

Apéndice 4.1:

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA MODELO DE PLASTICIDAD: EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Después de definir en el capítulo 4 el funcionamiento de un análisis de sensibilidad de formas para un material con comportamiento elastoplástico, se procede a ilustrar el funcionamiento los algoritmos 4.3 y 4.4 con diferentes ejemplos. Primero se prueban mallas simples formadas por un único elemento para comprobar el funcionamiento general de la sensibilidad y, posteriormente, se abordan problemas bidimensionales y tridimensionales más completos.

GENERALIDADES

Para cada problema planteado se resolverá la ecuación de equilibrio y se calculará su sensibilidad según el procedimiento incremental descrito, de esta manera se irá construyendo la curva de comportamiento de la estructura a medida que se vaya cargando. En todos los casos, se encontrará una medida aproximada del error que se comete en el cálculo de la sensibilidad. Recuérdense las reflexiones acerca de dicho problema, y las objeciones realizadas sobre las diferentes estrategias de validación de la sensibilidad. En concreto, las más común, la comparación con las diferencias finitas, ya se demostró en el capítulo 2 que en ocasiones podía no ofrecer suficiente fiabilidad en el cálculo real de la sensibilidad. Como consecuencia de dichas disquisiciones se propuso una estrategia distinta, descrita en el apartado 2.5.2, y basada en las capacidades de extrapolación de resultados a partir del conocimiento de la sensibilidad.

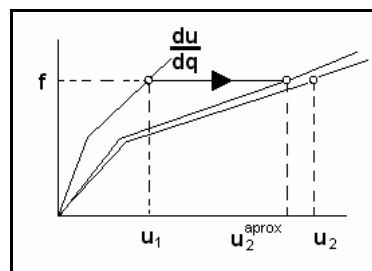


Ilustración E4.1: Extrapolación y error

Recordemos que se definió el error como: el error relativo que aparece al comparar el comportamiento de una curva extrapolada con la información de sensibilidad y la curva de equilibrio de la estructura modificada.

Así, se define la siguiente fórmula:

$$\text{error} = \frac{|u^{\text{real}} - u^{\text{extrapolado}}|}{|u^{\text{real}}|} \quad \text{E4.0.1}$$

En general, en los ejemplos que siguen se definen dos tipos de gráficas:

Curvas estructurales de comportamiento

El objetivo de dichas curvas, es comparar de forma *cualitativa* la calidad de la sensibilidad. En definitiva se dibujarán las relaciones fuerza-desplazamiento de:

- El diseño original.
- El diseño modificado.
- La extrapolación de primer orden a partir de la estructura original mediante el resultado del análisis de sensibilidad.

Curvas de error relativo

En este otro caso, la información de la bondad de la sensibilidad es de tipo *cuantitativo*. Se dibujará la norma de los errores en la extrapolación, según la fórmula E4.0.1, para dos tipos de cálculo:

- Diseño original extrapolado con la sensibilidad.
- Diseño original como predicción de comportamiento.

En primer lugar, se aborda el cálculo de un problema unidimensional y, posteriormente, se definen mallas bidimensionales sencillas sometidas a diferentes estados de sollicitación. La intención de dichos cálculos es comprobar el comportamiento constitutivo y su relación con la sensibilidad bajo estados de tracción, flexión y corte.

Ejemplo 4.1:

Objetivo: Se pretende observar el comportamiento del algoritmo sobre un problema unidimensional isostático trabajando a esfuerzo axial. La estructura se discretiza con dos elementos simples de tipo barra trabajando a tracción pura, y tomando como variable de diseño la longitud de los elementos.

En el problema que se define a continuación, no se realiza un análisis de la sección transversal como variable de diseño, a pesar de que desde el punto de vista de ingeniería sería más interesante, porque en este caso particular sería un análisis de parámetros y no de formas.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^6$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0	
Tensión elástica límite σ_o	$4.0 \cdot 10^2$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	1.0E6	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Unidimensional con área de 2 cm².
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal $\sigma_y = \sigma_o + H\kappa$
- 15 pasos de carga, con incrementos de 5N en cada nudo e integrando con una cuadratura 1x1.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la longitud del primer elemento.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado el análisis de la estructura modificada según una variación del 20% de la variable de diseño. es decir se incrementa en 1 cm la longitud de la barra primera y se desplaza en 1cm la segunda sin alterar su tamaño.

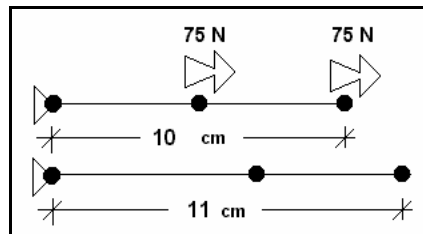


Ilustración E4.2: Primer problema, dos barras a tracción

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo central que se obtienen en los casos siguientes:

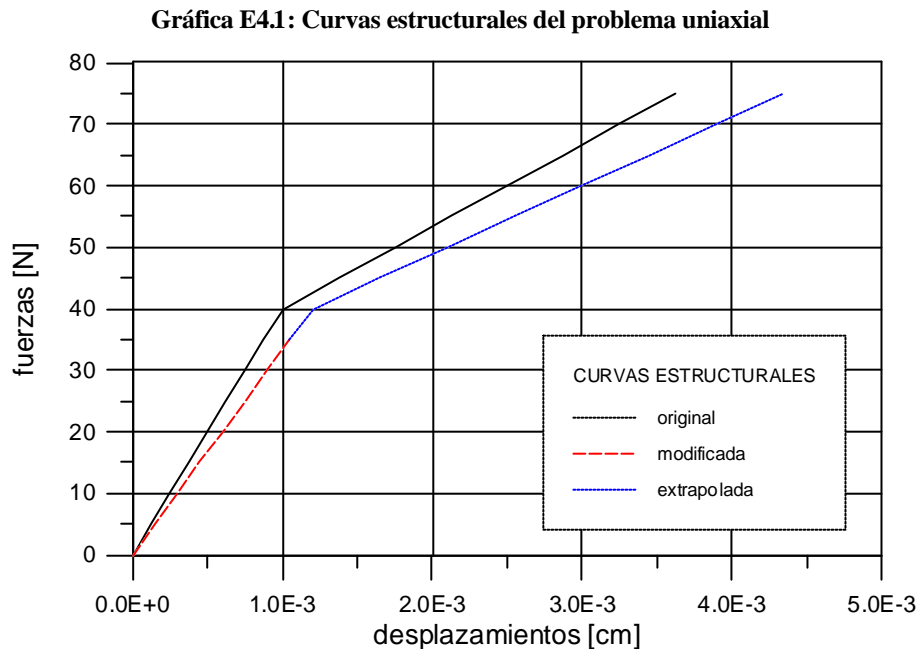
- El diseño original
- El diseño modificado.
- La extrapolación de primer orden de la estructura original mediante la sensibilidad.

Se ha considerado que dicho estudio reproduce de forma simple el correcto funcionamiento del análisis de sensibilidad en detrimento de las diferencias finitas, tal y como se ha comentado en el capítulo 2.

En el cálculo analítico por Resistencia de Materiales y para los valores del problema definidos anteriormente, se calcula que la carga última elástica toma el valor de:

$$P = \sigma A = 80\text{N}$$

Por lo tanto, en el nudo central el valor de la carga aplicada debe ser exactamente la mitad, tal y como muestra la gráfica E4.1.



Nótese que, en este caso, la curva de la extrapolación de comportamiento y la curva modificada coinciden perfectamente, motivo por el cual se han representado mitad y mitad. Las razones de tan buen funcionamiento hay que buscarlas en la naturaleza del problema, por un lado el estado uniaxial de tensiones; por otro, el modelo con endurecimiento lineal, y finalmente la relación variable de diseño - tipo de carga. Todas estas condiciones, aseguran que la matriz tangente de la formulación se comporta como una verdadera secante en la rama plástica, tal y como sucede en la rama elástica. Además, en este caso, incluso sucede que, tanto la matriz tangente consistente con la formulación (no consistente) como la consistente con el esquema de integración, que se han definido en el apartado A4.1.3 del capítulo 4, se comportan idénticamente bien en la resolución del sistema 4.2.6.

No es difícil demostrar que, en este caso en particular, ambas matrices tangentes A4.1.30 y A4.1.31 coinciden. En concreto, en el caso uniaxial de tensiones la única componente con sentido físico del tensor de tensiones es σ_x . En consecuencia, se define la primera componente del desviador según A4.1.11, y se obtiene que:

$$\sigma'_x = \frac{2}{3}\sigma_x \quad \text{E4.1.1}$$

y en base a la definición A4.1.7 del segundo invariante del desviador, se halla que:

$$J'_2 = \frac{1}{3}\sigma_x^2 \quad \text{E4.1.2}$$

En consecuencia, el vector de flujo A4.1.10 se convierte en:

$$f = \{1\} \quad \text{E4.1.3}$$

Por lo tanto, la matriz tangente no consistente se convierte, en virtud de A4.1.30, en la expresión siguiente:

$$D_T^{nc} = E - \frac{E^2}{H + E} \quad \text{E4.1.4}$$

A continuación, se calcula la segunda matriz tangente, la que es consistente con el esquema de integración. En primer lugar se define A4.1.34, tomando sólo la primera componente se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{2g(\sigma)}[2] - \frac{1}{g(\sigma)}\{1\}\{1\}^t = 0 \quad \text{E4.1.5}$$

y substituyendo la expresión anterior E4.1.5 en A4.1.33, resulta que:

$$Q = I \quad \text{E4.1.6}$$

Por consiguiente, de A4.1.32 se deduce que la matriz,

$$R = D \quad \text{E4.1.7}$$

Ahora ya se está en condiciones de calcular la matriz tangente consistente, y por tanto, se obtiene de A4.1.31 que:

$$D_T^c = E - \frac{E^2}{H + E} \quad \text{E4.1.8}$$

Como puede observarse es una expresión análoga a la E4.1.4.

El sentido físico está plenamente garantizado al relacionar dichos tensores constitutivos con el módulo tangente de un modelo plástico unidimensional:

$$D_T^{nc} = D_T^c = E_T \quad \text{E4.1.9}$$

Ejemplo 4.2:

Objetivo: Se pretende observar el comportamiento del algoritmo sobre un elemento bidimensional cuadrático trabajando a tracción pura, como en el caso anterior, y tomando como variable de diseño la longitud de la pieza.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.0 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coficiente de Poisson	0	
Tensión elástica límite σ_o	$2.5 \cdot 10^4$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 100 pasos de carga con incremento de 500N en cada nodo. Se integra con una cuadratura 2x2 en el elemento.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la longitud del elemento.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis normal de la estructura modificada según un incremento de 1cm (5%) de la variable de diseño.

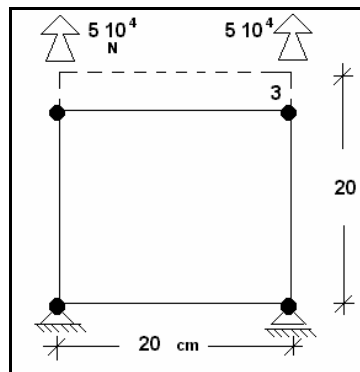
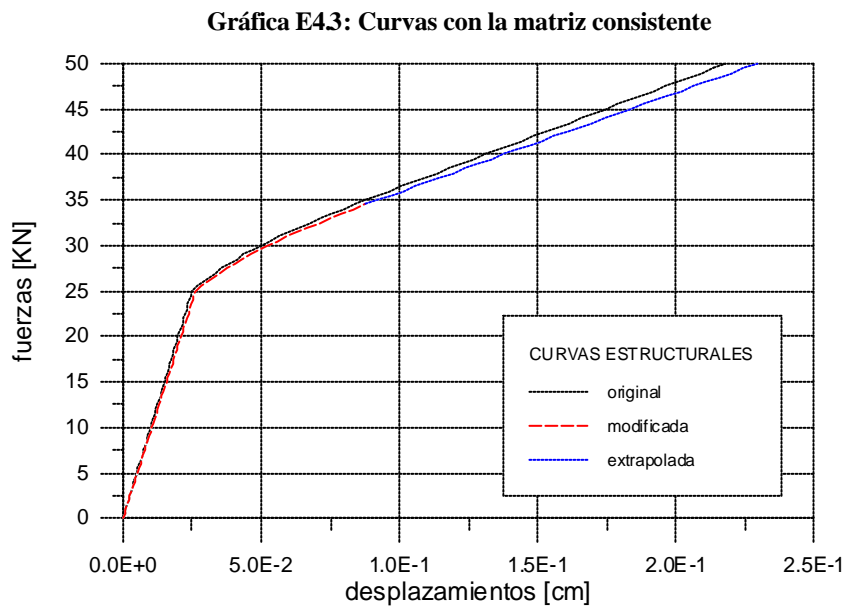
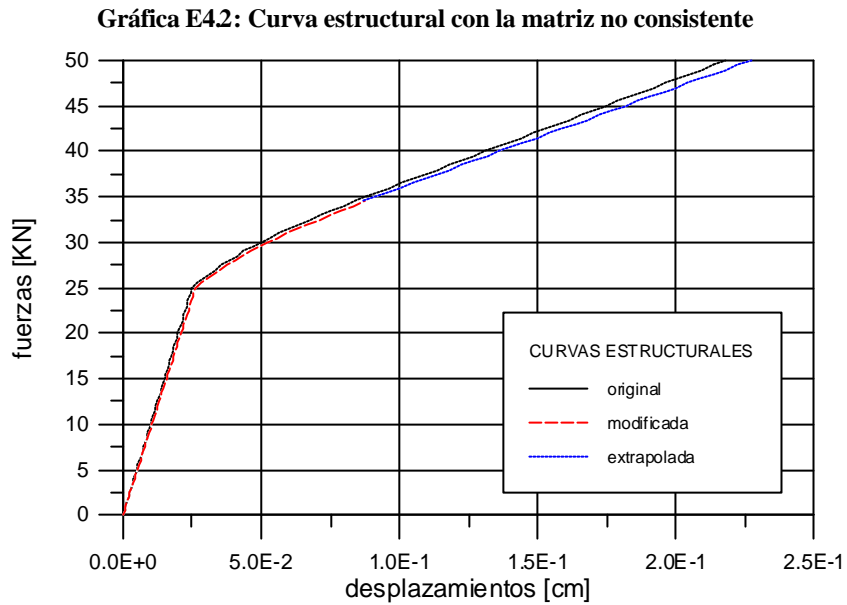


Ilustración E4.3: Tracción pura sobre un elemento bidimensional

En este caso el cálculo analítico por Resistencia de Materiales para los valores de trabajo del problema, determina un valor de la carga última elástica de:

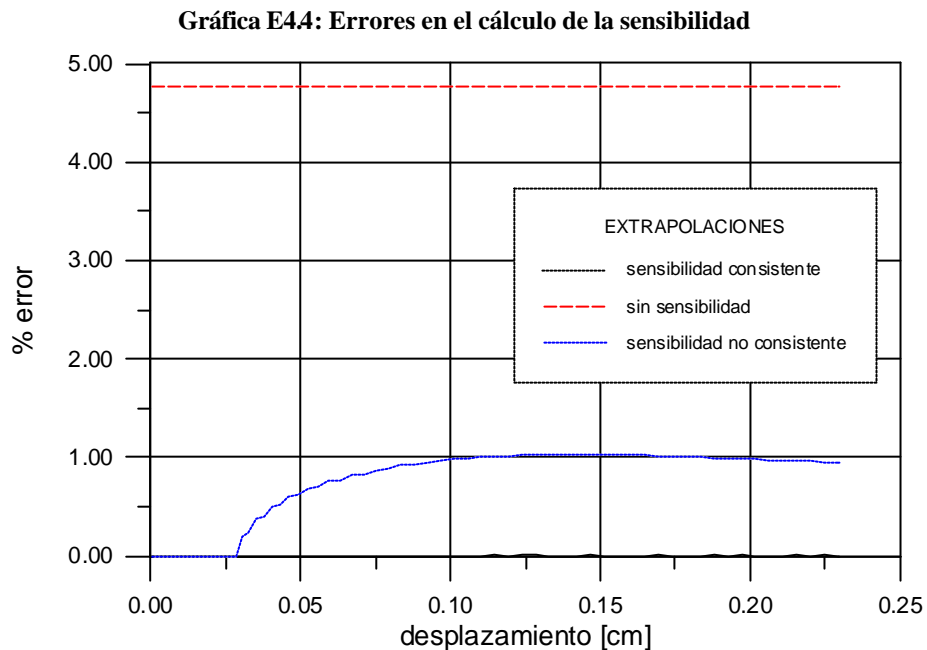
$$P = \sigma A = 50 \text{KN}$$

En consecuencia, la relación fuerza-desplazamiento en el nudo 3 representada en la curva E4.2 debe empezar a mostrar la plastificación alrededor de los 25 KN, como así efectivamente es.



La curva E4.2 se ha obtenido utilizando la matriz tangente consistente con el esquema de integración, si se compara con la solución obtenida a través de la matriz tangente no consistente se consigue la gráfica E4.3.

A simple vista el resultado parece idénticamente bueno, pero al analizar el error cometido mediante la fórmula E4.0.1 se observa que la matriz consistente produce un error cercano a cero que se solapa con el eje inferior de la gráfica, y por lo tanto una solución muy buena, mientras que en el segundo caso el error sí que existe, aunque es claramente pequeño, 1%, si se compara con la extrapolación sin sensibilidad.



En este ejemplo sencillo se confirma la apreciación de autores como Kleiber y Vidal según los cuales el uso de una matriz tangente consistente con la integración produce mejores resultados.

Sin embargo, nótese que en el problema anterior uniaxial se observó que ambas matrices coincidían y que ofrecían idénticos resultados; y en este ejemplo, el comportamiento estructural es claramente asimilable a un problema uniaxial a tracción, dado que no existe tensión de corte y que el coeficiente de Poisson se toma como nulo. Además, el valor estimado de la última carga elástica así parece confirmar dicha suposición de comportamiento. En consecuencia, dado que el comportamiento estructural es equivalente, intuitivamente, parece que en el cálculo de la sensibilidad tampoco debería haber ninguna diferencia entre ambas formulaciones, consistente y no consistente, tal y como sucedía en el ejemplo 4.1.

Para que las matrices consistente y no consistente produzcan el mismo resultado debe cumplirse que las expresiones A4.1.30 y A4.1.31 coincidan, para que suceda de tal hecho será absolutamente necesario que:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} \quad \text{E4.1.11}$$

y por lo tanto, de la ecuación A4.1.32 necesariamente se deduce que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \text{E4.1.12}$$

En consecuencia, demostrar que esa igualdad es imposible implicará que las matrices consistente y no consistente son diferentes.

La expresión A4.1.33 define a la matriz \mathbf{Q} de la siguiente forma:

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad \text{E4.1.13}$$

Se observa que el único término que puede convertir dicha matriz en la identidad es la derivada del vector de flujo porque el multiplicador plástico necesariamente será mayor que cero.

Por lo tanto, a continuación, se calcula dicha matriz para el caso de deformación plana pero con un tensor de tensiones claramente uniaxial, considerando sólo la componente¹ σ_x como no nula.

Se define el desviador de las tensiones expresado en notación vectorial como:

$$[\boldsymbol{\sigma}']^t = \left[\frac{2}{3}\sigma_x \quad -\frac{1}{3}\sigma_x \quad -\frac{1}{3}\sigma_x \quad 0 \right] \quad \text{E4.1.14}$$

y el segundo invariante A4.1.7 del desviador será:

$$J_2' = \frac{1}{3}\sigma_x^2 \quad \text{E4.1.15}$$

de donde se deduce que el criterio de fallo A4.1.6 resulta:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x \quad \text{E4.1.16}$$

Por su parte, el vector de flujo de A4.1.10 conduce a la siguiente expresión:

$$f^t = \left\{ 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right\} \quad \text{E4.1.17}$$

Por lo tanto, substituyendo en A4.1.34 se obtiene en este caso que:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\sigma_x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & -3/4 & 0 & \\ & 3/4 & 0 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{E4.1.18}$$

¹ En realidad, para el sistema de ejes natural con la definición geométrica de la ilustración E4.3, dicha tensión debería ser σ_y , pero se girarán los ejes 90 grados en sentido antihorario por comodidad.

En vista de todo ello, se deduce que ambas matrices tangentes no coinciden aunque la naturaleza estructural del problema sí que produzca los mismos resultados. Por consiguiente, en general, se recomienda utilizar la matriz tangente consistente con la integración y señalar, también que, en general, nunca van a ser iguales ambas matrices, aunque la definición del problema conduzca a resultados equivalentes en el equilibrio.

De aquí en adelante se utilizará siempre la matriz consistente con la integración.

Ejemplo 4.3:

Objetivo: En esta ocasión se pretende observar el comportamiento del algoritmo sobre el mismo problema estructural anterior, pero tomando como variable de diseño la anchura de la pieza. Por lo tanto, el comportamiento estructural será el mismo.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.0 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0	
Tensión elástica límite σ_o	$2.5 \cdot 10^4$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 100 pasos de carga con incrementos de 500N en cada nodo. Se utiliza una cuadratura de 2x2 en la integración del elemento.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la anchura del elemento.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original con la sensibilidad, y otro que consiste en la estructura modificada según un incremento de 1cm en la variable de diseño.

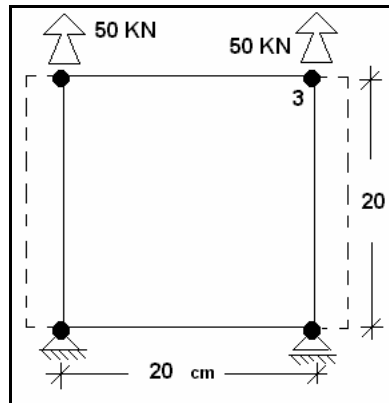


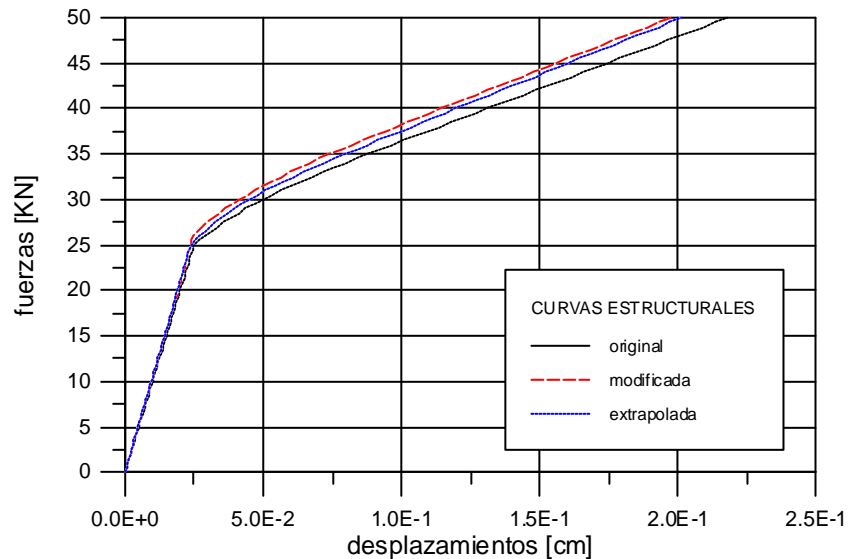
Ilustración E4.4: En este caso la variable de diseño es el ancho

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

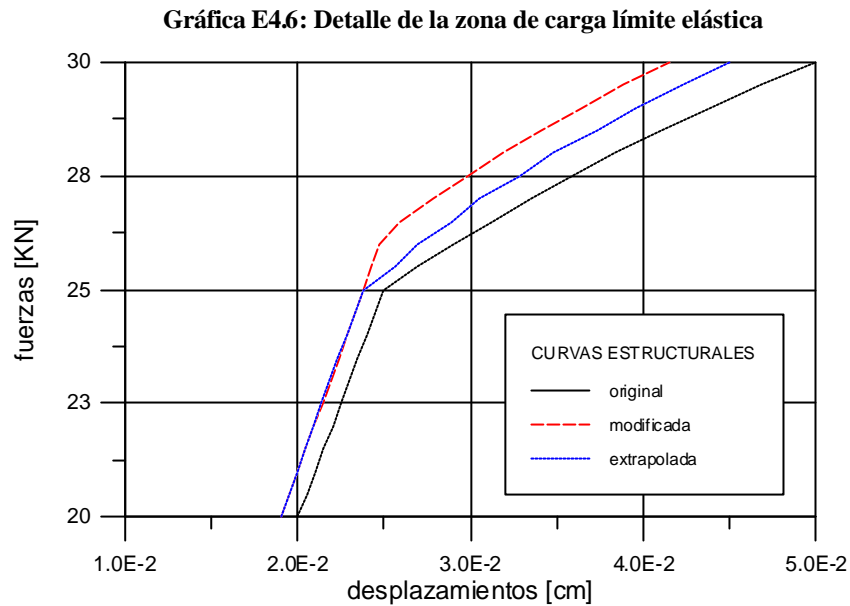
Como en los caso anteriores se define el mismo grupo de curvas de comportamiento:

- El diseño original
- El diseño modificado.
- La extrapolación de primer orden como en los casos anteriores.

Gráfica E45: Curvas estructurales del ejemplo 4.3



A primera vista ya se aprecia que la extrapolación no es tan buena como en los caso anteriores, y si se dibuja con detalle la zona de la carga límite elástica se obtiene el gráfico E4.6.

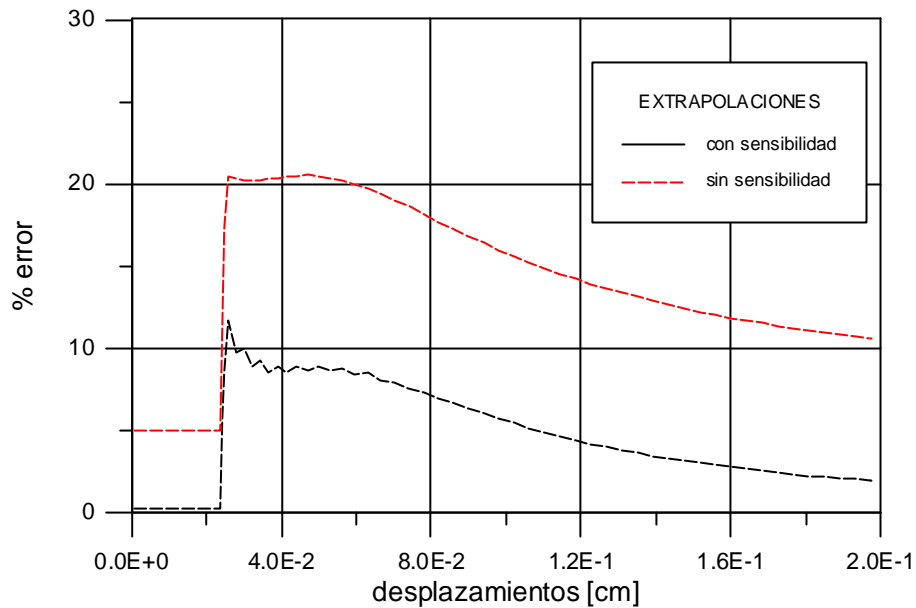


Claramente se observa que el algoritmo no es capaz de predecir la carga límite elástica en la nueva configuración. La razón es sencilla, mientras la estructura original ya ha entrado en plasticidad, la estructura modificada todavía se mantiene en régimen elástico, por lo tanto hay un desacople entre el comportamiento estructural de ambos diseños. Ciertamente, la extrapolación de tensiones es capaz de indicar que el criterio de fallo todavía no se supera en la estructura modificada y señalar que se está cometiendo un error, pero no puede, de forma simple, solventar dicho inconveniente. Este problema se relaciona con otro aspecto que se había comentado en el capítulo 2, la perturbación de las mallas puede alterar el comportamiento estructural del modelo, en este caso sucede al revés, el modelo cambia de comportamiento pero la perturbación y el análisis de sensibilidad asociado no son capaces de capturar dicho fenómeno.

Este problema se comentará más extensamente en el capítulo 5, a propósito de los modelos de daño, y se propondrán estrategias de solución.

Si se observan las curvas de error en el cálculo de la sensibilidad se obtiene que en la zona cercana a la carga límite elástica dicha magnitud crece mucho, cerca de un 10%, aunque no hay que olvidar que la variación en la variable de diseño es de casi el 5%. En el tramo final disminuye, cuando la deformación plástica es muy grande. Sin embargo, se destaca que en cualquier caso, la extrapolación obtenida mediante el análisis de sensibilidad proporciona un valor más ajustado que el que se consigue utilizando la información de la estructura original.

Gráfica E4.7: Error en el ejemplo 4.3



Ejemplo 4.4:

Objetivo: Después de trabajar con estados de tracción pura, se pretende observar el comportamiento del algoritmo sobre un estado de flexión simple. Se considera un elemento bidimensional cuadrático trabajando a flexión, y tomando como variable de diseño la anchura de la pieza.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.0 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_0	$2.5 \cdot 10^4$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento no lineal.
- 100 pasos de carga, con incrementos de 200N en cada nodo. La cuadratura es 2x2.

- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la anchura del elemento.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis normal de la estructura con un incremento de 1cm en la variable de diseño.

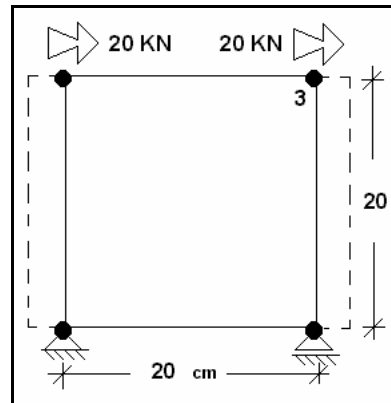


Ilustración E4.5: Definición geométrica del ejemplo 4.4

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

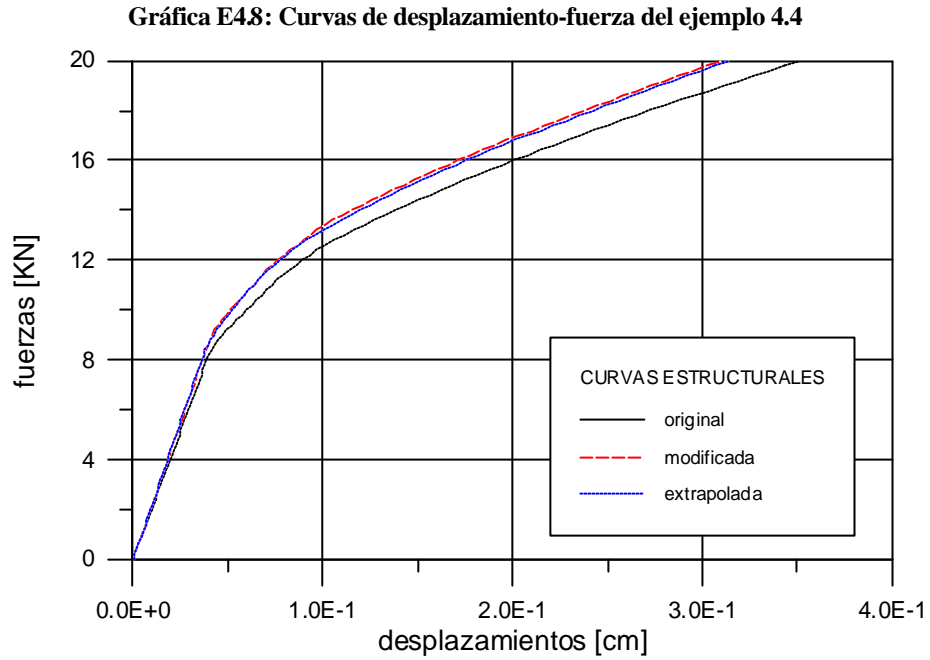
Por Resistencia de materiales, en un estado puro de flexión se obtiene que:

$$P_{max} = \frac{\sigma W}{l}$$

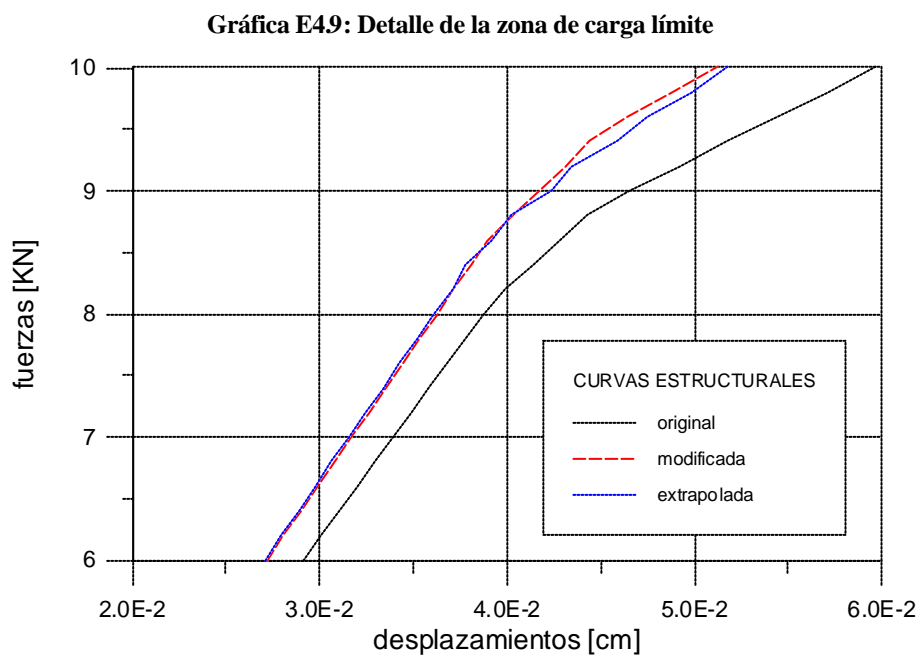
y con los datos del problema dicha carga toma el valor de $P_{max} = 8.33 \text{ kN}$

La solución numérica no ofrece un valor cercano, por dos motivos: en primer lugar porque el elemento de 4 nodos no representa bien el fenómeno de flexión, y por lo tanto la pieza se comporta de forma más rígida de lo que debiera. En segundo lugar, porque la posición del punto de integración donde se está evaluando la tensión no corresponde a la fibra más solicitada de la estructura.

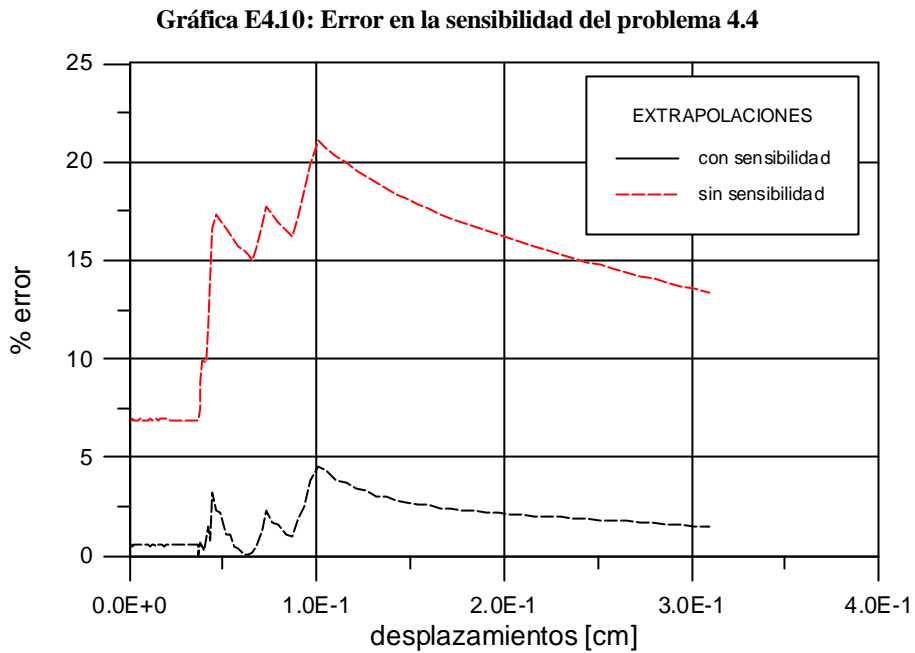
Las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento que se obtienen en el nodo 3 son las que aparecen en la gráfica E4.8:



Si se observa con más detalle la zona de la carga límite elástica se visualiza la siguiente gráfica:



Si se analiza el error, se obtiene:



Exceptuando la pequeña oscilación en la zona donde se cambia de régimen elástico a plástico, los resultados son sorprendentemente buenos. En realidad, intuitivamente, un cambio en el canto repercute mucho más en la inercia $I(x^3)$ que en el cálculo del área $A(x)$. Por lo tanto, deberían existir mayores problemas en la extrapolación de la carga límite en un problema de flexión que en un problema de tracción pura, de acuerdo con los razonamientos de los ejemplos anteriores. Sin embargo, si bien es cierto y lógico, sólo lo es en parte.

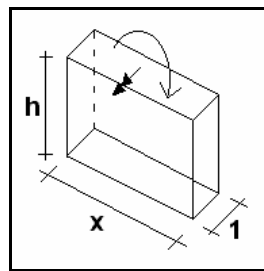


Ilustración E4.6: Sección solicitada a flexión

Realizando un análisis de sensibilidad de parámetros, como analogía al de formas que se está estudiando, por Resistencia de Materiales se tendrían las siguientes cargas máximas en la sección estructural de la ilustración E4.6.

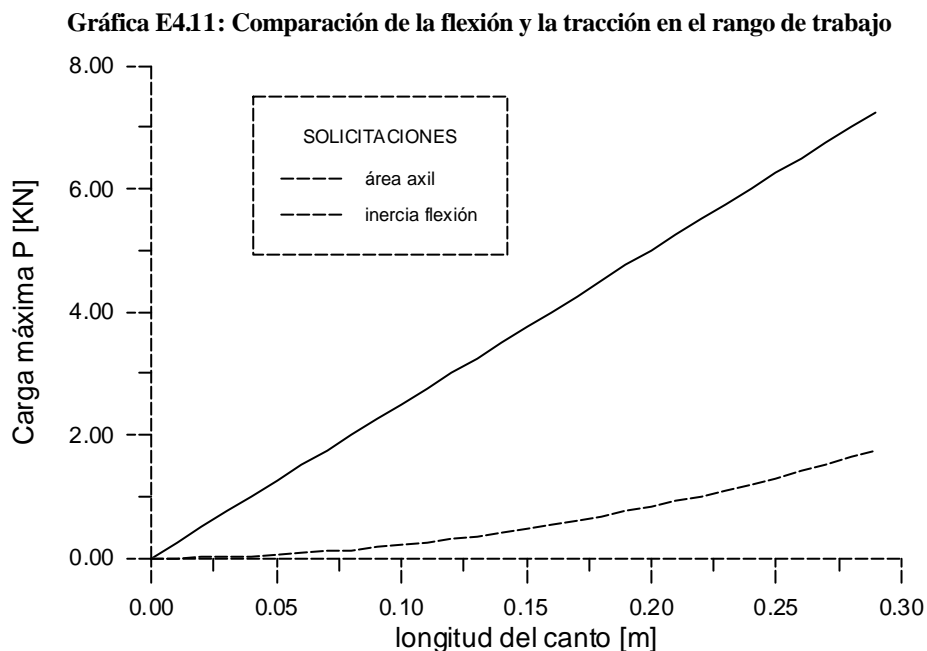
- En el caso de tracción pura y suponiendo que la tensión límite toma el valor de σ_o , y teniendo el área la expresión de: $A = x$

$$P_{max} = x\sigma_o$$

- En el caso de flexión pura y siendo la inercia del problema $I = \frac{1}{12}x^3$ se tiene que:

$$P_{max} = \frac{x^2\sigma_o}{6h}$$

Por lo tanto, efectivamente la carga máxima parece que va a crecer más deprisa en el caso de la flexión. Al substituir las variables de las expresiones anteriores por los valores del problema real se obtiene el gráfico siguiente:



Donde se observa que realmente, en el rango de trabajo, la variación en el canto es más sensible en el problema de tracción pura (pendiente más elevada) que en el de flexión (a pesar de ser parábola). Por lo tanto, ante pequeños cambios en la forma del canto, el comportamiento estructural se modificará más deprisa bajo la solicitación axil que bajo la flexión, motivo por el cual los resultados obtenidos son peores en el estado axil. Nótese que un cambio de carga máxima representa una forma distinta de régimen de comportamiento, ya que se pasa de un estado elástico a un estado plástico, y ya se ha observado que la sensibilidad no es capaz de calcular correctamente dichos cambios bruscos en el comportamiento estructural. Este problema nunca aparece en el rango

elástico, porque ante cualquier nivel de fuerzas la estructura siempre es capaz de generar una respuesta.

Ejemplo 4.5:

Objetivo: El caso de estudio siguiente es un elemento cuadrático de 8 nodos trabajando a flexión y tomando como variable de diseño la anchura de la pieza. Se sabe que dicho elemento reproduce mejor el mecanismo de flexión que el elemento del ejemplo 4.4, motivo por el que se espera obtener mejores resultados en cuanto a la reproducción real del comportamiento.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_o	$2.5 \cdot 10^4$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 150 pasos de carga de 50N. Integración con 3x3 puntos.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la anchura del elemento.
- Se realizan los dos análisis de los ejemplos anteriores, variando hasta 1 cm el canto.

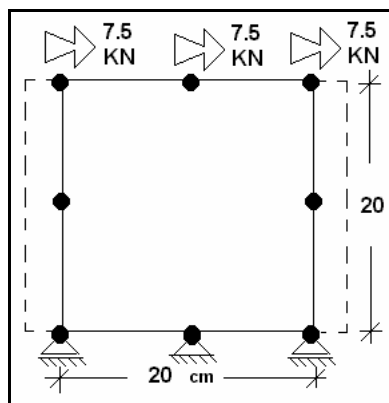
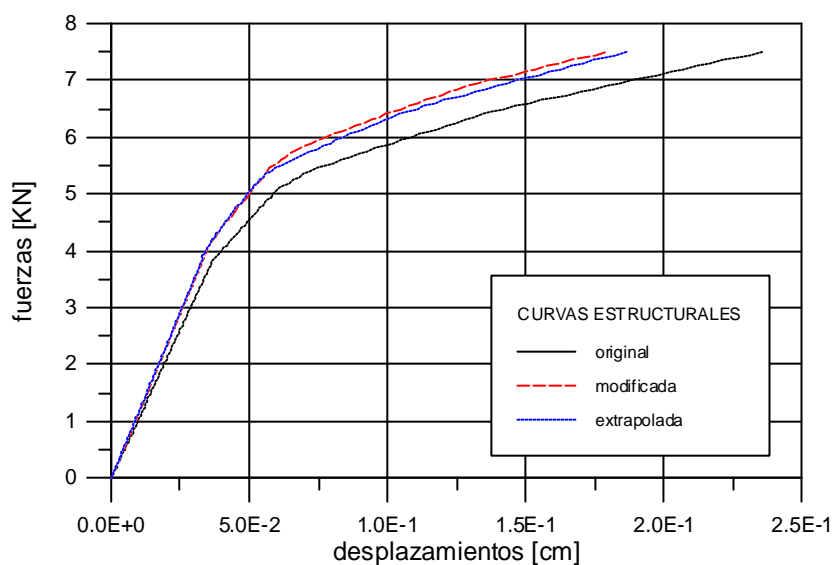


Ilustración E4.7: Definición geométrica del ejemplo

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

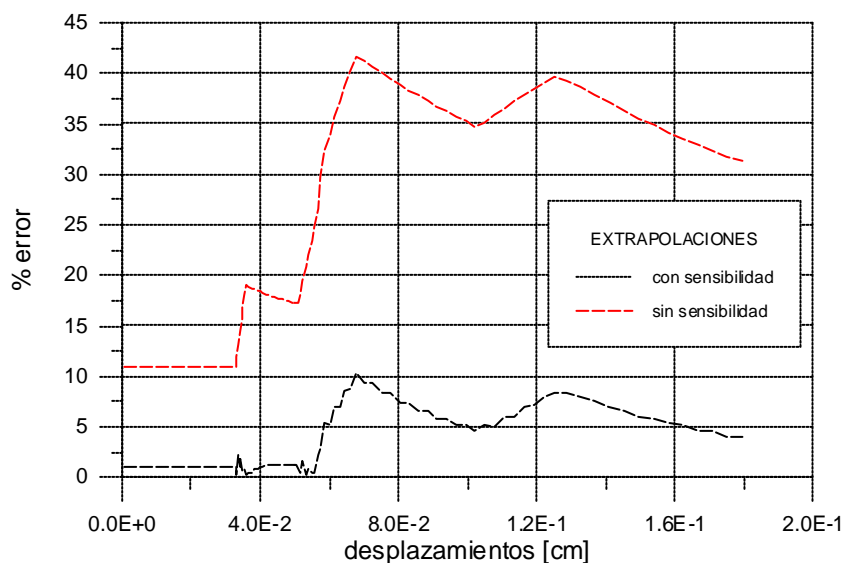
Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo central. Tal y como se esperaba, la aproximación a la carga última es mejor que en el caso anterior, pero sigue existiendo un error grande debido a que la tensión se evalúa en el punto de integración y no en la fibra real más solicitada.

Gráfica E4.12: Curvas estructurales del problema 4.5



La curva del error es la siguiente:

Gráfica E4.13: Error en flexión con elemento de 8 nudos



El error es bajo y demuestra una buena aproximación, aunque oscila un poco más que en el elemento de 4 nodos.

Ejemplo 4.6:

Objetivo: En este caso se analiza la flexión sobre el elemento de cuatro nodos, pero considerando como variable de diseño la longitud de la pieza.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.0 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_o	$2.5 \cdot 10^4$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 100 pasos de carga. Cada vez se aplican 200N. Integración con 2x2 puntos.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la longitud del elemento.
- Se realizan dos análisis, estructura original con sensibilidad y estructura modificada según una variación del 5% (1cm) de la variable de diseño.

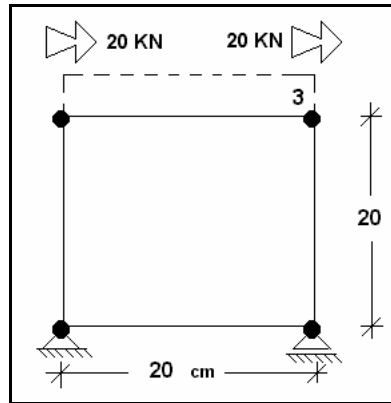


Ilustración E4.8: Geometría del problema

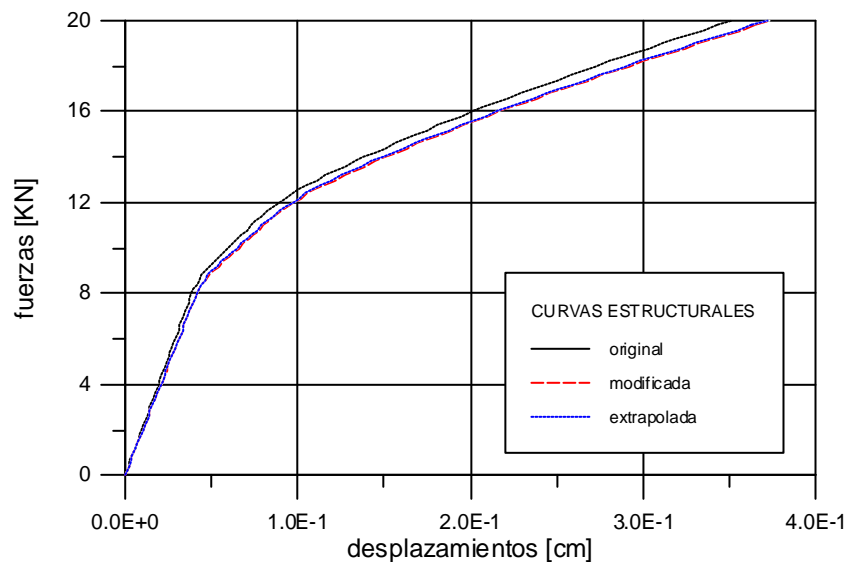
4.6

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo 3 según:

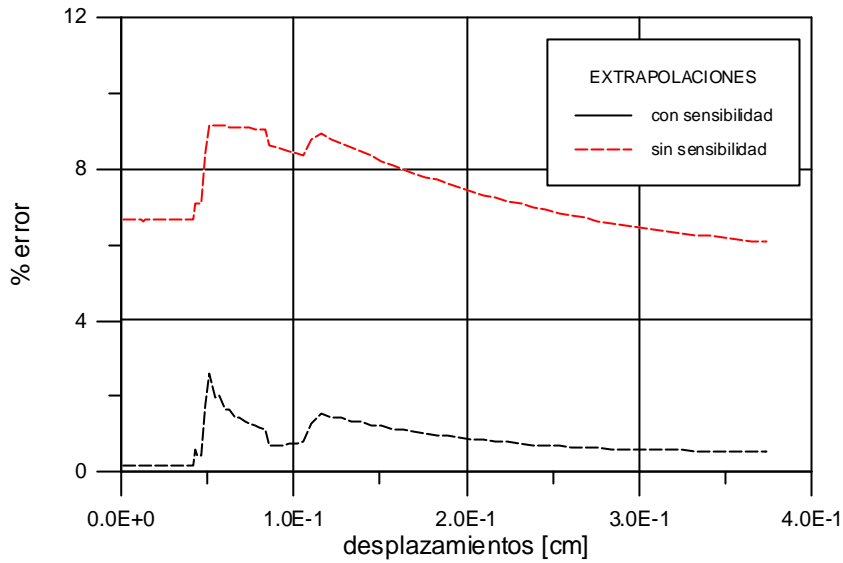
- El diseño original
- El diseño modificado.
- La extrapolación de primer orden de la estructura original, a partir de la sensibilidad.

Gráfica E4.14: Respuesta del ejemplo 4.6



Tal y como se esperaba los resultados son muy buenos. Obsérvese que el error siempre se mantiene muy bajo y estable.

Gráfica E4.15: Error en el ejemplo 4.6



Ejemplo 4.7:

Objetivo: En este ejemplo se realiza el mismo cálculo que en el anterior 4.6 pero con un elemento de 8 nodos.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_o	$2.5 \cdot 10^4$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de placa de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 150 pasos de carga. Los incrementos de carga se realizan con pasos de 50N en cada nodo. La cuadratura es de 3x3.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la anchura del elemento.
- Se realizan los dos análisis de los ejemplos anteriores, con una variación de 1cm en la longitud.

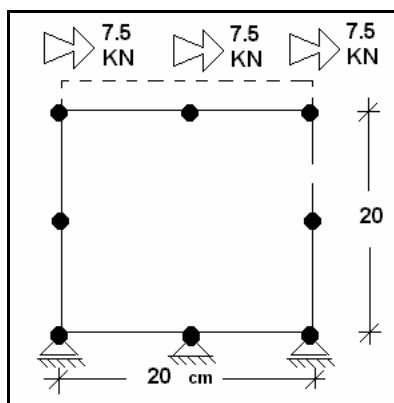
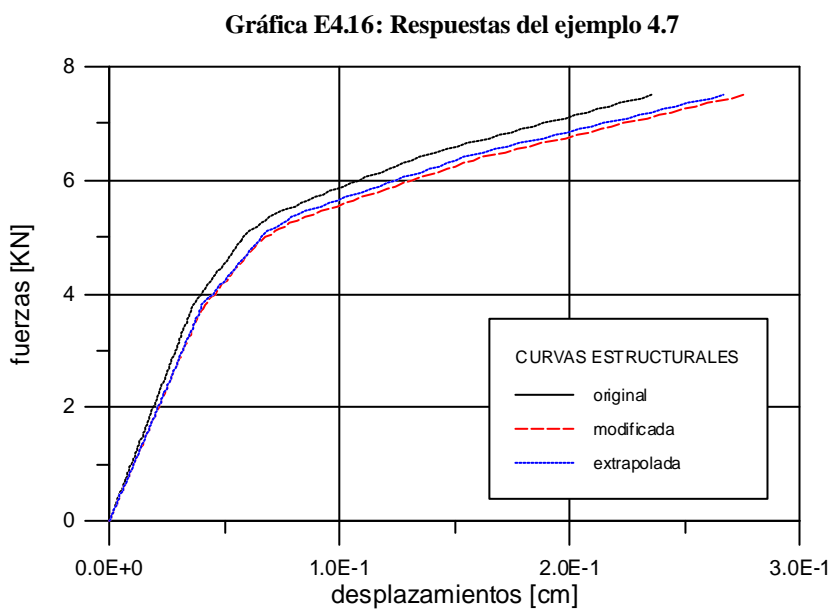


Ilustración E4.9: Definición geométrica del ejemplo 4.7

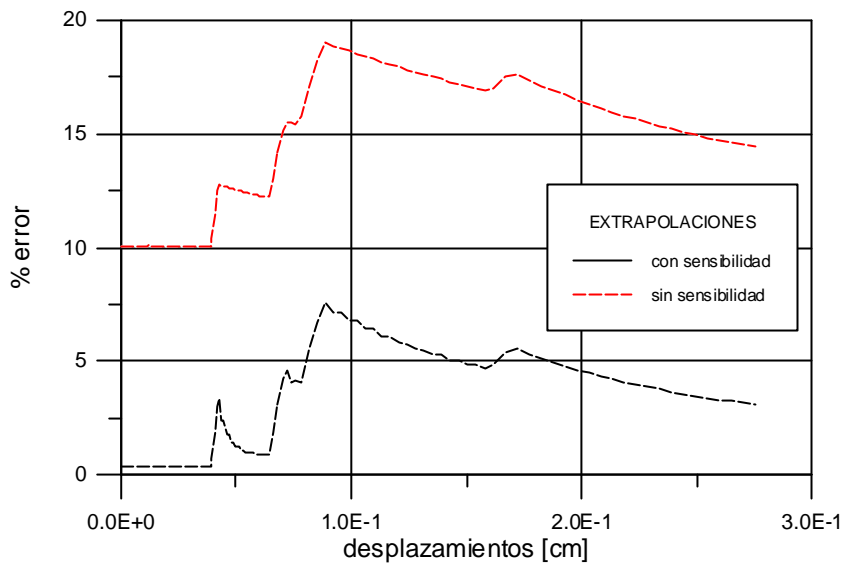
VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo central, obteniéndose:



Como en el ejemplo comparado anterior 4.4 y 4.5 del cuadrilátero de 4 y 8 nodos, la solución es más estable en el de 4 pero más inexacto el análisis estructural. En cambio el de 8 nodos da mejores resultados en el análisis estructural y resultados más oscilantes en la sensibilidad.

Gráfica E4.17: Error en la sensibilidad del ejemplo 4.7



Ejemplo 4.8:

Objetivo: En este ejemplo se realiza un cálculo a corte puro para validar el comportamiento en el caso de este tipo de solicitación. De esta manera también se podrá apreciar que tipo de influencia ejerce el cortante en los estados mixtos de tensiones que se obtienen en la flexión.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^7$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_0	100.0	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^6$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 30 pasos de carga con incrementos de 10N. Utilizando una cuadratura de 2x2 en el elemento.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la anchura del elemento.

- Se realizan los dos análisis de los ejemplos anteriores y se incrementa en 1cm la variable de diseño.

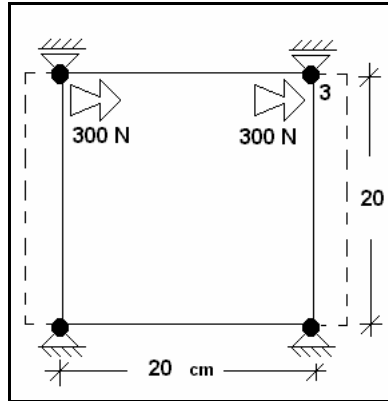
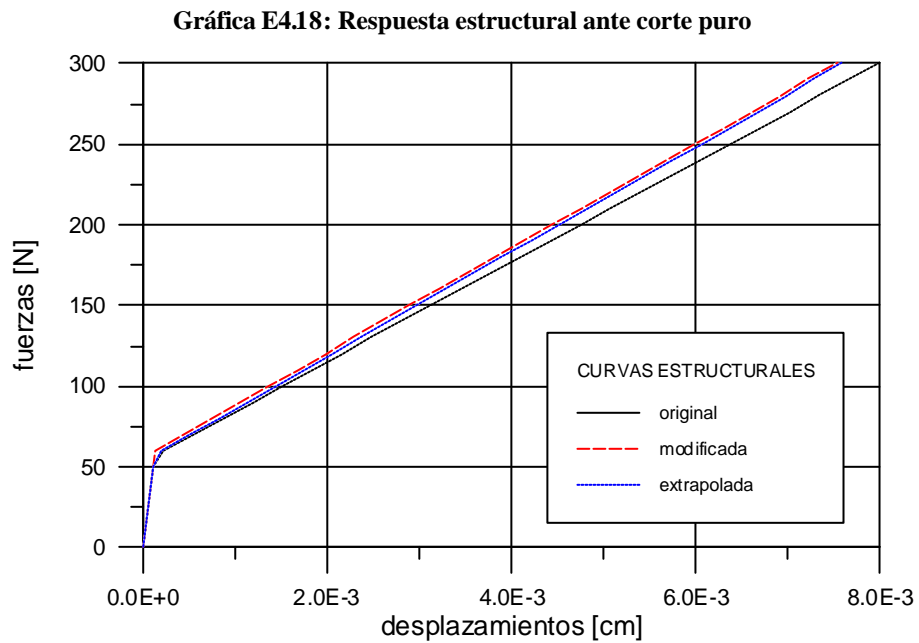


Ilustración E4.10: Definición geométrica del corte puro

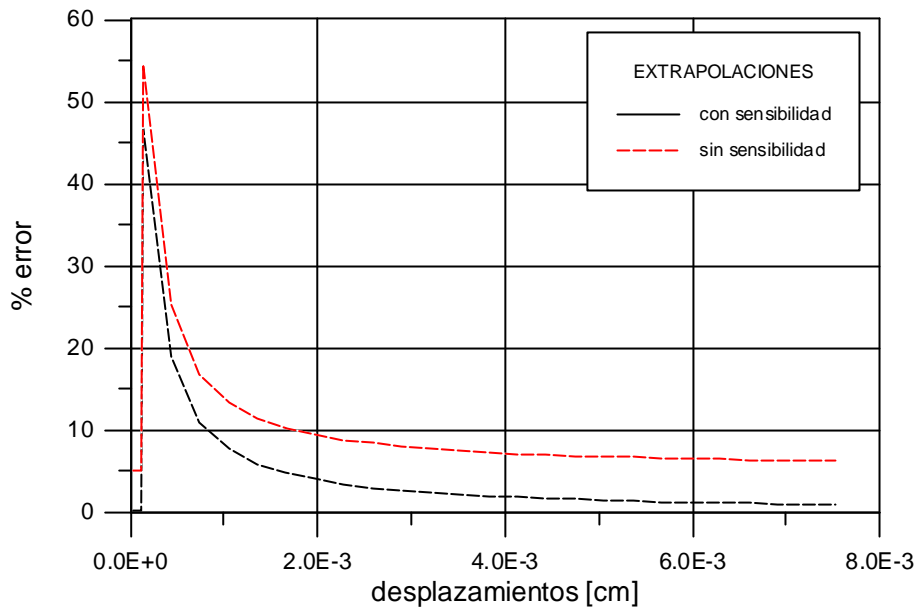
VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo 3, obteniéndose:



En el caso de evaluación del error se tiene que:

Gráfica E4.19: Error en el corte puro



Se observa que en la zona donde se inicia la plasticificación la sensibilidad no ofrece valores buenos. Al igual que la tracción, la diferencia del régimen estructural provoca la imposibilidad de una buena extrapolación, pero en este caso el cortante provoca mayores errores que en los casos anteriores.

Ejemplo 4.9:

Objetivo: En este ejemplo se realiza un cálculo a corte puro para un elemento de 8 nodos.

DESCRIPCIÓN

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	2.1 10 ⁷	KN/m ²
Coficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_0	100.0	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	2.0 10 ⁶	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Deformación plana con espesor de 1cm.
- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal.
- 30 pasos de carga aplicados en incrementos de 6N en cada nodo. La integración se realiza con una cuadratura de 3x3 puntos.

- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la anchura del elemento.
- Se realizan los dos análisis de los ejemplos anteriores con el incremento de 1 cm en el ancho.

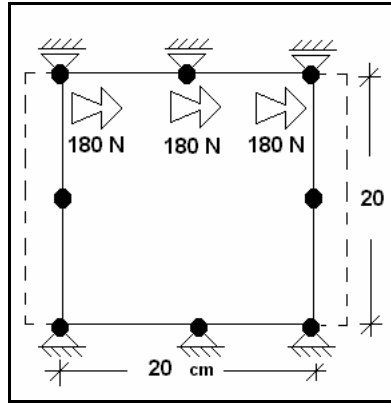
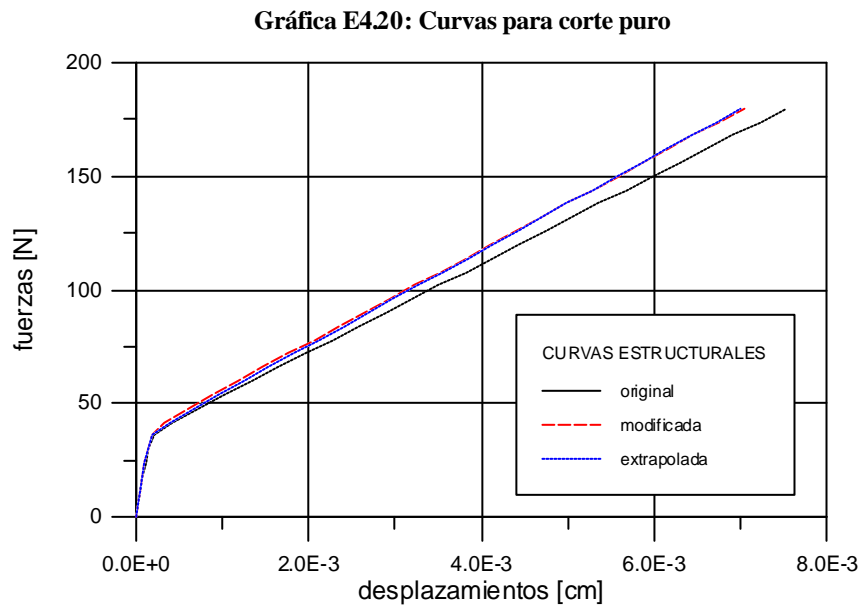


Ilustración E4.11: Definición geométrica del ejemplo 4.9

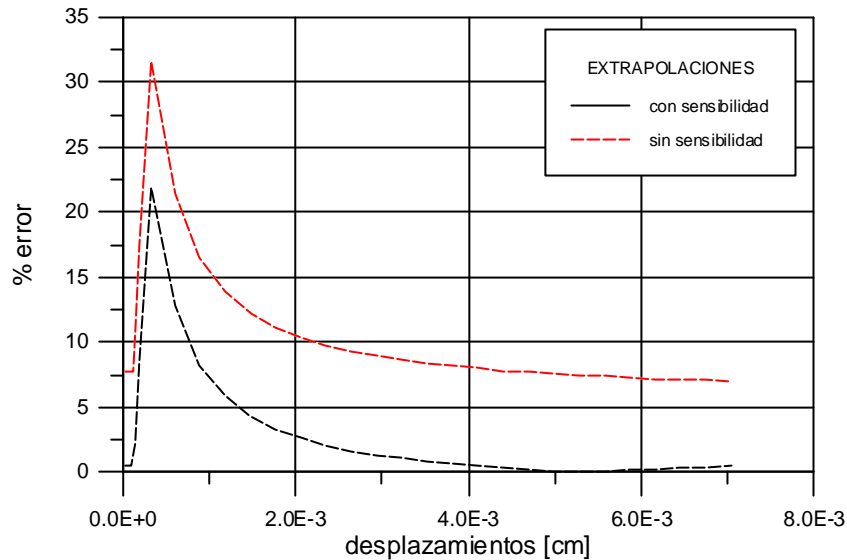
VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo central, con los siguientes resultados:



En el caso del error se aprecia un comportamiento parecido al del elemento anterior. Sin embargo, la magnitud del error es un poco más grande, motivo por el cual posiblemente el elemento en flexión se comporta de forma más inestable en el cálculo de la sensibilidad, aunque la precisión del análisis estructural es mayor.

Gráfica E4.21: Error en el ejemplo 4.9



Algunas conclusiones previas que pueden extraerse de los ejemplos sencillos son:

- En general, el algoritmo funciona correctamente obteniendo valores de sensibilidad con errores razonablemente bajos.
- El problema no lineal puede tener regímenes de comportamiento diferentes entre las estructuras original y modificada. Por lo tanto, en estos casos la extrapolación nunca conducirá a un punto correcto de equilibrio.
- Se ha detectado que para ciertas relaciones de la variable de diseño-tipo de sollicitación, la extrapolación de primer orden no describirá con suficiente precisión el comportamiento estructural.
- Se confirma que la matriz tangente consistente produce mejores resultados, aunque para cierto tipo de problemas, como los unidimensionales coinciden ambas formulaciones.

Después de verificar el correcto funcionamiento en casos estructurales simples se han definido problemas con mallas más completas en dos y tres dimensiones. La intención es comprobar el funcionamiento del algoritmo en problemas más complejos.

Ejemplo 4.10:

Cierta empresa desea lanzar un nuevo producto al mercado de la construcción, unos plafones fabricados con un material que plastifica con endurecimiento a partir de una cierta tensión umbral. Durante el proceso de diseño se pretende probar el comportamiento de las piezas frente a posibles errores en la fabricación de las mismas. En concreto, el ingeniero desea saber como va a afectar, en cuanto a comportamiento estructural, que en una partida las placas tengan una longitud mayor de la normal.

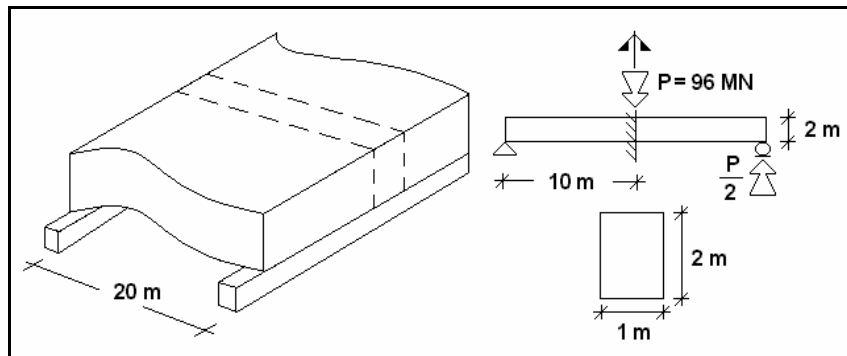


Ilustración E4.12: Planteamiento estructural del ejemplo 4.10

Si se supone el plafón como una placa rectangular simplemente apoyada en los bordes libres, se puede descomponer el cálculo en un conjunto de vigas paralelas con dichas condiciones de contorno. Cada viga funciona independientemente y todas tienen la misma deformación longitudinal.

El hecho de considerar que la tercera dimensión del plafón es infinitamente larga significa que las vigas tienen la contracción lateral impedida, por lo tanto su funcionamiento estructural se considera bajo la hipótesis de deformación plana. Esto significa que las vigas van a tener una rigidez a flexión superior a lo normal en consecuencia, se pueden considerar que trabajan bajo un estado de tensión plana.

Esta hipótesis de comportamiento estructural viene avalada por el hecho que no existen otras condiciones de contorno más que las descritas, las cargas son perpendiculares al plano medio del plafón y se distribuyen longitudinalmente.

Para realizar el análisis se ha simplificado el problema y aprovechando la simetría de la pieza se ha procedido a calcular según el esquema estructural que aparece en la ilustración E4.12.

DESCRIPCIÓN GENERAL

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^8$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0.2	
Tensión elástica límite σ_o	$2.5 \cdot 10^5$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	$2.0 \cdot 10^7$	KN/m ²

Tipo de análisis:

- Tensión plana con espesor de la viga de 1 m.
- 300 pasos de carga, incrementando en 160 KN cada vez. La integración se calcula con una cuadratura de 3x3 puntos.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado el análisis de la estructura modificada.

MALLA 1: DISCRETIZACIÓN 4 ELEMENTOS

Tipo de análisis particular:

- Se realizan dos análisis, en el primero la longitud de la pieza total se alarga 20 cm, que representa una variación del 2%. En cambio, en el segundo la variación es de un 20%.

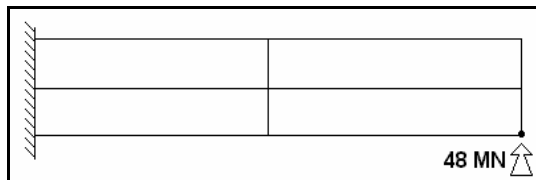
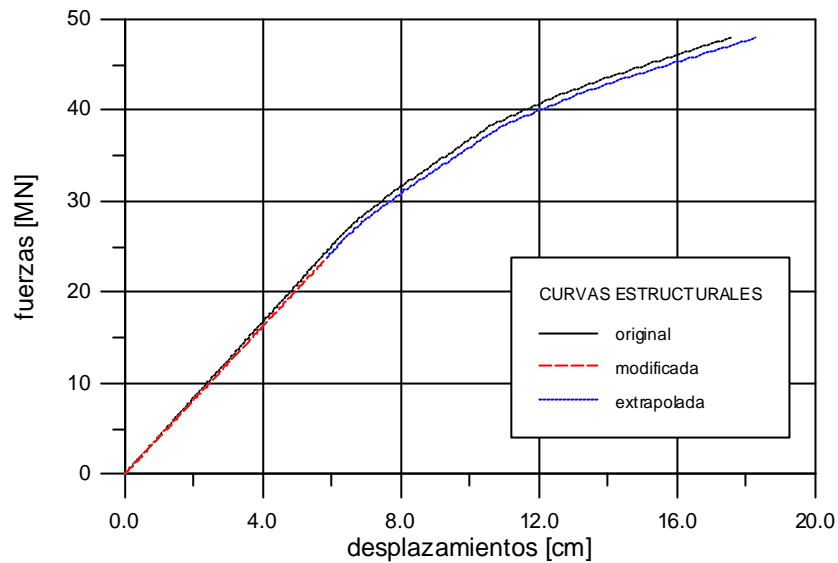


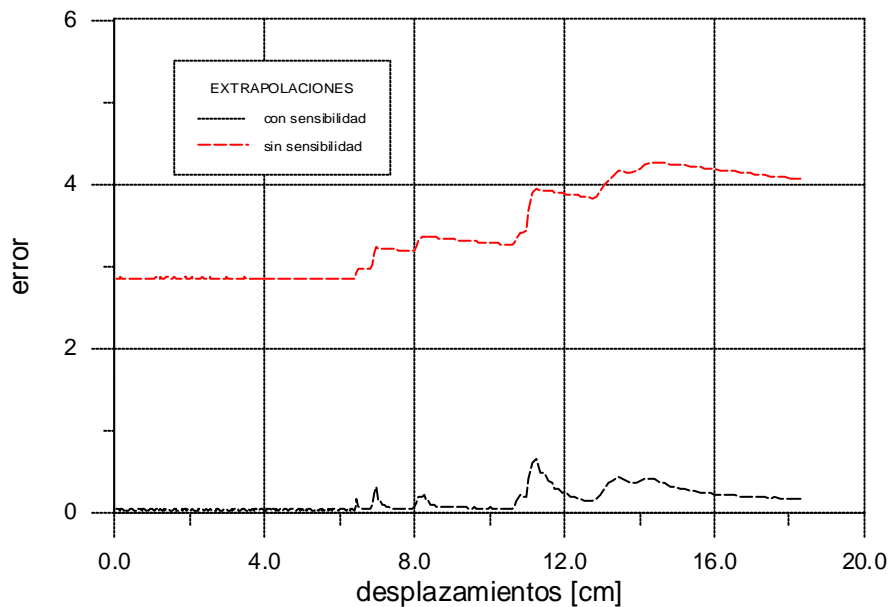
Ilustración E4.13: Definición geométrica de la primera malla

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

De la gráfica E4.22 se observa que la superposición de las curvas modificada y extrapolada es bastante buena motivo por el cual sólo aparece media curva de cada tipo.

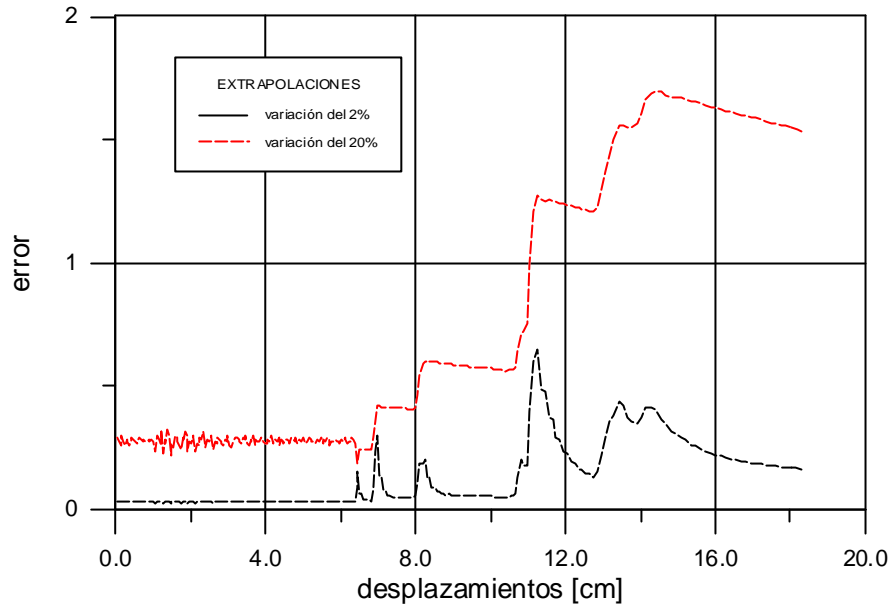
Gráfica E4.22: Curvas fuerza-desplazamiento de la primera malla

Asimismo, la gráfica del error ofrece el siguiente aspecto:

Gráfica E4.23: Error frente a una variación del 2%

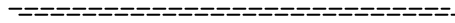
Si se realiza el otro análisis con una variación mayor de la variable de diseño, la gráfica de comportamiento cualitativo prácticamente es la misma, en cambio la del error muestra el siguiente resultado al aumentar en 2 metros la longitud, y si se compara con la anterior se obtiene:

Gráfica E4.24: Error frente a distintos valores de la variable de diseño



En esta segunda gráfica E4.24, se aprecia que en la parte elástica casi no ha variado el porcentaje de error, mientras que en la parte plástica ha aumentado el doble. Esto significa que en el análisis no lineal la aproximación de primer orden no es suficientemente buena, y que necesita de términos de orden superior, lo cual en cierta medida es lógico dado que la propia respuesta tampoco es lineal.

MALLA 2: DISCRETIZACIÓN 8 ELEMENTOS



Tipo de análisis:

- Se considera que la longitud total de la pieza aumenta hasta un 2%.

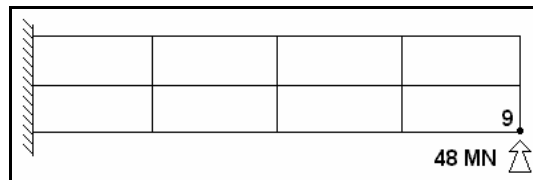
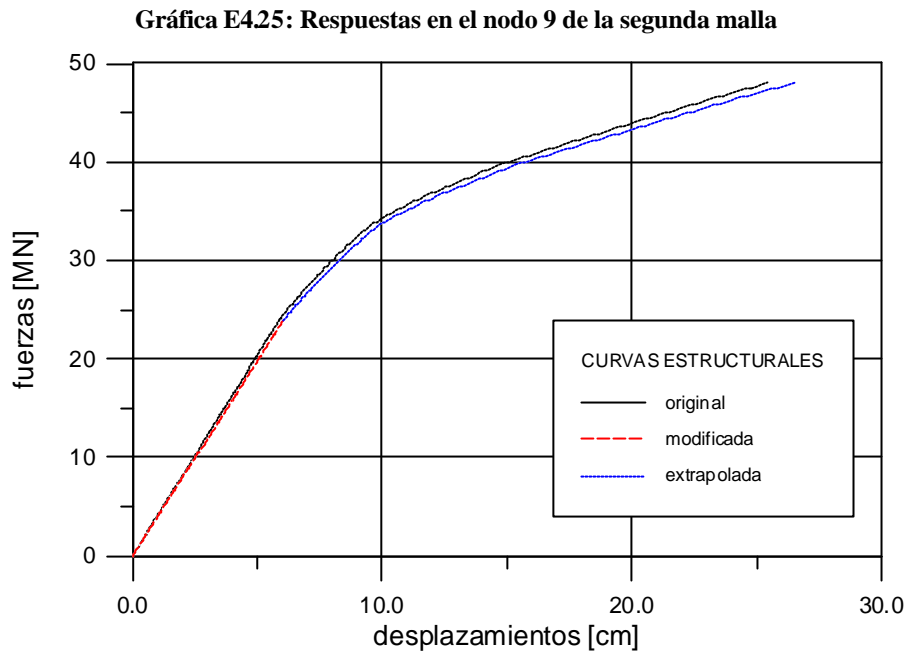


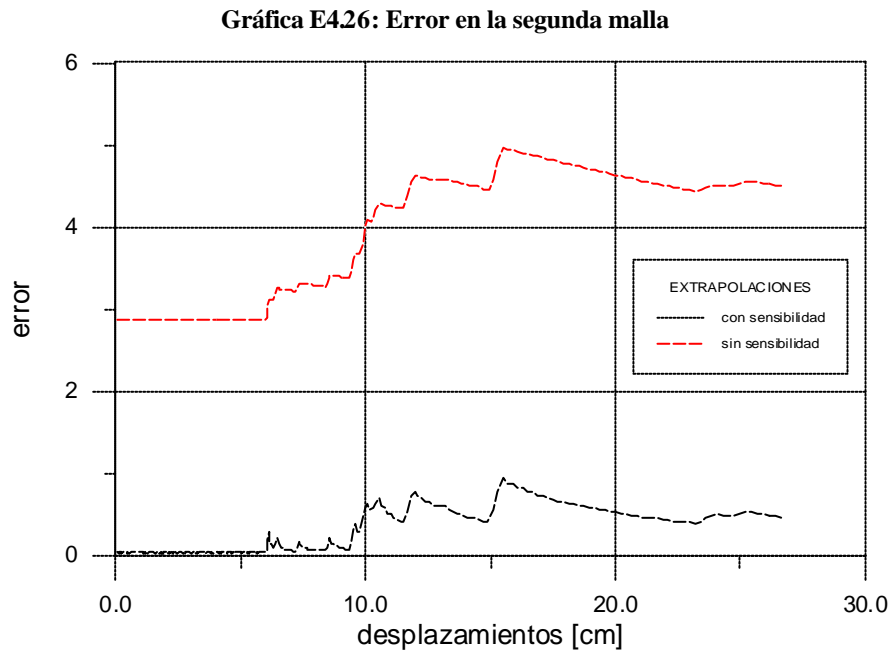
Ilustración E4.14: Definición geométrica de la segunda malla

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

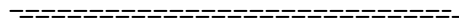
En la respuesta estructural de esta malla más densa también se superponen la estructura modificada y la original como en el caso anterior.



También en este caso los errores de extrapolación se mantienen muy bajos.



MALLA 3: DISCRETIZACIÓN 40 ELEMENTOS



Tipo de análisis:

- Como en el caso anterior la longitud se alarga hasta un 2%.

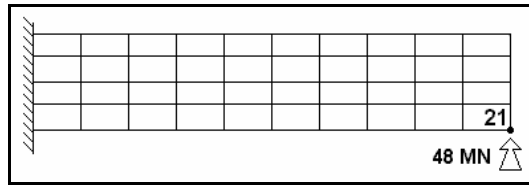
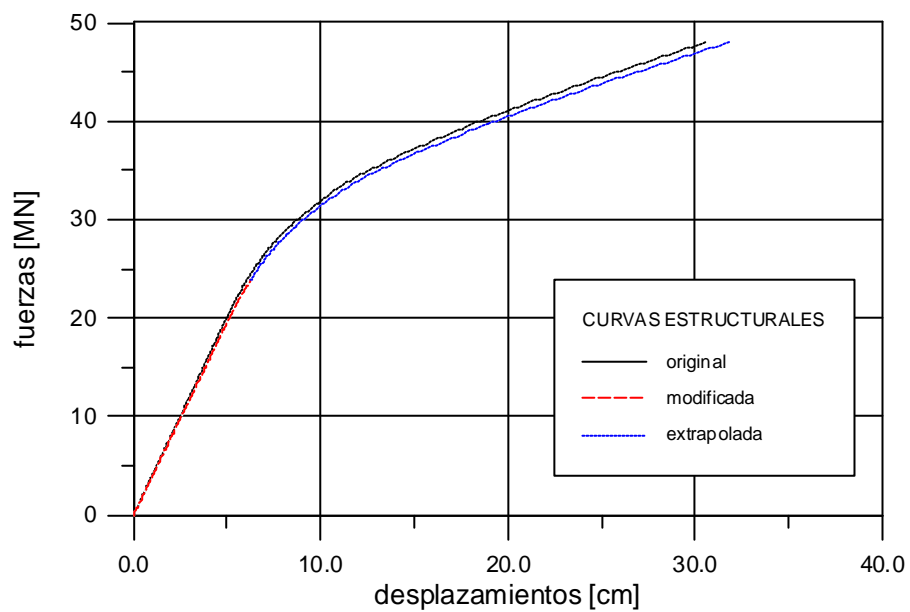


Ilustración E4.15: Definición geométrica de la tercera malla

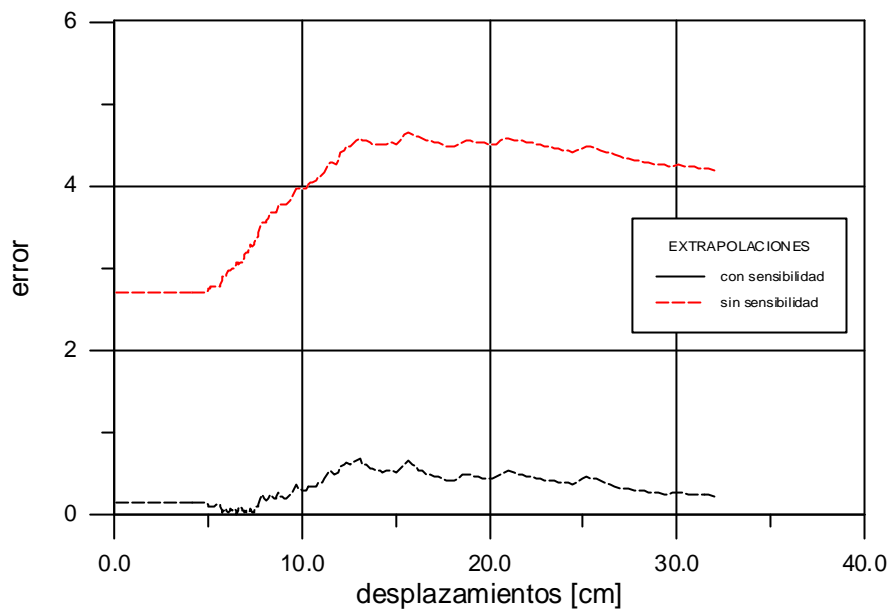
VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

El comentario sobre la gráfica cualitativa es el mismo de los dos casos anteriores, superposición casi perfecta.

Gráfica E4.27: Respuestas en el nodo extremo de la tercera malla



Gráfica E428: Error en la tercera malla



La gráfica del error también es similar a las anteriores.

Algunas conclusiones previas sobre el ejemplo anterior son:

- Se confirma el buen funcionamiento del algoritmo.
- El porcentaje de modificación en la variable de diseño afecta directamente a la magnitud del error en la extrapolación.
- En general, las mallas más finas conducen a gráficas de error más suaves.

Ejemplo 4.11:

Objetivo: En este ejemplo se comprueba el funcionamiento del algoritmo en un problema tridimensional. Además, se observa la divergencia de resultados entre la aproximación lineal de la derivada de la deformación plástica en la última iteración de equilibrio y la metodología de actualización propuesta en esta tesis, tal y como se ha explicado en la parte teórica del capítulo 4.

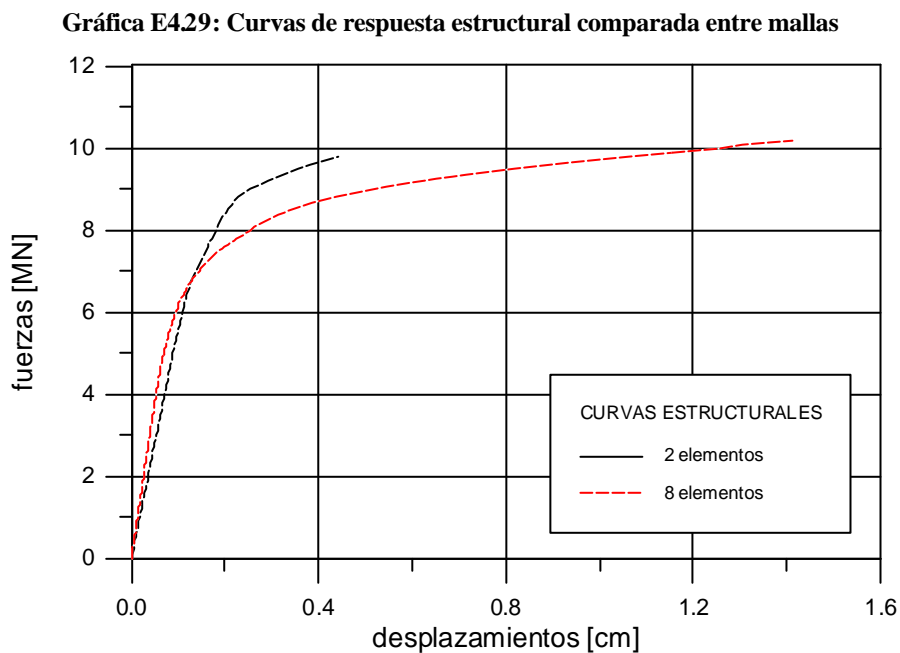
En concreto, se estudia una ménsula corta trabajando a flexión y tomando como variable de diseño la longitud. Supóngase que en el proyecto se define una longitud determinada y posteriormente en obra, por defectos en la ejecución dicho longitud se alarga en un 10 %, es decir 6 cm. Interesa calcular como va a evolucionar el comportamiento de la viga debido al defecto constructivo.

DESCRIPCIÓN GENERAL

Propiedades del material:

Módulo de Elasticidad E	$2.1 \cdot 10^8$	KN/m^2
Coefficiente de Poisson	0	
Tensión elástica límite σ_o	$2.0 \cdot 10^5$	KN/m^2
Parámetro de endurecimiento H	$1.0 \cdot 10^6$	KN/m^2

Se han utilizado dos densidades de malla distintas que aparecen en las ilustraciones E4.16 y E4.17, y la curva de respuesta de las mismas se refleja en la gráfica E4.29:



La gráfica E4.29 representa el comportamiento de un nodo cargado en el extremo de la ménsula. Dado que se están cargando por igual los dos nudos vecinos, se deduce que la carga límite total estimada por los elementos finitos, en la malla de 8 elementos, coincide perfectamente con la calculada por Resistencia de Materiales. Por contra, en la malla más simple, se comete un error de

casi el 50% debido a que la tensión en el punto de integración no representa la verdadera tensión de la fibra más solicitada.

MALLA 1: DISCRETIZACIÓN 2 ELEMENTOS

Tipo de análisis:

- Tridimensional con elementos de 8 nodos.
- 98 pasos de carga con incrementos de 100KN. La integración se realiza en una cuadratura de 8 puntos.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la longitud de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y, por otro lado, el análisis de la estructura modificada aceptando un incremento de 6 cm en la longitud (10%).

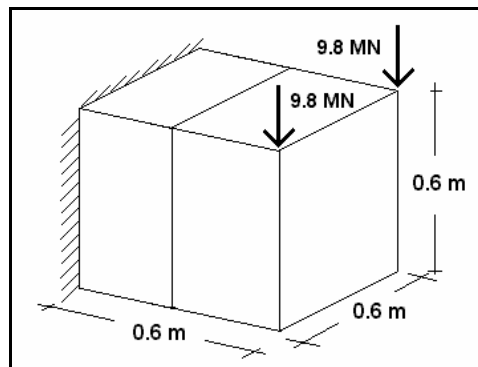
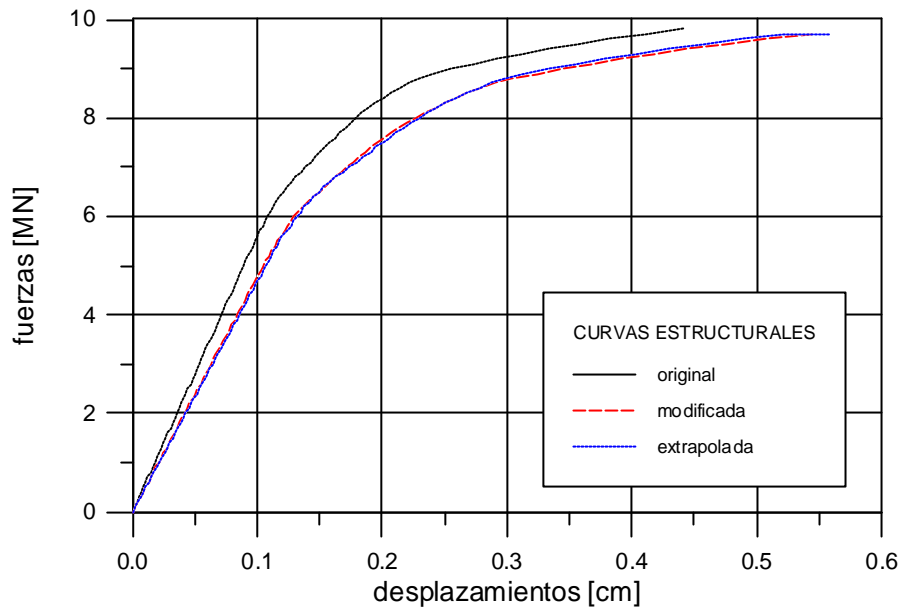


Ilustración E4.16: Definición geométrica de la primera malla

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

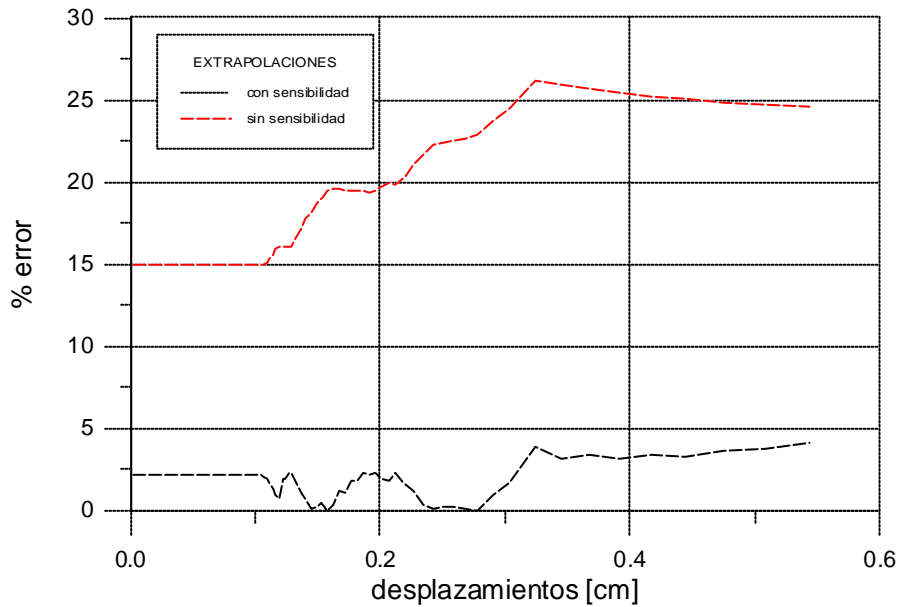
Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo extremo cargado, con los siguientes resultados:

Gráfica E430: Curvas de fuerza-desplazamiento de la primera malla



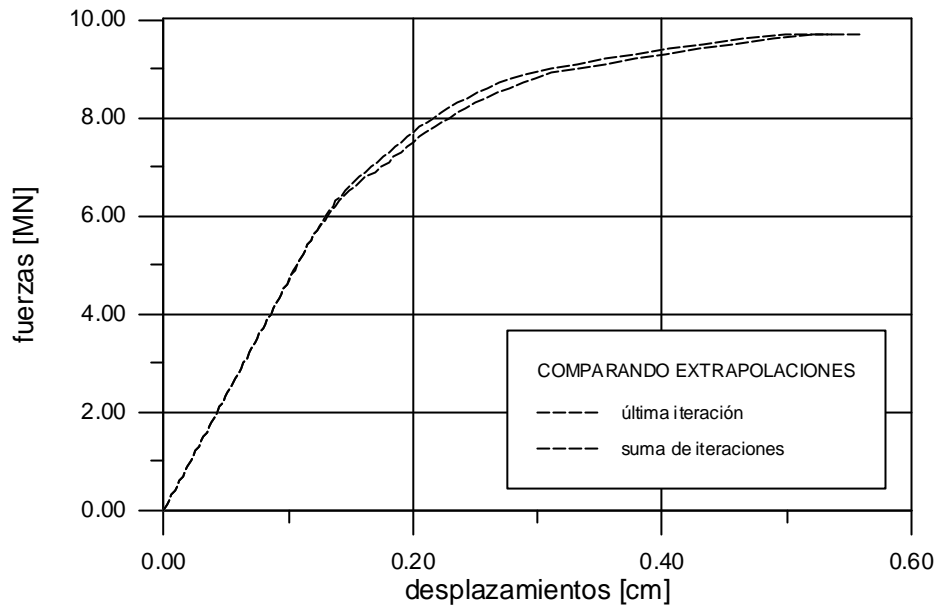
La distribución del error se mantiene estable y toma la forma siguiente:

Gráfica E431: Error de la primera malla



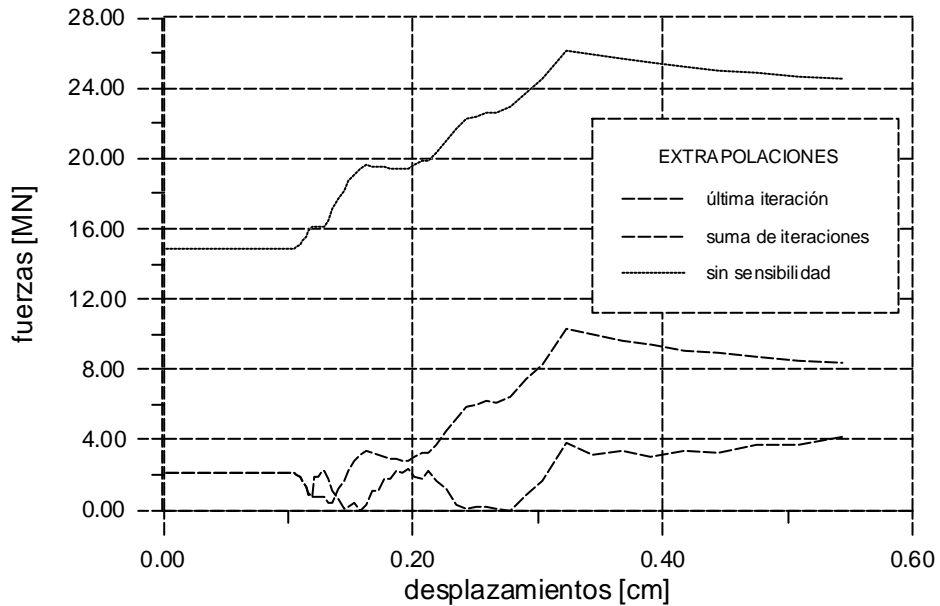
Si se comparan las extrapolaciones de dicho resultado con las que provienen de la linealización de la sensibilidad de la deformación plástica en la última iteración, se observa que existe una lógica divergencia de resultados:

Gráfica E432: Comparando respuestas extrapoladas



La respuesta mejora al considerar la suma de todas las iteraciones, pero hay que reconocer que la ganancia no es espectacular.

Gráfica E4.33: Errores al comparar extrapolaciones



Tipo de análisis:

- Tridimensional con elementos de 8 nodos.
- 200 pasos de carga, donde cada uno carga 51 KN. La cuadratura de integración es de 8 puntos en cada elemento.
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1% en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: la longitud de la pieza.
- Se realizan los dos análisis del ejemplo anterior.

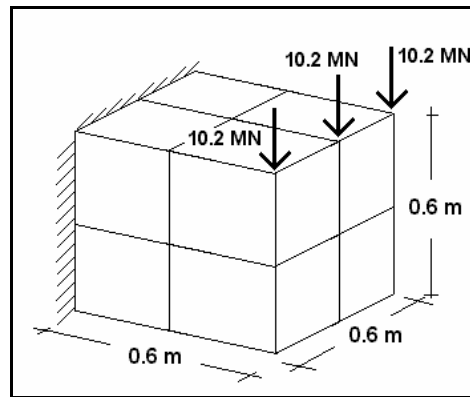
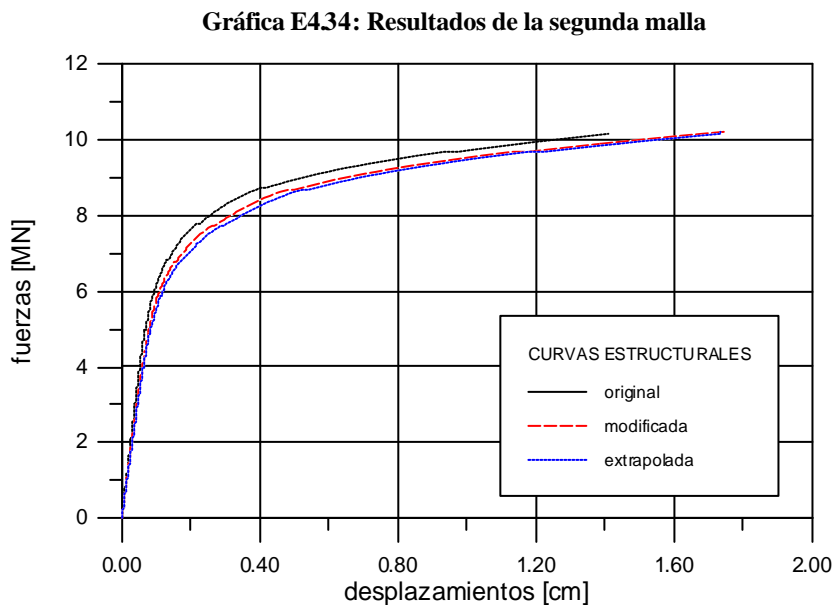


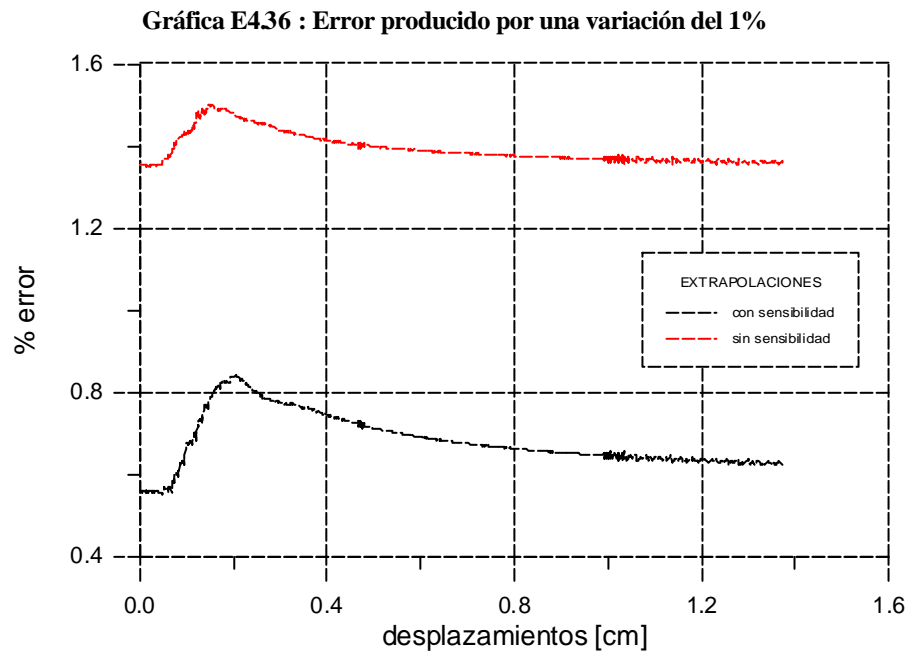
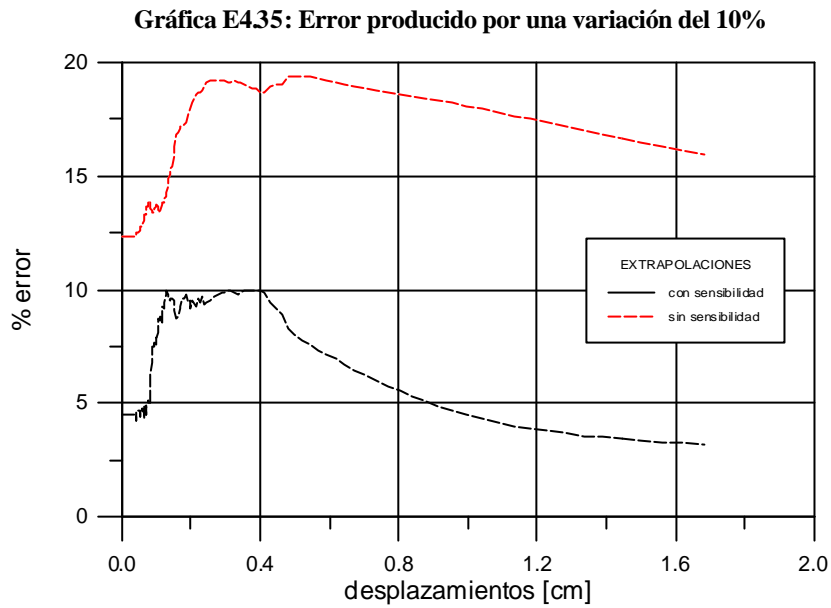
Ilustración E4.17: Definición geométrica de la malla segunda

VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nodo central cargado ofrecen los siguientes resultados:



Se han calculado dos gráficas de error, la primera corresponde a la variación de un 10% de la variable de diseño y la segunda a un 1%. Confirmando las observaciones del ejemplo 4.10, cuanto mayor es la diferencia entre la estructura original y la modificada, mayor es el error que se comete en la extrapolación.



Algunas conclusiones previas que pueden extraerse del ejemplo precedente son:

- Se confirman los buenos resultados de sensibilidad, también en tres dimensiones.
- La estrategia de calcular la sensibilidad de la deformación plástica en cada iteración produce mejores resultados que la linealización propuesta por otros autores.
- Se confirma que a mayor variación de la variable de diseño, peor extrapolación en la respuesta.