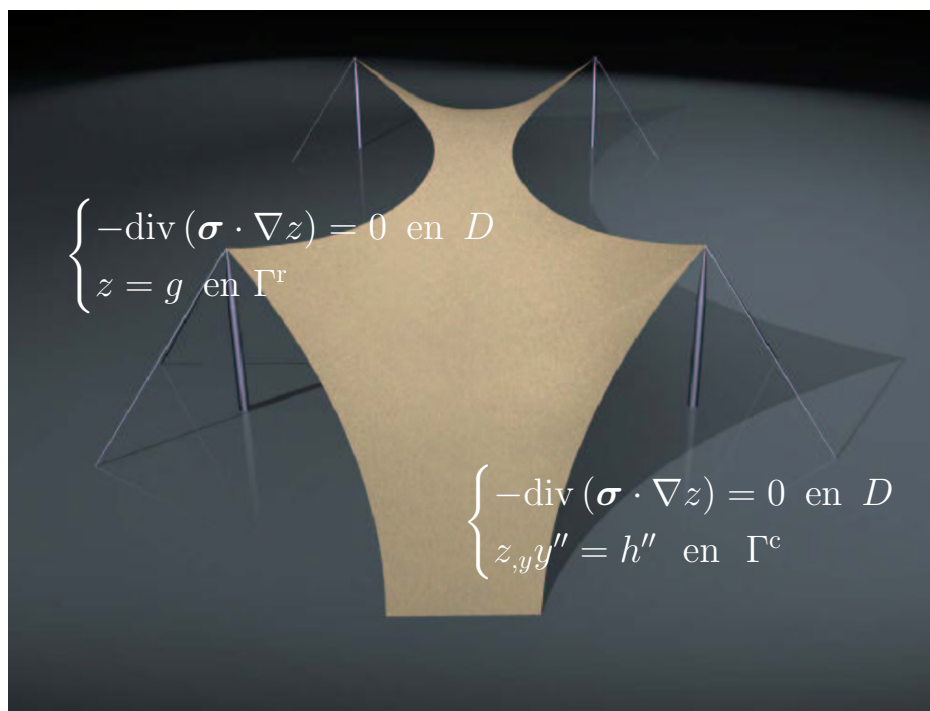


UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA T. S. D'ENGINYERS DE CAMINS, CANALS I PORTS

Programa de Doctorado en Ingeniería Civil

Análisis matemático del equilibrio en estructuras
de membrana con bordes rígidos y cables.
Pasarelas: forma y pretensado

G. Vigliani



Tesis doctoral

Director: Prof. Juan Murcia Vela
Barcelona, diciembre 2006

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA T. S. D'ENGINYERS DE CAMINS, CANALS I PORTS

Programa de Doctorado en Ingeniería Civil

**Análisis matemático del equilibrio en estructuras
de membrana con bordes rígidos y cables.**

Pasarelas: forma y pretensado

TESIS DOCTORAL

Doctorando: Giuseppe Viglialoro
Licenciado en Matemáticas (La Sapienza, Roma)

Director: Prof. Juan Murcia Vela
Profesor de Investigación del CSIC

Barcelona, diciembre 2006

*Alla memoria di una grande persona,
alla memoria di un grande uomo,
alla memoria di un grande amico.
Franco...mio padre.*

Agradecimientos y otras consideraciones

Este trabajo ha sido posible gracias a una beca CSIC-MEC, de cuatro años, para la realización de tesis doctorales en el marco de Unidades Asociadas Universidades-CSIC.

Vaya de antemano mi agradecimiento a esas entidades.

A la vez, en este contexto, no me resulta demasiado fácil expresar mi gratitud a todas las personas con las que compartí estos últimos años de mi vida. Me limitaré, entonces (y, por favor, ¡qué nadie se lo tome mal!), a escribir pocas palabras.

Agradezco

a mi director de tesis, el profesor Juan Murcia Vela, por su soporte científico y humano, y por su dedicación al trabajo a lo largo de estos años;

a los profesores Fernando Martínez y Xavier Cabré, por sus útiles y constantes sugerencias de carácter matemático, y al profesor Pedro Díez por aquellas de carácter numérico;

al profesor Ignacio Carol, responsable de la Unidad Asociada (UPC);

al profesor Carlos Agelet de Saracíbar Bosch, mi tutor de doctorado;

al arquitecto Guido Sarcina Staffa, autor del diseño en portada;

a Jordi Poblet, por su intensa disponibilidad y paciencia.

Por miles de motivaciones, también agradezco

a mis compañeros de despacho (Mario, Oscar, Zhan, Leo, L. Manuel, Nati, Jesús, Jorge, Poblet, Claudia, Isabel, Carlos Velasco, Fran, Bibiana, Claudiú y José), a mis compañeros “académicos” (Riccardo, Joaquín, Roberto, Xevi, Ester, Carlos y Eloi) y, finalmente, a los amigos más cercanos (Lopez, Silvia, Maurizio y Antonia).

Come potrei non ringraziare la mia famiglia e la mia compagna di vita? Tante Grazie mamma, tante grazie Ottavia e Luca, tante grazie Silvia e tante grazie Cr, per avermi accompagnato, spronato ed incoraggiato in tutto il cammino.

Una última consideración general: aunque el nivel de mi castellano pueda ser valorado positivamente, por un lado soy consciente de mis limitaciones, y por el otro me doy cuenta que la fase de redacción fue más dura de lo que imaginaba. Por lo tanto, pido disculpas de los (inevitables) errores de gramática y, aún más, de los de forma y expresión y sintaxis.

Notaciones

- \mathbb{R} conjunto de los *números reales*.
- $|x|$ *valor absoluto* o *módulo* de x .
- $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ *espacio euclídeo* n -dimensional ($n \geq 1$).
- $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *producto escalar* en \mathbb{R}^n .
- $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ *norma euclídea* o *módulo* de x . Si $\|x\| = 1$, entonces x es un *vector unitario* o *versor*.
- $x \wedge y$ *producto vectorial* entre x e y ;
$$x \wedge y := (x_2 y_3 - y_2 x_3, y_1 x_3 - x_1 y_3, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$
- \emptyset conjunto *vacío*.
- D *abierto*¹ de \mathbb{R}^2 .
- $\overset{\circ}{D}$ *interior* de D .
- $\partial D \equiv \Gamma$ *frontera* de D .
- \cup y \cap *operación de unión* y *de intersección*.
- $\overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$ *clausura* de D .
- n *normal exterior* a D .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ conjunto de *las matrices* con m filas y n columnas.
- $\det(A)$ *determinante* de A .
- $\text{rang}(A)$ *rango* de A .
- $f_{,x} \equiv f_{,1} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_{,y} \equiv f_{,2} \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ *derivadas parciales* de f .
- $\nabla f := (f_{,x}, f_{,y}) \equiv (f_{,1}, f_{,2})$ *gradiente* de f .
- $f_{,v} \equiv \frac{\partial f}{\partial v} := \nabla f \cdot v = \sum_{i=1}^2 f_{,x_i} v_i = f_{,1} v_1 + f_{,2} v_2$ *derivada parcial* de f
con respecto al versor v .

¹Consideraremos abiertos regulares, convexos y acotados de \mathbb{R}^2 .

- ⇒ $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ **multíndice** ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con α_i **entero positivo**).
- ⇒ $f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} = f_{,x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}}$ **derivada** α -ésima de f .
- ⇒ $f_{1,x} + f_{2,y} \equiv f_{1,1} + f_{2,2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \equiv \operatorname{div} f$ **divergencia** de f .
- ⇒ $\dot{f} := (\dot{f}_1(x), \dot{f}_2(x), \dot{f}_3(x)) = (f'_1(x), f'_2(x), f'_3(x))$ **vector derivada primera** de f . Equivalentemente por las derivadas sucesivas.
- ⇒ $\sup_D f$ ($\inf_D f$) **extremo superior en D de f** (**extremo inferior en D de f**).
- ⇒ $\max_D f$ ($\min_D f$) **máximo en D de f** (**mínimo en D de f**).
- ⇒ $\lambda = \lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$ **tensor simétrico** de orden dos.
- ⇒ $\begin{cases} \lambda_{11} > 0, \text{ o bien } \lambda_{22} > 0 \\ \det \lambda > 0 \text{ (} \det \lambda = 0 \text{)} \end{cases}$ tensor **definido positivo (semidefinido)**.
- ⇒ $\begin{cases} \lambda_{11} > 0, \text{ o bien } \lambda_{22} < 0 \\ \det \lambda > 0 \text{ (} \det \lambda = 0 \text{)} \end{cases}$ tensor **definido negativo (semidefinido)**.
- ⇒ $\det \lambda < 0$ tensor **indefinido**.
- ⇒ $\nabla \cdot \lambda = (\lambda_{xx,x} + \lambda_{xy,y}, \lambda_{xy,x} + \lambda_{yy,y}) \equiv (\lambda_{11,1} + \lambda_{12,2}, \lambda_{12,1} + \lambda_{22,2})$ **divergencia** de λ .
- ⇒ $C^0(D)$ conjunto de las **funciones continuas** en D .
- ⇒ $C^m(D)$ conjunto de las **funciones m veces derivables** con continuidad en D .
- ⇒ $C^\infty(D)$ conjunto de las **funciones infinitamente derivables** en D .
- ⇒ $\mathcal{M}(D)$ conjunto de las **funciones medibles según Lebesgue**².
- ⇒ $L^p(D) := \left\{ f \in \mathcal{M}(D) : \int_D |f|^p dD < \infty \right\}; p \in \mathbb{R} \text{ tal que } p \geq 1$.
- ⇒ $L^\infty(D) := \left\{ f \in \mathcal{M}(D) : \sup_{x \in D} |f(x)| < \infty \right\}$. Si $f \in C^0(D)$ el sup coincide con el máx.

²Consúltese la referencia [7].

⇒ $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_{L^\infty} := \sup_{x \in D} |f(x)|$ *norma infinito* de f .

⇒ $H^p(D) := \{f \in L^2(D) : f^{(\alpha)} \in L^2(D), \forall \text{ multíndice } \alpha : |\alpha| \leq p\}$; $p \in \mathbb{R}$
tal que $p \geq 1$.

⇒ $H_0^p(D) := \{f \in H^p(D) : f = 0 \text{ en } \partial D\}$ ³.

³Véase la referencia [7].

Índice general

1. Introducción	13
1.1. Aspectos generales de las membranas	14
1.2. Las membranas en aplicaciones portantes de ingeniería civil	17
2. Asunto, motivación, objetivos y estado del arte	21
2.1. Asunto y motivación	21
2.2. Objetivos globales	23
2.3. Estado del arte	24
2.3.1. Tecnología de pasarelas con estructura de membrana	24
2.3.2. Estado del conocimiento: métodos desarrollados	28
2.3.3. Análisis del Método de la Densidad de Fuerzas	40
3. Formulación matemática del equilibrio en una membrana y en sus bordes. Problema completo del equilibrio	45
3.1. Equilibrio en la membrana	45
3.2. Equilibrio en el borde	51
3.2.1. Equilibrio entre borde rígido y membrana	55
3.2.2. Equilibrio entre cable y membrana	55
3.3. Interpretación geométrica de la relación de compatibilidad	58
3.4. Problema completo del equilibrio: problema directo y dual	59
4. Problema directo	65
4.1. Formulación matemática y propiedades	65
4.2. Casuística del problema directo	70
4.2.1. Ejemplos de problema directo mediante la utilización de la fórmula de d'Alembert	72
4.2.2. Un caso de resolubilidad concreto	77
5. Problema dual	83
5.1. Formulación matemática y propiedades	83
5.1.1. Problema dual: método de resolución	88
5.1.2. El problema dual restringido: método de resolución	90
5.1.3. Ejemplos del problema dual restringido	92

5.1.4. Ejemplo del problema dual general	104
6. Verificaciones	111
6.1. Correspondencia de resultados entre el problema directo y el dual (en ausencia de cables)	111
6.2. Análisis de los planteamientos discreto y continuo (en ausencia de cables)	113
6.2.1. Comparación de algunos problemas resueltos por el plante- amiento continuo y discreto	116
7. Resumen y conclusiones	125
7.1. Resumen	125
7.2. Conclusiones	126
Referencias	135
Anejos	137
A. Elementos de Geometría Diferencial de curvas y superficies	139
A.1. Curvas de \mathbb{R}^3 : el triedro de Frenet	139
A.2. Superficies de \mathbb{R}^3 : la curvatura de Gauss	142
B. Elementos básicos sobre las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales de \mathbb{R}^2	147
B.1. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (E.D.P.): aspectos generales	147
B.2. Problema de Cauchy y curvas características: clasificación de las E.D.P.	148
B.2.1. Propagación de singularidades	150
B.3. Formulación variacional de algunos problemas de contorno de tipo elíptico	151
B.3.1. Principios del máximo para problemas elípticos	153
C. Generalidades del Método de los Elementos Finitos	157
C.1. Aspectos básicos del Método de los Elementos Finitos	157
C.2. Residuos ponderados y forma débil de un problema elíptico de Di- richlet en \mathbb{R}^2	158
D. Coeficiente de amortiguamiento (Método de Relajación Dinámi- ca)	161

Capítulo 1

Introducción

Las *membranas* son estructuras que conforman una superficie en el espacio, con espesor mínimo. Dicho del modo más sencillo, las membranas son superficies materiales, los objetos que más se aproximan materialmente a una superficie geométrica.

Las membranas trabajan sólo mediante esfuerzos en las direcciones tangentes a su superficie media. Estos esfuerzos, de compresión o tracción, son los *esfuerzos de membrana*.

En sentido estricto, las membranas son las que trabajan a tracción, puesto que, dado su mínimo espesor, carecen de rigidez a flexión. La compresión es un esfuerzo que va asociado a dicha rigidez y así las estructuras que, en paralelo, admiten tal esfuerzo son las *láminas*. Las láminas son superficies materiales de espesor pequeño pero no mínimo, con cierta rigidez, donde normalmente aparecen flexiones junto con los esfuerzos de membrana.

El presente trabajo trata sobre membranas en sentido estricto, esto es, sobre membranas a tracción.

Estas estructuras se caracterizan por su gran ligereza y versatilidad de despliegue, con todo lo que ello lleva consigo. Hasta hoy se han empleado en aplicaciones de arquitectura (cubiertas, sobre todo) y, mucho menos, de ingeniería civil (presas inflables de poca altura, por ejemplo). Normalmente se pretensan antes de entrar en servicio, para que adquieran cierta rigidez (como mínimo, se da un pretensado de montaje, tensándolas algo para desplegarlas sin arrugas).

Las membranas abiertas (con bordes) requieren elementos externos que equilibren sus esfuerzos, cerrando el conjunto, o que los transmitan al terreno. Las membranas cerradas aprovechan el efecto neumático, equilibrando los esfuerzos por la

continuidad de la estructura y la presión interna de un fluido (por la cual se produce el pretensado).

En cierto modo, puede decirse que una membrana es pura geometría. En efecto, las implicaciones de la geometría alcanzan aquí su máximo grado, influyendo de modo especial en la respuesta de la estructura, pero también en ciertas acciones sobre la misma (cargas de viento); además de afectar a otros factores no estrictamente estructurales, pero no menos importantes, como su funcionalidad o su impacto visual. Así pues, en las membranas se da la interacción de muchos factores a través de la geometría.

La investigación objeto del presente informe se centra en el *análisis matemático* de las membranas portantes, esto es, las sometidas a cargas más allá de las asociadas a su propio despliegue (peso propio, pretensado, viento y, eventualmente, nieve), con miras a extender sus aplicaciones en el campo de la ingeniería civil, concretamente a las *pasarelas de peatones*.

El paso a estructuras portantes como las indicadas implica, con respecto a las no portantes, esfuerzos mayores. Ello no sólo ocurre por los efectos de las cargas de uso de tales estructuras, sino porque requieren mayor pretensado para mantener la rigidez. Pero, aparte del salto cuantitativo en esfuerzos, ese paso significa dar al mismo tiempo un salto cualitativo¹.

Precisamente, tal como se irá viendo, dicho salto cualitativo justifica y motiva en último término la presente investigación, la cual pretende contribuir al desarrollo del análisis de este tipo de membranas, permitiendo conocer de modo ajustado su comportamiento estructural para el adecuado proyecto de las mismas.

1.1. Aspectos generales de las membranas

Es bien sabido que, para una cierta distribución de cargas, no toda superficie en el espacio corresponde a una membrana. Sólo son membranas aquéllas cuya forma permite equilibrar tales cargas con esfuerzos de membrana. Esto implica que el cálculo de membranas siempre lleva asociado de algún modo un problema de *búsqueda de forma*.

Por otra parte, las membranas funcionan, frente a cargas normales a su superficie, gracias a su *curvatura*, la cual permite equilibrar dichas cargas con esfuerzos de membrana. Esto ya da idea de la importancia que tiene la existencia de curvatura, pero aún se aprecia mejor considerando el caso límite de una membrana plana.

¹Para explicaciones más detalladas véase la referencia [27].

Una membrana plana, sometida a cargas normales, sólo puede trabajar merced a su propia deformación, que genera curvatura; de modo que la deformación se convierte en efecto primario, necesario para el equilibrio, que alcanza valores muy altos por la magnitud de los esfuerzos que aparecen. Por el contrario, en una membrana curva, que permita el equilibrio de las cargas normales, la deformación pasa a ser efecto secundario, con valores más bajos, resultado de los menores esfuerzos existentes.

En este punto conviene indicar que, dentro del análisis de membranas pueden distinguirse, en términos generales, las siguientes fases:

- **Fase de confección**, en la que, como resultado del proceso de confección, se tiene una forma que corresponde a esfuerzos nulos (forma potencial o virtual, porque si se desplegara la membrana con esa forma parecería ya el peso propio).
- **Fase de pretensado**, en la que, como resultado de desplegar y aplicar el pretensado a la membrana confeccionada, se llega ya a una forma real, asociada a las acciones de pretensado y peso propio, y la membrana queda apta para entrar en servicio.
- **Fase de servicio**, en la que, como resultado de la aparición de otras acciones (viento, cargas de uso, etc.) durante la etapa de servicio de la membrana, se llega a otras tantas formas.

Volviendo al asunto de la curvatura, hay que subrayar que, además de curva, la superficie de las membranas es de **curvatura de Gauss** negativa (curvaturas de sentido contrario en direcciones ortogonales del plano tangente). Esto obedece a un motivo estructural muy claro. Si no fuera así, los esfuerzos de pretensado, siempre de tracción, no podrían estar en equilibrio (sin considerar el peso propio de la membrana, muy pequeño).

A la vista de lo anterior, y precisando ya más, en este trabajo se estudiará el comportamiento de estas estructuras en la fase de pretensado, con el objetivo de definir rigurosamente el problema completo del equilibrio (forma de la membrana, bordes de la misma, esfuerzos de pretensado), planteándolo a través de un análisis matemático adecuado.



Figura 1.1: Maqueta de una pasarela peatonal: vistas generales.

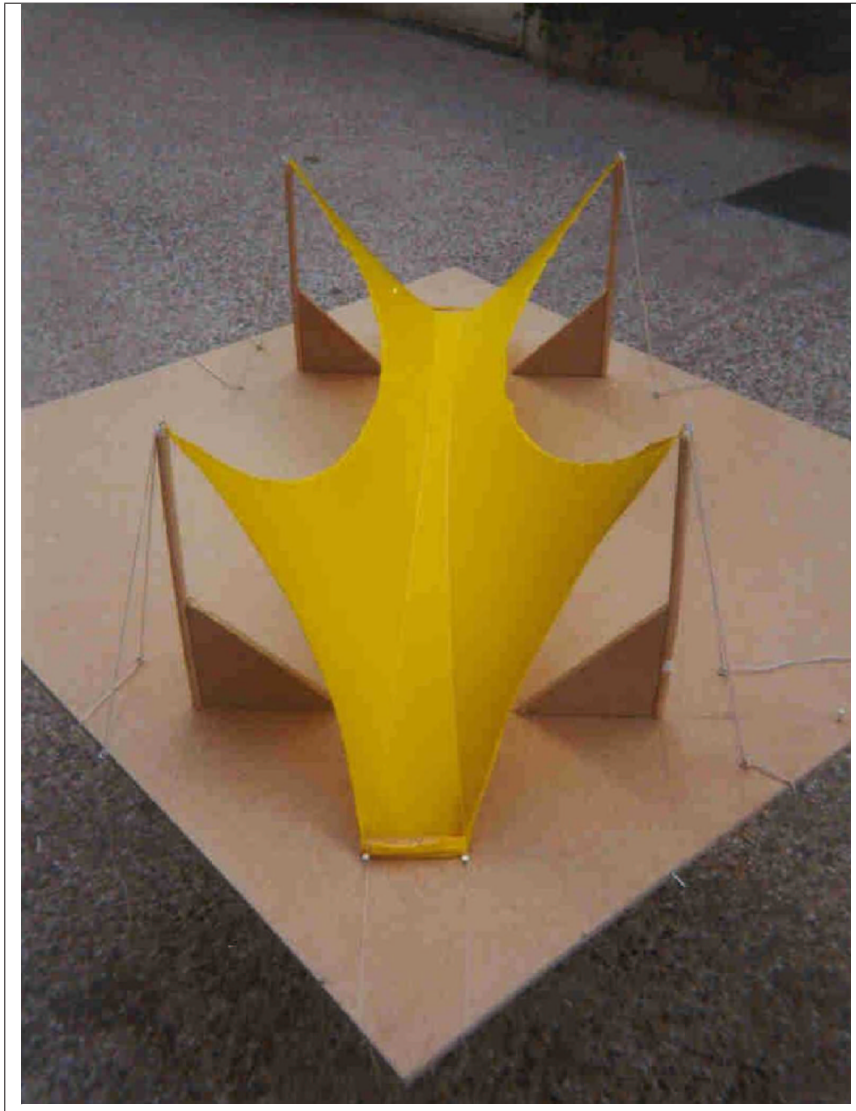


Figura 1.2: Maqueta de una pasarela peatonal: vista frontal.

1.2. Las membranas en aplicaciones portantes de ingeniería civil

Por lo que respecta a las aplicaciones de ingeniería civil indicadas, las pasarelas, la función de la estructura, que consiste en el paso de peatones, hace que la membrana sea portante, esto es, capaz de soportar sus cargas de uso y además hacerlo con deformabilidad limitada. Al mismo tiempo, también por motivos funcionales, hay que emplear membranas rebajadas, con pendientes pequeñas. Todo

ello implica que los esfuerzos sean aún mayores (cargas de uso más importantes y curvaturas menores para equilibrarlas).

En consecuencia, no sólo es importante que las membranas de estas pasarelas conformen superficies de doble curvatura (aunque las curvaturas sean pequeñas) sino que las mismas han de tener curvatura de Gauss negativa, como ya se ha comentado.

Así, en cuanto a la forma de la membrana, una posibilidad para la pasarela es que, según la dirección de paso, el perfil inferior se curve hacia abajo, como un arco, mientras que en la dirección perpendicular se curve hacia arriba (Figura 1.1). Por otro lado, como se ha dicho, la membrana ha de ser rebajada, teniendo pendientes limitadas (al menos en la zona de paso).

Las Figuras 1.1 y 1.2, fotografías de un caso particular de pasarela, en maqueta (de muestra, más rudimentaria que una de proyecto), proporcionan una referencia concreta. La dimensión mayor de la membrana es aproximadamente un metro.

A la vista de esta pasarela, parece inmediato constatar que, si se compara con una similar atirantada, la membrana asume aquí, sin solución de continuidad, dos funciones, siendo a la vez tablero y zona de transmisión de sus cargas (en lugar de los tirantes) a otros dispositivos estructurales descritos más adelante.

Para lograr el adecuado comportamiento funcional y estructural de la pasarela, la membrana se somete a un pretensado conveniente (tracciones en todas direcciones, previas a la entrada en servicio).

El pretensado tiene básicamente dos misiones:

- contrarrestar las compresiones debidas a las cargas en fase de servicio, en especial las de uso (las compresiones que aparecerían si no hubiera pretensado), de modo que la membrana se mantenga traccionada;
- proporcionar suficiente rigidez a la membrana, que debe soportar sus cargas de uso con deformabilidad limitada.

Ambas razones conducen a la necesidad de un pretensado significativo. Por tanto, la fase de pretensado toma aquí un papel destacado.

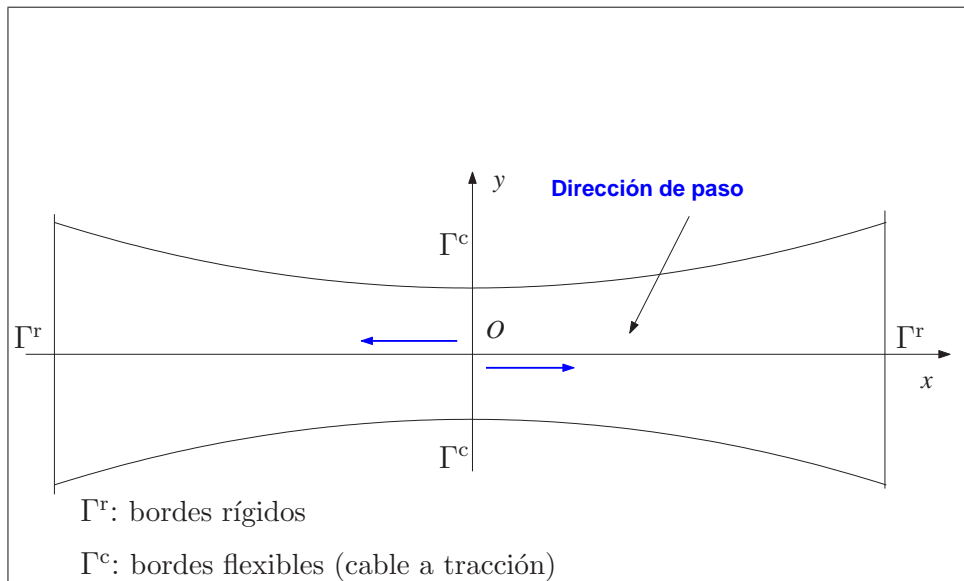


Figura 1.3: Membrana con bordes laterales flexibles (cables a tracción).

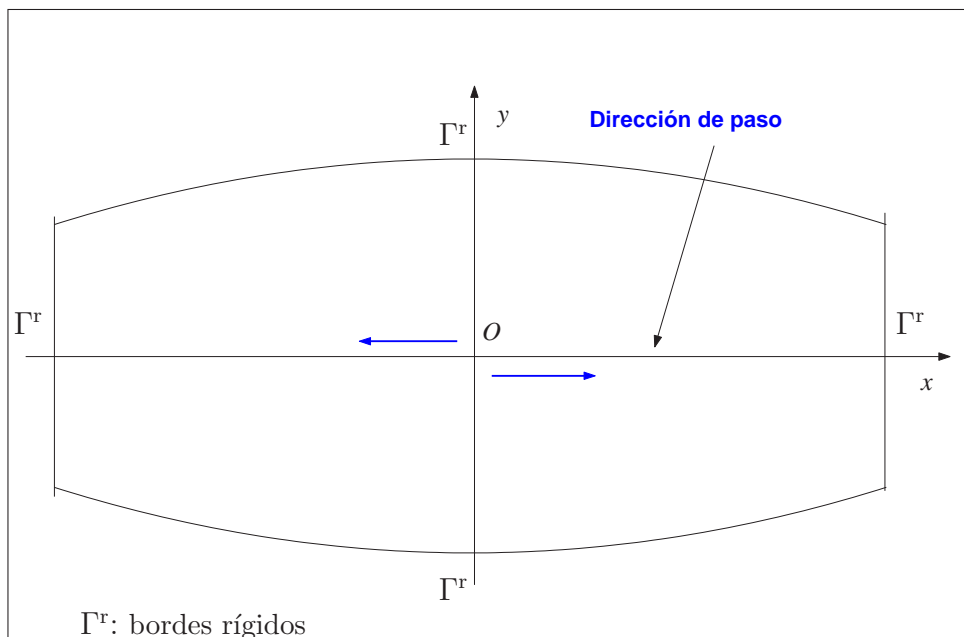


Figura 1.4: Membrana con bordes laterales rígidos (arcos a compresión-flexión).

Se aprecia así que existen factores estructurales contrapuestos con los que se puede jugar, en particular la forma y el pretensado de la membrana. En este sentido, ha de buscarse cierto equilibrio entre ambos, que suponga aplicar un pretensado

razonable, no demasiado fuerte (y costoso, no sólo por sí mismo sino por sus implicaciones en la estructura de sustentación).

El problema de introducir y mantener el pretensado está relacionado con los bordes de la membrana. Estos bordes son elementos unidimensionales, definidos por curvas en el espacio. Los mismos pueden tener curvatura o no tenerla (elementos rectos). Si los elementos de borde son rectos, para equilibrar el pretensado de la membrana deben tener rigidez a flexión.

Entre los elementos de borde curvos, revisten notable importancia los *cables*, que trabajan a tracción, elementos sin rigidez a flexión cuya disposición (sentido de la curvatura *necesariamente* hacia el exterior) se corresponde con esfuerzos de tracción en la membrana. Un ejemplo gráfico es el ofrecido por la Figura 1.3, en la cual se identifican en planta la pasarela, la dirección de paso y los cables de borde laterales.

Al contrario de lo que ocurre en los cables, la curvatura de los bordes rígidos, que han de soportar por flexión (y otros esfuerzos) las cargas transmitidas por los esfuerzos de la membrana, puede ser *cualquiera*. La Figura 1.4 representa un ejemplo de pasarela con borde rígido, en forma de arco, que trabaja a flexión y compresión.

Capítulo 2

Asunto, motivación, objetivos y estado del arte

2.1. Asunto y motivación

Como se ha dicho, en las estructuras de membrana existe una íntima relación entre la forma y los esfuerzos, para que éstos puedan estar en equilibrio.

También queda dicho que la forma no está dada. Hay que encontrarla y también los esfuerzos que con ella se equilibran. Lo normal es hacer eso para la situación definida más arriba como fase de pretensado (membrana colocada y pretensada; pero, salvo el peso propio, aún sin cargas).

Entonces, dados una determinada forma y los esfuerzos (de pretensado) asociados a ella, si se parte de la primera y se descuenta la deformación debida a los segundos se llega a la forma de confección de la membrana (esfuerzos nulos).

En principio, resulta importante que, para cada forma prevista, los esfuerzos puedan ser reproducidos realmente, esto es, controlados. Si no ocurre así, la membrana siempre alcanzará una forma de equilibrio, pero distinta y con unos esfuerzos ya no bien conocidos.

En membranas con un pretensado bajo importa menos que los esfuerzos de pretensado no se controlen: el error resultante también será pequeño.

Pero esta investigación se orienta hacia aplicaciones tales como las pasarelas. En ellas, como se sabe, la membrana es el tablero y por ello requiere por razones funcionales una adecuada rigidez, que sólo se alcanza mediante un pretensado significativo. Entonces, en proyecto, para adecuar la rigidez de la membrana en

servicio, es muy útil conocer de antemano el rango y la distribución de sus esfuerzos de pretensado; y, en construcción, claro, importa mucho que esos esfuerzos sean bien reproducidos.

Por tanto, como ya se apuntó anteriormente, todo lo relativo a los esfuerzos de pretensado toma aquí una especial relevancia y, en particular, su relación con la forma de la membrana.

En definitiva, la presente investigación viene motivada en gran medida por estas cuestiones, propias de aplicaciones con esfuerzos de pretensado importantes y donde conviene definirlos de antemano para el mejor comportamiento en servicio de la estructura; siendo preciso, en todo caso, aquilatar muy bien forma y esfuerzos de pretensado.

En tal sentido, el punto de partida es el *planteamiento matemático del equilibrio de la membrana en la fase de pretensado*, considerada como superficie en el espacio, para proceder después a su análisis.

Al plantear dicho equilibrio aparecen productos de variables de forma y variables de esfuerzos cuya suma es nula (despreciando el peso propio, lo que aquí está aún más justificado por la importancia cuantitativa del pretensado). Para poder obtener algo de dichas expresiones, parece claro, en principio, que hay que fijar la forma o bien fijar los esfuerzos. Ambas opciones son en general muy interesantes, pero lo son especialmente en aplicaciones tales como las pasarelas.

En efecto, por las especiales implicaciones funcionales de la forma de la membrana en pasarelas (pendientes limitadas para el paso, entre otras cosas), resulta muy interesante fijar de antemano una forma adecuada, para obtener luego la distribución de esfuerzos de pretensado que a ella corresponden, dar el rango necesario a esos esfuerzos (con una constante que, se verá, queda libre) para lograr suficiente rigidez y reproducirlos bien en construcción. Pero de no menor interés es fijar unos esfuerzos de pretensado adecuados (distribución y rango, y que sean más fácilmente introducidos en construcción), para obtener la forma y darle un rango que no supere los límites de pendiente (constante que asimismo queda libre).

Por otra parte, dada la conveniencia de colocar cables en algunos bordes de la membrana (normalmente los más largos y elevados, para evitar ahí elementos de borde rígidos, siempre más pesados, y aplicar con mayor facilidad el pretensado), se considera precisamente esta situación como caso más general. Como se verá, ello supone una importante dificultad añadida con relación a la situación en que todos los bordes son rígidos.

Volviendo al asunto del equilibrio en la fase de pretensado, y precisando ya al-

go más, se trata de un problema que implica a una serie de variables básicas en distintos ámbitos interactivos (más o menos acoplados unos a otros, según el tipo de elemento de borde, por una serie de ecuaciones que los relacionan), como son:

- *en la propia membrana*, la forma de la superficie y los esfuerzos de la membrana;
- *en el contorno de la membrana*, la forma del mismo y las cargas (repartidas) transmitidas por los esfuerzos de la membrana;
- *en la interfaz membrana-contorno*, las cargas (repartidas) de acción y reacción.

Como ya se ha avanzado, desde el punto de vista matemático, el problema más general, y más complejo, corresponde al caso en que los elementos de borde son cables; pero es también el que más suele interesar desde el punto de vista estructural, por reducción de peso propio y por aplicación del pretensado.

Todo lo dicho lleva, fundamentalmente, a dos problemas de contorno aparentemente equivalentes, pero en realidad muy distintos en sus resultados. Mientras que el primero consiste en fijar la superficie y las curvas que identifican la membrana y sus bordes en el espacio, y buscar los esfuerzos correspondientes (*planteamiento directo*), el otro es exactamente el opuesto, es decir, se fijan los esfuerzos y el contorno, quedando como incógnita la forma de la membrana (*planteamiento dual*).

Como se verá, el planteamiento directo conduce a un problema de contorno de tipo *hiperbólico*; mientras que el planteamiento dual lleva a un problema de contorno de tipo *elíptico*.

2.2. Objetivos globales

En virtud de lo que se acaba de exponer, los objetivos básicos o globales de esta investigación, basada en el análisis que se deriva del planteamiento matemático del equilibrio de la membrana (tomada como superficie en el espacio) en fase de pretensado, son:

- Conocer en general la problemática del análisis y sus resultados.
- Obtener específicamente esfuerzos de pretensado de membrana para formas adecuadas para pasarelas y fijadas de antemano, dado lo apropiado que muestra ser el planteamiento al respecto.
- Obtener específicamente formas de membrana, para esfuerzos de pretensado adecuados para pasarelas y fijados de antemano, dado lo apropiado que muestra ser el planteamiento al respecto.

Con relación a los puntos anteriores, cabe aquí recordar que, en construcción, el procedimiento práctico habitual de análisis de este tipo de estructuras no es propiamente de membrana (bidimensional, 2D) sino de malla de cables (unidimensional, 1D); además, lo que de ahí se obtiene es la geometría espacial de la malla (búsqueda de forma) pero también los esfuerzos de los cables (tracciones), que así no pueden ser en general fijados de antemano.

2.3. Estado del arte

2.3.1. Tecnología de pasarelas con estructura de membrana

Como se sabe, esta investigación se orienta hacia las membranas portantes para aplicaciones de ingeniería civil, particularmente las pasarelas con estructura de membrana. Por ello, antes de entrar en el contexto donde el trabajo se enmarca propiamente, parece necesario ofrecer una referencia concreta, aunque sea muy resumida, sobre la tecnología.

Así, en lo que sigue se presenta una breve descripción de la vertiente tecnológica de esta nueva línea de investigación.

Esta tecnología traslada a las pasarelas las ventajas de las estructuras de membrana. En este sentido, ya se ha citado la ligereza, con todo lo que lleva consigo estructural, constructiva e incluso ambientalmente (bajo peso propio; facilidad de montaje y desmontaje; mínimo impacto; posible reutilización). Pero también merecen ser destacadas las enormes posibilidades estéticas y ambientales (gran aptitud de encaje visual en su entorno, jugando con los múltiples factores que permite una superficie en el espacio: formas, sombras, contornos, texturas, colores, etc.); y, en fin, el factor de su propia originalidad y novedad con respecto a lo existente.

En estas aplicaciones, por supuesto, la membrana se ajusta a las condiciones generales, ya citadas, de que la superficie que conforma posea doble curvatura y curvatura de Gauss negativa (Figura 1.1). Por otro lado, como se sabe, por su función la membrana debe tener pendientes limitadas en la zona de paso; lo que hace que sea rebajada.

En cuanto a los materiales de la membrana, ésta se confecciona con tejidos estructurales de fibras de alta resistencia (con revestimiento superficial) o con materiales compuestos en forma laminar (matriz y fibras de alta resistencia).

Por supuesto, la membrana se somete a un pretensado, mediante tracciones en todas direcciones antes de su entrada en servicio, para su adecuado comportamiento funcional y estructural, según lo indicado más arriba.

La membrana dispone en sus bordes de unos elementos ligados a ella para absorber las reacciones debidas al pretensado y a las cargas de uso. Estos elementos pueden ser rectos (si la superficie es reglada, al menos en las zonas de borde) o curvos. Si son rectos, tales elementos han de tener rigidez a flexión; si son curvos, según el sentido de su curvatura tienen rigidez a flexión (arcos, que trabajan básicamente a compresión) o no (cables, a tracción).

A su vez, las esquinas y los elementos de borde van ligados a una estructura de sustentación de la membrana, que sirve para situarla en la posición adecuada y transmitir al terreno sus reacciones, a través de la cimentación.

La estructura de sustentación puede ser variada en tipo y materiales (mástiles; estructura metálica o de otro material, que trabaje sobre todo a flexión; etc.).

Para concretar mejor, parece interesante comenzar examinando el propio caso de la ya conocida maqueta mostrada en las Figuras 1.1 y 1.2 .

La estructura de sustentación está compuesta por mástiles a compresión y vientos a tracción, típica de cubiertas. Por su parte, los bordes de la membrana disponen de unos cordones pretensados (inapreciables en las fotografías) que la mantienen a tracción.

Sin dejar el asunto del pretensado en este mismo caso, la Figura 1.2 muestra asimismo dos cordones longitudinales sobre la membrana. Su misión consiste, tras ser pretensados, en marcar mejor y aplanar algo la zona central de paso.

Por otro lado, como se aprecia en las Figuras 1.1 y 1.2, la maqueta dispone de unas cartelas en la base de los mástiles, que se colocaron para fijarlos mejor sobre el tablero de base. Estas cartelas no serían necesarias en la estructura real.

Normalmente, los bordes correspondientes a las zonas de acceso de la membrana se unen al terreno mediante estribos (con su correspondiente cimentación). Según la posición de estos estribos, más o menos elevados sobre el terreno, existen o no otros elementos como plataformas de acceso.

Tomando como referencia general la tecnología de membranas para cubiertas, parece claro que las aplicaciones que aquí se contemplan requieren modificaciones en ciertos aspectos. Así, sólo a título de ejemplo:

- ajustar los procedimientos de cálculo, dadas la importancia del pretensado y

la gran responsabilidad de la función estructural, modelando la estructura como membrana propiamente dicha mejor que como red de cables inscrita en ella;

- prestar más atención al material de la membrana en lo que afecta al efecto disuasorio frente a intentos de vandalismo, utilizando materiales que se comportan mejor al respecto;
- establecer un proceso constructivo que asegure la correcta introducción del pretensado previsto.

A continuación se indica un hito fundamental alcanzado en esta vertiente tecnológica.

Se trata de la construcción en 2003 (Callús, Barcelona) de un prototipo de pasarela basado en esta tecnología (Figuras 2.1 y 2.2), merced a un proyecto de investigación entre el CSIC, la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT) y el Ayuntamiento de Callús, con resultado muy satisfactorio (referencias [28] y [29]).

El objetivo fundamental del proyecto fue hacer realidad la idea de estas pasarelas, materializando completamente una en condiciones reales sobre el terreno (no en laboratorio) y así comprobar tanto su aptitud funcional como su viabilidad estructural y constructiva.

Aunque la pasarela fue implantada sobre el terreno, al tratarse de un prototipo hubo que sacrificar todo su potencial estético a la seguridad y al mínimo coste, de modo que la membrana quedara a poca altura, disponiéndola en un solo vano (sin mástiles; Figuras 2.1 y 2.2).

La estructura de sustentación consistió en sendas celosías espaciales metálicas tubulares. Los bordes transversales fueron cables anclados en las esquinas de los estribos; los longitudinales, barras de reparto de fibra de vidrio conectadas a los estribos mediante tensores. El pretensado se aplicó mediante el tesado de los cables y los tensores.

Por supuesto, la definición de la forma y los esfuerzos en la fase de pretensado se realizó mediante un análisis 2D sobre la superficie de la membrana (despreciando el peso propio). El procedimiento fue partir, tras una etapa de tanteo, de una expresión analítica de la misma $z(x, y)$ (y de sus bordes laterales, los cables) y ajustar con otros esfuerzos las distintas condiciones de equilibrio (membrana, cable e interfaz), alcanzándose así una solución aproximada. Se llegó, entonces, a unos esfuerzos de pretensado que se distribuían con valor casi constante (aunque distinto longitudinal y transversalmente) y su rango se obtuvo evaluando la rigidez necesaria en la fase de servicio (véase la referencia [29]).



Figura 2.1: Pasarela de Callús en la fase final de construcción.



Figura 2.2: Vista de la pasarela de Callús en su entorno.

Las formas de pretensado y confección se diferencian justamente, como se indicó, en los desplazamientos debidos al pretensado. Aquí, el cálculo de la forma de confección se llevó a cabo mediante una aproximación bastante ajustada para membranas muy rebajadas, como ésta, suponiendo que al pretensar la membrana (esfuerzos casi horizontales) sólo se producen desplazamientos horizontales. Teniendo en cuenta esto, la doble simetría de la membrana y los esfuerzos casi constantes en las direcciones de los ejes, la superficie mantiene su expresión en coordenadas desplazadas $z(x^*, y^*)$. Se obtuvo así una forma muy similar a la de pretensado, con curvaturas un poco mayores, con la cual se confeccionó la membrana (referencia [29]).

En fin, como se ha dicho, el resultado del proyecto fue muy satisfactorio, puesto que el prototipo cumplió perfectamente los objetivos planteados.

2.3.2. Estado del conocimiento: métodos desarrollados

Los conceptos definidos en los apartados anteriores se relacionan *en parte* con un conocido problema, correspondiente a determinar la configuración de equilibrio de una membrana, llamado **búsqueda de forma** (*form finding*; referencia [33]). Conviene recordar en este momento que aquí también se contempla, en principio, la *búsqueda de esfuerzos*.

La bibliografía sobre la búsqueda de forma en membrana (superficie), presenta en general un enfoque basado en obtener el equilibrio final de la membrana, tras introducir en ella esfuerzos y deformaciones, a partir de una configuración inicial correspondiente a esfuerzos nulos.

En este sentido, es frecuente, por ejemplo, restringir este enfoque de búsqueda de forma a esfuerzos de membrana isótropos y constantes (referencia [35]). Con tal restricción, lo anterior equivale al problema de buscar la superficie de área mínima con el borde dado (véase la referencia [5]), problema ya directo (forma final, sin pasar por desplazamientos), que se identifica con el modelo físico de la película de jabón limitada por dicho borde (referencia [17]).

Por otro lado, aparte de la restricción mencionada, el citado enfoque presenta diversas variantes. Así, por ejemplo, obtener el equilibrio final a través de un análisis dinámico (referencia [35]) o incluso obtenerlo en una lámina y pasar al de la membrana como caso límite reduciendo el espesor (referencia [13]).

Como se dijo, el planteamiento del equilibrio en este trabajo es directo (forma

y esfuerzos finales) y general (esfuerzos y formas cualesquiera, que sean interesantes) y se aleja de los planteamientos anteriores.

Sin embargo, bajando una dimensión, de modo que la membrana es tratada como una *red de cables* inscrita en la superficie, existe un procedimiento de búsqueda de forma similar al de esta investigación, con planteamiento directo del equilibrio final. Se trata del *Método de la Densidad de Fuerzas*, habitual por otra parte en la práctica del análisis de estructuras de membrana en construcción.

De tal modo, el método anterior muestra ser aquí una referencia clara y por ello se le dedica especial atención. A su vez, dada su presencia, parece conveniente ofrecer una visión de los métodos unidimensionales de búsqueda de forma.

Entre los métodos unidimensionales más comunes de resolución del problema de búsqueda de forma de membrana, estáticos y dinámicos, los principales son:

- *Método de Rigidez Transitoria* (Transient Stiffness Method);
- *Método de Relajación Dinámica* (Dynamic Relaxation Method);
- *Método de la Densidad de Fuerzas* (Force Density Method).

Como se ha apuntado, estos métodos consisten en discretizar la membrana mediante nodos y elementos unidimensionales que los unen (véase la referencia [23]); por lo que la membrana no es tratada como tal, esto es, un continuo bidimensional.

Resumamos, ahora, las características principales de los tres métodos.

MÉTODO DE LA RIGIDEZ TRANSITORIA¹

Este método estático se basa en la teoría de los pequeños desplazamientos, suponiendo, así, una dependencia lineal del vector desplazamiento puntual con la correspondiente fuerza exterior. El estudio completo conlleva al análisis del problema siguiente:

$$(2.1) \quad \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d},$$

siendo \mathbf{f} el vector fuerza exterior nodal, \mathbf{d} el vector desplazamiento nodal y \mathbf{K} la *matriz de rigidez axial*, función de la geometría y de las propiedades mecánicas de la estructura. El sistema (2.1) representa un conjunto de ecuaciones de equilibrio estático que tienen que verificarse en cada nodo de la estructura.

La principal limitación del método es la inherente hipótesis de linealidad comentada, esto es, \mathbf{K} constante. Bajo esta condición, de hecho, el análisis no incluye una

¹Véanse, por ejemplo, las referencias [1] y [2].

verdadera búsqueda de forma, ya que sus resultados son satisfactorios y buenos en caso de pequeños desplazamientos.

De hecho, la ecuación (2.1) no puede ser aplicada directamente en problemas con grandes desplazamientos, ya que en estos casos \mathbf{K} es función de \mathbf{d} , es decir $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{d})$.

En esta circunstancia, entonces, se necesita actualizar incrementalmente de la matriz de rigidez a lo largo del proceso.

Si por comodidad indicamos con t un parámetro que identifica un dado instante de tiempo del proceso, correspondiente a la configuración geométrica \mathbf{X}^t y a la matriz de rigidez \mathbf{K}^t , entonces el desplazamiento y la geometría en el instante $t + \Delta t$ se obtienen respectivamente utilizando las relaciones:

$$\mathbf{d}^{t+\Delta t} = (\mathbf{K}^t)^{-1} \mathbf{f},$$

y

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{X}^t + \mathbf{d}^{t+\Delta t}.$$

Calculando, sucesivamente, la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{t+\Delta t}$, actualizada al paso $t + \Delta t$, se “genera” el vector nodal de cargas internas, dado por

$$\tilde{\mathbf{f}}^{t+\Delta t} = \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{t+\Delta t}.$$

La diferencia entre los vectores \mathbf{f} y $\tilde{\mathbf{f}}^{t+\Delta t}$, que representa un balance de fuerzas exteriores e interiores, define el **vector residual**

$$\mathbf{R}^{t+\Delta t} := \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}^{t+\Delta t},$$

utilizado, a su vez, para el cálculo del incremento del desplazamiento:

$$(2.2) \quad \Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} = (\mathbf{K}^{t+\Delta t})^{-1} \mathbf{R}^{t+\Delta t}.$$

A través del sistema (2.2), es posible actualizar la geometría, la matriz de rigidez y el vector residual. Siguiendo tales pasos se logra el equilibrio en el momento en que el residuo alcance un valor suficientemente pequeño.

MÉTODO DE RELAJACIÓN DINÁMICA²

Desarrollado por Motro y Belkacem (referencias, respectivamente, [26] y [3]), se basa en una discretización de la geometría de manera que la masa de la estructura se supone concentrada en cada punto (nodo) de la superficie. Dichas masas concentradas oscilan alrededor de la posición de equilibrio bajo la acción de fuerzas externas. Este método, que funciona muy bien en grandes desplazamiento y en

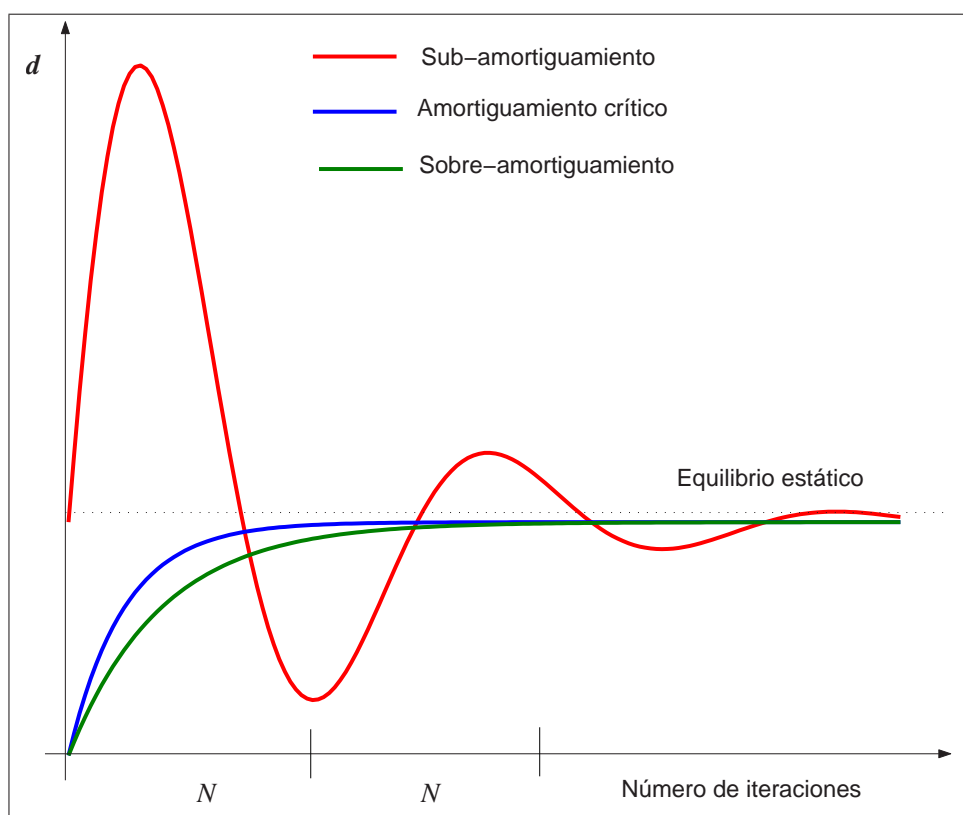


Figura 2.3: Oscilaciones amortiguadas del desplazamiento (Método de Relajación Dinámica).

casos de importantes no linealidades, utiliza para su resolución una técnica de diferencias finitas por el siguiente sistema:

$$(2.3) \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d},$$

siendo \mathbf{f} la fuerza exterior nodal, \mathbf{M} la *matriz de masa* (o de *inercia*), \mathbf{C} la *matriz de amortiguamiento*, \mathbf{K} la matriz de rigidez, y $\dot{\mathbf{d}}$ y $\ddot{\mathbf{d}}$ el *vector velocidad* y *aceleración* respectivamente. La expresión (2.3) representa un conjunto de ecuaciones dinámicas que tienen que verificarse en cada nodo de la estructura hasta que se logre un estado de equilibrio.

Matemáticamente la relación (2.3) representa un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden que suele resolverse utilizando métodos numéricos incrementales.

En general, conocidos el desplazamiento inicial $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}^0$, la velocidad inicial $\dot{\mathbf{d}}(0) = \dot{\mathbf{d}}^0$, y, consecuentemente, la aceleración inicial, $\ddot{\mathbf{d}}(0) = \ddot{\mathbf{d}}^0$, se calcula el

²Para un estudio más profundo consúltense, por ejemplo, las referencias [2] y [34].

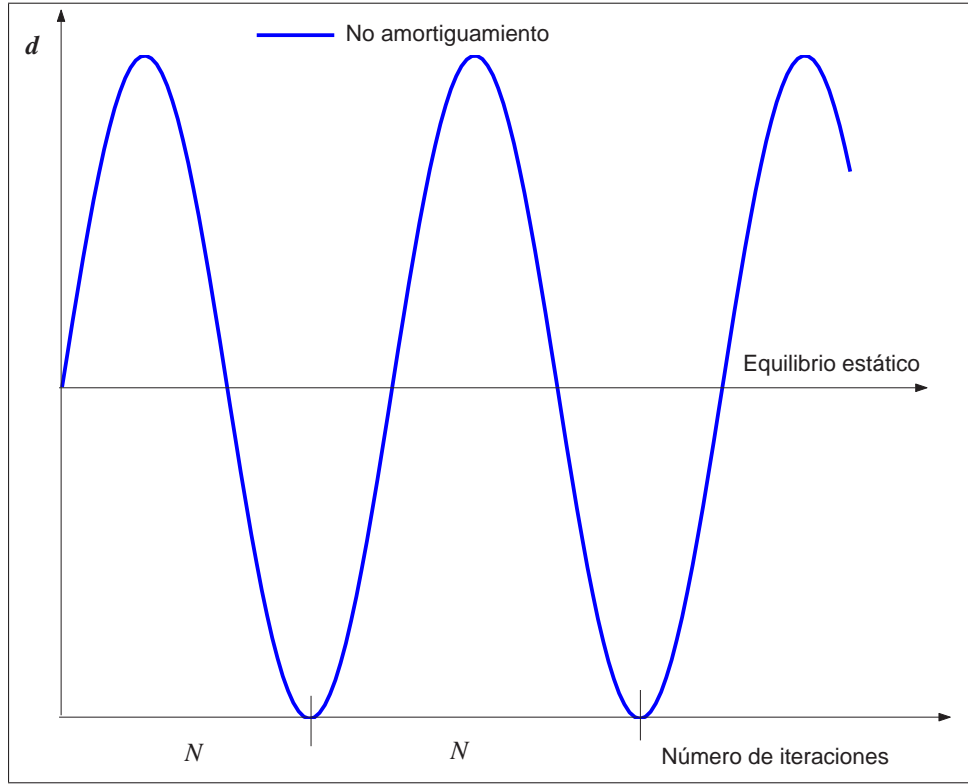


Figura 2.4: Oscilaciones no amortiguadas del desplazamiento (Método de Relajación Dinámica).

desplazamiento en un intervalo de tiempo $[0, T]$. Se subdivide, entonces, el intervalo en n subintervalos iguales de longitud $\Delta t = T/n$ y el esquema de integración prevé una aproximación de la solución en los tiempos $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$.

Un buen método de resolución, llamado *diferencias finitas centradas*, se basa en las aproximaciones siguientes del vector velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{d}}^t := \frac{\mathbf{d}^{t+\Delta t} - \mathbf{d}^{t-\Delta t}}{2\Delta t},$$

y

$$\ddot{\mathbf{d}}^t := \frac{\mathbf{d}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{d}^t + \mathbf{d}^{t+\Delta t}}{(\Delta t)^2}.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación (2.3) al tiempo t , se tiene:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}^{t+\Delta t} \\ &= \mathbf{f}^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}^t - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}^{t-\Delta t}, \end{aligned}$$

que permite calcular, bajo oportunas condiciones que garanticen la no singularidad de la matriz $\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)$, $\mathbf{d}^{t+\Delta t}$.

Evidentemente, por lo que concierne al cálculo práctico y a la convergencia del método, la matriz de masa \mathbf{M} y la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} se han de escoger de forma adecuada.

En particular, si no hay amortiguamiento, esto es $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, obtenemos el sistema

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{d}^{t+\Delta t} = \widehat{\mathbf{f}}^t,$$

siendo

$$\widehat{\mathbf{f}}^t = \mathbf{f}^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{d}^t - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{d}^{t-\Delta t}.$$

Además si \mathbf{M} es diagonal, el desplazamiento que se obtiene es

$$\delta_i^{t+\Delta t} = \widehat{f}_i^t \left(\frac{(\Delta t)^2}{m_{ii}}\right),$$

siendo $\delta_i^{t+\Delta t}$ y \widehat{f}_i^t la i -ésima componente de los vectores $\mathbf{d}^{t+\Delta t}$ y $\widehat{\mathbf{f}}^t$ respectivamente, y $m_{ii} > 0$ el i -ésimo elemento de la matriz diagonal \mathbf{M} .

En la referencia [6], los autores comprueban que, para problemas lineales, la estabilidad del proceso iterativo explicado depende de Δt , \mathbf{M} y \mathbf{K} . En particular, si μ_1 es el autovalor más grande de la matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$, se obtiene estabilidad de convergencia escogiendo

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\mu_1}}.$$

Hay que añadir que en un movimiento no amortiguado, es decir en el que falte la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} , la estructura oscilaría alrededor de su posición de equilibrio y que, por ello, la presencia de la matriz \mathbf{C} “ayuda” de forma importante a que se logre estabilidad de una manera u otra.

En conclusión, el proceso estándar de cálculo que se sigue en la práctica es el siguiente. Indicando con m el valor de las masas de (todos) los nodos, con N el número de iteraciones necesarias para completar una oscilación, con \mathbf{I} la matriz identidad y con f la **frecuencia fundamental** dada por

$$f = \frac{1}{N\Delta t},$$

se escogen $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$, $\mathbf{C} = 4\pi m f \mathbf{I}$ y se resuelve³ la ecuación diferencial (2.3).

³El valor $4\pi m f$ se llama **amortiguamiento crítico**: para su cálculo, véase la **Apéndice D**.

Los resultados posibles pueden ser caracterizados e interpretados observando las Figuras 2.3 y 2.4. De hecho, si por un lado la Figura 2.4 refleja cómo el desplazamiento oscila indefinida e independientemente del número de iteraciones alrededor de la posición de equilibrio, para el otro la Figura 2.3 relaciona el comportamiento de la solución para valores del coeficiente de amortiguamiento que sean mayores o menores de amortiguamiento crítico. Se tiene:

- si el coeficiente de amortiguamiento es inferior al crítico, entonces la solución puede salirse del equilibrio estático antes de establecerse la convergencia. En este caso se habla de *estructura sub-amortiguada*;
- si el coeficiente de amortiguamiento es superior al crítico, entonces el proceso hacia la convergencia del equilibrio estático puede necesitar varias iteraciones. En este caso se habla de *estructura sobre-amortiguada*.

MÉTODO DE LA DENSIDAD DE FUERZAS. APLICACIÓN

El *Método de la Densidad de Fuerzas* fue desarrollado para cumplir las necesidades computacionales en la modelización de la cubierta del Estadio Olímpico de Munich, y se basa en la utilización de un sistema de ecuaciones lineales para el equilibrio de una red de cables pretensados bajo una relación predefinida fuerza/longitud. La estructura mostrada en la Figura 2.5 puede interpretarse como una red de cables en la que se conocen las posiciones de los puntos 1, 2, 3 y 4 y las tracciones t_{i5} en los cables a lo largo de los tramos $i5$, $i = 1, 2, 3, 4$. La incógnita del problema es la posición final del punto 5, en el que actúa una fuerza externa $\mathbf{f}_5 = (f_{5x}, f_{5y}, f_{5z})$.

El método en consideración, propuesto por Linkwitz y Schek en 1971 (referencias [24], [25] y [31]), utiliza una simple “estrategia” para transformar un problema no lineal en uno lineal.

Las ecuaciones de equilibrio a largo de la dirección x para el nodo i , son:

$$\sum_{j=1}^n \frac{t_{ij}}{l_{ij}} (x_i - x_j) = f_{ix}, \quad l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

donde el nodo i está conectado con el nodo j y t_{ij} es la tracción en el mismo tramo ij . Este sistema, debido al término l_{ij} , es no lineal. Para linealizarlo introduzcamos las **densidades de fuerzas** (cuyos valores se deben conocer a priori) definidas por:

$$(2.4) \quad q_{ij} := \frac{t_{ij}}{l_{ij}}.$$

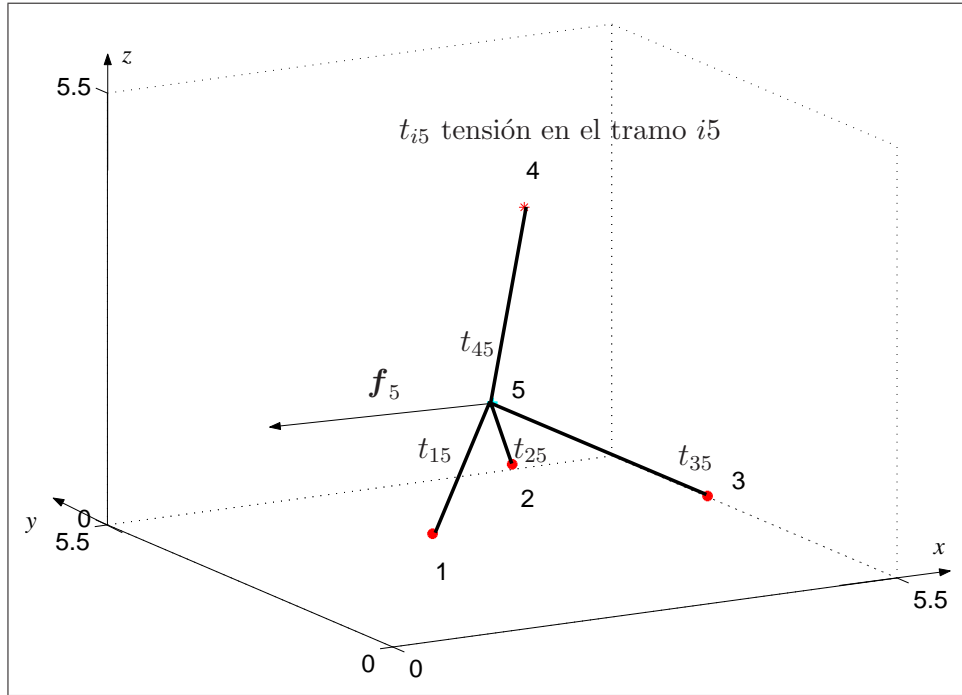


Figura 2.5: Idealización de una red de cables pretensados.

Obtenemos así, para el nodo i , el siguiente sistema lineal en la dirección x :

$$(2.5) \quad \sum_{j=1}^n q_{ij}(x_i - x_j) = f_{ix}.$$

Equivalentemente, para las direcciones y y z , se tienen

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^n q_{ij}(y_i - y_j) = f_{iy},$$

y

$$(2.7) \quad \sum_{j=1}^n q_{ij}(z_i - z_j) = f_{iz}.$$

Con el objetivo de escribir el sistema (2.5) en forma compacta y adecuada para la implementación numérica, definamos la **matriz de incidencia** (o **conectividad**) \mathbf{C}_s . Para una estructura general de n nodos y b **elementos** (cables, varillas, aristas...), $\mathbf{C}_s \in M_{b,n}(\mathbb{R})$ y se construye de esta manera: si un elemento conecta los nodos i y j , entonces la correspondiente fila tiene +1 en la i -ésima columna y -1 en la j -ésima.

Las ecuaciones de equilibrio a lo largo de la dirección x se escriben, entonces, como

$$(2.8) \quad \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{x} = \mathbf{f}_x,$$

siendo $\mathbf{Q} \in M_{b,b}(\mathbb{R})$ la matriz diagonal de las densidades de fuerzas, $\mathbf{f}_x \in \mathbb{R}^n$ el vector fuerza nodal en la dirección x y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el vector columna de todas las abscisas de los nodos.

Equivalentemente se obtienen las ecuaciones de equilibrio en las direcciones y y z .

Además, si las coordenadas de k nodos son conocidas ($0 < k < n$), es útil descomponer \mathbf{C}_s en

$$\mathbf{C}_s = [\mathbf{C}_u \quad \mathbf{C}_f],$$

siendo \mathbf{C}_u la matriz de $M_{b,n-k}(\mathbb{R})$ obtenida simplemente escogiendo b filas y $n-k$ columnas de \mathbf{C}_s y equivalentemente para $\mathbf{C}_f \in M_{b,k}(\mathbb{R})$.

En estas condiciones, el sistema que se obtiene es el siguiente:

$$(2.9) \quad \mathbf{C}_u^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{f}_x - \mathbf{C}_u^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f,$$

siendo \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_f los vectores de las abscisas de los nodos incógnitos y conocidos, respectivamente. Estas ecuaciones, junto con las equivalentes en la dirección y y z , pueden ser utilizadas para hallar las coordenadas de los nodos incógnitos.

En el problema de la búsqueda de forma, la fuerza exterior es nula y además, si los esfuerzos son de tracción (esto es $q_{ij} > 0$), la matriz $\mathbf{C}_u^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_u$ es definida positiva, entonces invertible: *hay siempre una única solución en el problema de la búsqueda de forma.*

Hagamos un ejemplo de aplicación del método.

Ejemplo 2.1 *Con referencia a la Figura 2.6, fijemos los nodos*

Nodo 1 = (2, 1, 5); Nodo 2 = (3, 3, 1); Nodo 3 = (4, 4, 1) y Nodo 4 = (1, 1, 1).

Siendo $b = 4$ (elementos), $n = 5$ (nodos totales) y $k = 4$ (nodos fijos), obtenemos $\mathbf{C}_s \in M_{4,5}(\mathbb{R})$, $\mathbf{Q} \in M_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{C}_u \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{C}_f \in M_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}_u \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^4$. Supongamos, además, que las densidades de fuerzas sean todas iguales a 1 ($q_{ii} = 1$ por cada i) y que no actúe ninguna fuerza externa. La matriz \mathbf{C}_s , y su descomposición, son

$$\mathbf{C}_s := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_f} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_u}.$$

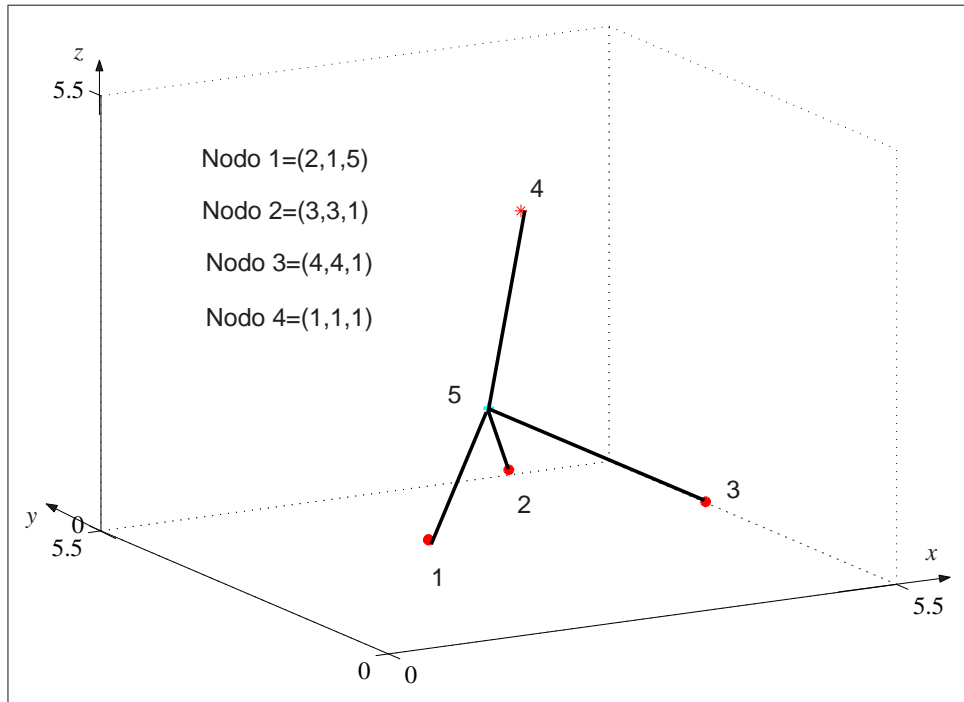


Figura 2.6: Ejemplo de utilización del Método de la Densidad de Fuerzas.

El sistema (2.9) se escribe como

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{C}_u^T \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{Q} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{C}_u \end{matrix} (x_5) = \\
 & \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{f}_x \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{C}_u^T \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{Q} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \mathbf{C}_f \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

que nos proporciona la solución $x = 2,5$. Equivalentemente en las otras direcciones, $y = 2,25$ y $z = 2$.

A continuación apliquemos el método a tres casos específicos partiendo de un dominio mallado por cuadrángulos. Examinaremos un caso de borde completamente rígido (véase el **Ejemplo 2.2**) y dos casos de borde compuesto en parte por cable

(véase el **Ejemplo 2.3**); siempre el conjunto de partida será el dominio

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -5 \leq x \leq 5 \wedge -1 - 0,04x^2 \leq y \leq 1 + 0,04x^2\},$$

cuyo mallado se ofrece en la Figura 2.7.

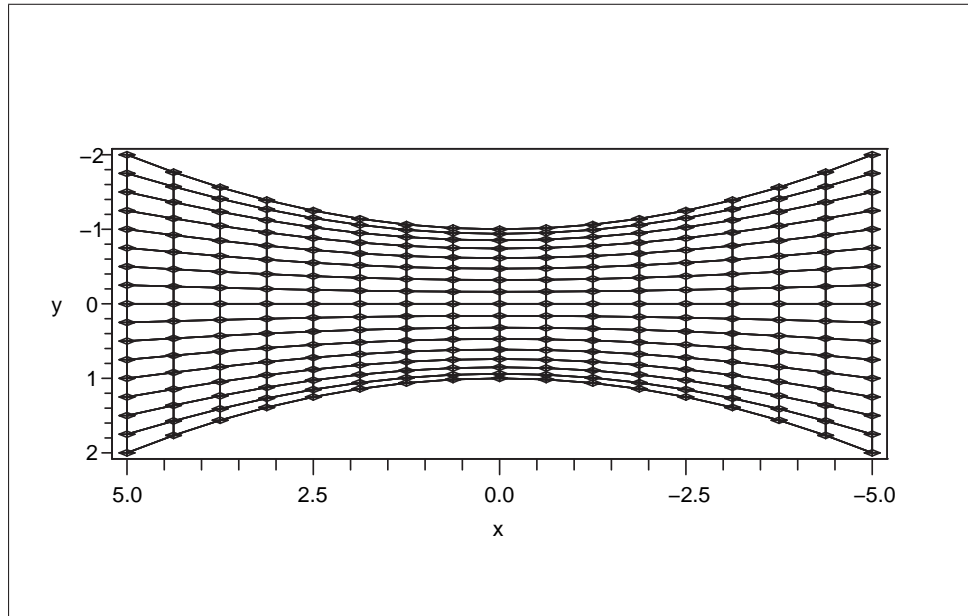


Figura 2.7: Malla cuadrangular compuesta por 189 nodos.

Ejemplo 2.2 (de borde totalmente rígido).

Densidades: $q_{ij} = 1$ en todo el dominio.

Con referencia a la Figura 2.7, fijemos los siguientes valores de la z en el borde:

$$\begin{cases} z(\mp 5, y) =: g(y) = 0,5y^2, \\ z(x, \mp(1 + 0,04x^2)) =: h(x) = -0,04x^2 + 3. \end{cases}$$

El resultado que se obtiene, escogiendo todas las densidades de fuerzas q_{ij} iguales a 1 en $\bar{D} = \overset{0}{D} \cup \partial D$, se refleja en la Figura 2.8.

Ejemplo 2.3 (de borde compuesto en parte por cables).

Densidades: $q_{ij} = 1$ en el interior y $q_{ij} = 15$ en el contorno cable.

Con referencia a la Figura 2.7, fijemos los siguientes valores de la z en el borde:

$$\begin{cases} z(\mp 5, y) =: g(y) = 0,5y^2, \\ z(x, \mp(1 + 0,04x^2)) =: h(x) = \text{incógnita}. \end{cases}$$

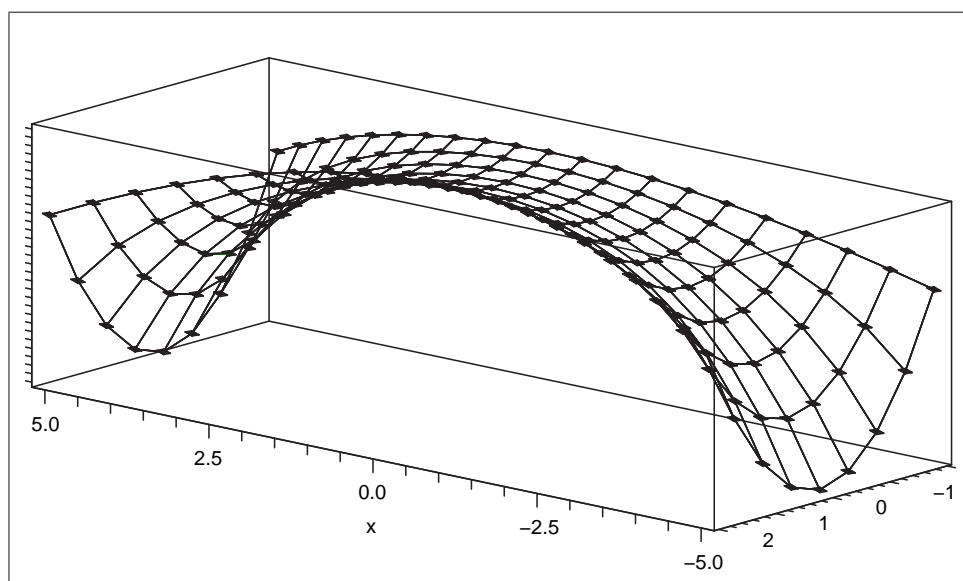


Figura 2.8: Borde totalmente rígido: resultado obtenido (Método de la Densidad de Fuerzas).

El resultado que se obtiene, escogiendo las densidades de fuerzas q_{ij} iguales a 1 en el interior de D y en su borde rígido $x = \mp 5$ y 15 en los cables $y = \mp(0,04x^2 + 1)$, se refleja en la parte (a) de la Figura 2.9.

Densidades: $q_{ij} = 1$ en el interior y $q_{ij} = 15$ en el contorno cable.

Con referencia a la Figura 2.7, fijemos, igual que antes, los siguientes valores de la z en el borde:

$$\begin{cases} z(\mp 5, y) =: g(y) = 0,5y^2, \\ z(x, \mp(1 + 0,04x^2)) =: h(x) = \text{incógnita}. \end{cases}$$

El resultado que se obtiene, escogiendo las densidades de fuerzas q_{ij} “todas” iguales a 1, se refleja en la parte (b) de la Figura 2.9. Como puede apreciarse en la misma Figura 2.9, el caso de las densidades $q_{ij} = 1$ en todo el dominio, proporciona una forma diferente al caso en que se fijen igual a 15 las densidades en el borde cable. De hecho, en esta circunstancia, se está imponiendo una fuerza superior a lo largo del cable, esto es una tracción mayor, es decir una forma “menos ancha” a lo largo de la dirección de paso x .

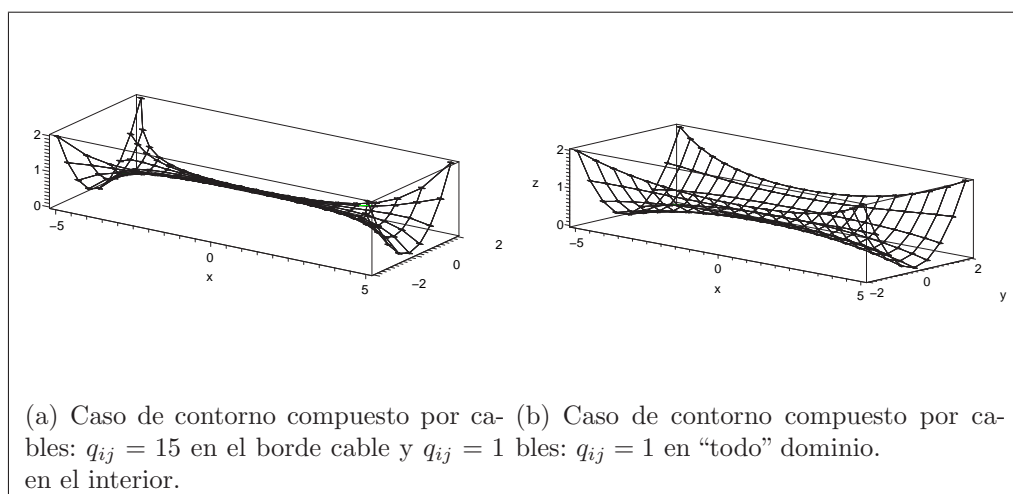


Figura 2.9: Borde parcialmente compuesto por cables: resultado obtenido (Método de la Densidad de Fuerzas).

2.3.3. Análisis del Método de la Densidad de Fuerzas

De cara a consideraciones interesantes que se desarrollarán en el texto (véase **Capítulo 6**), en este apartado nos dedicaremos a analizar en profundidad el Método de la Densidad de Fuerzas con el objetivo de matizar los siguientes aspectos:

- i **la forma depende del mallado utilizado**, en particular, del tipo de elemento empleado (triangular, cuadrangular, pentagonal...), así como de la distribución de los nodos en el dominio;
- ii **la convergencia depende del proceso de refinamiento de la malla**, esto es, la solución converge en más o menos pasos en función de dicho refinamiento.

Comprobemos lo dicho con un ejemplo concreto utilizando elementos cuadrangulares.

Ejemplo 2.4 En el dominio D definido por

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -5 \leq x \leq 5 \wedge -0,04x^2 - 1 \leq y \leq 0,04x^2 + 1\},$$

y de bordes rígidos $x = \mp 5$ y $y = \mp(0,04x^2 + 1)$, fijemos el valor de z en el contorno de la siguiente manera:

$$\begin{cases} z = 0,5y^2 & \text{si } x = \mp 5, \\ z = -0,04x^2 + 3 & \text{si } y = \mp(0,04x^2 + 1). \end{cases}$$

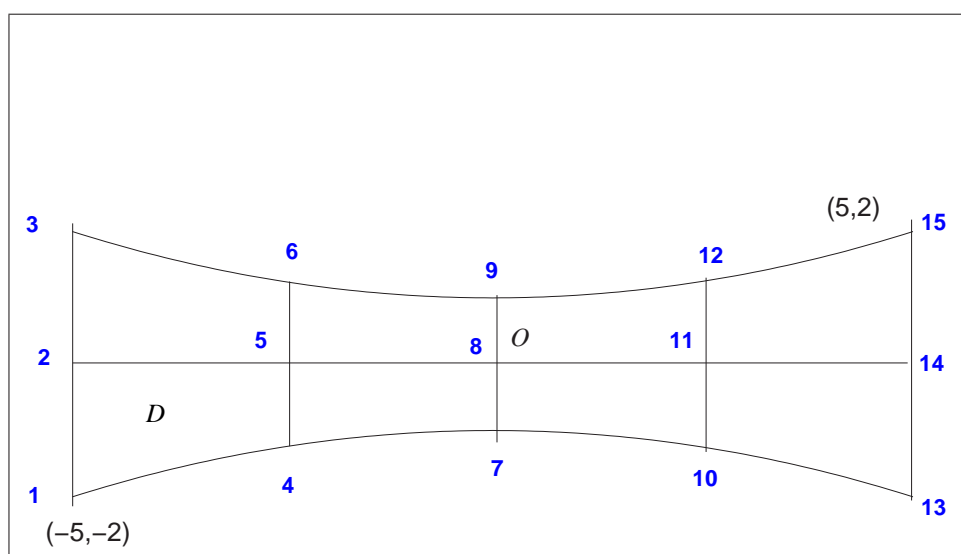


Figura 2.10: Mallado definido por la secuencia de puntos: $\mathbf{A} = 2k + 1$ y $\mathbf{L} = 2k + 3$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Caso $k = 1$.

A partir de estos datos averigüemos que la forma que equilibra la estructura depende del mallado de D (i): lo haremos calculando en función de la malla el valor de la solución en el origen $O = (0, 0)$. Pongamos, ante todo, $q_{ij} = 1$.

Si con \mathbf{A} (“de ancho”) indicamos el número de nodos en el que se subdivide el borde vertical de D y con \mathbf{L} (“de largo”) el número de nodos en el que se subdivide el borde horizontal de D , el número total de nodos \mathbf{N} de la malla es $\mathbf{N} = \mathbf{A} \times \mathbf{L}$. Consideremos las particiones del dominio expresadas en las Figuras 2.10, 2.12 y 2.11 y calculemos el valor de z en el origen $O = (0, 0)$.

Los resultados obtenidos pueden apreciarse, en función del número de nodos, en las Tablas 2.3, 2.1 y 2.2; estos valores demuestran que la **forma** de la estructura, es decir el valor de la variable z , depende de la malla.

Siempre refiriéndonos a las mismas tablas, analicemos la **convergencia** del método (ii). En efecto, si la Tabla 2.2 demuestra que el valor de z en el origen converge en “pocos pasos” a 1,58, las Tablas 2.1 y 2.3 muestran que el resultado “sólo tiende a ajustarse” a un valor (1,4 y 1,7, respectivamente).

Lo dicho obedece a la siguiente característica geométrica, propia del refinamiento $(2k + 1) \times (2k + 1)$: **la discretización** $(2k + 1) \times (2k + 1)$ **conserva en cada paso la relación de los elementos cuadrangulares de la malla**. Esto puede comprobarse aún más fácilmente en un dominio rectangular.

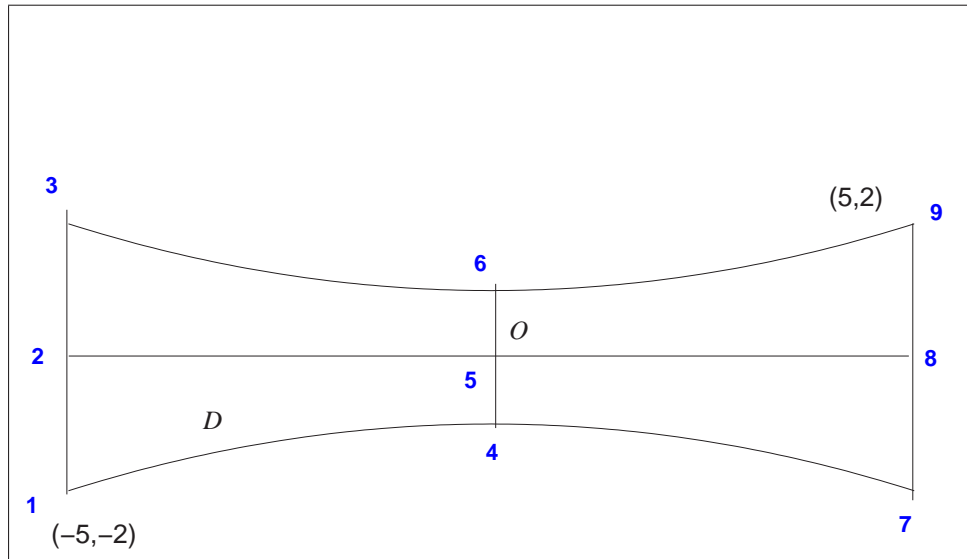


Figura 2.11: Malla definido por la secuencia de puntos: $\mathbf{A} = 2k + 1$; $\mathbf{L} = 2k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Caso $k = 1$.

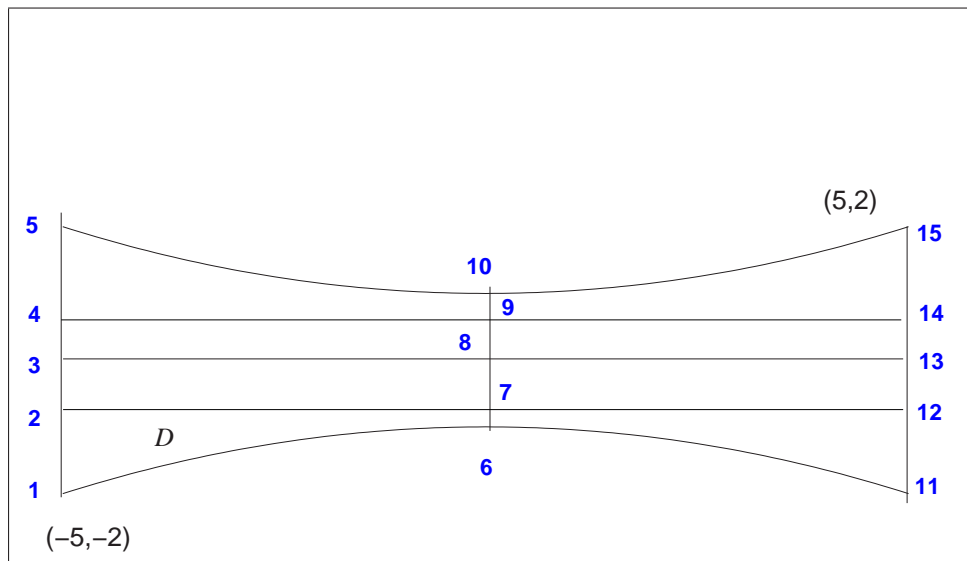


Figura 2.12: Malla definido por la secuencia de puntos: $\mathbf{A} = 2k + 3$ y $\mathbf{L} = 2k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Caso $k = 1$.

*En este sentido avancemos que dicha propiedad geométrica tiene un significado estructural, que se podrá ver en el **Capítulo 6**.*

Como último comentario, insistamos que la limitación fundamental del Método de la Densidad de Fuerzas es que su utilización no permite fijar los esfuerzos a

priori, sino que los mismos, dependiendo de la forma final de la membrana (véase ecuación (2.4)), se pueden calcular sólo a proceso acabado.

$\mathbf{N}=\mathbf{A}\times\mathbf{L}=(2k+3)\times(2k+1)$	Valor de la solución en $O=(0,0)$
$k=1 \rightarrow \mathbf{N}=15$	0.57
$k=2 \rightarrow \mathbf{N}=35$	0.91
$k=3 \rightarrow \mathbf{N}=63$	1.09
$k=4 \rightarrow \mathbf{N}=99$	1.19
$k=5 \rightarrow \mathbf{N}=143$	1.26
$k=6 \rightarrow \mathbf{N}=195$	1.31
$k=7 \rightarrow \mathbf{N}=255$	1.35
$k=8 \rightarrow \mathbf{N}=323$	1.38
$k=9 \rightarrow \mathbf{N}=399$	1.40
$k=10 \rightarrow \mathbf{N}=483$	1.42
$k=11 \rightarrow \mathbf{N}=575$	1.43

Tabla 2.1: Caso $(2k+3)\times(2k+1)$: resultado obtenido con el Método de la Densidad de Fuerzas.

$\mathbf{N}=\mathbf{A} \times \mathbf{L} = (2k + 1) \times (2k + 1)$	Valor de la solución en $O = (0, 0)$
$k = 1 \rightarrow \mathbf{N} = 9$	1.5
$k = 2 \rightarrow \mathbf{N} = 25$	1.56
$k = 3 \rightarrow \mathbf{N} = 49$	1.57
$k = 4 \rightarrow \mathbf{N} = 81$	1.58
$k = 5 \rightarrow \mathbf{N} = 121$	1.58
$k = 6 \rightarrow \mathbf{N} = 169$	1.58
$k = 7 \rightarrow \mathbf{N} = 225$	1.58
$k = 8 \rightarrow \mathbf{N} = 289$	1.58
$k = 9 \rightarrow \mathbf{N} = 361$	1.58
$k = 10 \rightarrow \mathbf{N} = 441$	1.58
$k = 11 \rightarrow \mathbf{N} = 529$	1.58

Tabla 2.2: Caso $(2k+1) \times (2k+1)$: resultado obtenido con el Método de la Densidad de Fuerzas.

$\mathbf{N}=\mathbf{A} \times \mathbf{L} = (2k + 1) \times (2k + 3)$	Valor de la solución en $O = (0, 0)$
$k = 1 \rightarrow \mathbf{N} = 15$	2.5
$k = 2 \rightarrow \mathbf{N} = 35$	1.91
$k = 3 \rightarrow \mathbf{N} = 63$	2.06
$k = 4 \rightarrow \mathbf{N} = 99$	1.96
$k = 5 \rightarrow \mathbf{N} = 143$	1.9
$k = 6 \rightarrow \mathbf{N} = 195$	1.85
$k = 7 \rightarrow \mathbf{N} = 255$	1.82
$k = 8 \rightarrow \mathbf{N} = 323$	1.79
$k = 9 \rightarrow \mathbf{N} = 399$	1.77
$k = 10 \rightarrow \mathbf{N} = 483$	1.75
$k = 11 \rightarrow \mathbf{N} = 575$	1.74

Tabla 2.3: Caso $(2k+1) \times (2k+3)$: resultado obtenido con el Método de la Densidad de Fuerzas.

Capítulo 3

Formulación matemática del equilibrio en una membrana y en sus bordes. Problema completo del equilibrio

El objetivo de este capítulo es encontrar las ecuaciones de equilibrio de una membrana a tracción y de un cable, dedicándole particular atención no sólo a la relación entre la forma y los esfuerzos de la membrana y la forma y la tracción del cable¹ sino también a la *interfaz* cable-membrana.

En particular expresaremos el equilibrio utilizando los esfuerzos naturales de membrana (es decir, aquéllos tangentes a la superficie) y, equivalentemente, los esfuerzos proyectados de la misma (es decir, justamente, las proyecciones en el plano horizontal de los esfuerzos de membrana).

Procederemos de idéntica manera para el desarrollo del equilibrio de un cable y formularemos el problema en términos de los parámetros proyectados.

3.1. Equilibrio en la membrana

Identifiquemos la membrana con una superficie \mathcal{S} .

Si $z := z(x, y)$ es una función real y regular definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, la parametrización de la superficie \mathcal{S} es:

$$\mathcal{S} \rightarrow \varphi(x, y) := (x, y, z(x, y)), \quad \forall (x, y) \in D.$$

¹En las referencias [22] y [37] se pueden encontrar informaciones sobre el tema.

Con referencia a la Figura 3.1, \mathcal{S} idealiza la membrana material, $\widetilde{N}_{\alpha\beta} = \widetilde{N}_{\alpha\beta}(x, y)$

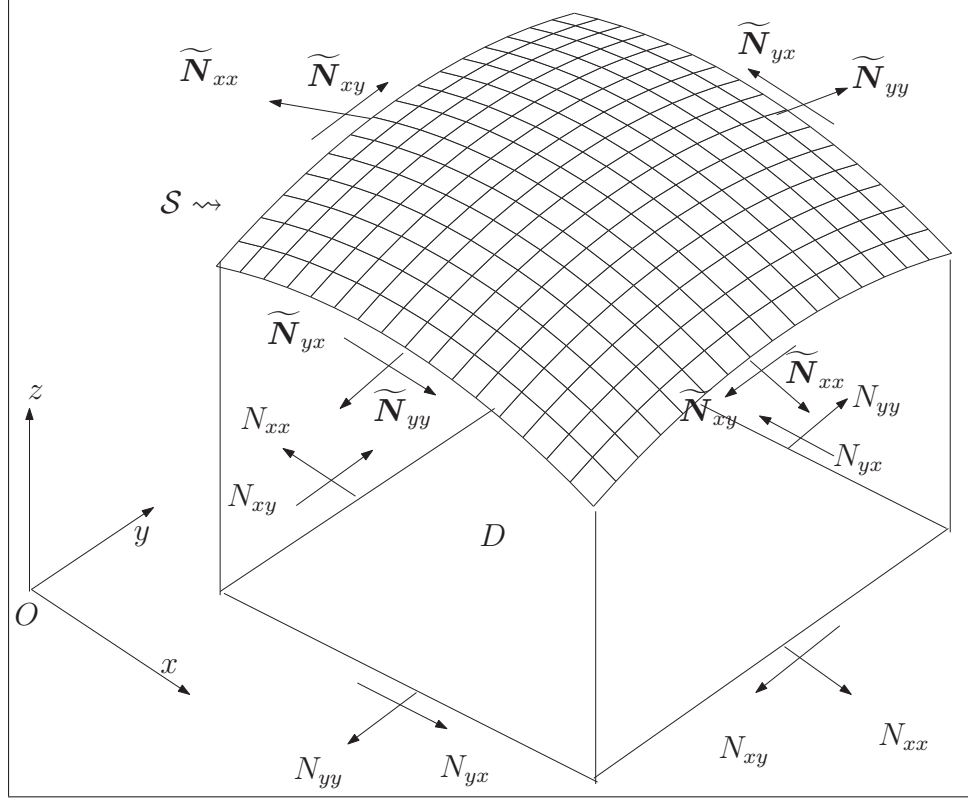


Figura 3.1: Elemento de superficie y esfuerzos correspondientes (sólo a efectos de una mejor visión se muestra una superficie con curvatura de Gauss positiva).

$(\alpha, \beta = 1, 2)^2$ los esfuerzos de tracción, estos es, tangentes a \mathcal{S} y $N_{\alpha\beta}$ sus proyecciones en el plano horizontal.

Hallemos el equilibrio trabajando con el **tensor de los esfuerzos proyectados** en el plano xOy y definido por

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y) := \begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{pmatrix}.$$

A partir de la Figura 3.2, despreciando el peso de la membrana y suponiendo que no actúe ninguna fuerza exterior, es inmediato comprobar el equilibrio horizontal. De hecho, siendo $N_{xy} = N_{yx}$, se tiene

$$(3.2) \quad \begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0. \end{cases}$$

² $\widetilde{N}_{\alpha\beta}$ indica el vector esfuerzo natural que actúa en la cara $\alpha = \text{c.te}$ a lo largo de la dirección β . Evitaremos en general especificar la dependencia de las variables x e y .

Por lo que concierne al equilibrio vertical, en la Figura 3.3 se aprecian las componentes verticales de los esfuerzos N_{yx} y N_{yy} en función de las pendiente de la superficie. Diferenciando y actuando como en el caso plano, obtenemos la relación:

$$(N_{xx}z_{,x} + N_{yx}z_{,x})_{,x} + (N_{xy}z_{,y} + N_{yy}z_{,y})_{,y} = 0,$$

es decir

$$(3.3) \quad z_{,x}(N_{xx,x} + N_{xy,y}) + z_{,y}(N_{xy,x} + N_{yy,y}) + N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0.$$

Utilizando el sistema (3.2), se logran las definitivas ecuaciones de equilibrio en función del tensor $N_{\alpha\beta}$:

$$(3.4) \quad \begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0, \\ N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0. \end{cases}$$

A partir de la Figura 3.3, es fácil calcular la correspondencia entre $N_{\alpha\beta}$, esfuerzos

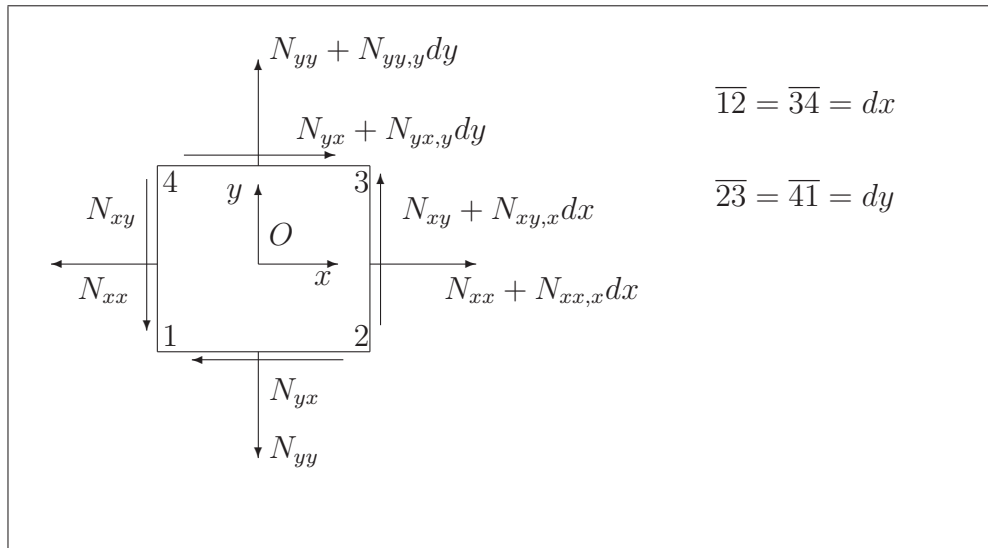


Figura 3.2: Elemento diferencial de membrana y sus esfuerzos proyectados.

proyectados de la membrana, y $\tilde{N}_{\alpha\beta}$, esfuerzos naturales de la membrana. Hagámoslo por el esfuerzos N_{yy} ; para los demás el proceso es exactamente el mismo. Teniendo en cuenta que la longitud sobre la que actúa \tilde{N}_{yy} es $\sqrt{1 + z_{,x}^2}$, es inmediato reconocer que

$$(3.5) \quad N_{yy} = \tilde{N}_{yy} \sqrt{1 + z_{,x}^2} \cos \beta = \tilde{N}_{yy} \frac{\sqrt{1 + z_{,x}^2}}{\sqrt{1 + z_{,y}^2}}.$$

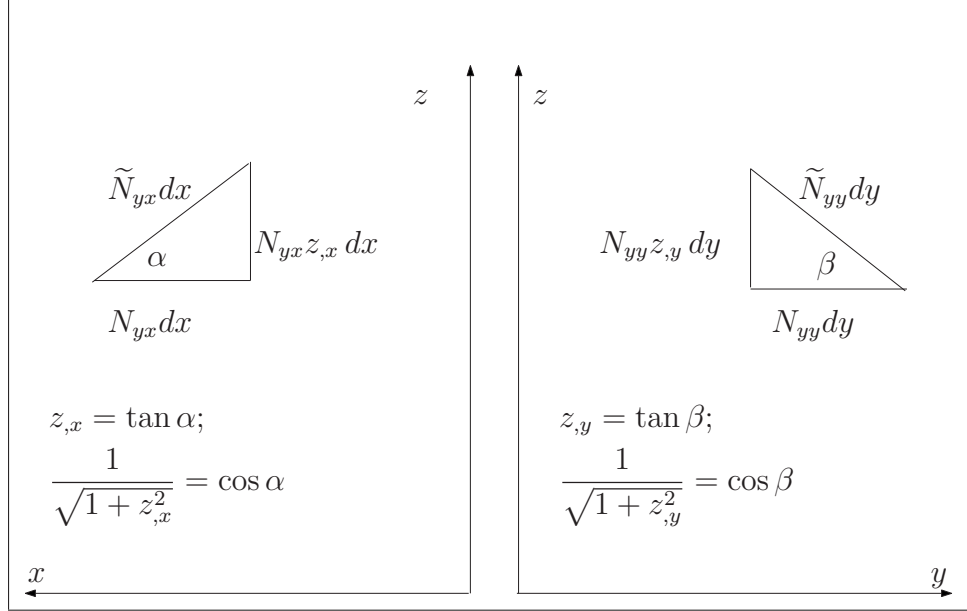


Figura 3.3: Proyecciones verticales del tensor $N_{\alpha\beta}$.

De forma análoga, se tienen:

$$(3.6) \quad N_{xx} = \tilde{N}_{xx} \frac{\sqrt{1 + z_{,y}^2}}{\sqrt{1 + z_{,x}^2}},$$

y

$$(3.7) \quad N_{xy} = \tilde{N}_{xy} = \tilde{N}_{yx} = N_{yx}.$$

Equivalentemente, es posible hallar el equilibrio y lograr las mismas ecuaciones partiendo directamente de los esfuerzos de membrana $\tilde{N}_{\alpha\beta}$, aquéllos que actúan en cada punto del plano tangente.

Fijémonos en el elemento diferencial que representa el plano tangente local a la membrana; Figura 3.4. Imponiendo equilibrio de esfuerzos, en ausencia de fuerzas exteriores y despreciando el peso de la membrana, obtenemos el siguiente sistema:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \tilde{N}_{yy,y} dy + \tilde{N}_{xy,x} dx = 0, \\ \tilde{N}_{xx,x} dx + \tilde{N}_{yx,y} dy = 0. \end{cases}$$

Expresemos cada vector $\tilde{N}_{\alpha\beta}$ en la base tangente a la membrana (referencia (A.13)), definida por

$$\begin{cases} \mathbf{T}_x := (1, 0, z_{,x}), \\ \mathbf{T}_y := (0, 1, z_{,y}). \end{cases}$$

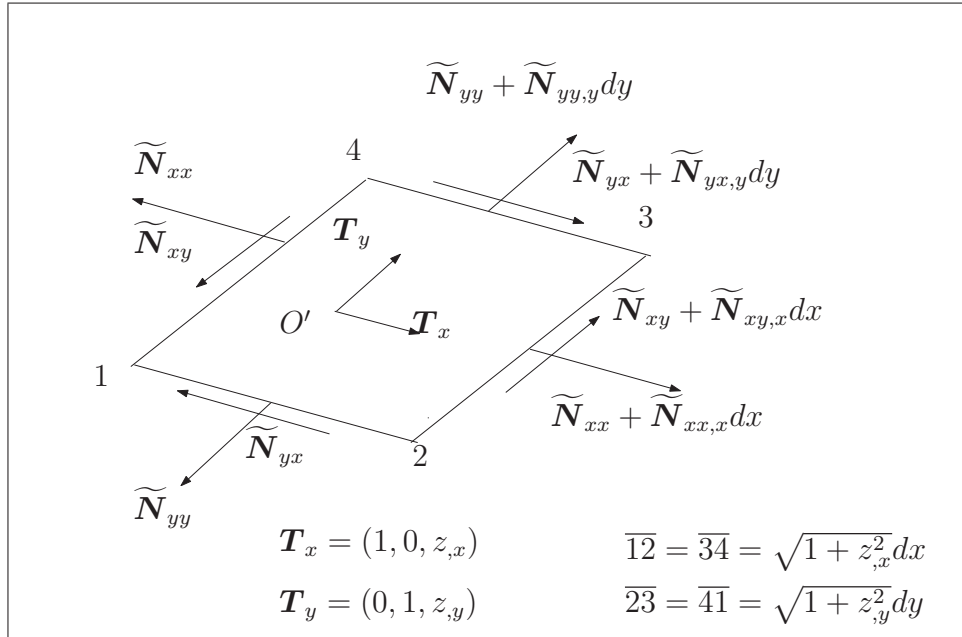


Figura 3.4: Elemento diferencial de membrana en su plano tangente.

Sea \widetilde{N}_{xx} el esfuerzo en la dirección del vector \mathbf{T}_x (fuerza por unidad de longitud) y $\sqrt{1 + z_{,y}^2}$ la longitud del lado sobre el que justamente actúa. Desarrollando, obtenemos:

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{xx} = \widetilde{N}_{xx} \sqrt{1 + z_{,y}^2} \frac{\mathbf{T}_x}{\|\mathbf{T}_x\|} dy = \widetilde{N}_{xx} \frac{\sqrt{1 + z_{,y}^2}}{\sqrt{1 + z_{,x}^2}} (1, 0, z_{,x}) dy.$$

Equivalentemente:

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{yy} = \widetilde{N}_{yy} \sqrt{1 + z_{,x}^2} \frac{\mathbf{T}_y}{\|\mathbf{T}_y\|} dx = \widetilde{N}_{yy} \frac{\sqrt{1 + z_{,x}^2}}{\sqrt{1 + z_{,y}^2}} (0, 1, z_{,y}) dx,$$

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{xy} = \widetilde{N}_{xy} \sqrt{1 + z_{,y}^2} \frac{\mathbf{T}_y}{\|\mathbf{T}_y\|} dy = \widetilde{N}_{xy} (0, 1, z_{,y}) dy,$$

y

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{yx} = \widetilde{N}_{yx} \sqrt{1 + z_{,x}^2} \frac{\mathbf{T}_x}{\|\mathbf{T}_x\|} dx = \widetilde{N}_{yx} (1, 0, z_{,x}) dx.$$

Sustituyendo estas expresiones en el sistema (3.8) y efectuando los cálculos correspondientes, obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\tilde{N}_{xx} \frac{\sqrt{1+z_{,y}^2}}{\sqrt{1+z_{,x}^2}} \right)_{,x} + \tilde{N}_{xy,y} = 0, \\ \left(\tilde{N}_{yy} \frac{\sqrt{1+z_{,x}^2}}{\sqrt{1+z_{,y}^2}} \right)_{,y} + \tilde{N}_{xy,x} = 0, \\ \left(\tilde{N}_{xx} \frac{\sqrt{1+z_{,y}^2}}{\sqrt{1+z_{,x}^2}} z_{,x} + \tilde{N}_{xy} z_{,y} \right)_{,x} + \left(\tilde{N}_{yy} \frac{\sqrt{1+z_{,x}^2}}{\sqrt{1+z_{,y}^2}} z_{,y} + \tilde{N}_{xy} z_{,x} \right)_{,y} = 0. \end{array} \right.$$

Utilizando las relaciones entre $N_{\alpha\beta}$ y $\tilde{N}_{\alpha\beta}$ (ecuaciones (3.5),(3.6) y (3.7)), se tienen las mismas ecuaciones que las del sistema (3.4).

Si introducimos el **operador de divergencia** ∇ sobre el tensor de esfuerzos (3.1), se logran las siguientes ecuaciones de equilibrio en forma compacta

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \\ N_{xx} z_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + N_{yy} z_{,yy} = 0. \end{array} \right.$$

En definitiva, en términos del tensor de esfuerzos proyectados $N_{\alpha\beta}$, se puede “identificar” el equilibrio de la membrana (que es justamente un problema propio del plano tangente) a otro definido directamente en el plano horizontal xOy ; tal “identificación” se resume en la primera relación del sistema (3.9) integrada con la segunda ecuación del mismo sistema, estrictamente relacionada con la forma de la superficie \mathcal{S} .

Observación 3.1 *Las ecuaciones escritas valen en ausencia de fuerzas exteriores. Si, en cambio, sobre \mathcal{S} actúa una fuerza \mathbf{F} de componentes $\mathbf{F}(x, y) = (F_1, F_2, F_3)$, los sistemas (3.4) y (3.9) se escriben, respectivamente, como*

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{xx,x} + N_{xy,y} + F_1 = 0, \\ N_{yy,y} + N_{xy,x} + F_2 = 0, \\ N_{xx} z_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + N_{yy} z_{,yy} - F_1 z_{,x} - F_2 z_{,y} + F_3 = 0, \end{array} \right.$$

y

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}, \\ N_{xx} z_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + N_{yy} z_{,yy} - F_1 z_{,x} - F_2 z_{,y} + F_3 = 0. \end{array} \right.$$

Una forma de afrontar el estudio de estas ecuaciones se basa en el **método de Airy**. Éste consiste en suponer la existencia de una función

$$(3.12) \quad H = H(x, y),$$

conocida como **función de Airy**, tal que

$$(3.13) \quad H_{,xx} = N_{yy} + \int F_2 dy, \quad H_{,xy} = -N_{xy}, \quad H_{,yy} = N_{xx} + \int F_1 dx.$$

Al sustituir esta relación en las ecuaciones del sistema (3.10), la única no trivial es la tercera:

$$\begin{aligned} & H_{,xx}z_{,yy} - 2H_{,xy}z_{,xy} + H_{,yy}z_{,xx} \\ &= z_{,xx} \int F_1 dx + z_{,yy} \int F_2 dy + F_1 z_{,x} + F_2 z_{,y} - F_3, \end{aligned}$$

o bien, si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

$$(3.14) \quad H_{,xx}z_{,yy} - 2H_{,xy}z_{,xy} + H_{,yy}z_{,xx} = 0.$$

Utilizaremos, en algunas circunstancias, la función de Airy y la correspondiente ecuación diferencial.

3.2. Equilibrio en el borde

En este apartado nos dedicaremos al equilibrio en el borde de una membrana. Ya se comentó que, en general, el borde es una curva cualquiera definida a lo largo de la membrana que limita la superficie de la misma. En particular, se pueden distinguir dos tipos de bordes: los bordes rígidos y los cables a tracción. Desde un punto de vista “geométrico” los primeros son elementos unidimensionales que pueden tener “cualquier forma”, mientras que la forma de los cables, como argumentaremos más adelante, tiene que estar relacionada con la forma de la membrana.

En cualquiera de los casos hay que imponer equilibrio entra la *fuerza de borde* y la fuerza resultante de los esfuerzos de membrana: tal equilibrio es posible sólo si estas fuerzas pertenecen al plano tangente de la membrana a lo largo del borde, esto es, sólo si **la fuerza es ortogonal al vector normal de la superficie en el contorno**.

Identifiquemos el borde con una curva \mathcal{C} . Si $y := y(x)$ es una función real y regular definida en un dominio $I \subset \mathbb{R}$, la parametrización de \mathcal{C} es:

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{r}(x) := (x, y(x), z(x, y(x))), \quad \forall x \in I.$$

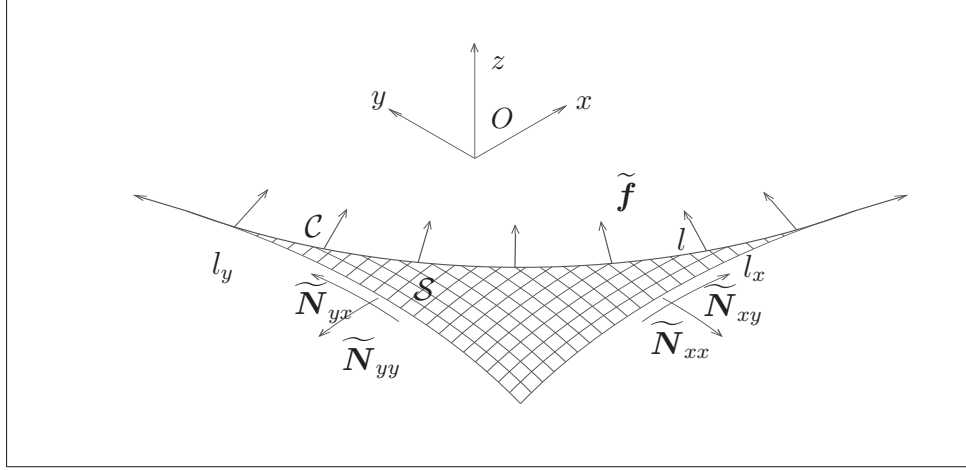


Figura 3.5: Elemento de membrana y de borde: equilibrio de borde.

Con referencia a la Figura 3.5 consideremos los esfuerzos naturales $\widetilde{\mathbf{N}}_{\alpha\beta} = \widetilde{\mathbf{N}}_{\alpha\beta}(x, y)$ de la membrana \mathcal{S} y la **fuerza de borde** (repartida, esto es, fuerza por unidad de longitud) $\widetilde{\mathbf{f}} = \widetilde{\mathbf{f}}(x) = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3)$ en \mathcal{C} . Imponiendo equilibrio se obtiene

$$l_y \widetilde{N}_{xx} \frac{\mathbf{T}_x}{\|\mathbf{T}_x\|} + l_x \widetilde{N}_{yx} \frac{\mathbf{T}_x}{\|\mathbf{T}_x\|} + l_y \widetilde{N}_{xy} \frac{\mathbf{T}_y}{\|\mathbf{T}_y\|} + l_x \widetilde{N}_{yy} \frac{\mathbf{T}_y}{\|\mathbf{T}_y\|} + l \widetilde{\mathbf{f}}(x) = 0,$$

es decir, siendo

$$\begin{cases} l_x = \sqrt{1 + z_{,x}^2} dx, \\ l_y = \sqrt{1 + z_{,y}^2} dy, \\ l = \sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2} dx, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + z_{,y}^2} dy \widetilde{N}_{xx} \frac{\mathbf{T}_x}{\|\mathbf{T}_x\|} + \sqrt{1 + z_{,x}^2} dx \widetilde{N}_{yx} \frac{\mathbf{T}_x}{\|\mathbf{T}_x\|} \\ & + \sqrt{1 + z_{,y}^2} dy \widetilde{N}_{xy} \frac{\mathbf{T}_y}{\|\mathbf{T}_y\|} + \sqrt{1 + z_{,x}^2} dx \widetilde{N}_{yy} \frac{\mathbf{T}_y}{\|\mathbf{T}_y\|} \\ & + \sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2} \widetilde{\mathbf{f}}(x) dx = 0, \end{aligned}$$

o bien

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' \frac{\sqrt{1+z_{,y}^2}}{\sqrt{1+z_{,x}^2}} \tilde{N}_{xx} - \tilde{N}_{xy} + \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_1 = 0, \\ y' \tilde{N}_{xy} - \frac{\sqrt{1+z_{,x}^2}}{\sqrt{1+z_{,y}^2}} \tilde{N}_{yy} + \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_2 = 0, \\ z_{,x} y' \frac{\sqrt{1+z_{,y}^2}}{\sqrt{1+z_{,x}^2}} \tilde{N}_{xx} - z_{,x} \tilde{N}_{xy} + y' \tilde{N}_{xy} z_{,y} \\ - z_{,y} \frac{\sqrt{1+z_{,x}^2}}{\sqrt{1+z_{,y}^2}} \tilde{N}_{yy} + \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_3 = 0. \end{array} \right.$$

Considerando la equivalencia entre los esfuerzos proyectados y naturales de membrana, es decir las expresiones (3.5), (3.6) y (3.7), las tres ecuaciones del sistema (3.15) se escriben como:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' N_{xx} - N_{xy} + \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_1 = 0, \\ y' N_{xy} - N_{yy} + \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_2 = 0, \\ z_{,x} y' N_{xx} - z_{,x} N_{xy} + y' N_{xy} z_{,y} - z_{,y} N_{yy} + \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_3 = 0. \end{array} \right.$$

La tercera ecuación es combinación lineal de las primeras dos y, en particular, se tiene

$$(3.16) \quad \tilde{f}_3 = z_{,x} \tilde{f}_1 + z_{,y} \tilde{f}_2.$$

Esto implica que el último sistema es equivalente al siguiente bidimensional

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_1 = N_{xy} - y' N_{xx}, \\ \sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2} \tilde{f}_2 = N_{yy} - y' N_{xy}. \end{array} \right.$$

Observación 3.2 La relación $\tilde{f}_3 = z_{,x} \tilde{f}_1 + z_{,y} \tilde{f}_2$ expresa la ortogonalidad entre la fuerza $\tilde{\mathbf{f}}$ y el versor normal \mathbf{N} a \mathcal{S} (véase la ecuación (A.14)) en el borde. De hecho siendo

$$\mathbf{N} \sim (z_{,x}, z_{,y}, -1),$$

se tiene

$$0 = \tilde{f}_3 - z_{,x} \tilde{f}_1 + z_{,y} \tilde{f}_2 = \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{N}.$$

Esto confirma lo comentado anteriormente: para que haya equilibrio la fuerza de borde ha de pertenecer al plano tangente a la membrana en cada punto del contorno.

Dicho de otra forma, se está tratando un problema plano en el que sólo las componentes \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 de $\tilde{\mathbf{f}}$ “intervienen directamente” en la formulación; de echo, una vez que se conozcan \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 , \tilde{f}_3 se calcula a partir de la ecuación $\tilde{f}_3 = z_{,x}\tilde{f}_1 + z_{,y}\tilde{f}_2$.

Consideremos, ahora, la fuerza $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ en el plano xOy , equivalente a la “proyección por unidad de longitud” de \mathbf{f} sobre el plano horizontal; se comprueban las relaciones

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2}} f_1, \\ \tilde{f}_2 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2+(z_{,x}+y'z_{,y})^2}} f_2. \end{cases}$$

Así, en términos de \mathbf{f} , el sistema (3.17) se expresa como

$$(3.18) \quad \begin{cases} \sqrt{1+y'^2} f_1 = N_{xy} - y' N_{xx}, \\ \sqrt{1+y'^2} f_2 = N_{yy} - y' N_{xy}, \end{cases}$$

que, como comprobaremos a continuación, puede simplificarse en la típica forma que traduce el equilibrio de borde en un problema plano.

Trabajemos, para ello, en el plano horizontal xOy . El versor normal \mathbf{n} a la curva proyectada Γ y parametrizada por $(x, y(x))$ es

$$(3.19) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y', 1).$$

En estas circunstancias el sistema (3.18) se expresa como

$$(3.20) \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \forall x \in \Gamma.$$

En definitiva, utilizando el tensor de esfuerzos proyectados $N_{\alpha\beta}$ y la fuerza proyectada \mathbf{f} , se puede “identificar” el equilibrio entre cable y membrana (que es justamente un problema propio del plano tangente) a otro definido directamente en el plano horizontal xOy ; tal “identificación” se resume en el sistema (3.18) integrado con la ecuación $\tilde{f}_3 = z_{,x}\tilde{f}_1 + z_{,y}\tilde{f}_2$, estrictamente relacionada con la forma de la superficie \mathcal{S} .

Reiteremos que, aunque la expresión (3.20) sea válida para cualquier tipo de borde, es muy importante entender cómo considerar la fuerza $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ en función del borde que se tenga: si el borde es rígido la fuerza puede ser cualquiera mientras que si el borde es una cable veremos que f_1 y f_2 dependen de la tracción y de la forma del mismo.

3.2.1. Equilibrio entre borde rígido y membrana

Identifiquemos el borde rígido con una curva \mathcal{C}^r . Si $y := y(x)$ es una función real y regular definida en un dominio $I \subset \mathbb{R}$, la parametrización de \mathcal{C}^r es:

$$\mathcal{C}^r \rightarrow \mathbf{r}(x) := (x, y(x), z(x, y(x))), \quad \forall x \in I.$$

Trabajemos en el plano horizontal, es decir en la proyección Γ^r de \mathcal{C}^r sobre xOy . El versor normal \mathbf{n} a la curva proyectada parametrizada por $(x, y(x))$ es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y', 1).$$

Si indicamos con $\mathbf{f}^r = (f_1^r, f_2^r)$ la **fuerza de borde**, esto es, la fuerza por unidad de longitud repartida a lo largo de Γ^r , podemos escribir el equilibrio como

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^r, \quad \forall x \in \Gamma^r,$$

que es la restricción del sistema (3.20) al dominio Γ^r .

3.2.2. Equilibrio entre cable y membrana

Una vez más identifiquemos el cable con una curva \mathcal{C}^c . Si $y := y(x)$ es una función real y regular definida en un dominio $I \subset \mathbb{R}$, la parametrización \mathcal{C}^c es:

$$\mathcal{C}^c \rightarrow \mathbf{r}(x) := (x, y(x), z(x, y(x))), \quad \forall x \in I.$$

Trabajemos en el plano horizontal, es decir en la proyección Γ^c de \mathcal{C}^c sobre xOy . El versor normal \mathbf{n} a la curva proyectada parametrizada por $(x, y(x))$ es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y', 1).$$

Hasta aquí “todo funciona” como en el caso de borde rígido; la diferencia fundamental es que la **fuerza \mathbf{f}^c en un cable depende de la tracción del mismo y de su forma**.

De hecho un cable es, como ya se comentó, un elemento unidimensional capaz de trabajar sólo a tracción, esto es, a través de *esfuerzos axiales* (es decir, tangentes en cada punto del mismo). A raíz de ello y refiriéndonos a la Figura 3.6, si $\mathbf{f}^c = (f_1^c, f_2^c)$ define la fuerza de reacción del cable (proyectado) y \mathbf{P} la proyección a lo largo de Γ^c de la tracción natural $\tilde{\mathbf{P}}$ a lo largo de \mathcal{C}^c , entonces las ecuaciones de equilibrio que se obtienen son

$$\mathbf{P}'(x) + \mathbf{f}^c = \mathbf{0},$$

esto es

$$(3.21) \quad \begin{cases} P'_x - f_1^c = 0, \\ (P_x y')' - f_2^c = 0, \end{cases}$$

siendo

$$(3.22) \quad P_x = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2}},$$

y \tilde{P} el valor de la tracción natural del cable, definida por

$$\tilde{P} = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2}}(1, y', z_{,x} + y'z_{,y}).$$

De todo ello, teniendo en cuenta la relación $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1 z_{,x} + \tilde{f}_2 z_{,y}$, se logra:

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = P'_x, \\ \tilde{f}_2 = (y' P_x)', \\ \tilde{f}_3 = z_{,x} P'_x + z_{,y} (y' P_x)'. \end{cases}$$

Siendo, en este caso, $\tilde{\mathbf{f}}$ fruto de la tracción P_x del cable, *no sólo* es ortogonal a la normal a la superficie, *sino que* pertenece al **plano osculador** (véase su definición (A.10)) definido por el mismo cable³. Lo dicho nos permite considerar una importante relación geométrica, que denominaremos **Relación de compatibilidad espacial del equilibrio** o, simplemente, **Relación de compatibilidad**. Esta relación es una *condición necesaria para que una curva sea un cable de borde de una membrana*.

Identifiquemos el cable con una curva \mathcal{C}^c . Si $y := y(x)$ es una función real y regular definida en un dominio $I \subset \mathbb{R}$, la parametrización \mathcal{C}^c es:

$$\mathcal{C}^c \rightarrow \mathbf{r}(x) := (x, y(x), z(x, y(x))), \quad \forall x \in I.$$

Fijada la forma \mathcal{S} de la membrana y su ecuación $z = z(x, y)$, siendo el plano osculador el definido por los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} (fórmulas (A.4) y (A.5) respectivamente), para que una curva \mathcal{C}^c perteneciente a \mathcal{S} sea un cable para \mathcal{S} hemos de imponer la ortogonalidad entre estos vectores y el versor normal a la superficie \mathbf{N} .

Teorema 3.3 (Relación de compatibilidad). *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$ ($(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$) y con versor normal \mathbf{N} definido por la relación (A.14), y $\mathcal{C}^c \subset \mathbb{R}^3$ una curva perteneciente a \mathcal{S}*

³Esto equivale a afirmar que el versor binormal \mathbf{b} (relación (A.6)) del cable coincide con el versor normal \mathbf{N} de la superficie, o bien, que el plano osculador del cable coincide punto a punto con el plano tangente a la membrana.

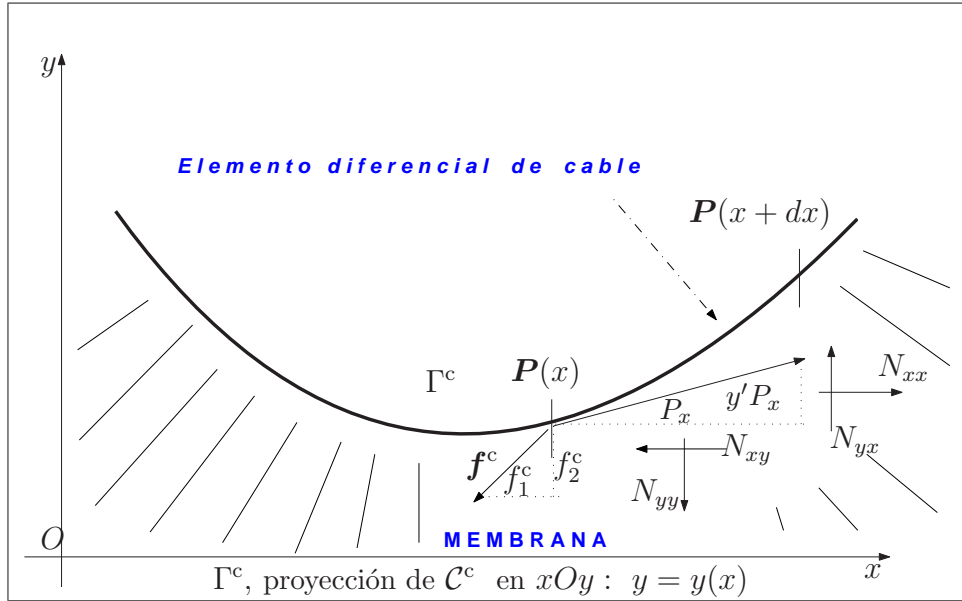


Figura 3.6: Equilibrio horizontal: fuerza de reacción - tracción el cable.

parametrizada por $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x, y(x)))$ ($x \in I \subset \mathbb{R}$) y con versor tangente \mathbf{t} y normal \mathbf{n} , dados respectivamente por las expresiones (A.4) y (A.5). En estas condiciones si \mathbf{r} es un cable para \mathcal{S} entonces necesariamente

$$(3.23) \quad z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0, \quad \forall x \in I.$$

Demostración

Hace falta imponer

$$(3.24) \quad \begin{cases} \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0. \end{cases}$$

Utilizando (A.4), (A.5) y (A.14) se tiene que

$$\begin{cases} \mathbf{t} \sim (1, y', z_{,x} + z_{,y}y'), \\ \mathbf{n} \sim (0, y'', z_{,xx} + 2y'z_{,xy} + y'^2z_{,yy} + y''z_{,y}), \\ \mathbf{N} \sim (z_{,x}, z_{,y}, -1). \end{cases}$$

Esto implica que la primera ecuación del sistema (3.24) se cumple para cualquier valor de x en I , mientras que la segunda se verifica si y sólo si

$$z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0.$$

■

Finalmente, utilizando la **Relación de compatibilidad** (3.23), la fuerza repartida $\tilde{\mathbf{f}}$ es:

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = P'_x, \\ \tilde{f}_2 = (y'P_x)', \\ \tilde{f}_3 = z_{,x}P'_x + z_{,y}(y'P_x)' = [(z_{,x} + z_{,y}y')P_x]'. \end{cases}$$

3.3. Interpretación geométrica de la relación de compatibilidad

Demos una interpretación geométrica de la relación (3.23).

Supongamos tener una membrana \mathcal{S} , gráfica de una función $z = z(x, y)$, y un cable \mathcal{C}^c cuya proyección Γ^c en el plano horizontal sea una curva plana gráfica de una función $y = y(x)$:

$$\Gamma^c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = y(x)\}.$$

Calculemos la **curvatura de Gauss** K y la **curvatura normal** \mathcal{K} , dadas, respectivamente, por las expresiones (A.24) y (A.19). Para ello necesitamos algunas magnitudes previas: los coeficientes E , F y G y L , M y N de la **primera** y **segunda forma fundamental** de la **Definición A.7**.

$$\begin{cases} \varphi_{,x} = (1, 0, z_{,x}), \quad \varphi_{,y} = (0, 1, z_{,y}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}}(-z_{,x}, -z_{,y}, 1), \\ \varphi_{,xx} = (0, 0, z_{,xx}), \quad \varphi_{,xy} = (0, 0, z_{,xy}), \quad \varphi_{,yy} = (0, 0, z_{,yy}), \\ E = 1 + z_{,x}^2, \quad F = z_{,x}z_{,y}, \quad G = 1 + z_{,y}^2, \\ L := \frac{z_{,xx}}{\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}}, \quad M = \frac{z_{,xy}}{\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}}, \quad N = \frac{z_{,yy}}{\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}}. \end{cases}$$

Se tiene que

$$(3.25) \quad K = \frac{z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2}{(1 + \|\nabla z\|^2)^2}.$$

Por lo que concierne a la curvatura normal, debido a la ecuación (A.19), escojamos un versor tangente a la superficie

$$\mathbf{e} := \frac{\dot{\mathbf{r}}(x)}{\|\dot{\mathbf{r}}(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2}}(1, y', z_{,x} + y'z_{,y}),$$

y descompongámoslo en la base tangente $\{\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y\}$:

$$\mathbf{e} = a\mathbf{T}_x + b\mathbf{T}_y \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2}}, \\ b = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2}}. \end{cases}$$

Finalmente obtenemos

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \mathcal{K} := \mathbf{II}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) &= (a, b) \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = La^2 + 2Mab + Nb^2 \\ &= \frac{z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2}{[1 + y'^2 + (z_{,x} + y'z_{,y})^2]\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}}. \end{aligned}$$

Observación 3.4 A raíz de la expresión (3.26) podemos dar otra importante interpretación de la **Relación de compatibilidad** (3.23): las curvas que la verifican son tales que la curvatura normal \mathcal{K} a lo largo de las mismas se anule, esto es, son las **direcciones asintóticas** para la superficie z (referencia [10]).

A continuación consideraremos unos ejemplos de superficies y direcciones asintóticas correspondientes.

Ejemplo 3.5 Si $z(x, y) = z_1(x) + z_2(y)$, entonces la ecuación (3.23) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria del primer orden del tipo:

$$y'(x) = \mp \sqrt{\frac{z_1''(x)}{z_2''(y(x))}}.$$

Como casos particulares, se comprueba que

- si $z(x, y) = y^s - x^r$, entonces $\sqrt{\frac{r-1}{r}y^r} = \sqrt{\frac{s-1}{s}x^s} + c$, c constante (véase la Figura 3.7 correspondiente a $s = 2$ y $r = 4$);
- si $z(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - \cosh^2 x) + y^2$, entonces $y = \mp \cosh x + c$, c constante.

Otros ejemplos son

- $z(x, y) := e^{|y|} - \frac{x^2}{2}$, entonces $y(x) = \pm \frac{x^2}{2} \mp x + c$, c constante, (véase la Figura 3.8);
- $z(x, y) := e^{|x|}(1 - |y|)$, entonces $y(x) := \mp 1 \mp ce^{\frac{x}{2}}$, c constante.

3.4. Problema completo del equilibrio: problema directo y dual

Formulamos y definamos, ahora, el *problema diferencial completo* para el equilibrio de una membrana. Las ecuaciones generales se expresan en la relación (3.4)

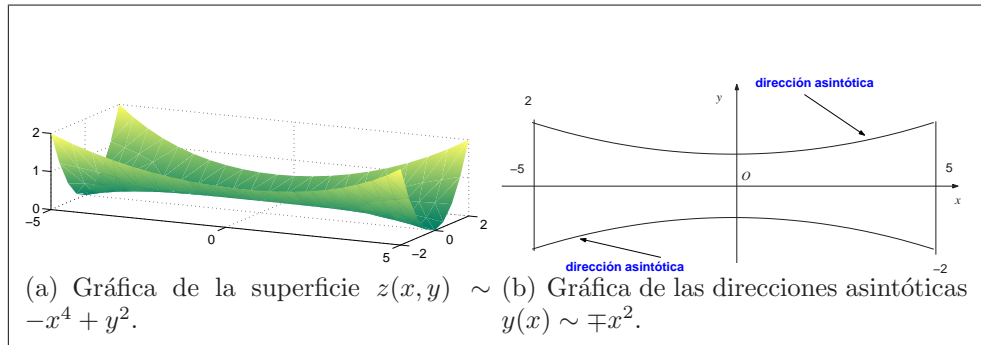


Figura 3.7: Superficie y direcciones asintóticas.

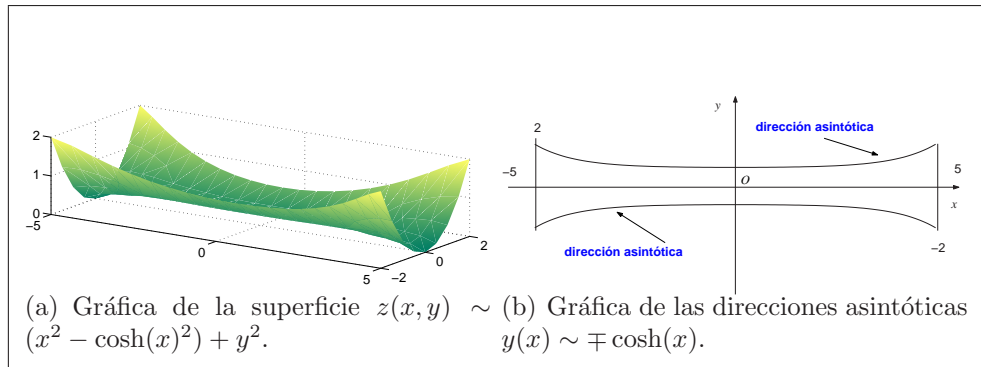


Figura 3.8: Superficie y direcciones asintóticas.

o, de forma más compacta, en el sistema (3.9). Como se justifica más detalladamente en el **Apéndice B**, necesitamos añadir a estas ecuaciones unas condiciones de borde adecuadas que puedan definir bien el problema de contorno.

Distinguiremos dos tipos de problemas:

- **problema directo**, en el que nos proponemos encontrar, una vez fijada la forma de membrana, los esfuerzos de pretensado para dicha forma que verifiquen el equilibrio;
- **problema dual**, en el que nos proponemos encontrar, una vez fijados los esfuerzos de tracción adecuados, la forma de la membrana que verifique su equilibrio.

Analizaremos y formularemos los dos problema en el caso *general*, es decir en el caso en que el borde esté formado, en parte, por cables. A partir de ello se podrá particularizar el estudio de ambos problemas a circunstancias en las que el borde sea completamente rígido.

Como se podrá apreciar a lo largo del texto, la presencia de los cables en cualquiera

de los dos problemas complica sensiblemente no sólo la formulación sino el (eventual) método de resolución.

Simetría del problema

Antes de entrar en los detalles del problema completo, fijemos uno de los puntos de partida: la simetría general del problema.

Conclusión 3.6 (acerca de la simetría general del problema).

Independientemente de que el problema analizado sea el directo o el dual, nos dedicaremos a soluciones simétricas. Ante todo ha de precisarse que el dominio es *siempre* un dato del problema; más precisamente en esta tesis nos limitaremos a considerar dominios planos, y simétricos respecto a los dos ejes, definidos como sigue:

$$(3.27) \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\}.$$

Consecuentemente

$$\partial D \equiv \Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2,$$

siendo

$$\Gamma^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = \mp a \wedge -b \leq y \leq b\},$$

y

$$\Gamma^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge y = \mp y(x)\},$$

con a y b números reales e $y = y(x)$ función real, par, regular y definida en $[-a, a]$ tal que

$$\mp y(-a) = \mp y(a) = \mp b.$$

En particular si $y = y(x)$ define un cable, recordando que el sentido de la curvatura del mismo ha de ser *siempre* hacia el exterior de la línea de paso (generalmente el eje x ; Figura 1.3), entonces la curva correspondiente será convexa: $y''(x) > 0$.

Siguiendo con el asunto de la simetría, se puede comprobar que *si se escogen los datos simétricos (dominio de partida, coeficientes y condiciones de frontera) se puede garantizar la simetría de la solución (esfuerzos o forma de membrana)*. Justifiquémoslo muy brevemente.

PROBLEMA DIRECTO. Fijemos la superficie $z = z(x, y)$ simétrica:

$$z(-x, y) = z(x, y) \text{ (par en } x) \text{ y } z(x, -y) = z(x, y) \text{ (par en } y).$$

A partir de la tercera ecuación de equilibrio (sistema (3.4))

$$N_{xx}(x, y)z_{,xx}(x, y) + 2N_{xy}(x, y)z_{,xy}(x, y) + N_{yy}(x, y)z_{,yy}(x, y) = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & N_{xx}(-x, y)z_{,xx}(-x, y) + 2N_{xy}(-x, y)z_{,xy}(-x, y) + N_{yy}(-x, y)z_{,yy}(-x, y) \\ & = N_{xx}(-x, y)z_{,xx}(x, y) - 2N_{xy}(-x, y)z_{,xy}(x, y) + N_{yy}(-x, y)z_{,yy}(x, y) = 0, \end{aligned}$$

siempre que

$$\begin{cases} N_{xx}(-x, y) = N_{xx}(x, y) \text{ (par en } x), \\ N_{yy}(-x, y) = N_{yy}(x, y) \text{ (par en } x), \\ N_{xy}(-x, y) = -N_{xy}(x, y) \text{ (impar en } x). \end{cases}$$

Equivalentemente se logra

$$\begin{cases} N_{xx}(x, -y) = N_{xx}(x, y) \text{ (par en } y), \\ N_{yy}(x, -y) = N_{yy}(x, y) \text{ (par en } y), \\ N_{xy}(x, -y) = -N_{xy}(x, y) \text{ (impar en } y), \end{cases}$$

es decir la simetría del tensor $N_{\alpha\beta}$.

Al revés, si

$$\begin{aligned} 0 & = N_{xx}(-x, y)z_{,xx}(-x, y) + 2N_{xy}(-x, y)z_{,xy}(-x, y) + N_{yy}(-x, y)z_{,yy}(-x, y) \\ & = N_{xx}(x, y)z_{,xx}(-x, y) - 2N_{xy}(-x, y)z_{,xy}(x, y) + N_{yy}(-x, y)z_{,yy}(x, y) \\ & = N_{xx}(x, y)z_{,xx}(x, y) + 2N_{xy}(x, y)z_{,xy}(x, y) + N_{yy}(x, y)z_{,yy}(x, y), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} & [N_{xx}(x, y) - N_{xx}(-x, y)]z_{,xx}(x, y) + 2[N_{xy}(x, y) + N_{xy}(-x, y)]z_{,xy}(x, y) \\ & + [N_{yy}(x, y) - N_{yy}(-x, y)]z_{,yy}(x, y) = 0, \quad \forall z \text{ simétrica,} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{cases} N_{xx}(-x, y) = N_{xx}(x, y) \text{ (par en } x), \\ N_{yy}(-x, y) = N_{yy}(x, y) \text{ (par en } x), \\ N_{xy}(-x, y) = -N_{xy}(x, y) \text{ (impar en } x), \end{cases}$$

y, equivalentemente,

$$\begin{cases} N_{xx}(x, -y) = N_{xx}(x, y) \text{ (par en } y), \\ N_{yy}(x, -y) = N_{yy}(x, y) \text{ (par en } y), \\ N_{xy}(x, -y) = -N_{xy}(x, y) \text{ (par en } y). \end{cases}$$

PROBLEMA DUAL. Fijemos los esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ simétricos:

$$\begin{cases} N_{xx}(-x, y) = N_{xx}(x, y) \text{ y } N_{xx}(x, -y) = N_{xx}(x, y), \\ N_{yy}(-x, y) = N_{yy}(x, y) \text{ y } N_{yy}(x, -y) = N_{yy}(x, y), \\ N_{xy}(-x, y) = -N_{xy}(x, y) \text{ y } N_{xy}(x, -y) = -N_{xy}(x, y). \end{cases}$$

Si z verifica la última ecuación del sistema (3.4), pongamos

$$z^x(x, y) = z(-x, y) \quad \text{y} \quad z^y(x, y) = z(x, -y).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} & N_{xx}(x, y)z^x_{,xx}(x, y) + 2N_{xy}(x, y)z^x_{,xy}(x, y) + N_{yy}(x, y)z^x_{,yy}(x, y) \\ &= N_{xx}(x, y)z_{,xx}(-x, y) - 2N_{xy}(x, y)z_{,xy}(-x, y) + N_{yy}(x, y)z_{,yy}(-x, y) \\ &= N_{xx}(-x, y)z_{,xx}(-x, y) + 2N_{xy}(-x, y)z_{,xy}(-x, y) + N_{yy}(-x, y)z_{,yy}(-x, y) = 0, \end{aligned}$$

es decir $z(x, y) = z(-x, y)$. Equivalentemente se obtiene $z(x, y) = z(x, -y)$.

Signo de la curvatura de Gauss de una membrana a tracción

Analicemos otro aspecto del problema: el paralelismo entre las membranas a tracción, las superficies minimales y las con curvaturas de Gauss negativa.

Conclusión 3.7 (acerca del signo de la curvatura de Gauss de una membrana a tracción).

Reconsideremos la ecuación (3.23): para que existan soluciones, su discriminante ha de ser no negativo, es decir

$$z^2_{,xy} - z_{,xx}z_{,yy} \geq 0.$$

Confrontando esta desigualdad con la expresión (3.25), concluimos que la superficie, por lo menos a lo largo de eventuales cables, ha de tener curvatura de Gauss K no positiva: se comprueba que el mismo resultado es válido en todo punto de la superficie. De hecho, teniendo en cuenta que la relación (3.14) coincide con la ecuación de las *superficies minimales* (A.27) en el caso en que

$$\begin{cases} N_{xx} = H_{,yy} = 1 + z^2_{,y}, \\ -N_{xy} = H_{,xy} = z_{,x}z_{,y}, \\ N_{yy} = H_{,xx} = 1 + z^2_{,x}, \end{cases}$$

debido a que la curvatura de Gauss de una superficie minimal es no positiva (**Observación A.13**) y siendo el tensor de los esfuerzos σ definido positivo, existe una “analogía” entre las ecuaciones (3.14) y (A.27). Podemos afirmar, entonces, que, en general, *a una cierta distribución de esfuerzos de tracción para una membrana corresponde siempre una superficie con curvatura de Gauss negativa y, viceversa, a una cierta superficie con curvatura de Gauss negativa corresponde siempre una distribución de esfuerzos de tracción.*

Capítulo 4

Problema directo

Como ya se dijo, en el problema directo se fija la forma de la membrana y se busca la distribución de esfuerzos que equilibran el sistema. Siendo, así, el tensor de los esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ la incógnita del problema, se han de fijar, para la misma, las adecuadas condiciones de contorno.

4.1. Formulación matemática y propiedades

Sea

$$\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x, y(x))) \quad -a \leq x \leq a,$$

la parametrización tridimensional de la curva, borde de la membrana. Trabajemos en el plano xOy , es decir en proyección. El versor normal \mathbf{n} a la curva proyectada Γ parametrizada por $(x, y(x))$ es

$$(4.1) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y', 1).$$

En particular, para los bordes verticales de ecuación $x = \mp a$ (véase la definición del dominio D expresada por la ecuación (3.27)), el versor normal es

$$\mathbf{n} := \begin{cases} (1, 0), & \text{por } x = a, \\ (-1, 0), & \text{por } x = -a. \end{cases}$$

Finalmente podemos definir las condiciones de contorno: si D es el dominio con borde $\Gamma \equiv \partial D$ y $\mathbf{f}(x)$ es la **fuerza de borde**, esto es, la fuerza por unidad de longitud repartida a lo largo de Γ , entonces las condiciones de contorno, correspondientes al problema directo y que reflejan el equilibrio en el borde, se expresan en la ecuación (3.20) (propia del problema plano) aquí recordada:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \forall x \in \Gamma.$$

Tenemos ahora todos los instrumentos necesarios para plantear el problema completo en el caso general, caso en el que el borde está compuesto, en parte, por cables:

$$\partial D \equiv \Gamma = \Gamma^r \cup \Gamma^c.$$

Problema 4.1 (Problema directo). *Datos:*

- 1) **Membrana** identificada con la gráfica de una superficie $z = z(x, y)$ con curvatura de Gauss negativa;
- 2) **curvas** $y = \mp y(x)$ candidatas a definir el borde compuesto por cables (Γ^c), obtenidas resolviendo la ecuación (3.23);
- 3) **curvas de ecuación** $x = \mp a$ que definen el borde rígido (Γ^r);
- 4) **borde completo** $\partial D \equiv \Gamma = \Gamma^r \cup \Gamma^c$;
- 5) **distribución de la fuerza de borde rígido** \mathbf{f}^r en Γ^r .

Calcular:

- 1) **tensor** $\boldsymbol{\sigma} := N_{\alpha\beta}$ y la **fuerza de borde en el cable** \mathbf{f}^c definida en Γ^c tal que

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \text{ sea un tensor positivo en } D, \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 N_{\alpha\beta,\beta} = 0, \quad \forall \alpha = 1, 2, \\ N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0 \text{ en } D, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^r \text{ en } \Gamma^r, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^c \text{ en } \Gamma^c, \end{array} \right.$$

siendo \mathbf{n} el versor normal exterior a Γ .

Comentario 4.2 Utilizando la ecuación de equilibrio en términos de la función de Airy, esto es, la ecuación

$$H_{,xx}z_{,yy} - 2H_{,xy}z_{,xy} + H_{,yy}z_{,xx} = 0,$$

y siendo z una superficie con curvatura de Gauss negativa, la segunda ecuación diferencial del sistema (4.2) es hiperbólica; tenemos, así, un problema hiperbólico en dos incógnitas (el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ y el vector \mathbf{f}^c) con ciertas condiciones de contorno sobre $\boldsymbol{\sigma}$.

Si se fijara \mathbf{f}^c el mismo sistema (4.2) sería un problema hiperbólico, en general, no resoluble (véase el **Ejemplo 4.3**).

Ejemplo 4.3 *Considérese la superficie $z = -A^2x^4 + 6B^2y^2$ (A y B constantes), la curva (candidata a cable) $y = \frac{A^2}{2B^2}x^2$ y los esfuerzos $N_{xx} = 1$, $N_{xy} = 0$ y $N_{yy} = \frac{A^2}{B^2}x^2$.*

*La superficie z y la curva y verifican la **Relación de compatibilidad** (3.23)*

$$z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0.$$

Teniéndose que cumplir $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^c$ (fuerza por unidad de longitud a lo largo del cable), se tiene

$$\mathbf{f}^c = \left(-\frac{A^2}{B^2}x, \frac{A^2}{B^2}x^2 \right).$$

*Si $y = y(x)$ es un cable, ha de existir una función P_x (que es la tracción en el cable; véase el **Apartado 3.2.2**) tal que valga el sistema (3.21):*

$$\begin{cases} P'_x - f_1^c = 0, \\ (P_x y')' - f_2^c = 0. \end{cases}$$

Se tiene, entonces

$$P_x = \frac{A^2}{2B^2}x^2,$$

y

$$-\frac{3A^4}{2B^4}x^2 = \frac{A^2}{B^2}x^2,$$

es decir

$$-3A^2 = 2B^2,$$

que es una ecuación no resoluble.

Antes de dedicarnos a eventuales soluciones, es nuestra intención evidenciar ciertas singularidades del problema directo. Tales “anomalías” se deben, sobre todo, al tipo de ecuación diferencial, esto es, una ecuación de tipo hiperbólico cuyo problema de contorno asociado no está en general bien planteado. Veámoslo con el siguiente

Ejemplo 4.4 *Así como mostrado en la Figura 4.1, fijemos para la membrana la forma de la “silla de montar” de ecuación*

$$z(x, y) = -x^2 + y^2 + a^2;$$

y, para el dominio plano que define el borde rígido, el subconjunto de \mathbb{R}^2

$$R = (-a, a) \times (-b, b) = (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

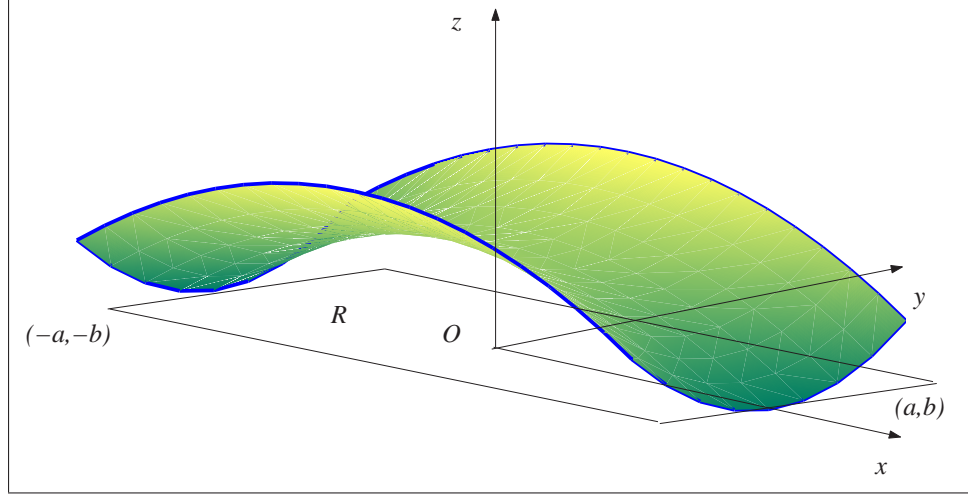


Figura 4.1: Problema directo en el rectángulo R : superficie y borde.

Reconsideremos las ecuaciones de equilibrio del sistema (3.4). Derivemos la primera con respecto a x , la segunda con respecto a y , y restemos término a término:

$$\begin{cases} N_{xx,xx} - N_{yy,yy} = 0 & \text{en } R, \\ N_{xx} = N_{yy} & \text{en } R. \end{cases}$$

Definiendo, simplemente por comodidad de nomenclatura, $\omega(x, y) := N_{xx}(x, y)$, se tiene:

$$\begin{cases} N_{xx} = N_{yy} = D & \text{en } R, \\ \omega_{,xx} - \omega_{,yy} = 0 & \text{en } R. \end{cases}$$

Impongamos, ahora, la condición sobre el borde rígido. Sean \mathbf{n} y \mathbf{f}^r respectivamente el versor exterior a $\partial R = \Gamma = \Gamma^r$ y la fuerza por unidad de longitud aplicada en la misma frontera (para facilitar la lectura evitemos el superíndice r de la fuerza \mathbf{f}^r , esto es, la fuerza de borde es \mathbf{f}). Debido a la simetría del dominio y de la superficie y de acuerdo con la **Conclusión 3.6**, escojamos una distribución para \mathbf{f} que se equilibre en Γ , esto es, igual en valor y dirección y opuesta en sentido, en cada par de puntos simétricos del borde. Se obtienen, así, las siguientes descomposiciones para \mathbf{n} y \mathbf{f} (Figura 4.2):

$$(4.3) \quad \begin{cases} \mathbf{n}_+^v := (1, 0), & \text{normal exterior en } x = \pi, \\ \mathbf{n}_-^v := (-1, 0), & \text{normal exterior en } x = -\pi, \\ \mathbf{n}_+^h := (0, 1), & \text{normal exterior en } y = \frac{\pi}{2}, \\ \mathbf{n}_-^h := (0, -1), & \text{normal exterior en } y = -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

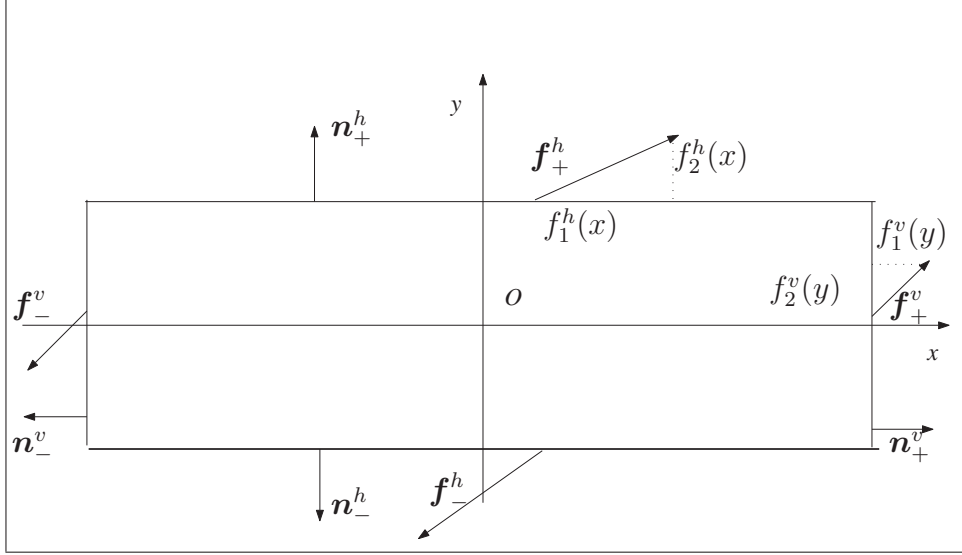


Figura 4.2: Ejemplo problema directo con bordes rígidos.

y

$$(4.4) \quad \begin{cases} \mathbf{f}_+^v := (f_1^v(y), f_2^v(y)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } x = \pi, \\ \mathbf{f}_-^v := (-f_1^v(y), -f_2^v(y)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } x = -\pi, \\ \mathbf{f}_+^h := (f_1^h(x), f_2^h(x)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } y = \frac{\pi}{2}, \\ \mathbf{f}_-^h := (-f_1^h(x), -f_2^h(x)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } y = -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

siendo f_α^h y f_α^v funciones arbitrarias y conocidas. Con estos datos, la condición de borde (3.20) que expresa el equilibrio se escribe como:

$$N_{xx} = f_1^v(y) \quad \text{en } x = \mp\pi \quad \text{y} \quad N_{xy} = f_2^v(y) \quad \text{en } x = \mp\pi,$$

y

$$N_{xy} = f_1^h(x) \quad \text{en } y = \mp\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad N_{yy} = f_2^h(x) \quad \text{en } y = \mp\frac{\pi}{2}.$$

El primer problema que tenemos es que las relaciones escritas son insuficientes para definir en "todo el borde Γ " las condiciones de frontera sobre la incógnita ω , de aquí la imposibilidad de definir correctamente el problema completo de contorno.

De todas formas, obviando esta dificultad y fijando, por ejemplo, $\omega = c$ (c constante) en Γ , tendríamos que resolver

$$(4.5) \quad \begin{cases} \omega_{,xx} - \omega_{,yy} = 0 & \text{en } R, \\ \omega = c & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

La función $\omega(x, y) = c$ resuelve el sistema pero la unicidad no está garantizada ya que la familia de funciones $w_k(x, y) := c + \sin kx \cos ky$, siendo k cualquier número natural, sigue resolviéndolo.

Observemos que el sistema (4.5) define un problema hiperbólico con condición de Dirichlet, esto es, un típico ejemplo de problema en general mal definido en teoría de ecuaciones diferenciales.

Para confirmar aun más la presencia de singularidades en el problema directo, estudiémoslo a través del método de Airy. Siendo z una superficie con curvatura de Gauss negativa, la correspondiente ecuación (3.14) es hiperbólica. Además, las **curvas características** (véase **Definición B.1**) de la ecuación diferencial del problema resuelven la ecuación (B.2), es decir

$$y'(x) = \frac{-z_{,xy} \mp \sqrt{z_{,xy}^2 - z_{,xx}z_{,yy}}}{z_{,yy}}.$$

Esta ecuación equivale a la relación (3.23), esto es, los eventuales cables coinciden con las curvas características de la ecuación. Tenemos así un problema hiperbólico con condiciones de bordes definidas sobre curvas características; en conformidad con la **Conclusión B.2**, tal problema está, en general, mal puesto.

Lo dicho en estos último párrafos equivale a afirmar que, fijada una forma de membrana, puede que exista más de una distribución de esfuerzos que la equilibre o bien, en caso de que los datos se definan sobre características, pueda que no exista ninguna.

Aunque con lo comentado hayamos querido avisar al lector del “*mal comportamiento*” del problema directo, nos parece adecuado e interesante presentar una casuística de casos resolubles y bien definidos. En efecto, aunque el problema de Dirichlet sirve a menudo de ejemplo de problema mal puesto, se dedicó parte de la investigación en estudiar más en detalles algunos problemas de contorno de tipo hiperbólico con el objetivo de encontrar casos interesantes y adaptables al problema directo (véanse las referencias [15], [19], [20] y [21]).

Los casos que estudiaremos en el próximo apartado se definen en bordes totalmente rígidos ya que, como se dijo, en general el problema directo no está bien definido a lo largo de los cables siendo éstos curvas características de la ecuación diferencial correspondiente.

4.2. Casuística del problema directo

Empecemos con un breve resumen acerca de la **ecuación de ondas** y de la correspondiente **fórmula de d’Alembert** que utilizaremos para la resolución de

dos ejemplos de problema directo.

Notas básicas sobre las ecuaciones de las ondas y la fórmula de d'Alembert

Consideremos la ecuación de ondas en la incógnita $u := u(x, t)$, función de la variable espacial $x \in \mathbb{R}$ y de la variable temporal $t \in \mathbb{R}$, dada por

$$(4.6) \quad u_{,tt} = c^2 u_{,xx}, \quad c \text{ constante}^1.$$

La solución general puede ser hallada considerando el cambio de variables

$$\xi := x - ct, \quad \text{y} \quad \eta := x + ct,$$

y aplicando la *regla de la cadena* para las funciones compuestas:

$$\begin{cases} u_{,xx} = u_{,\xi\xi} + 2u_{,\xi\eta} + u_{,\eta\eta}, \\ u_{,tt} = c^2 u_{,\xi\xi} - 2c^2 u_{,\xi\eta} + c^2 u_{,\eta\eta}. \end{cases}$$

A partir de estas relaciones, la ecuación (4.6) se escribe, en las incógnitas ξ y η , como

$$u_{,\xi\eta} = 0,$$

cuya genérica solución es

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

En definitiva, todas las soluciones de la ecuación (4.6) son del tipo

$$(4.7) \quad u(x, t) := \varphi(x - ct) + \psi(x + ct),$$

siendo φ y ψ funciones cualesquiera representantes, respectivamente, una onda que se propaga a velocidad c hacia las x crecientes y una onda que se propaga a velocidad c hacia las x decrecientes.

A partir de estas consideraciones, podemos afirmar que el problema con datos iniciales u_0 y v_0 definido por

$$(4.8) \quad \begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_{,t}(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

tiene una única solución dada por la **fórmula de d'Alembert**

$$(4.9) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds.$$

¹La ecuación (4.6) modeliza las pequeñas vibraciones de una cuerda "infinita" en ausencia de fuerzas exteriores.

Para comprobarlo impongamos a la función (4.7) las condiciones iniciales. Se tiene

$$(4.10) \quad u_0(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

y

$$v_0(x) = -c\varphi'(x) + c\psi'(x),$$

es decir, integrando,

$$(4.11) \quad \int_{x_0}^x v_0(s)ds = -c\varphi(x) + c\psi(x).$$

Resolviendo a la vez las ecuaciones algebraicas (4.10) y (4.11) se concluye

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^x v_0(s)ds, \\ \psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^x v_0(s)ds, \end{cases}$$

es decir

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - ct) + \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds.$$

4.2.1. Ejemplos de problema directo mediante la utilización de la fórmula de d'Alembert

A continuación consideraremos dos ejemplos definidos en un dominio rectangular (borde totalmente rígido) en los que aplicaremos, para su resolución, la fórmula de d'Alembert y el siguiente

Teorema 4.5 *Sea D un dominio convexo y regular de \mathbb{R}^2 . Si $F = F(x, y)$ y $g = g(t)$ son dos funciones reales y regulares de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} respectivamente y tales que $F(x, y) = g(ax + by + c)$ y $F(x, y) = F(-x, y) = g(-ax + by + c)$ (o bien $F(x, y) = F(x, -y) = g(ax - by + c)$), entonces F es constante.*

Demostración

Sean

$$\mathbf{u} := \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} := \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, a),$$

dos versores de \mathbb{R}^2 . Calculemos las derivadas direccionales de F a lo largo de \mathbf{u} y \mathbf{v} . Siendo $F(x, y) = g(ax + by + c)$ y $F(x, y) = F(-x, y) = g(-ax + by + c)$ (o bien $F(x, y) = F(x, -y) = g(ax - by + c)$), se tiene

$$\begin{cases} F_{,\mathbf{u}} = \nabla F \cdot \mathbf{u} = \frac{g'ab - g'ba}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \\ F_{,\mathbf{v}} = \nabla F \cdot \mathbf{v} = \frac{-g'ab + g'ba}{a^2 + b^2} = 0. \end{cases}$$

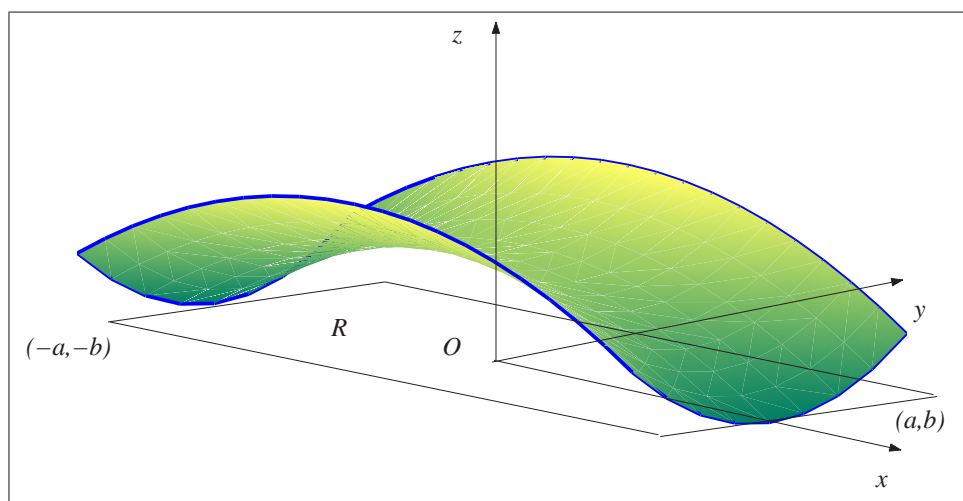


Figura 4.3: Problema en el rectángulo R : superficie y borde.

\mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores linealmente independientes, así que, para cada dirección \mathbf{w} , existen dos constantes λ_1 y λ_2 tales que $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}$; de ello se deduce que

$$F_{,\mathbf{w}} = \lambda_1 F_{,\mathbf{u}} + \lambda_2 F_{,\mathbf{v}} = 0.$$

Finalmente, siendo D convexo sigue que $F = \text{c.te}$ en D .

■

Ejemplo 4.6 Así como mostrado en la Figura 4.3, fijemos para la membrana la forma de la “silla de montar” de ecuación

$$z(x, y) = -x^2 + c^2 y^2 + a^2; \quad c \in \mathbb{R},$$

y, para el dominio plano que define el borde rígido, el subconjunto de \mathbb{R}^2

$$R = (-a, a) \times (-b, b).$$

Operando en las ecuaciones de equilibrio, obtenemos:

$$\begin{cases} N_{yy,yy} - c^2 N_{xx,xx} = 0 & \text{en } R, \\ N_{xx} = c^2 N_{yy} & \text{en } R. \end{cases}$$

Definiendo, simplemente por comodidad de nomenclatura, $\omega(x, y) := N_{yy}(x, y)$, se tiene:

$$\begin{cases} N_{xx} = c^2 N_{yy} = c^2 \omega & \text{en } R, \\ \omega_{,yy} = c^2 \omega_{,xx} & \text{en } R. \end{cases}$$

Impongamos, ahora, la condición sobre el borde rígido. Sean \mathbf{n} y \mathbf{f} (evitando, igual que antes, el superíndice \mathbf{r}) respectivamente el versor exterior a Γ y la fuerza por unidad de longitud aplicada en la misma frontera. Debido a la simetría del dominio y de la superficie γ y de acuerdo con la **Conclusión 3.6**, escojamos una distribución para \mathbf{f} que se equilibre en Γ , esto es, igual en valor y dirección y opuesta en sentido, en cada par de puntos simétricos del borde. Se obtienen, así, las siguientes descomposiciones para \mathbf{n} y \mathbf{f} (Figura 4.2):

$$(4.12) \quad \begin{cases} \mathbf{n}_+^v := (1, 0), & \text{normal exterior en } x = a, \\ \mathbf{n}_-^v := (-1, 0), & \text{normal exterior en } x = -a, \\ \mathbf{n}_+^h := (0, 1), & \text{normal exterior en } y = b, \\ \mathbf{n}_-^h := (0, -1), & \text{normal exterior en } y = -b, \end{cases}$$

y

$$(4.13) \quad \begin{cases} \mathbf{f}_+^v := (f_1^v(y), f_2^v(y)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } x = a, \\ \mathbf{f}_-^v := (-f_1^v(y), -f_2^v(y)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } x = -a, \\ \mathbf{f}_+^h := (f_1^h(x), f_2^h(x)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } y = b, \\ \mathbf{f}_-^h := (-f_1^h(x), -f_2^h(x)), & \text{componentes de } \mathbf{f} \text{ en } y = -b, \end{cases}$$

siendo f_α^h y f_α^v funciones arbitrarias y dadas. Con estos datos, la condición de borde (3.20) que expresa el equilibrio se escribe como:

$$N_{xx} = f_1^v(y) \quad \text{en } x = \mp a \quad y \quad N_{xy} = f_2^v(y) \quad \text{en } x = \mp a,$$

y

$$N_{xy} = f_1^h(x) \quad \text{en } y = \mp b \quad y \quad N_{yy} = f_2^h(x) \quad \text{en } y = \mp b.$$

El problema de equilibrio completo es, entonces

$$(4.14) \quad \begin{cases} \omega_{,yy} = c^2 \omega_{,xx} \quad \text{en } R, \\ \omega(\mp a, y) = \frac{f_1^v(y)}{c^2}, \\ \omega(x, \mp b) = f_2^h(x), \\ N_{xy}(\mp a, y) = f_2^v(y), \\ N_{xy}(x, \mp b) = f_1^h(x). \end{cases}$$

Imponiendo, además, continuidad en las esquinas al esfuerzo N_{xy} , se tiene

$$f_2^v(\mp b) = f_1^h(\mp a).$$

Con el objetivo de utilizar la fórmula (4.9), consideremos este otro problema

$$(4.15) \quad \begin{cases} \omega_{,yy} = c^2 \omega_{,xx} \quad \text{en } R, \\ \omega(x, \mp b) = f_2^h(x), \\ \omega_{,y}(x, \mp b) = \delta(x). \end{cases}$$

Utilizando el cambio de variable $z = y + b$, se obtiene

$$(4.16) \quad \begin{cases} \omega_{,yy}(x, z) = c^2 \omega_{,xx}(x, z) & \text{en } \tilde{R} \equiv (-a, a) \times (0, 2b), \\ \omega(x, 0) = \omega(x, 2b) = f_2^h(x), \\ \omega_{,y}(x, 0) = \omega_{,y}(x, 2b) = \delta(x), \end{cases}$$

cuya única solución (debido a la relación (4.9)) es

$$\omega(x, z) = \frac{1}{2} f_2^h(x - cz) + \frac{1}{2} f_2^h(x + cz) + \frac{1}{2c} \int_{x-cz}^{x+cz} \delta(s) ds,$$

o bien, en términos de x e y ,

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} f_2^h(x - cy - cb) + \frac{1}{2c} f_2^h(x + cy + cb) + \frac{1}{2c} \int_{x-cy-cb}^{x+cy+cb} \delta(s) ds.$$

Con referencia a la **Conclusión 3.6** y al **Teorema 4.5**, necesariamente se cumple que $\omega(x, y) = c \cdot te$, esto es $N_{yy} = c \cdot te$, $N_{xx} = c \cdot te$ y $N_{xy} = 0$.

Escogiendo, por ejemplo, $f_2^h(x) = c_1$ (constante positiva) y $\delta(x) = 0$, la solución en esfuerzos en todo R es,

$$\begin{cases} N_{xx} = c^2 c_1 & \forall (x, y) \in R, \\ N_{yy} = c_1 & \forall (x, y) \in R, \\ N_{xy} = N_{xy} = 0 & \forall (x, y) \in R. \end{cases}$$

Sigamos con la casuística estudiando el mismo problema utilizando, esta vez, la función de Airy (véase la definición en la expresión (3.12)).

Ejemplo 4.7 Sea H la función de Airy definida en el rectángulo $R := (-a, a) \times (-b, b)$ y sea, igual que antes, $z(x, y) := -x^2 + c^2 y^2 + a^2$ ($c \in \mathbb{R}$) la expresión de la superficie: obtenemos

$$(4.17) \quad \begin{cases} H_{,yy}(x, y) = c^2 H_{,xx}(x, y) & \text{en } R, \\ H_{,yy}(\mp a, y) = f_1^v(y), \\ H_{,xy}(\mp a, y) = -f_2^v(y), \\ H_{,xy}(x, \mp b) = -f_1^h(x), \\ H_{,xx}(x, \mp b) = f_2^h(x). \end{cases}$$

Consideremos el siguiente problema reducido:

$$\begin{cases} H_{,yy}(x, y) = c^2 H_{,xx}(x, y) & \text{en } R, \\ H_{,xy}(x, \mp b) = -f_1^h(x), \\ H_{,xx}(x, \mp b) = f_2^h(x). \end{cases}$$

La solución de este problema nos dará una relación directa entre las funciones f_α^h y f_α^v .

A través del cambio de variable $z = y + b$, se logra

$$(4.18) \quad \begin{cases} H_{,zz}(x, z) = c^2 H_{,xx}(x, z) & \text{en } \tilde{R} \equiv (-a, a) \times (0, 2b), \\ H_{,xz}(x, 0) = H_{,xz}(x, 2b) = -f_1^h(x), \\ H_{,xx}(x, 0) = H_{,xx}(x, 2b) = f_2^h(x). \end{cases}$$

Operando en las últimas dos de (4.18), se tienen las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} v_0(x) := H_{,z}(x, 0) = -F_1^h(x) + c_1, & \text{con } F_1^h \text{ tal que } (F_1^h)'(x) = f_1^h(x), \\ u_0(x) := H(x, 0) = \hat{F}_2^h(x) + c_2x + c_3, & \text{con } \hat{F}_2^h \text{ tal que } (\hat{F}_2^h)''(x) = f_2^h(x), \end{cases}$$

con c_i ($i = 1, 2, 3$) constantes arbitrarias.

Utilizando la (4.9) se obtiene la solución

$$H(x, z) = \frac{1}{2}[\hat{F}_2^h(x - cz) + \hat{F}_2^h(x + cz)] + c_1z + c_2x + c_3 \\ - \frac{1}{2c}\hat{F}_1^h(x + cz) + \frac{1}{2c}\hat{F}_1^h(x - cz), \quad \text{con } \hat{F}_1^h \text{ tal que } (\hat{F}_1^h)''(x) = f_1^h(x),$$

o bien, en términos de x e y ,

$$(4.19) \quad H(x, y) = \frac{1}{2}[\hat{F}_2^h(x - cy - cb) + \hat{F}_2^h(x + cy + cb)] + c_1(y + b) + c_2x + c_3 \\ - \frac{1}{2c}\hat{F}_1^h(x + cy + cb) + \frac{1}{2c}\hat{F}_1^h(x - cy - cb).$$

A partir de la función de Airy (4.19), obtenemos los esfuerzos:

$$(4.20) \quad \begin{cases} H_{,yy} = N_{xx} = \frac{c^2}{2}[f_2^h(x - cy - cb) + f_2^h(x + cy + cb)] \\ \quad - \frac{c}{2}[f_1^h(x + cy + cb) - f_1^h(x - cy - cb)], \\ H_{,xx} = N_{yy} = \frac{1}{2}[f_2^h(x - cy - cb) + f_2^h(x + cy + cb)] \\ \quad - \frac{1}{2c}[f_1^h(x + cy + cb) - f_1^h(x - cy - cb)], \\ -H_{,xy} = N_{xy} = \frac{c}{2}[f_2^h(x - cy - cb) - f_2^h(x + cy + cb)] \\ \quad + \frac{1}{2}[f_1^h(x + cy + cb) + f_1^h(x - cy - cb)]. \end{cases}$$

Con referencia a la **Conclusión 3.6** y al **Teorema 4.5**, necesariamente se cumple que $\omega(x, y) = \text{c.te}$, esto es $N_{yy} = \text{c.te}$, $N_{xx} = \text{c.te}$ y $N_{xy} = 0$.

Escogiendo, por ejemplo, $f_2^h(x) = c_1$ (constante positiva) y $f_1^h(x) = 0$, la solución en esfuerzos en todo R es,

$$\begin{cases} N_{xx} = c^2 c_1 & \forall (x, y) \in R, \\ N_{yy} = c_1 & \forall (x, y) \in R, \\ N_{xy} = N_{yx} = 0 & \forall (x, y) \in R. \end{cases}$$

A diferencia de los problemas de Dirichlet en las que las condiciones de borde se basan en definir la función incógnita en todo el contorno, los dos ejemplos anteriores son problemas en que los “datos al borde” se traducen en **condiciones iniciales** o **finales** sobre la función incógnita.

4.2.2. Un caso de resolubilidad concreto

Como se dijo, el problema de Dirichlet sirve de ejemplo de problema mal puesto en teoría de ecuaciones hiperbólicas. Numerosas aplicaciones del problema de Dirichlet en teoría dinámica de los gases sónicos y supersónicos o teoría de láminas con curvatura a signo alterno necesitan definir dominios en los cuales el problema de Dirichlet esté bien definido.

Un resultado positivo a tal propósito es el siguiente (referencia [20]).

Teorema 4.8 (de existencia y unicidad para un problema de Dirichlet). *Considérese la ecuación*

$$(4.21) \quad L(u) := (-y)^m u_{,xx} - u_{,yy} - \lambda^2 (-y)^m u = 0,$$

en el dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\alpha < y < 0\},$$

siendo $\alpha = (1 - 2\beta)^{2\beta-1}$, $2\beta = m/(2 + m)$, m constante positiva y $\lambda \in \mathbb{R}$.

El dominio D es un rectángulo tal que las curvas características correspondientes a la ecuación (4.21)

$$AB_0 : x = \frac{2}{2+m}(-y)^{(2+m)/2}, \quad BA_0 : 1 - x = \frac{2}{2+m}(-y)^{(2+m)/2},$$

pasan por sus vértices $A = (0, 0)$, $A_0 = (1, 0)$, $B = (-\alpha, 0)$ y $B_0 = (1, -\alpha)$. Denotemos con D_1 el triángulo curvilíneo ABC , es decir la parte de D definida por el segmento AB y los arcos de características AC y BC , siendo C el punto de intersección de las dos características AB_0 y BA_0 , y con D_2 , D_3 y D_4 los triángulos curvilíneos BCB_0 , B_0CA_0 y A_0CA , respectivamente (Figura 4.4). Bajo estas condiciones el problema

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \text{en } D, \\ u(x, 0) = \tau(x), \quad u(x, -\alpha) = 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0 & \text{para } -\alpha \leq y \leq 0, \end{cases}$$

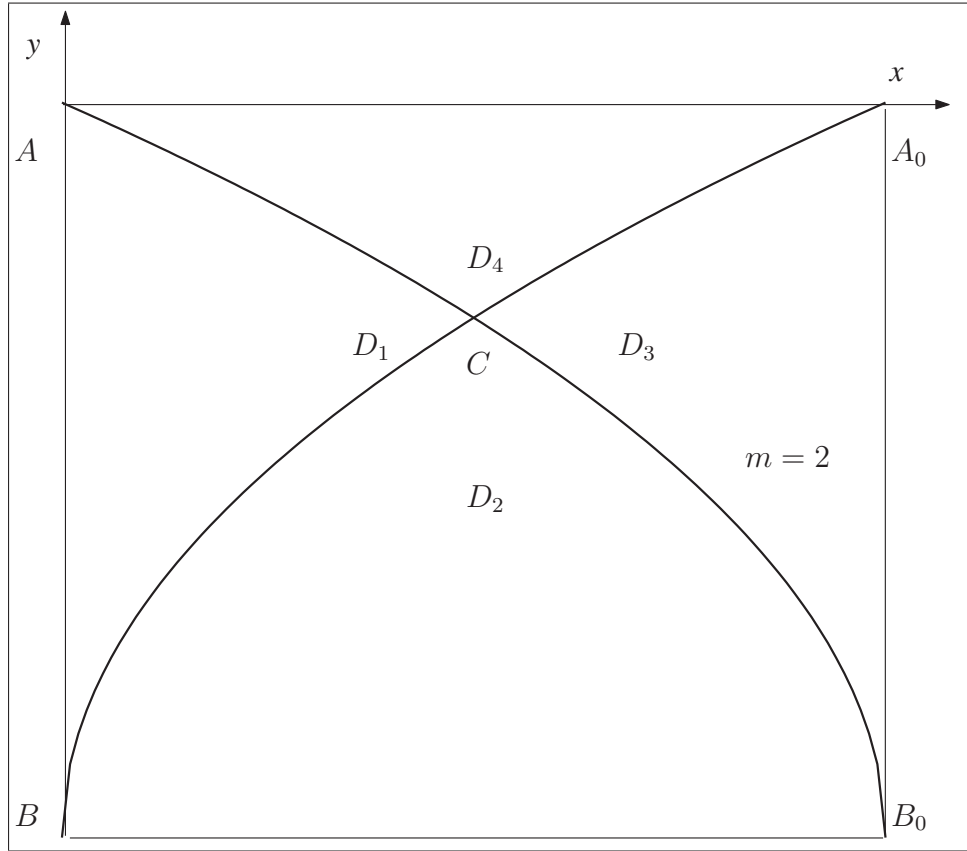


Figura 4.4: Dominio D y triángulos curvilíneos D_1 , D_2 , D_3 y D_4 .

tiene una única solución continua en el dominio cerrado \bar{D} . Además u es diferenciable con continuidad en todo \bar{D} con la posible excepción de las características AB_0 y BA_0 . En particular si $\tau(x) \equiv 0$ la solución que se obtiene es $u \equiv 0$.

Apliquemos este resultado a un caso concreto:

Ejemplo 4.9 Se consideren la superficie

$$z(x, y) := c_1 y^4 - c_2 x^2, \quad c_1 \text{ y } c_2 \text{ números positivos,}$$

y el rectángulo

$$(4.22) \quad R = (-a, a) \times (-b, b).$$

Con el fin de aplicar el resultado del **Teorema 4.8** concluiremos que ha de existir una relación entre las constantes c_1 , c_2 , a y b .

Poniendo $u = N_{yy}$, se tiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$6y^2 \frac{c_1}{c_2} u_{,xx} - u_{,yy} = 0,$$

cuyas curvas características son

$$\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}y^2 = \mp \frac{2}{\sqrt{6}}x + \text{c.te.}$$

Como está indicado en la Figura 4.5, definamos los sectores R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) y consideremos las curvas

$$x = \frac{a}{b^2}y^2 \quad y \quad x = \frac{a}{b^2}y^2 - a,$$

y

$$x = -\frac{a}{b^2}y^2 \quad y \quad x = -\frac{a}{b^2}y^2 + a.$$

Impongamos que tales parábolas (que pasan respectivamente por los puntos (a, b) , $(a, -b)$ y $(0, 0)$ y $(-a, 0)$, $(0, -b)$ y $(0, b)$ y $(-a, -b)$, $(-a, b)$ y $(0, 0)$ y $(a, 0)$, $(0, -b)$ y $(0, b)$) coincidan con las curvas características de la ecuación diferencial; se obtiene la siguiente relación:

$$c_1 = \frac{2a^2}{3b^4}c_2.$$

Considerada la simetría de la superficie y del dominio, la idea es adaptar los

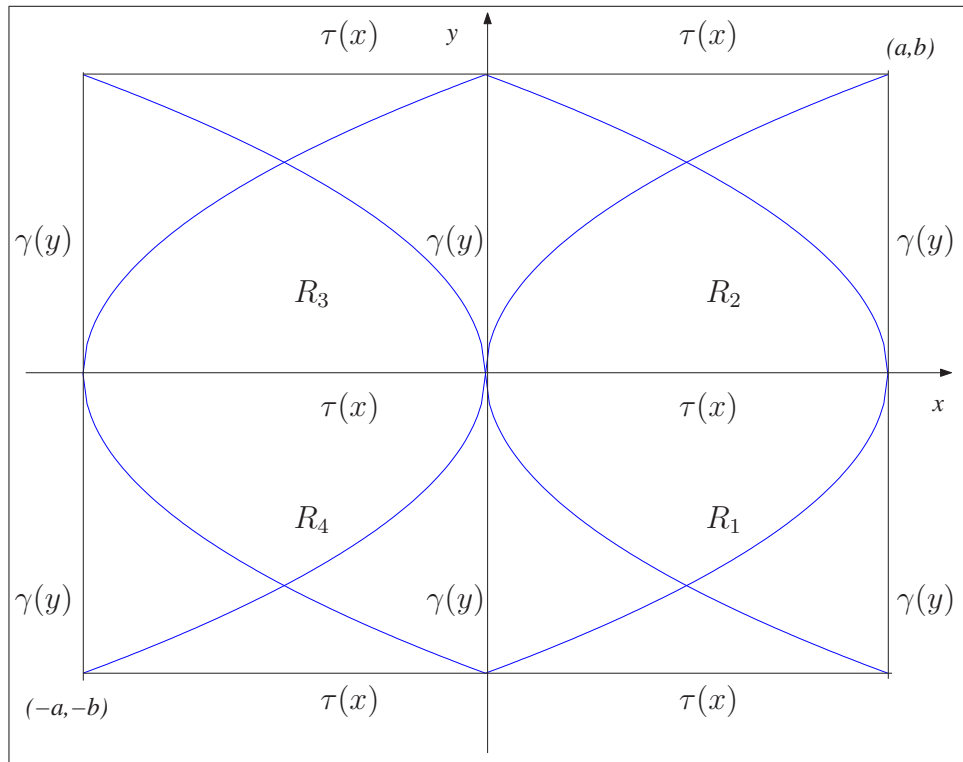


Figura 4.5: Rectángulo R y sectores correspondientes: R_1, R_2, R_3 y R_4 .

resultados del **Teorema 4.8** en cada sector del rectángulo R . Definamos, para dicho propósito, las siguientes condiciones sobre N_{yy} en todo el borde de R y en los ejes:

$$\begin{cases} u(\mp a, y) = u(0, y) = \gamma(y), \\ u(x, \mp b) = u(x, 0) = \tau(x), \end{cases}$$

siendo γ y τ funciones adecuadas y tales que

$$(4.23) \quad \tau(\mp a) = \gamma(\mp b), \quad \tau(0) = \gamma(0), \quad \tau(\mp a) = \gamma(0), \quad \tau(0) = \gamma(\mp b).$$

A través del cambio de variable definido por

$$v(x, y) := u(x, y) - [\gamma(y) + \tau(x) - \tau(\mp a)],$$

la ecuación diferencial que se obtiene y sus correspondientes condiciones de contorno en R son, respectivamente

$$y^2 v_{,xx} - \frac{c_2}{6c_1} v_{,yy} + \tau''(x)y^2 - \gamma''(y) = 0,$$

y

$$v = 0 \quad \text{en } \Gamma = \partial R.$$

Impongamos, ahora,

$$\tau''(x)y^2 = \gamma''(y),$$

y

$$c_2 = 6c_1.$$

Se tiene

$$\tau(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \text{y} \quad \gamma(y) = A\frac{y^4}{12} + Dy + E, \quad A, B, C, D \text{ y } E \in \mathbb{R},$$

y

$$b^2 = 2a.$$

En definitiva, el problema correspondiente restringido al sector R_1 , es

$$\begin{cases} y^2 v_{,xx} - v_{,yy} = 0 & \text{en } R_1, \\ v = 0 & \text{en } \partial R_1, \end{cases}$$

cuya única solución, debido al **Teorema 4.8**, es $v = 0$, es decir, en términos de u ,

$$u(x, y) := \gamma(y) + \tau(x) - \tau(a).$$

Las condiciones (4.23) nos proporcionan las siguientes expresiones para τ y γ

$$\tau(x) = \gamma(y) = k,$$

siendo k una constante positiva arbitraria; la única solución en R_1 es, entonces,

$$N_{yy}(x, y) = u(x, y) = k.$$

Consecuentemente

$$N_{xx}(x, y) = y^2 u(x, y) = y^2 k,$$

y, debido a su imparidad en las dos variables (**Conclusión 3.6**),

$$N_{xy}(x, y) = 0.$$

Considerando el equilibrio en el borde, se obtiene

$$\begin{cases} N_{xx}(\mp a, y) = f_1^v(y) = y^2 k, \\ N_{xy}(\mp a, y) = f_2^v(y) = 0, \\ N_{xy}(x, \mp b) = f_1^h(x) = 0, \\ N_{yy}(x, \mp b) = f_2^h(x) = k. \end{cases}$$

El problema queda así únicamente determinado a partir del conocimiento de la función $\gamma(y)$, o bien $\tau(x) = f_2^h(x) = k$.

Actuando de la misma forma en los demás sectores se obtiene la única solución en todo R

$$N_{yy}(x, y) = u(x, y) = k,$$

$$N_{xx}(x, y) = y^2 k,$$

y

$$N_{xy}(x, y) = 0.$$

Capítulo 5

Problema dual

Como ya se dijo, en el problema dual se fija la distribución de esfuerzos y se busca la forma de membrana que equilibre el sistema. Siendo, así, la superficie z la incógnita del problema, se han de fijar, para la misma, las adecuadas condiciones de contorno.

5.1. Formulación matemática y propiedades

Como para el problema directo, analicemos este problema en el caso general, esto es, suponiendo que el borde esté formado, en parte, por cables.

Más precisamente, y como ya se comentó anteriormente (véase la **Conclusión 3.6**), consideraremos un dominio

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\},$$

con frontera

$$\partial D \equiv \Gamma = \Gamma^r \cup \Gamma^c,$$

siendo

$$\Gamma^r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = \mp a \wedge -b \leq y \leq b\},$$

y

$$\Gamma^c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge y = \mp y(x)\},$$

con a y b números reales e $y = y(x)$ función real, par, regular, convexa y definida en $[-a, a]$ tal que

$$\mp y(-a) = \mp y(a) = \mp b.$$

Problema 5.1 (Problema dual). *Datos:*

- 1) **Esfuerzos de membrana** N_{xx} , N_{xy} y N_{yy} , tales que verifiquen el equilibrio plano y sean de tracción, estos es, tales que

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 N_{\alpha\beta,\beta} = 0, \quad \forall \alpha = 1, 2, \\ N_{xx} > 0 \text{ (o bien } N_{yy} > 0) \quad \text{y} \quad N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2 > 0. \end{cases}$$

- 2) **curvas** $y = \mp y(x)$ **candidateadas a definir el borde compuesto por cables** (Γ^c), obtenidas resolviendo el sistema (3.21);
- 3) **curvas de ecuación** $x = \mp a$ que definen el borde rígido (Γ^r);
- 4) **borde completo** $\partial D \equiv \Gamma = \Gamma^r \cup \Gamma^c$;
- 5) **valor de la membrana en el bordo rígido** Γ^r , definido asignando una función regular g en Γ^r .

Calcular

- 1) **superficie** $z = z(x, y)$ definida en D y **función** $h = h(x)$ definida en Γ^c tales que

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = g & \text{en } \Gamma^r, \\ z = h & \text{en } \Gamma^c, \\ z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0 & \text{en } \Gamma^c. \end{cases}$$

Comentario 5.2 Siendo el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ definido positivo, la ecuación diferencial del sistema (5.1) es elíptica y en forma de divergencia; véase ecuación (B.5)). Tenemos, así, un problema elíptico en dos incógnitas (la función z y la función h) con condiciones de contorno no estándar sobre z . De hecho, si por un lado las ecuaciones $z = g$ en Γ^r y $z = h$ en Γ^c se conocen en la literatura como **condiciones de Dirichlet** (correspondientes a típicos **problemas de Dirichlet**), por otro la condición (“de cable”) $z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0$ en Γ^c es inusual en estos tipos de problemas.

Además, si se fijara h , el sistema (5.1) sería un problema elíptico en el que la incógnita z debería verificar a la vez dos condiciones sobre Γ^c , esto es, un sistema sobredeterminado y, en general, no resoluble (véase el **Ejemplo 5.3**).

A tal propósito cabe comentar que la literatura relacionada con los problemas elípticos sobredeterminados¹ no presentó analogías, por lo menos estrictas, con el problema dual.

¹Véanse, por ejemplo, las referencias [8], [12] y [16].

Ejemplo 5.3 *Considérese el dominio $R = [-5, 5] \times [-2, 2]$, los esfuerzos $N_{xx} = 10$, $N_{xy} = 0$ y $N_{yy} = 4$ y las funciones $h(x) = -x^2 + 22$ y $g(y) = 5y^2 - 23$ definidas respectivamente en los segmentos $[-5, 5]$ y $[-2, 2]$.*

$z = 2 - x^2 + 5y^2$ es la única función que resuelve las tres ecuaciones del sistema (5.1) pero no la última. De hecho, siendo $y = y(x) = \mp 2$ ($-5 \leq x \leq 5$) se tiene

$$0 \neq -2 = -2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 10 \cdot 0^2 = z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2.$$

Con el siguiente resultado básico expresaremos la condición de contorno

$$z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0 \quad \text{en } \Gamma^c,$$

en una forma más adecuada para la formulación que desarrollaremos, forma en la que no aparecerán las derivadas segundas de la función z .

Teorema 5.4 *Sean $h := h(x)$, $y := y(x)$ y $z := z(x, y)$ funciones reales y regulares de \mathbb{R} y de \mathbb{R}^2 , con $y''(x) \neq 0$. Pongamos:*

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} z(x, y(x)) = h(x), \\ z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_2) : \begin{cases} z(x, y(x)) = h(x), \\ z_{,y}(x, y(x)) = \frac{h''}{y''}. \end{cases}$$

Entonces (\mathcal{P}_1) y (\mathcal{P}_2) son equivalentes.

Demostración

$(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{P}_2)$

Por derivación:

$$z_{,x} + y'z_{,y} = h' \Rightarrow z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 + z_{,y}y'' = h''.$$

Siendo $z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0$ sigue $z_{,y} = h''/y''$.

$(\mathcal{P}_2) \Rightarrow (\mathcal{P}_1)$

Siendo

$$z(x, y(x)) = h(x),$$

se tiene, por derivación,

$$h''(x) = z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 + z_{,y}y''.$$

Al ser $h'' = z_{,y}y''$ concluimos

$$z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0.$$

■

Aplicando, entonces, el resultado del **Teorema 5.4** a las últimas dos expresiones del sistema (5.1), podemos sustituir el mismo por el siguiente

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = g & \text{en } \Gamma^r, \\ z = h & \text{en } \Gamma^c, \\ h'' = z_{,y} y'' & \text{en } \Gamma^c, \end{cases}$$

que será nuestro punto de partida para el estudio del problema dual en el caso general.

Tal como se presenta, el sistema (5.2) no es un usual problema de contorno de tipo elíptico. Antes de dedicarnos a su resolución, procediendo a su construcción, argumentemos la unicidad de la misma.

En la siguiente demostración se utilizará explícitamente la condición $y''(x) > 0$ que caracteriza, justamente, la propiedad geométrica de un cable, esto es, una curva con una concavidad bien definida.

Unicidad del Problema dual 5.1

Demostración

Reducción al absurdo. Sean $z_1 = z_1(x, y)$ y $z_2 = z_2(x, y)$ dos funciones de D que

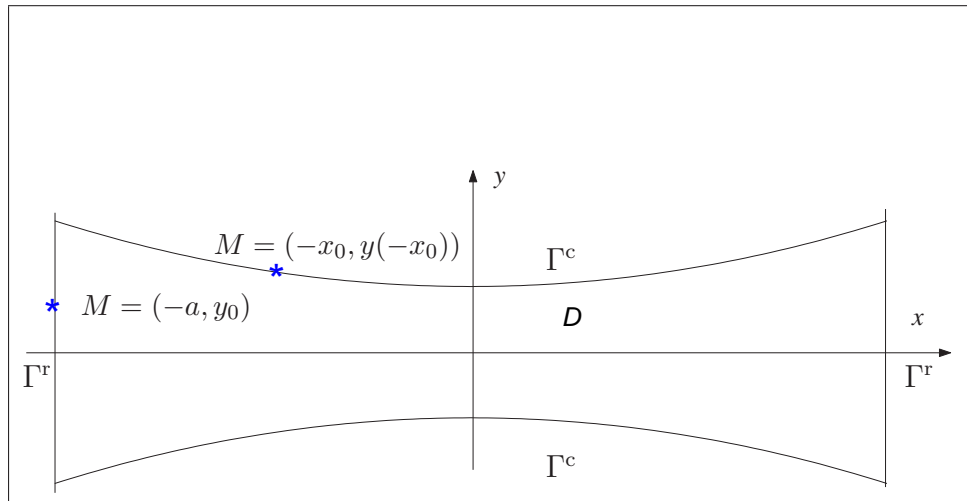


Figura 5.1: Dominio de referencia D .

resuelvan el sistema (5.2). Poniendo

$$z(x, y) := z_1(x, y) - z_2(x, y) \quad \text{y} \quad h(x) := z_1(x, y(x)) - z_2(x, y(x)),$$

se tiene que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = 0 & \text{en } \Gamma^r, \\ z = h & \text{en } \Gamma^c, \\ z_{,y}y'' = h'' & \text{en } \Gamma^c. \end{cases}$$

Debido al **Principio del Máximo Débil B.12**, la z tiene un máximo en ∂D ; sea éste el punto $M = (x_0, y_0)$ (véase Figura 5.1).

- Si $M \in \Gamma^r$ (ecuación $x = \mp a$), entonces dicho máximo vale 0. Esto significa que la función h es no positiva, esto es, $h \leq 0$. Si $h = 0$, entonces sigue la tesis siendo necesariamente $z = 0$.

En cambio, si $h < 0$, entonces existe, al menos, un punto $P = (x_0, y(x_0))$ perteneciente a Γ^c en el que h alcanza un mínimo; $h'(x_0) = 0$ y $h''(x_0) \geq 0$.

Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y', 1)$ es el versor normal exterior; debido al **Principio del Máximo Fuerte B.15**, se tiene

$$(5.3) \quad n_1 z_{,x} + n_2 z_{,y} = z_{,n}(x_0, y(x_0)) < 0.$$

Además, siendo $h'(x_0) = 0$, se cumple

$$(5.4) \quad h'(x_0) = -n_2 z_{,x} + n_1 z_{,y} = 0,$$

Confrontando las relaciones (5.3) y (5.4), se tiene, siendo $n_2 = 1$

$$(n_1^2 + n_2^2)z_{,y} = \|\mathbf{n}\|^2 z_{,y} = z_{,y} < 0.$$

Por la convexidad de y , se tiene $y''(x_0) > 0$, así que

$$0 > z_{,y}(x_0, y(x_0))y''(x_0) = h''(x_0) \geq 0,$$

es decir una contradicción.

- Si $M \in \Gamma^c$ (ecuación $y = \mp y(x)$), entonces $h'(x_0) = 0$ y $h''(x_0) \leq 0$. Debido al **Principio del Máximo Fuerte B.15**, se tiene, siendo $n_2 = 1$

$$(5.5) \quad n_1 z_{,x} + n_2 z_{,y} = z_{,n}(x_0, y(x_0)) > 0.$$

Además, siendo $h'(x_0) = 0$, se cumple

$$(5.6) \quad h'(x_0) = -n_2 z_{,x} + n_1 z_{,y} = 0,$$

Confrontando las relaciones (5.5) y (5.6), se tiene

$$(n_1^2 + n_2^2)z_{,y} = \|\mathbf{n}\|^2 z_{,y} = z_{,y} > 0.$$

Por la convexidad de y , se tiene $y''(x_0) > 0$, así que

$$0 < z_{,y}(x_0, y(x_0))y''(x_0) = h''(x_0) \leq 0,$$

es decir una contradicción. ■

5.1.1. Problema dual: método de resolución

En este apartado nos dedicaremos, utilizando el *Método de los Elementos Finitos* (**Apéndice C**, referencias [18] y [40]), a construir la solución del problema dual completo, esto es, a resolver el sistema (5.2). Dicho método de resolución es adaptable a la situación en la que el dominio no tenga cables.

A partir de la formulación (5.2), consideremos por separado el sistema reducido

$$(5.7) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = g & \text{en } \Gamma^r, \\ z = h & \text{en } \Gamma^c, \end{cases}$$

y la ecuación

$$(5.8) \quad h'' = z_{,y} y'' \quad \text{en } \Gamma^c.$$

Siguiendo el mismo razonamiento del **Apartado C.2**, fijemos una malla para D , indiquemos con n_t el número total de nodos en D , con n_r el número de nodos en Γ^r y con n_c el número de nodos en Γ^c . Poniendo

$$z \simeq \sum_{j=1}^{n_t} z_j N_j \quad \text{y} \quad h \simeq \sum_{j=1}^{n_c} h_j N_j,$$

y sustituyendo en el sistema (5.7) se logra el siguiente sistema lineal:

$$(5.9) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{A}_c^T \\ \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_c^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\lambda}_r \\ \boldsymbol{\lambda}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix},$$

siendo $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_t)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_r)$ y $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_c)$ los vectores de los valores nodales de z en D , g en Γ^r y h en Γ^c , \mathbf{K} la *matriz de rigidez*, \mathbf{A}_r y \mathbf{A}_c las matrices correspondientes a los vectores nodales \mathbf{h} de Γ^c y \mathbf{g} de Γ^r , y $\boldsymbol{\lambda}_r$ y $\boldsymbol{\lambda}_c$ los *multiplicadores de Lagrange*².

Sea \mathbf{z} la solución del sistema (5.9): se tiene la descomposición

$$(5.10) \quad \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{h} + \mathbf{G}\mathbf{g},$$

con $\mathbf{H} \in M_{n_t \times n_c}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{G} \in M_{n_t \times n_r}(\mathbb{R})$.

²El método utilizado es conocido como *Método de los multiplicadores de Lagrange*.

Por lo que concierne la ecuación (5.8), definamos el **vector residual** n_c -dimensional \mathbf{R} de componentes

$$(\mathbf{R})_i = R_i(h) := \int_{\Gamma^c} (z_{,y}y'' - h'')N_i d\Gamma^c, \quad i = 1, \dots, n_c,$$

e impongamos que sea el vector nulo:

$$(5.11) \quad R_i(h) = \int_{\Gamma^c} (z_{,y}y'' - h'')N_i d\Gamma^c = 0, \quad i = 1, \dots, n_c.$$

Poniendo, igual que antes,

$$z \simeq \sum_{j=1}^{n_t} z_j N_j \quad \text{y} \quad h \simeq \sum_{j=1}^{n_c} h_j N_j,$$

sustituyendo en la relación (5.11) e integrando por partes, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n_t} z_j \int_{\Gamma^c} y'' N_{j,y} N_i d\Gamma^c + \sum_{j=1}^{n_c} h_j \int_{\Gamma^c} N'_j N'_i d\Gamma^c = 0, \quad i = 1, \dots, n_c.$$

Definiendo, finalmente,

$$\begin{aligned} M_{ij} &:= \int_{\Gamma^c} y'' N_{j,y} N_i d\Gamma^c \\ &= \int_{-a}^a y''(x) N_{j,y}(x, y(x)) N_i(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W_{ij} &:= \int_{\Gamma^c} N'_j N'_i d\Gamma^c \\ &= \int_{-a}^a N_j(x, y(x))' N_i(x, y(x))' \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \end{aligned}$$

logramos

$$(5.12) \quad \mathbf{Mz} + \mathbf{Wh} = \mathbf{0},$$

con $\mathbf{M} \in M_{n_c, n_t}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{W} \in M_{n_c}(\mathbb{R})$.

Confrontando los dos sistema (5.12) y (5.10) se obtiene la solución \mathbf{h}

$$(5.13) \quad \mathbf{h} = -(\mathbf{MH} + \mathbf{W})^{-1} \mathbf{MGg},$$

vector nodal correspondiente a la forma de la superficie z a lo largo de Γ^c (o, más bien, a la forma del cable) y, consecuentemente, la solución \mathbf{z}

$$(5.14) \quad \mathbf{z} = \mathbf{Hh} + \mathbf{Gg},$$

vector nodal correspondiente a la forma de la superficie z en todo el dominio D .

Lo que se acaba de comentar acerca de este problema es la otra cara de la moneda del problema directo, ya que si bien éste está en general mal definido, el problema dual tiene solución única. Esto significa que, fijados una cierta distribución de esfuerzos y un borde para la membrana, existe una sola superficie que equilibre el sistema.

5.1.2. El problema dual restringido: método de resolución

El problema expresado en el sistema (5.2) se reduce a un típico problema elíptico de contorno con condiciones de Dirichlet (véase el **Problema B.5**) en el caso en que el borde esté totalmente compuesto por elementos rígidos. En efecto, siendo $\Gamma^c \equiv \emptyset$, el problema correspondiente consiste en calcular $z = z(x, y)$ tal que

$$(5.15) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = g & \text{en } \Gamma^r \equiv \Gamma \equiv \partial D, \end{cases}$$

siendo g el valor de z en todo el borde Γ .

Más en particular, se tiene:

Problema 5.5 *Sea a un número real positivo, $y = y(x)$ una función real, par y regular de $I = [-a, a]$ y D el dominio definido por*

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\}.$$

*Si $h := h(x)$ y $g := g(y)$ son dos funciones reales, pares y regulares definidas, respectivamente, en $I = [-a, a]$ y $J = [-b, b]$, siendo $b = y(\mp a)$, y tales que verifiquen las siguientes **condiciones de compatibilidad***

$$h(\mp a) = g(|b|),$$

hallar una función z tal que verifique

$$(5.16) \quad \begin{cases} -\sum_{\alpha, \beta=1}^2 (N_{\alpha\beta} z_{,\beta})_{,\alpha} = 0 & \text{en } D, \\ z = g & \text{en } x = \mp a, \\ z = h & \text{en } y = \mp y(x). \end{cases}$$

Debido al **Teorema B.8**, este problema tiene una única solución³, expresada analíticamente por

$$(5.17) \quad z = \min_{w \in K} \mathcal{F}(w) = \min_{w \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_D \sum_{\alpha, \beta=1}^2 N_{\alpha\beta} z_{,\beta} z_{,\alpha} dD \right\},$$

siendo

$$K := \{w \in H^1(D) \text{ tal que } w(\mp a, y) = g(y) \text{ y } w(x, \mp y(x)) = h(x)\}.$$

Además, a partir de la **Observación B.13**, podemos concluir que el **Problema 5.5** está *bien puesto*, entendiendo por *problema bien puesto* aquél para que pueda garantizarse la *existencia*, la *unicidad* y la *estabilidad* de la solución.

Aunque la fórmula (5.17) proporcione la solución “analítica” del sistema (5.16), la minimización explícita del funcional $\mathcal{F}(w)$, no siempre es inmediata⁴; ha de recurrirse, en general, a métodos numéricos.

Si por un lado la ecuación matricial (C.4) del **Apartado C.2** da la fórmula explícita para la resolución numérica del sistema (5.16), por el otro, debido a la unicidad del problema, puede lograrse la misma expresión utilizando el método argumentado en el **Apartado 5.1.1**. De hecho, siendo $\Gamma^c \equiv \emptyset$, se ha $\mathbf{A}_r = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ y \mathbf{h} vector nodal, esta vez conocido a priori, que, igual que \mathbf{g} , contribuye a definir la condición de Dirichlet en $\Gamma = \Gamma^r$. En estas circunstancias, entonces, los sistemas (5.12) y (5.13) se simplifican en

$$(5.18) \quad \mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{g},$$

con \mathbf{G} matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}_r^T \\ \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Observación 5.6 *La desigualdad (B.14) garantiza la estabilidad de la solución numérica expresada por el sistema (5.18): dicha solución no sólo no varía sensiblemente al cambiar de malla sino que se acerca suficientemente a la solución analítica aunque la malla que se considere no sea muy fina.*

³La regularidad de dicha solución se conoce a partir del **Teorema B.10** y de las *Inmersiones de Sobolev* (B.13); escogiendo los datos “regulares” (por ejemplo $N_{\alpha\beta}$, y , g y h continuos) es posible garantizar la regularidad de la solución (z dos veces diferenciable con continuidad).

⁴Más adelante consideraremos unos casos concretos en el que es posible minimizar el funcional “a mano”: **Caso 1** y **Caso 2** del **Ejemplo 5.7**.

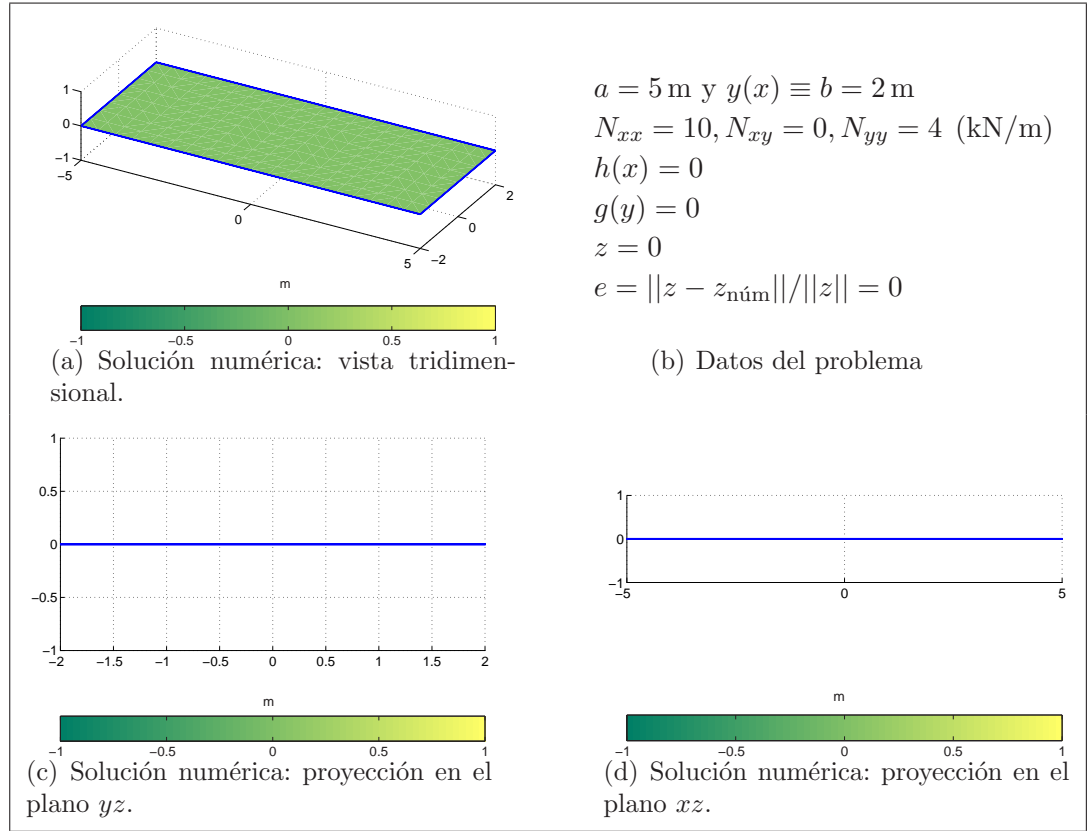


Figura 5.2: Resultado gráfico de la solución numérica $z_{\text{núm}}$ calculada por el M.E.F. Caso: $g(y) = h(x) = \text{constante}=0$.

5.1.3. Ejemplos del problema dual restringido

En este apartado consideraremos unos casos concretos de problema dual restringido; una vez fijados los esfuerzos, hallaremos la solución en función de la “forma” del dominio D y de las condiciones de frontera, esto es, del valor de la z a lo largo de $\partial D = \Gamma$.

Consideraremos tres ejemplos. En el primero, **Ejemplo 5.7**, fijaremos como dominio plano un rectángulo y consideraremos, por separado, cuatro diferentes condiciones de frontera sobre la superficie: podremos, de esta forma, solucionar el problema de forma analítica en el caso en que los bordes en el espacio sean o constantes (caso de superficie plana) o tales que exista una relación adecuada entre ellos y los esfuerzos.

En los dos casos restantes resolveremos el problema de forma numérica fijando, en primer lugar, bordes espaciales con concavidades opuestas y, luego, con concavidades concordes.

En el segundo y en el tercer ejemplo, **Ejemplo 5.8** y **Ejemplo 5.9**, fijaremos, respectivamente, un dominio plano cuya frontera esté compuesta en parte por bordes que tienen la concavidad de los cables⁵ y un dominio plano cuya frontera esté compuesta en parte por arcos⁶ y consideraremos, por separado, tres diferentes condiciones de frontera sobre la superficie: solucionaremos el problema de forma numérica fijando, en primer lugar, bordes espaciales constantes, luego con concavidades opuestas, y, finalmente, con concavidades concordes.

El objetivo de los ejemplos es, una vez más, verificar la eficacia del método numérico para la resolución del problema de Dirichlet (confrontando, cuando será posible, la solución numérica con la analítica) y comprobar lo comentado en la **Observación 3.4**, esto es, que la superficie obtenida tenga curvatura de Gauss negativa (o al menos “no positiva”) una vez que se fijen los esfuerzos de tracción adecuados.

Ejemplo 5.7 Consideremos el siguiente dominio rectangular:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -b \leq y \leq b\};$$

es posible, en este caso, definir la variable φ “trasladando” z en el rectángulo $R := (-a, a) \times (-b, b)$ de la siguiente manera:

$$\varphi(x, y) := z(x, y) - [h(x) + g(y) - g(|b|)].$$

Se tiene, así, el nuevo problema homogéneo

$$\begin{cases} -\sum_{\alpha, \beta=1}^2 (N_{\alpha\beta}\varphi_{,\beta})_{,\alpha} = N_{xx}h''(x) + N_{yy}g''(y) & \text{en } R, \\ \varphi = 0 & \text{en } |y| = b, \\ \varphi = 0 & \text{en } |x| = a, \end{cases}$$

cuya solución es, debido al **Teorema B.8**,

$$\varphi = \min_{\psi \in H_0^1(D)} \mathcal{J}[\psi],$$

siendo

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}[\psi] := & \frac{1}{2} \int_D (N_{xx}\psi_{,x}^2 + 2N_{xy}\psi_{,x}\psi_{,y} + N_{yy}\psi_{,y}^2) dD \\ & - \int_D \psi (N_{xx}h''(x) + N_{yy}g''(y)) dD. \end{aligned}$$

Profundicemos, ante todo, los dos casos en los que es posible hallar la solución de forma analítica y explícita.

⁵Esto es, hacia el exterior de la línea de paso, el eje x .

⁶Esto es, hacia el interior de la línea de paso, el eje x .

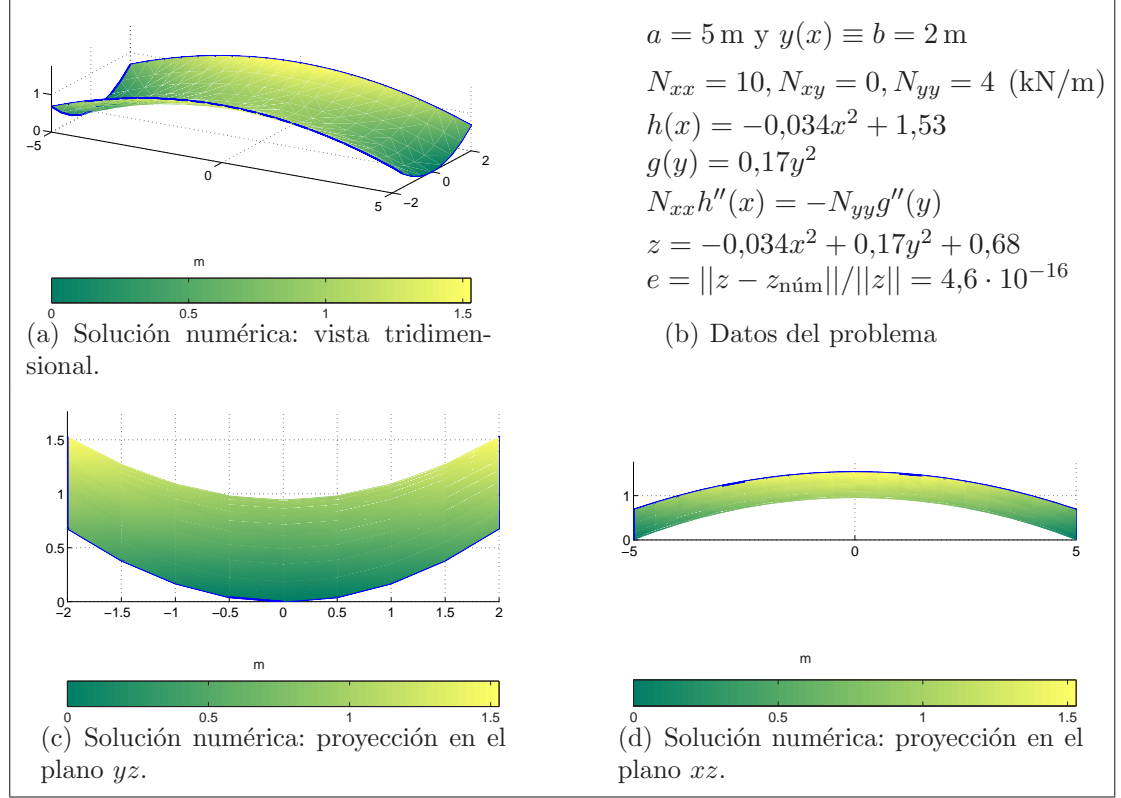


Figura 5.3: Resultado gráfico de la solución numérica $z_{\text{núm}}$ calculada por el M.E.F. Caso: $N_{xx}h''(x) = -N_{yy}g''(y)$.

Caso 1 Cualquiera sea el tensor de esfuerzos σ , si $h''(x) = g''(y) = 0$, es decir, debido a las condiciones de compatibilidad, $g = h = c$, constante, se tiene $\varphi = c$. Siendo $\varphi \in H_0^1(D)$, concluimos $\varphi = 0$, es decir $z(x, y) = c$; la curvatura de Gauss correspondiente es, entonces,

$$K = \frac{z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2}{(1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2)^2} = 0 \text{ en } D.$$

Caso 2 Si se escogen $N_{\alpha\beta}$, $h = h(x)$ y $g = g(y)$ tales que $N_{xx}h''(x) = -N_{yy}g''(y)$, se tiene $\varphi = c$. Siendo $\varphi \in H_0^1(D)$, concluimos $\varphi = 0$, es decir $z(x, y) = h(x) + g(y) - h(\mp a)$; la curvatura de Gauss correspondiente es, entonces

$$K = \frac{z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2}{(1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2)^2} = \frac{h''(x)g''(y)}{(1 + h'(x)^2 + g'(y)^2)^2}.$$

Siendo N_{xx} y N_{yy} positivos, debido a la relación

$$N_{xx}h''(x) = -N_{yy}g''(y),$$

se tiene que cumplir que $h''(x)g''(y) < 0$ (ó 0 en un punto (x_0, y_0) del plano), esto es, $K < 0$ en D . (ó 0 en una dirección).

A la vez estos mismos casos se han resuelto también numéricamente, fijando unos valores concretos de los datos. En particular, con referencia a las Figuras 5.2 y 5.3, es posible calcular el error relativo (en la norma euclídea) entre la solución explícita z y la numérica $z_{\text{núm}}$:

$$e := \frac{\|z - z_{\text{núm}}\|}{\|z\|}.$$

Si bien en estos dos casos particulares haya sido posible calcular explícitamente la superficie y su curvatura de Gauss, en general se ha de recurrir a métodos numéricos.

Caso 3 En la Figura 5.4 se representa la solución en el caso de bordes espaciales de concavidades discordes.

Caso 4 En la Figura 5.5 se representa la solución en el caso de bordes espaciales de concavidades concordes.

Ejemplo 5.8 Consideremos el siguiente dominio

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\},$$

siendo $y = y(x)$ tal que $y''(x) > 0$, esto es, una curva cuya concavidad coincide con la de un cable. En las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se puede apreciar, independientemente del valor de los datos de frontera $g = g(y)$ y $h = h(x)$, cómo la solución numérica del problema sea una superficie con curvatura de Gauss no positiva.

Ejemplo 5.9 Consideremos el siguiente dominio

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\},$$

siendo $y = y(x)$ tal que $y''(x) < 0$, esto es, una curva cuya concavidad es como la de un arco. En las Figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se puede apreciar, independientemente del valor de los datos de frontera $g = g(y)$ y $h = h(x)$, cómo la solución numérica del problema sea una superficie con curvatura de Gauss no positiva.

Los casos de los **Ejemplos 5.7, 5.8 y 5.9** muestran, de manera práctica, cómo el problema dual definido en dominios compuestos totalmente por *bordes rígidos* sea siempre resoluble independientemente de la forma de los mismos elementos que componen el contorno.

Por lo contrario, como se sabe, la presencia de *cables* limita las “libertades” a la hora de escoger el dominio de referencia: de hecho, fijados los esfuerzos $N_{\alpha\beta}$, si, por una parte, una cualquier curva $y = y(x)$ en el plano horizontal puede funcionar como borde rígido, por la otra, la expresión $y = y(x)$ de un cable ha *necesariamente* de verificar el sistema (3.18), siendo \mathbf{f} el vector dado por el sistema (3.21).

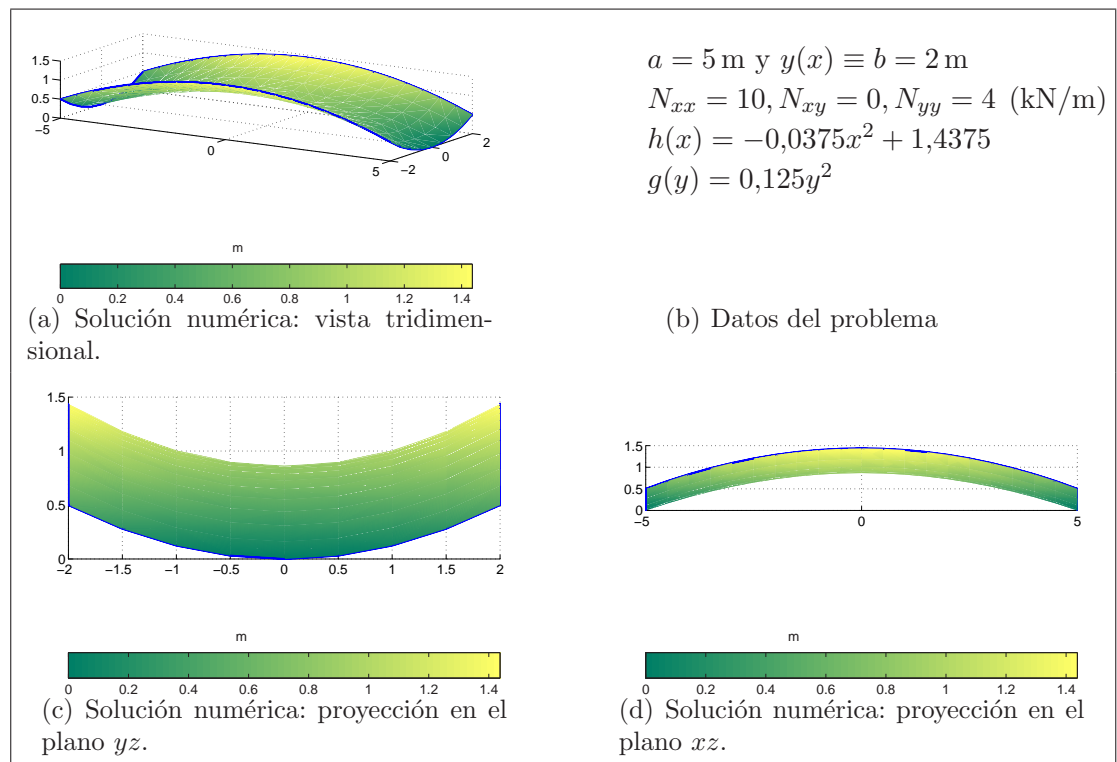


Figura 5.4: Resultado gráfico de la solución numérica $z_{\text{núm}}$ calculada por el M.E.F. Caso: $h(x) \sim -x^2$ y $g(y) \sim y^2$.

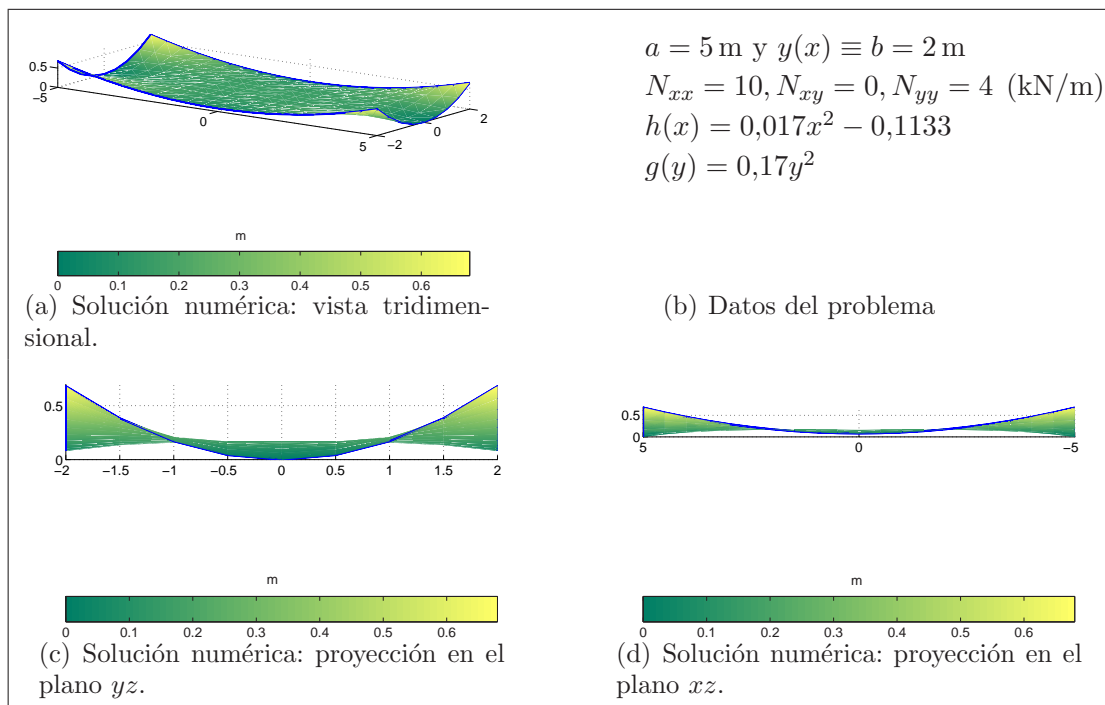


Figura 5.5: Resultado gráfico de la solución numérica z_{num} calculada por el M.E.F.
 Caso: $h(x) \sim x^2$ y $g(y) \sim y^2$.

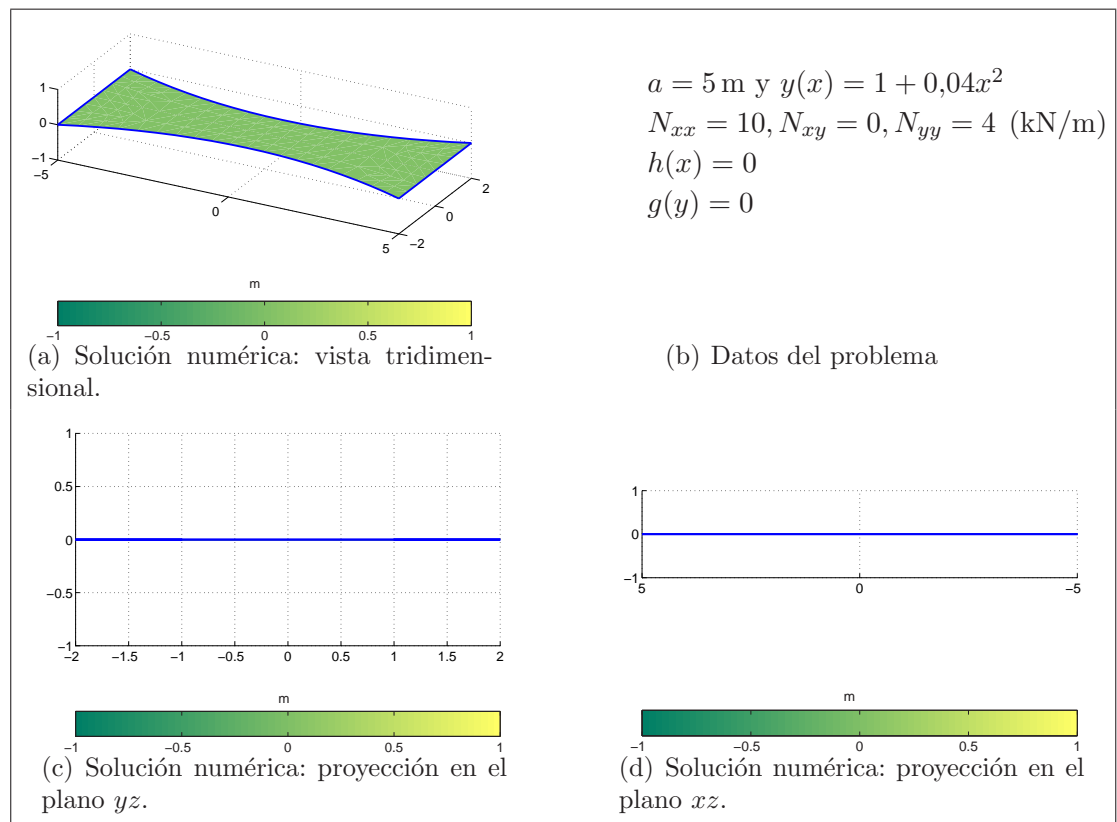


Figura 5.6: Resultado gráfico de la solución numérica calculada por el M.E.F. Caso: $g(y) = h(x) = \text{constante}=0$.

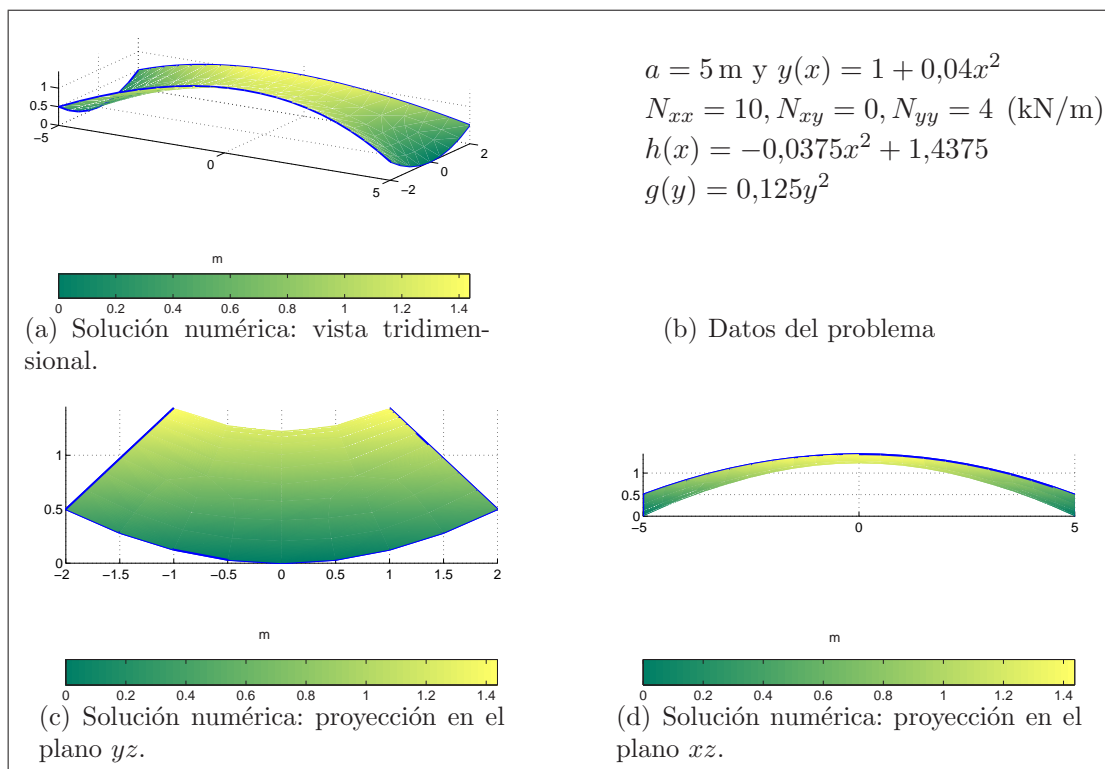


Figura 5.7: Resultado gráfico de la solución numérica calculada por el M.E.F.
 Caso: $h(x) \sim -x^2$ y $g(y) \sim y^2$.

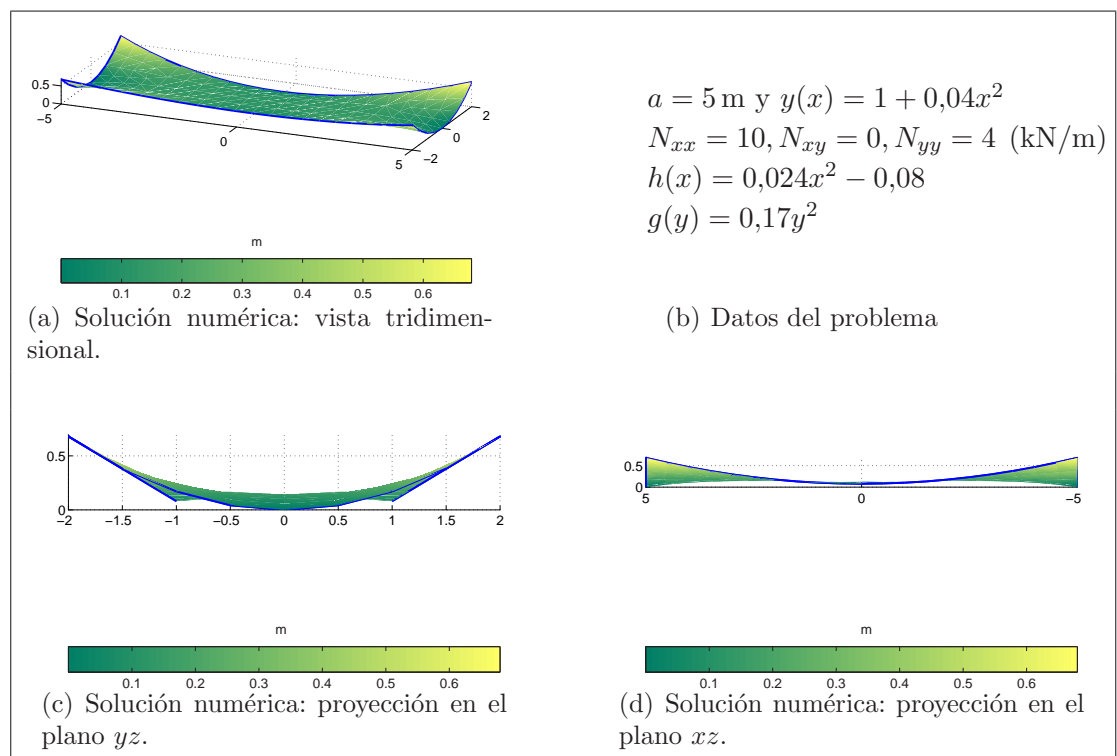


Figura 5.8: Resultado gráfico de la solución numérica calculada por el M.E.F. Caso: $h(x) \sim x^2$ y $g(y) \sim y^2$.

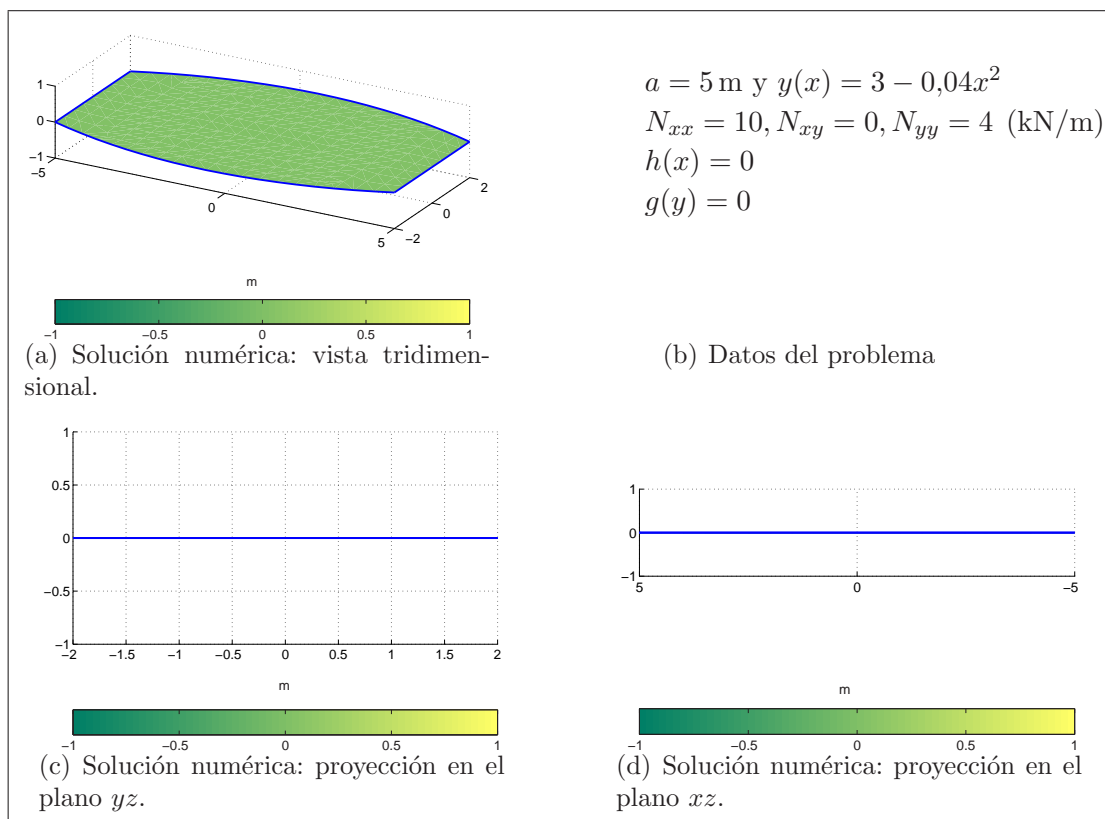


Figura 5.9: Resultado gráfico de la solución numérica calculada por el M.E.F. Caso: $g(y) = h(x) = \text{constante}=0$.

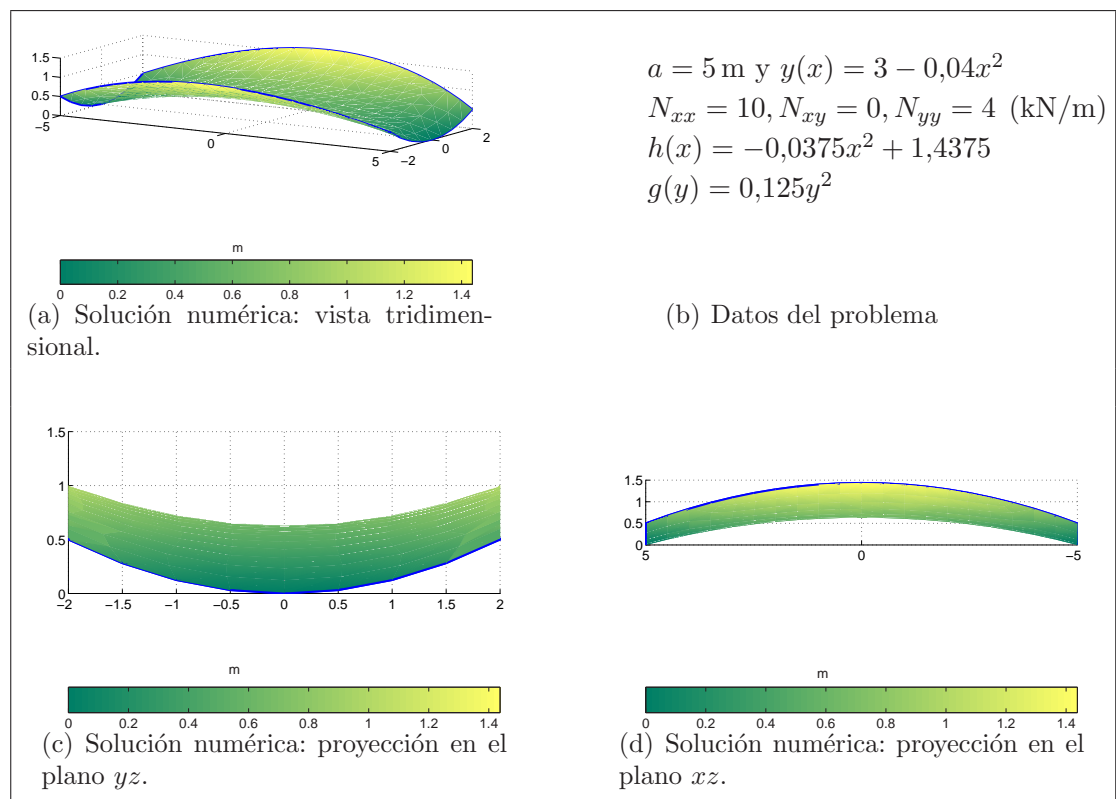


Figura 5.10: Resultado gráfico de la solución numérica calculada por el M.E.F. Caso: $h(x) \sim -x^2$ y $g(y) \sim y^2$.

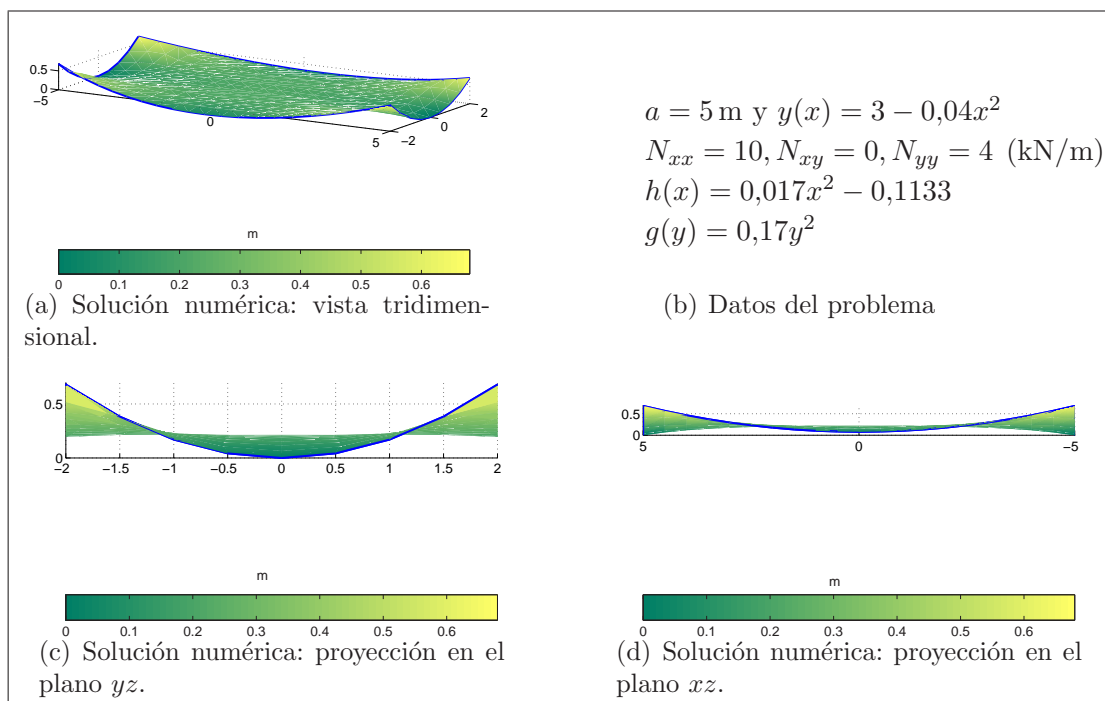


Figura 5.11: Resultado gráfico de la solución numérica calculada por el M.E.F.
 Caso: $h(x) \sim x^2$ y $g(y) \sim y^2$.

5.1.4. Ejemplo del problema dual general

En el **Apartado 5.1.1** se mostró cómo resolver el **Problema dual 5.1** en presencia de cables de borde, esto es cómo calcular numéricamente el cable h y la superficie z : nos referimos a las ecuaciones (5.13) y (5.14).

A continuación analizamos el problema y calculamos sus resultados en un caso real, el prototipo de pasarela de Callús (referencias [28] y [29]). En realidad, se trata de un caso algo distinto, porque aquí se parte de unos esfuerzos constantes y , por tanto, como se verá, de cables de planta elíptica; mientras que en Callús, al tener que ajustar los esfuerzos a una forma dada de membrana y a unos cables con planta parabólica, los mismos no eran exactamente constantes.

Sea

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -a \leq x \leq a \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\},$$

el dominio de partida y fijemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} a = 5 \text{ m,} \\ N_{xx} = 10 \text{ kN/m,} \\ N_{xy} = 0 \text{ kN/m,} \\ N_{yy} = 4 \text{ kN/m,} \\ g(y) = \frac{17}{800}y^2 \left(11 - \frac{1}{6}y^2\right) \text{ (} g \text{ e } y \text{ en metros) forma de } z \text{ en } x = \mp a. \end{cases}$$

Para que $y = y(x)$ sea la proyección de un cable para la membrana, es necesario que la misma resuelva el sistema (3.18) (siendo \mathbf{f} el vector dado por el sistema (3.21)), es decir

$$\begin{cases} P'_x = -10y', \\ (P_x y')' = 4. \end{cases}$$

Integrando se tiene

$$(c_1 - 10y)dy = (c_2 + 4x)dx, \quad (c_1 \text{ y } c_2 \text{ constantes arbitrarias}),$$

es decir

$$c_1 y - 5y^2 = c_2 x + 2x^2 + c_3 \quad (c_1, c_2 \text{ y } c_3 \text{ constantes arbitrarias}).$$

Para hallar las c_i ($i = 1, 2, 3$), fijemos las siguientes propiedades de y :

$$y(\mp 5) = 2 \quad y(0) = 1.$$

Se obtiene la elipse “positiva”, centrada en el punto $\left(0, \frac{13}{2}\right)$ y de ecuación

$$\varepsilon_+ : \frac{8}{605}x^2 + \frac{4}{121}\left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = 1.$$

Por simetría, se obtiene la elipse “negativa” de ecuación

$$\varepsilon_- : \frac{8}{605}x^2 + \frac{4}{121}\left(y + \frac{13}{2}\right)^2 = 1.$$

Escogiendo las “ramas adecuadas” de ε_+ y ε_- (Figura 5.12) podemos finalmente

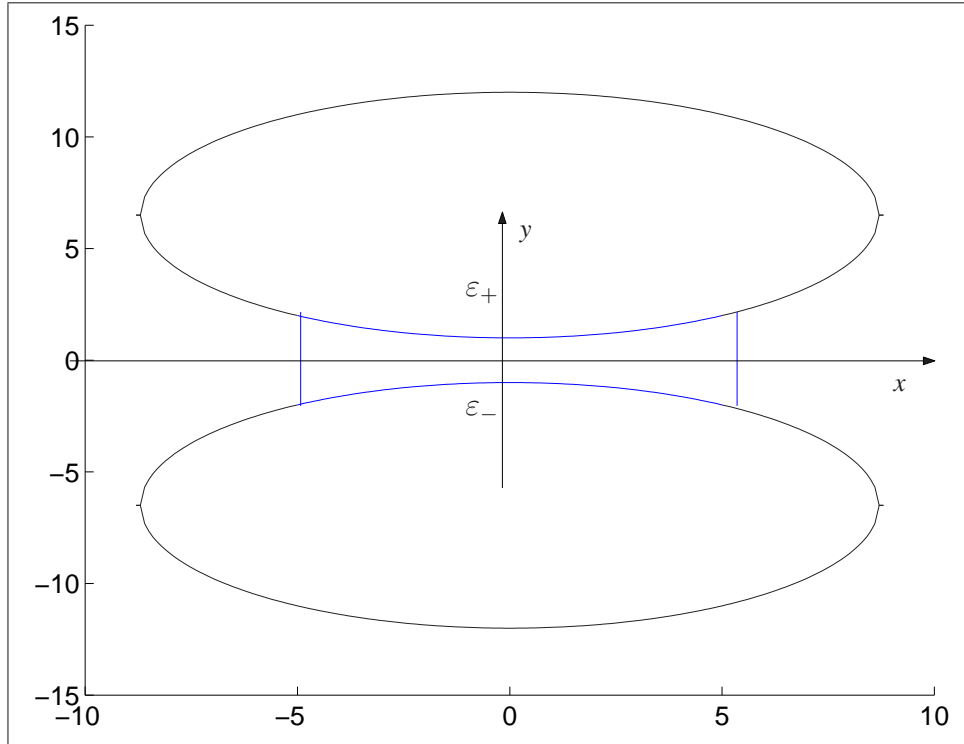


Figura 5.12: Curvas planas (elipses) adecuadas a trabajar como cables.

definir el siguiente dominio:

$$(5.20) \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -5 \leq x \leq 5 \wedge -y(x) \leq y \leq y(x)\},$$

siendo $y(x) := \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{2}{5}x^2}$ (en la Figura 5.13 se representa gráficamente el dominio D).

Nos queda por resolver, entonces, el problema siguiente:

$$\begin{cases} 10z_{,xx} + 4z_{,yy} = 0 & \text{en } D, \\ z = \frac{17}{800}y^2\left(11 - \frac{1}{6}y^2\right) & \text{en } x = \mp 5, \\ z = h & \text{en } y = \mp\left(\frac{13}{2} - \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{2}{5}x^2}\right), \\ z_{,y}y'' = h'' & \text{en } y = \mp\left(\frac{13}{2} - \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{2}{5}x^2}\right). \end{cases}$$

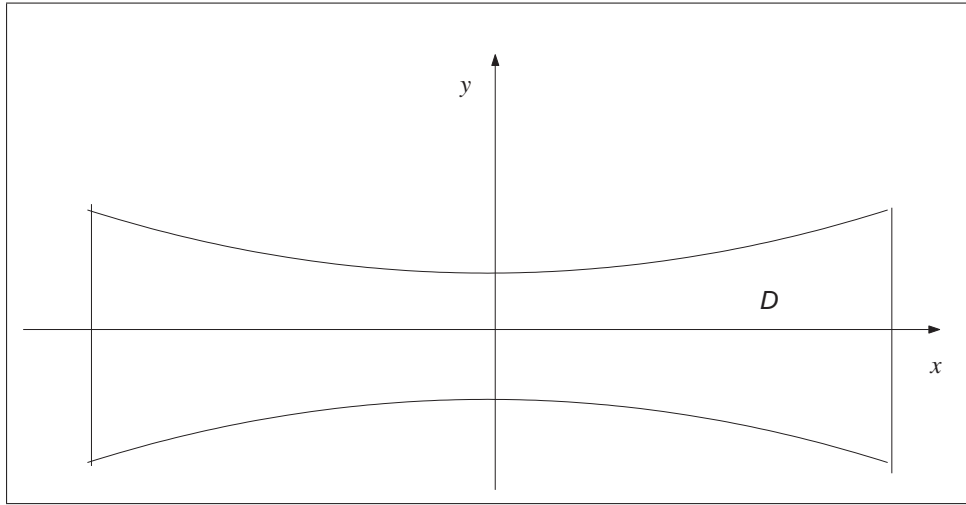


Figura 5.13: Representación gráfica del dominio D definido por la expresión (5.20).

Los resultados numéricos obtenidos⁷ (expresados en metros), correspondientes a la forma del cable y a la forma de la membrana, se aprecian, respectivamente, en las Figuras 5.14 y 5.15.

Estos resultados son semejantes a los de la pasarela de Callús, aunque cuantitativamente existen diferencias. No obstante, hay que recordar que se trata de casos algo distintos y que, como se dijo en el **Capítulo 2**, la solución adoptada en Callús no constituye propiamente una referencia para comparar resultados, puesto que es aproximada.

Finalmente, por lo que concierne la componente P_x de la tracción del cable, a partir de la relación $P'_x = -10y'$, se obtiene

$$P_x = -10y + P_x^0, \quad (P_x^0 \text{ constante}).$$

Fijando P_x^0 tal que $\tilde{P}(0) = P_x(0) = 55 \text{ kN}$, se concluye

$$P_x = 10\sqrt{\frac{121}{4} - \frac{2}{5}x^2},$$

cuya gráfica se representa en la Figura 5.16.

Es interesante subrayar aquí algo que tiene que ver con el proceso constructivo. Dada la ley descendente hacia los extremos que se obtiene para la componente P_x y, por tanto, para la propia tracción P del cable, para poder reproducirla sería

⁷Estos resultados derivan de la ejecución de un programa en MATLAB que refleja el método numérico del **Apartado 5.1.1**.

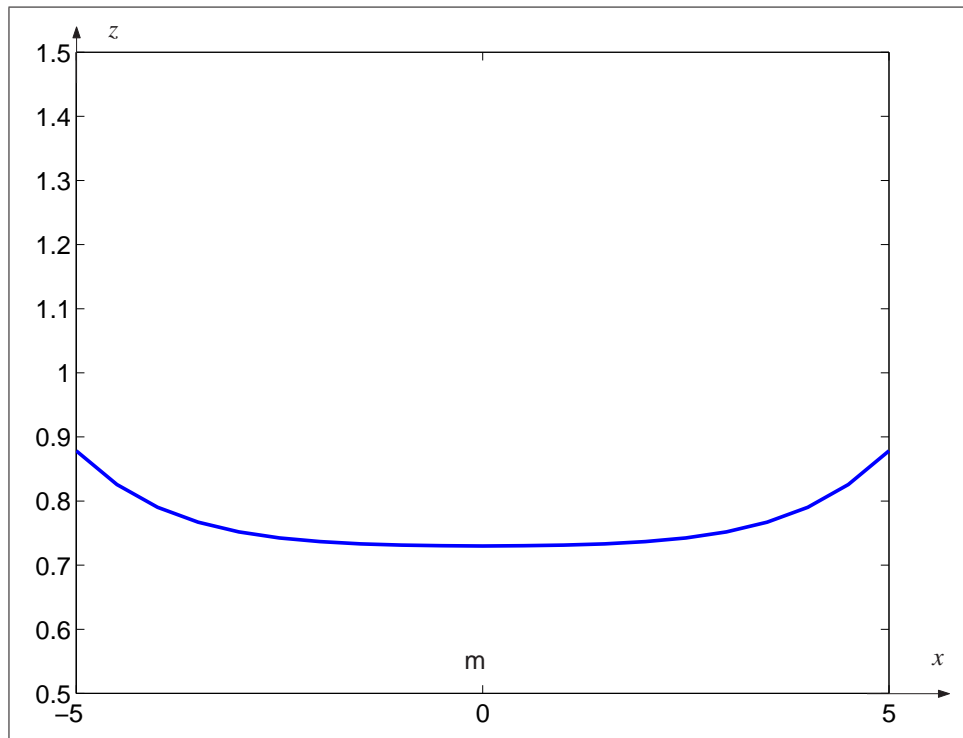


Figura 5.14: Resultado gráfico de la solución numérica $h = h(x)$: alzado del cable.

necesaria una determinada secuencia de pretensado: primero tesando los cables de borde y después tesando longitudinalmente la membrana (como justamente se hizo en Callús; véase la referencia [29]).

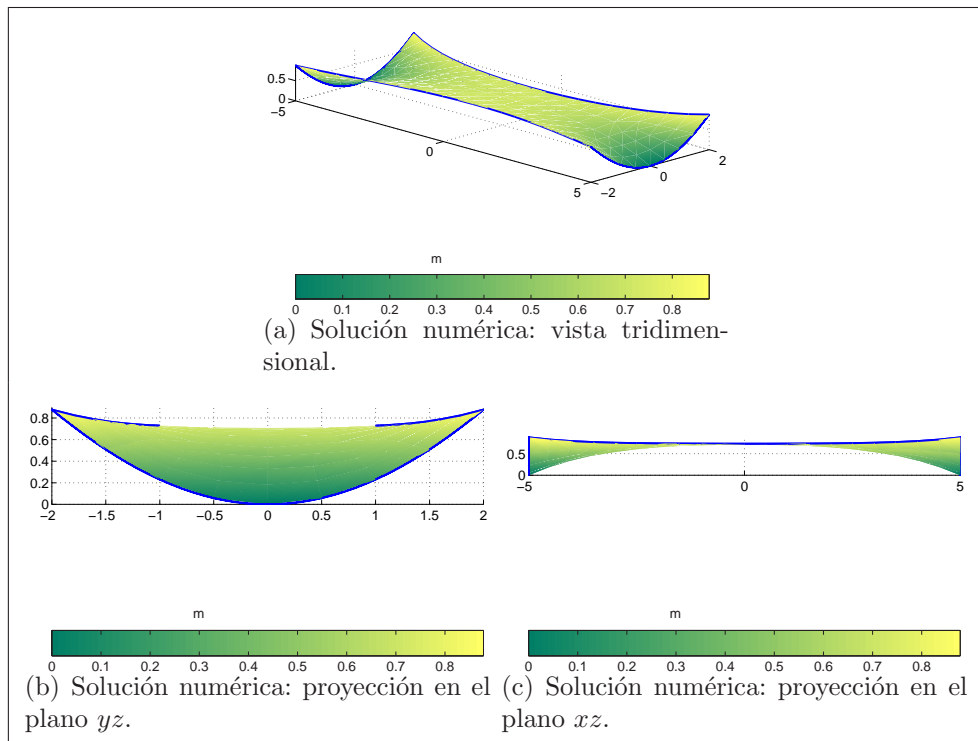


Figura 5.15: Resultado gráfico de la solución numérica de la superficie $z = z(x, y)$.

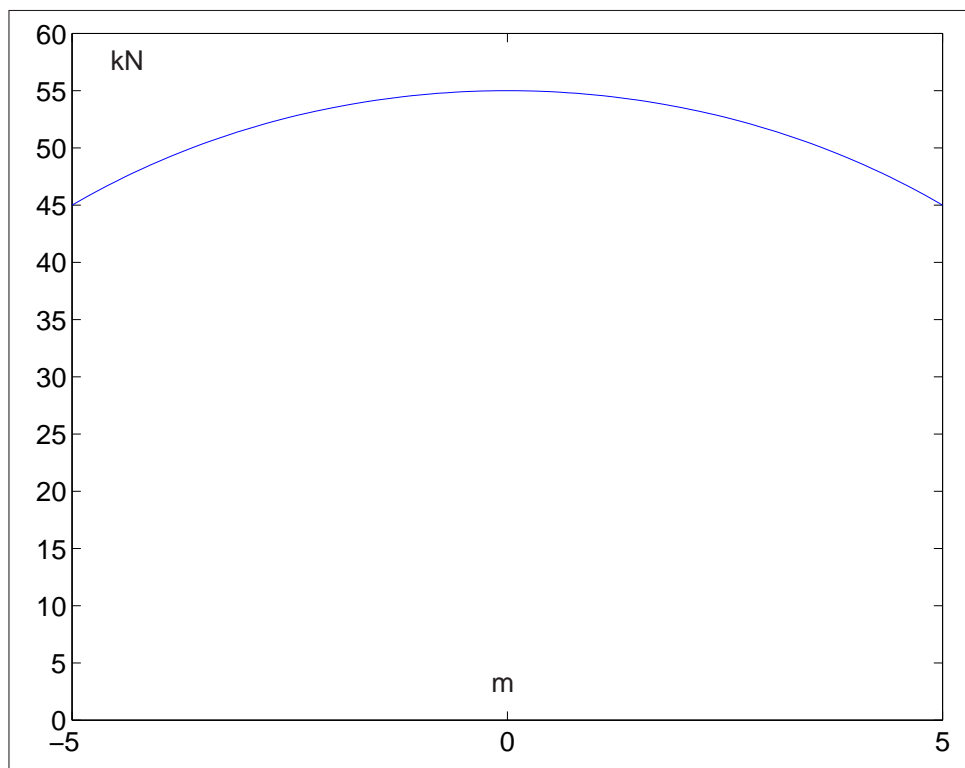


Figura 5.16: Resultado gráfico de la solución analítica de la componente P_x .

Capítulo 6

Verificaciones

6.1. Correspondencia de resultados entre el problema directo y el dual (en ausencia de cables)

En el **Apartado 4.2** hemos considerado una casuística del problema directo en ausencia de cables de borde; en particular nos hemos interesado al caso en que el dominio fuera un rectángulo y la superficie fuera del tipo $z(x, y) = z_1(x) + z_2(y)$.

En los **Ejemplos 4.6, 4.7 y 4.9** se comprobó cómo pueda hallarse una única solución una vez que se fije la forma de membrana y ciertas condiciones de borde para los esfuerzos. Queremos comprobar los resultados de dichos ejemplos a través del método de resolución comentado en el **Apartado 5.1.1**.

Comprobación del **Ejemplo 4.7**

En el **Ejemplo 4.7** se verificó cómo a la superficie de ecuación

$$z(x, y) = -x^2 + c^2y^2, \quad \text{con } (x, y) \in R = (-a, a) \times (-b, b),$$

corresponda la única distribución de esfuerzos

$$\begin{cases} N_{xx} = c_1c^2, \\ N_{xy} = 0, \\ N_{yy} = c_1. \end{cases}$$

En particular escogiendo

$$z(x, y) = \frac{1}{20}(-x^2 + 4y^2 + 25), \quad \text{con } (x, y) \in R = (-5, 5) \times (-2, 2),$$

se logra la solución en esfuerzos

$$\begin{cases} N_{xx} = 4, \\ N_{xy} = 0, \\ N_{yy} = 1. \end{cases}$$

Al revés si se fijan los esfuerzos anteriores, el rectángulo $(-5, 5) \times (-2, 2)$ y las condiciones de fronteras siguientes

$$\begin{cases} h(x) = z(x, \mp 2) = \frac{1}{20}(-x^2 + 41), \\ g(y) = z(\mp 5, y) = \frac{1}{5}y^2, \end{cases}$$

se obtiene, a través del método numérico utilizado para resolver el problema dual (véase **Apartado 5.1.1**), una solución aproximada que indicamos con $z_{\text{núm}}$. En estas condiciones el error relativo entre la solución numérica y la analítica es el siguiente

$$e = \frac{\|z - z_{\text{núm}}\|}{\|z\|} = 5,5 \cdot 10^{-16}.$$

En la Figura 6.1 puede comprobarse cómo la gráfica de la solución analítica z (subfigura (a)) y la gráfica de la solución numérica $z_{\text{núm}}$ (subfigura (b)) coincidan.

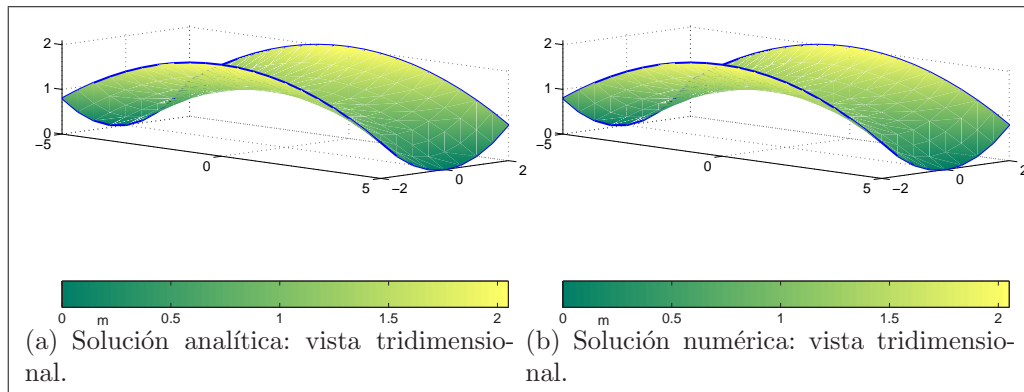


Figura 6.1: Comparación gráfica de los resultados obtenidos.

Comprobación del **Ejemplo 4.9**

En el **Ejemplo 4.9** se verificó cómo a la superficie de ecuación

$$z(x, y) = c_1 y^4 - c_2 x^2, \quad \text{con } (x, y) \in R = (-a, a) \times (-b, b),$$

(siendo $b^2 = 2a$ y $c_1 = \frac{2a^2}{3b^4}c_2$), corresponda la única distribución de esfuerzos

$$\begin{cases} N_{xx} = ky^2, \\ N_{xy} = 0, \\ N_{yy} = k. \end{cases}$$

En particular escogiendo

$$z(x, y) = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{6}y^4 - x^2 + 25 \right), \quad \text{con } (x, y) \in R = (-5, 5) \times (-\sqrt{10}, \sqrt{10}),$$

se logra la única solución en esfuerzos

$$\begin{cases} N_{xx} = y^2, \\ N_{xy} = 0, \\ N_{yy} = 1. \end{cases}$$

Al revés si se fijan los esfuerzos anteriores, el rectángulo $(-5, 5) \times (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ y las condiciones de fronteras siguientes

$$\begin{cases} h(x) = z(x, \mp\sqrt{10}) = \frac{1}{20} \left(-x^2 + \frac{250}{6} \right), \\ g(y) = z(\mp 5, y) = \frac{1}{120}y^4, \end{cases}$$

se obtiene, a través del método numérico utilizado para resolver el problema dual véase Apartado 5.1.1), una solución numérica que indicamos con $z_{\text{núm}}$. En estas condiciones el error relativo entre la solución numérica y la analítica es el siguiente

$$e = \frac{\|z - z_{\text{núm}}\|}{\|z\|} = 3,7 \cdot 10^{-8}.$$

En la Figura 6.2 puede comprobarse cómo la gráfica de la solución analítica z (subfigura (a)) y la gráfica de la solución numérica $z_{\text{núm}}$ (subfigura (b)) coincidan.

6.2. Análisis de los planteamientos discreto y continuo (en ausencia de cables)

Nos referiremos al *planteamiento (o enfoque) discreto* cada vez que resolveremos un problema de búsqueda de forma utilizando el Método (“discreto”) de la Densidad de Fuerzas (véase el Apartado 2.3.3). En cambio, nos referiremos al *planteamiento (o enfoque) continuo* cada vez que resolveremos un problema de búsqueda de forma utilizando el sistema (“continuo”) (5.15) y resolviéndolo con el

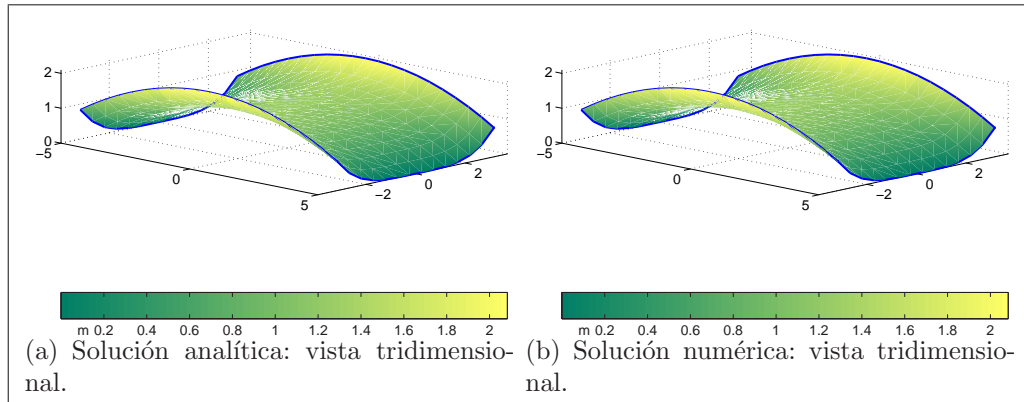


Figura 6.2: Comparación gráfica de los resultados obtenidos.

Método de los Elementos Finitos (véase el **Apartado 5.1.2**).

El Método de la Densidad de Fuerzas se basa en estudiar el equilibrio de una membrana aproximándola a una red de cables, esto es considerándola como un conjunto de barras o, en general, como un conjunto de elementos unidimensional que trabajan sólo a tracción. En el **Ejemplo 2.4** se comprobó que el resultado de este método depende, en general, del mallado. A parte este inconveniente, la limitación más importante es que el planteamiento discreto no permite definir los esfuerzos de la membrana *a priori*. De hecho, reconsiderando la relación (2.4)

$$t_{ij} = q_{ij}l_{ij},$$

que proporciona el valor de la tracción en el tramo ij , se concluye que las mismas tracciones dependen de las longitudes entre los nodos ij , es decir de la *forma final* de la estructura.

Por otro lado el planteamiento continuo analiza la membrana por lo que verdaderamente representa: un continuo bidimensional. Esto permite (problema dual), a diferencia de la red de cables, fijar *a priori* la distribución de esfuerzos de pretensado de la membrana en todo punto de la misma.

En este apartado queremos discutir el comportamiento de los dos enfoques, dedicándole particular importancia a aquellos casos en los que tenga sentido comparar los resultados. Para esto, seguiremos el siguiente esquema.

i *Estudio de un problema de borde rígido a través del planteamiento discreto* (resolución del sistema “discreto” (2.9)).

ii *Definición puntual de los esfuerzos N_{xx} , N_{yy} y N_{xy} a partir de la forma obtenida en el punto anterior.*

iii *Ajuste al continuo de los esfuerzos N_{xx} , N_{yy} y N_{xy} por medio de una aproximación polinomial de los esfuerzos puntuales anteriores.*

iv *Estudio de un problema de borde rígido a través del planteamiento continuo utilizando las mismas condiciones de frontera y los esfuerzos obtenidos en el punto anterior* (resolución numérica del problema dual con borde rígido, esto es del sistema “continuo” (5.15)).

El punto más sutil de este proceso es, sin duda, definir adecuadamente los esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ en término de las tracciones t_{ij} de las barras (ii).

Fijémonos en las Figuras 6.3 y 6.4 que expresan, respectivamente, el equilibrio tridimensional en el nodo i de las tracciones naturales \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} (color negro), y el mismo equilibrio entre las tracciones proyectadas $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$ y $\mathbf{d} = (d_x, d_y)$ (color azul).

A partir de la Figura 6.4, siendo el esfuerzo N_{xx} la fuerza en la dirección x dividida por la longitud del lado sobre la que actúa¹, es natural la siguiente definición para los valores $N_{\alpha\beta}$:

$$(6.1) \quad \begin{cases} N_{xx} = \frac{a_x + c_x}{b_y + d_y}, \\ N_{yy} = \frac{a_y + c_y}{b_x + d_x}, \\ N_{xy} = \frac{a_x + c_x}{b_y + d_y}, \\ N_{yx} = \frac{b_x + d_x}{a_x + c_x}. \end{cases}$$

Definidos los esfuerzos nodo a nodo, las expresiones continuas del “tensor” $N_{\alpha\beta}$ se obtienen aproximando los valores puntuales de cada esfuerzo por funciones polinomiales². Dichos polinomios no verifican, en general, todas las propiedades que ha

¹Consideraciones análogas pueden hacerse para los esfuerzos N_{yy} , N_{xy} y N_{yx} .

²Si $f = f(x, y)$ es función real de dos variables reales, el *n-polinomio aproximante de f en D* es aquel polinomio $P_n(x, y) := \sum_{\substack{i,j=1\dots n \\ i+j=n}} A_{ij}x^i y^j$ de grado n tal que la integral

$$\int_D |f(x, y) - P_n(x, y)|^2 dD,$$

sea mínima.

de tener el tensor σ , esto es, un tensor simétrico ³ y tal que

$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0. \end{cases}$$

Una manera de “obviar” estas anomalías es, una vez fijado el polinomio aproximante para el esfuerzo N_{xx} , calcular N_{xy} y N_{yy} por integración. Finalmente, debido a la simetría del problema, y escogiendo, por ejemplo, polinomios de cuarto grado, podemos fijar el siguiente tensor $N_{\alpha\beta}$

$$(6.2) \quad \begin{cases} N_{xx} = Ax^4 + By^4 + Cx^2y^2 + Dx^2 + Ey^2 + F, \\ N_{xy} = -4Ax^3y - \frac{2}{3}Cxy^3 - 2Dxy, \\ N_{yy} = Gx^4 + \frac{1}{6}Cy^4 + 6Ax^2y^2 + Lx^2 + Dy^2 + M, \end{cases}$$

siendo A, B, C, D, E, F, G, L y M constantes por determinarse.

6.2.1. Comparación de algunos problemas resueltos por el planteamiento continuo y discreto

A continuación “pondremos en marcha” el proceso definido en los puntos **i**, **ii**, **iii** y **iv** del apartado anterior. Fijaremos como *solución de referencia* aquella calculada a través del planteamiento continuo⁴ (y que identificaremos con z_{con}), y definiremos el error e en el origen O entre esta solución y la del planteamiento discreto z_{dis} como

$$e := \frac{|z_{\text{con}} - z_{\text{dis}}|}{|z_{\text{con}}|}.$$

En particular analizaremos dos ejemplos de borde rígido, uno definido en un dominio rectangular

$$R := [-5, 5] \times [-2, 2],$$

y otro en un dominio “curvilíneo”

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -5 \leq x \leq 5 \wedge -1 - 0,04x^2 \leq y \leq +1 + 0,04x^2\}.$$

En el **Ejemplo 6.1** (dominio rectangular R), consideraremos tres casos diferentes del valor de la z a lo largo de ∂R : fijaremos un borde constante en $y = \mp 2$ y proporcional a y^2 en $x = \mp 5$ (caso **(a)**), un borde proporcional a y^2 en $x = \mp 5$ y proporcional a $-x^2$ en $y = \mp 2$ (caso **(b)**), y un borde proporcional a y^2 en $x = \mp 5$ y proporcional a $-x^2$ en $y = \mp 2$ (caso **(c)**). Al revés, en el **Ejemplo 6.2** (dominio curvilíneo D), sólo consideraremos el caso de un borde proporcional a y^2 en $x = \mp 5$ y proporcional a $-x^2$ en $y = \mp(0,04x^2 + 1)$.

³Por lo que concierne la simetría, en el sistema (6.1) se podría coger la media de los esfuerzos cruzados.

⁴La **Observación 5.6** del **Apartado 5.1.2**, que garantiza la eficacia del enfoque continuo, justifica dicha elección.

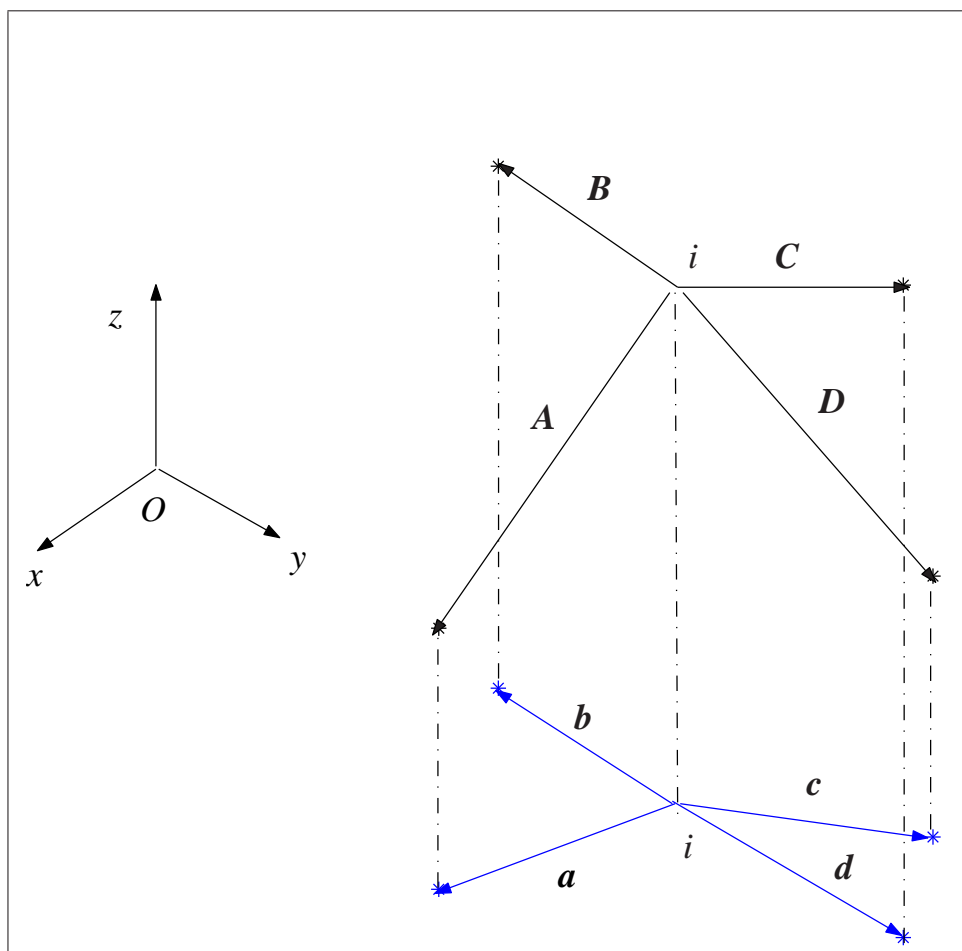


Figura 6.3: Idealización de las tracciones naturales y de las tracciones proyectadas del nodo i .

Ejemplo 6.1 (Resolución del problema en un dominio rectangular).

- (a) **Forma de la membrana en el borde: parabólico y constante.**

Fijemos estos valores de z en el borde:

$$(6.3) \quad \begin{cases} z = 0,5y^2 & \text{si } x = \mp 5, \\ z = 2 & \text{si } y = \mp 2. \end{cases}$$

*Escogiendo para R una discretización del tipo $(2k + 1) \times (2k + 1)$ (en el **Ejemplo 2.4** se comprobó que esta subdivisión “acelera” la convergencia) y calculando las relaciones del sistema (6.1), podemos afirmar (como profundizaremos más adelante) que **en cada paso y en cada nodo de la malla***

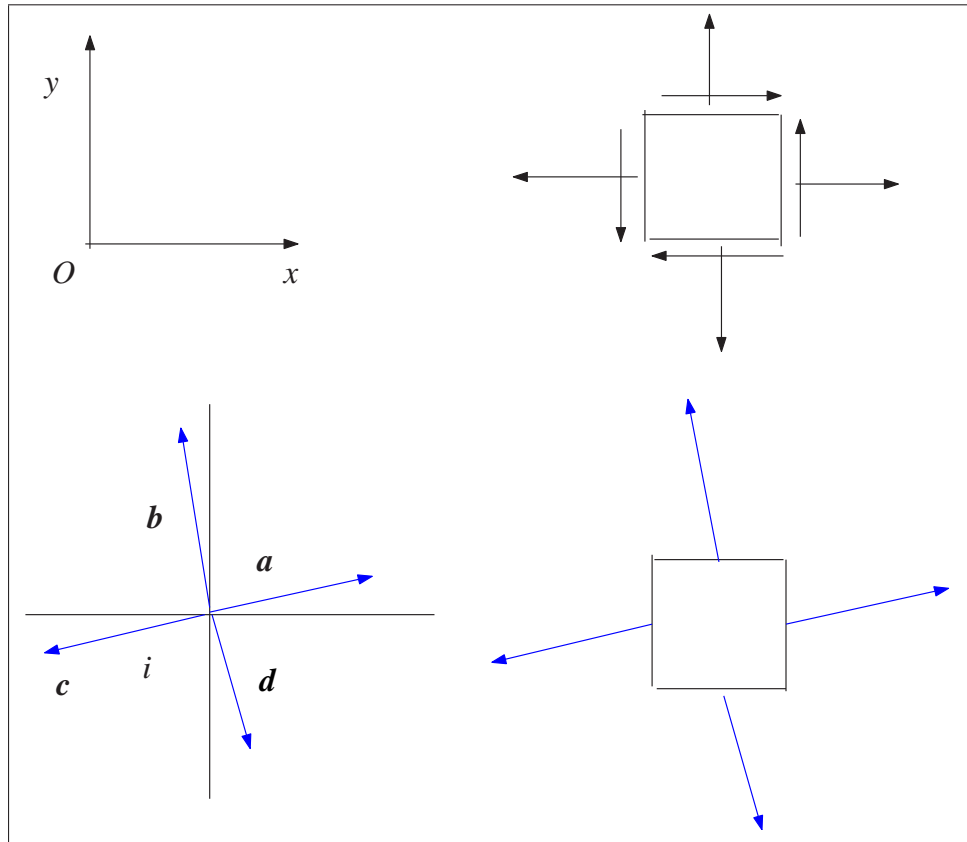


Figura 6.4: Fuerzas en el nodo i y definición del tensor.

se obtienen los siguientes esfuerzos “constantes”⁵

$$(6.4) \quad \begin{cases} N_{xx} = 2,5, \\ N_{xy} = N_{yx} = 0, \\ N_{yy} = 0,4. \end{cases}$$

En estas condiciones el valor numérico de la solución z_{dis} en el origen $O = (0,0)$ es 1,1785. Por otro lado, resolviendo a través del planteamiento continuo el problema de Dirichlet que tenga los datos al borde y los esfuerzos expresados respectivamente por los sistemas (6.3) y (6.4), obtenemos una solución aproximada z_{con} que en el origen vale 1,1826. El error relativo es, entonces

$$e := \frac{|z_{\text{con}} - z_{\text{dis}}|}{|z_{\text{con}}|} = 8,6 \cdot 10^{-3}.$$

La Figura 6.5 ofrece el resultado gráfico de las dos soluciones.

⁵No hace falta aproximar tales valores ya que obtendríamos polinomios constantes.

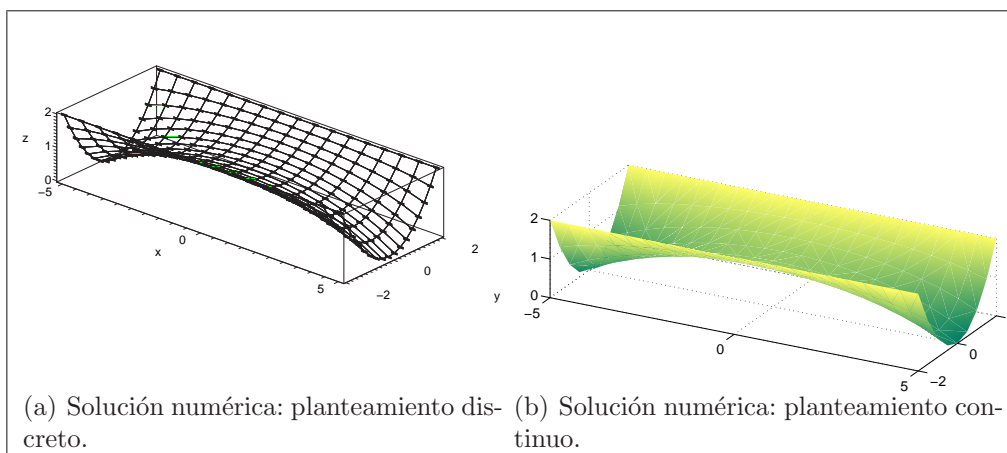


Figura 6.5: Resultado gráfico de la soluciones calculadas por medio del planteamiento discreto y continuo.

- (b) **Forma de la membrana en el borde: parabólico con concavidades discordes.**

Fijemos estos valores de z en el borde:

$$\begin{cases} z = 0,5y^2 & \text{si } x = \mp 5, \\ z = -0,04x^2 + 3 & \text{si } y = \mp 2. \end{cases}$$

Siguiendo la misma línea del caso anterior, obtenemos los siguientes esfuerzos:

$$\begin{cases} N_{xx} = 2,5, \\ N_{xy} = N_{yx} = 0, \\ N_{yy} = 0,4. \end{cases}$$

Los valores aproximados de la solución z_{dis} y z_{con} en el origen $O = (0, 0)$ son 1,5875 y 1,5897. El error relativo es, entonces

$$e := \frac{|z_{\text{con}} - z_{\text{dis}}|}{|z_{\text{con}}|} = 1,4 \cdot 10^{-3}.$$

La Figura 6.6 ofrece el resultado gráfico de las dos soluciones.

- (c) **Forma de la membrana en el borde: parabólico con concavidades concordas.**

Fijemos estos valores de z en el borde:

$$\begin{cases} z = 0,5y^2 & \text{si } x = \mp 5, \\ z = 0,04x^2 + 1 & \text{si } y = \mp 2. \end{cases}$$

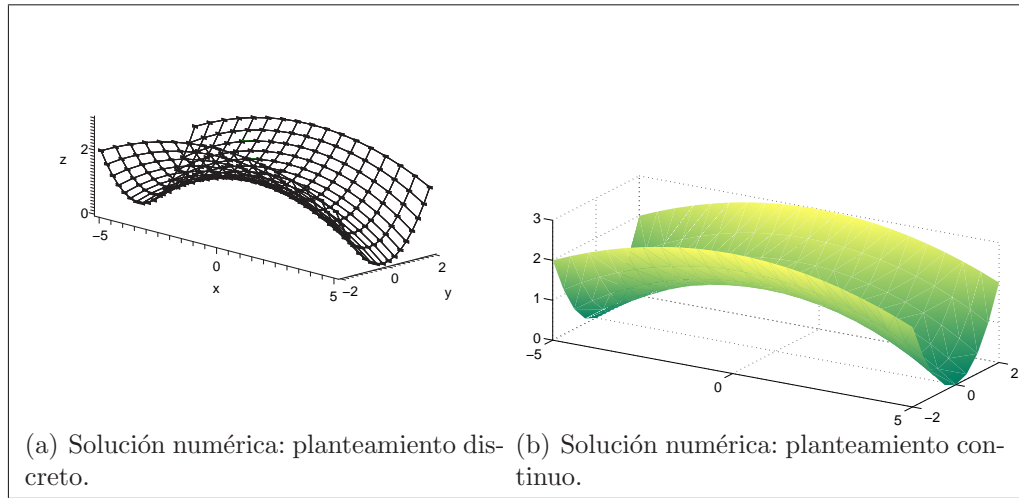


Figura 6.6: Resultado gráfico de las soluciones calculadas por medio del planteamiento discreto y continuo.

Siguiendo la misma línea del caso anterior, obtenemos los siguientes esfuerzos:

$$\begin{cases} N_{xx} = 2,5, \\ N_{xy} = N_{yx} = 0, \\ N_{yy} = 0,4. \end{cases}$$

Los valores aproximados de la solución z_{dis} y z_{con} en el origen $O = (0,0)$ son 0,7626 y 0,7755. El error relativo es, entonces

$$e := \frac{|z_{\text{con}} - z_{\text{dis}}|}{|z_{\text{con}}|} = 1,6 \cdot 10^{-2}.$$

La Figura 6.7 ofrece el resultado gráfico de las dos soluciones.

Ejemplo 6.2 (Resolución del problema en un dominio cualquiera).

Forma de la membrana en el borde: parabólico con concavidades discordes.

Fijemos estos valores de z en el borde:

$$\begin{cases} z = 0,5y^2 & \text{si } x = \mp 5, \\ z = -0,04x^2 + 3 & \text{si } y = \mp(0,04x^2 + 1). \end{cases}$$

*A diferencia de antes y debido a que el dominio es curvilíneo, la discretización $(2k + 1) \times (2k + 1)$ no ofrece **en cada paso y en cada nodo de la malla** una distribución constante de esfuerzos; el valor de los esfuerzos paso a*

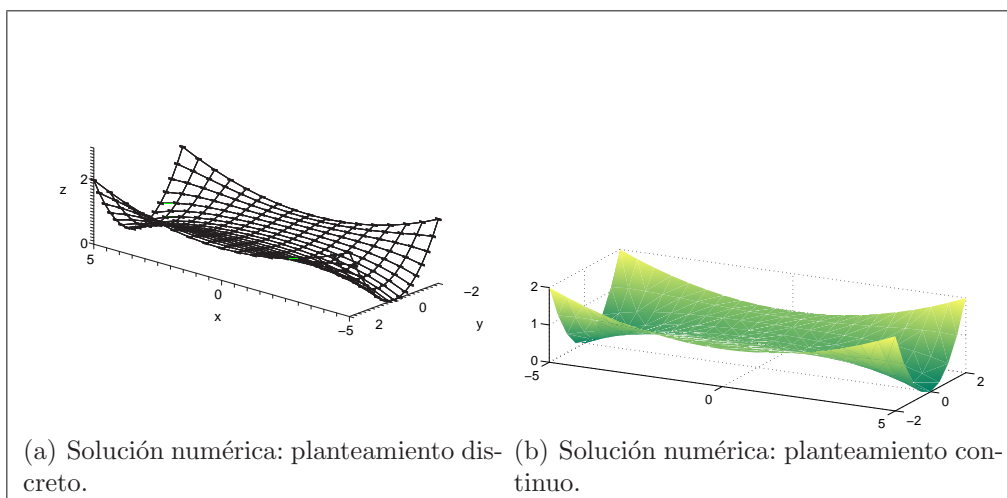


Figura 6.7: Resultado gráfico de la soluciones calculadas por medio del planteamiento discreto y continuo.

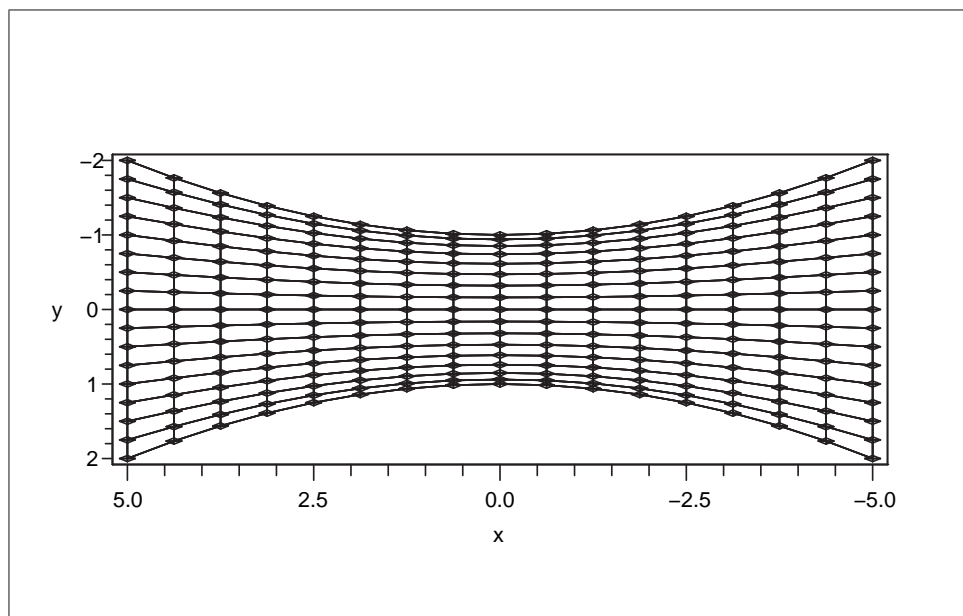


Figura 6.8: Malla de 289 compuesta por cuadrángulos; caso $k = 8$.

paso y nodo a nodo va variando. Fijemos, entonces, la malla de la Figura 6.8. Calculando los polinomios aproximantes para los valores nodales de los esfuerzos “discretos”, obtenemos las siguientes expresiones para los esfuerzos

“continuos” (véase el sistema (6.2)):

$$\begin{cases} N_{xx} = 0,009x^4 + 0,435y^4 - 0,212x^2y^2 - 0,214x^2 + 2,87y^2 + 3,932, \\ N_{xy} = N_{yx} = -0,037x^3y + 0,141xy^3 + 0,429xy, \\ N_{yy} = -0,001x^4 - 0,035y^4 + 0,056x^2y^2 - 0,004x^2 - 0,214y^2 + 0,295. \end{cases}$$

En estas condiciones los valores aproximados de la solución z_{dis} y z_{con} en el origen $O = (0, 0)$ son 1,5875 y 1,4246. El error relativo es, entonces

$$e := \frac{|z_{\text{con}} - z_{\text{dis}}|}{|z_{\text{con}}|} = 0,114.$$

La Figura 6.9 ofrece el resultado gráfico de las dos soluciones.

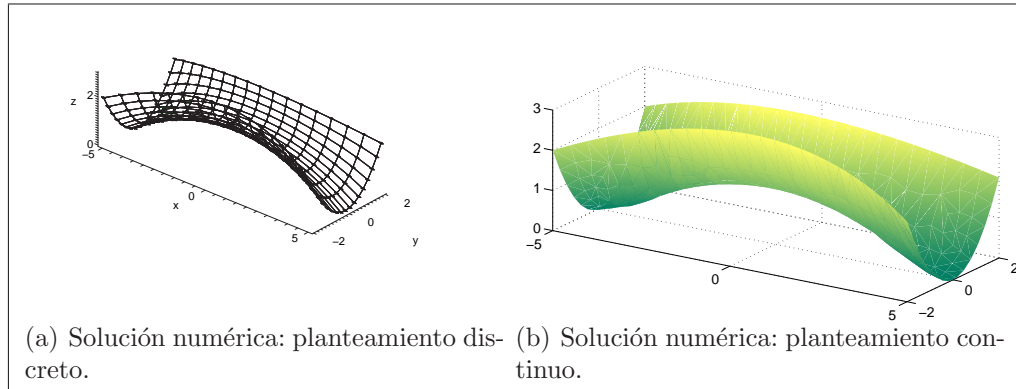


Figura 6.9: Resultado gráfico de la soluciones calculadas por medio del planteamiento discreto y continuo.

Interpretación de los resultados de los ejemplos

Los ejemplos analizados muestran que en circunstancias de dominios rectangulares el proceso aquí considerado proporciona errores mínimos entre la solución discreta z_{dis} y la solución continua z_{con} . Al contrario, el error que se obtiene en casos de dominios con bordes curvilíneos es sensiblemente mayor.

Para justificar tal comportamiento, fijémonos en la Figura 6.11 que identifica un rectángulo discretizado por una subdivisión del tipo $\mathbf{A}=\mathbf{L}=2k+1$. Dicha subdivisión **conserva las relaciones entre los lados que definen los cuadrángulos de la malla** o, lo que es igual, considerando el sistema (6.1), **conserva los esfuerzos**. Comprobémoslo: partiendo de puntos equiespaciados en los bordes verticales y horizontales, el resultado que se obtiene es un mallado compuesto por

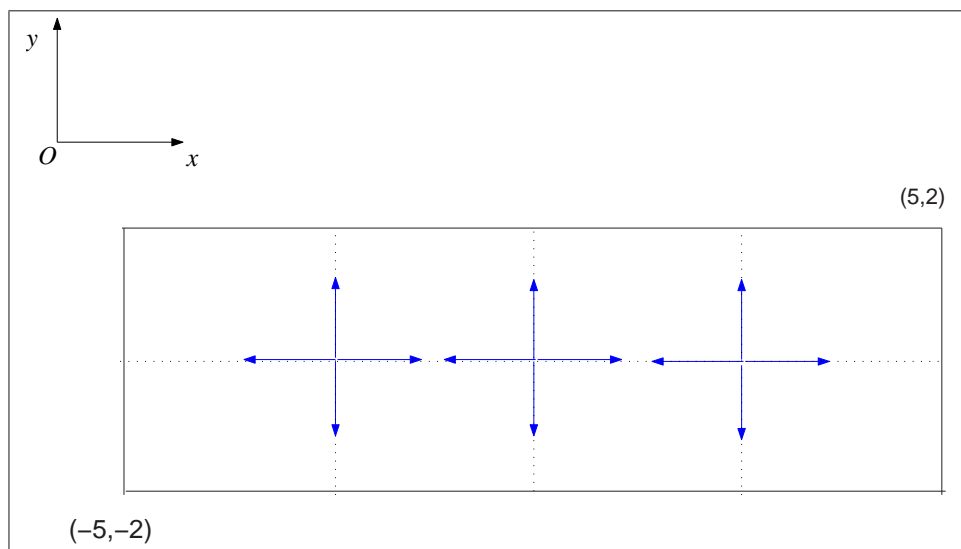


Figura 6.10: Caso de mallado rectangular: tracciones en las direcciones de los ejes.

rectángulos iguales en cada paso y semejantes paso por paso. En particular los lados del rectángulo R miden $r_1 = \frac{10}{2k}$ y $r_2 = \frac{4}{2k}$. Con esta subdivisión e independientemente del paso de mallado, la relación entre r_1 y r_2 es constante y vale $5/2$.

Por tanto, al considerar estos problemas, los dominios rectangulares constituyen *casos singulares* en que no sólo se pasa del discreto al continuo de manera inmediata sino, como se va a ver, exacta.

En este sentido, a partir de las tracciones en los cables de la malla, es posible fijar el tensor de esfuerzos $N_{\alpha\beta}$, que resulta ser diagonal y de componentes constantes. Así, tal y como reflejan la Figura 6.10 (particularización a estos casos de la Figura 6.4) y el sistema (6.1), se obtiene el tensor

$$(6.5) \quad \begin{cases} N_{xx} = \frac{a_x + c_x}{b_y + d_y}, \\ N_{yy} = \frac{b_y + d_y}{a_x + c_x}, \\ N_{xy} = 0. \end{cases}$$

Como puede apreciarse claramente, el paso de las tracciones de los cables a los esfuerzos de membrana se realiza aquí de manera correcta, ya que se cumplen todas las condiciones puntuales y continuas de un tensor de tracción.

Por otra parte, al refinar el mallado, como las relaciones entre los lados se mantienen, los esfuerzos no varían. Esto significa, a la vista del planteamiento continuo (problema dual: fijados unos esfuerzos corresponde una forma única), que en estos

casos discretos nos encontramos con la misma estructura con independencia del refinamiento del mallado, esto es, como se conservan los esfuerzos, se conserva la estructura. Esto explica la mejor convergencia de resultados al refinar la malla para ciertos casos analizados al final del **Capítulo 2**, siendo ésta máxima para dominios rectangulares.

En definitiva, los problemas discretos con dominio rectangular y este tipo de mallado son casos singulares en los que sí tiene sentido, en sentido estricto, su comparación con los correspondientes continuos; tal como se ha hecho en los casos del **Ejemplo 6.1**, con los resultados indicados.

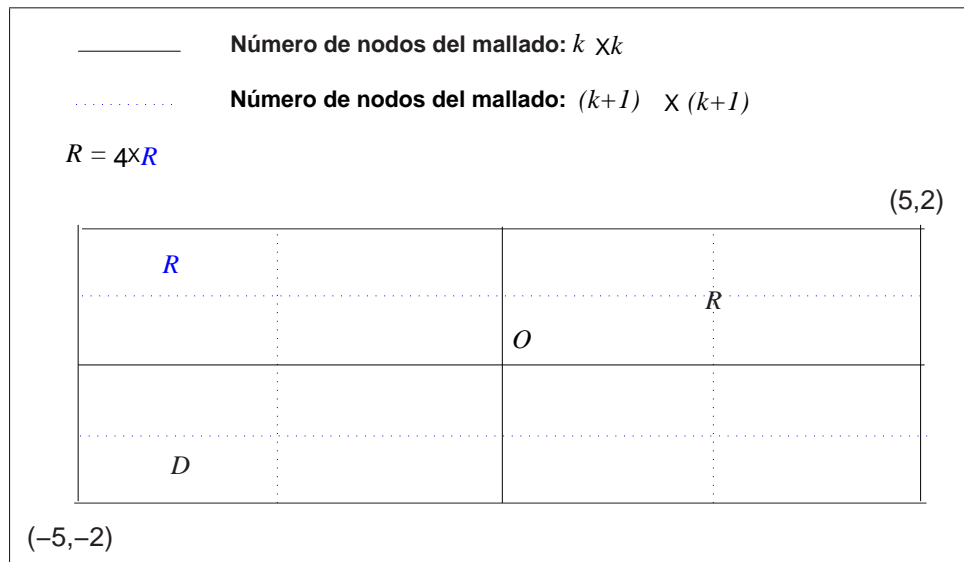


Figura 6.11: Subdivisión tipo $\mathbf{N}=\mathbf{A} \times \mathbf{A}=\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ de un dominio rectangular.

Capítulo 7

Resumen y conclusiones

El presente capítulo contiene el resumen final y las conclusiones del trabajo de tesis doctoral titulado “Análisis matemático del equilibrio en estructuras de membrana con bordes rígidos y cables. Pasarelas: forma y pretensado”, desarrollado en este documento.

7.1. Resumen

La investigación puede resumirse en los siguientes puntos:

- Introducción a las estructuras de membrana (en general y con aplicaciones portantes; **Capítulo 1**).
- Asunto, motivación, objetivos y estado del arte (**Capítulo 2**).
- Problema del equilibrio de membrana en la fase de pretensado, planteado en la superficie de la membrana (continuo 2D en el espacio). Condiciones de equilibrio plano y condición de equilibrio espacial con dualidad entre forma y esfuerzos (ecuaciones en derivadas parciales de los esfuerzos proyectados y de la superficie; **Capítulo 3**).
- Problema del equilibrio entre membrana y cable de borde. Equilibrio de un cable. Interacción entre cable y membrana. Condiciones de equilibrio en el plano (esfuerzos proyectados). Condición espacial (coincidencia entre los planos osculador del cable y tangente de la membrana; **Capítulo 3**).
- Planteamiento y discusión del problema directo en membrana (búsqueda de esfuerzos / forma dada). Sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico. Análisis del problema con borde completo de tipo rígido. Análisis del problema con borde parcial de tipo cable (curvas características; **Capítulo 4**).

- Resolución del problema directo en una serie de casos (en que el problema está bien puesto). Casos con planteamiento directo. Casos con planteamiento mediante la función de Airy (**Capítulo 4**).
- Planteamiento del problema dual en membrana (búsqueda de forma / esfuerzos dados). Sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico (**Capítulo 5**).
- Discusión del problema dual con borde rígido (Dirichlet). Existencia y unicidad. Proceso de resolución. Verificación del proceso de resolución: comparación con casos de solución explícita. (**Capítulo 5**).
- Discusión del problema dual con borde parcial de tipo cable. Unicidad y proceso de construcción de la solución. Resolución de un caso concreto con solución aproximada conocida (**Capítulo 5**).
- Verificación del proceso de resolución del problema dual con borde rígido: consistencia de resultados de los problemas directo y dual para los mismos casos (**Capítulo 6**).
- Comparación entre los problemas discreto (malla de cables, 1D) y continuo (problema dual, 2D) de búsqueda de forma de membrana. Interpretación del problema discreto a la vista del continuo. Consistencia de resultados de ambos problemas en casos comparables (**Capítulo 6**).

Los resultados numéricos y las gráficas del trabajo, correspondientes tanto al problema de búsqueda de forma a través del planteamiento continuo 2D como al discreto 1D, se han obtenido ejecutando programas desarrollados en MATLAB y MAPLE.

7.2. Conclusiones

La cuestión básica que justifica la investigación se encuentra en la idea de ampliar la aplicación de las membranas a tracción a estructuras portantes de ingeniería civil como, por ejemplo, las pasarelas.

Las ecuaciones de equilibrio de una membrana en la *fase de pretensado* (considerada en la tesis como fase de referencia) se expresan, a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en forma de producto de variables de esfuerzos y variables de forma.

El planteamiento completo del equilibrio se alcanza añadiendo las correspondientes condiciones de contorno (compuesto por elementos rígidos o cables) a la ecuación

diferencial.

El análisis sobre la superficie de la membrana, desarrollado en esta tesis, establece directamente una correspondencia forma-esfuerzos. Más precisamente se comprueba que el problema del equilibrio de una membrana, escrito en sus variables naturales (forma y esfuerzos, todo ello en el espacio), es equivalente a uno bastante más sencillo y manejable, en función de los esfuerzos proyectados, compuesto por un sistema con dos ecuaciones de equilibrio plano y una ecuación de equilibrio en el espacio. Se trata de las siguientes relaciones:

$$(7.1) \quad \begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 & \text{(Equilibrio plano en } x), \\ N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0 & \text{(Equilibrio plano en } y), \\ N_{xxz,xx} + 2N_{xyz,xy} + N_{yyz,yy} = 0 & \text{(Equilibrio esfuerzos-forma),} \end{cases}$$

siendo $N_{\alpha\beta}$ los esfuerzos proyectados (sobre el plano de referencia xOy), biunívocamente relacionados con los reales, y z la forma de la membrana.

A partir de estas ecuaciones es inmediato considerar dos planteamientos naturales que conducen a sendos problemas diferenciales, denominados aquí *problema directo* (búsqueda de esfuerzos) y *problema dual* (búsqueda de forma).

Examinemos, entonces, dichos problemas, comenzando con el caso de borde totalmente rígido y siguiendo con el de borde compuesto en parte por cables.

Análisis de los problemas directo y dual en caso de dominio con borde totalmente rígido

El *problema directo* se basa aquí en hallar el tensor de los esfuerzos en el interior de una membrana, una vez que se hayan fijados la superficie de la misma (con curvatura de Gauss negativa) y el valor del tensor en su contorno. La ecuación diferencial asociada a este problema es hiperbólica y entonces, en general, no es posible garantizar la existencia y la unicidad de la solución.

Así se ha presentado un ejemplo concreto que admite diversas soluciones en esfuerzos. Se trata del caso de un paraboloides hiperbólico definido en un rectángulo equilibrado por una serie infinita de esfuerzos de tipo sinusoidal.

No obstante, el problema se resuelve satisfactoriamente (esto es, se obtiene una única distribución de esfuerzos para la forma dada de la membrana) en algunos casos en los que el dominio es rectangular y la superficie es un paraboloides hiperbólico. De hecho, para estas hipótesis, se identifica el equilibrio con un problema de *propagación de ondas* en el que las condiciones de frontera se interpretan como

condiciones iniciales o bien *finales*.

En el texto se han considerado dos ejemplos de superficie $z(x, y) := -x^2 + c^2y^2$ y dominio rectangular $R = [-a, a] \times [-b, b]$ (en metros) y se ha resuelto el sistema (7.1), en un caso añadiéndole una condición propia de las ecuaciones de ondas y en otro utilizando la función de Airy.

Se obtiene, entonces, en ambas circunstancias la misma solución analítica, dada por el tensor de esfuerzos constantes del tipo

$$\begin{cases} N_{xx} = c^2, \\ N_{yy} = 1, \\ N_{xy} = 0. \end{cases}$$

En definitiva, una membrana con forma de paraboloides hiperbólico en un dominio rectangular, admite una *única solución posible* de esfuerzos cuyo tensor es diagonal y de componentes constantes. En particular los bordes rígidos resultantes son arcos parabólicos de concavidad opuesta en una y otra dirección.

Otro resultado “positivo” para el problema directo se define en un dominio rectangular $R = [-a, a] \times [-b, b]$ y utilizando la superficie $z(x, y) := c_1y^4 - c_2x^2$. Se comprueba que, si c_1, c_2, a y b son tales que $c_1 = \frac{2a^2}{3b^4}c_2$, existe una única solución de esfuerzos del tipo

$$\begin{cases} N_{xx} = y^2, \\ N_{yy} = 1, \\ N_{xy} = 0. \end{cases}$$

Por tanto, una membrana con la forma indicada (paraboloides hiperbólico de cuarto grado en una dirección) en un dominio rectangular, admite una *única solución posible* de esfuerzos cuyo tensor es diagonal y una componente constante. A diferencia del anterior, en este caso se ha de imponer una relación entre el rectángulo y la forma de la membrana.

El *problema dual* se basa aquí en hallar la forma de la membrana, una vez que se hayan fijados su contorno y los esfuerzos. La ecuación diferencial asociada a este problema es elíptica y entonces es siempre posible garantizar la existencia y la unicidad de la solución fijando el valor de la membrana en el borde (condición de *Dirichlet*).

En algunos casos “*ad hoc*” se obtienen resultados analíticos de la solución. En el texto se han considerado dos ejemplos de dominio rectangular $R := [-a, a] \times [-b, b]$. En el primer caso, cualquiera que sea el tensor de los esfuerzos $N_{\alpha\beta}$, si se fija la z en $x = \mp a$ y $y = \mp b$ con valor constante se obtiene una forma plana para la

membrana.

Al revés, si se fijan N_{xx} y N_{yy} tales que $N_{xx}h''(x) = N_{yy}g''(y)$ (con h y g valores espaciales de z en $y = \mp b$ y $x = \mp a$), se obtiene una membrana de la forma $z(x, y) = h(x) + g(y) - h(\mp a)$.

Por supuesto, para resolver el problema general (dominios y esfuerzos cualesquiera) debe recurrirse a métodos numéricos.

Así, en este trabajo se ha elaborado un proceso numérico utilizando el Método de los Elementos Finitos. Su respuesta es satisfactoria, en el sentido de comprobar la regularidad de la solución y, en particular, su estabilidad en función del mallado. Esto es coherente con los resultados teóricos conocidos para el problema elíptico de tipo Dirichlet, un problema con solución *única y estable*.

Asimismo, el proceso responde muy bien en cuanto a sus resultados en casos concretos, comenzando por su excelente ajuste en los que tienen soluciones analíticas.

Pero, además, la utilización de este proceso numérico ha permitido la verificación cruzada entre resultados de ambos problemas, directo y dual. En este sentido, y más precisamente, se procedió aquí fijando los esfuerzos resultantes del problema directo y buscando la forma correspondiente. La diferencia entre las formas así obtenidas y las fijadas en el problema directo resulta verdaderamente inapreciable.

Por otra parte, el *Método de la Densidad de Fuerzas*, clásico instrumento utilizado en construcción para calcular la forma de la membrana, es aquí una referencia importante. El método se basa en aproximar la superficie de la membrana mediante una *red de cables* y estudiar el equilibrio en ella.

Por ello, se compararon los resultados del problema dual con los del Método de la Densidad de Fuerzas. Las conclusiones de tal comparación pueden resumirse así: cualitativamente, la comparación en sí sólo es coherente o, en otras palabras, tiene sentido en casos de dominios rectangulares; cuantitativamente, precisamente en estos casos proporciona errores inapreciables.

En fin, lo anterior sirve para destacar la idoneidad general, teórica y tecnológica, de plantear el equilibrio y, en particular, la búsqueda de forma como problema continuo de membrana. Teórica, porque se confirma algo previsible: la imposibilidad de definir adecuadamente (salvo casos singulares) el estado tensional de la membrana partiendo únicamente de las tracciones de una red de cables inscrita en ella. Tecnológica, por la posibilidad de partir de unos esfuerzos interesantes para el buen funcionamiento en servicio de la membrana (en el método de la red de cables las tracciones no se fijan; van asociadas a la forma resultante).

Análisis de los problemas directo y dual en caso de dominio con borde compuesto en parte por cables

Igual que ocurre para la membrana, se comprueba que el problema del equilibrio de un cable de borde, escrito en sus variables naturales (forma y fuerza de tracción en el espacio), es equivalente a otro más simple y manejable, en función de las variables proyectadas, compuesto por un sistema con dos ecuaciones de equilibrio plano y una ecuación en el espacio (que asegura la compatibilidad espacial del equilibrio membrana-cable). Se trata de las siguientes relaciones:

$$(7.2) \quad \begin{cases} f_1 \sqrt{1 + y'^2} = N_{xy} - y' N_{xx} = P'_x & (\text{Equilibrio plano en } x), \\ f_2 \sqrt{1 + y'^2} = N_{yy} - y' N_{xy} = (y' P_x)' & (\text{Equilibrio plano en } y), \\ z_{,xx} + 2z_{,xy} y' + z_{,yy} y'^2 = 0 & (\text{Compatibilidad espacial de equilibrio}), \end{cases}$$

siendo $y = y(x)$ la proyección del cable sobre el plano xOy y P_x la proyección de su fuerza de tracción sobre el eje x .

Aquí en *el problema directo* el planteamiento es el siguiente: se escoge una superficie (con curvatura de Gauss negativa), se calcula la forma de los cables $y = y(x)$ utilizando la relación de compatibilidad y se hallan los esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ de manera que se cumpla el sistema (7.1) en el interior y las primeras dos ecuaciones del sistema (7.2) en el cable. Lo anterior implica que, en los bordes que son cables, la carga repartida $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ es asimismo una incógnita.

Al igual que en el caso de borde totalmente rígido la ecuación diferencial del problema es hiperbólica. Si a esto le añadimos que las curvas que definen los cables coinciden con las *curvas características* de la ecuación, el resultado que se obtiene es un problema hiperbólico con datos definidos sobre curvas características, esto es, en general, un problema no resoluble y mal planteado.

En el *problema dual* el planteamiento es el siguiente: se escoge un tensor de esfuerzos (de tracción), se calcula $y = y(x)$ eliminando P_x de las dos primeras ecuaciones del sistema (7.2) y se halla la superficie z de manera que se cumpla el sistema (7.1) en el interior y la última ecuación del sistema (7.2) en el cable. Esto implica que la función $h = h(x)$, valor de la superficie en el cable ($h(x) = z(x, y(x))$), es asimismo una incógnita. Hay que indicar que la relación de compatibilidad es equivalente a la ecuación $z_{,y} y'' = h''$, que es la expresión utilizada en los cálculos.

Aunque la ecuación diferencial siga siendo elíptica, dicho problema no corresponde ni a un problema de Dirichlet ni a un problema elíptico estándar. De hecho la formulación considera un sistema diferencial con una condición “atípica” sobre el cable (justamente la relación de compatibilidad).

El planteamiento con este tipo de borde lleva entonces a considerar un “llamativo y singular” sistema de ecuaciones cuyo interés llega a abrazar sin duda también la rama de la matemática pura y, en particular, la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En efecto, la búsqueda bibliográfica llevada a cabo sobre dicho sistema no ha sido demasiado fructífera. De hecho la condición de frontera expresada por la relación de compatibilidad (tercera ecuación del sistema (7.2)) no es “estándar”, esto es, no puede ser tratada como una condición de Dirichlet o Neumann. Así, si bien un *problema elíptico fuerte* de Dirichlet o Neumann es siempre equivalente a una *ecuación integral débil* que “incorpora en si misma” las correspondientes condiciones de frontera, la condición $z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0$ (o bien $z_{,y}y'' = h''$) no parece poder tener la misma característica.

Así pues, todo parece indicar que, a partir de un planteamiento mecánico (equilibrio entre membrana y cable), aparece un novedoso problema matemático (problema de contorno de tipo elíptico).

En este problema (dual con cables de borde) se construyó la solución mediante un proceso numérico, mientras que se argumentó su unicidad desde un punto de vista analítico (utilizando instrumentos clásicos de E.D.P. como los *Principios del Máximo*).

Precisando más, la construcción de la solución del problema sigue la línea del Método de los Elementos Finitos, aproximando la membrana z y el cable h mediante funciones lineales: $z = \sum_{i=1}^n z_i N_i$ y $h = \sum_{i=1}^{n_c} h_i N_i$. Al anular el *residuo integral* definido por $\int_{\Gamma^c} (z_{,y}y'' - h'')N_i \Gamma^c$, se obtiene un sistema lineal en las incógnitas z_i y h_i . Comparando este sistema con otro obtenido al considerarse las ecuaciones de equilibrio (7.1), se puede calcular numéricamente h y z .

A lo comentado hasta ahora sobre este problema cabe añadir que todo indica que no existe un caso analíticamente resoluble al que referirse como punto de apoyo (aparte del caso de membrana plana). Esto hace que el problema y su resolución sean, si cabe, más interesantes y estimulantes.

Ante tal situación, la referencia tuvo que ser tecnológica. Así, sólo se estudió un caso asimilable a la pasarela de Callús (referencia [29]), con esfuerzos parecidos: esfuerzos constantes (y, consecuentemente, con cables de planta elíptica). Los resultados obtenidos fueron semejantes a la solución adoptada en Callús (solución aproximada, no sirviendo estrictamente como referencia). Por otro lado, la solución numérica que se obtiene presenta una cierta *inestabilidad* en función de la malla

escogida.

En fin, como antes (bordes rígidos), podría hablarse aquí de la idoneidad general del planteamiento del equilibrio de la membrana y, en particular, la búsqueda directa de forma a partir de esfuerzos dados, como problema continuo. Incluso cabría hacer mayor énfasis ante la aparente falta de alternativas similares.

Consideraciones finales y continuidad inmediata

Puede afirmarse que esta tesis ha sido desarrollada y presentada formalmente recorriendo una “línea sutil” que separa al formalismo y al rigor matemáticos del pragmatismo y la intuición ingenieriles. Esto se plasma sin duda en el lenguaje utilizado, que se espera sea asequible a todos aquellos lectores familiarizados con los conceptos y las herramientas del análisis matemático y la ingeniería estructural.

Por otro lado, recordando los objetivos globales que inspiraron y motivaron esta investigación, puede decirse que los mismos parecen haber sido bien cubiertos, con un desarrollo completo de la temática y, en lo posible, con las necesarias referencias a la tecnología. Por supuesto, todo trabajo es susceptible de quedar más y mejor completo. A esto, y a dar idea de lo que podría ser su continuidad más inmediata, tratan de responder los párrafos que siguen.

Puede decirse que la investigación aquí presentada ha marcado las bases del estudio analítico sobre superficie del equilibrio en estructuras de membrana, para la fase de pretensado, con el planteamiento directo ya conocido. A partir de aquí cabe prever diferentes progresos, algunos de tipo más bien teórico pero sobre todo de carácter práctico, que interesa indicar al concluir este trabajo.

Así, limitándonos al entorno temático de esta tesis y sin entrar en otros aspectos de esta vertiente básica de la línea de investigación, entre los avances ahora previsibles pueden citarse éstos:

- Estudio de la solución del problema dual con cables como un posible problema de contorno de Neumann, no conocido a priori de modo explícito pero construible.
- Estudio, relacionado con el anterior, de la estabilidad de la solución numérica del mismo problema con relación al mallado.
- Estudios cercanos a la práctica del diseño de membranas, en interacción ya con otras fases, en particular la de servicio; por ejemplo, para definir esfuerzos de pretensado interesantes (para conseguir la adecuada rigidez en servicio y facilitar el proceso constructivo).

-
- Estudio del pretensado introducido mediante cables, incluyendo como dato la tracción \tilde{P} del cable, con las interacciones que se producen (rozamiento, etc.) al tesarlos (aquí \tilde{P} ha sido tenida en cuenta, por supuesto, a través de P_x ; pero quedaba fijada como resultado).
 - Adecuación de los procesos de cálculo a situaciones más generales (dominios no simétricos, etc.).

Referencias

- [1] **Argyris J. H., Angelopoulos T., and Bichat B.**; A general method for the shape finding of lightweight tension structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; Vol. **3**, pp. 135 – 149, (1974).
- [2] **Bathe K. J.**; Finite Element Procedures in Engineering Analysis. *Englewood Cliffs*, NJ Prentice-Hall, (1982).
- [3] **Belkacem S.**; *Recherche de forme par relaxation dynamique des structures réticulées spatiales autocontraintes*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, (France 1987).
- [4] **Bletzinger K. U.**; *Form Finding and Optimization of Membranes and Minimal Surfaces*. Lecture notes, PhD.-course/Advanced School on Advanced Topics in Structural Optimization, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Lyngby, June 25-July 3, (1988).
- [5] **Bonet J. and Mahaney J.**; Form finding of membrane structures by updated reference method with minimum mesh distortion. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **38**, pp. 5469 – 5480, (2001).
- [6] **Brew J. S. and Brotton D. M.**; Non-linear structure analysis by dynamic relaxation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **3**, pp. 463 – 483, (1971).
- [7] **Brezis H.**; Análisis funcional. *Teoría y aplicaciones*, Madrid Alianza DL, (1984).
- [8] **Brock F.**; Continuous symmetrization and symmetry of solutions of elliptic problems. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, Vol. **110**, pp. 157 – 204, (2000).
- [9] **Casas E.**; *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, DL, Universidad de Cantabria, (1992).
- [10] **Do Carmo M.**; *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial, Madrid, (1990).
- [11] **Evans L.**; *Partial differential equations*, Providence, Rhode Island American Mathematical Society, (1998).

- [12] **Garofalo N.** and **Lewis J.**; A Symmetry Result Related to Some Overdetermined Boundary Value Problems. *American Journal of Mathematics*; Vol. **111**, No. 1, pp. 9 – 33, (1989).
- [13] **Geymonat G.** and **Leger A.**; Nonlinear Spherical Caps and Associated Plate and Membrane Problems. *Journal of Elasticity*; Vol. **57**, pp. 171 – 200, (1999).
- [14] **Gilbarg L.** and **Trudinger N. S.**; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, (1998).
- [15] **Gvazava J.** and **Kharibegashvili S.**; To the Theory of Boundary Value Problems for Hyperbolic Type Equations and Systems. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*; Vol. **12**, pp. 68 – 75, (1997).
- [16] **Henrot A.** and **Philippin G.A.**; Some overdetermined boundary value problems with elliptical free boundaries. *Siam Journal on Mathematical Analysis*; Vol. **29**, No. 2, pp. 309 – 320, (1998).
- [17] **Hildebrandt S.** and **Tromba A.**; *Matemática y formas óptimas*, Prensa Científica, (1990).
- [18] **Hughes T.J.R.**; *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*; Mineola, New York Dover Publications (1987).
- [19] **Juráš M.**; Some Classification Results for Hyperbolic Equation $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$. *Journal of Differential Equations*; Vol. **164**, pp. 296 – 320, (2000).
- [20] **Khachev M. M.**; The Dirichlet Problem for a Degenerate Hyperbolic Equation in a Rectangle. *Differential Equations*; Vol. **37**, No. 4, pp. 603 – 606, (2001).
- [21] **Kiguradze T.** and **Lakshmikantham V.**; On the Dirichlet Problem in a characteristic rectangle for higher order linear hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis*; Vol. **50**, pp. 1153 – 1178, (2002).
- [22] **Leonard J. W.**; *Tension Structures*. McGraw-Hill, (1988).
- [23] **Lewis W. J.**; *Tension Structures. Form and Behaviour*. Edit. Thomas Telford, (2003).
- [24] **Linkwitz K.**; About formfinding of double-curved structures. *Engineering Structures*; Vol. **21**, pp. 709 – 718, (1999).
- [25] **Linkwitz K.**; Formfinding by the “direct approach” and pertinent strategies for the conceptual design of prestressed and hanging structures. *International Journal of Space Structures*; Vol. **14**, No. 2, pp. 73 – 87, (1999).

- [26] **Motro R.**; Forms and forces in tensegrity systems. In *Third International Conference on Space Structures*; pp. 180 – 185, (Guildford 1984).
- [27] **Murcia J.**; Tecnología estructural de membranas para aplicaciones de ingeniería civil. I Jornadas Nacionales sobre Innovación y Nuevas Tecnologías en la Ingeniería Civil, (Madrid, diciembre 2002).
- [28] **Murcia J.**; Prototipo de pasarela con estructura de membrana. IV Congreso Nacional de la Ingeniería Civil, Actas (Vol. 2), pp 905 – 912. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, (Madrid, noviembre 2003).
- [29] **Murcia J.**; Tecnología de pasarelas con estructura de membrana. *Informes de la Construcción*; No. 506, (se publicará en 2007).
- [30] **Rahman M.**; *Applied numerical analysis*, WITpress, (2005).
- [31] **Schek H. J.**; The force density method for form finding and computation of general networks. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*; Vol. 3, pp. 115 – 134, (1974).
- [32] **Sernesi E.**; *Geometría 2*, Bollati Boringhieri, (1989).
- [33] **Singer P.**; Analogies between minimal surfaces and membrane constructions (numerical part). *Natürliche Konstruktionen*, SFB 230, Part 9, pp. 107-111, (1994).
- [34] **Timoshenko S.P., Weaver W. and Young D.H.**; *Vibration problems in engineering*. New York Wiley, (1990).
- [35] **Tüzel V.H. and Erbay H.A.**; The dynamic response of an incompressible non-linearly elastic membrane tube subjected to a dynamic extension. *International Journal of Non-Linear Mechanics*; Vol. 39, pp. 515 – 537, (2004).
- [36] **Ulrich D.**; *Minimal Surfaces*. Springer, (1992).
- [37] **Villaggio P.**; *Mathematical Models for Elastic Structures*. Cambridge University Press, (1997).
- [38] **Weinberger H. F.**; *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales*, Reverté, (1992).
- [39] **Weinitschke H. J. and Grabmüller H.**; Recent Mathematical Results in the Nonlinear Theory of Flat and Curved Elastic Membrane of Revolution. *Journal of Engineering Mathematics* ; Vol 26, pp. 159-194, (1992).
- [40] **Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.**; *The Finite Element Method*, Butterworth Heinemann, (2000).

Apéndice A

Elementos de Geometría Diferencial de curvas y superficies

Este capítulo es un breve resumen de resultados clásicos de Geometría Diferencial. Estudiaremos *curvas* y *superficies* del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Para las demostraciones o un análisis a mayor profundidad consultar las referencias [10] y [32].

A.1. Curvas de \mathbb{R}^3 : el triedro de Frenet

Definición A.1 Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una **curva regular de parámetro x** en \mathbb{R}^3 es una aplicación regular $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathbf{r}(x) = r_1(x), r_2(x), r_3(x)$) infinitamente derivable tal que

$$(A.1) \quad \|\dot{\mathbf{r}}(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dot{r}_i(x)^2} \neq 0, \quad \forall x \in I.$$

\mathbf{r} se llama **parametrización de la curva**. El **soporte de la curva** (o **traza**) es el subconjunto de \mathbb{R}^3 imagen de I a través \mathbf{r} y denotado por \mathcal{C} .

Indicaremos con P un punto genérico de la curva, esto es, la imagen a través de \mathbf{r} de x en I ($P \equiv \mathbf{r}(x)$). Cuando queramos fijar un punto particular de la curva utilizaremos un subíndice por el punto de la curva.

Esto nos lleva a la siguiente

Definición A.2 Si $I = [a, b]$, se llama **primer** (respectivamente **segundo**) extremo de la curva \mathcal{C} al punto del espacio $\mathbf{r}(a) \equiv P_a$ (respectivamente $\mathbf{r}(b) \equiv P_b$) y diremos que \mathcal{C} es una curva **cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Sea $x_0 \in I$. El número real dado por

$$t : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_{x_0}^x \|\dot{\mathbf{r}}(\theta)\| d\theta,$$

define la función **longitud de arco** y la $t(x)$ es justamente la **longitud de la curva entre los puntos** $P = \mathbf{r}(x)$ y $P_0 = \mathbf{r}(x_0)$. $t \in C^\infty$ y, siendo \mathbf{r} regular, $t'(x) = \|\dot{\mathbf{r}}(x)\| > 0$ ($\forall a \leq x \leq b$), es decir t es función invertible entre I y $J = t([a, b])$. Indiquemos con $x(t)$ su inversa. Si escogemos t como parámetro de \mathbf{r} , se obtiene

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \|\dot{\mathbf{r}}(x(t))\| = \|\dot{\mathbf{r}}(x) x'(t)\| = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(x)\|}{t'(x)} = 1, \quad \forall t \in J.$$

Si $\|\dot{\mathbf{r}}(x)\| = 1 \quad \forall x \in I$, entonces la parametrización de \mathbf{r} se llama **natural** o **abscisa curvilínea**.

Todo ello conlleva a la siguiente

Proposición A.3 Si $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular, existe siempre una parametrización natural de \mathbf{r} .

Si \mathbf{r} es una curva parametrizada por su abscisa curvilínea, se define **vector unitario tangente** en t a la curva el siguiente:

$$(A.2) \quad \mathbf{t}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \forall t \in I.$$

Definición A.4 Sea $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por su abscisa curvilínea t . El número $\kappa(t) := \|\ddot{\mathbf{r}}(t)\|$ define la **curvatura** de \mathbf{r} en t .

En un punto en que $\kappa(t) \neq 0$, está bien definido un vector $\mathbf{n}(t)$ en la dirección $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ mediante la relación $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$.

$\mathbf{n}(t)$ se llama **vector unitario normal** en t a \mathbf{r} y es ortogonal a $\mathbf{t}(t)$.

Para ultimar, es posible definir el **vector unitario binormal** a \mathbf{r} en t :

$$(A.3) \quad \mathbf{b}(t) := \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{n}(t).$$

Definición A.5 Sea $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por su abscisa curvilínea t tal que $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, $t \in I$. El número $\tau(t)$ definido por $\dot{\mathbf{b}}(t) = \tau(t)\mathbf{n}(t)$ define la **torsión** de \mathbf{r} en t .

Generalicemos, sin entrar en detalles, los resultados y las definiciones dadas al caso en que la curva no esté necesariamente parametrizada por su abscisa natural.

Dada una curva \mathbf{r} su **vector unitario tangente**, **normal** y **binormal** están definidos por

$$(A.4) \quad \mathbf{t}(x) := \frac{\dot{\mathbf{r}}(x)}{\|\dot{\mathbf{r}}(x)\|}, \quad \forall x \in I,$$

$$(A.5) \quad \mathbf{n}(x) := \frac{\dot{\mathbf{t}}(x)}{\|\dot{\mathbf{t}}(x)\|}, \quad \forall x \in I,$$

y

$$(A.6) \quad \mathbf{b}(x) := \mathbf{t}(x) \wedge \mathbf{n}(x), \quad \forall x \in I.$$

Es posible, además, calcular la curvatura y la torsión en términos de \mathbf{r} en un punto x . Más precisamente

$$(A.7) \quad \kappa(x) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(x) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(x)\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(x)\|^3},$$

y

$$(A.8) \quad \tau(x) = \frac{|\det[\dot{\mathbf{r}}(x), \ddot{\mathbf{r}}(x), \ddot{\mathbf{r}}(x)]|}{\|\dot{\mathbf{r}}(x) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(x)\|}.$$

En conclusión, por cada punto P de una curva regular $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$, es siempre posible definir una terna de vectores

$$(A.9) \quad (\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)),$$

que forma una base ortonormal de \mathbb{R}^3 y que “sigue” la curva punto a punto: esta base se conoce con el nombre de **base móvil de la curva** o **triedro de Frenet**.

Escogiendo, además, de dos en dos los vectores de la base móvil de Frenet, se pueden definir tres distintos planos:

$$(A.10) \quad \begin{cases} \text{plano osculador, el definido por los vectores } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{n}, \\ \text{plano normal, el definido por los vectores } \mathbf{n} \text{ y } \mathbf{b}, \\ \text{plano rectificante, el definido por los vectores } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{b}. \end{cases}$$

Los escalares que acabamos de definir (la curvatura y la torsión) tienen un preciso significado geométrico:

- κ mide en cada punto la desviación de la curva \mathbf{r} con respecto a la recta pasante por este punto y de dirección la tangente \mathbf{t} , o bien mide la variación de dirección del mismo vector tangente \mathbf{t} ;
- τ mide en cada punto la desviación de la curva \mathbf{r} con respecto al plano osculador por este punto, o bien mide la variación de la dirección de los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} .

A.2. Superficies de \mathbb{R}^3 : la curvatura de Gauss

Definición A.6 Sea D un subconjunto abierto y acotado contenido en \mathbb{R}^2 . Una **superficie regular de parámetros** (x, y) en \mathbb{R}^3 es una aplicación $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$) infinitamente derivable tal que

$$(A.11) \quad \text{rang}(J) = 2, \quad \forall (x, y) \in D,$$

siendo J la matriz Jacobiana de φ dada por

$$(A.12) \quad J := \begin{pmatrix} \varphi_{1,x} & \varphi_{1,y} \\ \varphi_{2,x} & \varphi_{2,y} \\ \varphi_{3,x} & \varphi_{3,y} \end{pmatrix}.$$

φ se llama **parametrización de la superficie**. El **soporte de la superficie** (o **traza**) es el subconjunto de \mathbb{R}^3 imagen de D a través de φ y denotado por \mathcal{S} .

Indicaremos con P un punto genérico de la superficie, esto es la imagen a través de φ de (x, y) en D ($P \equiv \varphi(x, y)$).

Dada una superficie φ sus **vectores tangentes** están definidos por

$$(A.13) \quad \begin{cases} \mathbf{T}_x(x, y) := \varphi_{,x}, & \forall (x, y) \in D, \\ \mathbf{T}_y(x, y) := \varphi_{,y}, & \forall (x, y) \in D. \end{cases}$$

Estos dos vectores definen en cada punto el **plano tangente a la superficie** que indicamos con $T_P(\mathcal{S})$.

Multiplicando vectorialmente $\mathbf{T}_x(x, y)$ y $\mathbf{T}_y(x, y)$, se define el **campo de vectores normales** a la superficie:

$$(A.14) \quad \mathbf{N}(x, y) := \frac{\mathbf{T}_x(x, y) \wedge \mathbf{T}_y(x, y)}{\|\mathbf{T}_x(x, y) \wedge \mathbf{T}_y(x, y)\|}.$$

Si por un lado el comportamiento de una curva respecto de su vector tangente está bien definido en función de su curvatura κ en cada punto, por el otro el problema de cómo las superficies se “alejan” de su plano tangente es más complicado.

Empecemos el estudio con las siguientes

Definición A.7 Se llama **primera forma fundamental I** aquella tal que su matriz de representación es:

$$(A.15) \quad \mathbf{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

siendo

$$(A.16) \quad E := \varphi_{,x} \cdot \varphi_{,x}, \quad F := \varphi_{,x} \cdot \varphi_{,y}, \quad G := \varphi_{,y} \cdot \varphi_{,y}.$$

Equivalentemente, se llama **segunda forma fundamental II** aquella tal que su matriz de representación es:

$$(A.17) \quad \mathbf{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

siendo

$$(A.18) \quad L := \mathbf{N} \cdot \varphi_{,xx}, \quad M := \mathbf{N} \cdot \varphi_{,xy}, \quad N := \mathbf{N} \cdot \varphi_{,yy}.$$

Estas dos formas contienen mucha información a cerca de la geometría de la superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ en un entorno de un punto genérico:

Definición A.8 Sea $\mathbf{e} \in T_P(\mathcal{S})$ un versor tangente a la superficie \mathcal{S} en el punto P . La **curvatura normal** (o simplemente **curvatura**) en la dirección \mathbf{e} es el escalar

$$(A.19) \quad \mathcal{K}(\mathbf{e}) := \mathbf{II}(\mathbf{e}, \mathbf{e}).$$

Pongamos

$$(A.20) \quad \mathbf{S}_P^1(\mathcal{S}) := \{\mathbf{e} \in T_P(\mathcal{S}) : \|\mathbf{e}\| = 1\}.$$

La curvatura normal, siendo una función

$$(A.21) \quad \mathcal{K} : \mathbf{S}_P^1(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R},$$

continua y definida en un conjunto cerrado y limitado, tiene en ello un máximo y un mínimo. Estos dos valores reciben el nombre de **curvaturas principales**, y a las direcciones a lo largo de las cuales \mathcal{K} toma el valor de las curvaturas principales se les denominan **direcciones principales**.

Sean \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 las curvaturas principales, entonces

Definición A.9 La **curvatura de Gauss** de una superficie \mathcal{S} en su punto P es,

$$(A.22) \quad K(P) := \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2$$

La **curvatura media** de \mathcal{S} en P es,

$$(A.23) \quad H(P) := \frac{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2}{2}.$$

Para calcular explícitamente $K(P)$ y $H(P)$ utilizando la primera y la segunda forma fundamental podemos utilizar las formulas sucesivas:

$$(A.24) \quad K(P) := \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$(A.25) \quad H(P) := \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

Observación A.10 Recordamos la *desigualdad de Schwarz*. Para cada vector \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbb{R}^n , vale

$$(A.26) \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

y vale el signo de igualdad si y solo si los dos vectores son paralelos.

En (A.24) y (A.25) el denominador es siempre positivo. De hecho,

$$EG - F^2 = \|\varphi_{,x}\|^2 \|\varphi_{,y}\|^2 - (\varphi_{,x} \cdot \varphi_{,y})^2.$$

Siendo $\varphi_{,x}$ y $\varphi_{,y}$ linealmente independientes, se tiene $EG - F^2 > 0$.

A partir de todo ello, clasifiquemos los puntos de una superficie en función de su curvatura de Gauss o media.

- Un punto $P \in \mathcal{S}$ se dice **elíptico** si $K(P) > 0$.
- Un punto $P \in \mathcal{S}$ se dice **hiperbólico** si $K(P) < 0$.
- Un punto $P \in \mathcal{S}$ se dice **parabólico** si $K(P) = 0$ y $H(P) \neq 0$.
- Un punto $P \in \mathcal{S}$ se dice **planar** si $K(P) = 0$ y $H(P) = 0$.

A partir de esto se tiene la siguiente

Definición A.11 Una superficie regular \mathcal{S} se llama **superficie minimal** si y sólo si su curvatura media H es idénticamente nula.

Otra útil representación de las superficies minimales se expresa en la siguiente

Proposición A.12 Si la gráfica de una función regular $z = z(x, y)$ define una superficie minimal S , entonces z verifica la siguiente **ecuación de las superficies minimales** (o **ecuación de Lagrange**):

$$(A.27) \quad (1 + z_{,y}^2)z_{,xx} - 2z_{,xy}z_{,x}z_{,y} + (1 + z_{,x}^2)z_{,yy} = 0.$$

Observación A.13 *A partir de la Definición A.11, se puede afirmar que en una superficie minimal $K \leq 0$. De hecho en las superficies minimales todos los puntos son hiperbólicos o planares ya que si $H = 0$ las dos curvaturas principales son opuestas: $\mathcal{K}_1 = -\mathcal{K}_2$ (eventualmente, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = 0$).*

Notemos, además, que los coeficientes

$$\begin{cases} 1 + z_{,x}^2, \\ z_{,x}z_{,y}, \\ 1 + z_{,y}^2, \end{cases}$$

de la ecuación (A.27) coinciden, respectivamente, con los coeficientes E , F y G de la primera forma fundamental asociada a una superficie φ parametrizada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y)).$$

Tale forma, identificada con la siguiente matriz de representación

$$\mathbf{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z_{,x}^2 & z_{,x}z_{,y} \\ z_{,x}z_{,y} & 1 + z_{,y}^2 \end{pmatrix},$$

es definida positiva.

En definitiva la ecuación (A.27) “expresa” una **correspondencia entre la positividad de la primera forma fundamental I y la curvatura de Gauss K (no positiva) de las superficie minimales que resuelven la misma ecuación.**

Apéndice B

Elementos básicos sobre las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales de \mathbb{R}^2

En este capítulo estudiaremos y clasificaremos las *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del segundo orden*. Para las demostraciones o un análisis en mayor profundidad consultar las referencias [7], [9], [11] o [38].

B.1. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (E.D.P.): aspectos generales

Sean dadas A , B , C y Φ funciones regulares: una *ecuación diferencial en derivadas parciales (E.D.P.) casi-lineal del segundo orden en la variable $u = u(x, y)$* tiene una expresión general del tipo:

$$(B.1) \quad A(x, y)u_{,xx} + 2B(x, y)u_{,xy} + C(x, y)u_{,yy} + \Phi(x, y, u, u_{,x}, u_{,y}) = 0.$$

Si existen cuatro funciones D , E , F y G de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\Phi = D(x, y)u_{,x} + E(x, y)u_{,y} + F(x, y)u + G(x, y),$$

entonces hablamos de una *ecuación diferencial lineal del segundo orden*.

La ecuación considerada tiene, generalmente, infinitas soluciones, por lo que para garantizar la “eventual” unicidad, la función $u(x, y)$ tiene que satisfacer condiciones adicionales (*condiciones de Cauchy*) a lo largo de una curva plana $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

B.2. Problema de Cauchy y curvas características: clasificación de las E.D.P.

De acuerdo con la **Proposición A.3**, sea \mathbf{r} una curva plana contenida en \mathbb{R}^2 y parametrizada por su abscisa curvilínea t , dada por

$$\Gamma : \begin{cases} x := r_1(t), \\ y := r_2(t), \end{cases} \quad \text{con } \dot{r}_1(t)^2 + \dot{r}_2(t)^2 = 1, \quad \begin{cases} \mathbf{t} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2), \\ \mathbf{n} = (\dot{r}_2, -\dot{r}_1). \end{cases}$$

La cuestión que ahora nos planteamos consiste en encontrar una solución $u = u(x, y)$, de la ecuación (B.1) y que verifique las condiciones de Cauchy siguientes:

$$u(r_1(t), r_2(t)) = u(t); \quad u_{,x}(r_1(t), r_2(t)) = p(t); \quad u_{,y}(r_1(t), r_2(t)) = q(t).$$

En tales condiciones las funciones $u(t)$, $p(t)$ y $q(t)$ no pueden darse arbitrariamente, sino que están relacionadas con $r_1(t)$ y $r_2(t)$ de la siguiente forma

$$u'(t) = u_{,x}\dot{r}_1(t) + u_{,y}\dot{r}_2(t) = p(t)\dot{r}_1(t) + q(t)\dot{r}_2(t).$$

Por otra parte tendremos que, si tal solución u existe, debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{cases} p'(t) = u_{,xx}\dot{r}_1(t) + u_{,xy}\dot{r}_2(t), \\ q'(t) = u_{,yx}\dot{r}_1(t) + u_{,yy}\dot{r}_2(t). \end{cases}$$

Obtenemos, así, el sistema lineal en las incógnitas $u_{,xx}$, $u_{,xy}$ y $u_{,yy}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & 0 \\ 0 & \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,xx} \\ u_{,xy} \\ u_{,yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix},$$

que tiene solución si

$$\det \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & 0 \\ 0 & \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \neq 0,$$

o equivalentemente si

$$A(\dot{r}_2)^2 - 2B\dot{r}_2\dot{r}_1 + C(\dot{r}_1)^2 \neq 0.$$

Por tanto sobre una curva que satisfaga esta propiedad los datos de Cauchy $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $r_1(t)$, y $r_2(t)$ determinan las derivadas segundas de u . Derivando respecto de x , y considerando

$$\hat{p}(t) = u_{,xx}(r_1(t), r_2(t)),$$

y

$$\hat{q}(t) = u_{,xy}(r_1(t), r_2(t)),$$

tenemos el sistema lineal en las incógnitas $u_{,xxx}$, $u_{,xxy}$ y $u_{,xyy}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & 0 \\ 0 & \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,xxx} \\ u_{,xxy} \\ u_{,xyy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ p'\hat{t} \\ q'\hat{t} \end{pmatrix}, \quad (\hat{\Phi} \text{ función de } A, B, C \text{ y } u),$$

que tiene solución si

$$\det \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & 0 \\ 0 & \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \neq 0,$$

o equivalentemente si

$$A(\dot{r}_2)^2 - 2B\dot{r}_2\dot{r}_1 + C(\dot{r}_1)^2 \neq 0.$$

En este caso podemos despejar estas derivadas terceras de la u sobre nuestra curva y así sucesivamente. Esto nos permite construir una solución formal en serie de potencias de $(x - r_1^0)$ y $(y - r_2^0)$, en un punto (r_1^0, r_2^0) de la curva.

Podemos, entonces, afirmar que $u(x, y)$ es desarrollable en serie de Taylor a partir de las condiciones de Cauchy, si y solo si

$$A(\dot{r}_2)^2 - 2B\dot{r}_2\dot{r}_1 + C(\dot{r}_1)^2 \neq 0.$$

Definición B.1 Una *curva característica* para una E.D.P. casi lineal del tipo (B.1) es una familia de curvas que resuelve la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$A(\dot{r}_2)^2 - 2B\dot{r}_2\dot{r}_1 + C(\dot{r}_1)^2 = 0,$$

o bien, escogiendo $r_1(x) = x$ y $r_2(x) = y(x)$,

$$(B.2) \quad y'(x) = \frac{B(x, y(x)) \mp \sqrt{B(x, y(x))^2 - A(x, y(x))C(x, y(x))}}{A(x, y(x))}.$$

El signo de la expresión $B(x, y(x))^2 - A(x, y(x))C(x, y(x))$ determina el tipo de E.D.P. Más precisamente:

- si $B^2 - AC > 0$, existen dos familias de curvas características: la ecuación es de tipo **hiperbólico**;
- si $B^2 - AC = 0$, existe una familia de curvas características: la ecuación es de tipo **parabólico**;

- si $B^2 - AC < 0$, no existe ninguna familia (real) de curvas características: la ecuación es de tipo *elíptico*.

A raíz de todo ello se puede concluir lo siguiente:

Conclusión B.2 (acerca de una E.D.P. hiperbólica).

El problema de Cauchy para una E.D.P. hiperbólica está bien definido a lo largo de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ si y sólo si la curva no coincide con ninguna de las curvas perteneciente a una de las dos familias de características del problema.

Conclusión B.3 (acerca de una E.D.P. parabólica).

El problema de Cauchy para una E.D.P. parabólica está bien definido a lo largo de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ si y sólo si la curva no coincide con ninguna de las curvas perteneciente a la familia de características del problema.

Conclusión B.4 (acerca de una E.D.P. elíptica).

El problema de Cauchy para una E.D.P. elíptica está bien definido a lo largo de cualquier curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

B.2.1. Propagación de singularidades

En esta sección veremos que las curvas características están relacionadas con la propagación de cierto tipo de singularidades de la solución de una E.D.P.

Consideremos una E.D.P. casi lineal definida en un abierto D del plano \mathbb{R}^2

$$\mathcal{L}(u) := A(x, y)u_{,xx} + 2B(x, y)u_{,xy} + C(x, y)u_{,yy} + \Phi(x, y, u, u_{,x}, u_{,y}) = 0,$$

donde $\Gamma = \{(r_1(t), r_2(t))\}$ es una curva del abierto D tal que $D \setminus \Gamma$ sea la unión disjunta de dos abiertos X e Y . Consideremos una función u en D , tal que $u = u_1$ en X y $u = u_2$ en Y , con u_1 y u_2 regulares y soluciones de la E.D.P. respectivamente en $X \cup \Gamma$ e $Y \cup \Gamma$. Ocurre, por continuidad, que para todo t

$$(B.3) \quad \begin{cases} u_1(r_1(t), r_2(t)) = u_2(r_1(t), r_2(t)), \\ u_{1,x}(r_1(t), r_2(t)) = u_{2,x}(r_1(t), r_2(t)), \\ u_{1,y}(r_1(t), r_2(t)) = u_{2,y}(r_1(t), r_2(t)). \end{cases}$$

Sean

$$\begin{cases} s_{11}(t) = u_{1,xx}(r_1(t), r_2(t)) - u_{2,xx}(r_1(t), r_2(t)), \\ s_{12}(t) = u_{1,xy}(r_1(t), r_2(t)) - u_{2,xy}(r_1(t), r_2(t)), \\ s_{22}(t) = u_{1,yy}(r_1(t), r_2(t)) - u_{2,yy}(r_1(t), r_2(t)), \end{cases}$$

los saltos de las derivadas segundas a lo largo de Γ . Operando obtenemos:

$$\begin{cases} 0 = \dot{r}_1 s_{11} + \dot{r}_2 s_{12}, \\ 0 = \dot{r}_1 s_{12} + \dot{r}_2 s_{22}, \end{cases}$$

lo cual implica que

$$(B.4) \quad s_{12} = -\frac{\dot{r}_1}{\dot{r}_2} s_{11}, \quad s_{22} = -\frac{\dot{r}_1}{\dot{r}_2} s_{12} = \frac{\dot{r}_1^2}{\dot{r}_2^2} s_{11}.$$

Por otra parte considerando $\mathcal{L}(u_1) - \mathcal{L}(u_2) = 0$ sobre la curva, teniendo en cuenta (B.3), sigue que

$$As_{11} + 2Bs_{12} + Cs_{22} = 0,$$

lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & 0 \\ 0 & \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Todo ello conlleva a que, si el determinante de la matriz es no nulo (es decir la curva no es característica), hay solución única $s_{\alpha\beta} = 0$ y no hay saltos en las derivadas segundas, por lo que nuestra solución u será de clase C^2 , pero si el determinante se anula, la curva es característica y en tal caso encontraríamos una solución no nula para los saltos, es decir unas singularidades a lo largo de las curvas características. Observemos que, por lo tanto, el salto en un punto determina el salto en cualquier otro punto. Por ejemplo si en un punto t_0 no hay salto, $s_{11}(t_0) = 0$, no lo hay, según la (B.4), en ningún punto: $s_{12} = s_{22} = s_{11} = 0$; es decir las derivadas segundas de ambas soluciones coinciden y u será de clase C^2 .

B.3. Formulación variacional de algunos problemas de contorno de tipo elíptico

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y regular con frontera $\partial D \equiv \Gamma$, soporte de una curva plana. Un *operador elíptico simétrico en forma de divergencia en D* está definido por:

$$(B.5) \quad \mathcal{L}u := - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (a_{\alpha\beta} u_{,\alpha})_{,\beta} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \nabla u), \quad a_{\alpha\beta} \in C^\infty(D),$$

siendo

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{con } a_{12} = a_{21}.$$

Además \mathcal{L} verifica las *condiciones de elipticidad* si y sólo si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$(B.6) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \equiv (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \quad \forall (x, y) \in D, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2.$$

Se define, a partir de lo dicho, el siguiente

Problema B.5 (de Dirichlet). Sea dado el operador elíptico en forma de divergencia (B.5). Por cada función f asignada en D y g en $\Gamma \equiv \partial D$, hallar u tal que

$$(B.7) \quad \mathcal{P}_D : \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } D, \\ u = g & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

Con el objetivo de dar algunos resultados principales para el **Problema B.5**, definamos el siguiente conjunto de funciones:

$$(B.8) \quad K := \{v \in H^1(D) \text{ tal que } v - g \in H_0^1(D)\}.$$

Es importante distinguir dos tipos de solución.

Definición B.6 Una *solución fuerte* o (*clásica*) para el **Problema B.5** es una función u de clase C^2 tal que verifique punto a punto el sistema (B.7).

Definición B.7 Una *solución débil* para el **Problema B.5** es una función $u \in K$ tal que

$$(B.9) \quad \int_D (\mathbf{A} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v \, dD = \int_D f v \, dD, \quad \forall v \in H_0^1(\Gamma).$$

El resultado fundamental es:

Teorema B.8 (de existencia y unicidad por el Problema de Dirichlet). Sea dado el operador elíptico en forma de divergencia (B.5) tal que verifique la condición (B.6). Para cada función $f \in L^2(D)$ y $g \in C^1(\Gamma)$ existe una única solución débil $u \in K$ del **Problema B.5**, dada por

$$(B.10) \quad u = \min_{v \in K} \mathcal{F}(v),$$

$$(B.11) \quad \mathcal{F}(v) := \frac{1}{2} \int_D (\mathbf{A} \cdot \nabla v) \cdot \nabla v \, dD - \int_D f v \, dD,$$

siendo K el conjunto de funciones definido por la expresión (B.8).

En particular si $g \equiv 0$ (**caso homogéneo**), entonces

$$(B.12) \quad u = \min_{v \in H_0^1(D)} \left\{ \frac{1}{2} \int_D (\mathbf{A} \cdot \nabla v) \cdot \nabla v \, dD - \int_D f v \, dD \right\}.$$

Es importante subrayar que una solución fuerte, que es la útil y la adecuada para todos los problemas diferenciales de este estilo, es también débil pero la aserción opuesta es en general falsa: depende de los datos del problema. Más precisamente, se podría demostrar esta

Proposición B.9 (Retorno a una solución fuerte). Si $u \in C^2(D)$ es una solución débil del **Problema B.5**, entonces es también solución fuerte.

Para terminar el asunto, hace falta garantizar, entonces, un cierto grado de regularidad para la solución débil.

Teorema B.10 (Regularidad para el Problema de Dirichlet). Sea D un dominio regular con frontera Γ acotada. Sea $f \in L^2(D)$ y $u \in H_0^1(\Gamma_D)$ una solución débil de **Problema B.5**. Entonces $u \in H^2(D)$. Además si D es de clase C^{m+2} y si $f \in H^m(D)$, entonces $u \in H^{m+2}(D)$.

Los resultados de regularidades están estrictamente relacionados con el siguiente

Teorema B.11 (Inmersión de Rellich-Kondrachov-Sobolev). Si D es un abierto de \mathbb{R}^2 de clase C^1 con Γ acotada, entonces

$$(B.13) \quad H^m(D) \subset C^{m-1}(\bar{D}).$$

La relación (B.13) y el resultado de regularidad del **Teorema B.10**, nos garantizan que con sólo escoger los datos correspondientes de clase $m = 1$, la solución débil u es H^3 , esto es C^2 , entonces clásica por las consideraciones hechas en **Proposición B.9**. En particular, si D es de clase C^∞ y $f \in C^\infty$, u es clásica y pertenece a C^∞ .

B.3.1. Principios del máximo para problemas elípticos

En este apartado daremos dos importantes teoremas.

El primero es conocido como *Principio del Máximo Débil* (referencia [14]).

Teorema B.12 (Principio del Máximo Débil). Sea \mathcal{L} el operador elíptico (B.5) definido en un dominio regular D y tal que verifique las condiciones (B.6). Supongamos que

$$\mathcal{L}u \geq 0 \quad (\mathcal{L}u \leq 0) \quad \text{en } D,$$

siendo $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$. Entonces u alcanza su máximo (mínimo) en ∂D , es decir

$$\sup_D u = \sup_\Gamma u \quad (\inf_D u = \inf_\Gamma u),$$

o bien, siendo u continua hasta el borde,

$$\mbox{máx}_D u = \mbox{máx}_\Gamma u \quad (\mbox{mín}_D u = \mbox{mín}_\Gamma u).$$

Una de las múltiples aplicaciones de este teorema es la siguiente

Observación B.13 (Estabilidad del Problema de Dirichlet). Si u es una cualquiera función continua en \overline{D} se tiene

$$u \leq \max_D u.$$

En particular si u resuelve el **Problema B.5**, debido al **Teorema B.12**

$$u \leq \sup_D u = \sup_{\Gamma} u = \sup_{\Gamma} g.$$

Consideremos ahora dos funciones g_1 y g_2 de $C^0(\Gamma)$ “cercanas” la una a la otra, esto es, tales que e

$$\|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma)} = \max_{\Gamma} |g_1 - g_2| < \varepsilon \text{ en } \Gamma,$$

siendo ε un número real pequeño y positivo. Sean, en estas condiciones, u_1 y u_2 las soluciones respectivamente de los problemas

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = f \text{ en } D, \\ u_1 = g_1 \text{ en } \Gamma. \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2 = f \text{ en } D, \\ u_2 = g_2 \text{ en } \Gamma. \end{cases}$$

La función $\tilde{u} := u_1 - u_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{u} = 0 \text{ en } D, \\ \tilde{u} = g_1 - g_2 \text{ en } \Gamma. \end{cases}$$

Debido al **Principio del Máximo Débil** se ha

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(D)} = \max_D \tilde{u} \leq \max_{\Gamma} \tilde{u} = \max_{\Gamma} (g_1 - g_2) = \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

y, en particular,

$$\begin{aligned} (B.14) \quad \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(D)} &= \max_D |u_1 - u_2| = \max_D |\tilde{u}| \leq \max_{\Gamma} |\tilde{u}| \\ &= \max_{\Gamma} |g_1 - g_2| = \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dicho de otra forma, la desigualdad (B.14) demuestra la **dependencia continua de la solución con los datos de contorno** para el **Problema B.5**, esto es, **si los datos de frontera varían poco entre ellos, la misma conclusión vale para las soluciones.**

Dediquémonos ahora al *Principio del Máximo Fuerte*. Ante todo hace falta una definición.

Definición B.14 Un dominio D de \mathbb{R}^2 se dice satisfacer la **condición de esfera interior** en un punto del plano $(x_0, y_0) \in \partial D$ si y sólo si existe una circunferencia $B \subset D$ tal que $(x_0, y_0) \in \partial B$.

A partir de esta definición es posible demostrar el siguiente teorema (*Principio del Máximo Fuerte*, consúltese la referencia [14]).

Teorema B.15 (Principio del Máximo Fuerte). *Sea \mathcal{L} el operador elíptico (B.5) definido en un dominio D y que verifique las condiciones (B.6). Sea $(x_0, y_0) \in \partial D$ tal que*

- (i) *u sea continua en (x_0, y_0) ;*
- (ii) *$u(x_0, y_0) > u(x, y)$ ($u(x_0, y_0) > u(x, y)$) por cada $(x, y) \in D$;*
- (iii) *D satisfaga la condición de esfera interior en (x_0, y_0) .*

Entonces, si $\mathcal{L}u \geq 0$ ($\mathcal{L}u \leq 0$) en D , se tiene que

$$u_{,n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}(x_0, y_0) > 0 \quad (u_{,n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}(x_0, y_0) < 0),$$

siendo \mathbf{n} la normal exterior a ∂D .

Es importante observar que los dominios con “cierta regularidad” (por ejemplo los dominios limitados cuya frontera es una curva regular) son dominios que verifican la propiedad de esfera interior a los cuales, entonces, es posible aplicar el **Teorema B.15**.

Apéndice C

Generalidades del Método de los Elementos Finitos

El contenido de este capítulo se centra en los fundamentos generales del *Método de los Elementos Finitos*.

C.1. Aspectos básicos del Método de los Elementos Finitos

El *Método de los Elementos Finitos* (abreviado M.E.F.)¹ es un método numérico utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales típicas en problemas de ingeniería y física.

Se basa en dividir el dominio en el que está definido el problema en una serie de subdominios o *elementos finitos* en los que, de un lado, se distinguen una serie de puntos representativos llamados *nodos* y, de otro, se definen unas ciertas *funciones de forma*; el conjunto de los nodos y de las adyacencias definen la *malla*.

Los cálculos se realizan sobre una malla creada a partir del dominio con programas especiales llamados *generadores de mallas*.

¹Véanse las referencias [18] y [40].

C.2. Residuos ponderados y forma débil de un problema elíptico de Dirichlet en \mathbb{R}^2

Con referencia al **Apartado B.3**, reconsideremos el **Problema de Dirichlet B.5**:

Sea dado el operador elíptico en forma de divergencia (B.5). Por cada función f asignada en D y g en Γ , hallar u tal que

$$\mathcal{P}_D : \begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \nabla u) = f & \text{en } D, \\ u = g & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

La resolución del sistema anterior equivale a la solución del siguiente problema en forma débil:

hallar u tal que

$$(C.1) \quad \int_D (\nabla v) \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla u) dD = \int_D f v dD, \quad \forall v \in H_0^1(\Gamma_D).$$

Como se expresó en el **Teorema B.8** del **Apartado B.3** es posible resolver la ecuación (C.1), y su (única) solución es

$$(C.2) \quad u = \min_{v \in K} \mathcal{F}(v),$$

$$(C.3) \quad \mathcal{F}(v) := \frac{1}{2} \int_D (\mathbf{A} \cdot \nabla v) \cdot \nabla v dD - \int_D f v dD,$$

siendo K el conjunto de funciones definido por la expresión (B.8).

Actuando de forma numérica, aproximemos, ahora, la solución u por la siguiente expresión:

$$u \simeq \sum_{j=1}^n N_j(x, y) u_j,$$

siendo n el número total de nodos que componen la malla, u_j los valores nodales *incógnitos* de la función u , y que componen el vector n -dimensional \mathbf{u} , y N_j las funciones de forma lineales de clase C^0 que valen, en cada elemento, 1 en el nodo j y 0 en los de más. Escogiendo, además, $v = N_i$, al sustituir en la ecuación (C.1) se obtiene el sistema

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

siendo

$$(\mathbf{K})_{ij} = K_{ij} = \int_D (\nabla N_i) \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla N_j) dD,$$

y

$$(\mathbf{f})_i = f_i = \int_D f N_i dD.$$

Si la interpolación $u \simeq \sum_{j=1}^n N_j u_j$ no cumple las condiciones de contorno de Dirichlet, es posible imponerlas utilizando algunos métodos adecuados: aquí utilizaremos el **Método de los multiplicadores de Lagrange** que explicaremos brevemente a continuación.

Si indicamos con m los nodos pertenecientes al borde de D y que definen los “puntos vinculados” de la función u , es posible definir

$$g \simeq \sum_{j=1}^m N_j(x) g_j,$$

siendo g_j los valores nodales *conocidos* de la función g , y que componen el vector m -dimensional \mathbf{g} , y N_j las funciones de forma lineales de clase C^0 que valen, en cada elemento de borde, 1 en el nodo j y 0 en el otro.

Como consecuencia de ello la ecuación $u = g$ en Γ puede expresarse de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{g},$$

siendo $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matriz compuesta de “unos y ceros” y que relaciona la u con su valor al borde g en un cierto punto j . Con estas notaciones el sistema de ecuaciones resultante del problema de extremos es

$$(C.4) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{O}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix},$$

es decir

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{g},$$

con \mathbf{G} matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}_r^T \\ \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

\mathbf{O}_m matriz cuadrada m dimensional compuesta por todos ceros y $\boldsymbol{\lambda}$ vector de \mathbb{R}^m de los **multiplicadores de Lagrange**.

Apéndice D

Coeficiente de amortiguamiento (Método de Relajación Dinámica)

Se considera el sistema dinámico simple indicado en Figura D.1. El cuerpo de masa m se mueve, bajo la acción longitudinal a lo largo de la dirección x de un muelle de constante elástica k , sobre un plano que presenta un amortiguamiento dado por $\dot{x}c$, siendo c función del material del cuerpo y del suelo. En ausencia de fuerzas exteriores, la ecuación dinámica es

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Poniendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad 2\zeta\omega = \frac{c}{m},$$

se tiene la siguiente ecuación del movimiento en función de la *pulsación* ω y del *coeficiente de amortiguamiento* ζ :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = 0.$$

Siendo

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0,$$

la ecuación característica correspondiente, obtenemos las siguientes raíces:

$$\lambda_{1,2} = \omega(-\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1}).$$

- Si $|\zeta| > 1$, existen dos soluciones reales para λ correspondientes al movimiento

$$x(t) = Ae^{(-\zeta+\mu)\omega t} + Be^{(-\zeta-\mu)\omega t},$$

siendo $\mu = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ y A y B constantes reales.

162 Coeficiente de amortiguamiento (Método de Relajación Dinámica)

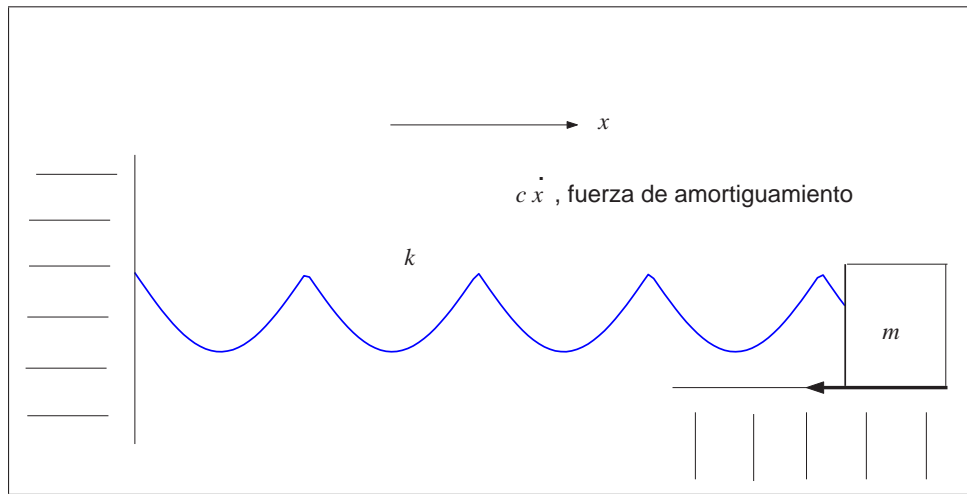


Figura D.1: Sistema dinámico con muelle y amortiguamiento.

- Si $|\zeta| = 1$, existe una única solución real para λ correspondiente al movimiento

$$x(t) = [A + Bt]e^{-\omega t},$$

siendo A y B constantes reales.

- Si $|\zeta| < 1$, existen dos soluciones complejas para λ correspondientes al movimiento

$$x(t) = (A \cos \nu \omega t + B \sin \nu \omega t)e^{-\zeta \omega t}.$$

siendo $\nu = \sqrt{1 - \zeta^2}$ y A y B constantes reales.

Se suele hablar de **amortiguamiento crítico** cuando $\zeta = 1$. Se obtiene, así

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega = 2 \times 1 \times 2\pi f = 4\pi f,$$

siendo f la frecuencia fundamental. Finalmente

$$c = 4\pi m f.$$