terminal, usant l'expressió per a  $\frac{p(x_i)}{p(x_0)}$ , donada en el Lema 6.3.1, obtenim (6). Recíprocament, si (6) es compleix, substituint  $g_0$  per l'expressió donada en (6.18) obtenim (3). Finalment, notem que (6) pot llegir-se  $(\star) = \frac{1}{\pi_0 g_0}$ .  $\square$

Podem formalitzar aquests darrers resultats en el llenguatge de l'aplicació  $\Omega$  definida en (6.16).

**Corol·lari 6.3.6** *L'aplicació  $\Omega$ , pas de funció de pesos a polinomi terminal del sistema ortogonal canònic associat, és una bijecció entre  $\mathcal{G}$  i  $\mathcal{P}_d^*$ , on*

$$\mathcal{P}_d^* = \{p \in \mathbb{R}_d[x] : (-1)^l p(x_l) > 0 \ (0 \leq l \leq d) \text{ complint qualsevulla condició del Corol·lari 6.3.5}\}.$$

Podem expressar de manera compacta la forma lineal resultat de contreure  $p \in \mathcal{P}_d^*$  amb el producte escalar induït pel propi  $p$ . Usant l'expressió de la funció de pesos donada en (6.18) i la caracterització del Corol·lari 6.3.5(3), s'obté l'expressió que segueix.

**Corol·lari 6.3.7** *Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i  $p \in \mathcal{P}_d^*$ . Per a tot  $q \in \mathbb{R}_d[x]$ , es compleix*

$$\langle p, q \rangle = \frac{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} q(x_l)}{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} p(x_l)} p(x_0),$$

amb  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producte escalar determinat per  $p$ .

## 6.4 Sistema ortogonal canònic i semblances sobre una malla

Fem unes observacions referents a la transformació del sistema ortogonal canònic al transformar la malla per una semblança. Donades  $\mathcal{M} = \{x_d < \dots < x_1 < x_0\}$  i  $\mathcal{M}' = \{y_d < \dots < y_1 < y_0\}$ , suposem existeixen  $\alpha \neq 0$  i  $\beta$  reals, tals que  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $T(x) = \alpha x + \beta$ , compleixi  $T\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ . Considerarem per separat els cassos  $\alpha > 0$  i  $\alpha < 0$ .

**Proposició 6.4.1** *Considerem  $T$  una semblança directa,  $T(x) = \alpha x + \beta$  ( $\alpha > 0$ ), i una malla  $\mathcal{M} = \{x_d < \dots < x_1 < x_0\}$ . Sigui  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, g)$ . Indiquem  $\mathcal{M}' = T\mathcal{M}$  i  $g' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathbb{R}$  la funció de pesos  $g' = g \circ T^{-1}$ . Llavors, el sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}', g')$  és  $\mathcal{S}' = \{p_0 \circ T^{-1}, p_1 \circ T^{-1}, \dots, p_d \circ T^{-1}\}$ . A més es passa d'una a l'altra matriu condensada de recurrència per*

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha c_1 & \dots & \alpha c_{d-1} & \alpha c_d \\ \alpha a_0 + \beta & \alpha a_1 + \beta & \dots & \alpha a_{d-1} + \beta & \alpha a_d + \beta \\ \alpha b_0 & \alpha b_1 & \dots & \alpha b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{S}'}$$

**Demostració** Essent  $\mathcal{M}' = \{y_d < \dots < y_1 < y_0\}$ , el caràcter monòton creixent de  $T$ , derivat de  $\alpha > 0$ , assegura que  $y_l = T(x_l)$ , per a tot  $l$ . Definim  $p'_k = p_k \circ T^{-1}$  per a  $k = 0, 1, \dots, d$ . És clar que  $\text{gr}(p'_k) = k$  i el producte escalar definit per  $(\mathcal{M}', g')$  compleix

$$\langle p'_h, p'_k \rangle' = \sum_{l=0}^d g'_l p'_h(y_l) p'_k(y_l) = \sum_{l=0}^d g_l (p'_h \circ T)(x_l) (p'_k \circ T)(x_l) = \sum_{l=0}^d g_l p_h(x_l) p_k(x_l) = \langle p_h, p_k \rangle.$$

Per tant els polinomis  $p'_0, p'_1, \dots, p'_d$ , són un sistema  $(\mathcal{M}', g')$  ortogonal. A més,  $(\|p'_k\|')^2 = \|p_k\|^2 = p_k(x_0) = p'_k(y_0)$ , amb el que és el sistema ortogonal canònic.

Sigui  $M'_d$  la matriu de recurrència de  $S'$  i  $R'_d$  la matriu de vectors propis  $(R'_d)_{ij} = p'_i(y_j)$ , donada per la Proposició 6.1.3. Com  $p'_i(y_j) = p_i(x_j)$ , les matrius  $R'_d$  i  $R_d$  són iguals. Indiquem  $D_d, D'_d$ , les matrius diagonals amb respectives diagonals principals  $(x_0, x_1, \dots, x_d)$ ,  $(y_0, y_1, \dots, y_d)$ . Es compleix  $D'_d = \alpha D_d + \beta I_d$ . Llavors,

$$M'_d = R'_d D'_d R_d^{-1} = R_d (\alpha D_d + \beta I_d) D_d R_d^{-1} = \alpha M_d + \beta I_d,$$

que és la darrera part de l'enunciat.  $\square$

**Proposició 6.4.2** Considerem  $T$  una semblança inversa,  $T(x) = \alpha x + \beta$  ( $\alpha < 0$ ), i una malla  $\mathcal{M} = \{x_d < \dots < x_1 < x_0\}$ . Sigui  $S = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, g)$ . Indiquem  $\mathcal{M}' = T\mathcal{M}$  i  $g' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathbb{R}$  la funció de pesos  $g' = g \circ T^{-1}$ . Llavors, el sistema ortogonal canònic  $S'$  associat a  $(\mathcal{M}', g')$  és el format pels polinomis  $p'_k = \frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} p_k \circ T^{-1}$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d$ . La matriu condensada de recurrència de  $S'$  és

$$M_{S'} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \frac{p_0(x_d)}{p_1(x_d)} b_0 & \dots & \alpha \frac{p_{d-2}(x_d)}{p_{d-1}(x_d)} b_{d-2} & \alpha \frac{p_{d-1}(x_d)}{p_d(x_d)} b_{d-1} \\ \alpha a_0 + \beta & \alpha a_1 + \beta & \dots & \alpha a_{d-1} + \beta & \alpha a_d + \beta \\ \alpha \frac{p_1(x_d)}{p_0(x_d)} c_1 & \alpha \frac{p_2(x_d)}{p_1(x_d)} c_2 & \dots & \alpha \frac{p_d(x_d)}{p_{d-1}(x_d)} c_d & 0 \end{pmatrix}.$$

**Demostració** Essent  $\mathcal{M}' = \{y_d < \dots < y_1 < y_0\}$ , per ser  $\alpha < 0$  es compleix  $y_l = T(x_{d-l})$ , per a  $l = 0, 1, \dots, d$ . El grau de  $p'_k$  és  $k$  i el producte escalar definit per  $(\mathcal{M}', g')$  compleix

$$\begin{aligned} \langle p'_h, p'_k \rangle' &= \sum_{l=0}^d g'_l p'_h(y_l) p'_k(y_l) = \sum_{l=0}^d g_{d-l} (p'_h \circ T)(x_{d-l}) (p'_k \circ T)(x_{d-l}) = \\ &= \frac{p_h(x_d) p_k(x_d)}{p_h(x_0) p_k(x_0)} \sum_{l=0}^d g_l p_h(x_l) p_k(x_l) = \frac{p_h(x_d) p_k(x_d)}{p_h(x_0) p_k(x_0)} \langle p_h, p_k \rangle. \end{aligned}$$

Els polinomis  $p'_0, p'_1, \dots, p'_d$ , són, doncs, un sistema  $(\mathcal{M}', g')$  ortogonal. També,

$$(\|p'_k\|')^2 = \left( \frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} \right)^2 \|p_k\|^2 = \left( \frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} \right)^2 p_k(x_0) = \frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} (p_k \circ T^{-1})(y_0) = p'_k(y_0),$$

que prova el caràcter canònic.

Provarem ara l'afirmació respecte dels elements de  $M_{S'}$ ,

$$c'_i = \alpha \frac{p_{i-1}(x_d)}{p_i(x_d)} b_{i-1} \quad , \quad a'_i = \alpha a_i + \beta \quad , \quad b'_i = \alpha \frac{p_{i+1}(x_d)}{p_i(x_d)} c_{i+1} \quad , \quad (i = 0, 1, \dots, d),$$

on  $c_{d+1}$ ,  $b_{-1}$  són definits nuls. Amb  $c'_i, a'_i, b'_i$ , així definits, efectuem el càlcul:

$$\begin{aligned}
& b'_{i-1}p'_{i-1} + a'_i p'_i + c'_{i+1} p'_{i+1} = \\
& = \left[ \alpha \left( \frac{p_i(x_d)}{p_{i-1}(x_0)} c_i p_{i-1} + \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} a_i p_i + \frac{p_i(x_d)}{p_{i+1}(x_0)} b_i p_{i+1} \right) + \beta \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} c_i p_i \right] \circ T^{-1} = \\
& = \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} \left[ \alpha \left( \frac{p_i(x_0)}{p_{i-1}(x_0)} c_i p_{i-1} + a_i p_i + \frac{p_i(x_0)}{p_{i+1}(x_0)} b_i p_{i+1} \right) + \beta p_i \right] \circ T^{-1} = \\
& \stackrel{(*)}{=} \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} [\alpha (b_{i-1} p_{i-1} + a_i p_i + c_{i+1} p_{i+1}) + \beta p_i] \circ T^{-1} = \\
& = \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} [\alpha x p_i + \beta p_i] \circ T^{-1} = \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} (T(x) p_i) \circ T^{-1} = x \frac{p_i(x_d)}{p_i(x_0)} (p_i \circ T^{-1}) = x p'_i,
\end{aligned}$$

on en (\*) hem usat la Proposició 6.2.3(4). □

Considerem ara el cas en que  $(\mathcal{M}, g)$  sigui tal que existeixi una semblança  $T$  tal que  $(\mathcal{M}', g') = (\mathcal{M}, g)$ . El cas de semblança directa és irrellevant, ja que només ho compleix la identitat. Si  $T$  és inversa, la possibilitat de la seva existència es vincula amb  $(\mathcal{M}, g)$ , en la següent forma.

**Lema 6.4.3** *Considerem  $(\mathcal{M}, g)$ . Existeix una semblança diferent de la identitat, tal que  $(\mathcal{M}', g') = (\mathcal{M}, g)$ , si i només si malla i funció de pesos compleixen, respectivament,  $x_l + x_{d-l} = x_0 + x_d$ ,  $g_{d-l} = g_l$ , per a  $l = 0, 1, \dots, d$ . Llavors tal semblança és única i definida per  $T(x) = -x + x_0 + x_d$ .*

**Demostració** De  $T\mathcal{M} = \mathcal{M}$  i la monotonia de  $T$ , s'ha de complir  $T(x_0) = x_d$  i  $T(x_d) = x_0$ , així que necessàriament  $T(x) = -x + x_0 + x_d$ . Per a que també  $T(x_l) \in \mathcal{M}$ , per a tot  $l$ , els elements de la malla han de complir  $x_{d-l} = -x_l + x_0 + x_d$ , que dóna la condició enunciada. De  $g_l = g(x_l) = g' \circ T(x_l) = g'(x_{d-l}) = g(x_{d-l}) = g_{d-l}$ , en resulta la segona afirmació. □

**Proposició 6.4.4** *Sigui  $S = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic associat a la malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i la funció de pesos  $g$ . Considerem  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $T(x) = -x + x_0 + x_d$ . Les tres afirmacions següents són equivalents:*

- $T\mathcal{M} = \mathcal{M}$ ,  $g \circ T^{-1} = g$ .
- Es compleix  $x_l + x_{d-l} = x_0 + x_d$ ,  $g_{d-l} = g_l$ , per a  $l = 0, 1, \dots, d$ .
- Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ , el polinomi  $p_k(\frac{x_0+x_d}{2} + x)$  és parell (imparell) si  $k$  és parell (imparell).

**Demostració** L'equivalència entre (a) i (b) s'ha establert amb el Lema 6.4.3. Suposem (a) cert. Aplicant la Proposició 6.4.2 al nostre cas, es té  $p_k = \frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} p_k \circ T^{-1}$ , d'on  $p_k(x_l) = \frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} p_k(x_{d-l})$ , per a tot  $l = 0, 1, \dots, d$ . Per  $l = 0$  obtenim  $|p_k(x_d)| = p_k(x_0)$ . Tenint en compte que  $p_k$  té  $k$  arrels reals i diferents en  $(x_d, x_0)$ , es conclou  $p_k(x_d) = (-1)^k p_k(x_0)$ . Per tant, per a  $l = 0, 1, \dots, d$ ,  $p_k(x_l) = (-1)^k p_k(x_{d-l}) = (-1)^k p_k(x_0 + x_d - x_l)$ . En conseqüència els polinomis  $p_k(x)$  i  $(-1)^k p_k(x_0 + x_d - x)$  coincideixen, el que és equivalent a (c).

Sigui ara (c) cert. Notem que (c) admet la lectura equivalent: si  $x + y = x_0 + x_d$ , llavors  $p_k(y) = (-1)^k p_k(x)$ . En particular,  $p_k(x_0) = (-1)^k p_k(x_d)$ . Indiquem  $\mathcal{M}' = T\mathcal{M}$ ,  $g' = g \circ T$ . Sigui  $S' = \{p'_0, p'_1, \dots, p'_d\}$  el sistema ortogonal canònic corresponent a  $(\mathcal{M}', g')$ . Per la Proposició 6.4.2,  $p'_k(x) =$

$\frac{p_k(x_d)}{p_k(x_0)} p_k(-x + x_0 + x_d) = (-1)^k p_k(-x + x_0 + x_d) = p_k(x)$ . Usant la caracterització donada en la Definició 6.2.3(3),  $x_l \in \mathcal{M}'$  per a  $1 \leq l \leq d$ . Com  $T(x_d) = x_0$ , també  $x_0 \in \mathcal{M}'$  i les dues malles coincideixen. Finalment, usant (6.18),  $g' = g$ .  $\square$

Considerem ara el cas en que la malla presenti simetria respecte de zero i la funció de pesos compleixi la simetria  $g_l = g_{d-l}$ , ( $0 \leq l \leq d$ ). Usant els resultats anteriors podem establir les següents caracteritzacions d'aquesta situació.

**Corollari 6.4.5** *Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i  $g$  una funció de pesos. Sigui  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, g)$ . Les afirmacions següents són equivalents:*

- (a)  $\mathcal{M}$  és simètrica respecte de l'origen i  $g$  compleix  $g_l = g_{d-l}$ , per a tot  $l$ .
- (b) Cada polinomi  $p_k$  és parell (imparell) segons  $k$  sigui parell (imparell).
- (c) Per a tot  $k = 0, 1, \dots, d$ , els termes  $a_k$  de la matriu de recurrència, són nuls.

**Demostració** La Proposició 6.4.4 prova l'equivalència entre (a) i (b). Si (a) és cert, podem usar la semblança  $T(x) = -x$  en la Proposició 6.4.2, obtenint  $a_k = -a_k$  i (c) es compleix. Recíprocament, si els  $a_k$  són nuls, l'ús inductiu de la recurrència  $x p_k = b_{k-1} p_{k-1} + c_{k+1} p_{k+1}$ , estableix (b).  $\square$

## 6.5 Polinomis ortogonals en anells quocient de polinomis

Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  una malla real. Per  $h = \prod_{l=0}^d (x - x_l)$ , considerem l'anell quocient  $\mathbb{R}[x]/(h)$ . Essent  $p \mapsto [p]$  la projecció de  $\mathbb{R}[x]$  en  $\mathbb{R}[x]/(h)$ , transladem a  $\mathbb{R}_d[x]$  l'estructura d'anell de  $\mathbb{R}[x]/(h)$  a través de la bijecció  $\mathbb{R}_d[x] \mapsto \mathbb{R}[x]/(h)$ , donada per l'elecció del representant canònic (únic element de la classe de grau menor o igual que  $d$ ). Notem que, per a  $p, q \in \mathbb{R}_d[x]$ , el producte  $pq \in \mathbb{R}_d[x]$  queda definit per  $[pq] = [p][q]$ . Indicarem  $\mathbb{R}_d[x][\mathcal{M}]$  aquest model de l'anell quocient. Mantindrem la noció de grau definint-lo com el del representant canònic. Es compleix  $\text{gr}(pq) \equiv \text{gr}(p) + \text{gr}(q) \pmod{d+1}$ . Donat que els polinomis de  $\mathcal{P}_d$  no tenen cap arrel en  $\mathcal{M}$ , són inversibles en  $\mathbb{R}_d[x][\mathcal{M}]$ . A més,

**Lema 6.5.1** *Sigui  $p \in \mathcal{P}_d^*$ , aleshores  $p^{-1} \in \mathcal{P}_d^*$ .*

**Demostració** Primer observem que  $(-1)^l p^{-1}(x_l) = (-1)^l \frac{1}{p(x_l)} > 0$ . El polinomi  $\tilde{p} \in \mathbb{R}_d[x]$ , Corollari 6.3.5(5), definit per  $\tilde{p}(x_i) = \frac{1}{p(x_i)}$ ,  $0 \leq i \leq d$ , s'identifica amb  $p^{-1}$  en  $\mathbb{R}_d[x][\mathcal{M}]$ . Llavors, només cal observar que si  $p - p(x_0)p^{-1} \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ , també  $p^{-1} - p^{-1}(x_0)p = -p^{-1}(x_0)(p - p(x_0)p^{-1}) \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$ .  $\square$

Donat  $p \in \mathcal{P}_d^*$ , queda definit un únic sistema ortogonal canònic  $p_0, p_1, \dots, p_d = p$ , Teorema 6.3.4, on el producte escalar ve definit per la funció de pesos  $g$  definida en (6.18). Llavors, segons el Lema 6.5.1, el mateix succeirà amb  $p^{-1}$ , que serà el polinomi terminal d'un sistema,  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d = p^{-1}$ , ortogonal canònic amb funció de pesos  $\tilde{g}$ . Relacionarem primer ambdues funcions de pesos.



**Proposició 6.5.2** *Sigui  $p \in \mathcal{P}_d^*$ . Les funcions de pesos  $g$  i  $\tilde{g}$ , associades respectivament a  $p$  i  $p^{-1}$ , compleixen*

$$g_i \tilde{g}_i = \frac{\pi_0^2 g_0^2}{\pi_i^2} p(x_0) \quad (0 \leq i \leq d).$$

**Demostració** Calculant,

$$\frac{\tilde{g}_i}{g_i} = \frac{\frac{(-1)^i}{\pi_i} p(x_i)}{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} p(x_l)} \frac{\sum_{l=0}^d \frac{(-1)^l}{\pi_l} \frac{1}{p(x_l)}}{\frac{(-1)^i}{\pi_i} \frac{1}{p(x_i)}} = \frac{(p(x_i))^2}{p(x_0)} = \frac{\pi_0^2 g_0^2}{\pi_i^2 g_i^2} p(x_0),$$

on hem usat (6.18) en la primera igualtat, el Corollari 6.3.5(3) en la segona i el Lema 6.3.1 en la tercera.  $\square$

Podem ara treballar la relació entre els sistemes ortogonals canònics definits per  $p$  i  $p^{-1}$ .

**Teorema 6.5.3** *Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  una malla de nombres reals. Donat  $p \in \mathcal{P}_d^*$ , els sistemes ortogonals canònics  $\mathcal{S} \equiv \{p_0, p_1, \dots, p_d = p\}$ ,  $\tilde{\mathcal{S}} \equiv \{\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d = p^{-1}\}$ , associats respectivament a  $p$  i a  $p^{-1}$ , es relacionen per  $\tilde{p}_i = p^{-1} p_{d-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ). Es passa d'una a altra matriu condensada per una simetria central:*

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & b_{d-1} & \cdots & b_1 & b_0 \\ a_d & a_{d-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ c_d & c_{d-1} & \cdots & c_1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\tilde{\mathcal{S}}}.$$

**Demostració** Definim  $\bar{p}_i = p^{-1} p_{d-i}$ , per a  $i = 0, 1, \dots, d$ . És clar,  $\bar{p}_0 = 1$ ,  $\bar{p}_d = p^{-1}$ . Hem de demostrar que els polinomis  $\bar{p}_i$  tenen grau igual al subíndex i que són ortogonals amb el producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sim}$  definit per la funció de pesos  $\tilde{g}$ . De la recurrència

$$\begin{aligned} xp_d &= b_{d-1} p_{d-1} + a_d p_d \\ xp_{d-i} &= b_{d-i-1} p_{d-i-1} + a_{d-i} p_{d-i} + c_{d-i+1} p_{d-i+1} \quad (i = d-1, \dots, 1) \\ xp_0 &= a_0 p_0 + c_1 p_1, \end{aligned}$$

multiplicant per  $p^{-1}$ , en resulta

$$\begin{aligned} x\bar{p}_0 &= a_d \bar{p}_0 + b_{d-1} \bar{p}_1 \\ x\bar{p}_i &= c_{d-i+1} \bar{p}_{i-1} + a_{d-i} \bar{p}_i + b_{d-i-1} \bar{p}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, d-1) \\ x\bar{p}_d &= c_1 \bar{p}_{d-1} + a_0 \bar{p}_d. \end{aligned}$$

Com  $b_l \neq 0$  i  $\bar{p}_0$  és de grau zero, la recurrència prova  $\text{gr}(\bar{p}_i) = i$ , ( $0 \leq i \leq d$ ). Calculem el producte escalar, per a  $0 \leq i, j \leq d$ ,

$$\langle \bar{p}_i, \bar{p}_j \rangle_{\sim} = \sum_{l=0}^d \tilde{g}_l p^{-1}(x_l) p_{d-i}(x_l) p^{-1}(x_l) p_{d-j}(x_l) = \pi_0^2 g_0^2 p(x_0) \sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2} \frac{1}{g_l^2} \frac{1}{(p(x_l))^2} g_l p_{d-i}(x_l) p_{d-j}(x_l).$$

Usant el Lema 6.3.1,  $(p(x_i))^2 = \frac{\pi_0^2 g_0^2}{\pi_i^2 g_i^2} (p(x_0))^2$ . Llavors,

$$\langle \bar{p}_i, \bar{p}_j \rangle_{\sim} = p^{-1}(x_0) \sum_{l=0}^d g_l p_{d-i}(x_l) p_{d-j}(x_l) = p^{-1}(x_0) \langle p_{d-i}, p_{d-j} \rangle = \delta_{ij} p^{-1}(x_0) p_{d-i}(x_0) = \delta_{ij} \bar{p}_i(x_0),$$

amb el que els polinomis  $\bar{p}_i = p^{-1} p_{d-i}$  ( $0 \leq i \leq d$ ) són el sistema ortogonal canònic determinat per  $p^{-1}$ . Per la unicitat  $\bar{p}_i = p^{-1} p_{d-i}$  ( $0 \leq i \leq d$ ).  $\square$

Fixada una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$ , cada sistema ortogonal canònic ve determinat per un polinomi en  $\mathcal{B}_d^*$ . Per tant els sistemes  $\mathcal{S}$  i  $\bar{\mathcal{S}}$ , introduïts en el Teorema 6.5.3, coincidiran si i només si  $p \in \mathcal{B}_d^*$  compleix  $p^{-1} = p$ . Condició que només satisfà el polinomi  $P$  definit per  $P(x_i) = (-1)^i$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ), és a dir el polinomi alternant de grau màxim associat a la malla  $\mathcal{M}$ . Llavors les matrius  $M_{\mathcal{S}}$ ,  $M_{\bar{\mathcal{S}}}$ , coincideixen. Recíprocament, si les dues matrius són iguals, com  $p_0 = \bar{p}_0 = 1$ , els dos sistemes ortogonals canònics coincideixen. La igualtat entre els dos polinomis terminals implica que són el polinomi alternant  $P$ . Recordant també l'expressió de la funció de pesos donada en (6.18), podem resumir-ho en el següent enunciat.

**Proposició 6.5.4** *Sigui  $\mathcal{M}$  una malla amb  $d+1$  elements i  $P$  el polinomi alternant de grau  $d$  associat a  $\mathcal{M}$ . Existeix un únic sistema ortogonal canònic,  $\mathcal{S} \equiv \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$ , caracteritzat per qualsevulla de les condicions següents:*

- (a)  $p_d = P$ .
- (b)  $p_i = P p_{d-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ).
- (c) La matriu  $M_{\mathcal{S}}$  presenta simetria central.
- (d) El vector de pesos  $(g_0, g_1, \dots, g_d)$  és proporcional a  $(\frac{1}{\pi_0}, \frac{1}{\pi_1}, \dots, \frac{1}{\pi_d})$ .

## 6.6 Sistema maximal de polinomis associat a $(\mathcal{M}, g)$

Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i una funció de pesos  $g$  normalitzada. Veiem  $\mathbb{R}_d[x]$  com espai normat amb la norma induïda pel producte escalar associat a  $g$ . El propòsit que ara ens guia, és estudiar l'optimització del quocient  $\frac{p(x_0)}{\|p\|}$ , amb  $p$  de grau fixat. Com aquesta fracció es manté invariant al passar de  $p$  a  $\xi p$ , amb  $\xi > 0$ , podem restringir-nos a considerar polinomis normalitzats. Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ , sigui  $\mathcal{B}_k = \{p \in \mathbb{R}_k[x] : \|p\| = 1\}$ . L'existència d'un element en el que la funció  $p \mapsto p(x_0)$ , definida en  $\mathcal{B}_k$ , assoleix el màxim ve garantida ja que la funció és contínua i el domini compacte. Podem transformar l'aspecte del problema usant el sistema ortogonal canònic  $p_0, p_1, \dots, p_d$ , associat a  $(\mathcal{M}, g)$ . En efecte, donat  $p \in \mathbb{R}_d[x]$  la seva expressió  $p = \sum_{i=0}^d \xi_i p_i$ , permet establir

$$p(x_0) = \sum_{i=0}^d \xi_i p_i(x_0) = \sum_{i=0}^d \xi_i \|p_i\|^2 = \left\langle \sum_{i=0}^d p_i, \sum_{i=0}^d \xi_i p_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^d p_i, p \right\rangle. \quad (6.20)$$

Per a  $p \in \mathcal{B}_k$ , podem perllongar (6.20) usant la desigualtat de Schwarz,

$$p(x_0) = \left\langle \sum_{i=0}^d p_i, p \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^k p_i, p \right\rangle \leq \left\| \sum_{i=0}^k p_i \right\|, \quad (6.21)$$

on la igualtat es produirà si i només si  $p$  és el producte de  $\sum_{i=0}^k p_i$  per un real positiu. De ser  $p$  unitari resulta:

**Proposició 6.6.1** Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i una funció de pesos  $g$  normalitzada. Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ , existeix un únic polinomi  $Q_k$  unitari i de grau  $k$ , tal que  $Q_k(x_0) = \sup\{p(x_0) : p \in R_k[x], \|p\| = 1\}$ . En termes de  $p_0, p_1, \dots, p_d$ , sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, g)$ , els polinomis  $Q_k$  s'expressen

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^k p_i(x_0)}} \sum_{i=0}^k p_i \quad (k = 0, 1, \dots, d).$$

Anomenarem  $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_d\}$  el sistema  $x_0$ -maximal de polinomis associat a  $(\mathcal{M}, g)$ . Els polinomis extrems del sistema  $x_0$ -maximal admeten una expressió simple. De ser  $p_0 = 1$  i la Proposició 6.2.3, obtenim  $Q_0$  i  $Q_d$ .

**Corol·lari 6.6.2** Els polinomis extrems del sistema  $x_0$ -maximal associat a  $(\mathcal{M}, g)$ , són

$$Q_0 = 1 \quad , \quad Q_d = \frac{1}{\sqrt{g_0 \pi_0}} \prod_{l=1}^d (x - x_l).$$

De ser el grau de  $Q_k$  exactament  $k$  i la unicitat del sistema  $x_0$ -maximal, en resulta la monotonia estricta dels valors  $Q_k(x_0)$ .

**Corol·lari 6.6.3** Els valors en  $x_0$  dels polinomis del sistema  $x_0$ -maximal associat a  $(\mathcal{M}, g)$ , verifiquen

$$1 = Q_0(x_0) < Q_1(x_0) < \dots < Q_{d-1}(x_0) < Q_d(x_0) = \frac{1}{\sqrt{g_0}}.$$

## 6.7 Sobre el sistema de polinomis $p_k^\sigma = p_0 + p_1 + \dots + p_k$

Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i una funció de pesos  $g$  normalitzada. Sigui  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic associat i  $M_{\mathcal{S}}$ , donada a (6.15), la corresponent matriu de recurrència condensada. Amb la motivació induïda per l'expressió obtinguda per als polinomis del sistema  $x_0$ -maximal, farem un estudi del sistema de polinomis  $\mathcal{S}^\sigma = \{p_0^\sigma, p_1^\sigma, \dots, p_{d-1}^\sigma, p_d^\sigma\}$ , definit per  $p_k^\sigma = p_0 + p_1 + \dots + p_k$ . De la Definició 6.2.3(3), sabem els polinomis extrems  $p_0^\sigma = 1$ ,  $p_d^\sigma = \frac{1}{g_0 \pi_0} \prod_{l=1}^d (x - x_l)$ . Seguim amb la següent observació.

**Lema 6.7.1** Es compleix:

1.  $x p_r^\sigma = b_r p_{r-1}^\sigma + (x_0 - b_r - c_{r+1}) p_r^\sigma + c_{r+1} p_{r+1}^\sigma$ , per a  $0 \leq r \leq d-1$ .

$$2. \sum_{l=1}^d g_l(x_0 - x_l) p_r^\sigma(x_l) p_s^\sigma(x_l) = b_r p_r(x_0) \delta_{rs}, \text{ per } a \ 0 \leq r, s \leq d-1.$$

**Demostració** El polinomi  $x p_r^\sigma$  pot expressar-se en la forma,

$$\begin{aligned} x p_r^\sigma &= \sum_{l=0}^r x p_l = \sum_{l=0}^r b_{l-1} p_{l-1} + a_l p_l + c_{l+1} p_{l+1} = \\ &= \sum_{l=0}^r b_l p_l + \sum_{l=0}^r a_l p_l + \sum_{l=0}^r c_l p_l + c_{r+1} p_{r+1} - b_r p_r = x_0 p_r^\sigma + c_{r+1} p_{r+1} - b_r p_r = \\ &= x_0 p_r^\sigma + c_{r+1} (p_{r+1}^\sigma - p_r^\sigma) - b_r (p_r^\sigma - p_{r-1}^\sigma) = b_r p_{r-1}^\sigma + (x_0 - b_r - c_{r+1}) p_r^\sigma + c_{r+1} p_{r+1}^\sigma, \end{aligned} \quad (6.22)$$

que prova el primer apartat. Suposem  $r \geq s$  i usem (6.22) per efectuar el càlcul,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^d g_l(x_0 - x_l) p_r^\sigma(x_l) p_s^\sigma(x_l) &= x_0 \langle p_r^\sigma, p_s^\sigma \rangle - \langle x p_r^\sigma, p_s^\sigma \rangle = \\ &= x_0 \langle p_r^\sigma, p_s^\sigma \rangle - x_0 \langle p_r^\sigma, p_s^\sigma \rangle + b_r \langle p_r, p_s^\sigma \rangle - c_{r+1} \langle p_{r+1}, p_s^\sigma \rangle = b_r p_r(x_0) \delta_{rs}. \end{aligned}$$

□

A partir de  $(\mathcal{M}, g)$  definim  $(\mathcal{M}^*, g^*)$ , on  $\mathcal{M}^* = \{x_1 > x_2 > \dots > x_d\}$  i  $g^*$  és la funció de pesos normalitzada proporcional a  $((x_0 - x_1)g_1, \dots, (x_0 - x_d)g_d)$ . El Lema 6.7.1 es reformula en la forma següent.

**Proposició 6.7.2** *Sigui  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, g)$ . Els polinomis  $\mathcal{S}^\sigma = \{p_0^\sigma, p_1^\sigma, \dots, p_{d-1}^\sigma\}$  formen un sistema ortogonal respecte de  $(\mathcal{M}^*, g^*)$ . Si la matriu condensada de recurrència de  $\mathcal{S}$  és  $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$ , la corresponent a  $\mathcal{S}^\sigma$  és*

$$M_{\mathcal{S}^\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \dots & c_{d-2} & c_{d-1} \\ a_0 + c_0 - c_1 & a_1 + c_1 - c_2 & \dots & a_{d-2} + c_{d-2} - c_{d-1} & a_{d-1} + c_{d-1} - c_d \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

A més, si  $x_0 > x_1 > \dots > x_d$ , són els autovalors de la matriu de recurrència de  $\mathcal{S}$ , els autovalors de la matriu de recurrència de  $\mathcal{S}^\sigma$  són  $x_1 > x_2 > \dots > x_d$ .

En general, el que  $\mathcal{S}$  sigui canònic respecte de  $(\mathcal{M}, g)$  no implica que  $\mathcal{S}^\sigma$  sigui el sistema canònic, indiquem-lo  $\mathcal{S}^*$ , corresponent a  $(\mathcal{M}^*, g^*)$ . Veiem uns exemples.

**Exemple 6.7.3** Considerem la malla  $\mathcal{M} = \{2, 0, -1\}$  i la funció de pesos  $g = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . El sistema ortogonal canònic és  $\mathcal{S} = \{1, \frac{28}{19}x - \frac{7}{19}, \frac{2}{3}x^2 - \frac{46}{57}x - \frac{12}{19}\}$ . Llavors,  $\mathcal{S}^\sigma = \{1, \frac{28}{19}x + \frac{12}{19}\}$ , que, d'acord amb la Proposició 6.7.2, és un sistema ortogonal respecte de  $\mathcal{M}^* = \{0, -1\}$  i  $g^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$ . Però el sistema canònic és  $\mathcal{S}^* = \{1, \frac{7}{4}x + \frac{7}{4}\}$ . Usant la caracterització donada en 6.3.5(2), veiem que el polinomi  $p_{d-1}^\sigma = \frac{28}{19}x + \frac{12}{19}$ , no és ni tan sols polinomi terminal per a la malla  $\mathcal{M}^* = \{0, -1\}$ .

**Exemple 6.7.4** Per a la malla  $\{4, 2, 0, -2, -4\}$  i la funció de pesos  $\{\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}$ , la matriu condensada de recurrència és  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Iterant el pas  $(\mathcal{M}, g) \xrightarrow{\sigma} (\mathcal{M}^*, g^*)$ , els successius sistemes ortogonals tenen, segons la Proposició 6.7.2, les següents matrius de recurrència:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas tots aquests sistemes ortogonals són canònics, com es desprèn d'observar que les columnes de cadascuna d'aquestes matrius sumen, respectivament, 4, 2, 0, -2, -4.

A la vista d'aquests exemples, convindrà caracteritzar quan el caràcter canònic de  $\mathcal{S}$  indueix caràcter canònic en  $\mathcal{S}^\sigma$ . El següent resultat proporciona, en diverses versions, tal caracterització.

**Proposició 6.7.5** *Sigui  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic per a  $(\mathcal{M}, g)$ . Llavors  $\mathcal{S}^\sigma = \{p_0^\sigma, p_1^\sigma, \dots, p_{d-1}^\sigma\}$  és el sistema ortogonal canònic corresponent a  $(\mathcal{M}^*, g^*)$ , si i només si es compleix alguna de les condicions equivalents següents:*

1.  $x_0 - x_1 = (b_r - b_{r+1}) - (c_r - c_{r+1})$ , per a  $0 \leq r \leq d-1$ ;
2.  $p_r(x_1) = \frac{b_r - c_r}{b_0} p_r(x_0)$ , per a  $0 \leq r \leq d-1$ ;
3.  $dp_0 + (d-1)p_1 + \dots + 2p_{d-2} + p_{d-1} = \frac{b_0}{g_1 \pi_1} \prod_{l=2}^d (x - x_l)$ .

**Demostració** Usem, respectivament, cadascuna de les versions de la Definició 6.2.3: Obtenim (1) de la Proposició 6.7.2. Del Lema 6.7.1, el caràcter canònic equival a les igualtats, amb  $0 \leq r \leq d-1$ ,

$$b_r p_r(x_0) = \left( \sum_{l=1}^d g_l(x_0 - x_l) \right) \sum_{i=1}^d g_i^* (p_r^\sigma(x_i))^2 = b_0 p_r^\sigma(x_1),$$

ja que  $\sum_{l=1}^d g_l(x_0 - x_l) = \sum_{l=0}^d g_l(x_0 - x_l) = x_0 - \langle x, 1 \rangle = x_0 - a_0 = b_0$ . Per tant,  $b_0 p_r^\sigma(x_1) = b_r p_r(x_0) - b_{r-1} p_{r-1}(x_0) = b_r p_r(x_0) - c_r p_r(x_0)$ , on hem usat (6.14) llegit en el cas d'un sistema canònic.

L'expressió (3) equival a  $p_0^\sigma + p_1^\sigma + \dots + p_{d-1}^\sigma = \frac{1}{g_1^* \pi_1^*} \prod_{l=2}^d (x - x_l)$ , tenint en compte,  $b_0 g_1^* \pi_1^* = g_1 \pi_1$ .  $\square$

En l'Exemple 6.7.3, hem vist que el caràcter ortogonal canònic d'un sistema  $\mathcal{S}$ , no garanteix ni tan sols el caràcter terminal del darrer polinomi de  $\mathcal{S}^\sigma$ . Tot i això, veurem com la funció  $g^*$  és l'única funció de pesos sobre  $\mathcal{M}^*$ , amb la que la transformació  $\sigma$  pot conservar el caràcter canònic.

**Proposició 6.7.6** *Sigui  $\{p_0, p_1, \dots, p_d\}$  el sistema ortogonal canònic respecte de  $(\mathcal{M}, g)$ . Suposem que  $p_{d-1}^\sigma$  és polinomi terminal per a la malla  $\mathcal{M}^*$ . Llavors, la funció de pesos sobre  $\mathcal{M}^*$  ha de ser la normalització de  $((x_0 - x_1)g_1, \dots, (x_0 - x_d)g_d)$ .*

**Demostració** Sigui  $\tilde{g}$  la funció de pesos sobre  $\mathcal{M}^*$  induïda per  $p_{d-1}^\sigma$ . Per (6.18), cada pes  $\tilde{g}_i$  és proporcional a  $\frac{(-1)^{i+1}}{\pi_i(\mathcal{M}^*)p_{d-1}^\sigma(x_i)}$ . Llavors, indicant proporcionalitat per //,

$$\tilde{g}_i // \frac{(-1)^{i+1}}{\pi_i(\mathcal{M}^*)p_{d-1}^\sigma(x_i)} = \frac{(-1)^i(x_0 - x_i)}{\pi_i p(x_i)} // (x_0 - x_i)g_i \quad (i = 1, \dots, d).$$

□

## 6.8 Sistema canònic associat al polinomi alternant d'una malla

Sigui  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i  $P$  el polinomi alternant de grau  $d$  associat a  $\mathcal{M}$ . Hem vist en la Proposició 6.5.4 que  $P$  és el polinomi terminal del sistema ortogonal canònic  $\mathcal{S} = \{p_0, p_1, \dots, p_d = P\}$  definit per  $(\mathcal{M}, g)$ , on  $g$  és la funció de pesos que resulta de normalitzar  $(\frac{1}{\pi_0}, \frac{1}{\pi_1}, \dots, \frac{1}{\pi_d})$ . Presentarem ara una expressió dels elements de la matriu de recurrència  $M_{\mathcal{S}}$ , obtinguda directament de  $\mathcal{M}$ . Indiquem  $\gamma_r$  el primer coeficient de  $p_r$ . Observant els coeficients dels termes de grau màxim en la recurrència que verifiquen els polinomis  $p_r$ , tenint en compte que la matriu  $M_{\mathcal{S}}$  té simetria central i el caràcter canònic de  $\mathcal{S}$ , es tenen les igualtats

$$c_r = \frac{\gamma_{r-1}}{\gamma_r}, \quad a_r = x_0 - b_r - c_r, \quad b_r = c_{d-r} \quad (r = 0, \dots, d), \quad (6.23)$$

on  $c_0 = b_d = 0$ . Considerem el sistema ortogonal  $\mathcal{S}^\sigma = \{p_0^\sigma, p_1^\sigma, \dots, p_{d-1}^\sigma\}$  i notem que  $\gamma_r$  és també primer coeficient de  $p_r^\sigma$ . Treballant en l'anell quocient  $\mathbb{R}_d[x][\mathcal{M}]$ , de la igualtat  $p_i = Pp_{d-i}$ , Proposició 6.5.4, es despren

$$p_r^\sigma + Pp_{d-r-1}^\sigma = \sum_{l=0}^r p_l + P \sum_{l=0}^{d-r-1} p_l = \sum_{l=0}^r p_l + \sum_{l=r+1}^d p_l = \frac{1}{\pi_0 g_0} \prod_{l=1}^d (x - x_l) \quad (r = 0, 1, \dots, d-1).$$

Aplicant-ho als elements de  $\mathcal{M}$ , obtenim, sobre els coeficients de  $p_r^\sigma = \sum_{j=0}^r \alpha_j x^j$ ,  $p_{d-r-1}^\sigma = \sum_{j=0}^{d-r-1} \beta_j x^j$ , el sistema

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j x_0^j + \sum_{j=0}^{d-r-1} \beta_j x_0^j = \frac{1}{g_0}, \quad \sum_{j=0}^r \alpha_j x_i^j + (-1)^i \sum_{j=0}^{d-r-1} \beta_j x_i^j = 0 \quad (i = 1, \dots, d). \quad (6.24)$$

Donats  $m$  nombres reals,  $y_1, \dots, y_m$ , introduïm, per a tot  $k = 0, 1, \dots, m$ , els nombres  $H_k(y_1, y_2, \dots, y_m)$  definits per

$$H_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{k-1} & 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{m-k-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{k-1} & -1 & -y_2 & -y_2^2 & \dots & -y_2^{m-k-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{k-1} & 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{m-k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & y_m & y_m^2 & \dots & y_m^{k-1} & (-1)^{m+1} & (-1)^{m+1}y_m & (-1)^{m+1}y_m^2 & \dots & (-1)^{m+1}y_m^{m-k-1} \end{vmatrix} \quad (6.25)$$

on observem que per els casos extrems  $k = 0$ ,  $k = m$ , es compleix

$$H_0(y_1, y_2, \dots, y_m) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} V(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad H_m(y_1, y_2, \dots, y_m) = V(y_1, y_2, \dots, y_m),$$

on  $V$  indica el determinant de Vandermonde. Usant la regla de Cramer, podem expressar la component  $\alpha_r (= \gamma_r)$  de la solució del sistema (6.24), en termes de determinants del tipus definit en (6.25). Ho presentem en la següent proposició.

**Proposició 6.8.1** *Segui  $S = \{p_0, p_1, \dots, p_d\}$ , l'únic sistema ortogonal canònic sobre la malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$ , tal que  $p_d$  és el polinomi alternant. Llavors,*

$$p_r = \frac{(-1)^d}{g_0} \frac{H_r(x_1, \dots, x_d)}{H_{r+1}(x_0, x_1, \dots, x_d)} x^r + \text{termes de grau inferior} \quad (r = 0, 1, \dots, d),$$

on  $\frac{1}{g_0} = \sum_{i=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_i}$ . La matriu de recurrència de  $S$  pot deduir-se dels elements de la malla per

$$c_r = \frac{H_{r-1}(x_1, \dots, x_d) H_{r+1}(x_0, x_1, \dots, x_d)}{H_r(x_1, \dots, x_d) H_r(x_0, x_1, \dots, x_d)} \quad , \quad b_r = c_{d-r} \quad , \quad a_r = x_0 - b_r - c_r \quad (r = 0, 1, \dots, d).$$

**Demostració** L'expressió obtinguda del sistema, proporciona el primer coeficient de  $p_r$ , per a  $r = 0, 1, \dots, d - 1$ , amb el que (6.23) dóna  $c_r$ ,  $b_r$  i  $a_r$  per a  $r = 1, \dots, d - 1$ . El coeficient  $\gamma_d$  també és expressable en la forma donada, ja que

$$\frac{(-1)^d}{g_0} \frac{H_d(x_1, \dots, x_d)}{H_{d+1}(x_0, x_1, \dots, x_d)} = \frac{(-1)^d}{g_0} \frac{V(x_1, \dots, x_d)}{V(x_0, x_1, \dots, x_d)} = \frac{1}{\pi_0 g_0} = \alpha_d.$$

També la igualtat trivial  $\gamma_0 = 1$  està inclosa en la fórmula donada, doncs, fent el desenvolupament de  $H_1(x_0, x_1, \dots, x_d)$  per la primera columna, es té

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^d}{g_0} \frac{H_0(x_1, \dots, x_d)}{H_1(x_0, x_1, \dots, x_d)} &= \frac{(-1)^{\frac{d(d+1)}{2}}}{g_0} \frac{V(x_1, \dots, x_d)}{H_1(x_0, x_1, \dots, x_d)} = \\ &= \frac{1}{g_0} \frac{V(x_1, \dots, x_d)}{\sum_{i=0}^d V(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_d)} = \frac{1}{g_0} \frac{1}{\sum_{i=0}^d \frac{V(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_d)}{V(x_1, \dots, x_d)}} = \frac{1}{g_0} \frac{1}{\sum_{i=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_i}} = 1. \end{aligned}$$

Finalment, com és natural, donem sentit a  $H_{-1}(x_1, \dots, x_d)$  definint-lo nul. □

Aplicant la mateixa tècnica al càlcul de tots els coeficients de  $p_r^\sigma$ , després d'una mica de feina, s'obté la següent forma explícita.

**Proposició 6.8.2** *Considerem una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$  i el sistema ortogonal canònic  $S$  que té per polinomi terminal el polinomi alternant de  $\mathcal{M}$ . Llavors, els polinomis  $p_r^\sigma$ ,  $r = 0, 1, \dots, d$ , poden expressar-se directament de  $\mathcal{M}$ , en la forma*

$$p_r^\sigma = \left( \sum_{i=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} \right) \frac{\tilde{H}_{r+1}(x, x_1, \dots, x_d)}{H_{r+1}(x_0, x_1, \dots, x_d)},$$

on, per a  $r = 0, 1, \dots, d$ ,

$$\tilde{H}_{r+1}(x, x_1, \dots, x_d) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^r & -1 & -x_1 & -x_1^2 & \dots & -x_1^{d-r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^r & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{d-r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \dots & x_d^r & (-1)^d & (-1)^d x_d & (-1)^d x_d^2 & \dots & (-1)^d x_d^{d-r-1} \end{vmatrix}.$$

Notem que, a part del raonament general per a  $r = 0, 1, \dots, d-1$ , la prova per a  $r = d$  és immediata fent-ne la comprovació,  $\left( \sum_{i=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} \right) \frac{\tilde{H}_{d+1}(x, x_1, \dots, x_d)}{H_{d+1}(x_0, x_1, \dots, x_d)} = \frac{1}{g_0} \frac{V(x, x_1, \dots, x_d)}{V(x_0, x_1, \dots, x_d)} = \frac{1}{g_0 \pi_0} \prod_{l=1}^d (x - x_l) = p_d^\sigma$ .

En conseqüència, podem expressar els polinomis del sistema ortogonal canònic,  $p_r = p_r^\sigma - p_{r-1}^\sigma$ , per a  $r = 0, 1, \dots, d$  (amb el conveni  $p_{-1}^\sigma = 0$ ).

**Corollari 6.8.3** *Per a una malla  $\mathcal{M} = \{x_0 > x_1 > \dots > x_d\}$ , el sistema ortogonal canònic  $S$  amb polinomi terminal el polinomi alternant, pot calcular-se directament de  $\mathcal{M}$  mitjançant*

$$p_r = \left( \sum_{i=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} \right) \left( \frac{\tilde{H}_{r+1}(x, x_1, \dots, x_d)}{H_{r+1}(x_0, x_1, \dots, x_d)} - \frac{\tilde{H}_r(x, x_1, \dots, x_d)}{H_r(x_0, x_1, \dots, x_d)} \right) \quad (r = 0, 1, \dots, d).$$



## Capítol 7

# Espectre local i propietats mètriques

A partir de  $\text{Spec}(C)$  introduïm un producte escalar discret en  $\mathbb{R}_{d_C}[x]$ , prenent com a malla els autovalors locals i com a funció de pes la donada per les multiplicitats locals, que per definició és normalitzada.

**Definició 7.0.4** *En un graf  $\Gamma = (V, E)$  considerem qualsevol subconjunt  $C \subset V$  no buit. Essent  $\text{Spec}(C) = \{\mu_0^{m_C(\mu_0)} > \mu_1^{m_C(\mu_1)} > \dots > \mu_{d_C}^{m_C(\mu_{d_C})}\}$ , definim en  $\mathbb{R}_{d_C}[x]$ , el  $C$ -local producte escalar per*

$$\langle p, q \rangle_C = \sum_{i=0}^{d_C} m_C(\mu_i) p(\mu_i) q(\mu_i) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}_{d_C}[x].$$

**Proposició 7.0.5** *El  $C$ -local producte escalar pot expressar-se alternativament per*

$$\langle p, q \rangle_C = \sum_{i=0}^d m_C(\mu_i) p(\mu_i) q(\mu_i) = \langle pe_C, qe_C \rangle$$

on  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  és el producte escalar euclidià.

**Demostració** En efecte, si  $e_C = z_0 + z_1 + \dots + z_{d_C}$  és la descomposició espectral,  $\langle pe_C, qe_C \rangle = \langle \sum_{r=0}^{d_C} p(\mu_r) z_r, \sum_{s=0}^{d_C} q(\mu_s) z_s \rangle = \sum_{l=0}^{d_C} m_C(\mu_l) p(\mu_l) q(\mu_l)$ .  $\square$

**Corollari 7.0.6** *La norma deduïda del  $C$ -local producte escalar s'expressa en termes de la norma euclidiana per  $\|p\|_C = \|pe_C\|$ .*

## 7.1 Distància entre conjunts i espectre local

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$ . Donats dos conjunts de vèrtexs  $C$  i  $D$ , presentarem una fitació per a la distància,  $\partial(C, D)$ , en termes dels respectius espectres locals.

**Proposició 7.1.1** *Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$  siguin  $C, D$  subconjunts no buits de  $V$  i  $p, q$  polinomis de graus respectivament  $r, s$ . Llavors*

$$\left(\frac{p(\lambda)}{\|p\|_C}\right)^2 \|\rho_C\|^2 + \left(\frac{q(\lambda)}{\|q\|_D}\right)^2 \|\rho_D\|^2 > \|\nu\|^2 \Rightarrow \partial(C, D) \leq r + s.$$

**Demostració** Serà suficient provar que de la hipòtesi es desprèn la no anul·lació de  $\langle pe_C, qe_D \rangle$ , el que implica l'existència d'un camí de longitud no superior a  $r + s$  entre alguna parella de vèrtexs de  $C$  i  $D$ . Podem suposar que  $p(\lambda)$  i  $q(\lambda)$  són no negatius (en altre cas canviem  $p$  per  $-p$ ). Usant la descomposició espectral de  $e_C$  i  $e_D$  com a (1.4), tenim

$$e_C = \frac{\|\rho_C\|}{\|\nu\|^2} \nu + z_C \quad e_D = \frac{\|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} \nu + z_D$$

d'on

$$pe_C = \frac{\|\rho_C\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda) \nu + pz_C \quad qe_D = \frac{\|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} q(\lambda) \nu + qz_D.$$

De l'ortogonalitat de  $z_C$  i  $z_D$  amb  $\nu$  resulta

$$\|pz_C\| = \sqrt{\|p\|_C^2 - \frac{\|\rho_C\|^2}{\|\nu\|^2} p^2(\lambda)} = \|p\|_C \sin \alpha \quad \|qz_D\| = \sqrt{\|q\|_D^2 - \frac{\|\rho_D\|^2}{\|\nu\|^2} q^2(\lambda)} = \|q\|_D \sin \beta$$

on  $\alpha$  i  $\beta$  són els angles aguts definits per

$$p(\lambda) = \frac{\|\nu\|}{\|\rho_C\|} \|p\|_C \cos \alpha \quad q(\lambda) = \frac{\|\nu\|}{\|\rho_D\|} \|q\|_D \cos \beta.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \langle p\rho_C, q\rho_D \rangle &= \frac{\|\rho_C\| \|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda) q(\lambda) + \langle pz_C, qz_D \rangle \geq \frac{\|\rho_C\| \|\rho_D\|}{\|\nu\|^2} p(\lambda) q(\lambda) - \|pz_C\| \|qz_D\| = \\ &= \|p\|_C \|q\|_D \cos \alpha \cos \beta - \|p\|_C \|q\|_D \sin \alpha \sin \beta = \|p\|_C \|q\|_D \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

La hipòtesi de l'enunciat es tradueix en  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$ , que per a angles aguts és equivalent a  $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ . Per tant  $\langle pe_C, qe_D \rangle > 0$ , que prova el resultat.  $\square$

**Proposició 7.1.2** *Sigui  $C$  un conjunt no buit de vèrtexs del graf  $\Gamma = (V, E)$  i sigui  $d_C + 1$  el cardinal de l'espectre  $C$ -local. Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d_C$  i per a qualsevol polinomi  $p \in \mathbb{R}_k[x]$ , es compleix*

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_C} \leq \frac{\|\rho_{N_k}\|}{\|\rho_C\|}.$$

**Demostració** Suposem primer  $0 \leq k < \varepsilon_C$ . Llavors  $E_k$  no és buit i  $\partial(C, E_k) = k + 1$ . Usant la Proposició 7.1.1, llegida al contrarecíproc, per als conjunts  $C$  i  $E_k$  i els polinomis  $p \in \mathbb{R}_k[x]$ ,  $q = 1$ , es té

$$\left( \frac{p(\lambda)}{\|p\|_C} \right)^2 \|\rho_C\|^2 + \|\rho E_k\|^2 \leq \|\nu\|^2$$

que equival a la nostra afirmació.

Sigui ara  $\varepsilon_C \leq k \leq d_C$ . De la descomposició espectral  $e_C = \frac{\|\rho_C\|}{\|\nu\|^2} \nu + z_C$ , notant que ara  $N_k = V$ , resulta

$$\|p\|_C^2 = \frac{\|\rho_C\|^2}{\|\nu\|^2} p^2(\lambda) + \|pz_C\|^2 \geq \frac{\|\rho_C\|^2}{\|\rho N_k\|^2} p^2(\lambda),$$

d'on es despren l'enunciat.  $\square$

Podem usar aquesta proposició per obtenir una fitació del  $k$ -excés de  $C$ , debilitant el pes de  $E_k$  pel seu cardinal.

**Corol·lari 7.1.3** *Sigui  $C$  un conjunt no buit de vèrtexs de  $\Gamma$  i  $p$  un polinomi de grau  $k$ . Llavors*

$$\frac{p(\lambda)}{\|p\|_C} > \frac{1}{\|\rho_C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - r} \Rightarrow e_k \leq r - 1.$$

**Demostració** De la nostra hipòtesi i de la Proposició 7.1.2, es dedueixen les desigualtats

$$\frac{1}{\|\rho_C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - r} < \frac{p(\lambda)}{\|p\|_C} \leq \frac{\|\rho N_k\|}{\|\rho_C\|} = \frac{1}{\|\rho_C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - \|\rho E_k\|^2} \leq \frac{1}{\|\rho_C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - e_k},$$

d'on  $e_k < r$ .  $\square$

## 7.2 Polinomis d'adjacència d'un conjunt de vèrtexs

Donat  $\Gamma = (V, E)$  considerem  $\emptyset \neq C \subset V$  i sigui  $\{(\lambda = \mu_0)^{m_C(\mu_0)} > \mu_1^{m_C(\mu_1)} > \dots > \mu_{d_C}^{m_C(\mu_{d_C})}\}$  l'espectre local de  $C$ . Plantegem-nos l'optimització del resultat de la Proposició 7.1.2, és a dir l'obtenció de

$$\sup \left\{ \frac{p(\lambda)}{\|p\|_C} : p \in \mathbb{R}_k[x] \right\}$$

on recordem que  $\|\cdot\|_C$  és la norma deduïda del producte escalar  $C$ -local, introduït en la Definició 7.0.4 i pel que s'ha obtingut, Proposició 7.0.5, l'expressió equivalent,  $\langle p, q \rangle_C = \sum_{l=0}^{d_C} m_C(\mu_l) p(\mu_l) q(\mu_l) = \langle p e_C, q e_C \rangle$ .

Passant a considerar polinomis normalitzats, podem transformar el problema a trobar

$$\sup \{p(\lambda) : p \in \mathcal{S}_k\}$$

on  $\mathcal{S}_k$  és l'esfera unitat  $\{p \in \mathbb{R}_k[x] : \|p\|_C = 1\}$ . Amb això estem en la situació treballada en la Secció 6.6, essent ara  $\mathcal{M} = \{\lambda = \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d\}$  i la funció de pesos  $g$  normalitzada és  $g_l = m_C(\mu_l)$ , per

a  $0 \leq l \leq d$  (usem  $d \equiv d_C$  si la confusió no és possible). Resumirem malla d'autovalors i funció de pes  $(\mathcal{M}, g) \equiv \text{Spec}(C)$ . La Proposició 6.6.1 aplicada a la nostra situació i l'ús de les notacions de la Secció 6.7, proporcionen

**Proposició 7.2.1** *Sigui  $p_0, p_1, \dots, p_d$ , el sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ . Per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ , existeix en  $\mathcal{S}_k$  un únic polinomi  $Q_k$  tal que  $Q_k(\lambda) = \sup \{p(\lambda) : p \in \mathcal{S}_k\}$ . Aquest polinomi, de grau exactament  $k$ , pot expressar-se*

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{p_k^\sigma(\lambda)}} p_k^\sigma.$$

En particular, per a  $k = 0, 1, \dots, d$ , es compleix

$$Q_k(\lambda) = \sqrt{p_k^\sigma(\lambda)} \quad (7.1)$$

**Definició 7.2.2** *El sistema de polinomis  $Q_0, Q_1, \dots, Q_d$ , construïts a partir de  $\text{Spec}(C)$ , l'anomenarem sistema  $C$ -local de polinomis d'adjacència.*

Els Corollaris 6.6.2 i 6.6.3, tenint en compte (1.5), adopten ara la forma

**Corollari 7.2.3** *El sistema  $C$ -local de polinomis d'adjacència verifica:*

$$a) \quad Q_0 = 1, \quad Q_d = \frac{\|\nu\|}{\|\rho C\| \pi_0} \prod_{i=1}^d (x - \mu_i);$$

$$b) \quad 1 = Q_0(\lambda) < Q_1(\lambda) < \dots < Q_{d-1}(\lambda) < Q_d(\lambda) = \frac{\|\nu\|}{\|\rho C\|}.$$

El polinomi  $p_d^\sigma = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2 \pi_0} \prod_{i=1}^d (x - \mu_i)$ , compleix

$$p_d^\sigma \rho C = p_d^\sigma \left( \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z_C \right) = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} p_d^\sigma(\lambda) \nu = \nu \quad (7.2)$$

que generalitza, localment i per a grafs no necessàriament regulars, l'acció del polinomi de Hoffman en grafs regulars. Si  $q \in \mathbb{R}_d[x]$  també verifiqués l'equació (7.2), el polinomi  $q - p_d^\sigma$  s'anullaria en els  $d + 1$  autovalors  $C$ -locals  $i$ , per tant, seria nul. Així el polinomi  $H_C \equiv p_d^\sigma$ , *polinomi de Hoffman  $C$ -local*, és l'únic polinomi en  $\mathbb{R}_d[x]$  que verifica (7.2).

El fet que els polinomis d'adjacència maximitzin, per a cada grau, el valor en  $\lambda$  entre els polinomis de norma  $\|\cdot\|_C$  igual a 1, permet de reformular les Proposicions 7.1.1, 7.1.2 i el Corollari 7.1.3 optimitzant la seva força.

**Proposició 7.2.4** *Siguin  $C$  i  $D$  conjunts no buits de vèrtexs i  $Q_k^C, Q_h^D$  els seus polinomis locals d'adjacència de graus  $k$  i  $h$  respectivament. Llavors,*

1.  $(Q_k^C(\lambda))^2 \|\rho C\|^2 + (Q_h^D(\lambda))^2 \|\rho D\|^2 > \|\nu\|^2 \Rightarrow \partial(C, D) \leq k + h;$
2.  $Q_k^C(\lambda) \leq \frac{\|\rho N_k^C\|}{\|\rho C\|};$
3.  $Q_k^C(\lambda) > \frac{1}{\|\rho C\|} \sqrt{\|\nu\|^2 - r} \Rightarrow e_k \leq r - 1.$

És natural plantejar-nos el problema de en quines condicions  $Q_k^C(\lambda)$  assolirà la fita  $\frac{\|\rho N_k^C\|}{\|\rho C\|}$ . Per a  $k = 0$  i  $k = d_C$ , del Corollari 7.2.3 resulta que la fita és assolida. Estudiem ara el cas  $0 < k < d_C$  (no havent confusió respecte del conjunt de vèrtexs omitim l'índex  $C$ ).

Podem descriure l'actuació d'un polinomi  $p \in \mathbb{R}_k[x]$  sobre el conjunt de vèrtexs  $C$ , a través de  $p e_C = \sum_{v \in N_k} \alpha_v e_v$ , el que de manera natural estableix l'aplicació

$$\psi : \mathbb{R}_k[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{|N_k|} \quad \text{definida per} \quad p \longmapsto (\alpha_v)_{v \in N_k},$$

on considerem els espais provistos, respectivament, de les normes  $\|\cdot\|_C$  i l'eulídia. És lineal i injectiva, doncs de l'anul·lació de  $p e_C$  se'n desprén  $p(\mu_i) = 0$  per a cada autovalor del  $C$ -espectre local. Per tant  $p$ , de grau  $k \leq d$ , tindria  $d + 1$  zeros i  $p$  seria nul. Alternativament la injectivitat també resulta de  $\|\psi(p)\| = \|p\|_C$ . En particular, a través de  $\psi$ , l'esfera unitat  $\mathcal{S}_k = \{p \in \mathbb{R}_k[x] : \|p\|_C = 1\}$  s'injecta en l'esfera unitat euclídia  $\mathcal{S}_{\text{euc}}$  de  $\mathbb{R}^{|N_k|}$ . El doble càlcul de  $p e_C$  com:

$$\begin{aligned} p e_C &= \frac{1}{\|\rho C\|} p \left( \sum_{v \in C} \nu_v e_v \right) = \frac{p(\lambda)}{\|\rho C\|} \left( \sum_{v \in C} \nu_v^2 \right) \frac{1}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp = p(\lambda) \|\rho C\| \frac{1}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp, \\ p e_C &= \sum_{v \in N_k} \alpha_v e_v = \left( \sum_{v \in N_k} \nu_v \alpha_v \right) \frac{1}{\|\nu\|^2} \nu + \nu^\perp, \end{aligned}$$

permet expressar,  $p(\lambda) = \frac{1}{\|\rho C\|} \sum_{v \in N_k} \alpha_v \nu_v = \frac{1}{\|\rho C\|} \langle \psi(p), \rho N_k \rangle$ . El problema de maximitzar  $p(\lambda)$  per  $p \in \mathcal{S}_k$ , es tradueix en fer-ho per a la funció  $\psi(\mathcal{S}_k) \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $x \longmapsto \frac{1}{\|\rho C\|} \langle x, \rho N_k \rangle$ . L'extensió d'aquesta funció a  $\mathcal{S}_{\text{euc}}$  assoleix el màxim absolut en l'únic punt  $x_0 = \frac{1}{\|\rho N_k\|} \rho N_k$  amb imatge  $\frac{\|\rho N_k\|}{\|\rho C\|}$ . Aquest màxim serà una fita per  $p(\lambda)$ , en concordància amb la Proposició 7.2.4, i s'assolirà si i només si  $x_0 \in \psi(\mathcal{S}_k)$ , o equivalentment si  $x_0 = \psi(Q_k) = Q_k e_C$ . Hem establert el següent resultat,

**Teorema 7.2.5** *Donat  $0 \leq k \leq d_C$ , la igualtat  $Q_k^C(\lambda) = \frac{\|\rho N_k\|}{\|\rho C\|}$  és equivalent a  $Q_k^C e_C = e_{N_k}$ .*

Traspasant aquest resultat a un enunciat sobre  $p_k^C = Q_k(\lambda) Q_k$ , obtenim, en forma equivalent,

**Corollari 7.2.6** *Donat  $0 \leq k \leq d_C$ , la igualtat  $p_k^\sigma(\lambda) = \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\rho C\|^2}$  és certa si i només si  $p_k^\sigma \rho C = \rho N_k$ .*

## Capítol 8

# Conjunts $Q$ -frontera

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i un conjunt  $C \subset V$  no buit. Tal com l'hem definit en (1.6), sigui  $\{\mu_0^{m_C(\mu_0)} > \mu_1^{m_C(\mu_1)} > \dots > \mu_{d_C}^{m_C(\mu_{d_C})}\}$  l'espectre  $C$ -local i  $p_0, p_1, \dots, p_{d_C}$  el sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(\Gamma)$ . Del Teorema 7.2.5 i el Corollari 7.2.6 resulta que les quatre afirmacions següents són equivalents (si no hi pot haver confusió prescindirem, per raons tipogràfiques, de l'índex  $C$ ).

**Proposició 8.0.7** *Donat  $0 \leq k \leq d$ , considerem els polinomis  $p_k^\sigma = p_0 + p_1 + \dots + p_k$  i  $Q_k$ ,  $k$ -èssim polinomi  $C$ -local d'adjacència. Les igualtats que segueixen són equivalents:*

$$(a) Q_k(\lambda) = \frac{\|\rho N_k\|}{\|\rho C\|} \quad ; \quad (b) Q_k e_C = e_{N_k} \quad ; \quad (c) p_k^\sigma(\lambda) = \frac{\|\rho N_k\|^2}{\|\rho C\|^2} \quad ; \quad (d) p_k^\sigma \rho C = \rho N_k.$$

**Definició 8.0.8** *En un graf  $\Gamma = (V, E)$  direm que  $C$  ( $\emptyset \neq C \subset V$ ) és un conjunt  $Q_k$ -frontera quan es compleixi qualsevulla de les afirmacions de la Proposició 8.0.7.*

Per exemple, segons hem fet notar en la secció anterior, tot conjunt és  $Q_0$ -frontera i  $Q_d$ -frontera. Quan un conjunt  $C$  és extremal ( $\varepsilon(C) = d_C \equiv d$ ) podem obtenir caracteritzacions alternatives del caràcter  $Q_{(d-1)}$ -frontera. Indicant  $\bar{C} = \{v : \partial(v, C) = d\}$  el conjunt antipodal del conjunt extremal  $C$ , establim primer que l'únic polinomi en  $\mathbb{R}_d[x]$  candidat a efectuar la transformació  $\rho C \mapsto \rho \bar{C}$  (pas a l'antipodal) és el darrer polinomi,  $p_d$ , del sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ .

**Lema 8.0.9** *Sigui  $C$  un conjunt de vèrtexs extremal i  $\bar{C}$  el conjunt antipodal de  $C$ . Sigui  $p_0, p_1, \dots, p_d$  el sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ . Suposem que existeix  $r \in \mathbb{R}_d[x]$  tal que  $r\rho C = \rho \bar{C}$ . Llavors  $r = p_d$ .*

**Demostració** Sigui  $s \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$  arbitrari. Llavors  $\langle r, s \rangle_C = \langle r e_C, s e_C \rangle = \frac{1}{\|\rho C\|} \langle r \rho C, s e_C \rangle = \frac{1}{\|\rho C\|} \langle \rho \bar{C}, s e_C \rangle = 0$ , ja que els vectors  $\rho \bar{C}$  i  $s e_C$  no tenen cap component simultàniament no nul·la.

Segons l'anterior, la successió  $p_0, p_1, \dots, p_{d-1}, r$  és un sistema ortogonal de polinomis respecte del producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ , amb graus respectius  $0, 1, \dots, d-1, d$ . Calculem  $r(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} r\rho C &= r\left(\sum_{v \in C} \nu_v e_v\right) = r\left(\sum_{v \in C} \nu_v \left(\frac{\nu_v}{\|\nu\|^2} \nu + z_v\right)\right) = r\left[\frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z'\right] = \\ &= \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} r(\lambda) \nu + r z'; \end{aligned}$$

$$\rho \bar{C} = \sum_{w \in \bar{C}} \nu_w e_w = \sum_{w \in \bar{C}} \nu_w \left[\frac{\nu_w}{\|\nu\|^2} \nu + z_w\right] = \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z''.$$

Així que  $\frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} r(\lambda) = \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\nu\|^2}$ , d'on  $r(\lambda) = \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}$ . Com també

$$\|r\|_C^2 = \langle r e_C, r e_C \rangle = \frac{1}{\|\rho C\|^2} \langle \rho \bar{C}, \rho \bar{C} \rangle = \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2},$$

resulta  $\|r\|_C^2 = r(\lambda)$ . Per tant,  $p_0, p_1, \dots, p_{d-1}, r$  és el sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ . Per unicitat,  $r$  és  $p_d$ .  $\square$

Establirem ara dues caracteritzacions del caràcter  $Q_{(d-1)}$ -frontera.

**Proposició 8.0.10** *Sigui  $C$  un conjunt extremal amb  $|\text{Spec}(C)| = d + 1$  i  $\bar{C}$  el conjunt antipodal de  $C$ . Cadascuna de les dues afirmacions següents és equivalent a que  $C$  sigui  $Q_{(d-1)}$ -frontera.*

- (a) *Existeix  $r \in \mathbb{R}_d[x]$  tal que  $r\rho C = \rho \bar{C}$ ;*
- (b) *El polinomi  $p_d$  compleix  $p_d(\lambda) = \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}$ .*

A més, cas de complir-se alguna d'elles, el polinomi  $r$  de l'apartat (a) és únic i és  $p_d$ .

**Demostració** Suposem  $C$  un conjunt  $Q_{(d-1)}$ -frontera. Llavors  $p_{d-1}^\sigma \rho C = \rho N_{d-1}$ . Per tant,  $p_d \rho C = p_d^\sigma \rho C - p_{d-1}^\sigma \rho C = \rho N_d - \rho N_{d-1} = \rho \bar{C}$ . Això prova (a).

Si es compleix (a), el Lema 8.0.9 permet assegurar que  $r = p_d$ . Llavors

$$p_d(\lambda) = \|p_d\|_C^2 = \langle p_d e_C, p_d e_C \rangle = \frac{1}{\|\rho C\|^2} \langle p_d \rho C, p_d \rho C \rangle = \frac{1}{\|\rho C\|^2} \langle \rho \bar{C}, \rho \bar{C} \rangle = \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}$$

Suposem ara (b) cert. Llavors

$$Q_{d-1}^2(\lambda) = p_{d-1}^\sigma(\lambda) = p_d^\sigma(\lambda) - p_d(\lambda) = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - \frac{\|\rho \bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} = \frac{\|\rho N_{d-1}\|^2}{\|\rho C\|^2}$$

on hem usat (7.1).

Per tant  $Q_{d-1}(\lambda) = \frac{\|\rho N_{d-1}\|}{\|\rho C\|}$ , és a dir,  $C$  és  $Q_{(d-1)}$ -frontera.  $\square$



Centrarem l'atenció en l'estudi de conjunts extremals que siguin  $Q_{(d-1)}$ -frontera, essent  $|\text{Spec}(C)| = d + 1$ . Per simplificar les expressions introduïm la següent definició.

**Definició 8.0.11** *Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$ , un conjunt  $\emptyset \neq C \subset V$  amb  $|\text{Spec}(C)| = d + 1$ , direm que és  $Q$ -frontera quan sigui extremal i  $Q_{(d-1)}$ -frontera.*

De la Proposició 8.0.10 resulta, en particular, que l'eventual caràcter  $Q$ -frontera d'un conjunt  $C$ , pot ser decidit del coneixement de  $\text{Spec}(C)$  i de la 'relació de pesos',  $\frac{\|\rho_{\bar{C}}\|}{\|\rho_C\|}$ , entre el de l'antipodal del conjunt i el del propi conjunt. Podem ara donar en forma compacta un resultat en aquest sentit, reunint la Proposició 8.0.10(b) i el càlcul de  $p_d(\lambda)$  donat en l'estudi de sistemes ortogonals canònics, Proposició 6.3.2. Obtenim la següent caracterització.

**Proposició 8.0.12** *En un graf  $\Gamma = (V, E)$ , un conjunt  $C \subset V$  no buit amb espectre local  $\{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_C(\mu_1)} > \dots > \mu_{d_C}^{m_C(\mu_{d_C})}\}$ , és  $Q$ -frontera si i només si és extremal i es compleix la igualtat*

$$\frac{\frac{1}{m_C^2(\lambda)\pi_0^2}}{\sum_{l=0}^{d_C} \frac{1}{m_C(\mu_l)\pi_l^2}} = \frac{\|\rho_{\bar{C}}\|^2}{\|\rho_C\|^2}$$

on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d_C, i \neq l} |\mu_l - \mu_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d_C$ ).

El fet de que l'espectre d'un conjunt  $Q$ -frontera  $C$  determini, a través de la construcció de la família ortogonal de polinomis  $p_k$ , el conjunt de vèrtexs antipodals  $\bar{C}$  per  $p_d \rho_C = \rho_{\bar{C}}$ , assegura, en particular, que l'espectre local  $\text{Spec}(\bar{C})$  serà calculable a partir de  $\text{Spec}(C)$ . Establím aquesta dependència en la següent proposició. Per simplificar la notació, no havent confusió respecte del conjunt, indicarem  $m_l \equiv m_C(\mu_l)$  i els objectes referits a  $\bar{C}$  els indicarem cobrint amb una barra els corresponents a  $C$ .

**Proposició 8.0.13** *Sigui  $C$  un conjunt  $Q$ -frontera i  $\bar{C}$  el seu antipodal. Si  $\text{Spec}(C) = \{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_d^{m_d}\}$ , el conjunt antipodal té espectre*

$$\text{Spec}(\bar{C}) = \{\lambda^{\bar{m}_0} \equiv \mu_0^{\bar{m}_0} > \mu_1^{\bar{m}_1} > \dots > \mu_d^{\bar{m}_d}\} \quad \text{on} \quad \bar{m}_l = \frac{p_d^2(\mu_l)}{p_d(\lambda)} m_l \quad (l = 0, 1, \dots, d)$$

on  $p_d$  és el darrer polinomi del sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ .

**Demostració** Notem primer que la igualtat (a) de la Proposició 8.0.10 pot expressar-se  $p_d e_C = \frac{\|\rho_{\bar{C}}\|}{\|\rho_C\|} e_{\bar{C}}$ . Projectant en  $\text{Ker}(x - \mu_l)$  es té  $p_d(\mu_l) z_l = \frac{\|\rho_{\bar{C}}\|}{\|\rho_C\|} \bar{z}_l$ . Prenent normes al quadrat obtenim

$$\bar{m}_l = \frac{\|\rho_C\|^2}{\|\rho_{\bar{C}}\|^2} p_d^2(\mu_l) m_l \quad (l = 0, 1, \dots, d).$$

Notem que  $p_d(\mu_l)$  és no nul, ja que les arrels de  $p_d$  intercalen la malla d'autovalors. Per tant, els espectres  $\text{Spec}(C)$  i  $\text{Spec}(\bar{C})$  estan formats pels mateixos autovalors. Com, Proposició 8.0.10(b),  $\frac{\|\rho_C\|^2}{\|\rho_{\bar{C}}\|^2} = \frac{1}{p_d(\lambda)}$ , l'enunciat segueix.  $\square$

Encaminarem ara els nostres esforços a respondre la qüestió natural de si el caràcter  $Q$ -frontera d'un conjunt es transmet al seu antipodal. Aquest passar de 'veure el graf' des de  $C$  a fer-ho des de  $\overline{C}$ , precisarà estudiar el sistema canònic de polinomis associat a  $\text{Spec}(\overline{C})$  a partir del corresponent a  $C$ . Usarem aquí la feina feta en la Secció 6.5, de la que recuperem les notacions. Veiem  $\text{Spec}(C)$  com la parella  $(\mathcal{M}, g)$ , on  $\mathcal{M}$  és la malla d'autovalors  $C$ -locals i  $g$  és la funció de pes normalitzada definida per les multiplicitats  $C$ -locals. Essent  $C$  un conjunt  $Q$ -frontera, la igualtat  $p_d \rho C = \rho \overline{C}$  es tradueix en  $p_d^{-1}(\rho \overline{C}) = \rho C$ . Recordem que estem calculant en  $\mathbb{R}[x]/(h)$  on  $h = \prod_{l=0}^d (x - \mu_l)$ . Estem en situació de relacionar els sistemes ortogonals canònics corresponents a  $C$  i  $\overline{C}$  i els seus eventuals caràcters  $Q$ -frontera.

**Proposició 8.0.14** *Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i  $\emptyset \neq C \subset V$  un conjunt  $Q$ -frontera. Sigui  $\{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_d^{m_d}\}$  l'espectre  $C$ -local i  $\overline{C} = \{v \in V : \partial(v, C) = d\}$  el conjunt antipodal de  $C$ . Siguin  $p_0, p_1, \dots, p_d$ ;  $\overline{p}_0, \overline{p}_1, \dots, \overline{p}_d$ , els respectius sistemes ortogonals canònics associats a  $C$  i  $\overline{C}$ . Llavors:*

1. *Es compleix  $\overline{p}_k = p_d^{-1} p_{d-k}$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d$ ;*
2. *Val la igualtat  $\overline{\overline{C}} = C$ ;*
3. *El conjunt  $\overline{C}$  és  $Q$ -frontera.*

**Demostració** Els polinomis  $\{\overline{p}_k\}_{0 \leq k \leq d}$  formen el sistema ortogonal canònic per a  $\text{Spec}(\overline{C}) = (\mathcal{M}, \overline{m})$ , on  $\mathcal{M} = \{\lambda = \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d\}$  i  $\overline{m}$ , funció de pesos de les multiplicitats  $\overline{C}$ -locals, és  $\overline{m}_l = \frac{p_d^2(\mu_l)}{p_d(\lambda)} m_l$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ). El polinomi  $p_d^{-1} \equiv \overline{p}_d$  és, segons la Proposició 6.5.2, polinomi terminal del sistema ortogonal canònic determinat per la malla  $\mathcal{M}$  i la funció de pesos definida per  $\tilde{g}_l = \frac{\pi_0^2 m_0^2}{\pi_l^2 m_l} p_d(\lambda)$ . Usant el Lema 6.3.1 i la Proposició 8.0.13, fem el càlcul

$$\tilde{g}_l = \frac{\pi_0^2 m_0^2}{\pi_l^2 m_l} p_d(\lambda) m_l = \frac{p_d^2(\mu_l)}{p_d^2(\lambda)} p_d(\lambda) m_l = \frac{p_d^2(\mu_l)}{p_d(\lambda)} m_l = \overline{m}_l.$$

Per tant el sistema ortogonal canònic amb polinomi terminal  $p_d^{-1}$ , que és  $(p_d^{-1} p_{d-k})_{0 \leq k \leq d}$ , Proposició 6.5.3, coincideix amb l'associat a  $\overline{C}$ . Amb això es prova (1).

Com els vèrtexs de  $C$  són a distància  $d$  de  $\overline{C}$  i  $|\text{Spec}(\overline{C})| = d$ , el conjunt  $\overline{C}$  té també excentricitat espectralment màxima i  $C \subset \overline{\overline{C}}$ . Per veure la inclusió contrària, considerem l'acció del polinomi  $\overline{p}_d^\sigma = \overline{p}_d + \overline{p}_{d-1}^\sigma$  sobre  $\rho \overline{C}$ . De (7.2) tenim

$$\nu = \overline{p}_d^\sigma \rho \overline{C} = \overline{p}_d \rho \overline{C} + \overline{p}_{d-1}^\sigma \rho \overline{C} = p_d^{-1} \rho \overline{C} + \overline{p}_{d-1}^\sigma \rho \overline{C} = \rho C + \overline{p}_{d-1}^\sigma \rho \overline{C}.$$

Comparant amb la igualtat  $\nu = \rho \overline{\overline{C}} + \rho \overline{N}_{d-1}$ , resulta  $\rho \overline{\overline{C}} = \rho C$  i  $\overline{p}_{d-1}^\sigma \rho \overline{C} = \rho \overline{N}_{d-1}$ , amb el que  $\overline{\overline{C}} = C$  i  $\overline{C}$  és conjunt  $Q$ -frontera.  $\square$

Podem formalitzar aspectes de la proposició anterior en la forma següent.

**Corollari 8.0.15** *Suposem que  $T$ , col·lecció de subconjunts  $Q$ -frontera de  $V$ , és no buit. Llavors l'aplicació pas a l'antipodal és interna en  $T$  i involutiva.*

De la mateixa Proposició 6.5.3 relacionem les matrius de recurrència dels sistemes de polinomis  $(p_k)$  i  $(\bar{p}_k)$ .

**Corol·lari 8.0.16** *En un graf  $\Gamma = (V, E)$ , sigui  $C \subset V$  un conjunt  $Q$ -frontera. Indiquem  $M, \bar{M}$ , respectivament, les matrius de recurrència dels sistemes ortogonals canònics  $\{p_0, p_1, \dots, p_d\}$ ,  $\{\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_d = p_d^{-1}\}$ , associats a  $C$  i a  $\bar{C}$ . Es passa d'una a altra matriu per una simetria central. En forma condensada:*

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & b_{d-1} & \cdots & b_1 & b_0 \\ a_d & a_{d-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ c_d & c_{d-1} & \cdots & c_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \bar{M}$$

Veurem ara que, essent  $C$  un conjunt  $Q$ -frontera, poden obtenir-se polinomialment  $\rho C_0, \rho C_1, \dots, \rho C_d$ , descomposició de  $\nu$  per capes respecte de  $C$ , a partir de  $\rho C$ .

**Proposició 8.0.17** *Sigui  $C$  un conjunt  $Q$ -frontera amb  $|\text{Spec}(C)| = d + 1$  i  $\bar{C}$  el seu antipodal. Essent  $\{p_k\}_{0 \leq k \leq d}$ ,  $\{\bar{p}_k\}_{0 \leq k \leq d}$ , els respectius sistemes ortogonals canònics, es compleix*

$$p_k \rho C = \rho C_k = \rho \bar{C}_{d-k} = \bar{p}_{d-k}(\rho \bar{C}) \quad (0 \leq k \leq d)$$

**Demostració** Usant la Proposició 8.0.14, podem expressar

$$\nu = p_d^\sigma(\rho C) = p_l^\sigma(\rho C) + (p_{l+1} + \cdots + p_d)(\rho C) = p_l^\sigma(\rho C) + (\bar{p}_{d-l-1} + \cdots + \bar{p}_0)p_d(\rho C) = p_l^\sigma(\rho C) + \bar{p}_{d-l-1}^\sigma(\rho \bar{C})$$

Com  $p_l^\sigma(\rho C) = \sum_{v \in N_l} \alpha_v e_v$ ,  $\bar{p}_{d-l-1}^\sigma(\rho \bar{C}) = \sum_{w \in \bar{N}_{d-l-1}} \beta_w e_w$ , de ser  $N_l \cap \bar{N}_{d-l-1} = \emptyset$ , resulta, en

particular,  $\alpha_v = \nu_v$ , per a tot  $v \in N_l$ . Per tant,  $p_l^\sigma(\rho C) = \rho N_l$ . Llavors,

$$p_k(\rho C) = p_k^\sigma(\rho C) - p_{k-1}^\sigma(\rho C) = \rho N_k - \rho N_{k-1} = \rho(N_k \setminus N_{k-1}) = \rho C_k$$

Les igualtats, derivades de ser  $\bar{C}$  també  $Q$ -frontera,

$$\rho \bar{C}_{d-k} = \bar{p}_{d-k}(\rho \bar{C}) = p_k p_d^{-1}(\rho \bar{C}) = p_k(\rho C)$$

completen la prova. \(\square\)

El fet d'obtenir cada capa  $\rho C_k$  a partir de  $\rho C$ , per l'acció dels polinomis del sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ , permet d'obtenir també  $\rho N_k$ ,

$$p_k^\sigma(\rho C) = \sum_{l=0}^k p_l(\rho C) = \sum_{l=0}^k \rho C_l = \rho \left( \bigcup_{l=0}^k C_l \right) = \rho N_k.$$

Llavors, de la Proposició 8.0.7, obtenim

**Corol·lari 8.0.18** *Tot conjunt  $Q$ -frontera, d'excentricitat  $d$ , és també  $Q_k$ -frontera per a tot  $k = 0, 1, \dots, d$ .*

Aquest resultat, en les versions de la Proposició 8.0.17 o d'aquest darrer corollari, és el fet essencial en aquesta part del treball. S'assegura que l'obtenció polinomial de la darrera capa,  $\rho C_d$ , a partir de  $\rho C$ , és equivalent a poder obtenir totes les capes intermèdies  $\rho C_k$  ( $0 \leq k \leq d$ ).

Compendiem el treball fet en aquesta secció en el següent enunciat.

**Teorema 8.0.19** *Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$ , considerem un conjunt  $C \subset V$  no buit i sigui  $\text{Spec}(C) = \{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_d^{m_d}\}$  el seu espectre local. Per a  $0 \leq k \leq d$ , indiquem  $C_k$  el conjunt de vèrtexs a distància  $k$  de  $C$ . Les afirmacions,*

1. *El conjunt  $C$  és  $Q$ -frontera;*
2. *El conjunt  $C$  és extremal i existeixen polinomis  $p_0, p_1, \dots, p_d$  en  $\mathbb{R}_d[x]$ , tals que  $p_k(\rho C) = \rho C_k$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d$ ;*
3. *Es compleix  $\|\rho \Gamma_d(C)\|^2 = \frac{1}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}} \|\rho C\|^2$ , on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\mu_l - \mu_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ),*

*són equivalents. Cas de complir-se, els polinomis  $\{p_k\}_{0 \leq k \leq d}$  són el sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ .*

**Demostració** Tot conjunt  $Q$ -frontera és extremal. La Proposició 8.0.17 proporciona (2). Suposem (2) cert. El polinomi  $p_d$ , complint  $p_d(\rho C) = \rho C_d = \rho \overline{C}$ , ha de ser, Lema 8.0.9, el polinomi terminal del sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ . El conjunt  $C$ , per la Proposició 8.0.10, serà  $Q$ -frontera. La igualtat numèrica (3) l'estableix la Proposició 8.0.12, ja que  $C_d = \overline{C} = \Gamma_d(C)$ . Per la Proposició 8.0.17 el polinomi de grau  $k$  del sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$  transforma  $\rho C$  en  $\rho C_k$ , per a cada  $k$ . Per unicitat, derivada de ser  $k < |\text{Spec}(C)|$ , aquests polinomis són els  $p_k$  de l'enunciat.

Suposem ara que (3) es verifica. Com la part dreta de la igualtat és estrictament positiva, el conjunt  $C$  és extremal. En conseqüència, Proposició 8.0.12, el conjunt  $C$  és  $Q$ -frontera.  $\square$

## Capítol 9

# Distància-regularitat i pseudo-distància-regularitat

### 9.1 Extensió del concepte de partició equitativa

Per a un graf  $\Gamma = (V, E)$  considerem una funció  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , estrictament positiva i normalitzada de manera que  $\min\{g(u) : u \in V\} = 1$ . Fixada una ordenació dels vèrtexs de  $\Gamma$  podem identificar una tal funció de pesos amb el vector  $g = (g(u_1), \dots, g(u_n))$ , ( $n = |V|$ ). Exemples destacats de funció de pesos els donen  $g = j$  i  $g = \nu$ .

Considerem una partició  $\mathcal{P} \equiv \{X_1, \dots, X_r\}$  de  $V$  del conjunt de vèrtexs,  $V = X_1 \cup \dots \cup X_r$ . Per a cada parella  $(h, k)$ ,  $1 \leq h, k \leq r$ , definim l'aplicació  $X_h \rightarrow \mathbb{R}$ , per

$$u \mapsto \frac{1}{g(u)} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} g(v).$$

Direm que  $\mathcal{P}$  és una *partició  $g$ -equitativa* quan cadascuna d'aquestes aplicacions sigui constant, indicada  $\bar{a}_{hk}$  per a cada  $(h, k)$ . En aquest cas, anomenarem  $\bar{A} = (\bar{a}_{hk})$  *matriu d'intersecció* o *matriu quocient* de  $A$ , matriu d'adjacència del graf, respecte de  $(g, \mathcal{P})$  i ens referirem als elements de  $\bar{A}$  com a *nombres d'intersecció*. Pot interpretar-se  $\bar{A}$  com la matriu d'adjacència del digraf  $\Gamma/\mathcal{P}$ , de vèrtexs els elements de  $\mathcal{P}$  i on cada arc  $X_h X_k$  està dotat de pes  $\bar{a}_{hk}$ .

Introduïm, en forma paral·lela a com es fa en Biggs [4] en el cas  $g = j$ , la matriu  $P$ , amb  $r = |\mathcal{P}|$  columnes i  $n = |V|$  files, definida per  $p_{uk} = g(u)$  si  $u \in X_k$  i  $p_{uk} = 0$  en altre cas. Indiquem  $g^k$  el  $k$ -èssim vector columna de  $P$ . Són immediates les observacions: (i) el rang de  $P$  és  $r$ ; (ii)  $g^1 + \dots + g^r = g$ .

**Lema 9.1.1** *Una partició és  $g$ -equitativa si i només si existeix una matriu  $B$  tal que  $AP = PB$ . Llavors  $B = \bar{A}$ .*

**Demostració** El caràcter necessari resulta del càlcul

$$(AP)_{uk} = \sum_{v \in V} a_{uv} p_{vk} = \sum_{v \in \Gamma(u)} p_{vk} = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} g(v) = g(u) \bar{a}_{hk} = \sum_{j=1}^r p_{uj} \bar{a}_{jk} = (P\bar{A})_{uk},$$

essent  $X_h$  el conjunt que conté  $u$ . D'altra banda si  $B = (b_{vk})$  compleix  $AP = PB$ , per a tota parella  $(h, k)$  i tot vèrtex  $u \in X_h$  es té

$$\sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} g(v) = (AP)_{uk} = (PB)_{uk} = g(u) b_{hk},$$

amb el que la partició és  $g$ -equitativa amb nombres d'intersecció  $b_{hk}$ .  $\square$

**Proposició 9.1.2** Sigui  $\mathcal{P}$  una partició  $g$ -equitativa d'un graf  $\Gamma = (V, E)$ . Sigui  $\lambda$  el seu màxim valor propi i  $\nu$  l'autovalor associat amb mínima component la unitat. Llavors,

- (a) La matriu quocient  $\bar{A}$  té autovalors reals i simples que són també autovalors de  $A$ .
- (b) La matriu  $\bar{A}$  té màxim autovalor  $\lambda$  amb autovector associat  $\xi$  complint  $P\xi = \nu$ .
- (c) El vector  $\nu$  té components iguals corresponents als vèrtexs d'un conjunt  $X_k$  si i només si  $g$  és constant sobre  $X_k$ .

**Demostració** (a) De  $AP = P\bar{A}$  resulta  $A^l P = P\bar{A}^l$ , d'on per a tot polinomi  $q$  es compleix  $q(A)P = Pq(\bar{A})$ . Si  $q(A) = 0$  del caràcter injectiu del morfisme representat per  $P$ , resulta  $q(\bar{A}) = 0$ . En particular el polinomi mínim de  $A$ , que té totes les arrels reals i simples, és múltiple del polinomi mínim de  $\bar{A}$ .

(b) De  $\bar{A}^T P^T \nu = P^T A \nu = \lambda P^T \nu$  i notant que  $P^T \nu \neq 0$ , resulta que  $\lambda$  és autovalor de  $\bar{A}^T$  i també de  $\bar{A}$ . Com els autovalors de  $\bar{A}$  ho són també de  $A$ ,  $\lambda$  és el màxim autovalor de  $\bar{A}$ . Si  $\xi$  és un autovector de  $\bar{A}$  associat a  $\lambda$ , tenim  $AP\xi = P\bar{A}\xi = \lambda P\xi$ . Així que  $P\xi$  és proporcional a  $\nu$  i no nul per la injectivitat de  $P$ .

(c) Podem interpretar (b) en la forma  $\nu = \xi_1 g^1 + \dots + \xi_r g^r$  i resulta la nostra afirmació.  $\square$

Introduïm nomenclatura específica per el caràcter  $g$ -equitatiu d'una partició en els casos més interessants d'elecció de la funció de pes.

- ( $g = j$ ) Aquesta situació correspon a la definició de *particions equitatives* introduïda per Schwenk [47], també anomenades *particions regulars* en Brouwer, Cohen i Neumaier [5], estudiades en McKay [40] i Godsil [31]. A l'adjudicar pes unitat a tot vèrtex, els nombres d'intersecció són  $\bar{a}_{hk} = |\Gamma(u) \cap X_k|$ , on  $u \in X_h$  arbitrari.
- ( $g = \nu$ ) En aquest cas una partició  $g$ -equitativa l'anomenarem *partició pseudo-equitativa* i ara

$$\bar{a}_{hk} = \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} \nu_v, \quad \text{per a tot } u \in X_h \quad (1 \leq h, k \leq r),$$

que anomenarem *nombres de pseudo-intersecció*.

Notem que la partició trivial formada per un sol conjunt  $(V)$  és sempre pseudo-equitativa, mentre serà equitativa si i només si el graf és regular. En aquest fet hi ha l'arrel de l'extensió, que presentem en

aquest treball, de conceptes emmarcats en grafs regulars a grafs no necessàriament regulars, als que ara podem anomenar grafs "pseudo-regulars".

Fem unes observacions per a les dues eleccions anteriors de funció de pes.

**Proposició 9.1.3** (a) *Sigui  $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_r\}$  una partició equitativa en  $\Gamma$ . La component  $\nu_u$ , per a tot  $u \in X_k$ , només depèn de  $k$  ( $1 \leq k \leq r$ ).*

(b) *Sigui  $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_r\}$  una partició pseudo-equitativa en  $\Gamma$ . La matriu  $\tilde{A}$  té autovector  $j_r = (1, \dots, 1)$  associat a  $\lambda$ . Es compleix  $\tilde{a}_{h1} + \dots + \tilde{a}_{hr} = \lambda$ , per a tot  $1 \leq k \leq r$ .*

(c) *Una partició  $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_r\}$  és equitativa si i només si és pseudo-equitativa i a més la funció sobre  $V$ , definida  $u \mapsto \nu_u$  és constant (diguem-ne  $\nu^l$ ) sobre cada  $X_l$ . Llavors, els nombres d'intersecció,  $a_{hk}$ , i els nombres de pseudo-intersecció,  $\tilde{a}_{hk}$ , es relacionen per  $\tilde{a}_{hk} = \frac{\nu^k}{\nu^h} a_{hk}$ .*

**Demostració** (a) És immediat de la Proposició 9.1.2(c).

(b) De l'observació  $Pj_r = \nu$  i de la Proposició 9.1.2(b) resulta la primera part. La segona explicita que  $j_r$  és vector propi de  $A$  per l'autovalor  $\lambda$ .

(c) Si la partició és equitativa, per (a) el valor de  $\nu_u$  és constant sobre cada  $X_l$ . Indiquem-lo  $\nu_l$ . El càlcul, per  $u \in X_h$ ,

$$\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} \nu_v = \frac{1}{\nu^h} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} \nu^k = \frac{\nu^k}{\nu^h} a_{hk},$$

prova que la partició és pseudo-equitativa i estableix la relació entre els nombres d'intersecció. Recíprocament, essent la partició pseudo-equitativa i  $\nu_u$  constant per a  $u \in X_l$  (indicat  $\nu^l$ ), es té, per a tot  $u \in X_h$ ,

$$|\Gamma(u) \cap X_k| = \frac{1}{\nu^k} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} \nu_v = \frac{\nu_u}{\nu^k} \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_k} \nu_v = \frac{\nu^h}{\nu^k} \tilde{a}_{hk}$$

amb el que la partició és equitativa. □

Veurem, mitjançant l'exemple que segueix, que hi han particions pseudo-equitatives no equitatives.

**Exemple 9.1.4** En el graf  $T$  de la figura el màxim autovalor és  $\lambda = 2$  i les components de  $\nu$  són 1 pels vèrtexs  $p$  (pare),  $f1$  i  $f2$  (fills) i  $\frac{1}{2}$  per  $n1, n2, n3, n4$  (nétos).

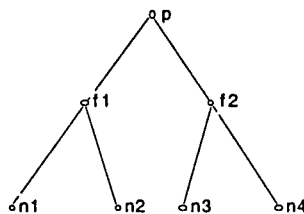


Figura 9.1: Arbre pare-fills-nétos.

Definim  $\Gamma_r = T \times \binom{r}{\dots} \times T$ . Aquest graf té autovalor màxim  $\lambda' = 2r$  i autovector associat  $\nu'$  de component  $\nu_{u_1} \nu_{u_2} \dots \nu_{u_r}$  corresponent al vèrtex  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ . Notant que el vèrtex  $(p, \dots, p)$  té excentricitat  $2r$ ,

construïm una partició definint  $X_h$  com el conjunt de vèrtexs a distància  $h$  de  $(p, \dots, p)$ ,  $0 \leq h \leq 2r$ . Els vèrtexs de  $X_h$  són aquells en que els nombres de components pare ( $n_p$ ), fill ( $n_f$ ) i nét ( $n_n$ ) verifiquen  $n_f + 2n_n = h$ . Compendiem un tal vèrtex amb la notació  $(n_p, n_f, n_n)$ . La component de  $\nu'$ , corresponent a un vèrtex, és  $(\frac{1}{2})^{n_n}$ , que notem no és constant sobre  $X_h$ . Per tant, Proposició 9.1.3(a), la nostra partició no és equitativa.

D'altra banda un vèrtex de  $X_h$ , de tipus  $(n_p, n_f, n_n)$ , serà adjacent a  $2n_p$  vèrtexs de  $X_{h+1}$  de tipus  $(n_p - 1, n_f + 1, n_n)$ , a  $2n_f$  vèrtexs de  $X_{h+1}$  de tipus  $(n_p, n_f - 1, n_n + 1)$ , a  $n_f$  vèrtexs de  $X_{h-1}$  de tipus  $(n_p + 1, n_f - 1, n_n)$  i a  $n_n$  vèrtexs de  $X_{h-1}$  de tipus  $(n_p, n_f + 1, n_n - 1)$ . Per a un vèrtex  $u$  de  $X_h$ ,

$$\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_{h+1}} \nu_v = \frac{2n_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n_n} + 2n_f \left(\frac{1}{2}\right)^{n_n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_n}} = 2n_p + n_f = 2r - h$$

$$\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap X_{h-1}} \nu_v = \frac{n_f \left(\frac{1}{2}\right)^{n_n} + n_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n_n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_n}} = n_f + 2n_n = h,$$

només depenen de  $h$ . Per tant la partició és pseudo-equitativa, amb matriu quocient

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2r-1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2r-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2r & 0 \end{pmatrix}.$$

## 9.2 Generalitats sobre grafs distància-regulars i el seus espectres

És propòsit en el que segueix d'aquest treball, estudiar la generalització del concepte de graf distància-regular en dues vies. D'una banda prescindint del caràcter regular del graf, introduïrem la noció de pseudo-distància-regularitat. D'altra, la noció de localitat, visió del graf des d'un vèrtex o conjunt de vèrtexs, donarà lloc a la local-distància-regularitat i, en general, a la local-pseudo-distància-regularitat. Definicions precises es donaran més endavant. Sembla convenient per centrar les posteriors generalitzacions, presentar breument unes qüestions bàsiques sobre grafs distància-regulars, en les quals el possible interès rau en l'aplicació de resultats anteriors sobre particions i famílies ortogonals de polinomis de variable discreta.

Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf connex. Indiquem  $d$  el diàmetre de  $\Gamma$ . Tot vèrtex  $u$  genera una partició de  $V$ ,  $\Gamma_0(u) = \{u\}$ ,  $\Gamma_1(u)$ ,  $\dots$ ,  $\Gamma_d(u)$ , induïda per la distància a  $u$ . El graf  $\Gamma$  és un *graf distància-regular* quan la partició generada per a cada  $u \in V$  és equitativa i amb els mateixos nombres d'intersecció. Per a  $k = 0, 1, \dots, d$  i per a qualsevol parella  $u, v$  de vèrtexs a distància  $k$ , indicarem

$$c_k = \bar{a}_{k,k-1} = |\Gamma(v) \cap \Gamma_{k-1}(u)| \quad , \quad a_k = \bar{a}_{k,k} = |\Gamma(v) \cap \Gamma_k(u)| \quad , \quad b_k = \bar{a}_{k,k+1} = |\Gamma(v) \cap \Gamma_{k+1}(u)|$$

on  $c_0$  i  $b_d$  es defineixen trivialment nuls. Els demés nombres d'intersecció són nuls. També, per l'absència d'autollaços,  $a_0 = 0$ .



Disposarem els elements significatius de la matriu d'intersecció en la *forma condensada*

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Per la connexió del graf  $b_{l-1}c_l > 0$  ( $1 \leq l \leq d-1$ ), per tant la matriu d'intersecció i la seva trasposada poden llegir-se també com matrius de recurrència. Ens prendrem la llibertat de parlar de l'espectre de la matriu condensada, a través de la identificació amb la matriu d'intersecció. Indiquem ambdues matrius, la de intersecció i la condensada amb el mateix símbol,  $M$ , fent-se evident l'elecció per el context.

Notem que en la matriu d'intersecció de la partició associada a un vèrtex, l'element  $b_0$  és justament el grau del vèrtex. Per tant un graf distància-regular, mateixa matriu d'intersecció per a tot vèrtex, és, en particular, regular. Si  $\lambda$  és el grau del graf, màxim element de l'espectre, de la regularitat en resulta  $c_k + a_k + b_k = \lambda$ , per a tot  $k$ . Tota la informació continguda en la matriu d'intersecció pot resumir-se donant els *nombres d'intersecció*  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$ .

Introduint, per a  $k = 0, 1, \dots, d$ , les matrius  $A_k$ , d'ordre  $|V|$ , definides per  $(A_k)_{uv} = 1$  quan  $\partial(u, v) = k$  i demés elements nuls, és clar  $A_0 = I$  i  $A_1 = A$ . Fent recompte d'adjacències s'obté, per a  $0 \leq k \leq d$ , la relació fonamental  $AA_k = b_{k-1}A_{k-1} + a_kA_k + c_{k+1}A_{k+1}$ , on  $b_{-1} = c_{d+1} = 0$ . La successió recurrent  $p_0, p_1, \dots, p_d$  definida per  $M^T$ , *polinomis distància*, fa certes les igualtats  $A_k = p_k(A)$ , per a tot  $k$ . De la igualtat  $Ap_d(A) = b_{d-1}p_{d-1}(A) + a_dp_d(A)$ , en resulta que el polinomi  $h$ , de grau  $d+1$ , definit per  $xp_d = b_{d-1}p_{d-1} + a_dp_d + h$ , compleix  $h(A) = 0$ . Per tant els autovalors del graf són arrels de  $h$  i, en conseqüència, hi han com a màxim  $d+1$  autovalors diferents. Com el diàmetre és  $d$ , el nombre d'autovalors del graf ha de ser com a mínim  $d+1$ . En conclusió, el graf té  $d+1$  autovalors diferents que són les arrels de  $h$ . L'espectre de  $\Gamma$  serà, doncs,  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 = \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$ , a falta d'obtenir les multiplicitats.

Aplicant a la matriu de recurrència  $M^T$  els resultats generals presentats en el Capítol 6, els polinomis distància formen el sistema ortogonal canònic per a la parella  $(\mathcal{M}, g)$ , on  $\mathcal{M} = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  i la funció de pesos  $g$  ve donada, segons el Lema 6.3.1, per

$$g_k = (-1)^k \frac{\pi_0 p_d(\lambda_0)}{\pi_k p_d(\lambda_k)} g_0 \quad (k = 1, \dots, d) \quad \text{i la condició de normalització} \quad g_0 + g_1 + \dots + g_d = 1. \quad (9.2)$$

Veurem a continuació que la informació que proporciona el coneixement de la matriu d'intersecció d'un graf distància-regular, inclou la totalitat de l'espectre. En l'anterior ja hem vist que els autovalors de  $\Gamma$  són els de  $M$ . Treballem ara l'obtenció de les multiplicitats. Usarem una tècnica que implica les multiplicitats locals dels vèrtexs del graf. Donat un vèrtex  $u$ , considerem la descomposició espectral  $e_u = z_{u0} + z_{u1} + \dots + z_{ud}$ , on  $z_{ul} \in \text{Ker}(A - \lambda_l I)$ . Recordem la definició (1.6) de la multiplicitat  $u$ -local de  $\lambda_l$ , com  $m_u(\lambda_l) = \|z_{ul}\|^2$ . Per el Corollari 2.1.2 l'excentricitat de  $u$  i el nombre,  $d_u + 1$ , d'autovalors amb multiplicitat  $u$ -local no nul·la, es relacionen per  $\varepsilon_u \leq d_u$ . De la definició del caràcter distància-regular es té  $d = D(\Gamma) = \varepsilon_u \leq d_u \leq d$ , establint que l'espectre  $u$ -local conté tots els autovalors del graf. Aprofitem aquest fet per introduir, associat al vèrtex  $u$ , el producte escalar en  $\mathbb{R}_d[x]$  definit per la parella  $(\mathcal{M}, g^u)$ , on la funció de pesos té components  $g_l^u = m_u(\lambda_l)$ .

$$\langle p, q \rangle_u = \sum_{l=0}^d m_u(\lambda_l) p(\lambda_l) q(\lambda_l) = \langle p e_u, q e_u \rangle, \quad (9.3)$$

on la darrera igualtat és immediata ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  és el producte escalar euclidià). El sistema de polinomis distància verifica, per a  $0 \leq i, j \leq |V|$ ,

$$\langle p_i, p_j \rangle_u = \langle p_i e_u, p_j e_u \rangle = \langle A_i e_u, A_j e_u \rangle = \left\langle \sum_{v \in \Gamma_i(u)} e_v, \sum_{w \in \Gamma_j(u)} e_w \right\rangle = \delta_{ij} |\Gamma_i(u)|. \quad (9.4)$$

Per tant  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots,d}$ , sistema ortogonal per a la parella  $(\mathcal{M}, g)$ , ho és també per a  $(\mathcal{M}, g^u)$ , per a tot vèrtex  $u$ . Recordant el Lema 6.2.1, podem concloure  $g^u = g$  per a tot  $u \in V$ . Observem-ne dues conseqüències:

- 1) Els polinomis  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots,d}$ , formen el sistema ortogonal canònic per a  $(\mathcal{M}, g^u) = (\mathcal{M}, g)$ , per a tot  $u \in V$ . Per tant de (9.4) resulta  $p_k(\lambda) = \|p_k\|_u^2 = |\Gamma_k(u)|$ , per a  $k = 0, 1, \dots, d$ .
- 2) Com que les multiplicitats locals d'un autovalor sobre tots els vèrtexs del graf sumen la multiplicitat, Proposició 1.0.1,  $m_u(\lambda_l) = \frac{m_l}{|V|}$ .

Els grafs en què la multiplicitat local de cada autovalor és la mateixa per a tots els vèrtexs s'anomenen espectralment regulars. Per tant, hem establert que els grafs distància-regulars són espectralment regulars. Més endavant retrobarem aquests grafs.

A partir de les observacions fetes fins ara, establim el següent resultat resum.

**Proposició 9.2.1** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf distància-regular de diàmetre  $d$  amb nombres d'intersecció  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$ . Sigui  $M$  la matriu d'intersecció associada i  $p_0 = 1, p_1, \dots, p_d$ , el sistema de polinomis determinat per  $M^T$ . Es compleix,*

a) Per a tot vèrtex  $u$ ,  $p_k e_u = \sum_{v \in \Gamma_k(u)} e_v$ .

b)  $\Gamma$  és espectralment regular.

c) L'espectre de  $\Gamma$  és  $\{\lambda^l \equiv \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$ , on  $\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ , són els autovalors de  $M$ , i les multiplicitats s'expressen

$$m_k = \frac{|\Gamma_d(u)|}{(-1)^k p_d(\lambda_k)} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \frac{(-1)^k}{p_d(\lambda_k)} \frac{b_0 \cdots b_{d-1}}{c_1 \cdots c_d} \frac{\pi_0}{\pi_k} \quad (0 \leq k \leq d).$$

d) Els polinomis  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots,d}$  formen el sistema ortogonal canònic per a  $(\mathcal{M}, g)$ , on  $\mathcal{M} = \{\lambda \equiv \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  i  $g_l = \frac{m_l}{|V|}$  ( $0 \leq l \leq d$ ).

**Demostració** a) i b) ja s'ha establert. De l'observació 1) anterior i de l'expressió (6.6) per a les normes dels  $p_k$ , tenim

$$p_k(\lambda) = |\Gamma_k(u)| = \frac{b_0 \cdots b_{k-1}}{c_1 \cdots c_k} \quad (k = 0, 1, \dots, d) \quad (9.5)$$

També del caràcter canònic,  $\frac{1}{g_0 \pi_0} \prod_{l=1}^d (x - \lambda_l) = p_0 + p_1 + \dots + p_d$ . Aplicant-ho a  $\lambda$  obtenim

$$\frac{1}{g_0} = |\Gamma_0(u)| + |\Gamma_1(u)| + \dots + |\Gamma_d(u)| = |V|.$$

Per tant,  $g_0 = \frac{1}{|V|}$  i de (9.2),  $m_u(\lambda_k) = g_k^u = g_k = \frac{(-1)^k \pi_0 p_d(\lambda)}{|V| \pi_k p_d(\lambda_k)}$ . Passem al nostre enunciat usant (9.5),

$$m_k = |V| m_u(\lambda_k) = (-1)^k \frac{\pi_0 p_d(\lambda)}{\pi_k p_d(\lambda_k)} = \frac{|\Gamma_d(u)|}{(-1)^k p_d(\lambda_k)} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \frac{(-1)^k}{p_d(\lambda_k)} \frac{b_0 \cdots b_{d-1}}{c_1 \cdots c_d} \frac{\pi_0}{\pi_k}.$$

L'apartat d) s'ha establert en l'observació 1) anterior.  $\square$

Podem obtenir una relació tancada entre espectre i  $|\Gamma_d(u)|$  usant la Proposició 6.3.2, en la que establíem  $p_d(\lambda_0) = \frac{\frac{1}{\pi_0^2 g_0^2}}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_l^2 g_l}}$ . Expressant els pesos en termes de les multiplicitats,  $g_l = \frac{m_l}{|V|}$ , obtenim

$$|\Gamma_d(u)| = \frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}}. \quad (9.6)$$

Des del punt de vista de tenir un graf distància-regular de diàmetre  $d$  del que coneixem els nombres d'intersecció, aquesta expressió del nombre de vèrtexs diametralment oposats a tot vèrtex del graf és irrellevant, doncs implica els passos

$$\Gamma \text{ graf distància-regular} \longrightarrow \text{Spec}(\Gamma) \longrightarrow |\Gamma_d(u)|$$

quan podríem obtenir-ho directament dels nombres d'intersecció mitjançant  $\frac{b_0 \cdots b_{d-1}}{c_1 \cdots c_d}$ . Un major interès resulta en veure (9.6) com una condició necessària, des de l'òptica de l'espectre, per al caràcter distància-regular d'un graf. Reformulem (9.6) en termes d'una proposició.

**Proposició 9.2.2** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular amb espectre  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 = \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \cdots > \lambda_d^{m_d}\}$ . Si  $\Gamma$  és distància-regular llavors, per a tot vèrtex  $u$ , es compleix  $|\Gamma_d(u)| = \frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}}$ .*

És ben conegut que el sol coneixement de l'espectre no permet decidir respecte de la distància-regularitat d'un graf. Per exemple, el 4-cub i el graf de Hoffman, Figura 5.8, són coespectrals,  $\{4^1, 2^4, 0^6, -2^4, -4^1\}$ , mentre el primer és distància-regular i no ho és el segon. Per tant una possible condició suficient per a la distància-regularitat, en la que hi participi l'espectre, ha de contenir també altra informació sobre l'estructura del graf.

Suposem un graf regular  $\Gamma$  amb  $d+1$  autovalors, tal que per a tot vèrtex es verifica  $|\Gamma_d(u)| = f(\text{Spec}(\Gamma))$ , on  $f$  avalua la part dreta de (9.6). Això equival a imposar:

- \* La condició qualitativa sobre l'espectre del graf,  $f(\text{Spec}(\Gamma)) \in \mathbb{N}$ .
- \*\* El graf  $\Gamma_d$  és regular de grau  $f(\text{Spec}(\Gamma))$ .

En el que segueix, el nostre resultat principal establirà que aquestes condicions, necessàries per a la distància-regularitat, són també suficients.

### 9.3 Extensions de la distància-regularitat

Els grafs distància-regulars foren introduïts per Biggs l'any 1971. Posteriorment el mateix autor i altres han introduït generalitzacions, debilitant la definició des de diversos punts de vista. Per nosaltres serà d'especial interès l'extensió en sentit local de la que presentarem una generalització, la *local-pseudo-distància regularitat*. Abans d'entrar en aquest propòsit oferim un resum de les extensions fins ara presentades.

- a) La definició de distància-regularitat conté la doble exigència: *i)* per a cada vèrtex la partició induïda per la distància és equitativa; *ii)* les matrius d'intersecció corresponents a cada vèrtex són idèntiques. Per tant un camí natural de generalització serà prescindir de 'per a cada vèrtex', passant a una definició local. Un graf  $\Gamma$  és *distància-regular respecte d'un vèrtex  $u$*  (equivalentment,  *$u$ -local distància-regular*) quan, essent  $\varepsilon(u)$  l'excentricitat de  $u$ , la partició  $\Gamma_k(u)$  ( $k = 0, 1, \dots, \varepsilon(u)$ ), és equitativa. En la Figura 9.3, el graf de l'esquerra és distància-regular només respecte del vèrtex  $a$  amb matriu local d'intersecció condensada 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

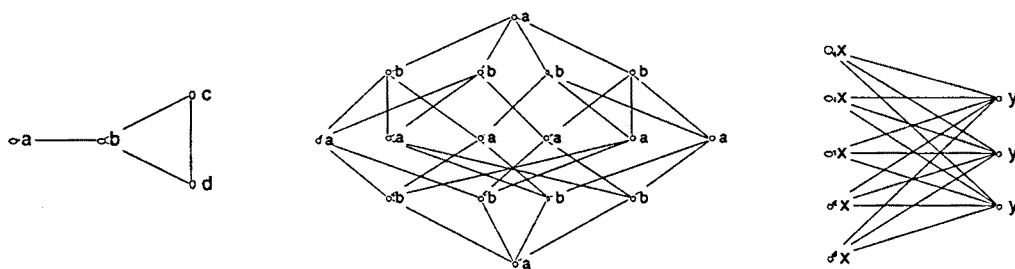


Figura 9.2: Exemples de grafs distància-regulars respecte de vèrtexs.

El graf de Hoffman és distància-regular respecte dels vèrtexs etiquetats  $a$  amb matriu d'intersecció 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 i no ho és respecte dels vèrtexs  $b$  (veure la Figura 5.8). El graf  $K_{nm}$  és distància-regular respecte tot vèrtex, però les matrius d'intersecció, essent  $n \geq 2, m \geq 2$ , són 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$
 per els vèrtexs en la part estable de  $n$  vèrtexs i 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 \\ n & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$
 per els de la part estable de  $m$  vèrtexs.

El darrer exemple prova que un graf pot ser distància-regular respecte de tot vèrtex sense ser distància-regular, en realitat sense ser ni tan sols regular. Emperò els grafs en aquesta situació tenen una estructura no massa allunyada de la distància-regularitat. Un resultat de Godsil i Shawe-Taylor [33] estableix que si  $\Gamma = (V, E)$  és  $u$ -local distància-regular per a tot  $u \in V$ , llavors bé totes les matrius locals d'intersecció coincideixen, amb el que  $\Gamma$  és distància-regular, o bé el graf és bipartit amb matrius locals d'intersecció constants sobre cada part estable del graf ( $\Gamma$  és *distància biregular*).

- b) Una presentació alternativa de la distància-regularitat, Biggs [4] o Brouwer, Cohen i Neumaier [5], de la que presentarem una prova amb la nostra metodologia és:

**Proposició 9.3.1**  $\Gamma$ , graf connex de diàmetre  $d$  amb matriu d'adjacència  $A$ , és distància-regular si i només si, per a cada  $0 \leq k \leq d$ , existeix un polinomi  $p_k$  de grau  $k$  tal que la matriu d'adjacència  $A_k$  de  $\Gamma_k$  s'expressa  $A_k = p_k(A)$ .

**Demostració** El caràcter necessari l'hem vist a la Secció 9.2. Suposem  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots,d}$ , complint l'enunciat. Com  $(\sum_{k=0}^d p_k)(A) = J$ , el graf és regular (indiquem  $\lambda$  el grau) i té  $d+1$  autovalors. De  $p_k(\lambda)j = p_k(A)j = A_k j$ , en resulta  $|\Gamma_k(u)| = p_k(\lambda)$ , per a tot  $u \in V$  i per a tot  $k$ . Fixat un vèrtex  $u$ , el producte escalar en  $\mathbb{R}_d[x]$ , definit per  $\langle p, q \rangle_u = \langle p e_u, q e_u \rangle$ , verifica  $\langle p_h, p_k \rangle_u = \langle A_h e_u, A_k e_u \rangle = |\Gamma_k(u)| \delta_{hk} = p_k(\lambda) \delta_{hk}$ . Per tant, els polinomis  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots,d}$  formen el sistema ortogonal canònic associat a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$  i, en conseqüència, notant que  $p_0 = 1, p_1 = x$ , satisfan una recurrència amb

matriu condensada  $M \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$  complint  $c_k + a_k + b_k = \lambda$  ( $0 \leq k \leq d$ ).

Considerem un vèrtex arbitrari  $u$  i  $v \in \Gamma_k(u)$ . El càlcul

$$\begin{aligned} |\Gamma(v) \cap \Gamma_{k-1}(u)| &= \langle \rho(\Gamma_{k-1}(u)), A e_v \rangle = \langle A_{k-1} e_u, A e_v \rangle = \langle x p_{k-1} e_u, e_v \rangle = \\ &= \langle b_{k-2} p_{k-2} e_u + a_{k-1} p_{k-1} e_u + c_k p_k e_u, e_v \rangle = c_k. \end{aligned}$$

Similarment s'obté  $|\Gamma(v) \cap \Gamma_k(u)| = a_k, |\Gamma(v) \cap \Gamma_{k+1}(u)| = b_k$ , el que estableix la distància-regularitat del graf.  $\square$

Des d'aquesta nova definició, un afebliment efectiu de la distància-regularitat és la supresió de la hipòtesi  $gr(p_k) = k$ . Així, Weichsel [49] defineix:  $\Gamma$  de diàmetre  $d$  és un graf *distància polinòmica* quan, per a  $0 \leq k \leq d$ , existeix  $p_k \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $A_k = p_k(A)$ . Com  $\sum_{k=0}^d p_k(A) = J$ , els grafs distància polinòmica són regulars. Aquesta extensió de la distància-regularitat és estricta. Per exemple, tot graf regular de diàmetre dos és distància polinòmica, doncs els polinomis  $p_0 = 1, p_1 = x$  i  $p_2 = H - 1 - x$ , on  $H$  és el polinomi de Hoffman, verifiquen la propietat. També, la família de polinomis  $H - p_k$  prova que el pas al complement manté el caràcter distància polinòmica.

Dirigint l'atenció al fet que en un graf distància-regular, els grafs  $\Gamma_k$  són regulars (de grau  $\frac{b_0 \cdots b_{d-1}}{c_1 \cdots c_d}$ ). Hilario i Nomura [38] defineixen un graf  $\Gamma$  connex de diàmetre  $d$  com *grau distància-regular* quan, per a  $0 \leq k \leq d$ , el graf  $\Gamma_k$  sigui regular. Aquesta generalització ho és també del caràcter distància polinòmica. En efecte, de la regularitat d'un graf distància polinòmica i de  $A_k = p_k(A)$ , resulta  $A_k j = p_k(A)j = p_k(\lambda)j$ , amb el que  $\Gamma_k$  és regular amb grau  $p_k(\lambda)$ .

## 9.4 Pseudo-distància-regularitat local

Enfocarem una extensió de la distància-regularitat a grafs connexos no necessàriament regulars. En la situació distància-regular la matriu d'intersecció, a la vegada matriu de recurrència del sistema de polinomis distància, té l'agradable propietat de que les columnes són de suma constant (el grau del graf). Aquest fet es tradueix, Secció 9.2, en poder veure els polinomis distància com a sistema ortogonal canònic per a la malla dels autovalors del graf. De manera natural surgeix conservar les igualtats  $c_k + a_k + b_k = \lambda$  en el context de grafs no necessàriament regulars. Conseqüentment ens veiem conduïts, via la generalització

de particions equitatives presentada en la Secció 9.1, a modificar la definició de distància-regularitat en el sentit de substituir el caràcter equitatiu de la partició associada a un vèrtex pel caràcter pseudo-equitatiu. Recordem que, per a un graf  $\Gamma = (V, E)$  amb màxim autovalor  $\lambda$  i  $\nu = (\nu_u)_{u \in V}$  autovector associat de mínima component la unitat, l'única funció de pes  $g$  sobre  $V$  que fa la densitat d'adjacència  $\frac{1}{g(u)} \sum_{v \in \Gamma(u)} g(v)$  constant per a tot vèrtex, és la definida per  $u \mapsto \nu_u$ . Llavors  $\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u)} \nu_v = \lambda$ , per a tot  $u \in V$ .

Donat el graf  $\Gamma = (V, E)$ , considerem, associada a un subconjunt de vèrtexs  $C$  no buit, la descomposició de  $V$  segons la distància a  $C$ . Queda definida la partició  $\mathcal{P} \equiv \{C \equiv C_0, C_1, \dots, C_\varepsilon\}$ , on  $C_k = \{u \in V : \partial(u, C) = k\}$  i  $\varepsilon \equiv \varepsilon_C$  és l'excentricitat de  $C$ . Direm que  $\mathcal{P}$  és la *partició induïda* per  $C$ . Amb les nocions introduïdes en la Secció 9.1 donem les següents definicions.

**Definició 9.4.1** Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$  i un subconjunt no buit  $C$  de  $V$ , direm que  $\Gamma$  és *C-local distància-regular* quan la partició induïda per  $C$  sigui equitativa.

Aquesta definició apareix en Brouwer, Cohen i Neumaier [5] en el cas en que  $C$  es redueix a un vèrtex, i en Godsil [31] per a  $C$  arbitrari. La introducció de les particions pseudo-equitatives fa natural la següent definició.

**Definició 9.4.2** Donat un graf  $\Gamma = (V, E)$  i un subconjunt no buit  $C$  de  $V$ , direm que  $\Gamma$  és *C-local pseudo-distància-regular* quan la partició induïda per  $C$  sigui pseudo-equitativa.

Segons la Proposició 9.1.3, un graf  $C$ -local distància-regular és també  $C$ -local pseudo-distància-regular. El recíproc no és cert i serveix com exemple el graf introduït en l'exemple 9.1.4.

**Exemple 9.4.3** El graf  $P_3 \times P_3$  té autovalor màxim  $\lambda = 2\sqrt{2}$ . El vector  $\nu$  té components les indicades en la Figura 5.1, que reproduïm,

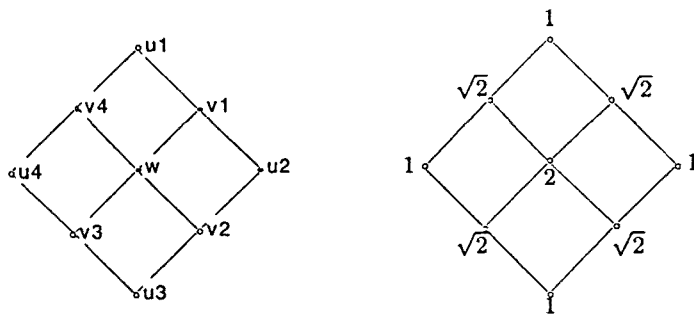


Figura 9.3:  $P_3 \times P_3$ , exemple de graf  $u$ -local pseudo-distància-regular.

És immediat d'observar la  $u$ -local pseudo-distància-regular per els vèrtexs  $u_k$  ( $1 \leq k \leq 4$ ) i  $w$ .

Posem-nos en el supòsit que el nostre graf és  $C$ -local pseudo-distància-regular. En aquest cas la matriu quocient  $\tilde{A}$  és tridiagonal, doncs si  $u \in C_h$  els conjunts  $\Gamma(u) \cap C_k$  són buits per a  $k < h - 1$  i per a

$k > h + 1$ . És convenient renombrar els elements  $\bar{a}_{hk}$  per a  $-1 \leq h - k \leq 1$  amb les notacions:

$$\begin{aligned} c_k = \bar{a}_{k,k-1} &= \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_{k-1}} \nu_v \\ a_k = \bar{a}_{k,k} &= \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_k} \nu_v \\ b_k = \bar{a}_{k,k+1} &= \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_{k+1}} \nu_v \end{aligned} \quad (9.7)$$

on  $u$  és qualsevol vèrtex de  $C_h$  i  $h = 0, 1, \dots, \varepsilon$ . És natural batejar aquesta matriu com a *C-local matriu de pseudo-intersecció*. La definició anterior no té sentit en els casos  $c_0$  i  $b_\varepsilon$ . És útil, per uniformitzar algunes expressions, definir-los per zero i incloure'ls com a nombres d'intersecció. És natural batejar aquesta matriu com a *C-local matriu de pseudo-intersecció*. Per fer-ne una lectura compacta, resumim la informació que proporciona en una matriu  $3 \times (\varepsilon + 1)$  que anomenarem *matriu condensada* associada a  $\Gamma$  i  $C$ . Com ja hem fet anteriorment, indicarem amb el mateix símbol,  $M_C$ , la *C-local matriu de pseudo-intersecció* i la matriu condensada.

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{\varepsilon-1} & a_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_\varepsilon & a_\varepsilon \end{pmatrix} \equiv M_C \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{\varepsilon-1} & c_\varepsilon \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{\varepsilon-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Observem, traduint la Proposició 9.1.3(b), que els elements de cada columna de la matriu  $M_C$  sumen  $\lambda$ . L'element central de la columna número  $k$  dona la densitat d'autoadjacència de  $C_k$ , l'element superior mesura la de  $C_k$  vers la capa "de sobre" i l'inferior la de  $C_k$  vers la capa "de sota". Apliquem les qüestions vistes per particions pseudo-equitatives al context actual.

Notant que les columnes de  $P$  són ara  $\rho C_0, \rho C_1, \dots, \rho C_\varepsilon$ , al llegir la igualtat  $AP = P\bar{A}$  per la columna  $k$ -èsima es té:

$$A\rho C_k = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_{k-1} \\ a_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{k-1}\rho C_{k-1} + a_k\rho C_k + c_{k+1}\rho C_{k+1} \quad (0 \leq k \leq \varepsilon) \quad (9.9)$$

on, per uniformitzar la notació, hem introduït els conjunts  $C_{-1}$  i  $C_{\varepsilon+1}$  definits trivialment com el conjunt

buit. En el llenguatge de polinomis operant, a través de  $A$ , sobre l'espai de vèrtexs, desglossem (9.9) en

$$\begin{cases} x\rho C_0 & = & a_0\rho C_0 & + & c_1\rho C_1 \\ x\rho C_1 & = & b_0\rho C_0 & + & a_1\rho C_1 & + & c_2\rho C_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x\rho C_{\varepsilon-1} & = & b_{\varepsilon-2}\rho C_{\varepsilon-2} & + & a_{\varepsilon-1}\rho C_{\varepsilon-1} & + & c_\varepsilon\rho C_\varepsilon \\ x\rho C_\varepsilon & = & b_{\varepsilon-1}\rho C_{\varepsilon-1} & + & a_\varepsilon\rho C_\varepsilon \end{cases} \quad (9.10)$$

De la no anul·lació dels  $c_k$ , derivada del caràcter connex del graf, en resulta, per recursió, que existeix un polinomi de grau  $k$  tal que  $\rho C_k = r_k \rho C_0$ , per a cada  $k = 0, 1, \dots, \varepsilon$ . Notem que per ser l'excentricitat d'un conjunt estrictament menor que el nombre dels seus autovalors locals,  $\varepsilon \leq d_C$  (Corollari 2.1.2), l'aplicació  $\mathbb{R}_\varepsilon[x] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida per  $p \mapsto p\rho C$  és injectiva. Per tant de (9.10) es deriven les relacions polinòmiques:

$$\begin{cases} xr_0 & = & a_0r_0 & + & c_1r_1 \\ xr_1 & = & b_0r_0 & + & a_1r_1 & + & c_2r_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ xr_{\varepsilon-1} & = & b_{\varepsilon-2}r_{\varepsilon-2} & + & a_{\varepsilon-1}r_{\varepsilon-1} & + & c_\varepsilon r_\varepsilon \\ xr_\varepsilon & = & b_{\varepsilon-1}r_{\varepsilon-1} & + & a_\varepsilon r_\varepsilon & + & r \end{cases} \quad (9.11)$$

on  $r$  és un polinomi de grau  $\varepsilon + 1$  que s'anulla sobre  $\rho C$ . Això només serà possible si  $\varepsilon + 1 \geq d_C + 1$ , és a dir  $\varepsilon = d_C$ . Per tant,

**Lema 9.4.4** *Si  $\Gamma$  és  $C$ -local pseudo-distància-regular, el conjunt  $C$  és extremal.*

Som ara en disposició d'establir el nostre resultat principal sobre pseudo-distància-regularitat local.

**Teorema 9.4.5** *Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  i un conjunt no buit  $C \subset V$ . Sigui  $\{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_d^{m_d}\}$  l'espectre local de  $C$ . Llavors,  $\Gamma$  és  $C$ -local pseudo-distància-regular si i només si es compleix la igualtat*

$$\|\rho \Gamma_d(C)\|^2 = \frac{\frac{1}{m_0^2 \pi_0^2}}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}} \|\rho C\|^2,$$

on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\mu_l - \mu_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ). A més, la  $C$ -local matriu de pseudo-intersecció condensada coincideix amb la matriu de recurrència condensada del sistema ortogonal canònic associat a  $\text{Spec}(C)$ .

**Demostració** Suposem que  $\Gamma$  és  $C$ -local pseudo-distància-regular. Per el Lema 9.4.4 el conjunt  $C$  és extremal i hem observat, en (9.10), l'existència de  $r_k$ , de grau  $k$ , tal que  $\rho C_k = r_k \rho C_0$ , per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ . Amb això entrem en les equivalències del Teorema 8.0.19 a través de l'afirmació (2). Per tant,  $\rho \Gamma_d(C)$  i l'espectre local de  $C$  verifiquen la igualtat numèrica del nostre enunciat.

Recíprocament, el mateix Teorema 8.0.19 estableix que el sistema ortogonal canònic  $p_0, p_1, \dots, p_d$ , associat a  $\text{Spec}(C)$  compleix  $p_k \rho C = \rho C_k$ , per a tot  $k = 0, 1, \dots, d$ . Sigui

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$



la matriu de recurrència condensada del sistema  $\{p_k\}_{0 \leq k \leq d}$ . Provarem que  $\Gamma$  és  $C$ -local pseudo-distància-regular, i que  $M$  és la  $C$ -local matriu de pseudo-intersecció condensada. Considerem la partició,  $C_0, C_1, \dots, C_d$ , de  $V$  generada per  $C$ . Sigui  $u$  un vèrtex arbitrari de  $C_k$ . Llavors,

$$\langle Ae_u, \rho C_{k-1} \rangle = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_{k-1}} \nu_v, \quad \langle Ae_u, \rho C_k \rangle = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_k} \nu_v, \quad \langle Ae_u, \rho C_{k+1} \rangle = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_{k+1}} \nu_v. \quad (9.12)$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \langle Ae_u, \rho C_{k-1} \rangle &= \langle xe_u, p_{k-1} \rho C \rangle = \langle e_u, xp_{k-1} \rho C \rangle = \langle e_u, (b_{k-2} p_{k-2} + a_{k-1} p_{k-1} + c_k p_k) \rho C \rangle = \\ &= \langle e_u, b_{k-2} \rho C_{k-2} + a_{k-1} \rho C_{k-1} + c_k \rho C_k \rangle = c_k \langle e_u, \rho C_k \rangle = c_k \nu_u; \\ \langle Ae_u, \rho C_k \rangle &= \langle xe_u, p_k \rho C \rangle = \langle e_u, xp_k \rho C \rangle = \langle e_u, (b_{k-1} p_{k-1} + a_k p_k + c_{k+1} p_{k+1}) \rho C \rangle = \\ &= \langle e_u, b_{k-1} \rho C_{k-1} + a_k \rho C_k + c_{k+1} \rho C_{k+1} \rangle = a_k \langle e_u, \rho C_k \rangle = a_k \nu_u; \\ \langle Ae_u, \rho C_{k+1} \rangle &= \langle xe_u, p_{k+1} \rho C \rangle = \langle e_u, xp_{k+1} \rho C \rangle = \langle e_u, (b_k p_k + a_{k+1} p_{k+1} + c_{k+2} p_{k+2}) \rho C \rangle = \\ &= \langle e_u, b_k \rho C_k + a_{k+1} \rho C_{k+1} + c_{k+2} \rho C_{k+2} \rangle = b_k \langle e_u, \rho C_k \rangle = b_k \nu_u. \end{aligned}$$

Imposant les igualtats respectives amb (9.12), obtenim

$$\frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_{k-1}} \nu_v = c_k, \quad \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_k} \nu_v = a_k, \quad \frac{1}{\nu_u} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap C_{k+1}} \nu_v = b_k$$

per a tot vèrtex  $u \in C_k$  i per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ . Per tant la partició induïda per la distància a  $C$  és pseudo-equitativa, amb matriu d'intersecció condensada  $M$ , i  $\Gamma$  és  $C$ -local pseudo-distància-regular.  $\square$

Podem aplicar aquest resultat a obtenir una caracterització de la  $C$ -local distància-regularitat. Via la Proposició 9.1.3 equival a que el graf sigui  $C$ -local pseudo-distància-regular més el caràcter constant de  $u \mapsto \nu_u$  sobre les capes,  $\nu_u = \nu^k$  per a tot  $u \in C_k$  ( $0 \leq k \leq d$ ). En particular,  $\|\rho \Gamma_d(C)\|^2 = (\nu^d)^2 |\Gamma_d(C)|$  i  $\|\rho C\|^2 = (\nu^0)^2 |C|$ . El Teorema 9.4.5 estableix la següent equivalència de la  $C$ -local distància-regularitat.

**Teorema 9.4.6** Considerem  $\Gamma = (V, E)$  i  $\emptyset \neq C \subset V$ . Sigui  $\{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_d^{m_d}\}$  l'espectre local de  $C$ . Llavors,  $\Gamma$  és  $C$ -local distància-regular si i només si les components de  $\nu$  són constants sobre els conjunts  $C_0, C_1, \dots, C_d$  (indiquem  $\nu^k$  la corresponent als vèrtexs de  $C_k$ ) i es compleix la igualtat

$$|\Gamma_d(C)| = \frac{\left(\frac{\nu^0}{m_0 \pi_0 \nu^d}\right)^2}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}} |C|,$$

on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\mu_l - \mu_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ).

Colocant-nos en el cas regular, els caràcters  $C$ -local distància-regular i  $C$ -local pseudo-distància-regular són coincidents. Llavors els Teoremes 9.4.5 i 9.4.6 són equivalents i tenint en compte  $\nu^0 = \nu^d = 1$  i  $m_0 = \frac{|C|}{|V|}$ , s'obté la formulació següent.

**Corollari 9.4.7** Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular. Considerem  $C \subset V$  no buit i sigui  $\text{Spec}(C) = \{\lambda^{m_0} \equiv \mu_0^{m_0} > \mu_1^{m_1} > \dots > \mu_d^{m_d}\}$ . Llavors,  $\Gamma$  és  $C$ -local distància-regular si i només si es compleix la igualtat

$$\frac{|\Gamma_d(C)|}{|V|} \frac{|C|}{|V|} = \frac{1}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}},$$

on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\mu_l - \mu_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ).

## 9.5 Una caracterització de la distància-regularitat

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$ , sigui  $A$  la matriu d'adjacència i  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 \equiv \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$  el seu espectre. Particularitzant la definició d'espectre local a conjunts formats per un sol vèrtex, la descomposició espectral  $z_u = z_0^u + z_1^u + \dots + z_d^u$ , amb  $z_k^u \in \text{Ker}(A - \lambda_k I)$ , permet l'assignació  $(u, \lambda_k) \mapsto m_u(\lambda_k) = \|z_k^u\|^2$ , de la  $u$ -local multiplicitat de l'autovalor  $\lambda_k$ . Recordem, de la definició i la Proposició 1.0.1, que les vèrtex-local multiplicitats compleixen  $\sum_{k=0}^d m_u(\lambda_k) = 1$ ,  $\sum_{u \in V} m_u(\lambda_k) = m_k$ . També, de (1.5),  $m_u(\lambda) = \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2}$ .

Direm que  $\Gamma = (V, E)$  és *espectralment regular* quan, per a tot  $k = 0, 1, \dots, d$ , la multiplicitat local  $m_u(\lambda_k)$  sigui independent de  $u \in V$ . En forma equivalent, pot definir-se per l'acompliment, per a cada  $k = 0, 1, \dots, d$ , de la igualtat  $m_u(\lambda_k) = \frac{m_k}{|V|}$ , per a tot  $u \in V$ . En primer lloc notem que la regularitat és condició necessària per a la regularitat espectral, doncs, de  $m_u(\lambda) = \frac{\nu_u^2}{\|\nu\|^2} = \frac{1}{|V|}$  per a tot  $u$ , se'n desprèn  $\nu = j$ . Hem vist a la Secció 9.2 que els grafs distància-regulars són espectralment regulars, però el recíproc no és cert. Un exemple, subministrat en Godsil [31], el proporciona el graf de la Figura 9.4. La visió del graf des del vèrtex  $u$  evidencia que no és distància-regular.

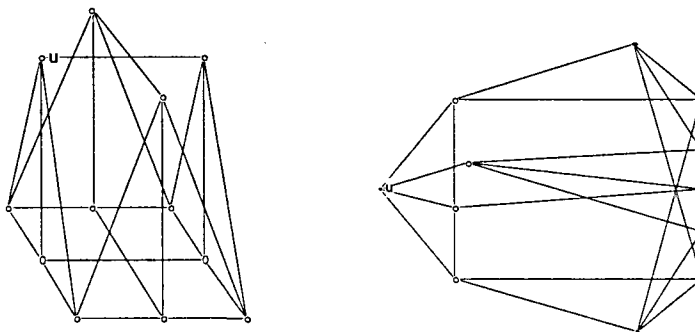


Figura 9.4: Graf espectralment regular no distància-regular.

Dues caracteritzacions conegudes de la regularitat espectral són:

- El caràcter *camí-regular*, definit quan, per a tot  $k$ , el nombre de camins tancats de longitud  $k$  que passen per un vèrtex és el mateix per a tots els vèrtexs del graf. Proves directes de l'equivalència amb la regularitat espectral s'estableixen en Delorme i Tillich [18] i en Fiol i Garriga [22].
- Els grafs  $\Gamma \setminus \{u\}$ , resultat de negligir un vèrtex, són coespectrals per a tot  $u \in V$ . Herndon i Ellzey [37] estableixen l'equivalència amb la regularitat espectral. L'equivalència amb la camí regularitat es deu a Godsil i McKay [32].

El nostre propòsit és establir el recíproc de la Proposició 9.2.2, és a dir, partint de que el graf  $\Gamma = (V, E)$  verifica les hipòtesis

$$(a) \Gamma \text{ és regular} \quad (b) |\Gamma_d(u)| = \frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{\tilde{m}_l \pi_l^2}} \quad (\forall u \in V), \quad (9.13)$$

tractarem d'establir el caràcter distància-regular. Introduïm, per a cada autovalor, la *multiplicitat mitjana* per  $\tilde{m}_k = \frac{1}{|V|} m_k$ . Notem que  $\tilde{m}_0 = \frac{1}{|V|}$  i  $\sum_{k=0}^d \tilde{m}_k = 1$ . Ara la condició (b) pot llegir-se

$$|\Gamma_d(u)| = \frac{\frac{1}{\pi_0^2 \tilde{m}_0^2}}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\tilde{m}_l \pi_l^2}} \quad (\forall u \in V). \quad (9.14)$$

Si considerem el sistema ortogonal canònic  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0,1,\dots,d}$ , corresponent a  $(\mathcal{M}, \tilde{m})$ , on  $\mathcal{M} = \{\lambda \equiv \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  i  $\tilde{m}$  és la funció de pesos normalitzada  $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_d)$ , la banda dreta de (9.14) és l'expressió (6.17) de  $\tilde{p}_d(\lambda)$ . Per tant, podem reescriure (9.13) en la forma equivalent

$$(a') \Gamma \text{ és regular} \quad (b') \tilde{p}_d(\lambda) = |\Gamma_d(u)| \quad (\forall u \in V). \quad (9.15)$$

Si haguéssim establert que  $\Gamma$  és espectralment regular, sabríem que les funcions normalitzades de pesos  $m_u = (m_u(\lambda_0), m_u(\lambda_1), \dots, m_u(\lambda_d))$  són idèntiques per a tot  $u \in V$  i coincideixen amb  $\tilde{m}$ . En conseqüència, el sistema ortogonal canònic corresponent a l'espectre local de cada vèrtex seria constant i igual a  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0,1,\dots,d}$ . El supòsit (b') ens col·locaria en la tercera de les condicions equivalents del Teorema 8.0.19 i, per tant, es compliria

$$\tilde{p}_k e_u = \tilde{p}_k(\rho u) = \rho \Gamma_k(u) = \sum_{\partial(v,u)=k} e_v, \quad \text{per a tot } u \in V.$$

Per tant,  $\tilde{p}_k(A) = A_k$ , per a  $0 \leq k \leq d$ . Segons la Proposició 9.3.1 aquesta és una caracterització alternativa a la definició, de la distància-regularitat de  $\Gamma$ . Acabarem, doncs, si provem que (9.15)(a') i (9.15)(b') impliquen la regularitat espectral.

**Proposició 9.5.1** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular. Suposem que el polinomi  $\tilde{p}_d$ , polinomi terminal del sistema ortogonal canònic associat a  $(\mathcal{M}, \tilde{m})$ , compleix*

$$\tilde{p}_d(\lambda) = |\Gamma_d(u)| \quad \text{per a tot } u \in V.$$

*Lavors,  $\Gamma$  és espectralment regular.*

**Demostració** En primer lloc notem que per la hipòtesi i ser  $\tilde{p}_d(\lambda) = \frac{\frac{1}{\pi_0^2 \tilde{m}_0^2}}{\sum_{l=0}^d \frac{1}{\tilde{m}_l \pi_l^2}} > 0$ , l'excentricitat de tot vèrtex és  $d$ , amb el que la malla  $u$ -local d'autovalors, per a tot  $u \in V$ , és  $\mathcal{M}$ . Considerem-els sistemes de polinomis, associats a  $(\mathcal{M}, \tilde{m})$ ,  $\{\tilde{p}_k^\sigma\}_{k=0,1,\dots,d}$  i el maximal  $\{\tilde{Q}_k\}_{k=0,1,\dots,d}$ . Notem de la Definició 6.2.3 i de  $\tilde{m}_0 = \frac{1}{|V|}$ , la igualtat

$$\tilde{p}_d^\sigma(\lambda) = |V|.$$

Similarment, i per a cada  $u \in V$ , d'acord amb la feina feta en el Capítol 7, considerem el producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$  associat a  $(\mathcal{M}, m_u)$ , el sistema ortogonal canònic  $\{p_k^u\}_{k=0,1,\dots,d}$ , els polinomis  $\{p_k^{u\sigma} = p_0^u + p_1^u + \dots + p_k^u\}_{k=0,1,\dots,d}$  i el sistema de polinomis  $u$ -locals d'adjacència  $\{Q_k^u\}_{k=0,1,\dots,d}$ . Usarem, Proposició 7.2.1 i Proposició 7.2.4, que  $\|Q_k^u\|_u = 1$  i que, per a tot  $p \in \mathbb{R}_k[x]$  amb  $\|p\|_u = 1$ , es compleix

$$p(\lambda) \leq Q_k^u(\lambda) \leq \|\rho N_k^u\| \quad (9.16)$$

ja que el graf és regular. Considerem, en particular,  $k = d - 1$  i fem el càlcul

$$\tilde{Q}_{d-1}(\lambda) = \sqrt{\tilde{p}_{d-1}^\sigma(\lambda)} = \sqrt{\tilde{p}_d^\sigma(\lambda) - \tilde{p}_d(\lambda)} = \sqrt{|V| - |\Gamma_d(u)|} = \|\rho N_{d-1}^u\|.$$

En conseqüència,  $\|\tilde{Q}_{d-1}\|_u \geq 1$ , ja que en altre cas el polinomi  $p = \frac{1}{\|\tilde{Q}_{d-1}\|_u} \tilde{Q}_{d-1}$ , no verificaria (9.16). El càlcul

$$\begin{aligned} |V| &\leq \sum_{u \in V} \|\tilde{Q}_{d-1}\|_u^2 = \sum_{u \in V} \sum_{l=0}^d m_u(\lambda_l) \tilde{Q}_{d-1}^2(\lambda_l) = \sum_{l=0}^d \tilde{Q}_{d-1}^2(\lambda_l) \sum_{u \in V} m_u(\lambda_l) = \\ &= \sum_{l=0}^d m(\lambda_l) \tilde{Q}_{d-1}^2(\lambda_l) = |V| \sum_{l=0}^d \tilde{m}_l \tilde{Q}_{d-1}^2(\lambda_l) = |V| \|\tilde{Q}_{d-1}\|_u^2 = |V|, \end{aligned}$$

prova  $\|\tilde{Q}_{d-1}\|_u = 1$  i, per la unicitat del polinomi  $u$ -local d'adjacència,  $Q_{d-1}^u = \tilde{Q}_{d-1}$ , per a tot  $u \in V$ . També, per a tot vèrtex,  $p_d^{u\sigma} = \frac{1}{m_u(\lambda)\pi_0} \prod_{l=1}^d (x - \lambda_l) = \frac{|V|}{\pi_0} \prod_{l=1}^d (x - \lambda_l) = \tilde{p}_d^\sigma$ . Per tant,

$$p_d^u = p_d^{u\sigma} - p_{d-1}^{u\sigma} = \tilde{p}_d^\sigma - Q_{d-1}^u(\lambda) Q_{d-1}^u = \tilde{p}_d^\sigma - \tilde{Q}_{d-1}(\lambda) \tilde{Q}_{d-1} = \tilde{p}_d^\sigma - \tilde{p}_{d-1}^\sigma = \tilde{p}_d.$$

Com que la funció de pesos, per a una malla donada s'expressa en termes del darrer polinomi del sistema canònic, (6.18), per a cada autovalor les  $u$ -multiplicitats locals són iguals, per a tot  $u \in V$ .  $\square$

Estem ara en disposició d'establir el nostre resultat principal. De la Proposició 9.5.1 i els comentaris que la precedeixen, resulta que les condicions (a') i (b') donades en (9.15), necessàries per a la distància-regularitat segons la Proposició 9.2.2, són també condicions suficients. Queda establerta, per tant, la següent caracterització de la distància-regularitat.

**Teorema 9.5.2** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular i  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda^1 \equiv \lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$  el seu espectre. El graf  $\Gamma$  és distància-regular si i només si*

$$\Gamma_d \text{ és regular amb grau } \frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}},$$

on  $\pi_l = \prod_{i=0,1,\dots,d, i \neq l} |\lambda_l - \lambda_i|$  ( $l = 0, 1, \dots, d$ ).

## Capítol 10

# Aplicacions de la caracterització espectral

### 10.1 Grafs $P$ -frontera i distància-regularitat

Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$  distància-regular 2-antipodal. Sigui  $A$  la matriu d'adjacència i  $\mathcal{M} = \{\lambda \equiv \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  els seus autovalors. De la distància-regularitat se'n despren que el diàmetre del graf és espectralment màxim ( $D = d$ ) i que tot vèrtex és diametral. En llenguatge de la Secció 5.5 el graf  $\Gamma$  és extremal i diametral. Usant, per exemple, la Proposició 5.5.8 per a  $r = 2$ , les multiplicitats són  $m_k = \frac{\pi_0}{\pi_k}$  ( $0 \leq k \leq d$ ), d'on  $|V| = \sum_{k=0}^d m_k = \sum_{k=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_k} = 1 + P(\lambda)$ . Per tant, el graf és  $P$ -frontera. Establím ara la següent caracterització.

**Teorema 10.1.1** *Un graf  $\Gamma = (V, E)$  és distància-regular 2-antipodal si i només si és  $P$ -frontera extremal i diametral.*

**Demostració** El comentari precedent estableix la necessitat. Suposem ara el graf  $P$ -frontera extremal i diametral. En primer lloc, el fet que tot vèrtex sigui diametral implica que el graf és regular, amb el que ser  $P$ -frontera correspon a la igualtat  $\sum_{l=1}^d \frac{\pi_l}{\pi_1} = P(\lambda) = |V| - 1$ . El caràcter  $P$ -frontera extremal estableix, Corol·lari 5.5.1, que l'antipodal de tot vèrtex diametral es redueix a un vèrtex. Per tant, el graf  $\Gamma_d$  és ara la unió de  $\frac{|V|}{2}$  còpies de  $K_2$ , amb el que  $\Gamma_d$  és regular de grau 1 i  $\Gamma$  és 2-antipodal. D'altra banda, les multiplicitats són, Proposició 5.5.6,  $m_k = \frac{\pi_0}{\pi_k}$ . Amb el càlcul

$$\frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}} = \frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{\pi_0 \pi_l}} = \frac{|V|}{\sum_{l=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_l}} = 1,$$

el Teorema 9.5.2 estableix la distància-regularitat. ☒

Repetim el mateix enunciat sense la nomenclatura de grafs frontera i amb aspecte més intern a la distància-regularitat.

**Proposició 10.1.2** *Un graf  $\Gamma = (V, E)$  és distància-regular 2-antipodal si i només si es compleixen les tres condicions següents:*

- (a) *Tot vèrtex és extrem d'un diàmetre,*
- (b) *Té  $d + 1 = D(\Gamma) + 1$  autovalors i*
- (c)  $\sum_{l=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_l} = |V|.$

Usant el Corollari 5.5.1 la matriu d'adjacència de  $\Gamma_d$  és  $A_D = \overline{P}(A)$ , on  $\overline{P}$  és el polinomi alternant (grau  $d$ ) associat a  $\mathcal{M}$ . Els polinomis distància  $p_0, p_1, \dots, p_d$ , de grau el subíndex i complint  $p_k(A) = A_k$ , matriu d'adjacència de  $\Gamma_k$ , són el sistema ortogonal canònic sobre la malla  $\mathcal{M}$  amb polinomi terminal  $p_d = \overline{P}$ . Amb això som a la jurisdicció de la Secció 6.8 on hem obtingut una forma explícita dels polinomis  $p_k$ . Traduint al nostre cas la Proposició 6.8.1 i el Corollari 6.8.3 on  $H_r$  i  $\tilde{H}_r$  són els determinants introduïts en (6.25) i en la Proposició 6.8.2, obtenim

**Corollari 10.1.3** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf distància-regular 2-antipodal i  $\mathcal{M} = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  els seus autovalors. Llavors,*

- (a) *Els polinomis distància i les matrius d'adjacència de  $\Gamma_r$  ( $0 \leq r \leq d$ ), s'expressen*

$$A_r = p_r(A) = |V| \left( \frac{\tilde{H}_{r+1}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_d)}{\tilde{H}_{r+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d)} - \frac{\tilde{H}_r(x, \lambda_1, \dots, \lambda_d)}{\tilde{H}_r(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d)} \right) (A);$$

- (b) *Els elements de la matriu d'intersecció, en termes dels autovalors, són*

$$c_r = \frac{H_{r-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) H_{r+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d)}{H_r(\lambda_1, \dots, \lambda_d) H_r(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d)}, \quad b_r = c_{d-r}, \quad a_r = \lambda - b_r - c_r \quad (r = 0, 1, \dots, d).$$

## 10.2 Grafs distància-regulars $r$ -antipodals

Per a un graf  $\Gamma = (V, E)$  amb  $d + 1$  autovalors, el seu eventual caràcter distància-regular 2-antipodal pot caracteritzar-se per una descripció estructural del graf  $\Gamma_d$  vinculada amb els autovalors del graf. Observem que si  $\Gamma$  és distància-regular 2-antipodal, llavors  $\Gamma_d$  és unió de còpies de  $K_2$  en nombre,

Proposició 10.1.2,  $\frac{|V|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_l}$ . Recíprocament, si  $\Gamma_d$  té aquesta estructura, el graf és extremal i

diametral. A més,  $|V| = \sum_{l=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_l} = P(\lambda) + 1$ , amb el que  $\Gamma$  és  $P$ -frontera. Del Teorema 10.1.1 obtenim el caràcter distància-regular 2-antipodal de  $\Gamma$ . Hem establert:

**Teorema 10.2.1** *Sigui  $\Gamma$  un graf i  $\{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  el seus autovalors. Llavors,  $\Gamma$  és distància-regular 2-antipodal si i només si  $\Gamma_d$  és unió de  $\frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \frac{\pi_0}{\pi_l}$  còpies de  $K_2$ .*

**Exemple 10.2.2** Considerem  $\Gamma$  el graf icosaedre. Els autovalors són  $5, \sqrt{5}, -1, -\sqrt{5}$ , i  $\Gamma_3$  és unió de 6 còpies de  $K_2$ .

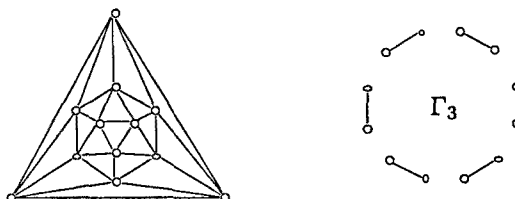


Figura 10.1: Exemple de deducció de distància-regularitat 2-antipodal.

Ara  $\pi_0 = 120, \pi_1 = 40, \pi_2 = 24, \pi_3 = 40$ , amb el que  $\frac{1}{2} \sum_{l=0}^3 \frac{\pi_l}{\pi_1} = 6$ . Aplicant el Teorema 10.2.1 deduiríem que l'icosaedre és distància-regular 2-antipodal.

El Teorema 10.2.1 ha estat generalitzat, aquest estiu passat, a grafs  $r$ -antipodals per Fiol [21], amb l'enunciat:

“ $\Gamma$  regular és distància-regular  $r$ -antipodal si i només si  $\Gamma_d$  és unió de  $\frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \frac{\pi_l}{\pi_1}$  còpies de  $K_r$ ”.

La força d'aquest resultat és la part suficient de la condició, que conté una forta propietat estructural de  $\Gamma_d$  lligada només amb els autovalors, no amb les multiplicitats. Un punt a estudiar és l'eventual omisió del caràcter regular o la presentació d'un exemple que mostri la necessitat de la regularitat de  $\Gamma$ , per resoldre la diferència amb el Teorema 10.2.1.

Els dos resultats que presentem a continuació són de caire diferent entre si. El primer caracteritza la  $r$ -antipodalitat d'un graf distància-regular a través de l'expressió de les multiplicitats en termes de  $r$  i els autovalors. L'altre descriu la distància-regularitat  $r$ -antipodal en termes d'una condició sobre  $\Gamma_d$  que si bé estructuralment és més feble, fa intervenir amb els autovalors una exigència sobre les multiplicitats.

**Teorema 10.2.3** Considerem  $\Gamma$  un graf distància-regular. Sigui  $\text{Spec}(\Gamma) = \{\lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$ . Llavors,  $\Gamma$  és  $r$ -antipodal si i només si les multiplicitats són  $m_k = \frac{\pi_0}{\pi_k}$  per a  $k$  parell,  $m_k = (r-1) \frac{\pi_0}{\pi_k}$  per a  $k$  imparell.

**Demostració** Essent  $\Gamma = (V, E)$  distància-regular  $r$ -antipodal estem en la jurisdicció de la Proposició 5.5.8, amb el que les multiplicitats són les enunciatedes. Estudiem ara el caràcter suficient de la condició. Introduïm  $s = \frac{|V|}{r}$  i el símbol  $\delta_k$ , definit 1 si  $k$  és parell i  $r-1$  si  $k$  és imparell. Siguin  $p_0, p_1, \dots, p_d$  els polinomis distància, sistema ortogonal canònic per a la malla  $\mathcal{M}$  d'autovalors del graf i funció de pesos normalitzada  $g = \left(\frac{m_0}{|V|}, \dots, \frac{m_k}{|V|}, \dots, \frac{m_d}{|V|}\right) = \left(\frac{1}{|V|}, \dots, \frac{\pi_0 \delta_k}{|V| \pi_k}, \dots, \frac{\pi_0 \delta_d}{|V| \pi_d}\right)$ . De l'expressió de les multiplicitats i el Lema 1.0.2,

$$\frac{|V|}{\pi_0} = \frac{1}{\pi_0} \sum_{k=0}^d m_k = \sum_{k \text{ parell}} \frac{1}{\pi_k} + (r-1) \sum_{k \text{ senar}} \frac{1}{\pi_k} = r \sum_{k \text{ parell}} \frac{1}{\pi_k} = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^d \frac{1}{\pi_k},$$

obtenint

$$\sum_{k=0}^d \frac{1}{\pi_k} = \frac{2|V|}{r\pi_0} \quad (10.1)$$

Les components de la funció de pesos, recordant (9.2), són proporcionals a  $(-1)^k \frac{1}{\pi_k p_d(\lambda_k)}$ . Per tant,

$\frac{\delta_k}{\pi_k} = (-1)^k \frac{\xi}{\pi_k p_d(\lambda_k)}$ , essent  $\xi$  una constant de proporcionalitat. Tenim

$$p_d(\lambda_k) = (-1)^k \frac{\xi}{\delta_k}, \quad \forall \lambda_k \in \mathcal{M}. \quad (10.2)$$

Per calcular  $\xi$  usem el caràcter canònic dels  $p_k$ . En particular,

$$\xi = p_d(\lambda) = \langle p_d, p_d \rangle = \sum_{k=0}^d \frac{\pi_0}{|V|} \frac{\delta_k}{\pi_k} (p_d(\lambda_k))^2 = \xi^2 \frac{\pi_0}{|V|} \sum_{k=0}^d \frac{1}{\delta_k \pi_k}, \quad \text{d'on} \quad \xi = \frac{|V|}{\pi_0} \frac{1}{\sum_{k=0}^d \frac{1}{\delta_k \pi_k}}.$$

Calculem aquesta darrera suma usant (10.1),

$$\sum_{k=0}^d \frac{1}{\delta_k \pi_k} = \sum_{k \text{ parell}} \frac{1}{\pi_k} + \frac{1}{r-1} \sum_{k \text{ senar}} \frac{1}{\pi_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^d \frac{1}{\pi_k} + \frac{1}{2r-2} \sum_{k=0}^d \frac{1}{\pi_k} = \frac{r}{2r-2} \frac{2|V|}{r\pi_0} = \frac{1}{r-1} \frac{|V|}{\pi_0}.$$

Per tant,  $\xi = r-1$ . Acudint a (10.2) obtenim  $p_d(\lambda_k) = r-1$  si  $k$  és parell i  $p_d(\lambda_k) = -1$  si  $k$  és imparell. Llavors l'espectre de la matriu  $A_d = p_d(A)$ , és

autovalor  $r-1$ , amb multiplicitat  $\sum_{k \text{ parell}} m_k = \sum_{k \text{ parell}} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \frac{\pi_0}{2} \frac{2|V|}{r\pi_0} = \frac{|V|}{r} = s$ ;

autovalor  $-1$ , amb multiplicitat  $\sum_{k \text{ senar}} m_k = (r-1) \sum_{k \text{ senar}} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \frac{(r-1)\pi_0}{2} \frac{2|V|}{r\pi_0} = |V| - s = (r-1)s$ .

En conseqüència, el graf  $\Gamma_d$  té  $s$  components connexes, cada una de les quals té espectre  $\{r-1, -1\}$ , i és per tant  $K_r$ . Això estableix que  $\Gamma$  és  $r$ -antipodal.  $\square$

**Teorema 10.2.4** *Sigui  $\Gamma$  un graf regular i  $\{\lambda_0^{m_0} > \lambda_1^{m_1} > \dots > \lambda_d^{m_d}\}$  el seu espectre. Les dues afirmacions següents són equivalents:*

a)  $\Gamma$  és distància-regular  $r$ -antipodal.

b)  $\Gamma_d$  és regular de grau  $r-1$  i l'espectre de  $\Gamma$  compleix  $m_k = \frac{\pi_0}{\pi_k}$  per a  $k$  parell,  $m_k = (r-1) \frac{\pi_0}{\pi_k}$  per a  $k$  imparell.

**Demostració** Si (a) és cert el Teorema 10.2.3 estableix (b). Recíprocament, fem el càlcul:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_0^2}{\sum_{k=0}^d \frac{1}{m_k \pi_k^2}} &= \sum_{k \text{ parell}} \frac{\pi_0}{\pi_k} + \frac{1}{r-1} \sum_{k \text{ senar}} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \sum_{k \text{ senar}} \frac{\pi_0}{\pi_k} + \frac{1}{r-1} \sum_{k \text{ parell}} \frac{\pi_0}{\pi_k} = \\ &= \frac{1}{r-1} \left( \sum_{k \text{ senar}} m_k + \sum_{k \text{ parell}} m_k \right) = \frac{|V|}{r-1}, \end{aligned}$$



on hem usat, Lema 1.0.2, que les sumes  $\sum_{k \text{ parell}} \frac{\pi_0}{\pi_k}$  i  $\sum_{k \text{ senar}} \frac{\pi_0}{\pi_k}$  són iguals. Per tant,

$$\frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}} = r - 1.$$

El Teorema 9.5.2 assegura la distància-regularitat de  $\Gamma$  i el Teorema 10.2.3 el caràcter  $r$ -antipodal.  $\square$

### 10.3 Conjunts $P$ -frontera i pseudo-distància-regularitat

En un graf  $\Gamma = (V, E)$  el caràcter  $P$ -frontera d'un conjunt  $C$  pot descriure's, recordant el Teorema 5.1.5(b), per la conjunció de

$$(a) \ C \text{ és extremal,} \quad (b) \ \rho\bar{C} = \left( H_C - \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\bar{C})}{\Phi(C)} P \right) \rho C.$$

D'altra banda el fet que  $\Gamma$  sigui  $C$ -local pseudo-distància-regular pot caracteritzar-se, Proposició 8.0.10, per

$$(a) \ C \text{ és extremal,} \quad (b) \ \text{existeix un polinomi de grau } |\mathcal{M}_C^*| \text{ que transforma } \rho C \text{ en } \rho\bar{C}.$$

Per tant si  $C$  és  $P$ -frontera el graf és  $C$ -local pseudo-distància-regular i el darrer polinomi distància  $C$ -local és

$$p_d = H_C - \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\bar{C})}{\Phi(C)} P. \quad (10.3)$$

Notem que podíem haver arribat a la mateixa conclusió fent ús de l'expressió de les multiplicitats  $C$ -locals d'un conjunt  $P$ -frontera, Teorema 5.1.5(c),  $m_0 = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}$ ,  $m_i = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \frac{\Phi(C)}{\Phi(\bar{C})} \frac{\pi_0}{\pi_i}$  per a  $1 \leq i \leq d$ , i observar l'acompliment per elles de la caracterització numèrica donada en la Proposició 8.0.12. Observem la diferència de nivell d'exigència entre les  $d+1$  igualtats numèriques per a les multiplicitats  $C$ -locals d'un conjunt  $P$ -frontera i l'única igualtat que involucra les d'un graf  $C$ -local pseudo-distància-regular. Això fa esperable propietats fortes quan la pseudo-distància-regularitat local prové del caràcter  $P$ -frontera del conjunt. Abans d'aquest estudi farem una disgressió tornant a qüestions de base. Reprenem la idea de graf substituint la visió 'digital' d'adjacència per una 'd'analògica'.

#### 10.3.1 Sobre grafs amb pesos a les arestes

Sigui  $V$  un conjunt no buit i  $E : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . La parella  $(V, E)$  l'anomenem dígraf (*dígraf amb pesos a les arestes*) i graf (*graf amb pesos*) quan  $E$  sigui simètrica. Dels elements de  $V$  en direm els vèrtexs del (di)-graf i identifiquem  $E$  amb una matriu  $E = (e_{uv})$  indexada pels vèrtexs. En el cas d'un graf,  $E$  diagonalitza en  $\mathbb{R}$  i els espais propis són ortogonals. En particular, només pot haver un autovalor amb un autovector de components estrictament positives. Un camí de longitud  $r$  entre dos vèrtexs  $u, v$  d'un graf és una col·lecció  $u = w_0, w_1, \dots, w_{r-1}, w_r = v$  de vèrtexs tals que  $\prod_{l=1}^r e_{w_{l-1}, w_l} \neq 0$ . La mínima

longitud dels camins entre  $u$  i  $v$ , cas d'existir-ne, es defineix com la distància,  $\partial(u, v)$ , entre els dos vèrtexs. Les definicions de distància entre conjunts, excentricitat i diàmetre, com també les nocions d'espectre, espectre local i descomposicions espectrals són les ja conegudes. Així com, en la presentació usual de la matriu d'adjacència, el fet que  $(A^k)_{uv} = 0$  equival a que no hi ha cap camí de longitud  $k$  entre  $u$  i  $v$ , ara només podem afirmar que  $(E^k)_{uv} \neq 0$  implica l'existència d'algun camí de longitud  $k$ . Cas d'existir un autovector  $\tilde{\nu}$  de  $E$  amb totes les components no nul·les, l'assignació a cada vèrtex  $u$  del pes  $\tilde{\nu}_u$ , permet una regularització del graf, en el sentit que  $\frac{1}{\tilde{\nu}_u} \sum_{v \in V} e_{uv} \tilde{\nu}_v = \tilde{\lambda}$ , per a tot  $u \in V$ , essent  $\tilde{\lambda}$  l'autovalor associat a  $\tilde{\nu}$ . El sentit de  $\tilde{\rho}C = \sum_{u \in C} \tilde{\nu}_u e_u$  és similar al ja abastament usat. Notem que  $\|\tilde{\rho}C\| \neq 0$  essent  $C \neq \emptyset$ . Observem també que si  $\tilde{\lambda}$  és autovalor simple, la projecció de  $\tilde{\rho}C$  sobre  $\text{Ker}(E - \tilde{\lambda}I)$  és  $\frac{\|\tilde{\rho}C\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} \tilde{\nu}$  i, per tant, no nul·la si  $C$  no és buit.

No ens estendrem en aquest estudi, però si veurem alguns resultats que generalitzen els obtinguts per a la matriu d'adjacència. Per cridar l'atenció respecte de l'ús d'arestes amb pes, representarem els elements implicats sobreposant-li's una tilde. Veiem un resultat paral·lel a la Proposició 2.1.1.

**Proposició 10.3.1** *Considerem  $\tilde{\Gamma} = (V, E)$  un graf (amb pesos a les arestes) tal que la matriu  $E$  tingui un autovalor simple  $\tilde{\lambda}$  amb autovector associat amb totes les components no nul·les. Donats  $C$  i  $D$  dos conjunts no buits de vèrtexs, la distància entre ells compleix*

$$\partial(C, D) \leq |\mathcal{M}_C^* \cap \mathcal{M}_D^*|,$$

on  $\mathcal{M}_C^*$  i  $\mathcal{M}_D^*$  són els respectius conjunts d'autovalors locals excepte  $\tilde{\lambda}$ .

**Demostració** Sigui  $\tilde{\lambda}$  autovector simple de  $E$  i  $\tilde{\nu}$  autovector associat amb totes les components no nul·les. Indiquem  $\mathcal{M}_{CD}^* = \mathcal{M}_C^* \cap \mathcal{M}_D^*$  i  $d = |\mathcal{M}_{CD}^*|$ . Considerem les descomposicions espectrals

$$\tilde{\rho}C = z'_C + z''_C = \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} \tilde{\nu} + z_C^1 + z''_C, \quad \tilde{\rho}D = z'_D + z''_D = \frac{\|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} \tilde{\nu} + z_D^1 + z''_D,$$

on  $z'_C, z'_D \in \text{Ker}(E - \tilde{\lambda}I) \prod_{\mu \in \mathcal{M}_{CD}^*} (E - \mu I)$ ,  $z''_C \in \text{Ker} \prod_{\mu \in \mathcal{M}_C^* \setminus \mathcal{M}_{CD}^*} (E - \mu I)$ ,  $z''_D \in \text{Ker} \prod_{\mu \in \mathcal{M}_D^* \setminus \mathcal{M}_{CD}^*} (E - \mu I)$ . Fem la hipòtesi  $\langle E^k \tilde{\rho}C, \tilde{\rho}D \rangle = 0$ , per a  $0 \leq k \leq d$ . Donat qualsevol polinomi  $q$  sigui  $q_d \in \mathbb{R}_d[x]$  congruent amb  $q$  mòdul  $(x - \tilde{\lambda}) \prod_{\mu \in \mathcal{M}_{CD}^*} (x - \mu)$ . Llavors, entenent que  $q$  opera sobre vectors a través de  $q(E)$ ,

$$\langle q\tilde{\rho}C, \tilde{\rho}D \rangle = \langle qz'_C, z'_D \rangle = \langle q_d z'_C, z'_D \rangle = \langle q_d \tilde{\rho}C, \tilde{\rho}D \rangle = 0 \quad (10.4)$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \langle q\tilde{\rho}C, \tilde{\rho}D \rangle &= \left\langle q \left( \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} \tilde{\nu} + z_C^1 + z''_C \right), \frac{\|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} \tilde{\nu} + z_D^1 + z''_D \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} q(\tilde{\lambda}) \tilde{\nu} + qz_C^1, \frac{\|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} \tilde{\nu} + z_D^1 \right\rangle = \\ &= \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2 \|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} q(\tilde{\lambda}) + \langle qz_C^1, z_D^1 \rangle \geq \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2 \|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} q(\tilde{\lambda}) - |\langle qz_C^1, z_D^1 \rangle| \geq \\ &\geq \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2 \|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} q(\tilde{\lambda}) - \|qz_C^1\| \|z_D^1\| \geq \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2 \|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2} q(\tilde{\lambda}) - K \|z_C^1\| \|z_D^1\| \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2\|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2}q(\tilde{\lambda}) - K\sqrt{\|\tilde{\rho}C\|^2 - \frac{\|\tilde{\rho}C\|^4}{\|\tilde{\nu}\|^2}}\sqrt{\|\tilde{\rho}D\|^2 - \frac{\|\tilde{\rho}D\|^4}{\|\tilde{\nu}\|^2}} = \\ &= \frac{\|\tilde{\rho}C\|^2\|\tilde{\rho}D\|^2}{\|\tilde{\nu}\|^2}\left(q(\tilde{\lambda}) - K\sqrt{\frac{\|\tilde{\nu}\|^2}{\|\tilde{\rho}C\|^2} - 1}\sqrt{\frac{\|\tilde{\nu}\|^2}{\|\tilde{\rho}D\|^2} - 1}\right), \text{ on } K = \max_{\mu \in \mathcal{M}_{CD}^*} |q(\mu)|. \end{aligned}$$

La llibertat en el grau de  $q$  fa que puguem aconseguir  $\frac{q(\tilde{\lambda})}{K} > \sqrt{\frac{\|\tilde{\nu}\|^2}{\|\tilde{\rho}C\|^2} - 1}\sqrt{\frac{\|\tilde{\nu}\|^2}{\|\tilde{\rho}D\|^2} - 1}$ . Llavors  $q$  compliria  $\langle q\tilde{\rho}C, \tilde{\rho}D \rangle > 0$ , en contradicció amb (10.4). Per tant existeix  $k$  entre 0 i  $d$  tal que  $0 \neq \langle E^k \tilde{\rho}C, \tilde{\rho}D \rangle = \sum_{u \in C, v \in D} \tilde{\nu}_u \tilde{\nu}_v (E^k)_{uv}$ , el que implica l'existència d'algun camí de longitud fins a  $d$  entre alguna parella de vèrtexs  $u \in C$  i  $v \in D$ .  $\square$

Aplicant aquest resultat a parelles on un o els dos subconjunts es redueixen a un vèrtex, obtenim

**Corollari 10.3.2** *Considerem  $\tilde{\Gamma} = (V, E)$  un graf (amb pesos a les arestes) tal que la matriu  $E$  tingui un autovalor simple  $\tilde{\lambda}$  amb autovector associat amb totes les components no nul·les. Llavors,*

- (a)  $\tilde{\Gamma}$  és connex.
- (b) Si  $\tilde{\lambda}, \mu_1, \dots, \mu_{d_C}$  són els autovalors locals d'un conjunt  $C$ , la seva excentricitat complexa  $\tilde{e}_C \leq d_C$ .
- (c) Si  $\mathcal{M} = \{\tilde{\lambda}\} \cup \mathcal{M}^*$  és el conjunt d'autovalors de  $\tilde{\Gamma}$  i  $d = |\mathcal{M}^*|$ , el diàmetre del graf verifica  $D(\tilde{\Gamma}) \leq d$ .

Donades dues funcions de pesos  $E_1, E_2$  sobre  $V \times V$ , les distàncies generades per les dues coincideixen si i només si  $e_{uv}^1 \neq 0 \Leftrightarrow e_{uv}^2 \neq 0$ , per a tota parella  $u \neq v$ . Indiquem aquesta situació per  $E_1 \simeq E_2$ , que introdueix una relació d'equivalència en el conjunt de funcions de pesos. Si en la classe  $[E]$  a la que pertany  $E$ , hi han matrius amb un autovector de components no nul·les associat a un autovalor simple, el Corollari 10.3.2 serà aplicable i les conclusions sobre connexió, excentricitat i diàmetre valdran per el graf  $(V, E)$ . Per exemple, essent  $\Gamma = (V, E)$  un graf amb funció de pesos estàndar  $(0, 1)$ , la funció de pesos laplaciana,  $L(u, v) = -E(u, v)$  si  $u \neq v$  i  $L(u, u) = \text{gr}(u)$ , compleix  $[L] = [E]$ . Com que  $j$  és sempre autovector de  $L$  associat a 0, cas de ser autovalor simple podem assegurar la connexió de  $\Gamma$  i també que  $D(\Gamma)$  no supera el nombre d'autovalors de  $L$  no nuls. A banda d'aquesta conclusió és conegut que la multiplicitat de l'autovalor 0 en la matriu laplaciana dóna el nombre de components connexes del graf, essent, des d'aquest punt de vista, més potent que la matriu d'adjacència, per a la qual la multiplicitat del màxim autovalor dóna el nombre de components connexes quan el graf és regular.

Aquesta línia de raonament porta a obrir interrogants sobre com modificar, dins la mateixa classe, la funció de pesos de forma que tenint la propietat demanada sobre autovalor i autovector, el nombre d'autovalors sigui una millor fita pel diàmetre del graf original. Des d'un altre punt de vista, considerem el quocient del conjunt  $\mathcal{S}_n^*$ , matrius simètriques d'ordre  $n$  amb un autovector de components no nul·les corresponent a un autovalor simple, per la relació d'equivalència anterior. Cada classe conté un únic graf  $\Gamma = (V, E)$  que, segons el Corollari 10.3.2 serà connex. Del mateix resultat se'n despren que, per a tota matriu  $S \in [E]$  el nombre d'autovalors diferents,  $|\text{autov}(S)|$ , compleix  $|\text{autov}(S)| \geq D(\Gamma) + 1$ . En quines condicions és assolible aquesta fita? Com triar  $S$  per aconseguir menor nombre d'autovalors?

Delorme i Tillich [18] presenten el següent espectacular exemple d'optimització de la fitació del diàmetre pel nombre d'autovalors menys un, per l'ús d'una adequada funció de pesos sobre les arestes. El graf

$\Gamma = (V, E)$  definit com la suma cartesiana dels grafs complets  $K_{a_1}, \dots, K_{a_r}$  té diàmetre  $r$  i el nombre d'autovalors diferents pot ser fins a  $2^r$ . Es considera el graf  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  obtingut associant a cada aresta el pes  $\frac{1}{a_i}$  quan els vèrtexs que la defineixen difereixen en la component  $i$ -èsima. Notem que  $[E] \simeq [\tilde{E}]$ . La matriu  $\tilde{E}$  resulta tenir només els  $r + 1$  autovalors  $r + \xi, r - 1 + \xi, \dots, 1 + \xi, \xi$ , on  $\xi = -\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}$ . Per tant,  $r$  és fita superior del diàmetre  $D(\Gamma) \leq r$ , que ara resulta ser òptima. L'autor fa notar que triant  $a_i = c^{k_i} - 1$ , per a qualsevol enter  $c \geq 2$  i  $1 < k_1 < \dots < k_r$ , es garanteix que el nombre d'autovalors de  $\Gamma$  sigui exactament  $2^r$ .

En el temps en que això es redacta, s'ha rebut una comunicació de Delorme aprofundint en aquest sentit. Exposa exemples de millora i d'optimització de fites mitjançant autovalors, per a diversos paràmetres, usant pesos a les arestes i autollaços. És probable un desenvolupament teòric per orientar aquesta nova tècnica. En particular, l'autor creu que és un tema de futur molt interessant tractar de conjugar-la amb l'interlacing i la clàssica polinomial.

Considerem ara un graf  $\Gamma = (V, E)$  amb la funció ordinària de pesos sobre les arestes. Sigui  $A$  la matriu d'adjacència, indiquem  $\lambda$  el seu màxim autovalor i sigui  $\nu$  l'autovector associat amb mínima component la unitat. Considerem  $p \in \mathbb{R}[x]$  i construïm el graf  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  on  $\tilde{E} = p(A)$ . Donat  $C \subset V$ , siguin  $\{\lambda > \mu_1 > \dots > \mu_r\}$  els seus autovalors locals. Suposant  $p(\lambda) \notin \{p(\mu_1), \dots, p(\mu_r)\}$ , les descomposicions espectrals respectives del vector  $\rho C$  segons  $A$  i  $\tilde{E}$  seran de la forma

$$\frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z_1 + \dots + z_r = \rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + \tilde{z}_1 + \dots + \tilde{z}_d,$$

on els autovectors de l'esquerra corresponen als autovalors locals  $\{\lambda > \mu_1 > \dots > \mu_r\}$  de  $C$  respecte de  $A$  i els de la dreta als autovalors  $\{\theta = p(\lambda), \xi_1, \dots, \xi_d\}$  respecte de  $\tilde{E}$ , on  $\{\xi_1, \dots, \xi_d\} = \{p(\mu_1), \dots, p(\mu_r)\}$ . De la demostració de la Proposició 10.3.1 se'n despren el següent resultat.

**Proposició 10.3.3** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$ ,  $C$  un subconjunt de  $V$  i  $\{\lambda > \mu_1 > \dots > \mu_r\}$  els autovalors  $C$ -locals. Sigui  $p \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $p(\lambda) \notin \{p(\mu_1), \dots, p(\mu_r)\}$ . L'excentricitat de  $C$  en el graf  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  definit per  $\tilde{E} = p(A)$ , compleix*

$$\tilde{\varepsilon}_C \leq d = |\{p(\mu_1), \dots, p(\mu_r)\}|.$$

El concepte de partició pseudo-equitativa s'exten amb naturalitat a grafs amb pesos a les arestes. Considerem un graf  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  tal que  $\tilde{E}$  tingui un autovalor  $\theta$  amb autovector associat  $\tilde{\nu}$  de components no nul·les, que fixarem com a funció de pesos sobre  $V$ . Una partició  $C_0, C_1, \dots, C_s$  de  $V$  l'anomenem *pseudo-equitativa* en  $\tilde{\Gamma}$  quan, per a cada parella  $1 \leq h, k \leq s$  i qualsevol  $u \in C_h$ , la 'densitat d'adjacència' de  $u$  cap a  $C_k$

$$\tilde{a}_{hk} \equiv \tilde{a}_{hk}(u) = \frac{1}{\tilde{\nu}_u} \sum_{v \in C_k} e_{uv} \tilde{\nu}_v,$$

sigui independent de  $u \in C_h$ . La matriu  $M = (\tilde{a}_{hk})$  s'anomenarà matriu de (pseudo)-intersecció. Notem que les seves files sumen

$$\sum_{k=1}^s \tilde{a}_{hk} = \sum_{k=1}^s \frac{1}{\tilde{\nu}_u} \sum_{v \in C_k} e_{uv} \tilde{\nu}_v = \frac{1}{\tilde{\nu}_u} \sum_{v \in V} e_{uv} \tilde{\nu}_v = \frac{1}{\tilde{\nu}_u} (\tilde{E} \tilde{\nu})_u = \theta,$$

en forma paral·lela a l'obtingut en la Proposició 9.1.3. El cas en que la funció de pesos és  $V \times V \rightarrow \{0, 1\}$  ens retorna a la definició donada en la Secció 9.1, amb la salvetat que no essent ara la partició subordinada a la distància a  $C_0$ , la matriu  $M$  no té per que ser tridiagonal. Deixem aquí la situació general, ja que en el que segueix farem ús de particions pseudo-equitatives, en grafs amb pesos a les arestes, només en la situació restringida en que la partició de  $V$  està formada de tres subconjunts.

### 10.3.2 Grafs $C$ -local pseudo-fortament regulars amb pesos a les arestes

Sigui  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  un graf amb pesos a les arestes,  $\theta$  autovalor de  $\tilde{E}$  amb autovalor  $\tilde{\nu}$  i  $C \subset V$ . En el que segueix la notació tilde en el graf indicarà que la funció de pesos sobre les arestes no és necessàriament la trivial.

**Definició 10.3.4** *El graf  $\tilde{\Gamma}$  és  $C$ -local pseudo-fortament regular quan existeix una partició  $C = C_0, C_1, C_2$  pseudo-equitativa de  $V$  amb matriu d'intersecció*

$$(\tilde{a}_{hk}) = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ 1 & a & \theta - a - 1 \\ 0 & c & \theta - c \end{pmatrix}.$$

Al ser la matriu tridiagonal s'introdueixen, com en (9.7), els símbols  $c_k = \tilde{a}_{k,k-1}$ ,  $a_k = \tilde{a}_{k,k}$ ,  $b_k = \tilde{a}_{k,k+1}$  i es dona a la matriu d'intersecció la forma condensada

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & a & \theta - c \\ \theta & \theta - a - 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Reunint la informació continguda en aquesta matriu en forma idèntica a com ho fa Godsil [31] per grafs fortament regulars, direm que  $\tilde{\Gamma}$  és un  $(|V|, \theta; a, c)$  graf  $C$ -local pseudo-fortament regular.

**Proposició 10.3.5** *Considerem un graf  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  amb un autovalor  $\theta$  que admet un autovector  $\tilde{\nu}$  de components no nul·les. Llavors,  $\tilde{\Gamma}$  és  $C$ -local pseudo-fortament regular amb matriu d'intersecció condensada  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & \theta - c \\ \theta & \theta - a - 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on  $c \neq 0$ , si i només si existeixen polinomis  $\tilde{p}_0(\tilde{x})$ ,  $\tilde{p}_1(\tilde{x})$ ,  $\tilde{p}_2(\tilde{x})$ , tals que  $\tilde{p}_k \rho C_0 \equiv \tilde{p}_k(\tilde{E}) \rho C_0 = \rho C_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , i que, essent  $h$  el polinomi anul·lador de  $\rho C_0$ , verifiquen la recurrència*

$$\tilde{x} \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \theta & a & c \\ 0 & \theta - a - 1 & \theta - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix}$$

en  $\mathbb{R}[x]/(h)$  i on la variable  $\tilde{x}$  representa l'acció de la matriu  $\tilde{E}$ .

**Demostració** Sigui  $\tilde{\Gamma}$  un graf  $C$ -local pseudo-fortament regular. Similarment a com hem fet en (9.11),

$$\tilde{x} \rho C_0 = \sum_{u \in C_0} \tilde{\nu}_u \sum_{v \in V} e_{vu} e_v = \sum_{v \in C_0} \left( \sum_{u \in C_0} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v + \sum_{v \in C_1} \left( \sum_{u \in C_0} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v + \sum_{v \in C_2} \left( \sum_{u \in C_0} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v =$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{a}_{00} \sum_{v \in C_0} \tilde{\nu}_v e_v + \tilde{a}_{10} \sum_{v \in C_1} \tilde{\nu}_v e_v + \tilde{a}_{20} \sum_{v \in C_2} \tilde{\nu}_v e_v = \rho C_1, \\
\tilde{x} \rho C_1 &= \sum_{u \in C_1} \tilde{\nu}_u \sum_{v \in V} e_{vu} e_v = \sum_{v \in C_0} \left( \sum_{u \in C_1} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v + \sum_{v \in C_1} \left( \sum_{u \in C_1} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v + \sum_{v \in C_2} \left( \sum_{u \in C_1} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v = \\
&= \tilde{a}_{01} \sum_{v \in C_0} \tilde{\nu}_v e_v + \tilde{a}_{11} \sum_{v \in C_1} \tilde{\nu}_v e_v + \tilde{a}_{21} \sum_{v \in C_2} \tilde{\nu}_v e_v = \theta \rho C_0 + a \rho C_1 + c \rho C_2, \\
\tilde{x} \rho C_2 &= \sum_{u \in C_2} \tilde{\nu}_u \sum_{v \in V} e_{vu} e_v = \sum_{v \in C_0} \left( \sum_{u \in C_2} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v + \sum_{v \in C_1} \left( \sum_{u \in C_2} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v + \sum_{v \in C_2} \left( \sum_{u \in C_2} e_{vu} \tilde{\nu}_u \right) e_v = \\
&= \tilde{a}_{02} \sum_{v \in C_0} \tilde{\nu}_v e_v + \tilde{a}_{12} \sum_{v \in C_1} \tilde{\nu}_v e_v + \tilde{a}_{22} \sum_{v \in C_2} \tilde{\nu}_v e_v = (\theta - a - 1) \rho C_1 + (\theta - c) \rho C_2.
\end{aligned}$$

Per ser  $c \neq 0$  es té  $\rho C_k = \tilde{p}_k \rho C_0$  ( $0 \leq k \leq 2$ ) i els polinomis  $\tilde{p}_k$  verifiquen la recurrència demanada. Recíprocament, indicant  $M = (M_{ij})$  la matriu de recurrència, fem de dues maneres el càlcul, per a  $0 \leq h, k \leq 2$  i  $\forall u \in C_k$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{E} e_u, \rho C_h \rangle &= \langle \tilde{x} \tilde{p}_h \rho C_0, e_u \rangle = \left\langle \left( \sum_{l=0}^2 M_{hl} \tilde{p}_l \right) \rho C_0, e_u \right\rangle = \left\langle \sum_{l=0}^2 M_{hl} \rho C_l, e_u \right\rangle = M_{hk} \tilde{\nu}_u, \\
\langle \tilde{E} e_u, \rho C_h \rangle &= \left\langle \sum_{v \in V} e_{vu} e_v, \rho C_h \right\rangle = \sum_{v \in C_h} e_{vu} \tilde{\nu}_v,
\end{aligned}$$

d'on resulta que la partició  $C = C_0, C_1, C_2$  és pseudo-equitativa i la matriu d'intersecció és la indicada.  $\square$

Observem que la hipòtesi  $c \neq 0$  treballa en el sentit de provar l'existència dels polinomis  $\tilde{p}_k$ , però per  $c = 0$  es manté la implicació del caràcter  $C$ -local pseudo-fortament regular.

De la recurrència anterior obtenim que el grau de  $p_k$  és  $k$ . Explicitant els polinomis,

$$\tilde{p}_0 = 1, \quad \tilde{p}_1 = \tilde{x}, \quad \tilde{p}_2 = \frac{1}{c} (\tilde{x}^2 - a\tilde{x} - \theta). \quad (10.6)$$

El polinomi  $\tilde{p}_2^\sigma = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \frac{1}{c} (\tilde{x}^2 - (a-c)\tilde{x} + c - \theta)$ , compleix

$$\frac{1}{c} (\tilde{x}^2 - (a-c)\tilde{x} + c - \theta) \rho C = \nu, \quad (\tilde{x} - \theta) (\tilde{x}^2 - (a-c)\tilde{x} + c - \theta) = 0. \quad (10.7)$$

La primera de les igualtats justifica la notació  $\tilde{H}_C$  per  $\tilde{p}_2^\sigma$  i referir-nos-hi com el polinomi de Hoffman  $C$ -local de  $\tilde{\Gamma}$ . La igualtat  $q\rho C = \nu$  serà satisfeta només per el polinomi de Hoffman quan la malla local reduïda de  $C$  tingui dos elements. Podem ara calcular els autovalors de  $\tilde{E}$ . Si  $\theta$  és simple la descomposició espectral de  $\rho C$  és  $\frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \nu + z$ . Per tant  $\nu = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \tilde{p}_2^\sigma \nu$ . En resulta la conseqüència següent.

**Corol·lari 10.3.6** Sigui  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  un  $(|V|, \theta; a, c)$  graf  $C$ -local pseudo-fortament regular. La matriu  $\tilde{E}$  té per malla d'autovalors els elements diferents que hi hagin entre

$$\theta, \quad \xi_1 = \frac{a-c + \sqrt{(a-c)^2 - 4(c-\theta)}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{a-c - \sqrt{(a-c)^2 - 4(c-\theta)}}{2}.$$

A més, si l'autovalor  $\theta$  és simple  $\tilde{H}_C = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2(\theta - \xi_1)(\theta - \xi_2)}(\tilde{x} - \xi_1)(\tilde{x} - \xi_2)$ .

### 10.3.3 Una caracterització dels conjunts $P$ -frontera

El fet que un conjunt  $C$ , en un graf  $\Gamma = (V, E)$ , sigui  $P$ -frontera comporta, com hem vist al principi d'aquesta secció, el caràcter  $C$ -local pseudo-distància-regular del graf. L'expressió (10.3) per el polinomi  $p_d$  que transforma  $\rho C$  en  $\rho\bar{C}$  (antipodal de  $C$ ), presenta el fet suggestiu de que els seus valors sobre l'espectre local de  $C$  es redueixen als elements diferents que hi hagin entre  $p_d(\lambda) = H_C(\lambda) - \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\bar{C})}{\Phi(C)} P(\lambda)$  i  $p_d(\mu_l) = -\frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \frac{\Phi(\bar{C})}{\Phi(C)} P(\mu_l)$  ( $1 \leq l \leq d$ ). De ser  $P(\mu_l) = (-1)^{l+1}$  i  $P(\lambda) = \Phi(C)\Phi(\bar{C})$ , la recerca es limita a

$$\theta = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}, \quad \xi_1 = \frac{\Phi(\bar{C})}{\Phi(C)}\theta, \quad \xi_2 = -\frac{\Phi(\bar{C})}{\Phi(C)}\theta. \quad (10.8)$$

Aquest fet porta de manera natural a estudiar el graf amb pesos a les arestes  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  on  $\tilde{E} = p_d(A)$ , on  $A$  és la matriu d'adjacència de  $\Gamma$ . Presentem el següent enunciat.

**Teorema 10.3.7** *Considerem un graf  $\Gamma = (V, E)$ . Sigui  $A$  la seva matriu d'adjacència,  $C$  un subconjunt de vèrtexs i  $\{\lambda = \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_d\}$  els seus autovalors locals. Les dues afirmacions següents són equivalents:*

(a)  $C$  és  $P$ -frontera;

(b)  $\Gamma$  és  $C$ -local pseudo-distància-regular i, essent  $p_d$  el polinomi de pas de  $C$  a l'antipodal  $\bar{C}$ , el graf  $\tilde{\Gamma} = (V, \tilde{E})$  amb matriu d'adjacència  $p_d(A)$ , és un graf  $C$ -local pseudo-fortament regular de paràmetres  $(|V|, \theta; a, c)$  amb  $a = c$ .

Cas de ser certes, els paràmetres de  $\tilde{\Gamma}$  es dedueixen de  $\Gamma$  per

$$\theta = p_d(\lambda) = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}, \quad a = c = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2 - \|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2}\theta.$$

**Demostració** Suposem (a) cert. El caràcter  $C$ -local pseudo-distància-regular deriva, com ja hem tractat anteriorment, de la comparació dels resultats del Teorema 5.1.5(b) i de la Proposició 8.0.10. La descomposició espectral de  $\rho C$  en  $\tilde{\Gamma}$ , serà  $\rho C = \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2}\nu + z^+ + z^-$ , on els autovectors corresponen respectivament als autovalors  $\theta, \xi_1, -\xi_2$  donats en (10.8) que abreujaem per  $\theta, \xi, -\xi$ . Per ara deixem de banda el cas en que  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$ , que, també segons (10.8), equival a  $\theta = \xi_1 = 1, \xi_2 = -1$ . Suposem doncs el cas genèric  $\|\rho\bar{C}\| \neq \|\rho C\|$ . Indiquem, com venim fent,  $\tilde{x}$  l'acció de  $p_d(A)$  i considerem la partició i els polinomis

$$C_0 = C, \quad C_1 = \bar{C}, \quad C_2 = V \setminus (C \cup \bar{C}) \quad ; \quad \tilde{p}_0 = 1, \quad \tilde{p}_1 = \tilde{x}, \quad \tilde{p}_2 = \tilde{H}_C - \tilde{x} - 1,$$

on  $\tilde{H}_C = \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2(\theta^2 - \xi^2)}(\tilde{x}^2 - \xi^2)$ , polinomi de Hoffman de  $C$  en  $\tilde{\Gamma}$ , verifica  $\tilde{H}_C \rho C = \nu$ . D'aquesta igualtat i de  $p_d \rho C = \rho\bar{C}$ , tenim

$$\tilde{p}_0 \rho C_0 = \rho C_0, \quad \tilde{p}_1 \rho C_0 = \rho C_1, \quad \tilde{p}_2 \rho C_0 = \rho C_2.$$

Per la Proposició 10.3.5, per establir que  $\tilde{\Gamma}$  és  $C$ -local pseudo-fortament regular falta calcular la matriu de recurrència dels  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0,1,2}$ . Evidentment,  $\tilde{x}\tilde{p}_0 = \tilde{p}_1$ . Calculant el primer coeficient de  $\tilde{H}_C$  amb les expressions (10.8) de  $\theta$  i  $\xi$ , podem expressar

$$\tilde{H}_C = \frac{1}{K}(\tilde{x}^2 - \xi^2) \quad \text{on} \quad K = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2 - \|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2}\theta,$$

i relacionar  $K$  amb  $\theta$  i  $\xi$  per  $K + \xi^2 = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2 - \|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2}\theta + \frac{\|\nu\|^2 - \|\rho\bar{C}\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2}\theta = \theta$ . Aïllant  $\tilde{x}^2$  en  $\tilde{H}_C$  tenim

$$\tilde{x}\tilde{p}_1 = \tilde{x}^2 = K + \xi^2 + K\tilde{x} + K(\tilde{H}_C - \tilde{x} - 1) = \theta\tilde{p}_0 + K\tilde{p}_1 + K\tilde{p}_2$$

Finalment, podem expressar  $\tilde{x}\tilde{p}_2$  en combinació lineal de  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0,1,2}$ , base de  $\mathbb{R}[\tilde{x}]/((\tilde{x} - \theta)(\tilde{x}^2 - \xi^2))$ . Si indiquem  $S_0, S_1, S_2$  les sumes de les columnes de la matriu de recurrència, de

$$\theta(\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) = \theta\tilde{H}_C = \tilde{x}\tilde{H}_C = \tilde{x}\tilde{p}_0 + \tilde{x}\tilde{p}_1 + \tilde{x}\tilde{p}_2 = S_0\tilde{p}_0 + S_1\tilde{p}_1 + S_2\tilde{p}_2,$$

resulta  $S_0 = S_1 = S_2 = \theta$ . La matriu de recurrència és doncs

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \theta & a & c \\ 0 & \theta - a - 1 & \theta - c \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad \theta = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}, \quad a = c = K = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2 - \|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2}\theta.$$

Veiem ara que si  $\|\rho\bar{C}\| = \|\rho C\|$  el graf  $\tilde{\Gamma}$  és  $C$ -local pseudo-fortament regular amb matriu d'intersecció  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que s'inclou en l'enunciat general. En efecte, de  $p_d(\lambda) = \theta = 1$ ,  $p_d(\mu_l) = (-1)^{l+1}$ , tenim

$\tilde{x}^2 = 1$ . Considerem també la partició  $C_0 = C$ ,  $C_1 = \bar{C}$ ,  $C_2 = V \setminus (C \cup \bar{C})$ . De  $\tilde{x}\rho C_0 = C_1$  i  $\tilde{x}\rho C_1 = C_0$  també  $\tilde{x}\rho C_2 = \tilde{x}\nu - \tilde{x}\rho C_0 - \tilde{x}\rho C_1 = \nu - \rho C_1 - \rho C_0 = \rho C_2$ . El caràcter pseudo-equitatiu de la partició, amb matriu d'intersecció la indicada s'estableix sense dificultat. Per exemple,

$$\langle \tilde{x}e_u, \rho C_2 \rangle = \begin{cases} \langle e_u, \tilde{x}\rho C_2 \rangle = \langle e_u, \rho C_2 \rangle = \nu_u \delta_{u, C_2} \\ \sum_{v \in V} e_{vu} \langle e_v, \rho C_2 \rangle = \sum_{v \in C_2} e_{vu} \nu_v \end{cases}$$

on  $\delta_{u, C_2}$  és 1 si  $u \in C_2$  i 0 en altre cas. Això estableix l'existència i valor,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , de la tercera columna de la matriu d'intersecció.

Partim ara de (b). Per la construcció de  $\tilde{\Gamma}$  els autovalors  $C$ -locals són  $p_d(\lambda) = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}$ , associat a  $\nu$ , i  $p_d(\mu_l)$  ( $1 \leq l \leq d$ ). De ser  $\tilde{\Gamma}$  graf  $C$ -local pseudo-distància-regular amb paràmetres  $(|V|, \theta; c, c)$ , del Corollari 10.3.6,

$$p_d(\lambda) = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} = \theta, \quad \{p_d(\mu_l) : l = 1, \dots, d\} = \{\sqrt{\theta - c}, -\sqrt{\theta - c}\},$$

on observem que  $p_d$  només pren dos valors diferents sobre la malla reduïda d'autovalors de  $C$ . A més, com que els zeros de  $p_d$  intercalen els elements de la malla, els signes de  $p_d(\mu_l)$  seran alternants.

Relacionem  $c$  i  $\theta$  igualant en (10.7) els coeficients de  $\nu$ . Obtenim

$$\frac{1}{c} \left( \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \theta^2 + (c - \theta) \frac{\|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2} \right) = 1 \quad \text{d'on} \quad c = \frac{1}{\Phi^2(C)} (\theta^2 - \theta) = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2 - \|\rho C\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2} \theta \quad (10.9)$$



Els valors de  $p_d$  sobre els autovalors de  $C$  són

$$p_d(\lambda) = \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2}, \quad p_d(\mu_l) = (-1)^{l+1} \sqrt{\theta - c} = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\|\nu\|^2 - \|\rho\bar{C}\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho C\|^2} \theta} = (-1)^{l+1} \frac{\|\rho\bar{C}\|^2 \Phi(\bar{C})}{\|\rho C\|^2 \Phi(C)} \quad (10.10)$$

Essent  $H_C$  el  $C$ -local polinomi de Hoffman en  $\Gamma$ , definim

$$P = \frac{\|\rho C\|^2 \Phi(C)}{\|\rho\bar{C}\|^2 \Phi(\bar{C})} (H_C - p_d) \quad (10.11)$$

que observem és de grau  $d - 1$ . De (10.10) obtenim  $P(\mu_l) = (-1)^{l+1}$  per a  $l = 1, \dots, d$ , amb el que  $P$  és el polinomi alternant associat a la malla d'autovalors de  $C$ . Llavors,

$$P(\lambda) = \frac{\|\rho C\|^2 \Phi(C)}{\|\rho\bar{C}\|^2 \Phi(\bar{C})} \left( \frac{\|\nu\|^2}{\|\rho C\|^2} - \frac{\|\rho\bar{C}\|^2}{\|\rho C\|^2} \right) = \Phi(C) \Phi(\bar{C}),$$

estableix el caràcter  $P$ -frontera de  $C$ . □

**Teorema 10.3.8** *Sigui  $\Gamma = (V, E)$  un graf regular i  $\mathcal{M} = \{\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d\}$  la seva malla d'autovalors. Les dues afirmacions següents són equivalents:*

(a) *El graf  $\Gamma_d$  és regular amb grau  $\delta_d = \frac{|V|(|V|-1)}{(\sum_{i=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_i})^2 + |V| - 1}$ ;*

(b)  *$\Gamma$  és distància-regular i  $\Gamma_d$  és  $(|V|, \delta_d; c, c)$ -fortament regular.*

*Cas de ser certes, el paràmetre  $c$  de  $\Gamma_d$  i la totalitat de l'espectre de  $\Gamma$  poden calcular-se per*

$$c = \frac{\delta_d(\delta_d - 1)}{|V| - 1}, \quad m_i = \frac{\frac{1}{\pi_i}}{\sum_{l=1}^d \frac{1}{\pi_l}} (|V| - 1) \quad (1 \leq i \leq d).$$

**Demostració** Suposem es compleix (a). Si  $d_u + 1$  és el nombre d'autovalors  $u$ -locals, l'excentricitat de  $u$  compleix  $d_u \geq \varepsilon_u \geq d$ , ja que  $|\Gamma_d(u)| = \delta_d > 0$ . Així,  $d_u = d$ , per a tot  $u \in V$ . En particular, el polinomi alternant associat a cada malla  $u$ -local reduïda és independent del vèrtex i el seu valor en  $\lambda$  es dedueix de (a),

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_i} = \sqrt{(|V| - 1) \left( \frac{|V|}{\delta_d} - 1 \right)} = \Phi(u) \Phi(\bar{u}),$$

Per tant, tot vèrtex  $u$  és conjunt  $P$ -frontera i a més  $|\bar{u}| = \delta_d$ . Respecte de les multiplicitats  $u$ -locals, és clar  $m_0^u = \frac{1}{|V|}$  i per a  $1 \leq i \leq d$ , usant el Teorema 5.1.5,

$$m_i^u = \frac{\|\rho u\|^2 \Phi(u)}{\|\nu\|^2 \Phi(\bar{u})} \frac{\pi_0}{\pi_i} = \frac{1}{|V|} \frac{\Phi^2(u)}{\sum_{l=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_l}} \frac{\pi_0}{\pi_i} = \frac{|V| - 1}{|V|} \frac{\frac{1}{\pi_i}}{\sum_{l=1}^d \frac{1}{\pi_l}}, \quad (10.12)$$

que és independent de  $u$ . Així  $\Gamma$  és espectralment regular, amb el que els resultats locals donats per el Teorema 10.3.7 es globalitzen en (b).

Si (b) és cert, podem aplicar el Teorema 10.3.7 a  $C = \{u\}$ , i concloure que cada  $u \in V$  és  $P$ -frontera i que el seu antipodal  $\bar{u}$  compleix  $|\bar{u}| = \delta_d$ . El polinomi alternant donat en (10.11) és ara

$$P = \frac{\|\rho u\|^2 \Phi(u)}{\|\rho \bar{u}\|^2 \Phi(\bar{u})} (H_u - p_d) = \sqrt{\frac{|V| - 1}{\delta_d(|V| - \delta_d)}} (H_u - p_d)$$

Essent  $P(\lambda) = \sum_{l=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_l}$ ,  $H_u(\lambda) = |V|$  i  $p_d(\lambda) = \delta_d$ , obtenim

$$\sum_{l=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_l} = \sqrt{(|V| - 1) \left( \frac{|V|}{\delta_d} - 1 \right)} \quad (10.13)$$

on aïllant  $\delta_d$  obtenim (a).

Podem calcular el paràmetre  $c$  en (10.9), obtenint  $c = \frac{\|\rho \bar{u}\|^2 - \|\rho u\|^2}{\|\nu\|^2 - \|\rho u\|^2} p_d(\lambda) = \frac{\delta_d - 1}{|V| - 1} \delta_d$ . Finalment, de (10.12) resulta l'expressió enunciada per a la multiplicitat de  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq d$ ).  $\square$

Notem que el Teorema 10.3.8 en el cas  $\delta_d = 1$  descriu els grafs distància-regulars 2-antipodals com els grafs tals que  $\Gamma_d$  és unió de còpies de  $K_2$  i a més  $\frac{|V|(|V| - 1)}{\left(\sum_{l=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_l}\right)^2 + |V| - 1} = 1$ , és a dir  $\sum_{l=1}^d \frac{\pi_0}{\pi_l} = |V|$ . Per

tant, en aquest cas resulta un enunciat equivalent al del Teorema 10.2.1. El Teorema 10.3.8 generalitza l'obtingut, en el cas  $d = 3$ , per Van Dam [12] usant la matriu laplaciana del graf i el mètode d'interlacing' de Haemers. Així mateix, Van Dam mostra alguns exemples, corresponents al cas  $d = 3$ .

**Exemple 10.3.9** Considerem  $\Gamma = O_4$  (odd graf de grau 4). És un graf regular d'ordre  $|V| = \binom{7}{3} = 35$ , amb autovalors 4, 2, -1, -3. Llavors  $\sum_{l=1}^3 \frac{\pi_0}{\pi_l} = \frac{17}{3}$ . D'altra banda en  $O_4$  dos vèrtexs  $u, v$  són a distància 3 quan  $|u \cap v| = 1$ , per tant cada vèrtex en té 18 diametralment oposats. Així  $\Gamma_3$  és un graf regular de grau 18. Com

$$\frac{|V|(|V| - 1)}{\left(\sum_{l=1}^3 \frac{\pi_0}{\pi_l}\right)^2 + |V| - 1} = \frac{35 \cdot 34}{\left(\frac{17}{3}\right)^2 + 34} = 18,$$

el Teorema 10.3.8 estableix que  $\Gamma = O_4$  és distància-regular i  $\Gamma_3$  és fortament regular amb paràmetres (35, 18; 9, 9).

# Capítol 11

## Conclusions i perspectives

Les nostres aportacions en la descripció espectral d'un graf han seguit les dues línies següents:

1. Obtenció de fitacions d'elements mètrics i de paràmetres d'un graf mitjançant l'ús dels autovalors (diferents) del graf. Opimització de resultats amb la introducció dels polinomis alternants. L'entorn de treball conté diversos aspectes novedosos:
  - (a) La 'regularització' del graf, amb la introducció de la funció de pesos sobre els vèrtexs donada pel vector  $\nu$ , vector propi amb mínima component la unitat, associat al màxim autovalor de la matriu d'adjacència. Usant aquesta idea un conjunt  $C$  de vèrtexs s'ha representat pel vector  $\rho C = \sum_{u \in C} \nu_u e_u$ , o equivalentment, per la funció característica  $V \rightarrow \mathbb{R}$  definida  $u \mapsto \nu_u$  si  $u \in C$  i  $u \mapsto 0$  si  $u \notin C$ . Amb això els resultats s'expressen en termes de pesos de conjunts, que en el cas regular retornen a ser els cardinals.
  - (b) Introducció dels autovalors  $C$ -locals, com a part de la idea d'espectre  $C$ -local. Llavors els resultats mètrics en termes de cardinals de malles d'autovalors locals i els corresponents a polinomis i pesos de conjunts adopten formes més precises.
  - (c) Traducció en igualtats vectorials de l'assoliment de fites escalars establertes amb els autovalors locals o globals, veure per exemple els Teoremes 5.1.2 i 5.1.5 i conseqüències de la Definició 5.2.1.

L'estudi de conjunts  $P$ -frontera i la relació de conjugació en grafs  $P$ -frontera, permet d'establir propietats estructurals dures. En la part final, el Teorema 10.3.7 mostra la força del caràcter de conjunt  $P$ -frontera. Notem en relació amb els resultats que involucren la totalitat de l'espectre, local o global, que en el cas de conjunts  $P$ -frontera i per a grafs  $P$ -frontera de diàmetre espectralment màxim i on tot vèrtex és extrem d'un diàmetre, la totalitat de l'espectre és deduïble dels autovalors. S'han inclòs alguns treballs laterals bastant laboriosos. Així poden conceptuar-se:

- (a) L'obtenció del polinomi alternant en grafs  $P$ -frontera extremals,  $P = \delta \star H$ , en termes del nombre de circuits per qualsevol vèrtex diametral i del polinomi de Hoffman, Proposició 5.6.5.

- (b) Exemples de grafs  $P$ -frontera de diàmetre baix, Secció 5.7. Conté l'estudi d'una família de grafs, derivats dels odd grafs per un automorfisme involutiu, amb obtenció completa del seu espectre.
  - (c) Una exposició de teoria de polinomis ortogonals de variable discreta, Capítol 6. Donat que d'altra manera l'exposició en els capítols següents tindria de veure's interrompuda per l'obtenció dels resultats necessaris, s'ha optat per fer-ne un estudi independent. L'interès radica en la introducció dels sistemes canònics de polinomis ortogonals, els sistemes  $x_0$ -maximals i les relacions entre polinomi terminal i funció de pesos. D'altra banda la metodologia usada és original, tractant d'obtenir amb brevetat els resultats desitjats.
  - (d) Una obtenció explícita dels polinomis distància per grafs distància-regulars 2-antipodals, Seccions 6.8 i 10.1, en termes dels autovalors.
2. La introducció del concepte de partició pseudo-equitativa, ha permès d'estendre la distància-regularitat respecte d'un vèrtex doblement. D'una banda, considerant la partició en capes associada a la distància a un conjunt, i d'altra substituint el recompte d'adjacències per la densitat d'adjacència entre capes. Així hem estudiat la  $C$ -local pseudo-distància-regularitat, caracteritzant-la per una igualtat numèrica, Teorema 9.4.5. Aquest enunciat, obtingut amb economia per la feina feta en el Capítol 6, ha estat l'eina amb la que s'ha establert el resultat principal d'aquest treball, Teorema 9.5.2, en què es dona una caracterització de la distància-regularitat via l'espectre i la regularitat del graf donat per pas als vèrtexs diametralment oposats. Altre cop, ara amb l'ús de la totalitat de l'espectre, l'equivalència entre una igualtat numèrica i una de vectorial, Teoremes 7.2.5 i 8.0.19, ha estat la clau dels resultats.

Hem explotat les caracteritzacions de la  $C$ -local pseudo-distància-regularitat i la distància-regularitat, en dues direccions:

- (a) Descripció de la distància-regularitat 2-antipodal en termes només dels autovalors, Teorema 10.2.1, i el cas general  $r$ -antipodal per la regularitat del graf de diàmetres i una expressió de les multiplicitats en termes de  $r$  i els autovalors, Teorema 10.2.4.
- (b) El caràcter  $P$ -frontera d'un conjunt  $C$  comporta l'estructura  $C$ -local pseudo-distància-regular del graf. Del suggeritiu fet que el polinomi alternant prengui només tres valors diferents sobre els autovalors del graf, en resulta que el graf, amb una natural funció de pesos a les arestes, tingui una estructura fortament regular local generalitzada, Teorema 10.3.7. Aquest resultat es globalitza en una caracterització de la conjunció de la distància-regularitat amb que el graf de diàmetres sigui  $(n, k; c, c)$ -fortament regular.

La tècnica seguida per nosaltres, amb el trasfons de la desigualtat de Schwarz, ha permès d'obtenir severes conseqüències derivades d'igualtats escalars. Els resultats estructurals descrits per igualtats numèriques segueixen la tradició dels clàssics referents a les caracteritzacions de la regularitat pel grau mig o la mitja ponderada dels quadrats dels autovalors. Les possibilitats no s'esgoten amb el que aquí hem fet (conjunts  $P$ -frontera i  $Q$ -frontera). Fiol [21] ha establert posteriorment un resultat d'aquest tipus respecte de conjunts independents i l'assoliment de la igualtat en la fitació del nombre d'independència,  $\alpha_k \leq \frac{2\|\nu\|^2}{P_k(\lambda) + 1}$ . Sembla, via l'experiència, que en elles han de jugar la totalitat de l'espectre o almenys tots els autovalors.

Els resultats sobre distància-regularitat s'han obtingut per globalització de la local pseudo-distància-regularitat respecte de vèrtexs via la regularitat espectral del graf. En aquest sentit ha estat crucial

que per a un graf regular, el fet que  $\Gamma_d$  sigui regular amb grau  $\frac{|V|}{\pi_0^2 \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l \pi_l^2}}$ , comporti la regularitat espectral del graf. La teoria exposada en els Capítols 8 i 9 conté elements més generals, la  $C$ -local pseudo-distància-regularitat, que els usats en el nostre resultat principal sobre distància-regularitat. Això duu a pensar en altres processos de globalització, per exemple partint de 2-clics (arestes),  $r$ -clics, cicles, ..., lligats a conceptes apropiats de regularitat espectral.

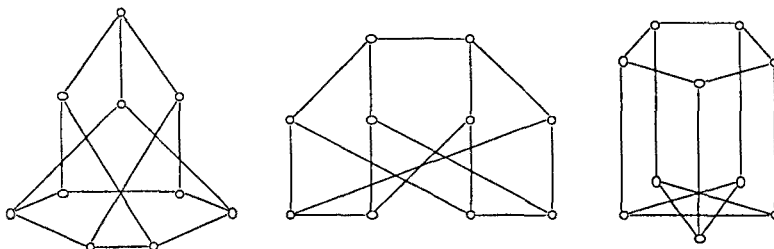


Figura 11.1: El graf de Petersen amb diverses estructuracions distància-regulars.

Sembla un tema amb futur la deducció de propietats mètriques d'un graf, introduint una funció de pesos  $\tilde{E}$  sobre les arestes i els vèrtexs (autollaços amb pes). Considerant les classes d'equivalència  $[E]$  de les funcions de pesos respecte de la relació  $E_1 \sim E_2$  quan  $E_1(u, v) \neq 0 \Leftrightarrow E_2(u, v) \neq 0$  ( $u \neq v$ ), les implicacions mètriques deduïdes amb una funció  $E$  són aplicables a l'únic graf (sense autollaços) subjacent. Una comunicació de Delorme en aquest sentit, anima l'autor a creure que les qüestions apuntades en la Subsecció 10.3.1 tenen possibilitats. Les propietats derivades del fet que  $E$ , no necessàriament no negativa, tingui un autovalor simple amb autovector de components no nul·les, sembla orientar a que pot fer part del paper que en matrius no negatives fa l'autovalor màxim.

Tractarem de fer un futur benevolent respecte d'aquestes línies d'actuació.



# Bibliografia

- [1] N. Alon i V.D. Milman,  $\lambda_1$ , Isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators, *J. Combin. Theory Ser. B* **38** (1985), 73–88.
- [2] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fàbrega i M.A. Fiol, On the connectivity and the conditional diameter of graphs and digraphs, *Networks* **28** (1996), 97–105.
- [3] N. Biggs, Some odd graph theory, *Annals New York Acad. Sci.* **319**, New York, 1979, 71–81.
- [4] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.
- [5] A.E. Brouwer, A.M. Cohen i A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] F.R.K. Chung, Diameter and eigenvalues, *J. Amer. Math. Soc.* **2**, No. 2 (1989), 187–196.
- [7] F.R.K. Chung, V. Faber i T.A. Manteuffel, An upper bound on the diameter of a graph from eigenvalues associated with its Laplacian, *SIAM J. Discrete Math.* **7**, No. 3 (1994), 443–457.
- [8] F.R.K. Chung, A. Grigor'yan i S.-T. Yau, Upper bounds for eigenvalues of the discrete and continuous Laplace operators, *Advances in Math.* **117** (1996), 165–178.
- [9] F.R.K. Chung, A. Grigor'yan i S.-T. Yau, Eigenvalues and diameters for manifolds and graphs. submitted.
- [10] D.M. Cvetković, M. Doob i Sachs, *Spectra of Graphs—Theory and Applications*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980; Academic Press, New York, 1980; second edition: 1982; Russian translation: Naukova Dumka, Kiev, 1984; third edition: Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, 1995
- [11] D.M. Cvetković, M. Doob, I. Gutman i A. Torgàsev. *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. Annals of Discrete Mathematics **36**, North-Holland, Amsterdam (1988).
- [12] E.R. van Dam, Bounds on separated pairs of subgraphs, eigenvalues and related polynomials, Reseach Memorandum FEW 699, Tilburg University, The Netherlands, 1995.
- [13] E.R. van Dam, *Graphs with Few Eigenvalues*. Ph.D. Thesis, Tilburg University, 1996.
- [14] E.R. van Dam, Bounds on special subsets in graphs, eigenvalues and association schemes, *J. Algebraic Combin.*, to appear.
- [15] E.R. van Dam i W.H. Haemers, Eigenvalues and the diameter of graphs, *Linear and Multilinear Algebra* **39** (1995), 33–44.

- [16] E.R. van Dam i W.H. Haemers, A characterization of distance-regular graphs with diameter three, *J. Algebraic Combin.*, to appear.
- [17] C. Delorme i P. Solé, Diameter, covering index, covering radius and eigenvalues, *European J. Combin.* **12** (1991), 95–108.
- [18] C. Delorme i J.P. Tillich, Eigenvalues, eigenspaces and distances to subsets, *Discrete Math.* **165–166** (1997), 161–184.
- [19] M.A. Fiol, Weight odd parameters and spectra of graphs, submitted.
- [20] M.A. Fiol, Some applications of the proper and adjacency polynomials in the theory of graph spectra, *Electron. J. Combin.* **4** (1997), # R21.
- [21] M.A. Fiol, An eigenvalue characterization of antipodal distance-regular graphs, submitted.
- [22] M.A. Fiol i E. Garriga, The alternating and adjacency polynomials, and their relation with the spectra and diameters of graphs, *Discrete Applied Math.*, submitted.
- [23] M.A. Fiol i E. Garriga, From local adjacency polynomials to locally pseudo-distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, to appear.
- [24] M.A. Fiol i E. Garriga, Pseudo-distance-regularity around a set, orthogonal polynomials, and completely regular codes, *J. Combin. Theory Ser. B*, submitted.
- [25] M.A. Fiol, E. Garriga i J.L.A. Yebra, On a class of polynomials and its relation with the spectra and diameters of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **67** (1996), 48–61.
- [26] M.A. Fiol, E. Garriga i J.L.A. Yebra, From regular boundary graphs to antipodal distance-regular graphs, *J. Graph Theory*, to appear.
- [27] M.A. Fiol, E. Garriga i J.L.A. Yebra, Locally pseudo-distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **68** (1996), 179–205.
- [28] M.A. Fiol, E. Garriga i J.L.A. Yebra, Boundary graphs: The limit case of a spectral property (I), *J. Graph Theory*, submitted.
- [29] M.A. Fiol, E. Garriga i J.L.A. Yebra, The alternating polynomials and their relation with the spectra and conditional diameters of graphs, *Discrete Math.* **167–168** (1997), 297–307.
- [30] M.A. Fiol, E. Garriga i J.L.A. Yebra, Boundary graphs: The limit case of a spectral property (II), *Discrete Math.*, to appear.
- [31] C.D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*. Chapman and Hall, 1993.
- [32] C.D. Godsil i B.D. McKay, Feasibility conditions for the existence of walk-regular graphs, *Linear Algebra Appl.* **30** (1980), 51–61.
- [33] C.D. Godsil i J. Shawe-Taylor, Distance-regularised graphs are distance-regular or distance-biregular, *J. Combin. Theory Ser. B* **43** (1987), 14–24.
- [34] W.H. Haemers, *Eigenvalue Techniques in Design and Graph Theory*, Math. Centre Tract **121**, Mathematical Centre, Amsterdam, 1980.



