

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE  
ESTRUCTURAS NAVALES**

Autor: Julio García Espinosa  
Director: Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra  
Codirector: Honorio Sierra Cano



## Capítulo 3

# Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas. El Método de Pasos Fraccionados

*En el capítulo anterior se presentó el método denominado Cálculo Finitesimal (CF) aplicado a la estabilización de la ecuación de convección difusión y se expusieron las posibilidades de generalización del método CF a otro tipo de problemas. En el presente capítulo se aplicará este método de estabilización a las ecuaciones de Navier Stokes. A continuación se planteará un procedimiento de resolución de las mencionadas ecuaciones, que presenta grandes ventajas frente a otros, para los objetivos del proyecto. El procedimiento mencionado se apoyará en el método de los elementos finitos y el algoritmo de pasos fraccionados semi implícito para la discretización y resolución de las ecuaciones. Durante el desarrollo del capítulo se expondrán las modificaciones para tener en cuenta el movimiento de la malla de elementos finitos mediante técnicas ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Se incluye una discusión sobre las condiciones de contorno aplicables, así como otros conceptos relacionados como la turbulencia. En último lugar se presentan varios ejemplos básicos de aplicación de las ecuaciones mencionadas.*

### 3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han discutido las inestabilidades asociadas a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando el método estándar de Galerkin. Como ya se mencionó, estas inestabilidades son de dos tipos,

unas asociadas al carácter convectivo de la ecuación de balance de cantidad de movimiento y otras debidas a la imposición de la incompresibilidad del fluido, que pone limitaciones a la elección del espacio de interpolación de los campos de velocidad y presión.

En los últimos años ha existido una intensa búsqueda de la solución a estos problemas. Desde el uso de interpolaciones velocidad-presión que satisficieran la condición  $BB$ , junto al uso de metodologías tipo *upwind*, hasta el más reciente basado en la técnica de *Galerkin Least/Squares* que permite utilizar interpolación de igual orden en velocidad y presión, evitando la restricción  $BB$ , gracias a la adición de un término proporcional al laplaciano de la presión en la ecuación de balance de masa.

Del mismo modo, otros métodos como *Characteristic Galerkin*, *Variational Multiscale* o *Residual-Free Bubbles* permiten corregir total o parcialmente los problemas de inestabilidad que plantea la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Los métodos mencionados, aún habiendo recibido un importante respaldo matemático y práctico, no cuentan con la suficiente base física tras ellos. Además, la mayoría de ellos pierden estabilidad en presencia de gradientes elevados de las variables, deficiencia que es usualmente corregida mediante la adición de nuevos términos de estabilización (términos de captura de discontinuidades) a la formulación previamente establecida<sup>1</sup>.

En esta tesis se presenta un enfoque mucho más físico y simple, basado en la técnica de *Cálculo Finitesimal (CF)* presentada en el capítulo anterior. Esta técnica se basa en retener términos de mayor orden en las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa. Es importante señalar que la estabilización de estas ecuaciones se produce a nivel de la ecuación diferencial, y esta misma forma es aplicable a cualquier método de integración de ecuaciones diferenciales (*Elementos finitos* [ZT94a] [ZT94b] [Oña98b] [GPVC98], *Volúmenes Finitos* [HMJ93] [MC98], *Diferencias Finitas* [Hir90], *Puntos Finitos* [OIOT] [OIO<sup>+</sup>], etc.). Al contrario, muchos de los métodos antes mencionados han sido desarrollados exclusivamente para su aplicación en uno u otro procedimiento.

Posteriormente nos ocuparemos del algoritmo utilizado para la discretización temporal y resolución espacial. Este es el denominado algoritmo semi implícito de pasos fraccionados que presenta varias ventajas para el presente proyecto. Por una parte permite la utilización de igual interpolación para los campos de presión y velocidad, evitando la condición  $BB$ , y por otra presenta una menor necesidad de almacenamiento de memoria que en otros casos,

---

<sup>1</sup>Este aspecto, ya ha sido comentado en el capítulo 2 en referencia a la ecuación de convección difusión.

dado que sólo es necesario invertir un sistema de ecuaciones de una incógnita por nodo (presión) frente a las cuatro incógnitas por nodo (velocidad y presión) de otros métodos más convencionales. Por otra parte, la imposición de la presión en gran parte del dominio, en los problemas con superficie libre, hace que este algoritmo gane velocidad frente a otros. Además, hay que añadir que el sistema de ecuaciones resultante corresponde a una matriz simétrica muy bien condicionada, por lo que no representa ningún problema su inversión.

Cabe señalar que muchas de las propiedades de estabilización que añade naturalmente el algoritmo de pasos fraccionados, pueden ser conseguidas con la utilización de la técnica *CF* aplicada a otros métodos de integración de las ecuaciones de Navier Stokes. Sin embargo, el algoritmo de pasos fraccionados presenta todavía importantes ventajas en lo referente a necesidades de recursos.

### 3.2 Formulación Estabilizada de las Ecuaciones de Navier Stokes

Consideraremos el movimiento de un fluido viscoso incompresible alrededor de un cuerpo, tal como se presentó en el capítulo 1. Como es conocido, estas ecuaciones son resultado de la aplicación de las leyes clásicas de conservación de masa y cantidad de movimiento sobre un dominio de control infinitesimal. Por otra parte, según la metodología de *CF* presentada en el capítulo 2, si suponemos que el dominio de control tiene dimensiones finitas (ver figura 3.1), y representamos la variación de la masa y la cantidad de movimiento utilizando una expansión en serie de Taylor, de un orden superior a la usada en la teoría de cálculo infinitesimal clásica, podemos encontrar las siguientes expresiones que configuran la forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema planteado (ver apéndice J),

*Balance de Cantidad de Movimiento*

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{m_i} \cdot \nabla r_{m_i} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( r_{m_i} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{m_i} \cdot \nabla r_{m_i} \right) = 0 \quad i = 1, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

*Balance de Masa*

$$r_d - \frac{1}{2} \mathbf{h}_d \cdot \nabla r_d + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( r_d - \frac{1}{2} \mathbf{h}_d \cdot \nabla r_d \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.2)$$

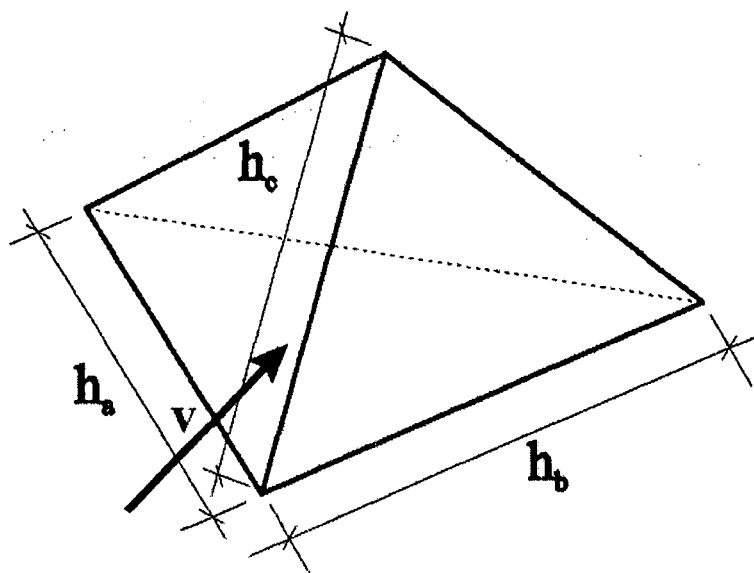


Figura 3.1: Dominio de balance finito (tetraedro elemental).

donde

$$\underline{r}_m = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\underline{v} \otimes \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}' + \nabla p - \underline{f} \quad (3.3)$$

$$r_d = \nabla \cdot \underline{v} \quad (3.4)$$

Los términos subrayados en las ecuaciones (3.1) y (3.2) introducen la necesaria estabilización para la solución numérica, tal y como se presenta en el capítulo anterior.

Las distancias  $\underline{h}_m$  ( $h_{m_i}$ ) y  $\underline{h}_d$  ( $h_{d_j}$ ) son las denominadas longitudes características. Como se ha discutido en el capítulo 2, esas cantidades tienen un carácter geométrico y están relacionadas con las dimensiones de los dominios finitos donde se imponen los balances de cantidad de movimiento y masa, respectivamente (ver figura 3.1). Del mismo modo, el parámetro  $\delta$  es un tiempo característico del proceso y controla la estabilización temporal de las ecuaciones (3.1) y (3.2). El resto de la notación utilizada en las ecuaciones anteriores ya fue explicada en el capítulo 1.

Hay que hacer notar que para  $\underline{h}_m \rightarrow 0$ ,  $\underline{h}_d \rightarrow 0$  y  $\delta \rightarrow 0$  se recupera la forma original de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y masa. Por simplicidad en la exposición siguiente se tomará  $\delta = 0$ .

Conviene añadir que, por conveniencia para la discusión siguiente, se empleará la notación de índices, siendo  $v_i$ ,  $f_i$  las  $i$ -ésimas componente de los vectores velocidad y de fuerzas de volumen y  $\tau'_{ij}$  las componentes de la parte

desviadora del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos<sup>2</sup>. De la misma manera  $h_{m_{ij}}$  es la componente  $i, j$  del tensor de longitudes características de la ecuación de balance de cantidad de movimiento ( $\underline{h}_m$ ). Como es obvio, los índices variables son sólo los últimos subíndices, así, por ejemplo en  $h_{m_{ij}}$   $i, j$  no  $m$ . También indicar que a partir de ahora se aplicará la convención de Einstein de suma para los índices repetidos en productos y derivadas. Así, por ejemplo,  $h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j} = \sum_j h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j}$ . La convención anteriormente menciona-

da sólo se aplicará a los índices  $i, j$  y  $k$ , al no ser que se indique expresamente lo contrario. Para no perder claridad en la explicación, se presentan a continuación las ecuaciones (3.1) y (3.2) anteriores con la nueva notación,

*Balance de Cantidad de Movimiento*

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.5)$$

*Balance de Masa*

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.6)$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (3.7)$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

En la ecuación (3.5) no se debe sumar en el índice  $i$ , pero sí en el  $j$ .

Más detalles sobre la obtención de las ecuaciones (3.1) a (3.8) pueden encontrarse en [Oña98b].

Evidentemente, las anteriores ecuaciones (3.5) y (3.8) deben completarse con un conjunto de condiciones de contorno e iniciales (ver capítulo 1). Como puede comprobarse parte de estas condiciones de contorno han sido modificadas (estabilizadas) siguiendo la técnica *CF* presentada en el capítulo 2.

---

<sup>2</sup> $\tau'_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$

$$v_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \quad (3.9)$$

$$n_j \tau_{ij} = t_{c_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} n_j r'_{m_i} \quad (\text{no suma en } i) \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t) \quad (3.10)$$

$$v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i - \frac{1}{2} h_{d_i} n_i r_d, \quad (3.11)$$

$$n_j \tau_{ij} s_i = \sigma(\mathbf{x}, t) - \underline{e_i s_i} \quad \text{en } \Gamma_M \times (0, t)$$

$$p = p_c(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_P \times (0, t) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (3.13)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (3.14)$$

Donde  $\Gamma := \partial\Omega$  es el contorno del dominio de análisis, que ha sido dividido en las siguientes partes, según el tipo de condición de contorno que sobre él se impongan en:

$\Gamma_D$  : parte de  $\Gamma$  donde se prescribe el campo de velocidades a  $\mathbf{v}_c$  (contorno tipo Dirichlet).

$\Gamma_N$  : parte de  $\Gamma$  donde se prescriben las tensiones a  $t_c$  (contorno tipo Neumann).

$\Gamma_M$  : parte de  $\Gamma$  donde se prescribe la velocidad normal a  $v_n$  y la componente tangencial de la tracción  $\sigma$  (contorno tipo Neumann). Se ha llamado  $e_i = \frac{1}{2} h_{m_{ij}} n_j r_{m_i}$  (no se suma en  $i$ ).

$\Gamma_P$  : parte de  $\Gamma$  donde se prescribe el campo de presiones a  $p_c$  (contorno tipo Dirichlet)

Se cumple que  $\Gamma = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M \cup \Gamma_P}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = 0$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_M = 0$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_P = 0$ ,  $\Gamma_M \cap \Gamma_N = 0$ ,  $\Gamma_N \cap \Gamma_P = 0$  y  $\Gamma_M \cap \Gamma_P = 0$ .

En lo anterior se ha denominado  $\mathbf{n} := (n_1, n_2, n_3)$  al vector normal exterior a  $\partial\Omega$ . Mientras que  $\mathbf{s} := (s_1, s_2, s_3)$  es un vector unitario genérico, paralelo a  $\Gamma_M$ , y en particular con la dirección de la proyección de la velocidad sobre  $\Gamma_M$ .

En las ecuaciones (3.9)-(3.14) se han subrayado los términos de estabilización obtenidos gracias a la aplicación de las técnicas de *CF*. La justificación de la aparición de estos términos se puede encontrar en los apéndices I y K.

Una forma más conveniente de la ecuación (3.6) puede obtenerse expresando las componentes del vector de longitudes características de la ecuación de balance de masa como,

$$h_{d_j} = -2t_{d_j} v_j \quad (\text{no suma en } j) \quad (3.15)$$



donde  $t_{d_i}$  se denomina "tiempo intrínseco". Bajo esta suposición y usando la ecuación (3.6), la forma del termino de estabilización del balance de masa puede escribirse (ver apéndice G) como,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - t_{d_i} \frac{\partial r'_{m_i}}{\partial x_i} &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega & (3.16) \\ r'_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \end{aligned}$$

Donde, como puede apreciarse se ha renombrado  $r_d = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

Por otra parte, en el mismo apéndice G, se muestra la siguiente expresión alternativa a la prescripción de la velocidad normal en el contorno (3.10),

$$v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i + \frac{t_{d_i}}{\rho} n_i r'_{m_i} \quad \text{en } \Gamma_{D_n} \times (0, t) \quad (3.17)$$

Ya se ha comentado anteriormente que, las ecuaciones (3.5)-(3.9) son el punto de partida para la obtención de diversos métodos numéricos estabilizados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Hay que señalar que la obtención de las ecuaciones estabilizadas ha sido hecha a nivel del planteamiento diferencial, por lo que el proceso de discretización puede ser llevado a cabo con cualquiera de los métodos disponibles. En nuestro caso, las ecuaciones diferenciales presentadas, serán integradas utilizando el método de los elementos finitos. El procedimiento elegido para ello es conocido como algoritmo de pasos fraccionados, aunque puede comprobarse que diversos métodos de elementos finitos estabilizados estándar, que permiten interpolaciones de igual orden para velocidad y presión pueden obtenerse a partir de la forma modificada de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa presentadas anteriormente [Oña98b]. Adicionalmente, a partir de las ecuaciones (3.5)-(3.9) pueden obtenerse algoritmos que estabilizan el carácter convectivo de los términos de transporte de la ecuación de balance de cantidad de movimiento [GOS<sup>+</sup>98] [OG99] [GO99].

### 3.3 Formulación ALE de las Ecuaciones de Navier Stokes

A estas alturas de la exposición, ha debido quedar clara la gran complejidad del problema que nos planteamos resolver. Sin embargo, uno de los puntos

más críticos del algoritmo aun no ha sido introducido, sino de forma preliminar. Este se refiere al movimiento de los contornos del dominio de análisis. Efectivamente el cambio de forma del dominio  $\Omega$  involucra varias dificultades que se irán discutiendo a medida que avance esta presentación. En primer lugar, fijémonos en las ecuaciones (3.1)-(3.9). Estas han sido planteadas sin tener en cuenta el efecto del movimiento de los nodos de la malla. Es evidente que se requiere un planteamiento especial de estas ecuaciones para poder ser utilizado en este caso.

Es bien conocido, y ya se ha introducido en el capítulo 2, que existen dos formas clásicas de representar las ecuaciones de Navier-Stokes: la representación Lagrangiana y la Euleriana. La primera basa la descripción del movimiento en un seguimiento de las partículas del fluido, mientras que la segunda basa la descripción en la posición respecto a un sistema de referencia.

Tradicionalmente, las ecuaciones de dinámica de fluidos se han descrito con formulación euleriana (y así lo hemos hecho aquí) debido a las ventajas que tradicionalmente se la presumía. Sin embargo, en nuestro caso, necesitaremos trabajar en un sistema de referencia arbitrario, en particular en el definido por el movimiento de la malla de elementos finitos. La formulación que describe el movimiento en este caso se denomina *ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Este tipo de formulaciones arbitrarias provienen del contexto de los métodos de diferencias finitas [HAC74] y más recientemente han sido incorporados al mundo del método de los elementos finitos [HLZ81] [FKT99] [Don82] [OG99] [GO99], principalmente para su aplicación en problemas de interacción fluido estructura.

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior, la idea básica de esta formulación es incorporar un dominio de referencia adicional que denominaremos  $\Omega_\xi$  y cuyas coordenadas de referencia están dadas por el vector  $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Este dominio de referencia podría ser, por ejemplo, el que describe el movimiento de la malla de elementos finitos. De la misma manera denominaremos  $\Omega_\lambda$  al dominio material, cuyas coordenadas  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  son las etiquetas de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en  $t = 0$ ). Por último tendremos el dominio espacial común  $\Omega_x$  de coordenadas  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ . Es evidente que existen las funciones de transformación de coordenadas  $\xi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x}(\xi, t)$ ,  $\xi(\lambda, t)$ ,  $\lambda(\xi, t)$ ,  $\lambda(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{x}(\lambda, t)$ .

Podemos entonces expresar la derivada material o sustancial ( $\frac{D}{Dt}$ ) de una cantidad  $\chi$ , como,

$$\frac{D\chi(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left[ \frac{\partial\chi(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial t} \right]_\lambda = \left[ \frac{\partial\chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right]_\mathbf{x} + \frac{\partial\chi(\xi, t)}{\partial\xi_i} \left[ \frac{\partial\xi_i}{\partial t} \right]_\lambda \quad (3.18)$$

La relación (3.18) anterior se suele denominar *ecuación fundamental ALE* [WR98]. Expresa la derivada material de una cantidad  $\chi$  donde la derivada temporal se ha calculado respecto a un sistema de referencia  $\mathbf{x}$  y las derivadas espaciales en un sistema de referencia  $\xi$ . Las cantidades  $\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right]_{\lambda}$  se denominan *velocidades convectivas ALE*. En el caso en que el dominio de referencia  $\Omega_{\xi}$  describa el movimiento de la malla, se cumple que  $\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right]_{\lambda} = v_i - v_i^m$ , donde  $\mathbf{v}^m(v_1^m, v_2^m, v_3^m)$  es la velocidad de deformación de la malla.

Al objeto de aplicar lo aquí expuesto a las ecuaciones del flujo fluido, consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible, siguientes [RG96],

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

La forma anterior es la descripción lagrangiana clásica de las ecuaciones de Navier Stokes. Si aplicamos la relación (3.18) en las anteriores (3.19), obtenemos,

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t}\right]_{\mathbf{x}} + \left[(v_j - v_j^m) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i\right]_{\xi} &= 0 \\ \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right]_{\xi} &= 0 \\ &\text{en } \Omega_{\xi} \times (0, t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Estas ecuaciones (3.20) son directamente aplicables a nuestro problema, pues nos permiten calcular todas las cantidades en un sistema de referencia  $\Omega_{\xi}$ , definido por el movimiento de la malla, excepto para las derivadas de la velocidad que son calculadas en el sistema de referencia original  $\Omega_{\mathbf{x}}$ . Imaginemos que nuestra simulación fuera tal que los nodos de la malla se movieran, avanzando de acuerdo a su velocidad de deformación. Entonces su comportamiento sería exactamente igual que el de las partículas del fluido, y diríamos que nuestra simulación del fluido es lagrangiana. En caso contrario, si nuestra simulación fuera tal que los nodos de la malla permanecieran quietos, el proceso de resolución seguiría un esquema euleriano típico. Es evidente que el sistema (3.20), sólo plantea una generalización de las formulaciones lagrangianas y eulerianas clásicas, permitiendo la posibilidad de contemplar el problema (3.5)-(3.9) respecto de un sistema de referencia arbitrario.

Por otra parte, podemos escribir las ecuaciones estabilizadas (3.5)-(3.8) en forma *ALE*, sustituyendo la relación (3.18) en (3.5), obteniendo la siguiente forma,

*Balance de Cantidad de Movimiento*

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.21)$$

*Balance de Masa*

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.22)$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - v_j^m) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (3.23)$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

### 3.4 El Algoritmo de Pasos Fraccionados Semi Implícito

A continuación, se presenta un algoritmo de pasos fraccionados semi implícito, para la resolución de las ecuaciones (3.5)-(3.8) por el método de elementos finitos.

Como se ha mencionado ya en los capítulos anteriores, la introducción de la restricción de compresibilidad del flujo en las ecuaciones de Navier Stokes tiene como resultado efectos muy importantes. Estos efectos se derivan principalmente del hecho de que el campo de velocidades puede tomarse como única incógnita del problema, para ser posteriormente corregido con un campo de presiones derivado de él. En efecto, la presión en la formulación incompresible de las ecuaciones de Navier Stokes, no es ya una variable termodinámica, sino que es una cantidad que establece el equilibrio de fuerzas en cada volumen elemental. De hecho si tomamos el rotacional de (3.3), podemos eliminar la presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En ese caso podríamos calcular un campo de velocidades que cumpliera la condición de balance de cantidad de movimiento, y posteriormente corregirlo con un campo de presiones que nos permitiera cumplir la condición de incompresibilidad (que se podría calcular tomando la divergencia de (3.3)).

Por otra parte, la existencia y unicidad de la solución<sup>3</sup> de las ecuaciones de Navier Stokes queda demostrada<sup>4</sup>, bajo el cumplimiento de la condición  $BB$  [Bab71] [Cod93b] [Sot97], tal y como se presentó en el capítulo 1. Esta condición obliga a que los espacios de elementos finitos para la interpolación de la velocidad y la presión sean compatibles [Bab71].

En la práctica, y en el contexto del método de los elementos finitos, existen dos posibilidades para evitar los indeseables resultados de esta inestabilidad. La solución más clásica consiste en utilizar interpolaciones mixtas velocidad presión que verifiquen  $BB$ . Junto a ésta, existe la posibilidad de modificar la forma variacional típica, resultante de la aplicación del método de Galerkin al problema fuerte (3.1)-(3.4), de manera que la restricción  $BB$  desaparezca. Dentro de este segundo tipo se encuentran metodologías que, como  $GLS$  [HF87] [HFH89] [BD88] han ganado mucha popularidad en los últimos años<sup>5</sup>. Un importante grupo de soluciones dentro de esta aproximación lo constituyen los denominados métodos de pasos fraccionados [Cho67] [VCZ99].

Básicamente, han sido desarrollados dos diferentes procedimientos que se agrupan bajo la misma denominación de métodos de pasos fraccionados. Un primer procedimiento estaría basado en la idea de separar los efectos de los términos de transporte por convección de los viscosos. De esta forma sería posible separar, por ejemplo, el tratamiento de los términos convectivos de los efectos de la capa límite. Pero, quizá el más conocido de estos algoritmos, y al que, en lo siguiente, nos referiremos exclusivamente bajo la denominación de método de pasos fraccionados, se debe a A.J. Chorin [Cho67], quien propuso fraccionar la ecuación de balance de cantidad de movimiento, eliminando el término del gradiente de la presión. La idea es resolver una ecuación de balance de cantidad de movimiento aproximada, resolver luego la ecuación de balance de masa y por último corregir la cantidad de movimiento. Este último paso puede interpretarse también como una proyección de la solución sobre el espacio de velocidad con divergencia nula, por lo que el algoritmo se denomina a veces de proyección. El objetivo principal que se perseguía con este fraccionamiento era precisamente la estabilización de la presión. A la vez, se consiguió el beneficio adicional de poder utilizar espacios de interpolación iguales para velocidad y presión. Una revisión de esta metodología y su extensión a diferentes tipos de problemas puede encontrarse en [VCZ99] [VCZ97].

De las diversas variantes que admite el método de pasos fraccionados estudiaremos el denominado algoritmo semi implícito. Este algoritmo resuelve

<sup>3</sup>Tanto del problema continuo como del discreto.

<sup>4</sup>Para moderados valores de  $R_n$ .

<sup>5</sup>Ya se ha mencionado que la aplicación de las técnicas  $CF$  con la adecuada elección de los parámetros permite construir metodologías de este tipo.

de manera explícita los pasos correspondientes a la resolución aproximada de la ecuación de balance de cantidad de movimiento y su posterior corrección, mientras que es implícito el cálculo del campo de presiones. De hecho, dado que las características de esta algorítmica son especialmente apropiadas para el problema que pretendemos resolver, esta ha sido la elegida para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes en este trabajo. Las ventajas principales, frente a otras metodologías, se pueden resumir en:

- La posibilidad de resolver la ecuación de balance de cantidad de movimiento independientemente de la restricción de incompresibilidad, permite desarrollar un esquema semi implícito de manera que, en cada paso de tiempo sólo haya que invertir una matriz de un sistema (tipo Poisson) con un grado de libertad por nodo (la presión), ahorrando una considerable cantidad de memoria.
- El esquema semi implícito es además especialmente adecuado a nuestro caso, dado que la existencia de una superficie libre hace que la presión esté prescrita sobre gran parte del dominio, permitiendo que la inversión de la matriz del sistema sea muy rápida.
- Los dos aspectos considerados con anterioridad indican que el sistema resultante tiene unas características óptimas para su inversión, siendo simétrico y muy bien condicionado.
- Aunque, como ya se ha mencionado, de la aplicación del método  $CF^6$  (ecuaciones (3.5)-(3.17)) pueden derivarse esquemas de resolución de las ecuaciones de Navier Stokes (3.1)-(3.4), que permiten igual interpolación de los espacios de velocidad y presión, el uso de este algoritmo, que por si sólo tiene este efecto, permite evitar el cálculo de parte de los términos de las ecuaciones (3.5)-(3.17), ahorrando tiempo de procesamiento.

Simplificando, las anteriores consideraciones se pueden resumir en una frase: el método de pasos fraccionados semi implícito requiere menos recursos (tiempo de procesamiento y memoria).

A continuación, extenderemos la metodología<sup>7</sup> presentada en [Cho67] [VCZ99], para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes (3.5)-(3.17) estabilizadas con las técnicas  $CF$ . Pero en primer lugar, para simplificar la exposición, nos detendremos a derivar el esquema para la resolución de las

---

<sup>6</sup>con la adecuada elección de los parámetros de estabilización.

<sup>7</sup>en su versión semi implícita.

ecuaciones de Navier Stokes clásicas (ya presentadas en el capítulo 1), dadas por,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.26)$$

En primer lugar consideremos la ecuación (3.25). Esta puede discretizarse en el tiempo, de forma explícita, como,

$$\rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - f_i^n = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.27)$$

Donde, evidentemente, se ha llamado  $\Delta t$  al incremento de tiempo y los superíndices  $n$  y  $n+1$  indican que el término correspondiente es evaluado en los instantes de tiempo  $n$  y  $n+1$  respectivamente.

Como ya se ha mencionado, la idea básica del método de pasos fraccionados es dividir la ecuación anterior como sigue,

$$\rho \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.28)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.29)$$

Es decir, se elimina el término del gradiente de presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento para obtener una predicción de la velocidad ( $v_i^*$ ), que luego es corregida tras calcular la presión.

Cabe señalar que la suma de las ecuaciones (3.28) y (3.29) da como resultado la ecuación de balance de cantidad de movimiento (3.25) original.

La ecuación de balance de masa (3.26) nos permitirá calcular el campo de presión de manera tal, que se cumpla la condición de divergencia nula. Si discretizamos la ecuación (3.26) en la siguiente forma,

$$\frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.30)$$

y sustituimos la ecuación (3.30) en (3.29), tenemos que,

$$\Delta t \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.31)$$

De esta manera el algoritmo se define por los siguientes pasos,

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad v_i^* &= v_i^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left( \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n \right) & i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ 2^\circ \quad \Delta t \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ 3^\circ \quad v_i^{n+1} &= v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (3.32)$$

Es decir, por cada paso de tiempo se resolverían tres sistemas de ecuaciones, dos de ellos explícitos (1° y 3°) que involucran los grados de libertad de la velocidad  $v_i$  y la velocidad fraccionaria  $v_i^*$ , y uno implícito<sup>8</sup> (2°) que permite calcular el campo de presiones.

Es evidente que la solución mediante el método de elementos finitos clásico del paso 1° presenta los inconvenientes ya discutidos en el capítulo 2, de inestabilidad por convección. Esto hace patente que el algoritmo (3.32) requiere para su solución de alguno de los métodos de estabilización de la convección existentes, los cuales ya fueron discutidos en el capítulo 2.

### 3.4.1 Aplicación a las Ecuaciones de Navier Stokes Estabilizadas mediante Cálculo Finitesimal

A continuación aplicaremos el esquema semi implícito anterior a las ecuaciones (3.5)-(3.9), que representan la forma del problema de Navier Stokes estabilizado con la técnica *CF*.

La ecuación (3.5) puede discretizarse en el tiempo, de forma explícita, como

$$\begin{aligned} \rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \rho \frac{\partial (v_j^n v_i^n)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - f_i^n - \frac{1}{2} h_{mij} \frac{\partial r_{mi}^n}{\partial x_j} &= 0 \quad (3.33) \\ r_{mi} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Este paso implícito se presenta como un problema tipo Poisson.



Al igual que en el caso anterior, podemos dividir la ecuación anterior como sigue,

$$\rho \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} + \rho \frac{\partial (v_j^n v_i^n)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n - \frac{1}{2} h_{m_{ij}}^n \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_j} = 0 \quad (3.34)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (3.35)$$

Es decir, se elimina el término del gradiente de presión de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, pero, sin embargo, el término correspondiente se mantiene en la estabilización de la ecuación (3.34).

Cabe señalar que, al igual que en el caso anterior, la suma de las ecuaciones (3.34) y (3.35) da como resultado la ecuación estabilizada discreta de balance de cantidad de movimiento (3.33) original.

La ecuación de balance de masa nos permitirá calcular el campo de presión de manera tal, que se cumpla la condición de divergencia nula. Si discretizamos la ecuación (3.6) en la siguiente forma,

$$\rho \frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_i} - t_{d_i}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - f_i^n \right) = 0 \quad (3.36)$$

$i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega$

y sustituimos la ecuación (3.36) en (3.35), se tiene que,

$$(\Delta t + t_{d_i}) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} - t_{d_i}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - f_i^n \right) \quad (3.37)$$

Si tomamos  $t_{d_i} = \delta_d$ , la ecuación (3.37) anterior se simplifica y queda como sigue,

$$(\Delta t + \delta_d) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \rho \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} - \delta_d^n \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_i} \quad (3.38)$$

Donde se ha denominado,

$$r_{m_i}^n = \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - f_i \right)^n \quad (3.39)$$

Conviene señalar que, la mera estabilización de la convección [VCZ99] [Oña98b] realizada sobre el algoritmo de pasos fraccionados estándar (3.32), desprecia la contribución de los términos que son afectados por el factor  $\delta_d$  ( $\delta_d = 0$ ) en la ecuación (3.38). Se puede comprobar que estos términos introducen un efecto de estabilización adicional que mejora la solución numérica, esto se hace aún más evidente cuando los valores de  $\Delta t$  son pequeños.

La precisión de las ecuaciones presentadas depende del tamaño del incremento de tiempo que debe satisfacer en todo caso los criterios de estabilidad de la solución acoplada.

Como resumen se presentan a continuación las tres ecuaciones (pasos) que resuelven el problema de Navier Stokes, basado en las técnicas presentadas.

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad v_i^* &= v_i^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left( \rho \frac{\partial(v_i v_j)^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + f_i^n - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}^n}{\partial x_j} \right) && \text{en } \Omega \\ 2^\circ \quad (\Delta t + \delta_d) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} - \delta_d^n \frac{\partial r_{m_i}^{n+1}}{\partial x_i} && \text{en } \Omega \\ 3^\circ \quad v_i^{n+1} &= v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} && \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (3.40)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$ .

### 3.4.2 Discretización del Problema usando el Método de los Elementos Finitos

En el presente apartado abordaremos la discretización en el espacio de las ecuaciones del método de pasos fraccionados semi implícito presentado anteriormente.

En primer lugar, obtengamos la forma débil de las ecuaciones (3.40), aplicando el método de Galerkin. A partir de lo expuesto de manera general en el capítulo 1, podemos definir el problema como:

Encontrar  $\mathbf{v} \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]$  y  $p \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]$ , cumpliendo que  $\mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_c$ ,  $\mathbf{v}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}$ ,  $p|_{\Gamma_P} = p_c$ , tal que,

*Ecuación de la Cantidad de Movimiento Fraccionaria*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_i \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} \rho \psi_i \frac{\partial(v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_i f_i^n d\Omega - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(h_{m_{ij}}^n \psi_i)}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \psi_i n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_i h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma \\ &\forall \psi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \end{aligned} \quad (3.41)$$

*Ecuación de Continuidad*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial [\psi (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} (\Delta t + \delta_d^n) \psi n_i^n \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Gamma = \quad (3.42) \\
& = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi)}{\partial x_i} r_{m_i}^m d\Omega + \int_{\Gamma} \delta_d^n \psi n_i^n r_{m_i}^m d\Gamma - \\
& \quad - \int_{\Gamma} \rho \psi v_i^* n_i^n d\Gamma \quad \forall \psi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]
\end{aligned}$$

*Ecuación de Momento o de proyección*

$$\int_{\Omega} \psi_i v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_i v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad \forall \psi \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N] \quad (3.43)$$

En lo anterior se ha llamado  $\psi_i$  a la  $i$ -ésima componente de la función de test ( $i = 1, N$ ) y  $N$  el número de dimensión del problema. Por otra parte se debe cumplir  $\Gamma_P \cup \Gamma_N \neq \emptyset$  para que el campo de presiones esté determinado.

Al igual que hicimos en el capítulo 1, para la discretización en el espacio de las ecuaciones (3.41)-(3.43) anteriores, se ha de definir el subespacio funcional<sup>9</sup>  $\Psi_h \subset [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]$ , asociado a una partición<sup>10</sup> de elementos finitos  $\{\Omega^e\}$  del dominio espacial  $\Omega$ . De esta forma el problema discreto se plantea como sigue:

Encontrar  $\mathbf{v} \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]$  y  $p \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]$ , cumpliendo que  $\mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_c$ ,  $\mathbf{v}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}$ ,  $p|_{\Gamma_P} = p_c$ , tal que,

*Ecuación de la Cantidad de Movimiento Fraccionaria*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^m d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma \\
& \quad \forall \psi_h \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]
\end{aligned} \quad (3.44)$$

<sup>9</sup>y  $\Psi_h \subset [L^2(0, T), H^1(\Omega)]$ , de manera que se denomina  $\Psi_h := (\Psi_{h_1}, \Psi_{h_2}, \Psi_{h_3})$ .

<sup>10</sup>Es decir cumple que  $\Omega = \cup \Omega^e$  y  $\Omega^e \cap \Omega^{e'} = \emptyset$  si  $e \neq e'$ .

*Ecuación de Continuidad*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial [\psi_{h_i} (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} (\Delta t + \delta_d^n) \psi_{h_i} n_i^n \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Gamma &= \quad (3.45) \\
= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi_{h_i})}{\partial x_i} r_{m_i}^n d\Omega + \\
+ \int_{\Gamma} \delta_d^n \psi_{h_i} n_i^n r_{m_i}^n d\Gamma - \int_{\Gamma} \rho \psi_{h_i} v_i^* n_i^n d\Gamma \\
\forall \psi_h \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)]
\end{aligned}$$

*Ecuación de Momento o de proyección*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_{h_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.46) \\
\forall \psi_h \in [L^2(0, T), H^1(\Omega)^N]
\end{aligned}$$

A continuación estudiaremos el sistema (5.27)-(3.46), en lo referente a las condiciones de contorno del problema dadas en (3.9)-(3.14).

En primer lugar consideremos la ecuación del momento fraccionario (5.27). En ella los términos  $\int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma$  pueden dividirse en la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma = \\
&= \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_i + p n_i^n) d\Gamma + \quad (3.47) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Gamma
\end{aligned}$$

Donde se ha hecho uso de la definición del vector de tracción, dada por,

$$t_i^n = -p^n n_i + \tau_{ij}^n n_j = \tau_{ij}^n n_j \quad (3.48)$$

Si además tenemos en cuenta las condiciones de contorno dadas en (3.9)-(3.14), se puede escribir la relación (3.47) anterior como,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Omega + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i} + p n_i^n) d\Omega + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n r_{m_i}^n d\Omega
\end{aligned} \tag{3.49}$$

De esta forma podemos imponer la tracción a  $t_{c_i}$  en el contorno  $\Gamma_N$  y tener la posibilidad de incorporar un contorno abierto  $\Gamma_F$  (ver [Sot97] [VCZ97]). En el contorno  $\Gamma_F$  no se impone en absoluto ninguna condición de contorno, lo cual permite que la solución se independice del lugar donde se corta la malla de elementos finitos [Sot97] [VCZ97].

Por otra parte es normal suponer que  $\mathbf{h}_{m_i} = 0$  en  $\Gamma_F$ , por lo que la ecuación (5.27) puede escribirse como sigue,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^m d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Si nos ocupamos de la ecuación de balance de masa (3.45), y tenemos en cuenta que tal y como se demuestra en el apéndice K, la condición de contorno que expresa el balance de masa en un dominio finito, está dada por,

$$v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i + \frac{t_{d_i}}{\rho} n_i r_{m_i}^n \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t)$$

y teniendo en cuenta, además, la definición de  $v_i^*$  dada en (3.34) y (3.35), se puede escribir,

$$v_{c_i}^{n+1} n_i^n = v_i^* n_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} n_i^n - \frac{t_{d_i}^n}{\rho} n_i^n r_{m_i}^* \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \tag{3.51}$$

Donde se ha denominado,

$$r_{m_i}^* = \rho \frac{\partial v_i^n}{\partial t} + \rho v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^m}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - f_i^n$$

De esta manera podemos reescribir la ecuación (3.51) como,

$$\rho v_{c_i}^{n+1} n_i^n = \rho v_i^* n_i^n - (\Delta t + t_{d_i}) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} n_i^n - t_{d_i}^n n_i^n r_{m_i}''^m \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \quad (3.52)$$

Que es la forma correspondiente de la condición de contorno tipo Dirichlet, que impone la velocidad normal sobre el contorno y que es adecuada para el algoritmo estabilizado. Hay que señalar que la condición de contorno (3.52) presenta una pequeña incorrección, dado que la velocidad normal se impone sobre el contorno  $\Gamma_{D_n}$  en el instante  $t_n$  (cuya normal genérica es  $\mathbf{n}^n$ ). En realidad esta es la única forma de proceder, dado que el contorno en el instante siguiente no se conoce (en general) hasta que se ha resuelto el paso de tiempo actual. Esta problemática está asociada con la metodología semi implícita de resolución de las ecuaciones y representa un error despreciable del orden  $O(\Delta t^2)$ , por lo que no reduce la precisión del esquema.

Si, por otra parte, tenemos en cuenta la siguiente relación,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}''^m) d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n + v_i^n) d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}''^m) d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \psi_h (v_i^* - v_i^n) n_i^n d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}''^m) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donde se ha denominado,

$$R_i(p, r_d') = (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial p}{\partial x_i} + \delta_d^n r_{m_i}''^m$$

Y, si sustituimos la ecuación (3.52) en (3.53), tenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}''^m) d\Gamma = \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega + \int_{\Gamma - \Gamma_M} \psi_h (v_i^* - v_i^n) n_i^n d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma - \Gamma_M} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}''^m) d\Gamma + \int_{\Gamma_M} \psi_h (v_{c_i}^{n+1} - v_i^n) n_i^n d\Gamma \end{aligned} \quad (3.54)$$

Donde, si tomamos como condición de contorno natural del problema<sup>11</sup> que  $v_i^{n+1}n_i^n = v_i^n n_i^n$ , su forma estabilizada, dada por (3.52), será,

$$v_i^n n_i^n = \rho v_i^* n_i^n - (\Delta t + t_{d_i}) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} n_i^n - t_{d_i} n_i^n r_{m_i}^{n'} \quad \text{en } \Gamma_{D_n} \times (0, t) \quad (3.55)$$

Que sustituida en (3.54), da como resultado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_h \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \psi_h n_i^n R_i(p^{n+1}, r_{m_i}^{n'}) d\Gamma = \\ = \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega \end{aligned} \quad (3.56)$$

Donde  $v_i^n$  es un campo de velocidades corregido, de manera que se cumple  $v_i^{n+1}n_i^n = v_i^n n_i^n$ .

Si sustituimos la relación (3.56) en (3.55), tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial [\psi_h (\Delta t + \delta_d^n)]}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi_h)}{\partial x_i} r_{m_i}^{n'} d\Omega \end{aligned} \quad (3.57)$$

Con lo cual hemos podido eliminar de la ecuación (3.57) las integrales de contorno con el consiguiente ahorro en tiempo de procesamiento y necesidad de almacenamiento de datos.

Por otra parte, las integrales de (3.57), que involucran derivadas de  $\delta_d^n$  son calculadas, en sentido distribucional, sólo en el interior de los elementos<sup>12</sup>, suponiendo que  $\delta_d^n$  es constante en su interior. De esta manera podemos escribir una nueva forma de la ecuación (3.57), como,

<sup>11</sup>esta condición de contorno permite que se imponga de manera automática la velocidad normal a  $\Gamma$  del instante anterior.

<sup>12</sup>Si  $N_i$  es una función continua y  $M$  está definida sólo a nivel elemental (es decir es constante en los elementos y pues  $\frac{dM}{dx_i}$  no está definida en los lados de los elementos, se puede demostrar que, en un sentido distribucional [Oña98b, pp. 18-19],

$$\int_{\Omega} N_i \frac{dM}{dx_i} d\Omega = - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{dN_i}{dx_i} M d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_i M n_i d(\partial\Omega)$$

Siendo  $n_i$  la normal en el contorno  $\partial\Omega$ .

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = & - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} r_{m_i}^n d\Omega \end{aligned} \quad (3.58)$$

Las ecuaciones (3.50) y (3.58) junto con la (3.46), definen en este caso la forma final del algoritmo *CF* de pasos fraccionados semi implícito.

Como conclusión presentamos las ecuaciones del algoritmo *CF* de pasos fraccionados semi implícito para su resolución por el método de los elementos finitos. Se incluyen las condiciones de contorno aplicables en cada paso de la resolución<sup>13</sup>.

### Ecuación de Cantidad de Movimiento Fraccionaria

$$\int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \quad (3.59)$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

*Condiciones de contorno*

Contorno libre  $\Gamma_F$

Tracción  $t_{c_i}^n$  impuesta en  $\Gamma_N$

### Ecuación de Continuidad

<sup>13</sup> Aunque existen diversas posibilidades de imponer algunas de estas condiciones, la manera presentada es la que se considera más apropiada, a la vista de los resultados de diferentes pruebas.



$$\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \quad (3.60)$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} r_{m_i}^n d\Omega$$

$$r_{m_i}^n = \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n$$

*Condiciones de contorno*

Presión prescrita en  $\Gamma_P$

Velocidad normal a  $\Gamma$  fijada a  $v_{c_i} n_i$  en  $\Gamma_{D_n}$

Velocidad normal a  $\Gamma$  fijada a  $v_i^n n_i$  en  $\Gamma - \Gamma_{D_n}$

**Ecuación de Momento o de proyección**

$$\int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_{h_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.61)$$

*Condiciones de contorno*

Velocidad prescrita a  $v_{c_i}$  en  $\Gamma_D$

### 3.4.3 Determinación de las Longitudes Características

Hasta ahora hemos presentado la forma general de las ecuaciones de Navier Stokes para su resolución mediante el algoritmo *CF* de pasos fraccionados semi implícito, definido por las ecuaciones (3.59)-(3.61). Ahora bien, a partir de esta forma pueden derivarse diferentes variantes de la metodología general según la elección de los parámetros de estabilización  $h_{m_i}$  y  $\delta_d$ .

En el capítulo 2 hemos discutido extensamente la elección de los parámetros de estabilización para la ecuación de convección difusión y hemos dado una forma particular para los mismos.

Si nos fijamos en la forma de la ecuación de balance de cantidad de movimiento estabilizada (3.5), y la reescribimos sustituyendo el tensor  $\tau'_{ij}$  por su valor, tenemos,

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.62)$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

Si comparamos la ecuación (3.62) anterior con la ecuación estabilizada de convección difusión siguiente, cuya obtención se llevo a cabo en el capítulo 2,

$$r_{CD} - \frac{1}{2} h_{DC_i} \frac{\partial r_{CD}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.63)$$

$$r_{CD} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (v_j \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - Q$$

Donde podemos apreciar claramente el carácter convectivo de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (tomando  $\varphi = v_i$ ). Además el término viscoso tiene forma de difusión, aunque aparecen ciertos términos cruzados debido al carácter vectorial de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento que, evidentemente, no aparecen en la ecuación de convección difusión.

De esta analogía se puede inferir que las deducciones hechas para la determinación de los parámetros de estabilización de la ecuación de convección difusión en el capítulo 2, nos servirán para su aplicación a la ecuación de conservación de cantidad de movimiento.

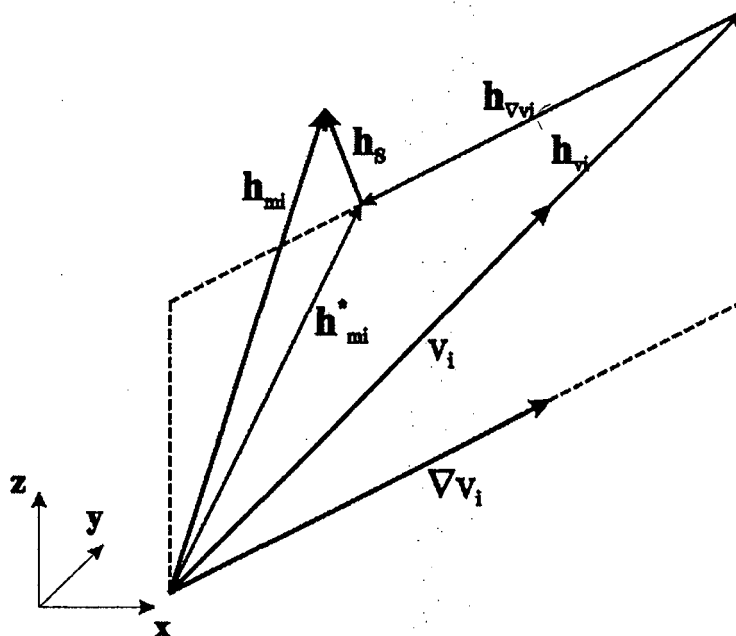
Al igual que hicimos en el capítulo 2, descompongamos el vector  $\mathbf{h}_{m_i}$  en la siguiente forma<sup>14</sup> (ver figura 3.2),

$$\mathbf{h}_{m_i} = \alpha' h^e \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \beta' h^e \frac{\mathbf{v}_{r_i}}{|\mathbf{v}_{r_i}|} \quad (3.64)$$

Donde  $\mathbf{v}_r = \frac{r_{m_i}}{|\nabla v_i|^2} \nabla v_i$  y  $h^e$  es una medida del tamaño del elemento<sup>15</sup>. Si sustituimos la descomposición (3.64) en (3.59), obtenemos,

<sup>14</sup> despreciando el término residual  $\mathbf{h}_s$ .

<sup>15</sup> El índice  $^e$  indica que el valor de  $h^e$  se tomará constante en el interior de cada elemento. Para su cálculo pueden utilizarse, por ejemplo las recomendaciones presentadas en [Sot97]. Conviene indicar además que este valor puede depender del instante de tiempo.

Figura 3.2: Descomposición vectorial del vector  $h_{m_i}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^m d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \alpha' h^e \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \beta' \frac{h^e}{|\mathbf{v}_{r_i}|} \frac{(r_{m_i}^n)^2}{|\nabla v_i|^2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\
 & + \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

En (3.65), las integrales correspondientes al término de estabilización son calculadas, en sentido distribucional, sólo en el interior de los elementos. Esto se debe a que a las funciones de forma  $\psi_{h_i}$  no se les exige continuidad en las derivadas primeras<sup>16</sup>, y por ello los términos que incluyen derivadas de segundo orden no están definidos en el contorno de los elementos. Esta forma de calcular las integrales de los términos de estabilización es ampliamente usada en la práctica [HFH89] [Cod93a] [Sot97] [Oña96].

Por otra parte, y al objeto de controlar la cantidad de difusión añadida

<sup>16</sup>Continuidad  $C_0$ .

en la estabilización, modificaremos los términos de estabilización para dejar (3.65) en la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_{2_i} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_{2_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \quad (3.66) \\ &+ \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma \end{aligned}$$

Donde, los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  toman los siguientes valores,

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha'(\gamma) \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \quad (3.67) \\ k_{2_i} &= \beta'(\gamma_{\parallel i}) \frac{h}{2} \frac{|r_{m_i}|}{|\nabla v_i|} \end{aligned}$$

Siendo  $\langle a_1, a_2 \rangle = \max(0, a_1 - a_2)$ ,  $\gamma = \frac{|\mathbf{v}| h^e}{2\nu}$  y  $\gamma_{\parallel i} = \frac{|\mathbf{v}_{\parallel i}| h^e}{2\nu}$ , con  $\mathbf{v}_{\parallel i} = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla v_i}{|\nabla v_i|} \nabla v_i$ . Donde, para el cálculo de  $\gamma$ ,  $\gamma_{\parallel i}$  se ha identificado el valor de la difusión con el de la viscosidad cinemática del fluido  $\nu = \mu/\rho$ , como puede deducirse fácilmente de la comparación entre (3.59) y (3.5).

Para mayor claridad, reproducimos aquí de nuevo, la tabla extraída de [Cod93a] [Sot97] que nos permite calcular los valores de los coeficientes  $\alpha'$ ,  $\beta'$ .

$$\begin{aligned} \alpha'(\gamma) \quad |\gamma| > 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{3} \quad |\gamma| \leq 3 \\ 1 \quad |\gamma| > 3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{6} \quad |\gamma| \leq 3 \\ \frac{1}{2} \quad |\gamma| > 3 \end{array} \right\} \\ \alpha'(\gamma) \quad |\gamma| \leq 1 & \quad \frac{\gamma}{3} \quad \frac{\gamma}{9} \\ \beta'(\gamma_{\parallel i}) & \quad \max\left(0, 0.7 - \frac{1}{\gamma_{\parallel i}}\right) \quad \max\left(0, 0.35 - \frac{1}{\gamma_{\parallel i}}\right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Donde  $m$  es el grado de los polinomios empleados en la interpolación.

En lo referente a la determinación del parámetro  $\delta_d$  correspondiente a la ecuación (3.60), una elección apropiada [OIO<sup>+</sup>] [GO99] es la más simple,

$$\delta_d = \max\left(\frac{h^e}{2|\mathbf{v}|}, \frac{\rho h^e}{4\mu}\right)$$

Que viene determinado por el análisis de los límites de estabilidad del problema de convección difusión [Cod93a] [OM99].

De esta manera la ecuación (3.60), quedará en la forma,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \{\psi_h (\Delta t + \delta_d^n)\}}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \quad (3.69)$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta_d^n \psi_h)}{\partial x_i} r_{m_i} d\Omega$$

### 3.4.4 El Fenómeno de la Turbulencia

Hasta ahora se ha presentado una metodología para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles en un *régimen laminar*. Estas ecuaciones pueden ser derivadas partiendo de unos principios generales y bajo unas ciertas hipótesis (ver apéndice J).

Por otra parte, tal y como se discutió en el capítulo 1, la existencia y unicidad de la solución de estas ecuaciones, sólo puede ser demostrada bajo ciertas hipótesis restrictivas, que en términos generales se reducen a que el número de Reynolds  $R_n$  sea moderado. Ante esta evidencia, no tenemos más que preguntarnos qué ocurre en el caso general. Es conocido que en algunos casos simplificados se puede demostrar que existe solución de la forma débil del problema si existe solución a la forma fuerte original [Lio84]. Pero, por otra parte, el análisis numérico nos permite obtener soluciones a los problemas planteados, incluso a elevados valores de  $R_n$ . Entonces, ¿es física esa solución?

En la realidad, la experimentación sugiere que esas soluciones *laminares* están ahí, pero son más inestables cuanto mayor es el valor de  $R_n$  del problema. Esta inestabilidad de la solución significa que, en un experimento, en función del valor de  $R_n$  podemos encontrar las siguientes situaciones,

- Una única solución.
- Sistemas estacionarios con más de una solución. La situación estacionaria final es función de las condiciones iniciales.
- Más de una solución, alguna de ellas no estacionaria. La situación estacionaria final es función de las condiciones iniciales.
- Un flujo caótico plenamente desarrollado [Tab89] cuya solución, en un diagrama de fases, describe un atractor extraño. Este tipo de flujo se denomina *turbulento*.

En el sentido expresado anteriormente, podemos considerar  $R_n$  como el parámetro de bifurcación del problema.

Se acepta que este denominado flujo turbulento cumple con los principios de la mecánica de fluidos (las ecuaciones de Navier Stokes) debido a que las escalas de longitud más pequeñas de este tipo de fenómenos son mucho mayores que las escalas moleculares. Desafortunadamente estas escalas son todavía mucho menores que las que son posibles de calcular por simulación directa, excepto en los casos más simples, de escasa utilidad práctica [BB98] [DLDB98]. La razón de ello es que la turbulencia presenta fluctuaciones mucho más pequeñas que el tamaño de los elementos en los que se discretiza el dominio. Los vórtices más pequeños sólo podrían capturarse con tamaños de los elementos del orden  $h \approx \nu^{\frac{3}{4}}$  [MP94]. El número de nodos de una malla tridimensional con ese tamaño de elementos, sería del orden de  $\nu^{-\frac{9}{4}}$ . Un valor de  $\nu \approx 10^{-6}$ , que corresponde a las aplicaciones que pretendemos resolver en nuestro caso, nos llevaría a  $10^{14}$  nodos. En la actualidad, los superordenadores permiten trabajar hasta con  $10^7$  nodos [LYO98], con lo que aún tendremos que esperar para tener disponibles ordenadores capaces de resolver este tipo de problemas mediante simulación directa.

Por otra parte, cabe añadir que, el límite del problema de Navier Stokes para  $R_n \rightarrow \infty$  es el denominado problema de Euler, ya introducido en el capítulo 1. Este problema es una simplificación del más general de Navier Stokes, en el que se han eliminado los términos de viscosidad. Es evidente que, con esta simplificación se eliminan muchos fenómenos de interés de la simulación numérica, que pueden dar lugar a flujos que nada tienen que ver con los que se encuentran en el límite  $R_n \rightarrow \infty$ . Pero, sin embargo, la experiencia demuestra que el análisis numérico del fluido para  $R_n \rightarrow \infty$  resulta en soluciones muy similares a las que se producen en la realidad, en muchos casos prácticos. En este sentido hay que añadir que los flujos típicos en hidrodinámica naval tienen valores característicos de  $R_n = 10^9$ , con lo que se hace evidente que la consideración de  $R_n \rightarrow \infty$  no es tan descabellada.

### Las Ecuaciones de Reynolds

Recuperemos, para la siguiente exposición, las ecuaciones de Navier Stokes (3.1) y (3.2), obtenidas en el apéndice J, y en las que, para comodidad en la exposición siguiente, se han eliminado los términos de estabilización,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Con las adecuadas condiciones de contorno e iniciales, que para la siguiente discusión no son importantes.

Como se comentó anteriormente, con las capacidades de cálculo disponibles en la actualidad, las ecuaciones (3.70) no pueden ser resueltas en flujos turbulentos. Sin embargo, para la mayoría de los problemas de ingeniería, no es necesario conocer exactamente la distribución de velocidades y presiones en el fluido, sino unos valores medios (tanto espaciales como temporales). Por lo tanto, podemos adoptar un método estadístico para obtener una aproximación de esos valores medios. Esta metodología fue sugerida por Osborne Reynolds [Rey83] tras una serie de experimentos sobre el flujo a través de tubos. Una de sus más importantes conclusiones fue que el comportamiento general del fluido depende de un número (llamado tras él número de Reynolds):

$$R_n = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (3.71)$$

donde  $d$  es el diámetro del tubo y  $v$  es la velocidad de entrada. Reynolds pudo observar como para bajos  $R_n$  el flujo permanece en régimen laminar (con un perfil parabólico de velocidades sobre el tubo). Pero cuando  $R_n$  superaba un valor crítico (en torno a 2000) el flujo aparecía turbulento (el perfil parabólico desaparecía) a una cierta distancia de la entrada del tubo. A partir de ahí el efecto de aumentar  $R_n$  significaba que la región turbulenta se extendía más y más.

La complejidad del fenómeno de la turbulencia implica la necesidad de separar dos regiones de valores de  $R_n$ . Aquélla de valores alejados del valor crítico de  $R_n$  (aquél en el que se produce la transición al régimen turbulento) y aquélla en la que se está cercano a la transición. El fenómeno de la transición al régimen turbulento debe abordarse de forma casi independiente del problema general de la turbulencia, y no se considera de interés su estudio en el presente trabajo.

En realidad la separación anterior nos permite simplificar el problema. Ante problemas con bajos o moderados valores de  $R_n$ , o aquellos en los que el régimen laminar sea predominante, recurriremos a la solución del problema de Navier Stokes presentado con anterioridad en este capítulo. Para valores elevados de este parámetro tendremos que recurrir a una nueva formulación que se basa en criterios estadísticos y que presentamos a continuación.

Siguiendo los mencionados criterios estadísticos, estudiaremos el problema en relación a la media de las variables que lo describen. Comencemos diciendo que es posible definir tres tipos de medias; la media temporal, la media espacial y la media estadística [Sot97].

La media temporal es apropiada para la turbulencia estacionaria, esto es, un flujo turbulento que, de media, no varía con el tiempo. Para flujos de este tipo, la media de una variable instantánea  $\chi(\mathbf{x}, t)$ , se define como,

$$\bar{\chi}_t(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \chi(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.72)$$

La media espacial es apropiada para la turbulencia homogénea. Esto ocurre en el flujo turbulento que, de media, es uniforme en todas direcciones. Esta media se define por,

$$\bar{\chi}_e(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \chi(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.73)$$

La media estadística (o media de experimentos) es la más general. Se define como la media de  $N$  experimentos idealmente iguales. Si se denomina  $\chi_n(\mathbf{x}, t)$  a la distribución de la variable  $\chi(\mathbf{x}, t)$  en el  $n$ -ésimo experimento, podemos expresar la media estadística como,

$$\bar{\chi}_x(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\mathbf{x}, t) \quad (3.74)$$

Para un flujo turbulento, homogéneo y estacionario, se ha de suponer que las tres medias anteriores coinciden. Para la siguiente discusión adoptaremos la media estadística (3.74).

Si consideramos las variables del flujo como variables estadísticas, estas pueden describirse como la suma de su valor medio más una fluctuación aleatoria, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$  son las medias<sup>17</sup> de las variables  $\mathbf{v}$ ,  $p$  y  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$  sus fluctuaciones aleatorias. Las relaciones (3.75) es la denominada descomposición de Reynolds base de la siguiente discusión. Si sustituimos la (3.75) en las ecuaciones (3.70) y tomando la media en estas últimas<sup>18</sup>, podemos escribir,

<sup>17</sup>notaremos la media de una variable con el signo "-" sobre él. Es decir la media de  $f$ , se notará  $\bar{f}$ .

<sup>18</sup>se ha de tener en cuenta que la media de las fluctuaciones es nula.



$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \bar{f}_i \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

El término  $\frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j}$  puede expandirse si se hace uso de la descomposición (3.75), quedando como,

$$\frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{v'_j v'_i})}{\partial x_j} \quad (3.77)$$

y sustituida en la ecuación (3.76) queda como,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial (\overline{v'_j v'_i})}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \bar{f}_i \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Si comparamos la ecuación (3.78) con (3.70) y si identificamos las medias de las variables con las que define la ecuación (3.70), vemos que la única diferencia es la adición del término  $\rho \frac{\partial (\overline{v'_j v'_i})}{\partial x_j}$ . Es usual escribir este término como [Sot97] [VCZ97],

$$\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij}^R = -\overline{\rho v'_j v'_i} \quad (3.79)$$

Donde  $\underline{\tau}^R$  es el denominado tensor de tensiones de Reynolds o de tensiones turbulentas.

La aparición de este nuevo término en las ecuaciones de Reynolds, requiere que sea modelado de alguna manera para cerrar el sistema de ecuaciones (que ahora tiene  $N \times N$  nuevas incógnitas).

La propuesta más conocida para modelar el tensor de Reynolds supone que las tensiones turbulentas son proporcionales al gradiente de las velocidades medias,

$$\tau_{ij}^R = 2\mu_T \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad (3.80)$$

Que es la denominada hipótesis de Boussinesq [Wil93] [Sot97], donde  $k$  es la energía cinética de las fluctuaciones definida como,

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$$

Si sustituimos la ecuación (3.80) en (3.70) podemos escribir,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - 2(\mu_T + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

donde se han eliminado las marcas "-" sobre los valores promediados y se ha incluido el término  $k$  en la presión, por lo que no es necesaria su determinación.

### Modelos de Turbulencia

Sobre la base de la modelización anterior del tensor de Reynolds, el problema de incorporar los efectos de la turbulencia se reduce a encontrar la distribución de la viscosidad turbulenta  $\mu_T$ , que aparece en la ecuación (3.80). Hay que señalar que esta no es una propiedad del fluido, sino que depende del estado local de la turbulencia. Originalmente, el concepto de viscosidad turbulenta surgió por analogía entre el movimiento molecular y el movimiento turbulento [Wil93] [Sot97]. Es interesante notar el parecido de la definición (3.80), con la presentada en el capítulo 1 para el tensor de tensiones del fluido  $\tau_{ij}$ . Esta analogía lleva a considerar que los vórtices turbulentos (*turbulent eddies*) se comportan como partículas de fluido, que, como las moléculas, colisionan e intercambian cantidad de movimiento. Dado que la viscosidad molecular es proporcional a la velocidad media y al camino medio libre entre moléculas, siguiendo la analogía se puede postular que la viscosidad turbulenta es proporcional a una velocidad característica del movimiento fluctuante y a una escala de longitud típica de éste, la cual Prandtl [Pra25] bautizó como longitud de mezcla. Esto puede escribirse como,

$$\mu_T \propto \rho v_m l_m \quad (3.82)$$

Donde  $v_m$  es la velocidad característica del movimiento fluctuante y  $l_m$  es la longitud de mezcla.

A los argumentos anteriores, base de la modelización (3.82), se le puede objetar que los vórtices turbulentos no son cuerpos rígidos y como tal no tienen porqué comportarse como tales. Sin embargo, la experiencia demuestra que el modelo (3.82) funciona bien en la práctica.

A continuación, se presentarán diferentes modelos de turbulencia, los cuales se diferencian en la manera de determinar  $v_m$  y  $l_m$ . Estos serán modelos simples de los denominados de cero ecuaciones [Sot97]. En principio los modelos más complicados de una y dos ecuaciones (ver [LRB<sup>+</sup>98] [Sot97] [VCZ99]) debieran ser más exactos que los que se incluirán aquí, que no modelan, en su formulación, ningún efecto de transporte de las cantidades turbulentas<sup>19</sup>. Sin embargo, el resultado de dos de los últimos congresos en los que se compararon resultados de análisis *CFD* en buques no permite apoyar esa suposición. Incluso, las evidencias sugieren lo contrario [LB97] [TOK98]. Esto puede ser debido a la gran dificultad de estabilizar las ecuaciones que modelizan el transporte convectivo de las variables turbulentas [Sot97] [VCZ99] en las formulaciones más complejas, que puede dar lugar a resultados imprevisibles. Esta complejidad es similar a la estudiada para la ecuación de convección difusión en el capítulo 2, y la técnica *CF* está disponible para solventar este aspecto. Frente a la complejidad de estos modelos, los más simples son fácilmente calibrados para tipos de problemas específicos y permiten obtener muy buenas, y consistentes predicciones del flujo [Wil93].

En virtud de las anteriores conclusiones y siguiendo los objetivos de este trabajo presentados en la introducción se creyó oportuno incluir modelos turbulentos simples y robustos que permitieran obtener resultados suficientemente cercanos a los reales con un alto grado de fiabilidad.

**Modelo de Longitud de Mezcla** El modelo de longitud de mezcla fue el primer modelo de turbulencia propiamente dicho [Wil93]. Fue introducido por Prandtl [Pra25] en 1925 y se basa en la denominada hipótesis de longitud de mezcla de Prandtl. Este postuló que la velocidad característica del movimiento fluctuante  $v_m$  era proporcional al gradiente de la velocidad media por la longitud de mezcla  $l_m$ .

$$v_m = l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (3.83)$$

La hipótesis anterior se basó en la observación del flujo cortante (*shear flow*), donde sólo hay una componente del gradiente de velocidad y sólo una componente del tensor de Reynolds es importante [Sch69] [Wil93].

<sup>19</sup>Es decir, la turbulencia se disipa allí donde se genera.

De la relación (3.83), y junto con la relación (3.82), se puede obtener,

$$\mu_T = C \rho l_m^2 \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (3.84)$$

Donde  $C$  es la constante de proporcionalidad de (3.82).

La longitud de mezcla  $l_m$  se puede considerar constante, aunque existen fórmulas de base experimental que permiten su determinación. Si denominamos  $y$  a la distancia a la superficie sólida, la fórmula de Nikuradse [Sch69] define,

$$l_m = L \left[ 0.14 - 0.018 \left(1 - \frac{y}{L}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{L}\right)^4 \right] \quad (3.85)$$

Donde  $L$  es una distancia característica del problema que en canales abiertos suele tomarse como la altura total del flujo.

Como ya se ha mencionado, se han desarrollado diferentes formulaciones para el cálculo de  $l_m$ . Una de las más conocidas se debe a Baldwin & Lomax (ver [LB97] [Sch69]). Este modelo propone calcular  $l_m$  en la capa límite ( $l_{mi}$ ), como [Wil93],

$$l_{mi} = \kappa y \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{A_0^+}} \right) \quad (3.86)$$

Donde  $y^+$  es un valor adimensional<sup>20</sup> de la distancia a la pared  $y$ , y que se definirá posteriormente (3.94), en este mismo capítulo, con objeto del estudio de la capa límite.  $A_0^+$  es una constante que toma el valor  $A_0^+ = 26$ .

La anterior ecuación (3.86) puede ser corregida, para tener en cuenta los efectos de los gradientes de presión, en la siguiente forma,

$$l_{mi} = \kappa y \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \quad (3.87)$$

$$A^+ = 26 \left[ 1 + y \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\rho v_\tau^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Donde  $x$  debe entenderse como la dirección del flujo ( $y$  es la dirección normal a la pared) y  $v_\tau$  es la velocidad de fricción que se introducirá posteriormente.

<sup>20</sup> $y^+ = \frac{yv_\tau}{\nu}$  donde  $v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$ , siendo  $\tau_p$  la tensión de corte en la pared.

En cambio, fuera de la capa límite, la viscosidad turbulenta está dada por,

$$\mu_T = \rho C_1 C_2 F_W F_K \quad (3.88)$$

Donde,

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0168, \quad C_2 = 1.6 \\ C_W &= 0.25, \quad C_K = 0.3 \\ F_W &= \min \left[ y_{max} F_{max}, C_W y_{max} \frac{v_{max}^2}{F_{max}^2} \right] \\ F_{max} &= \frac{1}{\kappa} \max_y (l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}) \\ F_K &= \left[ 1 + 5.5 \left( \frac{C_K}{y_{max}} \right) \right] \end{aligned}$$

Donde  $y_{max}$  es el valor de  $y$  donde la cantidad  $(l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}})$  toma su máximo y  $v_{max}$  es la máxima velocidad en la capa límite<sup>21</sup>.

**Modelo de Smagorinsky** El modelo de Smagorinsky es un caso sencillo de los modelos tipo *LES* (*Large Eddy Simulation*). La base de estos modelos es intentar modelar el movimiento de las escalas más pequeñas del problema que no pueden ser capturadas por la malla de elementos finitos, mientras que el movimiento de las escalas mayores de la turbulencia se resuelve directamente.

Este modelo propone que la viscosidad turbulenta depende del tamaño de la malla de la siguiente forma [Sma63],

$$\mu_T = C \rho h^{e^2} \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (3.89)$$

Donde  $C$  es una constante que debe ser del orden de  $C \approx 0.01$ , y  $h^e$  el tamaño del elemento en cuestión.

Aunque el modelo de Smagorinsky (3.89) se basa en supuestos diferentes que el de longitud de mezcla (3.84), los dos coinciden si se toma  $l_m = h^e$ .

<sup>21</sup> Aunque para flujo en cortante se suele tomar la diferencia entre la velocidad máxima en la capa límite y la velocidad en el punto en el que la cantidad  $(l_m \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}})$  toma su máximo.

### La Ley de Pared

Siguiendo con el modelo de longitud de mezcla, estudiaremos como se comporta el flujo en las cercanías de un contorno sólido. La figura 3.3 muestra un típico perfil de velocidades para una capa límite turbulenta. La cantidad  $y^+$ , como se definirá después, es una distancia adimensional a la pared, al igual que  $v^+$  que representa el módulo de la velocidad adimensional. Desde un punto de vista experimental, pueden distinguirse las tres regiones que aparecen representadas en la figura 3.3. Estas son, una capa interna o subcapa viscosa, una capa externa y una capa de transición entre ambas conocida como capa logarítmica o en ocasiones también capa plenamente turbulenta [Wil93]. Esta capa logarítmica se define por ser la zona suficientemente cercana a la pared que los términos inerciales de las ecuaciones de Navier Stokes pueden despreciarse y que a la vez está lo suficientemente alejada de ella como para que se puedan despreciar las tensiones (moleculares) viscosas frente a las de Reynolds. Esta región se acepta que se encuentra en el intervalo entre  $y^+ = 30$  e  $y^+ = 100$  (o incluso por encima, dependiendo del valor de  $R_n$ ).

Por otra parte, se supone que en la zona más cercana a la pared (subcapa viscosa) la velocidad varía linealmente con  $y^+$  para después tender asintóticamente hacia la variación en capa logarítmica. La capa exterior se extiende hasta una distancia  $\delta$ , que es la amplitud de la capa límite. El comportamiento de la velocidad en esa zona es mucho más complicado de definir.

Estrictamente hablando la capa logarítmica no es sino una transición entre las capas interna y externa. Sin embargo, encontraremos, por la simplicidad de las ecuaciones que la gobiernan que es muy útil para simplificar la simulación de los fenómenos en la zona cercana a las paredes.

Si consideramos una capa límite (bidimensional) con presión constante, el flujo en situación estacionaria estará gobernado por las siguientes ecuaciones de la capa límite [Wil93], que pueden derivarse de la simplificación de las ecuaciones de Reynolds,

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{12}^R \right] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Dado que en la zona de la capa logarítmica los términos convectivos son despreciables, las ecuaciones 3.90 indican que la suma de las tensiones de Reynolds y viscosas debe ser constante,

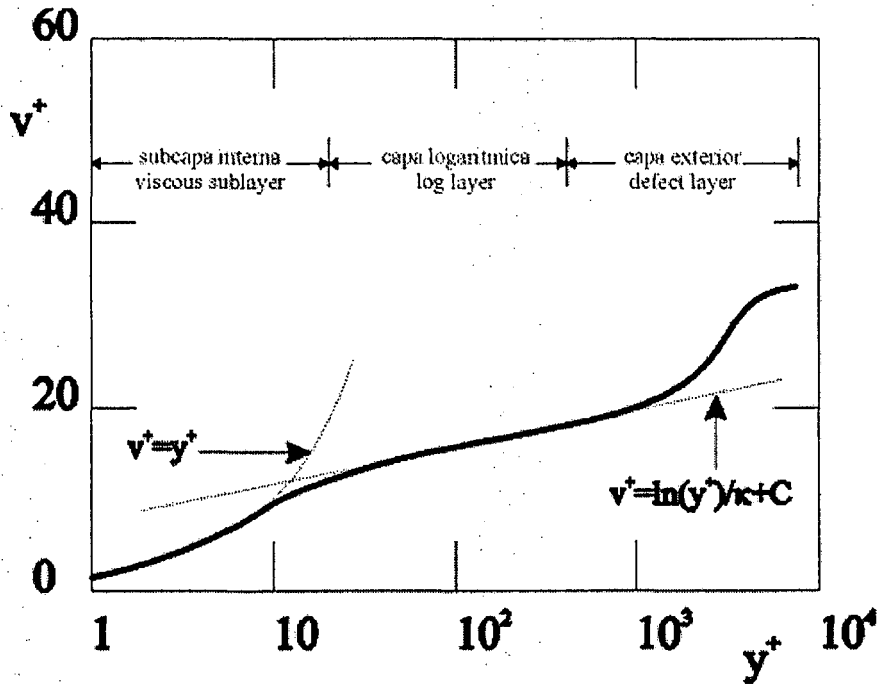


Figura 3.3: Distribución de velocidad típica para una capa límite turbulenta.

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{12}^R \approx \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_P = \tau_p \quad (3.91)$$

Donde el subíndice  $P$  indica "evaluado en la pared" y por lo tanto  $\tau_p$  es la tensión de corte en la pared. Normalmente se denomina velocidad de fricción al valor dado por  $v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$ .

Como se indicó anteriormente, en la capa logarítmica las tensiones de Reynolds son mucho mayores que las viscosas, y por lo tanto de acuerdo con el modelo de longitud de mezcla,

$$l_m^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx v_\tau^2 \quad (3.92)$$

Si se supone que la longitud de mezcla [Wil93] está dada por  $l_m = \kappa y$ , podemos integrar la ecuación (3.92) inmediatamente, resultando,

$$u \approx \frac{v_\tau}{\kappa} \ln(y) + C \quad (3.93)$$

Donde si introducimos las siguientes cantidades adimensionales,

$$\begin{aligned} y^+ &= \frac{y v_\tau}{\nu} \\ u^+ &= \frac{u}{v_\tau} \end{aligned} \quad (3.94)$$

y las sustituimos en (3.93), obtenemos la forma más conocida de la denominada *ley de pared*.

$$u^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (3.95)$$

Donde  $\kappa$  es conocida como constante de Kármán y  $C$  es una constante adimensional, sus valores, para capas límite incompresibles sin gradientes de presión significativos, pueden tomarse como [Wil93],

$$\begin{aligned} \kappa &\approx 0.41 \\ C &\approx 5.0 \end{aligned}$$

Evidentemente, por los supuestos que se han hecho, la ley (3.95) sólo se considera válida<sup>22</sup> entre  $y^+ = 30$  e  $y = 0.1\delta$ .

Sin embargo la ley (3.95) ha sido revisada en muchas ocasiones, con el objetivo de extender su rango de validez, aquí consideraremos, la denominada ley de pared de Reichardt [Wil93] [FKT99] siguiente,

$$u^+ \approx 2.5 \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33y^+} \right) \quad (3.96)$$

El rango de validez de la anterior se sitúa entre  $y^+ = 0$  e  $y = 0.1\delta$  (o  $y^+ = 300$ ).

A partir de aquí, pueden considerarse otras muchas modificaciones de la ley de pared (ver por ejemplo [Wil93]) pero por su simplicidad y su óptimo comportamiento para simular flujos desprendidos [Wil93] [Sot97] (los cuales violan las hipótesis de la ley de pared) cabe destacar la siguiente ley que permite tener en cuenta los efectos de la rugosidad,

$$u^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y^+ S_R}{100}\right) + 8.4 \quad (3.97)$$

<sup>22</sup>para valores menores de  $y^+$  se puede considerar más exacta la relación [Sot97]  $y^+ = u^+$ . Aunque cabe señalar que las dos leyes coinciden [GM98] para  $y^+ = 11.06$ .



Siendo,

$$S_R = \left\{ \begin{array}{ll} (50/k_R^+)^2 & \text{si } k_R^+ < 25 \\ 100/k_R^+ & \text{si } k_R^+ \geq 25 \end{array} \right\}$$

donde  $k_R^+ = \frac{k_R v_\tau}{\nu}$ , siendo  $k_R$  la altura media de la rugosidad.

Las leyes de pared dadas en (3.95), (3.96) y (3.97) pueden utilizarse para simplificar los cálculos. Fijémonos en la figura 3.4, en ella podemos (a la izquierda) ver la disposición de los nodos de una malla de elementos finitos cerca de una pared. Supongamos que los nodos A,B,C están dentro de la zona descrita por las leyes de pared anteriores (en general  $y_C^+ < 100$ ). Dado que conocemos la forma de la solución en la zona más cercana a la pared (esta dada por (3.95), (3.96) o (3.97)), podemos eliminar la parte de la malla más próxima al contorno (nodos A y B de la figura 3.4), sustituyendo su efecto por una condición especial en el siguiente nodo de la malla (nodo C de la izquierda de la figura 3.4). esta condición de contorno especial es la tracción dada por la ley de pared.

Efectivamente, dado el par  $y, v$ , es posible gracias a (3.95), (3.96) y (3.97) calcular  $v_\tau$ , y con él  $\tau_p = \rho v_\tau^2$ . Que es la componente de la tracción tangente al contorno (en la dirección de la velocidad), que es constante en la zona más cercana a la pared (nodos A,B,C en nuestro caso).

Fijémonos en la parte derecha de la figura 3.4, para poder describir de manera breve el algoritmo para la implementación de esta condición de contorno.

- 1° Dado  $y$ , mover la pared una distancia  $y$  según la normal (ver parte derecha de la 3.4)
  - 2° Resolver el problema de flujo imponiendo en el nodo A,  $v_i n_i = 0$
  - 3° Calcular  $\tau_p$  a partir de  $|\mathbf{v}_A|$  dado  $y$
  - 4° Resolver el problema del flujo fluido imponiendo en el nodo A,  
 $v_i n_i = 0, n_j \tau_{ij} = \tau_p \frac{v_i}{|\mathbf{v}|} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} n_j \tau_{m_i}$
  - 5° Volver a 3°
- (3.98)

Por otra parte y dado que la distancia que abarca la zona interior y la logarítmica de la capa límite (se puede considerar en torno a  $0.1\delta$ ) es en general despreciable frente al tamaño de los elementos de la malla, podemos despreciar el desplazamiento del contorno (paso 1° del algoritmo (3.98)) con lo que la condición de tracción puede imponerse directamente sobre el nodo de contorno de la malla.

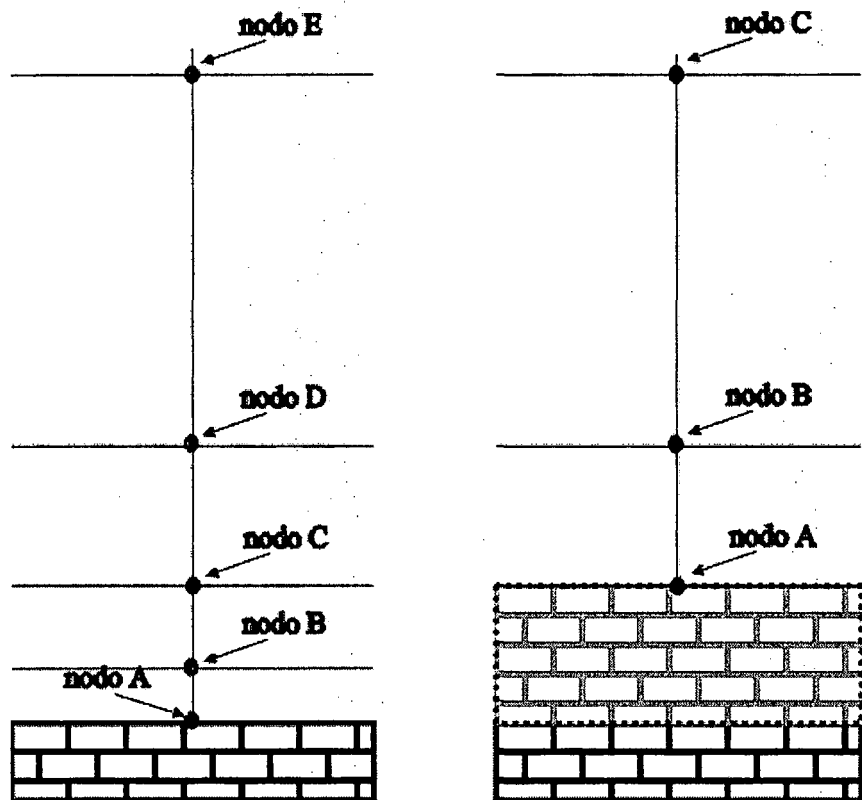


Figura 3.4: Simplificación del problema para la condición de contorno para la ley de pared.

Una revisión sobre las bondades y limitaciones de la Ley de Pared puede encontrarse en [BH].

## 3.5. Ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos numéricos, de validación del algoritmo presentado.

### 3.5.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo es el problema del flujo confinado en una cavidad (en inglés *cavity flow*). Esta es una prueba clásica para evaluar el comportamiento de un algoritmo en la resolución de flujos incompresibles. En este caso entenderemos el problema, que normalmente se estudia bidimensionalmente, al espacio tridimensional.

Un esquema del problema puede verse en la figura 3.5. Un fluido viscoso está confinado en una cavidad en forma de cubo de lado unidad. Todos los lados del cubo tienen prescrita la condición de velocidad nula<sup>23</sup>, a excepción del superior, cuya prescripción es velocidad unidad, y las caras delantera y posterior, que tienen impuesta la condición de velocidad normal nula. Se impone la condición de presión nula en una línea paralela al eje de simetría del problema sobre la base del cubo (ver figura 3.5).

Inicialmente, excepto en la cara superior, la velocidad se inicializa a cero. A partir de ese momento inicial, la viscosidad transmite la cantidad de movimiento al interior de la cavidad.

Para los cálculos se utilizó una malla de 9553 tetraedros lineales con 1970 nodos, cuyo contorno se muestra en la figura 3.6.

En las figuras 3.8, 3.7 y 3.9, se presentan diversos resultados obtenidos para un  $R_n$  unidad. Para un valor tan bajo de  $R_n$  podemos suponer que los términos convectivos de las ecuaciones de Navier Stokes son despreciables frente a los difusivos, por lo que este tipo de flujo es una buena prueba para comprobar la estabilidad ante la restricción de incompresibilidad. Los resultados comparan muy bien con los obtenidos por otros autores, mediante otros algoritmos numéricos (ver [Cod92]). En la distribución de la presión se observaron (ver figura 3.10) pequeñas oscilaciones en su distribución, que sin duda pueden atribuirse a la grosera discretización del problema.

---

<sup>23</sup>Incluyendo las aristas laterales de la cara superior del cubo.

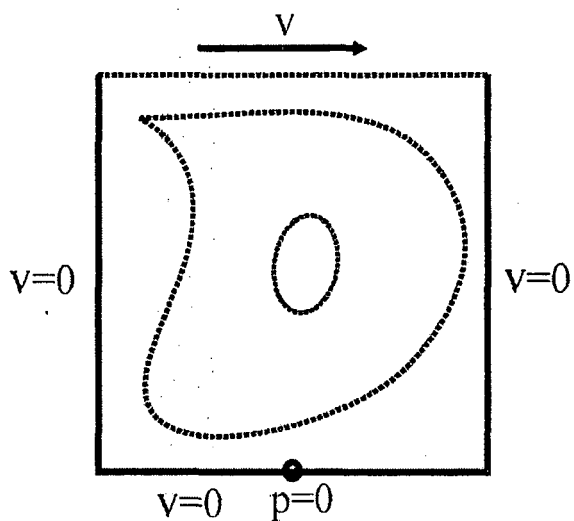


Figura 3.5: Flujo en una cavidad. Definición del problema.

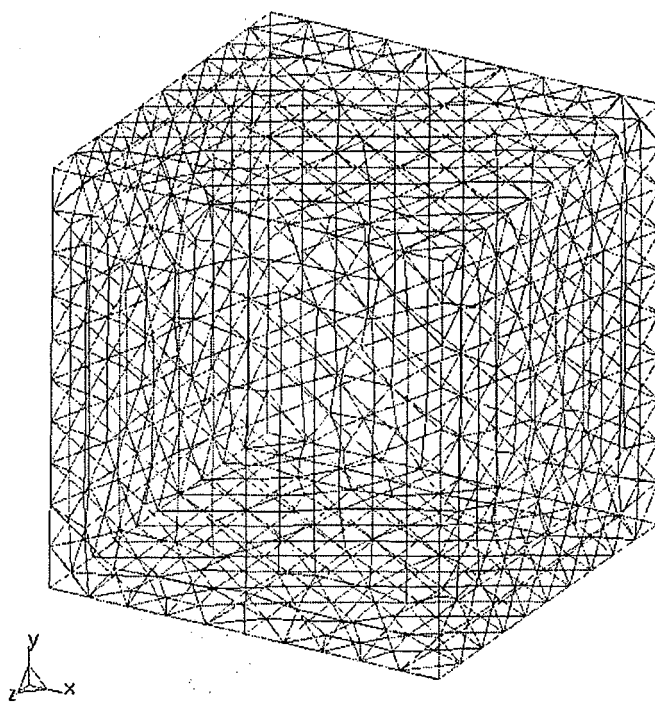


Figura 3.6: Malla de contorno utilizada para el flujo en cavidad.

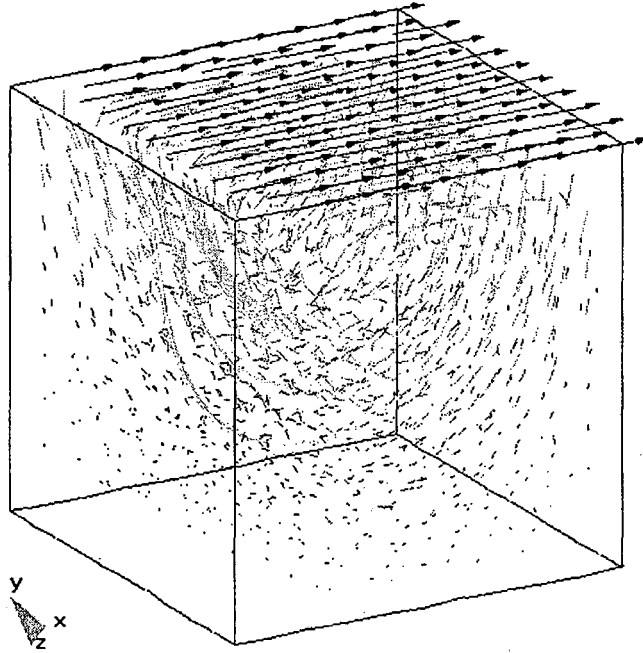


Figura 3.7: Vectores de velocidad y líneas de corriente del flujo en una cavidad.

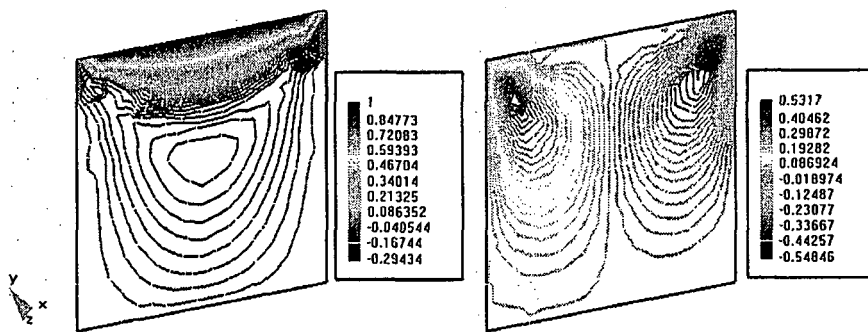


Figura 3.8: Contornos de velocidad, sobre un corte diametral, del flujo en una cavidad (componente horizontal a la izquierda y vertical a la derecha).

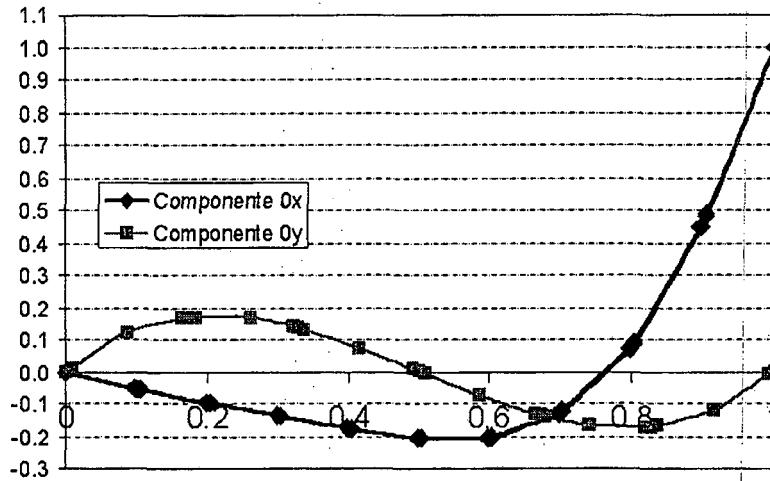


Figura 3.9: Distribución de velocidad (componentes  $O_x$  y  $O_y$ ) sobre la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.

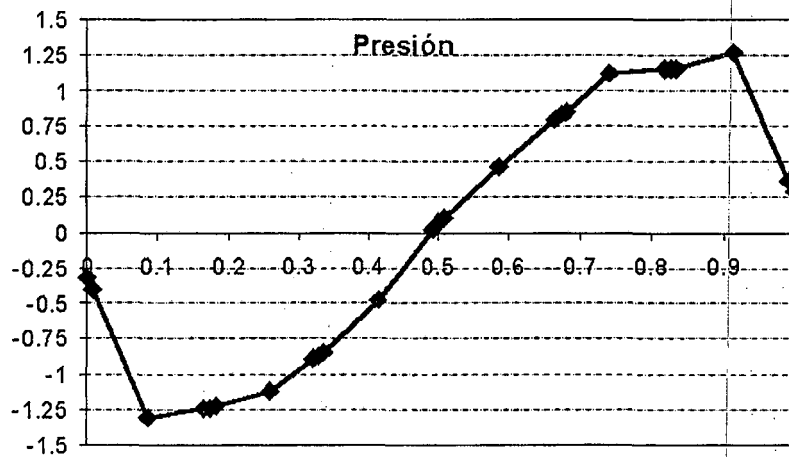


Figura 3.10: Distribución de la presión la línea media horizontal del plano diametral en el flujo en una cavidad.

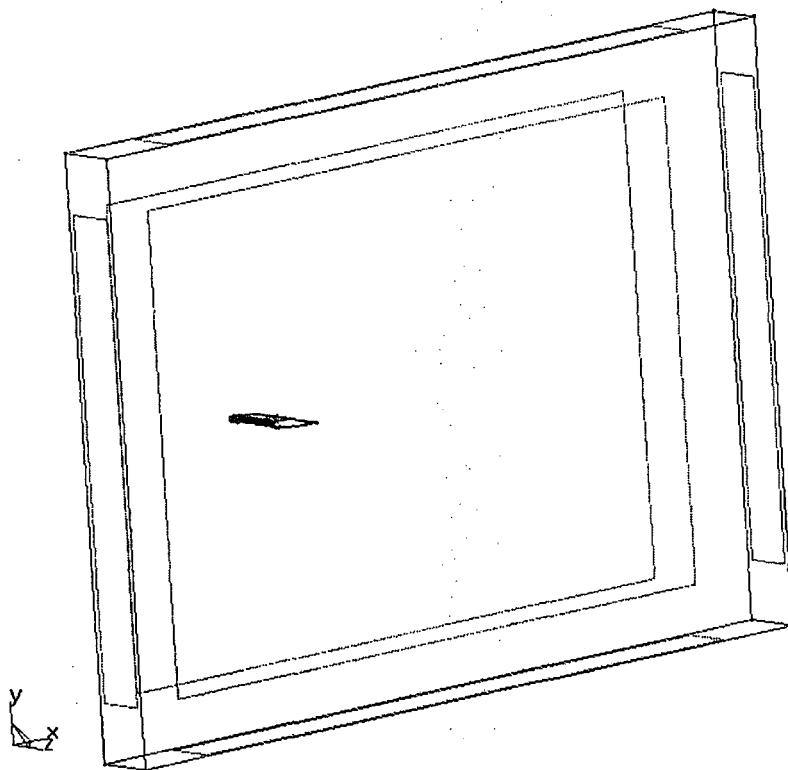


Figura 3.11: Definición geométrica del problema del análisis de un perfil NACA 0012.

### 3.5.2 Ejemplo 2

A continuación se presentan diferentes resultados del análisis de un perfil NACA 0012 a diferentes ángulos de ataque (entre  $0^\circ$  y  $15^\circ$ ). Para su análisis se han resuelto las ecuaciones de Euler ( $R_n \rightarrow \infty$ ,  $\rho = 1.01 \text{Kg/m}^3$  y  $\mu = 0$ ) y de Navier Stokes ( $R_n = 10^6$ ,  $\rho = 1.01 \text{Kg/m}^3$  y  $\mu = 0.00001 \text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ) en diferentes casos. En todos los casos la velocidad de entrada en el dominio se tomó  $v_\infty = 10 \text{m/s}$ . En el resto de las caras del dominio se prescribió a cero la velocidad normal a la superficie, a excepción de la cara opuesta a la de entrada donde se dejó el contorno libre. Un resumen de los resultados obtenidos se muestra a continuación. Estos resultados se han comparado con los experimentales disponibles en [AD59]. Una definición tipo del problema se muestra en la figura 3.11. En los análisis se utilizaron mallas entre los 35.000 y los 160.000 elementos (tetraedros lineales). Un ejemplo de las mallas utilizadas puede verse en la figura 3.12.

En la figura 3.13 se muestra la distribución del coeficiente  $v^2/v_\infty^2$  sobre el perfil en un corte diametral de la malla. Estos resultados se comparan

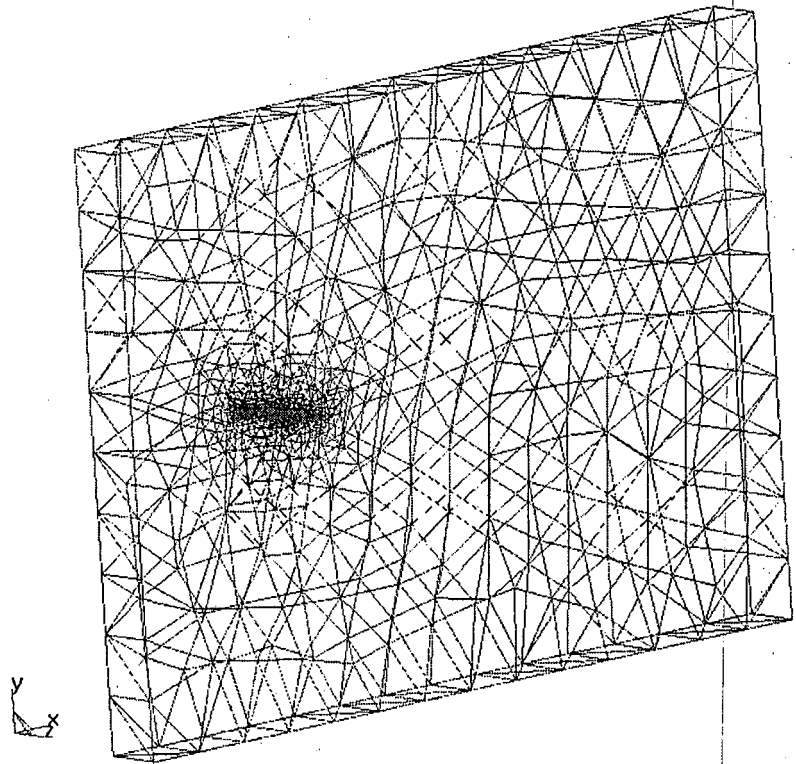


Figura 3.12: Malla tipo utilizada en el análisis del perfil NACA 0012.



con datos experimentales, pudiéndose apreciar la buena correspondencia entre ambos. Esta buena correspondencia con los resultados experimentales, en cuanto a la distribución del coeficiente  $v^2/v_\infty^2$  se pudo apreciar en los diferentes ángulos de ataque analizados. En la figura 3.14 se presenta la distribución de presión sobre el perfil en el caso del ángulo de ataque de  $5^\circ$ . En este mismo caso se muestra la distribución de vectores de velocidad en la figura 3.15.

En la figura 3.16 se muestra la distribución de velocidad (componente según  $Ox$ ) en el caso de  $R_n = 10^6$ . En los ejemplos corridos con  $\mu \neq 0$ , se impuso sobre el contorno la tracción dada por la ley de pared logarítmica. No se usó ningún modelo de turbulencia, con la intención de probar las capacidades de esta condición de contorno en flujos laminares<sup>24</sup>. Como se puede apreciar en la figura 3.17, los resultados del coeficiente de empuje obtenidos en este caso concuerdan bastante bien con los datos experimentales. Sin embargo, las diferencias apreciadas, que también se encontraron en el caso de  $\mu = 0$ , son significativas. En los análisis detenidos de la solución, se observó que la velocidad transversal al eje del perfil, tomaba valores que llegaban a valores en torno al 5% de la velocidad de entrada. Este fenómeno se debe a imperfecciones de la malla en la zona donde la curvatura del perfil es importante, que pueden provocar las diferencias observadas con los datos experimentales. Sin embargo, cabe insistir en el hecho significativo de que las diferencias puntuales de las variables calculadas, con los datos experimentales, son mínimas en todos los casos analizados (ver figura 3.13).

### 3.5.3 Ejemplo 3

Por último, presentamos el ejemplo clásico del análisis del flujo ante un escalón inverso (en inglés *backwards facing step*). Este ejemplo ha sido analizado para  $R_n = 7 \cdot 10^4$  ( $\rho = 1000 \text{Kg/m}^3$  y  $\mu = 0.0071 \text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ). En este caso los resultados numéricos obtenidos pueden ser comparados con los experimentales disponibles en [KKJ80].

La geometría del problema se ha representado esquemáticamente en la figura 3.18. En la entrada de canal (de dimensiones  $2m \times 0.5m$  se prescribe la componente  $Ox$  de la velocidad a  $1m/s$ , haciendo nulas el resto de las componentes. En la superficie de salida se dejó el flujo libre. Las superficies laterales se consideran planos de simetría y sobre ellas se anula la componente de la velocidad según  $Oz$ . El resto de superficies tienen impuesta la tracción dada por la ley de pared extendida.

<sup>24</sup>En los ángulos de ataque analizados el flujo no tiene fenómenos importantes de desprendimiento, por lo que la aproximación laminar parece lógica.

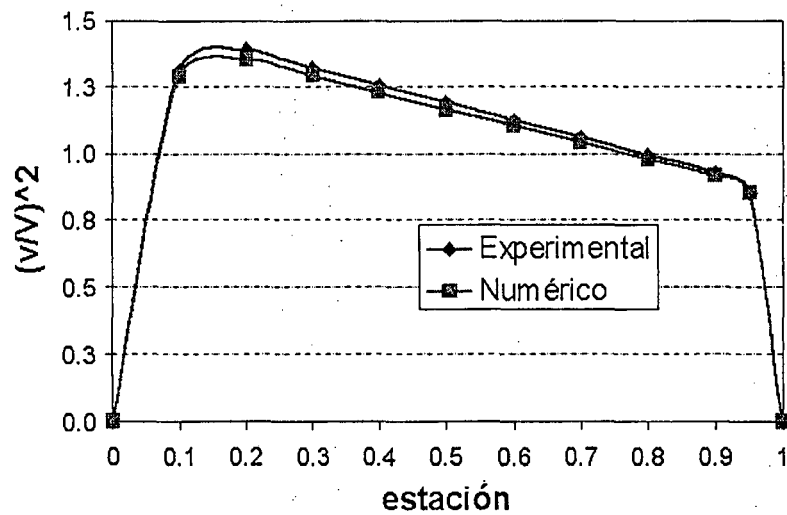


Figura 3.13: Comparación de los valores experimentales y numéricos de la distribución de  $v^2/v_\infty^2$  en el perfil NACA 0012 con un ángulo de ataque de  $0^\circ$ .

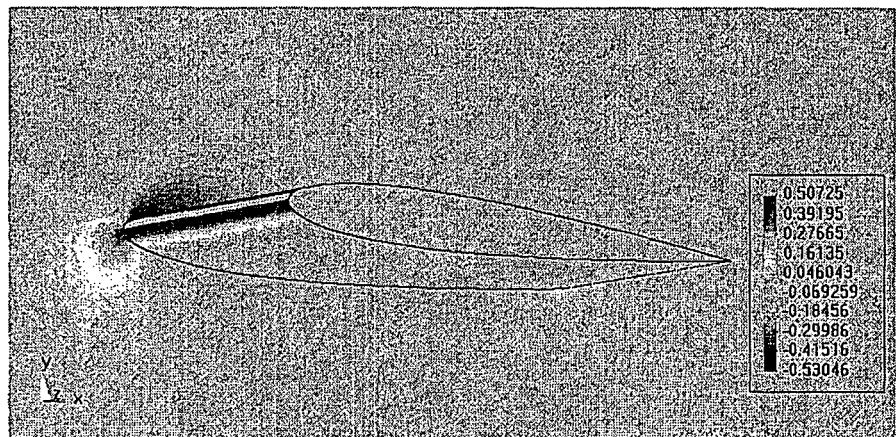


Figura 3.14: Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque  $5^\circ$ ,  $R_n \rightarrow \infty$ ).

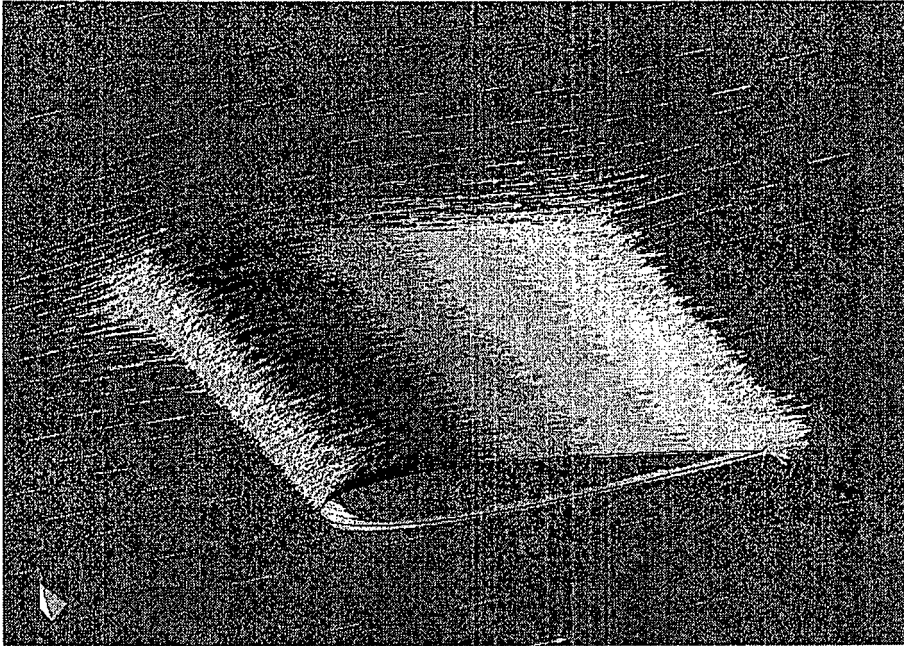


Figura 3.15: Vectores de velocidad sobre el perfil NACA 0012 (ángulo de ataque  $5^\circ$ ,  $\mu = 0$ ).

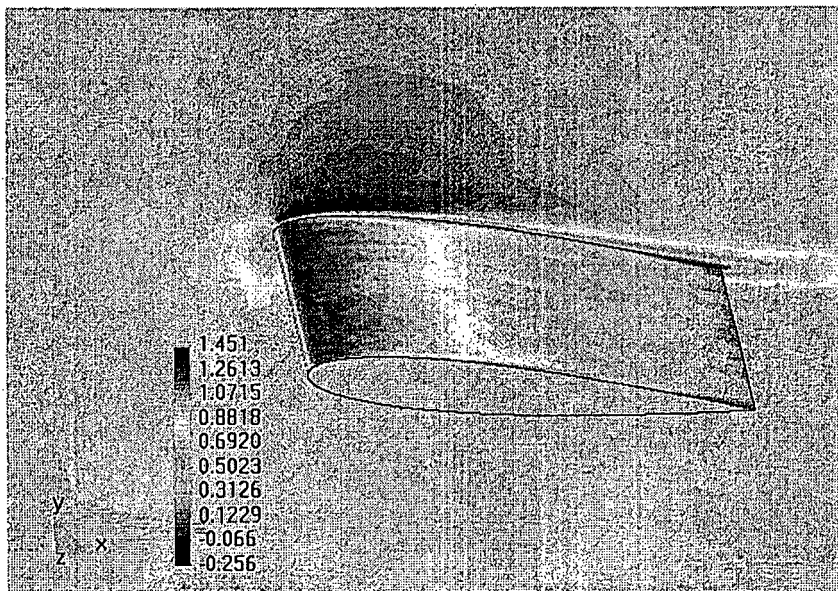


Figura 3.16: Distribución de presión en torno al perfil NACA 0012 (ángulo de ataque  $5^\circ$ ,  $R_n = 10^6$ ).

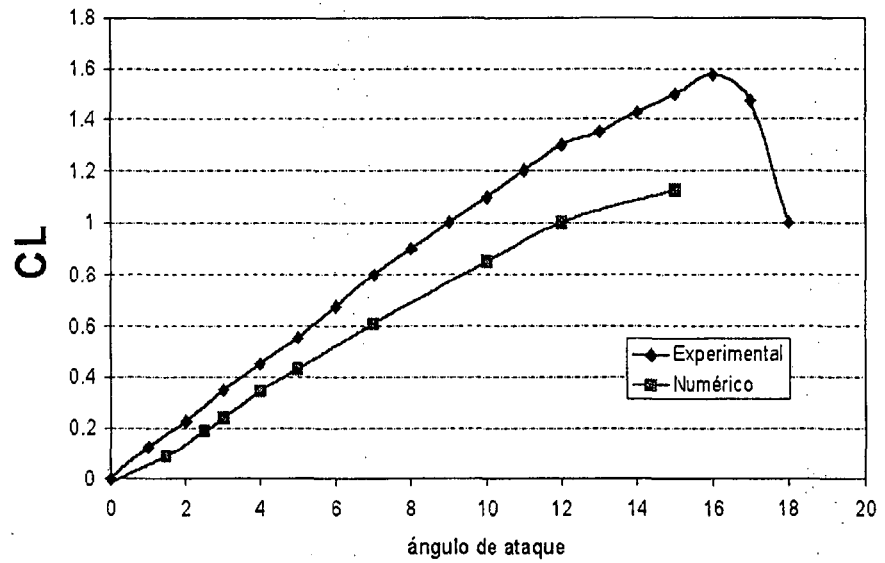


Figura 3.17: Comparación de los resultados numéricos y experimentales de empuje dinámico obtenidos en el análisis del perfil NACA 0012 ( $R_n \rightarrow \infty$ ).

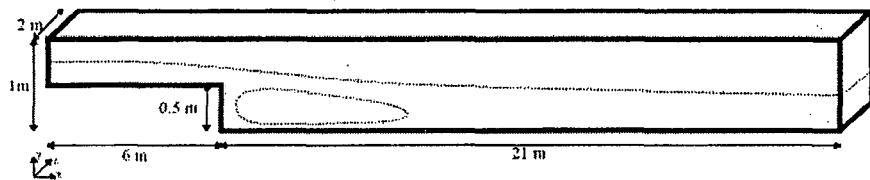


Figura 3.18: Geometría utilizada en el análisis del flujo ante un escalón.

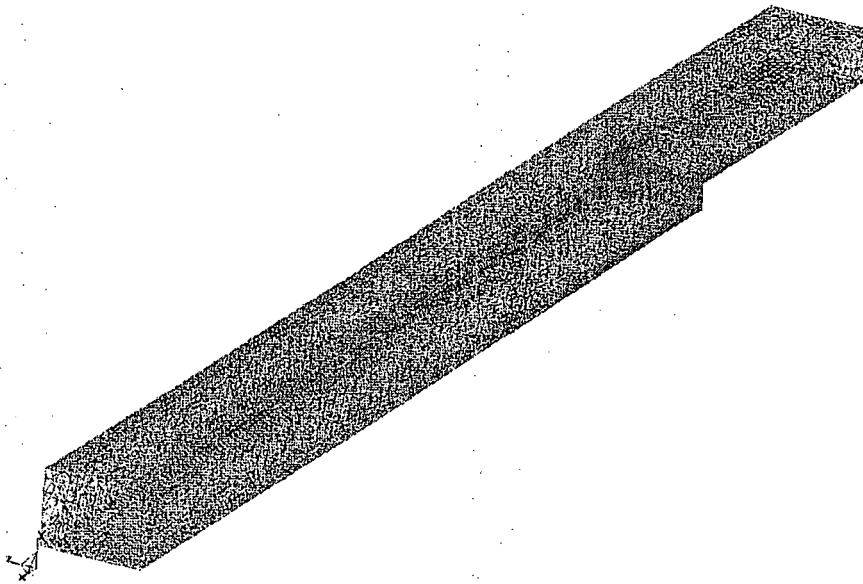


Figura 3.19: Malla de contorno utilizada en el análisis del flujo sobre un escalón.

La malla utilizada en los cálculos, que se presenta en la figura 3.19, consta de 13428 nodos y 49241 tetraedros lineales.

Los resultados experimentales, muestran, que en este caso el flujo turbulento está plenamente desarrollado, por lo cual, este problema es un buen test para probar la validez del método presentado en este tipo de flujos. El modelo de turbulencia utilizado en este caso es el de Smagorinsky.

A continuación se muestran diversos resultados gráficos de la solución obtenida. En primer lugar, en la figura 3.20 se muestran los contornos de la componente de velocidad según  $Ox$ . En esta figura puede observarse claramente la recirculación que se produce tras el escalón. De la misma manera, en la figura 3.21 se presenta el trazado de líneas de corriente a valores de la coordenada  $y$ . En el detalle que se incluye en la misma figura 3.21 se aprecia claramente el vórtice formado tras el escalón. Es importante notar la importancia de los efectos tridimensionales en este caso. En las referencias [Sot97] y [VCZ97] se hace mención a la importancia de estos efectos, como posible causa de la disparidad entre los resultados numéricos obtenidos y los experimentales disponibles en [KKJ80].

Por último, en la figura 3.22 se muestran diversos resultados en un corte diametral de la malla. Un análisis de estos resultados permite estimar la longitud del vórtice en torno a  $3.2m$ . Mientras que los resultados experimentales dan un valor en torno a  $3.5 \pm 0.5m$ , con lo cual se puede considerar que el cálculo numérico predice apreciablemente bien la formación de este vórtice.

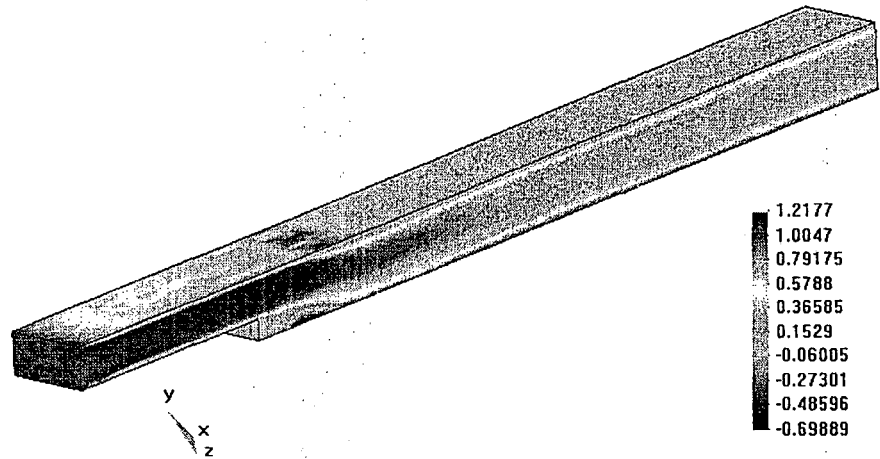


Figura 3.20: Distribución de la componente  $O_x$  de la velocidad en el análisis del flujo ante un escalón.

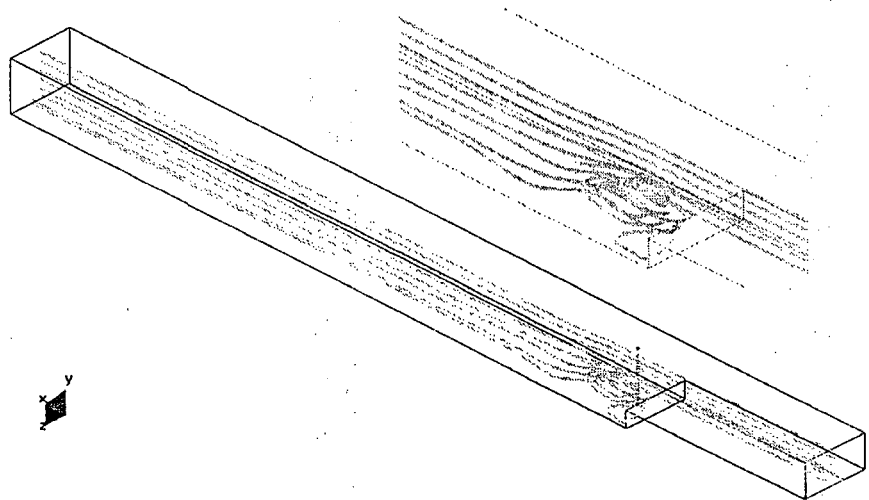


Figura 3.21: Trazado de líneas de corriente del flujo ante un escalón. Se incluye detalle de la recirculación en la zona cercana al escalón.

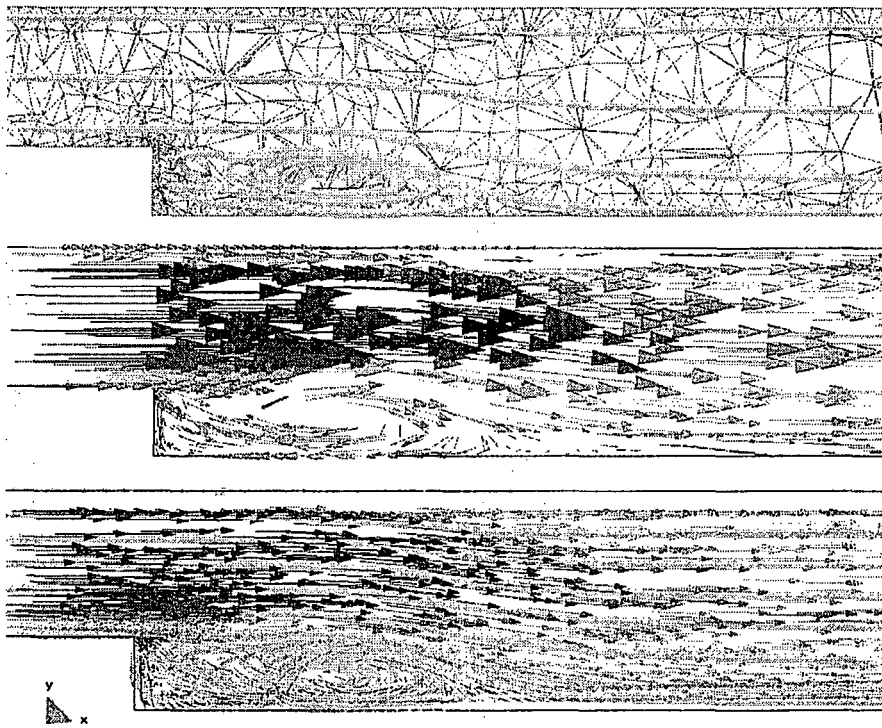


Figura 3.22: Detalle del resultado sobre el plano diametral del análisis del flujo ante un escalón.

### 3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha aplicado el *método de cálculo finitesimal* para la estabilización de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles. Adicionalmente se ha presentado el algoritmo de pasos fraccionados semi implícito como esquema de integración temporal de las mismas. La aplicación de esta metodología es original de este trabajo y se complementa con la incorporación de la condición de superficie libre presentada en el capítulo anterior. Por otra parte, se han presentado las ventajas de la metodología desarrollada para la solución del problema planteado.

Se han definido además los parámetros de estabilización aplicables a las ecuaciones de Navier Stokes, a partir de los criterios presentados en el capítulo 2.

Además, se han extendido los conceptos mencionados para la resolución de las ecuaciones de Reynolds. Para ello se han introducido los conceptos básicos de la turbulencia y se han presentado diferentes modelos. Por último se ha presentado la condición de contorno basada en denominada ley de pared, para su aplicación en flujos con elevados valores de  $R_n$ .

En los ejemplos numéricos presentados se han probado las capacidades del método y sus propiedades de estabilización en diferentes problemas.