A.1. APÉNDICE 1. Método de Richmond

El método de Newton converge de forma cuadrática, y está basado en una aproximación lineal (tangente) a la función en el punto x_k:

$$f(x) \approx l(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

La ecuación $l(x_k+1) = 0$ conduce a la fórmula de iteración de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Con el propósito de acelerar el método de Newton, muchos artículos sobre análisis numéricos sugieren frecuentemente la utilización de una aproximación a f en x_k de mayor orden. Aquí se realizará una aproximación diferente.

Hipótesis:

f es derivable suficientes veces

f tiene una raíz simple en $x = a$ ($f(a)=0$ y $f'(a) \neq 0$)

La aproximación inicial x_0 está lo suficientemente cerca de a para que la convergencia en a se dé con total seguridad.

Teorema

Añadiendo a las anteriores hipótesis que:

$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{m-1}(a) = 0$

$f^m(a) \neq 0$

Suponiendo un x_k conocido, por el desarrollo de Taylor, junto con el hecho que f y la mayoría de sus derivadas desaparecen en $x=a$, existen unas constantes ξ_0 y ξ_1 entre a y x_k tal que:

$$f(x_k) = f'(a)(x_k - a) + \frac{f^{(m)}(\xi_0)}{m!}(x_k - a)^m$$

$$f'(x_k) = f'(a) + \frac{f^{(m)}(\xi_1)}{(m-1)!}(x_k - a)^{m-1}$$

Si se sustituyen estas expresiones en la fórmula de Newton:

$$x_{k+1} - a = x_k - a - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{f'(x_k)}\left\{\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{(m-1)!} - \frac{f^{(m)}(\xi_0)}{m!}\right\}(x_k - a)^m$$

si se fija un dominio $N = [a-l,a+l]$ de a para un l adecuado pequeño, de forma que las desigualdades

$$|f'(x)| \geq c_0 > 0$$

$$|f^{(m)}(x)| \leq c_1$$

son ciertas en N para algunas constante c_0 y c_1. Si $x_k \in N$, entonces

$$\left|\frac{mf^{(m)}(\xi_1) - f^{(m)}(\xi_0)}{f'(x_k)m!}\right| \leq \frac{mc_1 + c_1}{m!c_0} =: C$$

y por lo tanto

$$|x_{k+1} - a| \leq C|x_k - a|^m$$

para una constante C.

Cuanto más se parece f a una función lineal, más rápidamente convergerá la iteración de Newton.

El objetivo es acelerar la convergencia del método de Newton y para ello se acondicionará una función determinada para que parezca casi lineal en un dominio de la raíz de manera que se acelere la convergencia del método de Newton. Como es evidente los ceros de esta nueva función deben ser los mismos.

Para el caso $f(a)=0$, $f'(a)>0$, y $f''(a) \neq 0$, si se considera la función $F(x) = f(x)\cdot g(x)$ donde la función $g(x)$ se determinará a continuación. Con $F(a) = 0$ y, si $g(a) \neq 0$ entonces $F'(a) \neq 0$. Así

$$F''(a) = 2f'(a)g'(a) + f''(a)g(a)$$

Se desea que se cumpla la ecuación $F''(a) = 0$ en el punto $x = a$. Si se despeja $g'(x)$ y se integra se obtiene como solución general:

$$g(x) = C / \sqrt{f'(x)}$$

Con $C = 1$ y aplicando el método de Newton a $F(x)$ conduce a:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left(f'(x_k)\right)^2 - \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)}$$