

Capítulo 5:

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA MODELOS CONSTITUTIVOS DE DAÑO

En el capítulo 3 se ha presentado el cálculo no lineal de sensibilidades desde una perspectiva teórica y general. Posteriormente, en el capítulo 4 se han particularizado las expresiones del análisis de sensibilidad para modelos constitutivos de elastoplasticidad, y en el apartado de ejemplos se han detectado problemas de incapacidad en la predicción de cargas últimas, así como dificultades en la extrapolación de resultados entre estructuras que estén bajo un régimen de comportamiento distinto. En este capítulo, se analiza la estrategia de cálculo para realizar un análisis de sensibilidad suponiendo que el comportamiento del material se asemeja a un modelo de daño y se da respuesta a alguno de los problemas planteados anteriormente.

5.1 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA EL MODELO DE DAÑO

Los aspectos teóricos y numéricos del modelo de daño empleado en este trabajo se detallan en el anexo 5.1, al final de este capítulo. En este apartado se procede al cálculo de las expresiones de sensibilidad de formas para una estructura que estuviera construida con un material que cumpla las condiciones de dicha formulación constitutiva.

5.1.1 FORMULACIÓN DE LAS EXPRESIONES

Supuesto el Principio de los Trabajos Virtuales como expresión energética general que conduce a una ecuación de equilibrio entre las fuerzas internas de deformación y las fuerzas externa aplicadas, y supuesta la consiguiente discretización en elementos finitos del problema, se obtendría:

$$\sum_{\text{elem } v} \int B^t (1-d) D B u dV = \sum_{\text{elem}} f \quad 5.1.1$$

y en forma de sistema matricial:

$$K_s(u) u = f \quad 5.1.2$$

donde la dependencia no lineal del problema viene caracterizada por el parámetro de daño d . La ilustración 5.1 muestra gráficamente el sentido físico de la ecuación de equilibrio.

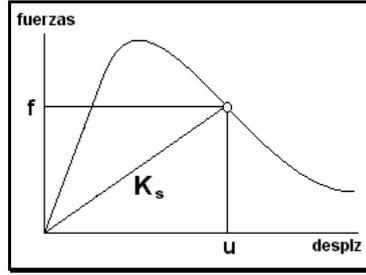


Ilustración 5.1: Equilibrio secante

Si se aplica el método de diferenciación directa DDM sólo será necesario derivar la ecuación superior de equilibrio 5.1.2. Por consiguiente, sabiendo que la rigidez total del sistema es la contribución aditiva de todos y cada uno de los elementos de la malla, se puede derivar la expresión integral particularizada para cada uno de los elementos tal y como se hizo en el capítulo 2. Téngase en cuenta que en el análisis de formas se deberá derivar el recinto de integración del elemento, pero no presenta especial dificultad porque se pueden aprovechar los conceptos relativos a la integración isoparamétrica que también se formularon allí.

Por lo tanto, siendo q una variable de diseño y para un estado equilibrado de carga desplazamiento, se tendría:

$$\sum_{\text{elem}} \frac{d}{dq} \int_{V_{\text{elem}}} \mathbf{B}^t (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} dV = \sum_{\text{elem}} \frac{d}{dq} \mathbf{f} \quad 5.1.3$$

Suponiendo que se deriva para un único elemento isoparamétrico:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \int_{V_0} \mathbf{B}^t (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} |J| dV_0 = \\ \int_{V_0} \frac{d\mathbf{B}^t}{dq} (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} |J| dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{B}^t \frac{dd}{dq} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} |J| dV_0 + \\ \int_{V_0} \mathbf{B}^t (1-d) \frac{d\mathbf{D}}{dq} \mathbf{B} \mathbf{u} |J| dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}^t (1-d) \mathbf{D} \frac{d\mathbf{B}}{dq} \mathbf{u} |J| dV_0 + \\ \int_{V_0} \mathbf{B}^t (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{du}{dq} |J| dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}^t (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \frac{d|J|}{dq} dV_0 \end{aligned} \quad 5.1.4$$

En la igualdad superior 5.1.4 se observa que la mayor parte de las expresiones son parecidas a las que se obtenían en el análisis lineal y por lo tanto no merecen mayor comentario, en cambio otras como la segunda integral en concreto, presentan la particularidad de derivar el parámetro de daño interno de la ecuación constitutiva.

Sabiendo que en el modelo se define el parámetro de daño como, ver anexo 5.1:

$$d = 1 - \frac{\tau^*}{\tau} e^{A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*}\right)} \quad 5.1.5$$

Se puede obtener su derivada según la regla de la cadena:

$$\frac{dd}{dq} = \frac{\partial d}{\partial q} + \frac{\partial d}{\partial A} \frac{dA}{dq} + \frac{\partial d}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dq} \quad 5.1.6$$

En dicha expresión la variable de diseño no aparece explícita, por lo tanto el valor de la primera derivada es nulo. Por otro lado, la formulación considera que el parámetro A de A5.1.48 depende de la longitud característica del elemento, por lo tanto ante una modificación de forma la longitud característica debería variar y, por lo tanto, dicho término derivado no sería nulo.

Obteniendo:

$$\frac{\partial d}{\partial A} = -\frac{\tau^*}{\tau} A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*}\right) e^{A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*}\right)} \quad 5.1.7$$

y también de A5.1.48 se deduce que:

$$\frac{dA}{dq} = \frac{2f_t^2}{2G_f E - 1} \frac{dl_c}{dq} \quad 5.1.8$$

donde la última derivada, en base a que A5.1.45 y A5.1.46 relacionan el volumen del punto de integración con la longitud característica, se expresa según:

$$\frac{dl_c}{dq} = \frac{1}{2\sqrt{|J|}} \frac{d|J|}{dq} \quad 5.1.9$$

La derivada del Jacobiano de la transformación se definió en el capítulo 2 fórmula 2.3.36. Sin embargo, puede afirmarse que, en general, para mallas mínimamente densas la variación en dicho término será despreciable.

A continuación se deriva el último término de 5.1.6:

$$\frac{dd}{dq} = \frac{\partial d}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dq} \quad 5.1.10$$

1. La primera derivada parcial conduce a la expresión:

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} = \left(\frac{f_c}{\tau^2} + \frac{A}{\tau} \right) e^{A \left(1 - \frac{\tau}{f_c}\right)} \quad 5.1.11$$

2. El cálculo de la segunda expresión es más complejo ya que la dependencia no es explícita y por lo tanto es necesario aplicar de nuevo la regla de la cadena sobre la norma de tensiones A5.1.18.

Por consiguiente:

$$\frac{d\tau}{dq} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_i^e} \frac{d\sigma_i^e}{dq} \quad 5.1.12$$

Entonces se deben derivar estos dos nuevos términos, el cálculo de la primera derivada parcial conduce:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_i^e} = \left[(n-1) \frac{\partial r}{\partial \sigma_i^e} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^e)^2} \right] + \left[(1+r(n-1)) \frac{\sigma_i^e}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^e)^2}} \right] \quad 5.1.13$$

y sabiendo que :

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma_i^e} = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^3 |\sigma_j^e| \right)^2} \left[\left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^e| \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{sig}(\sigma_i^e)}{2} \right) - \left(\sum_{j=1}^3 \langle \sigma_j^e \rangle \right) \left(\text{sig}(\sigma_i^e) \right) \right] \quad 5.1.14$$

donde

$$r = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle \sigma_i^e \rangle}{|\sigma_i^e|} \quad , \quad \langle \sigma_i^e \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i^e + |\sigma_i^e|] \quad 5.1.15$$

El segundo término de la derivada sí que es explícito. Nótese que las tensiones principales dependen de las cartesianas según unas fórmulas conocidas y éstas últimas son función de la variable de diseño. En función de esa dependencia se desarrolla a continuación la expresión 5.1.12 para reorganizar adecuadamente los términos y obtener una formulación lo más sencilla posible.

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dq} = & \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_1^e} \left\{ \frac{\partial \sigma_1^e}{\partial \sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dq} + \frac{\partial \sigma_1^e}{\partial \sigma_y} \frac{d\sigma_y}{dq} + \dots + \frac{\partial \sigma_1^e}{\partial \tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}}{dq} \right\} + \\ & \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_2^e} \left\{ \frac{\partial \sigma_2^e}{\partial \sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dq} + \frac{\partial \sigma_2^e}{\partial \sigma_y} \frac{d\sigma_y}{dq} + \dots + \frac{\partial \sigma_2^e}{\partial \tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}}{dq} \right\} + \\ & \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_3^e} \left\{ \frac{\partial \sigma_3^e}{\partial \sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dq} + \frac{\partial \sigma_3^e}{\partial \sigma_y} \frac{d\sigma_y}{dq} + \dots + \frac{\partial \sigma_3^e}{\partial \tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}}{dq} \right\} \end{aligned} \quad 5.1.16$$

Si se desarrolla la expresión anterior y se obtienen todos los productos, el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dq} &= \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dq} + \dots + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}}{dq} + \\ &\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dq} + \dots + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}}{dq} + \\ &\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dq} + \dots + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}}{dq} \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

Se puede reagrupar la expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dq} &= \left(\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\sigma_x} \right) \frac{d\sigma_x}{dq} + \\ &+ \dots + \\ &\left(\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\tau_{yz}} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\tau_{yz}} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\tau_{yz}} \right) \frac{d\tau_{yz}}{dq} \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

En consecuencia, considerar el término que se busca como producto de dos vectores según la siguiente notación, para el primero:

$$\begin{aligned} \partial\tau^t &= \left\{ \left(\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\sigma_x} \right), \right. \\ &\left(\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\sigma_x} \right), \\ &\dots, \left. \left(\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_1^e} \frac{\partial\sigma_1^e}{\partial\tau_{yz}} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_2^e} \frac{\partial\sigma_2^e}{\partial\tau_{yz}} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma_3^e} \frac{\partial\sigma_3^e}{\partial\tau_{yz}} \right) \right\} \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

y para el segundo:

$$d\sigma^t = \left\{ \frac{d\sigma_x}{dq}, \dots, \frac{d\tau_{yz}}{dq} \right\} \tag{5.1.20}$$

De manera que:

$$\frac{d\tau}{dq} = \partial\tau^t d\sigma \tag{5.1.21}$$

Ahora ya todos los términos son conocidos dado que:

$$d\sigma = \frac{d\sigma_e}{dq} = \frac{dD}{dq} B u + D \frac{dB}{dq} u + D B \frac{du}{dq} \tag{5.1.22}$$

Obsérvese que el término de las incógnitas (en negrita) aparece en la expresión que se ha deducido:

$$\frac{d\tau}{dq} = \partial\tau^t \frac{dD}{dq} B u + \partial\tau^t D \frac{dB}{dq} u + \partial\tau^t D B \frac{du}{dq} \quad 5.1.23$$

Ahora sí que se está en condiciones de calcular la derivada 5.1.10, que originalmente se buscaba.

Por lo tanto, si se introducen dichas expresiones en la ecuación 5.1.10, se obtiene:

$$\frac{dd}{dq} = \frac{\partial d}{\partial \tau} \left(\partial\tau^t \frac{dD}{dq} B u + \partial\tau^t D \frac{dB}{dq} u + \partial\tau^t D B \frac{du}{dq} \right) \quad 5.1.24$$

y entrando en la expresión integral correspondiente, la segunda de 5.1.4:

$$\begin{aligned} \int_{V_o} B^t \frac{dd}{dq} D B u |J| dV_o &= \int_{V_o} B^t \frac{\partial d}{\partial \tau} \partial\tau^t \left(\frac{dD}{dq} B u + D \frac{dB}{dq} u + D B \frac{du}{dq} \right) D B u |J| dV_o = \\ &\int_{V_o} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial\tau^t \frac{dD}{dq} B u \right] D B u |J| dV_o + \\ &\int_{V_o} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial\tau^t D \frac{dB}{dq} u \right] D B u |J| dV_o + \\ &\int_{V_o} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial\tau^t D B \frac{du}{dq} \right] D B u |J| dV_o \end{aligned} \quad 5.1.25$$

La última integral contiene el término incógnita que interesa calcular. Entonces, cuando se introduzca dicha expresión en la ecuación derivada del equilibrio 5.1.4 aparentemente se obtendrá un sistema no lineal donde será necesario iterar de alguna manera para resolverlo.

Sin embargo, si se desarrolla la expresión integral introduciendo todos los términos que intervienen en el producto de matrices y vectores, así como la relación de dimensiones que tienen entre ellos, se observa que se puede hacer una permutación y obtener lo siguiente.

Llámesese a:

$$\hat{D} = \partial\tau^t D B \quad 5.1.26$$

y sabiendo que :

$$\sigma_e = D B u \quad 5.1.27$$

Entonces la última integral se convierte en:

$$\int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial \tau^t DB \right] \frac{du}{dq} DBu |J| dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \hat{D} \frac{du}{dq} \sigma_e |J| dV_0 =$$

$$\int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \sigma_e \hat{D} |J| dV_0 \frac{du}{dq}$$
5.1.28

De manera que ahora du/dq aparece como un término aislado y agrupable con las expresiones anteriores. Recapitulando se obtiene:

$$\frac{d}{dq} \int_{V_0} B^t (1-d) DBu |J| dV_0 = \int_{V_0} \frac{dB^t}{dq} (1-d) DBu |J| dV_0 -$$

$$\int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial \tau^t \frac{dD}{dq} B \right] DBu |J| dV_0 -$$

$$\int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial \tau^t D \frac{dB}{dq} \right] DBu |J| dV_0 -$$

$$\int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t [DBu] \left[\partial \tau^t DB \right] \frac{du}{dq} |J| dV_0 +$$

$$\int_{V_0} B^t (1-d) \frac{dD}{dx} Bu |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t (1-d) D \frac{dB}{dq} u |J| dV_0 +$$

$$\int_{V_0} B^t (1-d) DB \frac{du}{dq} |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t (1-d) DBu \frac{d|J|}{dq} dV_0$$
5.1.29

Por lo tanto, si se definen las siguientes matrices:

$$K_S = \sum_{\text{elem } V_0} \int_{V_0} B^t (1-d) DB |J| dV_0$$

$$K_D = \sum_{\text{elem } V_0} \int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t [DBu] \left[\partial \tau^t DB \right] |J| dV_0$$
5.1.30

y el vector de pseudocargas como:

$$f^* = \sum_{\text{elem}} \frac{df}{dq} - \sum_{\text{elem } V_0} \int_{V_0} \frac{dB^t}{dq} (1-d) DBu |J| dV_0 - \int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial \tau^t \frac{dD}{dx} B \right] DBu |J| dV_0$$

$$- \int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial \tau^t D \frac{dB}{dq} \right] DBu |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t (1-d) \frac{dD}{dq} Bu |J| dV_0$$

$$+ \int_{V_0} B^t (1-d) D \frac{dB}{dq} u |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t (1-d) DBu \frac{d|J|}{dq} dV_0$$
5.1.31

En forma matricial se podría expresar el sistema como:

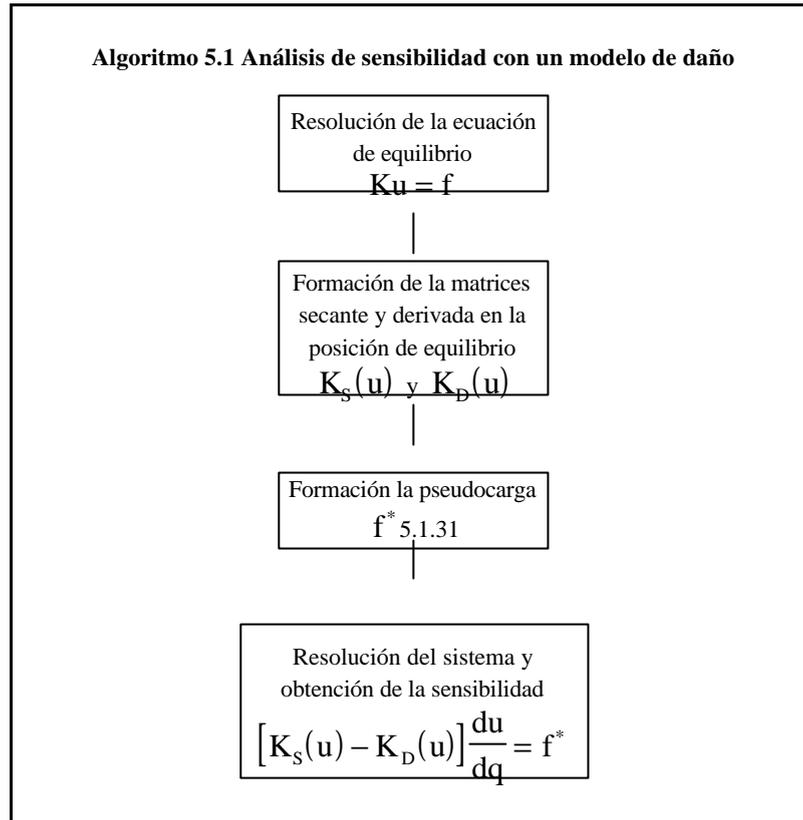
$$\left[\mathbf{K}_S(\mathbf{u}) - \mathbf{K}_D(\mathbf{u}) \right] \frac{d\mathbf{u}}{dq} = \mathbf{f}^* \quad 5.1.32$$

Donde aparece la matriz secante del sistema de equilibrio acompañada de otra matriz derivada y de un término de pseudocargas que lógicamente será distinto del que aparecía en el sistema lineal. Comparando dicha expresión con la fórmula 3.2.4 que proponían Ryu *et al.* en el capítulo 3, parece que de forma intuitiva se podría establecer una relación donde las respectivas matrices serían:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_S &= \mathbf{K} \\ \mathbf{K}_D &\approx \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \end{aligned} \quad 5.1.33$$

En realidad no se ha sido capaz de establecer dicha relación porque la naturaleza de las matrices es completamente distinta, por lo tanto se concluye que la formulación es diferente.

Por lo tanto, a través de 5.1.32 se ha conseguido una expresión secante para calcular las sensibilidades sin necesidad de acudir a un esquema incremental como el que se necesita para resolver la ecuación de equilibrio. Con esto se desmiente la creencia errónea según la cual la sensibilidad de todo material dependiente de la historia debe calcularse a través de un procedimiento incremental al mismo tiempo que se obtiene el equilibrio. Nótese que el planteamiento secante es una ventaja porque calcula la sensibilidad en el momento del equilibrio que interese, sin necesidad de ir actualizando la información en cada incremento de carga equilibrado. Esta estrategia puede evitar los errores que suelen acumular los métodos incrementales o iterativos.



5.1.2 ANÁLISIS CRÍTICO DE LAS EXPRESIONES

A un incremento de carga dado, y habiendo convergido, parece que el problema está satisfactoriamente resuelto, y que se estaría en condiciones de utilizar la información de las derivadas para predecir el comportamiento de la estructura, o para evaluar la variación de una restricción. En particular, el conocimiento de la sensibilidad daría la pauta de comportamiento de la variable desplazamiento y, por lo tanto, se podría extrapolar su valor con una aproximación de orden uno y predecir cómo va a comportarse una estructura ante la modificación de una variable de diseño. Véase la ilustración 5.2.

$$u(q + \Delta q) = u(q) + \frac{du}{dq} \Delta q \quad 5.1.34$$

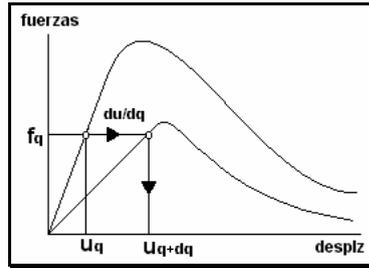


Ilustración 5.2: Extrapolación de la respuesta

Sin embargo, existe un conjunto de ejemplos donde las hipótesis anteriores ponen en duda el planteamiento del problema:

- Nótese que, *a priori*, no se conoce como va a afectar la modificación de las variables de diseño al comportamiento estructural. No se sabe si la alteración de la forma va a aumentar la capacidad resistente de la estructura o, por el contrario, va a disminuirla. En particular, en los casos para los cuales la capacidad resistente disminuya, ni siquiera va a tener sentido intentar calcular las sensibilidades de los desplazamientos a carga dada porque si el nivel de fuerzas es excesivo para la estructura modificada, la extrapolación horizontal a carga dada conducirá a puntos donde no está definido el equilibrio.

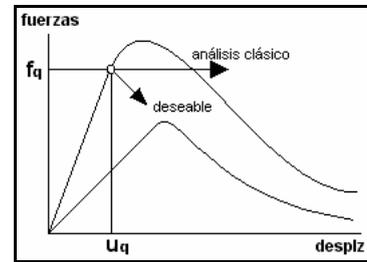


Ilustración 5.3: Extrapolación imposible

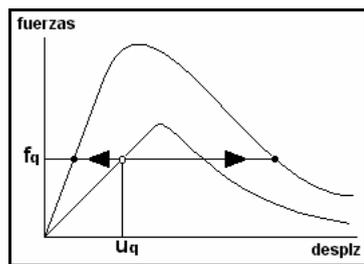


Ilustración 5.4: Existe más de una posición de equilibrio

- En otros casos, para una posición de equilibrio de fuerzas en la estructura original resulta que la estructura modificada puede tener más de una. Por consiguiente, no es tan evidente en qué situación se colocaría la extrapolación, ¿Rama de carga o de descarga?

- Por otro lado, un tipo de análisis interesante consiste en ser capaces de intentar extrapolar el valor de la carga última. En el caso opuesto al primero ejemplo, es decir, que una modificación de la forma aumente la capacidad resistente de la estructura, una extrapolación a carga constante desde la estructura original jamás podrá proporcionar la posición del nuevo máximo de la curva fuerza-desplazamiento. Es evidente que este hecho exige conocer la variación

simultánea en las direcciones de fuerzas y desplazamientos, y por lo tanto, será un objetivo imposible si sólo se dispone de información sobre el comportamiento de los desplazamientos.

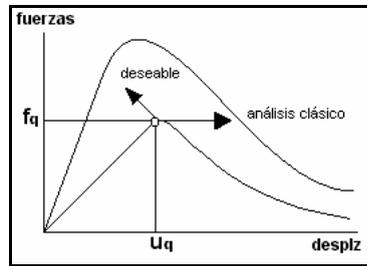


Ilustración 5.5: Extrapolación de la carga máxima

- Finalmente, señalar que en el capítulo anterior se había observado que en los modelos elastoplásticos, a pesar de tener endurecimiento y ser capaces de llegar siempre a una posición de equilibrio a carga dada, en algunos problemas estructurales no se obtenían buenas extrapolaciones de comportamiento porque el régimen de trabajo entre las estructuras original y modificada era diferente.

Llegados a este punto se observa que existe una problemática común en todo este conjunto de objeciones: *para ciertos tipos de análisis en régimen no lineal, no es suficiente conocer la variación de las variables incógnita en la ecuación de equilibrio, es decir los desplazamientos, también es necesario conocer la variación de las fuerzas.*

Se podría considerar que la variación de las fuerzas ya está calculada en la formulación precedente y que, en consecuencia, se puede extrapolar utilizando la información del término de derivación de las fuerzas, es decir definir lo siguiente:

$$f(q + \Delta q) = f(q) + \frac{df}{dq} \Delta q \quad 5.1.35$$

Sin embargo, sólo en ocasiones muy particulares se estará en condiciones de realizar la extrapolación según 5.1.35. Exactamente en los casos para los cuales las fuerzas se expresen como función explícita de la variable de diseño, la ilustración 5.6 muestra ambas situaciones.

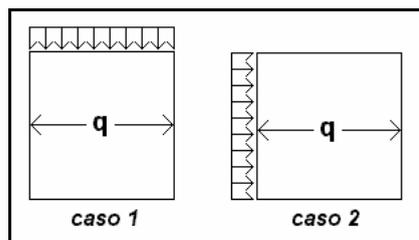


Ilustración 5.6: Posibles casos de relación entre fuerzas y variable de diseño

En el primer caso se podrá construir una expresión explícita que permita la derivación de las fuerzas en función de la variable de diseño. Pero en el segundo caso no, a pesar de que existe una clara relación entre la variable de diseño y las fuerzas, simplemente piénsese que un cambio de sección aumenta la inercia a flexión y, por tanto, la capacidad portante de la estructura.

A la vista de todo ello, en el apartado siguiente se formulará una propuesta de solución general que permita resolver las cuestiones planteadas, empezando por el problema del ablandamiento que es motivo de este capítulo.

5.2 REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE SENSIBILIDAD

En primer lugar, es necesario señalar que los modelos no lineales con ablandamiento, como el daño o ciertas formulaciones elastoplásticas, presentan problemas en la propia resolución de la ecuación de equilibrio. Como se ha visto en la ilustración 5.4, obviando la cuestión de la extrapolación de resultados, para determinados valores de la sollicitación existe más de una posición de equilibrio.

Ciertamente, en el ablandamiento, a partir de un cierto instante se produce una pérdida de la capacidad portante de la estructura y, en esas condiciones, es imposible seguir aumentando la sollicitación del sistema. En cambio, los desplazamientos sí que pueden seguir aumentando y permitir así, la existencia de nuevos puntos de equilibrio en la curva. En consecuencia, el análisis clásico, basado en el incremento de la sollicitación¹, no permite llegar a soluciones más allá de la carga máxima de la estructura y por ello, en los problemas con ablandamiento, se lleva a cabo el análisis del comportamiento estructural utilizando estrategias de control de desplazamientos (*longitud de arco*). El método de la longitud de arco permite obtener puntos de equilibrio a lo largo de la curva fuerza-desplazamiento y se fundamenta en exigir al mismo tiempo: el equilibrio estructural del sistema y una condición sobre el valor de los desplazamientos. Dicho método se encuentra descrito con detalle en el anexo 2 al final de este capítulo.

En este trabajo se propone que el análisis de sensibilidad se lleve a cabo a longitud de arco constante en lugar del análisis clásico realizado hasta ahora, a sollicitación constante. Este planteamiento tiene la ventaja que no presupone cual va a ser la variación en la capacidad portante de la estructura y será además *consistente* con la formulación del análisis de equilibrio.

¹ No se va a trabajar la metodología del desplazamiento impuesto porque carece de interés dada su aplicabilidad limitada y, además, porque es reproducible con una adecuada definición de la longitud de arco.

Por lo tanto, se realiza la derivación de las ecuaciones que comporta la longitud de arco, la ecuación de equilibrio A5.2.1 y la condición sobre el control de desplazamientos A5.2.2:

$$\frac{d}{dq} [K_s u] = \frac{d}{dq} [\lambda f] \quad 5.2.1$$

$$\frac{d}{dq} g(u(\lambda)) = 0 \quad 5.2.2$$

Esto conduce a:

$$K_s \frac{du}{dq} - f \frac{d\lambda}{dq} = -\lambda \frac{df}{dq} - \frac{dK_s}{dq} u \quad 5.2.3$$

$$\frac{dg}{dq} = 0 \quad 5.2.4$$

De las expresiones superiores aparece como término conocido la derivada de la matriz secante de rigidez. En cambio, otros son completamente nuevos, como la derivada de la condición de arco, o una nueva pseudocarga. A continuación se desarrollan los nuevos miembros de las ecuaciones 5.2.3 y posteriormente se conjuntarán con los términos calculados en el apartado 5.1.1.

El vector de pseudocargas se modificará según la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} f_{\text{arco}}^* &= \frac{\partial \lambda}{\partial q} \sum_{\text{elem}} f + \lambda \sum_{\text{elem}} \frac{df}{dq} - \\ &\sum_{\text{elem}_{V_0}} \int \frac{dB^t}{dq} (1-d) D B u |J| dV_0 - \int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B \left[\partial \tau^t \frac{dD}{dq} B \right] D B u |J| dV_0 - \\ &\int_{V_0} \frac{\partial d}{\partial \tau} B^t \left[\partial \tau^t D \frac{dB}{dq} \right] D B u |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t (1-d) \frac{dD}{dq} B u |J| dV_0 + \\ &\int_{V_0} B^t (1-d) D \frac{dB}{dq} u |J| dV_0 + \int_{V_0} B^t (1-d) D B u \frac{d|J|}{dq} dV_0 \end{aligned} \quad 5.2.5$$

Se reescribe la expresión usando la notación siguiente:

$$f_{\text{arco}}^* = \frac{\partial \lambda}{\partial q} \sum_{\text{elem}} f + f_{\text{new}}^* \quad 5.2.6$$

La condición de arco también se deriva aplicando la regla de la cadena se obtiene que:

$$\frac{dg}{dq} g(u) = \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dq} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dq} \quad 5.2.7$$

En general, nunca existirá una dependencia explícita de la condición de arco respecto de la variable de diseño así que la primera derivada parcial normalmente será nula y un razonamiento parecido puede hacerse para el último sumando que, en general, nunca va a existir.

Para los casos que se contemplaban en A5.2.3-4 se obtienen las siguientes expresiones en la derivación de la condición de arco:

- *Control de desplazamiento de un nodo:*

$$\frac{dg}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{du_k}{dq} = 0 \quad 5.2.8$$

- *Control esférico:*

$$\frac{dg}{dq} = 0 \Rightarrow \sum_i u_i \frac{du_i}{dq} = 0 \quad 5.2.9$$

Con las expresiones obtenidas en 5.2.1, 5.2.2, 5.130 y 5.2.6 se obtiene una estructura de ecuaciones relativamente cómoda. Nótese que el término incógnita que contiene $d\lambda/dq$ puede ponerse en el primer miembro, con las magnitudes desconocidas, y además, la condición de derivada del control de desplazamientos es lineal con respecto a las incógnitas. Pero en caso de escoger otras condiciones de control de desplazamientos se puede obtener una estructura extremadamente complicada, incluyendo términos altamente no lineales. Si se opera un poco y siguiendo la notación de 5.1.42 se obtiene²:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_D & -\mathbf{f} \\ dg/dq & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du/dq \\ d\lambda/dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{new}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.2.10$$

Desarrollando un poco la expresión matricial 5.2.10 para ambas condiciones de control sobre los desplazamientos se obtiene:

- *Control de desplazamientos en un punto:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_D & -\mathbf{f} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du/dq \\ d\lambda/dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{new}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.2.11$$

- *Control esférico:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_D & -\mathbf{f} \\ u_1 & \dots & u_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du/dq \\ d\lambda/dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{new}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.2.12$$

Sin embargo, se observa que el sistema de ecuaciones en ninguno de ambos casos es simétrico y, por lo tanto, resolver el sistema directamente puede exigir un alto coste computacional. Se propone una estrategia iterativa para obtener la solución de forma más económica.

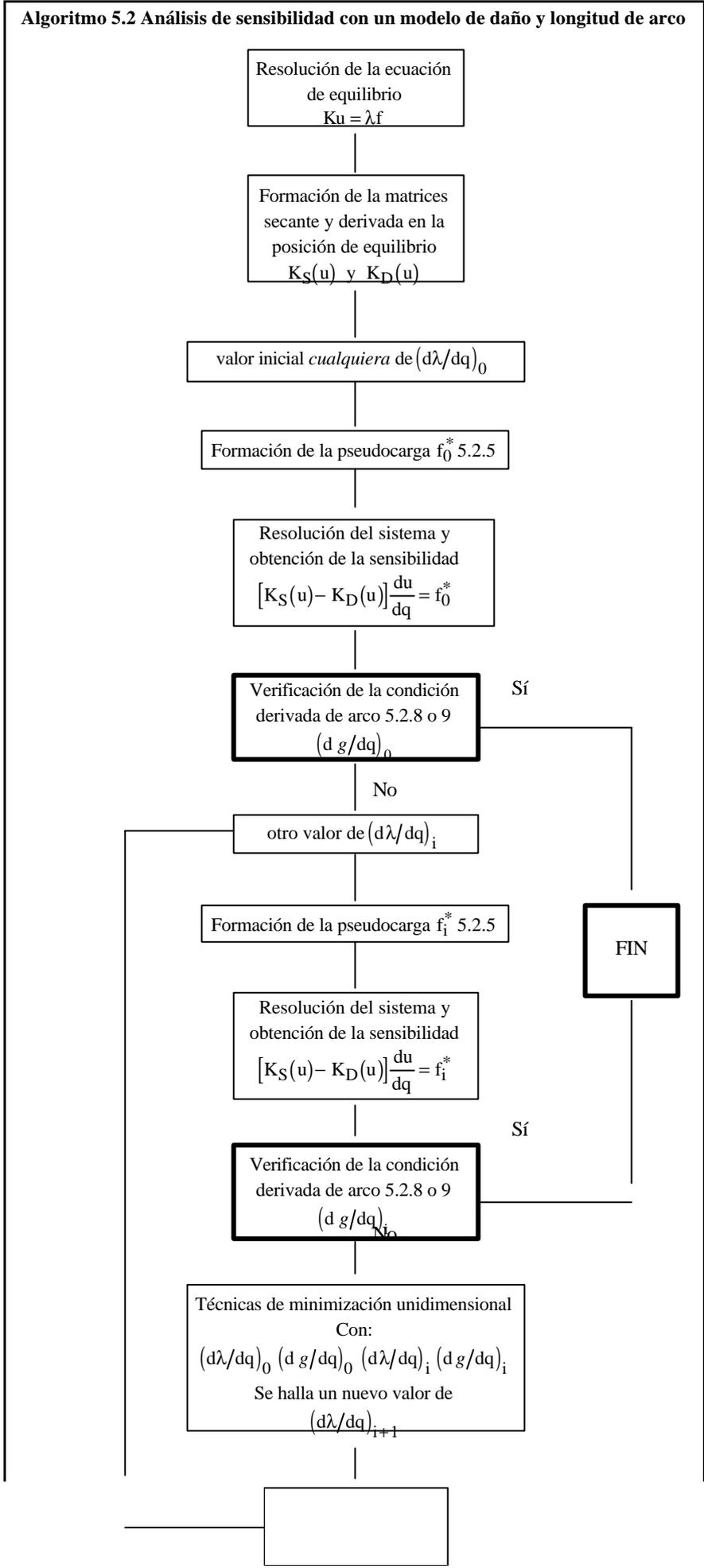
Simplemente se trata de ensayar un valor para $d\lambda/dq$ y resolver un sistema simétrico con todas las ventajas que conlleva, modificando posteriormente dicho valor en función de la verificación de la condición derivada del arco.

$$[K_S(u) - K_D(u)] \frac{du}{dq} = f_{\text{arco}}^*(d\lambda/dq) \quad 5.2.13$$

$$\frac{dg}{dq} = 0 \quad 5.2.14$$

En general, sólo es necesario un par de iteraciones para hallar un valor satisfactorio de la condición derivada de la longitud de arco dado que la ecuación que la gobierna 5.2.8-9 tiene una expresión lineal con respecto a las derivadas. El esquema de funcionamiento del método de análisis de sensibilidad con longitud de arco se describe en el algoritmo 5.2 que aparece en la página siguiente:

² Kleiber *et al.* (1996)[K1] estudiando un problema de no linealidad geométrica y con un planteamiento incremental de la sensibilidad deduce una expresión similar, pero dada la diferente naturaleza del problema, los términos tienen un sentido completamente diferente.



Del algoritmo 5.2 se deduce que la estrategia del análisis de sensibilidad tiene un coste mínimo. En el apartado 5.1.1 ya se vio que el cálculo de la sensibilidad también tiene naturaleza secante como la ecuación de equilibrio; por lo tanto, una vez llegados al equilibrio se obtiene, en un sólo paso, la sensibilidad en ese punto y no es necesario acumular de forma incremental los resultados como sucedía con la elastoplasticidad. Esto quiere decir que se puede resolver el problema estructural con la ecuación de equilibrio hasta el nivel de carga/desplazamiento deseado y, una vez allí, calcular de una sola vez la sensibilidad de la estructura.

La estrategia del análisis de sensibilidad a través del control de desplazamientos descrita anteriormente es fácilmente generalizable a la mayor parte de problemas no lineales, en concreto todos aquellos para los que la posición de equilibrio es única, es decir, donde no se producen bifurcaciones.

A través de la estrategia descrita se estará en condiciones de realizar la doble extrapolación, en desplazamientos y en fuerzas, y predecir el comportamiento estructural no lineal ante modificaciones de forma según la aproximación siguiente:

$$u(q + \Delta q) = u(q) + \frac{du}{dq} \Delta q \quad 5.2.15$$

$$\lambda(q + \Delta q) = \lambda(q) + \frac{d\lambda}{dq} \Delta q \quad 5.2.16$$

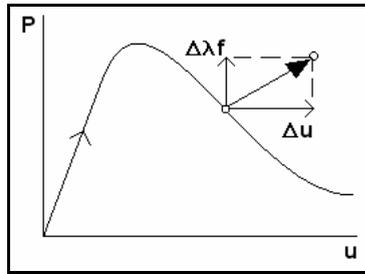


Ilustración E5.7: Ahora sí que se estará en condiciones de extrapolar correctamente

En consecuencia, la posibilidad de simular cualquier problema estructural, incluyendo elasticidad y elastoplasticidad, y poder extrapolar el comportamiento tanto en fuerzas como en desplazamientos ofrece una metodología general para calcular la sensibilidad en problemas no lineales.

Sin embargo, toda la potencia del cálculo secante sólo será aprovechable si la ecuación constitutiva permite dicha posibilidad. En cualquier otro caso será necesario utilizar un método incremental

como el descrito en elastoplasticidad para evaluar la sensibilidad al mismo tiempo que se equilibra la estructura.

El método de análisis de sensibilidad con longitud de arco descrito permite resolver el problema de la extrapolación de cargas últimas y de la existencia de más de una posición de equilibrio, soluciones inalcanzables mediante el análisis clásico de sensibilidad a carga constante.

En el Apéndice 5.1 se muestran diversos ejemplos de aplicación del análisis de sensibilidad en estructuras con materiales que cumplen el modelo de daño.

ANEXO 5.1: LOS MODELOS CONSTITUTIVOS DE DAÑO

A lo largo de este anexo se desarrolla la formulación teórica y las técnicas numéricas que requiere un modelo de daño.

A5.1.1 GENERALIDADES

Se sabe que la simulación numérica, mediante elementos finitos, del comportamiento constitutivo de un material fisurable es un problema que todavía no ha encontrado una solución definitiva. En el caso del hormigón en particular, existen numerosos modelos constitutivos basados en diferentes pautas de comportamiento³ que pueden clasificarse en cinco grandes grupos: Elasticidad lineal y no lineal, plasticidad con ablandamiento, teoría endocrónica de la plasticidad y, finalmente, fractura. Dado que la sensibilidad de los modelos elásticos lineales y no lineales, y la de los modelos endocrónicos conducen a expresiones explícitas conocidas (véase capítulos 2 y 3), y dado que el tema de la elastoplasticidad ya ha sido tratado en el capítulo 4 se planteó abordar la sensibilidad de los modelos de fractura. De todos los modelos de fractura posibles se escogieron los modelos constitutivos de daño porque se usan extensamente en el cálculo con elementos finitos del comportamiento de rocas, metales, materiales cerámicos y compuestos y, en particular, del hormigón, uno de los materiales más usados en las obras de ingeniería.

En términos generales, los modelos de fractura se basan en considerar que el comportamiento no lineal del hormigón se debe principalmente al fenómeno de la fisuración. Todo el mundo sabe que al someter al hormigón a un estado tensional donde se producen tracciones, inmediatamente aparecen microfisuras internas en las conexiones intergranulares debido a la baja resistencia que presenta el material ante este tipo de sollicitación. El aumento del estado tensional facilita que la fractura interna vaya creciendo hasta degenerar en una fisura externa apreciable. Por lo tanto, el comportamiento del material vendrá determinado según se esté en uno de los dos estados posibles siguientes: Elástico antes de la fisuración o fracturado después de la fisuración.

Según Chen⁴, en el mundo de los elementos finitos los modelos de fractura se pueden clasificar según tres grupos:

- Modelos según la mecánica de fractura clásica basada en la elasticidad lineal. En este caso el inicio de la fractura y su posterior evolución es función de unos coeficientes de intensidad de tensiones K_I , K_{II} , K_{III} dependiendo del modo básico de fisuración⁵.

³ El lector interesado encontrará un estupendo estado del arte en Oller [O1].

- Modelos de fisura discreta que pretenden trazar una trayectoria de la fisura según las conexiones internodales.
- Modelos de fisura distribuida que consideran que la fisura se desarrolla disipando la energía de fractura en un punto del material. En este caso, en oposición a los anteriores, la fisura no aparece como una discontinuidad física apreciable en el cuerpo sino que su presencia se detecta por una degradación del módulo elástico en ciertos puntos. Cuando esto sucede se dice que el modelo localiza la fractura.

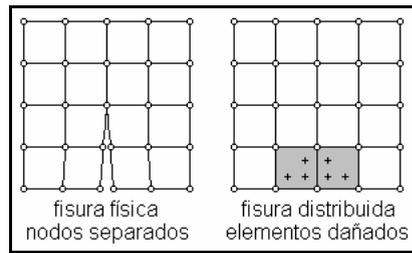


Ilustración 5.8: Diferentes planteamientos de fractura

A5.1.2 EL MODELO DE DAÑO

En términos coloquiales, se puede decir que el modelo de daño intenta reproducir la pérdida de rigidez del material debida a la fisuración, evaluándola a través de uno o varios escalares, llamados *parámetros de daño*, que ponderan convenientemente el tensor constitutivo elástico. El grado de conveniencia de dicha aproximación genera distintas formulaciones, pero todas tienen una cosa en común: Existe una superficie límite que acota la existencia del daño y una función que modifica la cantidad de daño que se produce según una norma del estado de tensiones. Esto significa que el comportamiento del material es dependiente de la historia, en el sentido que guarda en memoria el nivel de daño anterior (irrecuperable) y lo modifica según el nivel tensional actual.

La ecuación constitutiva del modelo de daño más sencillo de un sólo parámetro se escoge como :

$$\sigma = [1 - d] D \varepsilon \quad \text{A5.1.1}$$

siendo d una *función escalar* que depende de una norma de tensiones y, por lo tanto, de la energía de deformación. Para este caso, la curva de comportamiento tensión deformación es la que aparece en la ilustración 5.9. Nótese que en fenómenos de carga se produce una degradación del comportamiento mientras que en descarga se mantiene lineal, con un nuevo módulo elástico cuyo valor es proporcional a la magnitud de la degradación que ha sufrido el material.

⁴ W.F. Chen. *Plasticity in Reinforced Concrete*. 1982 Mc Graw Hill.

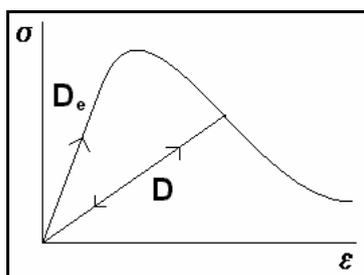


Ilustración 5.9: Comportamiento tenso-deformacional del material degradable

De la ilustración 5.9 se destacan dos cosas, en primer lugar que el modelo constitutivo de daño se caracteriza porque en la posición de equilibrio se consigue definir una matriz secante, nótese que dicha matriz reproduce el comportamiento del material en la rama elástica de carga y descarga. En segundo lugar, se debe resaltar que el fenómeno del ablandamiento sólo puede ser seguido a través de una deformación impuesta o, alternativamente, gracias a una estrategia incremental-iterativa con control de desplazamientos, también conocido como *longitud de arco*.

FORMULACIÓN DEL MODELO

Existen diferentes enfoques relativos a la definición de los modelos de daño, por ejemplo Carol *et al.* (1994) [C1] consideran que los modelos de daño corresponden a una teoría de degradación elástica que puede relacionarse como un modelo evolucionado de la elastoplasticidad⁶. En este trabajo se utiliza el enfoque de Lubliner *et al.* 1989 [L1] basado en consideraciones energéticas. También se pueden encontrar más detalles sobre el modelo que se presenta en Oliver *et al.* 1990 [O2] y Cervera *et al.* [C2].

Definiciones energéticas y formulación de la ecuación constitutiva.

En todo material sano que se somete a un estado tensional, aparece un campo de deformaciones como respuesta estructural a la sollicitación externa. Durante el proceso de deformación del cuerpo se libera una energía interna de deformación que equilibra el trabajo que las fuerzas externas invierten en provocar dicha deformación. En general, los materiales sanos se comportan bajo la hipótesis de la elasticidad lineal para pequeñas deformaciones y entonces, se puede definir el trabajo interno de deformación en un cierto instante como:

⁵ Se recomienda D.R.J. Owen and A.J. Fawkes. *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. 1983. Pineridge Press.

⁶ Según los autores: 'it seems appropriate to devote new efforts to establish a unified theory of elastic degradation that brings elastic degradation models to a similar degree of development as their elastoplasticity counterparts.' En la definición del modelo, el artículo 'borrows concepts and terminology from the well-known flow theory of plasticity.'

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{A5.1.2}$$

Para simular la degradación del material y, en consecuencia, la pérdida de su capacidad portante, se puede suponer que el material va a absorber sólo una parte proporcional de toda la energía elástica que debería, por consiguiente se puede definir la energía de deformación en el caso de existencia de daño como:

$$\Psi = (1 - d) \Psi_e \quad \text{A5.1.3}$$

Donde d es una variable interna de la formulación (parámetro escalar de daño) que será definida posteriormente, pero que siempre debe ser positiva y menor que 1. Nótese que a medida que crece d al material se le supone cada vez más débil y en el límite, cuando d valga 1, será incapaz de resistir ningún tipo de sollicitación. En palabras sencillas, se puede decir que en un estado equilibrado tensión-deformación, el material degradado necesariamente debe deformarse más que el elástico. Porque al estar dañado, una parte de la energía se pierde en aumentar su daño, mientras que otra parte se convierte en energía de deformación que equilibra la sollicitación externa.

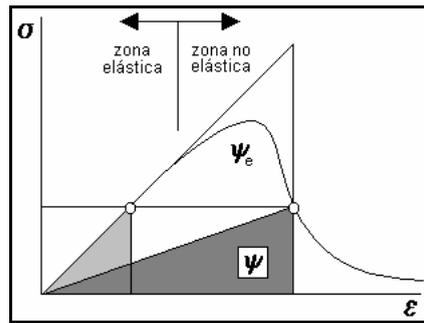


Ilustración 5.10: Las energías de deformación, elástica y de daño

Toda ecuación constitutiva se reduce a establecer una relación entre las tensiones y las deformaciones que puede soportar cierto material, y una de las maneras posibles de formular dicha expresión es a través de un planteamiento energético. Al realizar la deformación se moviliza una energía y por lo tanto, en el problema, se debe exigir el cumplimiento de la inecuación de Clausius-Planck [M1] para procesos termo-mecánicos desacoplados. Utilizando la parte mecánica de la misma, y aprovechando la definición de la energía de deformación que se ha hecho en A5.1.3, se obtiene que la disipación energética en el cuerpo es:

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad \text{A5.1.4}$$

Para que se cumpla dicha inecuación frente a una variación arbitraria de la variable libre, tensor de deformaciones $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, necesariamente deben exigirse dos condiciones simultáneas:

1. En primer lugar:

$$\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \text{A5.1.5}$$

de donde se deduce que:

$$\sigma = (1-d) \frac{\partial \psi_e}{\partial \varepsilon} = (1-d) D : \varepsilon = (1-d) \sigma_e \quad \text{A5.1.6}$$

2. En segundo lugar, como $\dot{d} > 0$ por definición de la variable interna de la formulación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial d} \leq 0 \quad \text{A5.1.7}$$

de manera que de A5.1.3 se halla:

$$\frac{\partial \psi}{\partial d} = -\psi_e \quad \text{A5.1.8}$$

En consecuencia se deduce que el incremento en la disipación energética será:

$$\dot{\gamma} = \dot{d} \psi_e \quad \text{A5.1.9}$$

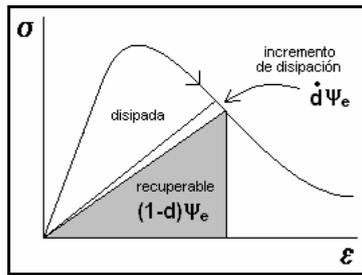


Ilustración 5.11: La energía de deformación en el modelo de daño

Superficie límite de degradación.

En el apartado anterior se ha definido una relación constitutiva a partir de unas consideraciones energéticas. Se deducía que las deformaciones y tensiones se relacionaban mediante una variable de daño, variable interna de la formulación, que ponderaba la aproximación elástica. En el modelo es necesario definir una superficie límite que informe del estado actual de la variable, y por lo tanto, saber si se está en comportamiento elástico o con daño. Matemáticamente, la superficie de degradación es una función de discontinuidad en el espacio de tensiones, y tiene una relación directa con la superficie de fluencia que se definía en elastoplasticidad. Aprovechando dicha analogía con la plasticidad, la función de degradación se puede utilizar como criterio umbral de existencia de daño.

En consecuencia, se desea definir una función de degradación, según la cual el estado tensional siempre deba estar en su superficie o en su interior, tal y como se enuncia en la teoría de plasticidad:

$$F(\tau, \mu) = G(\tau) - G(\mu) \quad \text{A5.1.10}$$

Donde τ debe ser una norma escalar de las tensiones y μ un parámetro de consistencia que depende de las propiedades del material.

Varias funciones son posibles, pero se escoge en particular [O2]:

$$G(\tau) = 1 - \frac{\tau^*}{\tau} e^{A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*}\right)} \quad \text{A5.1.11}$$

y análogamente se define la función de endurecimiento como:

$$G(\mu) = 1 - \frac{\mu_0}{\mu} e^{A \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)} \quad \text{A5.1.12}$$

De las expresiones superiores A5.1.11 y A5.1.12 se observa que G es una función monótona creciente y que se mueve en el intervalo $[0,1]$, nótese que coincide con los mismas acotaciones que debe tener la variable de daño. Asimismo, se define τ^* como el valor umbral de la norma escalar de tensiones y μ_0 como el valor límite del daño obtenido de la condición de consistencia. Finalmente se define A como un parámetro que depende de las propiedades mecánicas del material y cuya expresión se deducirá más adelante. La analogía con plasticidad sigue siendo evidente donde la primera función $G(\tau)$ correspondería a uno de los criterios de fallo, Tresca, Von Mises, etc. y la segunda $G(\mu)$ sería la ley de endurecimiento del material.

Suponiendo que inicialmente se incrementa el estado tensional hasta llegar a un valor límite donde se inicia el daño, se cumple:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \\ G(\mu_0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{A5.1.13}$$

Por lo tanto, como el estado tensional no puede estar fuera de la superficie de degradación, necesariamente se debe cumplir que:

$$F(\tau, \mu_0) = 0 \quad \text{A5.1.14}$$

En consecuencia:

$$\tau - \tau^* e^{A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*}\right)} = 0 \quad \text{A5.1.15}$$

La única forma de cumplir esta igualdad es a través de la exigencia:

$$\tau = \tau^* \tag{A5.1.16}$$

Por consiguiente, una forma muy simple de definir el límite de degradación será a través de la expresión:

$$F(\tau, \mu_o) = F(\tau, \tau^*) = \tau - \tau^* = 0 \tag{A5.1.17}$$

De donde se deriva que $\tau^* = \mu_o$ y por lo tanto el parámetro umbral de consistencia del material corresponde a un valor máximo admisible de la norma de tensiones.

Norma escalar de tensiones

El modelo necesita una norma de tensiones, de manera que dado un estado tensional triaxial real se pueda calcular una tensión equivalente de comparación que evalúe el término τ de la superficie límite definida anteriormente en A5.1.10. La ilustración 5.12 pretende dar un ejemplo sencillo de la idea de comparación en un estado plano de tensiones.

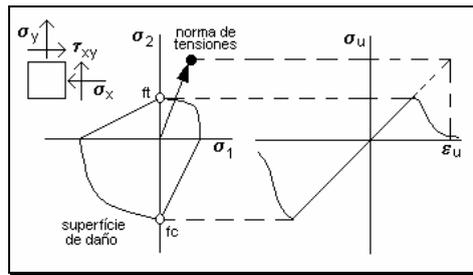


Ilustración 5.12: Criterio uniaxial de comparación

Nuevamente el planteamiento es equivalente al que se daba en plasticidad al definir un criterio de fallo según las expresiones de Von Mises, Tresca, etc. como se ha comentado anteriormente. En caso de daño se define la norma escalar de tensiones de la siguiente forma:

$$\tau = [1 + r(n - 1)] \sqrt{(\sigma_1^e)^2 + (\sigma_2^e)^2 + (\sigma_3^e)^2} \tag{A5.1.18}$$

siendo:

$$r = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle \sigma_i^e \rangle}{|\sigma_i^e|} \quad , \quad \langle \sigma_i^e \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i^e + |\sigma_i^e|] \tag{A5.1.18 bis}$$

$$n = \frac{\sigma_{comp}^{max}}{\sigma_{trac}^{max}} = \frac{f_c}{f_t}$$

Donde $\sigma^e = D\epsilon$ es la aproximación elástica de las tensiones y σ_i^e son las tensiones principales elásticas de dicho tensor. Por lo tanto, la norma de tensiones representa una longitud ponderada del tensor de tensiones en un espacio euclídeo. En el factor escalar de ponderación, interviene la

relación n que hay entre las máximas tensiones que soporta el material a compresión y a tracción, de esta manera se tiene en cuenta el desigual comportamiento que pueda tener, según esté trabajando en uno u otro estado de sollicitación. Finalmente el término r se ocupa de saber si en el estado tensional actual predomina la tracción o la compresión.

Para aclarar conceptos, se analizan dos casos simples que permiten comprobar la correcta definición de las expresiones:

- Caso uniaxial de tracción (tensión positiva) supuesto que se llega al límite:

$$\sigma^e = \sigma_t^e \Rightarrow \tau = n\sigma_t^e \quad A5.1.19$$

según el criterio de comparación A5.1.17:

$$F(\tau, \mu_o) = \tau - \tau^* = 0 \quad A5.1.20$$

en consecuencia la tensión umbral será:

$$\tau^* = n\sigma_t^e = f_c \quad A5.1.21$$

- Caso uniaxial de compresión (tensión negativa) supuesto que se llega al límite:

$$\sigma^e = \sigma_c^e \Rightarrow \tau = \sigma_c^e \quad A5.1.22$$

en el criterio de comparación:

$$F(\tau, \mu_o) = \tau - \tau^* = 0 \quad A5.1.23$$

y se obtiene que:

$$\tau^* = \sigma_c^e = f_c \quad A5.1.24$$

Por consiguiente, se definirá de forma natural el valor umbral de la norma como la máxima tensión admisible a compresión:

$$\tau^* = \sigma_{\text{comp}}^{\text{max}} = f_c \quad A5.1.25$$

Evolución de la variable de daño

Finalmente es necesario definir la evolución de la variable de daño. Anteriormente se ha comentado que a medida que crece la degradación, al material le cuesta cada vez más generar energía de deformación que equilibre las sollicitaciones, por lo tanto el valor de d debe ir cambiando a medida que el daño aumente en la estructura.

Se define la ley de evolución de la variable de daño como:

$$\dot{d} = \langle \dot{\mu} \rangle \frac{\partial F(\tau, \mu)}{\partial \tau} \quad A5.1.26$$

$$\text{siendo } \langle \dot{\mu} \rangle = \frac{1}{2} [\dot{\mu} + |\dot{\mu}|]$$

En la expresión A5.1.26 el término $\dot{\mu}$ juega el papel del multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ que aparecía en la formulación de la elastoplasticidad. Por su parte, la derivada parcial representa la dirección de crecimiento de la superficie límite respecto de las tensiones de comparación. De manera que, conceptualmente, la variable interna d tiene su analogía con la variable interna que aparecía en la deformación elastoplástica del capítulo 4:

$$d \approx \int_0^t \|\dot{\epsilon}_p\| dt \quad \text{A5.1.27}$$

Si se considera la superficie de degradación definida anteriormente:

$$F(\tau, \mu) = G(\tau) - G(\mu) = 0 \quad \text{A5.1.28}$$

y se establece una variación de la misma, se obtiene la condición de consistencia de la formulación que físicamente exige que el estado tensional no salga al exterior de la superficie límite:

$$\dot{F}(\tau, \mu) = \dot{G}(\tau)\dot{\tau} - \dot{G}(\mu)\dot{\mu} = 0 \quad \text{A5.1.29}$$

y por la condición en el inicio de la degradación:

$$G(\tau) = G(\mu) \quad , \quad \dot{G}(\tau) = \dot{G}(\mu) \quad \text{A5.1.30}$$

se deduce que:

$$\dot{\tau} = \dot{\mu} \quad \text{A5.1.31}$$

En consecuencia, la variación en la norma de tensiones definirá la variación en el parámetro de consistencia.

Por otro lado, se ha definido la norma escalar de tensiones en A5.1.18, y se sabe que las tensiones dependen de las deformaciones, por lo tanto se puede aplicar la regla de la cadena y obtener:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \quad \text{A5.1.32}$$

Finalmente y utilizando las expresiones A5.1.26-32 se obtiene:

$$\dot{d} = \langle \dot{\tau} \rangle \frac{\partial F(\tau, \mu)}{\partial \tau} = \left\langle \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} \right\rangle \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \quad \text{A5.1.33}$$

Como ilustración del comportamiento general de la ley de la variable interna se van analizar los dos estados posibles del problema, sollicitación frente a carga y frente a descarga:

- Caso de carga: Suponiendo que se entra en degradación y que el estado tensional se sitúa en la superficie límite.

$$F(\tau, \mu) = 0$$

$$\dot{d} = \langle \dot{\tau} \rangle \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \Rightarrow d = G(\tau) \quad \text{A5.1.34}$$

- Caso de descarga: Suponiendo que el estado tensional entra en el interior de la superficie de degradación

$$F(\tau, \mu) < 0$$

$$\dot{\tau} < 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \Rightarrow d = \text{cte.} \quad \text{A5.1.35}$$

Cabe recordar que la variable interna d necesariamente debe siempre crecer y estar acotada entre $[0,1]$, y ahora aparece con claridad porque se había escogido la función $G(\tau)$ con esa expresión un tanto extraña A5.1.11-12. Por lo tanto, en general se puede definir la ley de evolución de la variable de daño como la función siguiente:

$$d = 1 - \frac{\tau^*}{\tau} e^{-A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*}\right)} \quad \text{A5.1.36}$$

El parámetro A

Es sabido que el cálculo numérico de la solución siempre será una aproximación al valor real desconocido, pero dicha aproximación será tanto mejor cuanto más correcta sea la definición del modelo discreto. Hasta ahora se han evaluado todos los términos del modelo de daño independientemente de la discretización con elementos finitos que se tenga, pero para calcular el valor del parámetro A es necesario referirse a la malla de trabajo. La evaluación del parámetro A se calculará a partir de los requerimientos energéticos que sean necesarios para provocar una fisuración en el material.

Supuesto un proceso uniaxial de tracción donde se lleva la pieza a rotura, se define la energía necesaria para fracturar el material como energía disipada real:

$$\gamma_{\text{real}} = A_{\text{rotura}} G_f \quad \text{A5.1.37}$$

Donde G_f es la energía de fractura por unidad de área, una propiedad del material que se obtiene mediante ensayos de laboratorio. En los ensayos, se llevan hasta la rotura una serie de probetas y se calcula el trabajo que se ha necesitado para provocar la separación física de las mismas, tal y como muestra gráficamente la ilustración 5.13.

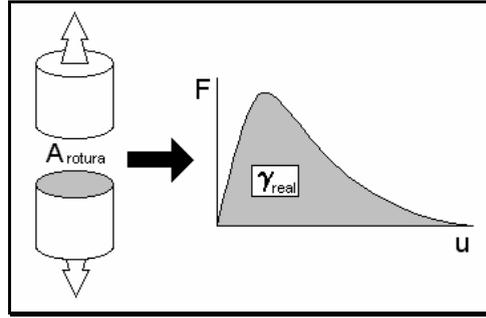


Ilustración 5.13: Ensayos de rotura y energía disipada

Por otro lado se había definido la disipación del modelo en A5.1.9, y substituyendo el incremento en la variable interna por su expresión según la definición de A5.1.34 se obtiene:

$$\dot{\gamma} = \Psi_e \dot{d} = \Psi_e \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \dot{\tau} \quad \text{A5.1.38}$$

Si se supone un proceso uniaxial de tracción y empleando las expresiones A5.1.18 bis entonces se tiene que:

$$\varepsilon_t \Rightarrow \sigma_t^e = E\varepsilon_t \Rightarrow r = 1 \quad \text{A5.1.39}$$

y la norma escalar de tensiones de A5.1.18 se convierte en

$$\tau = n\sigma_t^e \quad \text{A5.1.40}$$

Cuando se evalúa la energía elástica de deformación se obtiene:

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \varepsilon_t E \varepsilon_t = \frac{1}{2E} (\sigma_t^e)^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{n^2 E} \quad \text{A5.1.41}$$

y por lo tanto, la disipación total del modelo en este caso será:

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{\tau^*}^{\infty} \dot{\gamma} d\tau = \int_{\tau^*}^{\infty} \dot{G}(\tau) \frac{\tau^2}{2n^2 E} d\tau = \\ &= \int_{\tau^*}^{\infty} \frac{\tau^2}{2n^2 E} dG(\tau) = \\ &= \frac{\tau^2}{2n^2 E} G(\tau) \Big|_{\tau^*}^{\infty} - \int_{\tau^*}^{\infty} \frac{\tau}{n^2 E} G(\tau) d\tau \end{aligned} \quad \text{A5.1.42}$$

Con lo que finalmente y tras substituir la función $G(\tau)$ por su valor real de A5.1.11 e integrar, se obtiene la expresión de la energía que se disipa en un punto dañado del material durante el proceso de degradación:

$$\gamma = \frac{(\tau^*)^2}{n^2 E} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right] \quad \text{A5.1.43}$$

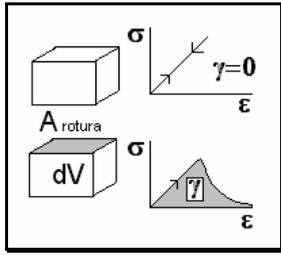


Ilustración 5.14: Energía discreta disipada

Llegados a este punto es lógico exigir a la forma discreta del modelo que la cantidad de energía disipada en toda la estructura sea equivalente a la que se obtendría en la realidad. Por lo tanto, la suma de las energías de disipación en el volumen de todos los puntos de integración de los elementos dañados, tiene que ser equivalente a la energía real que se obtendría en el área de rotura de la malla. El dibujo 5.14 ilustra el razonamiento.

En consecuencia, se tiene que:

$$\gamma_{\text{discreta}} = \sum_i^{\text{elem}} \int \gamma_i dV_i \quad \text{A5.1.44}$$

Por consiguiente, se debe exigir que se verifique que:

$$\gamma_{\text{real}} = \gamma_{\text{discreta}} \quad \text{A5.1.45}$$

Supuesta la malla con elementos finitos suficientemente regulares y suponiendo que todo el elemento se daña se puede expresar la disipación de la manera siguiente:

$$\gamma_{\text{discreta}} = \gamma V = \gamma l_c^3 \quad \text{A5.1.46}$$

donde l_c es la longitud característica del elemento finito, por ejemplo el valor del lado del elemento que en el caso de dos dimensiones sería la raíz de su área y en tres dimensiones la raíz cúbica del volumen. Más detalles sobre estos conceptos se pueden encontrar en [O2] y [C2].

Para esa malla dañada, la disipación real se evaluaría en función del área de rotura del elemento:

$$\gamma_{\text{real}} = G_f l_c^2 \quad \text{A5.1.47}$$

Substituyendo las expresiones A5.1.43, A5.1.1.46 y A5.1.47 y utilizando la igualdad A5.1.45 se deduce que⁷:

$$A = \frac{2l_c f_t^2}{2G_f E - 1} \quad \text{A5.1.48}$$

Se podría proceder análogamente con un estado puro de compresión y entonces se observaría que la fractura en compresión genera la misma expresión del parámetro A , por lo tanto el modelo queda correctamente definido para todos los estados tensionales.

La disipación energética

⁷ La ecuación de la disipación energética A5.1.43 siempre tiene que tener un valor mayor o igual que cero, por lo tanto se observa que el parámetro A tiene que cumplir la misma condición. Este hecho impone una restricción, en general holgada, sobre la longitud característica mínima l_c de los elementos finitos de la malla que puede deducirse de la ecuación A5.1.48.

Para verificar el correcto comportamiento del modelo es necesario evaluar la disipación energética y compararla con la energía de fractura real liberada, tal y como se ha explicado en el punto anterior.

En A5.1.38 se ha definido un incremento de energía disipada como:

$$\dot{\gamma} = \Psi_e \dot{d} = \Psi_e \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \dot{\tau} \quad \text{A5.1.49}$$

Por lo tanto se deben calcular los distintos términos de la expresión superior:

1. La energía elástica asociada es:

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{A5.1.50}$$

2. La derivada de la función $G(\tau)$ es:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \left[1 + \frac{\tau A}{\tau^*} \right] \frac{\tau^*}{\tau^2} e^{A \left(1 - \frac{\tau}{\tau^*} \right)} \quad \text{A5.1.51}$$

3. La variación en la norma de tensiones es:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_1^e} \dot{\sigma}_1^e + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_2^e} \dot{\sigma}_2^e + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_3^e} \dot{\sigma}_3^e \quad \text{A5.1.52}$$

Se definen previamente las siguientes expresiones que luego se utilizarán:

$$\frac{\partial |\sigma_i^e|}{\partial \sigma_i^e} = \text{sig}(\sigma_i^e) \quad , \quad \frac{\partial \langle \sigma_i^e \rangle}{\partial \sigma_i^e} = \frac{1}{2} + \frac{\text{sign}(\sigma_i^e)}{2} \quad \text{A5.1.53}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma_i^e} = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k^e \right)^2} \left[\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{sig}(\sigma_i^e)}{2} \right) \sum_{k=1}^3 |\sigma_k^e| \right\} - \left\{ \text{sig}(\sigma_i^e) \sum_{k=1}^3 \langle \sigma_k^e \rangle \right\} \right] \quad \text{A5.1.54}$$

Finalmente la componente i ésima $\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_i^e}$ será:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_i^e} = \left[(n-1) \frac{\partial r}{\partial \sigma_i^e} \sqrt{\sum_{k=1}^3 \sigma_k^e{}^2} \right] + \left[\frac{(1+r(n-1))\sigma_i^e}{\sqrt{\sum_{k=1}^3 \sigma_k^e{}^2}} \right] \quad \text{A5.1.55}$$

Por lo tanto, ahora se estará en condiciones de evaluar la energía disipada por el modelo en cada punto donde exista daño.

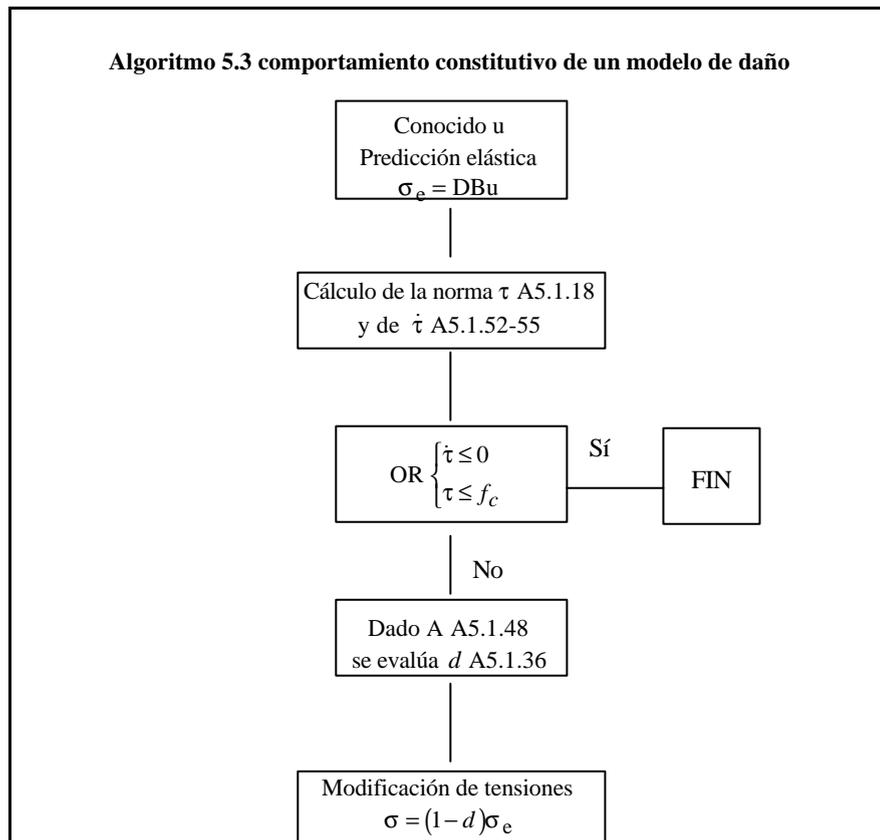
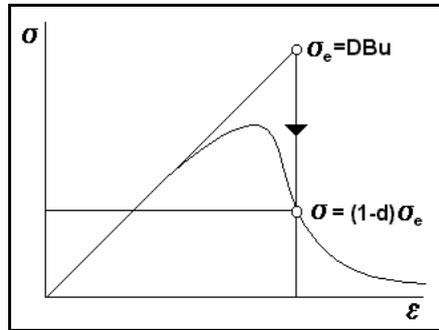
A5.1.3 LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El modelo constitutivo define la relación tensión-deformación en un punto del sólido. La resultante de las fuerzas tensionales internas debe equilibrar la sollicitación externa. En la discretización de los elementos finitos los estados tensionales se evalúan en los puntos de integración de los elementos

de la malla. Por lo tanto, después de hallar los desplazamientos se calcularán las tensiones según el algoritmo 5.3.

El sentido físico de dicho algoritmo se refleja en la siguiente figura:

Ilustración 5.15: Modificación del estado tensional



ANEXO 5.2: EL MÉTODO DE LA LONGITUD DE ARCO

Una de las estrategias comunes de resolución de problemas en los que el estado de cargas puede ocupar más de una posición de equilibrio, tal y como sucede en los ablandamientos o en la no linealidad geométrica, es el método de la longitud de arco.

En pocas palabras, se puede decir que la estrategia de resolución mediante longitud de arco consiste en ir construyendo la curva de comportamiento de la estructura exigiendo el equilibrio estructural y una acotación sobre el valor de los desplazamientos.

Se reescribe la ecuación de equilibrio de problema según:

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{u}(\lambda)) = \lambda \mathbf{f} \quad \text{A5.2.1}$$

acompañada de la condición del control de desplazamientos:

$$g(\mathbf{u}(\lambda)) = 0 \quad \text{A5.2.2}$$

Nótese que la condición de control $g(\mathbf{u})$ sobre los desplazamientos introduce una restricción en el problema, por ello a simple vista parece que existirán más ecuaciones que incógnitas. Pero al considerar el parámetro de arco λ como desconocido, se aumenta en un grado la incertidumbre con lo que el problema sigue siendo determinado. Para más detalles puede consultarse Crisfield (1991) [C3].

Esto significa que el nivel de sollicitación de la estructura se convierte en una incógnita, mientras que algún desplazamiento, o combinación algebraica de desplazamientos, se convierte en determinado.

El tipo de restricción que se impone sobre los desplazamientos puede ser muy variado y en la formulación se han considerado los dos más comunes:

- *Control de desplazamiento en un punto:* en este caso se impone el desplazamiento l en un único nodo de la malla para n pasos de carga. Esta estrategia se suele utilizar para controlar la apertura de la fisuración en una zona de la estructura.

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_k - nl = 0 \quad \text{A5.2.3}$$

- *Control esférico:* en esta ocasión se impone la condición l como una norma de los desplazamientos de un grupo de nodos de la malla. En general, suelen ser todos a la vez con lo cual se obtiene un control global de la estructura.

$$g(\mathbf{u}) = \sum_k \mathbf{u}_k^2 - nl^2 = 0 \quad \text{A5.2.4}$$

El parámetro de arco λ se obtiene en función de la condición sobre los desplazamientos según el siguiente procedimiento. Supuesta una aproximación de primer orden del desarrollo de la condición se define:

$$g(u(\lambda + \Delta\lambda)) = g(u(\lambda)) + \Delta\lambda \frac{dg}{d\lambda} = 0 \quad A5.2.5$$

Siendo, en general:

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \lambda} \quad A5.2.6$$

Despejando el incremento del parámetro arco de la expresión A5.2.5, y haciendo uso de A5.2.6 se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\Delta\lambda = - \frac{g(u(\lambda))}{\sum_i \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \lambda}} \quad A5.2.7$$

A continuación se particulariza la expresión A5.2.7 en los casos contemplados previamente:

- *Control de un desplazamiento*, derivando A5.2.3 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_i} &= 0 & \text{si } i \neq k \\ \frac{\partial g}{\partial u_i} &= 1 & \text{si } i = k \end{aligned} \quad A5.2.8$$

y derivando respecto del parámetro arco la ecuación de equilibrio A5.2.1 se tiene que:

$$K \frac{\partial u}{\partial \lambda} = f \quad A5.2.9$$

en consecuencia, la derivada coincide con el desplazamiento total para un valor unitario del parámetro arco. Por lo tanto, se obtiene finalmente que:

$$\Delta\lambda = - \frac{g(u(\lambda))}{u(1)} \quad A5.2.10$$

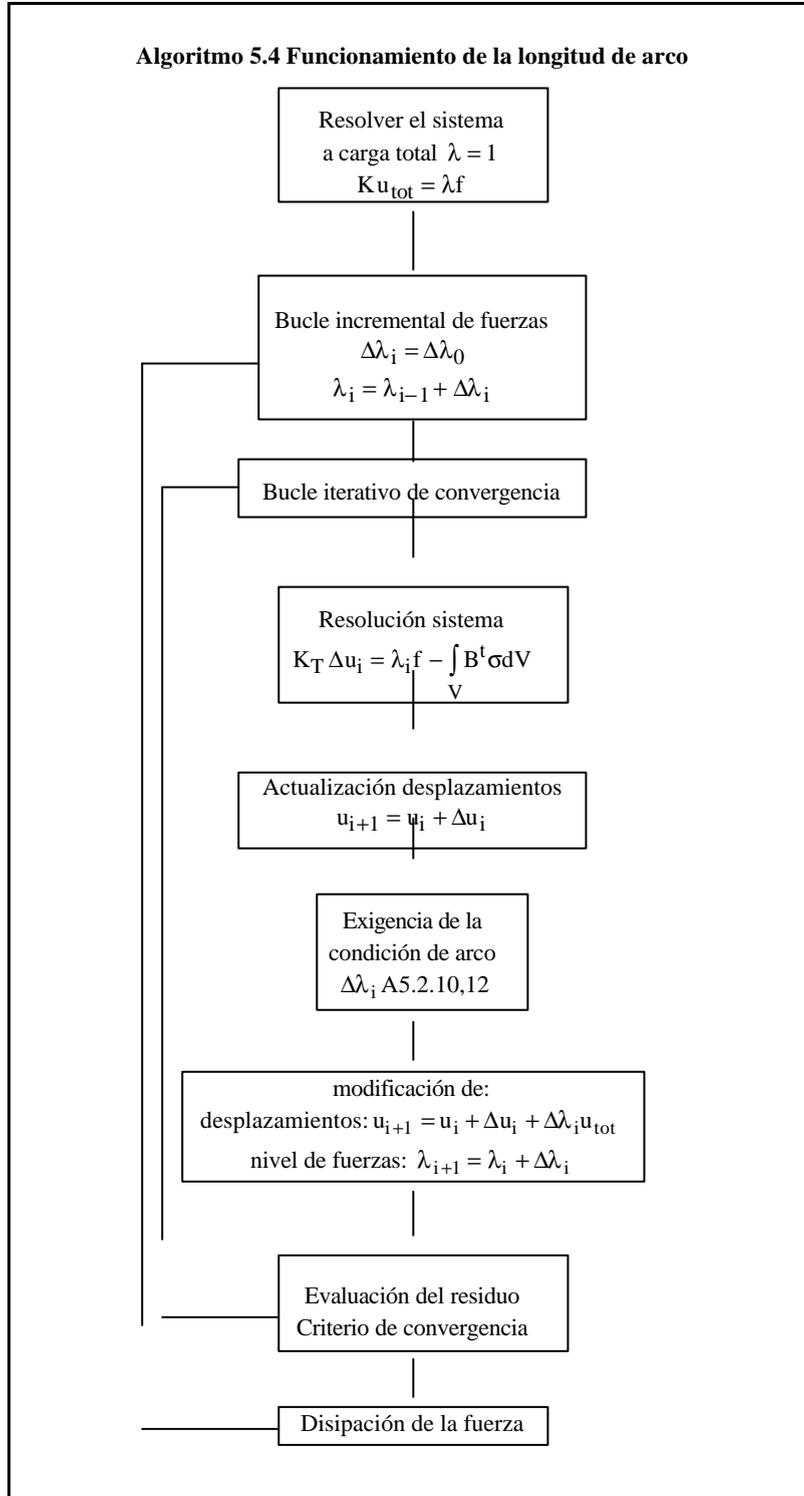
- *Control esférico*, derivando la expresión A5.2.4 se obtiene:

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = 2u_i \quad A5.2.11$$

y a partir de A5.2.7 se puede expresar:

$$\Delta\lambda = - \frac{g(u(\lambda))}{2 \sum_i u_i(\lambda) u_i(1)} \quad A5.2.12$$

Llegados a este punto se está en condiciones de presentar un esquema del funcionamiento del control de desplazamientos para ser implementado en una estrategia incremental iterativa de resolución del problema:



BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA DEL CAPÍTULO

- [C1] Carol, I., Rizzi, E. y Willam, K. "A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface". *International Journal Solids Structures*. 31, 2835-2865, 1994.
- [C2] Cervera, M., Oliver, J. y Oller, S. "Analysis of pathological behaviour of large concrete dams via smeared models". *II International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Vol 1, 633-644. Zell Am See, Austria, 1990.
- [C3] Crisfield, M.A. *Non-linear Finite Elements Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & sons, 1991.
- [K1] Kleiber, M. y Hien, T.H. "Parameter sensitivity in nonlinear dynamics, structural stability and plasticity". *Proceedings del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. Editores M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor. SEMNI, 1996.
- [L1] Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. y Oñate, E. "A plastic damage model for concrete". *International Journal of Solids and Structures*. 25, 299-326, 1989.
- [M1] Malvern, L. E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Ed. Prentice-Hall. 1969.
- [O1] Oller, S. "Modelización Numérica de Materiales Friccionales", Monografía CIMNE núm 3. Enero 1991. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. UPC. Barcelona.
- [O2] Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. y Lubliner, J. "A simple damage model for concrete, including long term effects". *II International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Vol 2. 945-958. Zell Am See, Austria. 1990.