

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE  
ESTRUCTURAS NAVALES**

Autor: Julio García Espinosa  
Director: Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra  
Codirector: Honorio Sierra Cano



# Apéndice A

## Los Métodos de Elementos de Contorno

Se presentarán a continuación los pilares teóricos que sustentan los denominados métodos de elementos de contorno o de singularidades. Este tipo de códigos son, hoy en día, prácticamente los únicos utilizados en el diseño asistido por técnicas *CFD* en ingeniería naval.

En primer lugar veremos sucintamente cómo funciona una herramienta de este tipo. En la figura A.1 se muestra un esquema básico de funcionamiento.

El mencionado esquema se refiere a un algoritmo genérico de solución de las ecuaciones de flujo potencial con un contorno de superficie libre. Este problema es en general no lineal, por la imposición de la condición de contorno de la superficie libre, por lo que deberá resolverse iterativamente hasta la convergencia.

La base de todo el algoritmo es el planteamiento discreto del problema, pero este punto se tratará con más detalle en el siguiente apartado. En primer lugar plantearemos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, supuesto estacionario, incompresible e irrotacional. Si se define un sistema de coordenadas cartesiano, con su origen en la proa del buque, sobre la superficie libre no perturbada, yendo el eje  $Ox$  aguas arriba (paralelo a  $v_\infty$ , velocidad no perturbada), y el eje  $Oz$  vertical y hacia arriba, con las condiciones se puede definir una función potencial de velocidades  $\phi$  de la forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi \quad (\text{A.1})$$

Este potencial debe satisfacer la ecuación de continuidad de masa (ver capítulo 1) y por lo tanto:

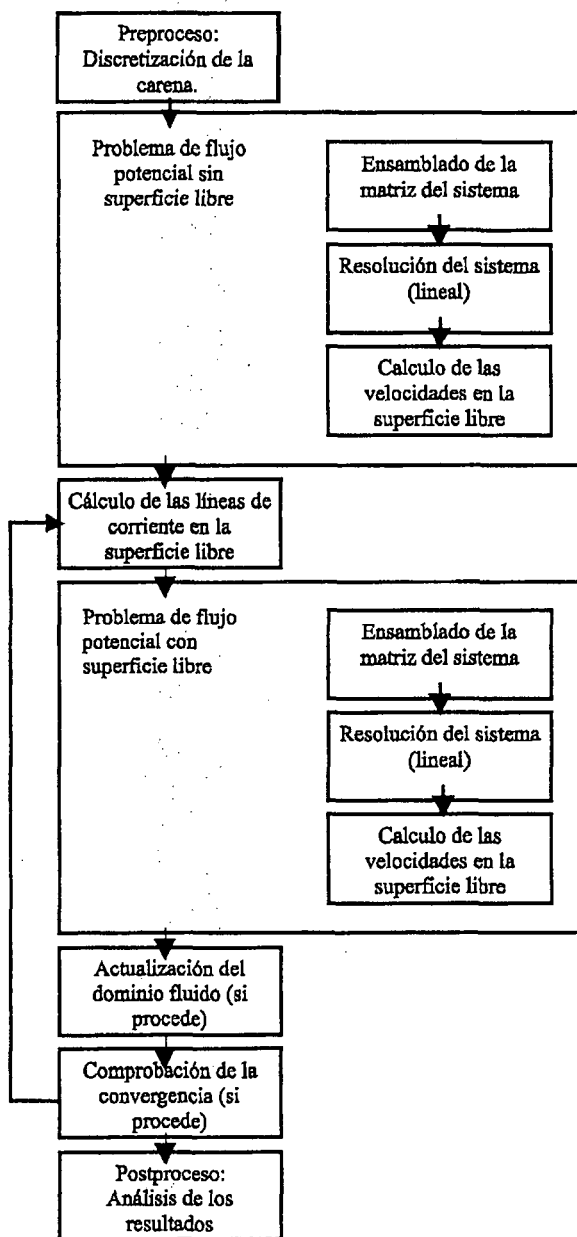


Figura A.1: Esquema general de funcionamiento de un código de elementos de contorno con superficie libre.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{A.2})$$

En general, los métodos de singularidades describen el potencial de velocidad como suma de un potencial en el infinito más una perturbación.

$$\phi = \phi_\infty + \phi_p \quad (\text{A.3})$$

evidentemente se puede escribir que:

$$\phi_\infty = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_\infty \quad (\text{A.4})$$

El término de perturbación tiene forma de expansión de singularidades (fuentes de potencial). Estas singularidades se distribuyen de manera conveniente sobre el dominio, como se verá en la resolución por el método de Hess y Smith.

Sobre esta forma del potencial se imponen las condiciones de contorno en velocidad. Estas condiciones se resumen en obligar a que las superficies discretas del casco y la mar sean superficies de corriente o lo que es lo mismo, impenetrables (velocidad normal a la superficie nula). Estas condiciones desde el punto de vista numérico obligan a calcular la derivada normal a las superficies y se pueden escribir como:

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_s = 0 \quad (\text{A.5})$$

Siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie en cuestión. Esta condición se impone en puntos concretos de las superficies. Es decir, el problema discreto considera el buque definido por una serie de puntos en los que se imponen las condiciones de contorno.

La ecuación (A.5) es función de las intensidades de las singularidades distribuidas en el dominio, lo cual plantea un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son las intensidades de las fuentes (por necesidades obvias de resolubilidad iguales en número a las condiciones de contorno).

Como primer paso para la resolución de problema, se parte de una superficie libre plana (ver figura A.1) y se resuelve el problema, permitiendo así calcular las líneas de corriente sobre esta primera aproximación de la superficie libre. Estas líneas de corriente son necesarias en general para la adición sobre las condiciones de contorno de la superficie libre de una difusión que

permita la eliminación de las ondas propagadas aguas arriba por el fluido (fenómeno no físico que aparece en el proceso de discretización).

Adicionalmente en la figura (A.1) se incluye la posibilidad de actualizar de nuevo las discretizaciones de los contornos móviles del problema (superficie del mar y casco) permitiendo una aproximación más real del problema.

### A.0.8 MÉTODO DE HESS Y SMITH

Como ya se ha comentado, la base de todo el algoritmo es el planteamiento discreto del problema. Aunque existen diferentes alternativas para esta discretización (ver por ejemplo [LM] [GSP98]) en este apartado nos centraremos en el sin duda más conocido de ellos: el método de Hess y Smith [HS64b] [HS64a].

Consideremos la carena del buque definida por una serie de escamas planas (cuadriláteros en este caso) con una distribución homogénea de fuentes de potencial, de intensidad unidad. Estas fuentes generan una velocidad  $(u^1, v^1, w^1)$  en un punto genérico del espacio  $(x, y, z)$  dada por:

$$\begin{aligned} u^1(x, y, z) &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \iint_S \frac{(x - \xi) d\xi \cdot d\eta}{r^3} \\ v^1(x, y, z) &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \iint_S \frac{(y - \eta) d\xi \cdot d\eta}{r^3} \\ w^1(x, y, z) &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \iint_S \frac{z \cdot d\xi \cdot d\eta}{r^3} \end{aligned} \quad (A.6)$$

Las anteriores expresiones están dadas tomando un sistema de ejes locales  $(\xi, \eta)$  en el cuadrilátero. El origen de este sistema de coordenadas locales es el punto nulo de la fuente. El eje  $z$  es el que define la normal pasando por ese origen, con el sentido positivo hacia fuera del cuerpo. Los ejes  $x$  e  $y$  se sitúan sobre el plano del cuadrilátero, ortogonales entre sí, y se colocan de tal modo que el eje  $x$  está en la dirección del vector que une los vértices 1 y 3, y el eje  $y$  se coloca perpendicularmente a éste (ver figura A.2). Se ha llamado  $r[(x, y, z), (\xi, \eta, 0)] = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$  y  $S$  a la superficie de la carena.

Las integrales tienen expresiones analíticas que aparecen descritas de modo detallado en las referencias [HS64b] [HS64a], pero aún así, su cálculo es complejo. De todos modos, las expresiones completas de la velocidad resultado de resolver estas integrales sólo se usan cuando el punto donde calculamos la velocidad está cerca del panel, dado que su complejidad motiva un coste en tiempo de procesamiento muy alto. La magnitud que define la cercanía o no

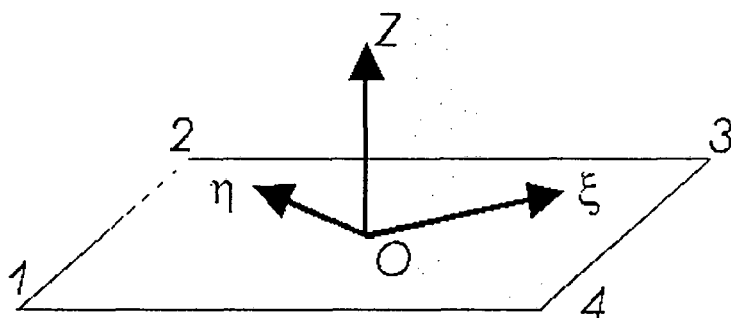


Figura A.2: Sistema de ejes locales en cada cuadrilátero.

es una de las dimensiones del panel. Se elige como dimensión característica del panel su diagonal mayor ( $D$ ). Se utilizan tres expresiones diferentes para el cálculo de la velocidad: la exacta (A.6), una simplificación sustituyendo la densidad uniforme por un cuadrípulo, y una simplificación aún mayor sustituyendo la densidad uniforme por una sola fuente. El criterio para elegir una u otra expresión es el siguiente:

$r < 2.45 \cdot D$	formulaciones exactas
$2.45 \cdot D < r < 4.0 \cdot D$	expansión por un cuadrípulo
$r > 4.0 \cdot D$	expansión con un sólo polo

Si imponemos la condición (A.5) en  $m$  puntos concretos del casco, y en particular sobre los  $m$  puntos nulos de los cuadriláteros (es decir, consideramos al buque definido por una serie de puntos en los que se imponen las condiciones de contorno), la ecuación (A.5) plantea un sistema lineal dado por las  $m$  ecuaciones siguientes, cuyas  $m$  incógnitas son las densidades de las distribuciones en los cuadriláteros.

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_s = 0 \Rightarrow \left[ \mathbf{v}_\infty + \sum_i^m \mathbf{v}_i(x_j, y_j, z_j) \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 1 \leq j \leq m \quad (\text{A.7})$$

donde  $(x_j, y_j, z_j)$  son los  $m$  puntos nulos de las  $m$  escamas planas definidas,  $\mathbf{v}_i$  las velocidades inducidas por estas escamas (definidas a partir de la ecuación (A.6)) y  $\mathbf{n}$  la normal a la escama en su punto nulo.

Dado que la formulación de las  $\mathbf{v}_i$ , de esta manera definidas es lineal en las incógnitas,  $s_i$  (intensidades de fuente en los paneles), estas ecuaciones

representan un sistema lineal de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas. Este sistema se puede escribir a partir de (A.6) y (A.7) como:

$$\left[ \mathbf{v}_\infty + \sum_i^m s_i \begin{Bmatrix} u^1(x, y, z) \\ v^1(x, y, z) \\ w^1(x, y, z) \end{Bmatrix} \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 1 \leq j \leq m \quad (\text{A.8})$$

Una vez resuelto este las velocidades en cualquier punto pueden ser calculadas de la misma manera que las inducidas en los paneles (A.6).

### A.0.9 LA CONDICIÓN DE SUPERFICIE LIBRE

Aunque en el capítulo 2 se ha hecho una extensa discusión de los métodos disponibles para imponer la condición de superficie, con el objeto de completar este apéndice, se incluyen aquí unas líneas básicas sobre este aspecto.

La condición cinemática de superficie libre en función del potencial de velocidades, puede escribirse como [PM77]:

$$\phi_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \beta}{\partial y} - \phi_z = 0 \quad (\text{A.9})$$

Es posible derivar una condición de superficie libre dinámica a partir de la continuidad de las tensiones sobre la interfaz. Pero, en el flujo potencial, esta condición degenera a la simple imposición de que la presión debe ser la atmosférica en la superficie, y sin pérdida de generalidad esta presión puede ser tomada como nula. Si despreciamos la tensión superficial y aplicamos la ecuación de Bernuilli, podemos escribir,

$$g\beta + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 - v_\infty^2) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

A las anteriores, en el caso del flujo potencial, hay que añadir la llamada condición de radiación, que elimina la simetría del problema, imponiendo la evidencia física de que las olas generadas por el buque no se transmiten aguas arriba. Esta condición puede expresarse matemáticamente como [D'E97],

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \nabla \phi = \mathbf{v}_\infty \quad (\text{A.11})$$



Esta condición es forzada numéricamente en la mayoría de los códigos, existiendo muchas variantes para ello.

Como puede apreciarse, las condiciones de superficie libre son no lineales y deben imponerse sobre una superficie inicialmente desconocida. Esto se ha llevado a cabo tradicionalmente usando esquemas basados en la suposición de que la perturbación producida en la superficie libre es pequeña. A partir de esta suposición es sencillo linealizar las ecuaciones anteriores o desarrollar esquemas iterativos de resolución, tal y como se ha expuesto en el capítulo 2 de este trabajo. Se puede encontrar amplia información sobre este particular en [LRB<sup>+</sup>98] [Rav96] [Rav92] [Daw77].



## Apéndice B

# El Método de Galerkin Aplicado a la Ecuación de Convección Difusión

A continuación, trataremos de resolver la siguiente ecuación unidimensional, utilizando el método de los elementos finitos mediante la formulación clásica de Galerkin,

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

La forma débil de la ecuación (B.1) puede obtenerse multiplicando por una función de test  $\psi(x)$  (con  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ) e integrando,

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^l \frac{h}{2} \psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = 0 \quad (\text{B.2})$$

Integrando por partes el segundo término de (B.2), se obtiene la forma débil clásica de la ecuación (B.1),

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = 0 \quad (\text{B.3})$$

Considerando funciones de forma  $\psi_i(x)$  lineales y aproximando la función  $\varphi(x)$ , en la forma clásica  $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^2 \psi_i \varphi(x_i)$ , podemos construir

de manera sencilla las matrices elementales. Llamando  $K_{ij} = \int_0^l \gamma \psi_i \frac{d\psi_j}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx$ , se tiene que, para el elemento  $I$  de nodos  $i, j$

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \\ K_{12} &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \\ K_{21} &= -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \\ K_{22} &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \left[ \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

Ensamblando las matrices elementales el sistema queda de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, las ecuación centrales quedan como sigue:

$$\left[ \gamma \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

De donde, operando,

$$(1 - \gamma)\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + (1 + \gamma)\varphi_{i-1} = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (\text{B.4})$$

Como puede comprobarse, el mismo resultado habríamos obtenido si en vez del método de los elementos finitos hubiéramos usado diferencias finitas con un esquema centrado, donde,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \\ \left[ \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo lo anterior (B.5) en (B.1) se tiene,

$$\gamma \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2} \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Que, como queríamos demostrar, coincide con (B.4).

Esta ecuación puede resolverse como sigue. Su ecuación característica es  $(1 - \gamma)\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \gamma) = 0$  cuyas raíces son,  $\lambda = 1$  y  $\lambda = \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)}$  (para  $\gamma \neq 1$ ), por lo que la solución genérica de (B.4) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 + C_2 \left[ \frac{(1 + \gamma)}{(1 - \gamma)} \right]^i \quad (\text{B.7})$$

Los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , deben determinarse a partir de las condiciones de contorno, pero por la forma de la solución (B.7) ya puede advertirse que habrá oscilaciones debidas al cambio de signo del segundo término para valores de  $|\gamma| > 1$ .

Si imponemos como condiciones de contorno  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = 1$  la forma de la solución será,

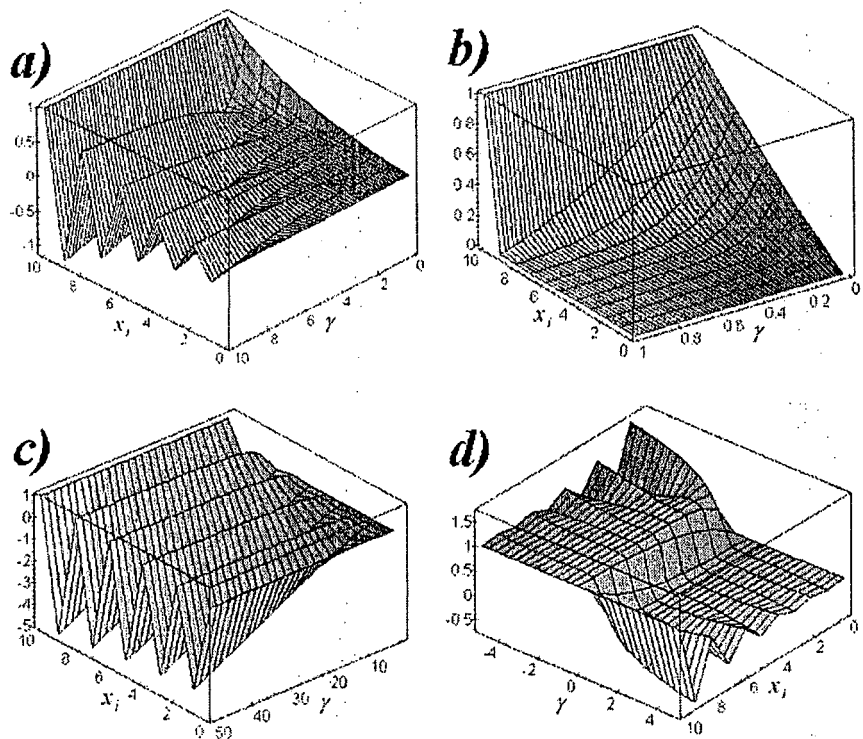
$$\varphi_i = \frac{1}{1 - \left[ \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^N} \left[ 1 - \left[ \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^i \right] \quad (\text{B.8})$$

Señalar que para  $\gamma = 1$ , la ecuación  $(1 - \gamma)\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \gamma) = 0$  queda como  $-2\lambda + 2 = 0$  cuya raíz es  $\lambda = 1$ , con lo que la solución es ahora,

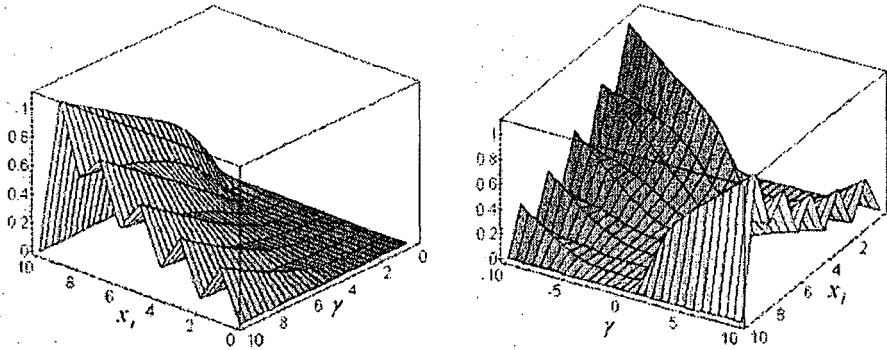
$$\varphi_i = C_1$$

que, evidentemente, no es compatible con las condiciones de contorno  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = 1$ .

En las gráficas a) y d) de la figura B.1 se ha representado la solución de (B.8) en función del parámetro  $\gamma$ . En ella se puede apreciar claramente la



**Figura B.1:** Solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin. En las gráficas a) y d) se ha representado  $\varphi_i$  en función del parámetro  $\gamma$ . En las gráficas b) y c) se presentan las zonas estables e inestables, respectivamente, de la solución.



**Figura B.2:** Error cometido en la solución de la ecuación unidimensional de convección difusión mediante el método de Galerkin.

aparición de oscilaciones en la solución para valores de  $|\gamma| > 1$ . (ver gráficas b), c) y d) de la figura B.1).

Dado que, en este caso, existe solución analítica de la ecuación (B.1), dada por,

$$\varphi(x) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi_l) \left( \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) \quad (\text{B.9})$$

podemos comparar las soluciones analítica y numérica (con el método clásico de Galerkin) para  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = 1$ .

A continuación se presentan curvas del error de la solución numérica,

$$E(x_i, \gamma) = \left| \left( \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x_i}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) - \frac{1}{1 - \left[ \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^N} \left[ 1 - \left[ \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \right]^i \right] \right| \quad (\text{B.10})$$

para unos valores de los parámetros geométricos de  $l = 10$  y  $h = 1$  ( $N = 0, 10$ ). En ellas se puede apreciar como crecen las oscilaciones asociadas a la inestabilidad de las soluciones numéricas de la ecuación de convección-difusión, al aumentar el valor de  $|\gamma|$ . El error de la solución numérica, dado por (B.10) se ha representado en la figura B.2.





## Apéndice C

# Ecuación de Convección Difusión que Resuelve el Método de Galerkin

Como se ha visto en el apéndice B, la formulación clásica de Galerkin (y como puede comprobarse fácilmente, otros métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo el método de las diferencias finitas centradas) aplicada a la ecuación de convección difusión siguiente,

$$\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{en } 0 < x < l \quad (\text{C.1})$$

da como resultado la siguiente ecuación en diferencias (ver Apéndice B),

$$(1 - \gamma)\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + (\gamma + 1)\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (\text{C.2})$$

Cuando el intervalo  $[0, l]$  es dividido en  $N$  elementos iguales, siendo  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$  donde, evidentemente,  $x_{m+1} - x_m = h$  ( $m = 0, N - 1$ ).

Si desarrollamos en serie de Taylor la función incógnita  $\varphi(x)$  en torno al punto  $x_i$ , tendremos,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{(x_i - x)^n}{n!} \quad (\text{C.3})$$

Donde  $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ . Si además, el radio de convergencia de la serie es mayor que  $h$ , podemos escribir,

$$\varphi(x_{i+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} \quad (\text{C.4})$$

$$\varphi(x_{i-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!}$$

Sustituyendo los desarrollos (C.4) en (C.2) se tiene,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} + \\ & + \gamma \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} \right] = 0 \\ & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} - 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n-1)}(x_i) \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Dado que la ecuación original (C.1), cumple,

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{2\gamma}{h} \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \frac{d^n \varphi}{dx^n} = \left[ \frac{2\gamma}{h} \right]^{n-2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (\text{C.6})$$

Sustituiremos la anterior relación en (C.5) con el fin de calcular el error cometido en el cumplimiento de (C.1). Esto resulta en,

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-2} \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-3} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \left[ \frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] + \quad (C.7) \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \left[ \frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\gamma]^{2n-1}}{(2n-1)!} - 1 \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0
\end{aligned}$$

Si consideramos los siguientes desarrollos en serie de Taylor,

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (C.8)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \quad (C.9)$$

la relación (E.8), puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \quad (C.10) \\
& \gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \left[ \frac{h}{2} + \frac{h}{4\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1] \right] \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0
\end{aligned}$$

Es decir la discretización (C.2) resuelve de forma exacta<sup>1</sup> la ecuación,

<sup>1</sup>Exacta en los nodos  $x_i$  de la partición.

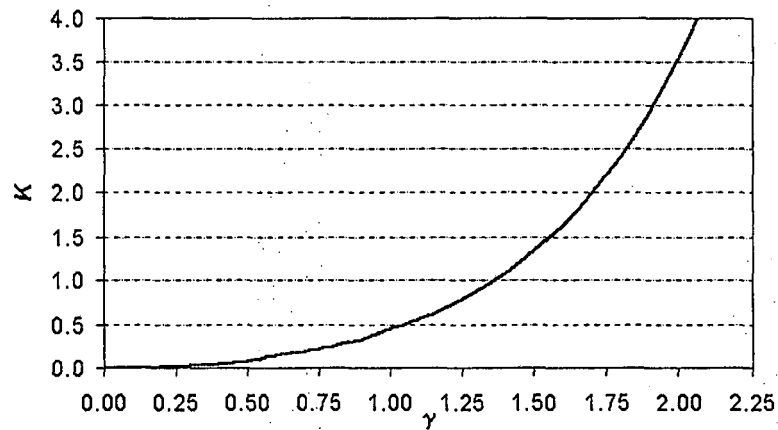


Figura C.1: Gráfica de la variación de la función  $K$  con  $\gamma$ .

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \frac{h}{2}(1 - K) \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0 \quad (\text{C.11})$$

Con  $K = -\frac{1}{2\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1]$ , cuya variación puede apreciarse en la figura (C.1),

Como puede apreciarse, para valores de  $\gamma > 1.3657$  el valor obtenido de  $K$  es mayor que 1, con lo que, en esa situación la ecuación que se está resolviendo tiene una difusión total negativa.

Estas consideraciones ayudan a entender el carácter inestable de la solución mediante el método de Galerkin de la ecuación de convección difusión.

## Apéndice D

# Estudio de la Ecuación Unidimensional Modificada de Convección Difusión

En este caso repetiremos la demostración hecha en el apéndice D, pero en este caso aplicada a la resolución de la ecuación unidimensional modificada de convección difusión siguiente,

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0 \quad \text{en } 0 < x < l & (D.1) \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi(l) = \varphi_l \end{aligned}$$

La forma débil de la ecuación (D.1) puede obtenerse multiplicando por una función de test  $\psi(x)$  (con  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ) e integrando,

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^l \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = 0 \quad (D.2)$$

Integrando por partes el segundo término de (D.2), se obtiene la forma débil clásica de la ecuación (D.1),

$$\int_0^l \gamma \psi \frac{d\varphi}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = 0 \quad (D.3)$$

Considerando funciones de forma  $\psi_i(x)$  lineales y aproximando la función  $\varphi(x)$ , en la forma clásica  $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^2 \psi_i \varphi(x_i)$ , podemos construir

de manera sencilla las matrices elementales. Llamando  $K_{ij} = \int_0^l \gamma \psi_i \frac{d\psi_j}{dx} dx + \int_0^l \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx$ , se tiene que, para el elemento  $I$  de nodos  $i, j$

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \\ K_{12} &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \\ K_{21} &= -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \\ K_{22} &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \alpha\gamma) & -(1 + \alpha\gamma) \\ -(1 + \alpha\gamma) & (1 + \alpha\gamma) \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

Ensamblando las matrices elementales el sistema queda de la forma siguiente,

$$\frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma) \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

Como puede apreciarse, las ecuación centrales quedan como sigue:

$$\left[ \gamma \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 + \alpha\gamma) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

De donde, operando,

$$(1 + \gamma(\alpha - 1))\varphi(x_{i+1}) - 2(1 + \alpha\gamma)\varphi(x_i) + (1 + \gamma(1 + \alpha))\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{D.4})$$

con  $i = 1, N - 1$

Como puede comprobarse, el mismo resultado habríamos obtenido si en vez del método de los elementos finitos hubiéramos usado diferencias finitas con un esquema centrado, donde.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \\ \left[ \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]_i &\approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Sustituyendo lo anterior (D.5) en (D.1) se tiene,

$$\gamma \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2}(1 + \alpha) \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = 0 \quad (\text{D.6})$$

Que, como queríamos demostrar, coincide con (D.4).

Esta ecuación puede resolverse como sigue. Su ecuación característica es  $(1 + \gamma(\alpha - 1))\lambda^2 - 2(1 + \alpha\gamma)\lambda + (1 + \gamma(1 + \alpha)) = 0$  cuyas raíces son,  $\lambda = 1$  y  $\lambda = \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma}$  (para  $1 + \alpha\gamma - \gamma \neq 0$ ), por lo que la solución genérica de (D.4) puede escribirse como,

$$\varphi_i = C_1 + C_2 \left[ \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \quad (\text{D.7})$$

Comparando con la solución obtenida en el Apéndice B para la ecuación convección difusión típica, en este caso tanto el numerador como el denominador del segundo término de (D.7) se hayan corregidos por un valor  $\alpha\gamma$ . Esto nos permite, por ejemplo, imponer como condición para la determinación de  $\alpha$ , que el cociente del segundo término de (D.7) no cambie de signo ( $sg(1 + \alpha\gamma + \gamma) = sg(1 + \alpha\gamma - \gamma)$ ). De esta forma,

	<i>Denominador</i>	<i>Numerador</i>	<i>Condición</i>
+	$\alpha > 1 - \frac{1}{\gamma}$	$\alpha > -1 - \frac{1}{\gamma}$	$\Rightarrow \alpha > 1 - \frac{1}{\gamma}$
-	$\alpha < 1 - \frac{1}{\gamma}$	$\alpha < -1 - \frac{1}{\gamma}$	$\Rightarrow \alpha < -1 - \frac{1}{\gamma}$

Pues los valores críticos (valores máximo y mínimo del intervalo para el que aparecen oscilaciones) son  $\alpha = 1 - \frac{1}{\gamma}$ ,  $\alpha = -1 - \frac{1}{\gamma}$ . Una gráfica comparativa de las curvas  $\alpha = 1 - \frac{1}{\gamma}$  y  $\alpha = -1 - \frac{1}{\gamma}$  se presenta en la figura D.4. Cabe señalar que estos valores han sido obtenidos imponiendo sólo la condición de que el segundo término de (D.7) no cambie de signo, ninguna otra condición ha sido impuesta sobre la solución, por lo que su forma no tiene, en principio, que parecerse a la solución analítica de la ecuación de convección difusión original dada por (ver apéndice B):

$$\varphi(x) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi l) \left( \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) \quad (\text{D.8})$$

Si imponemos como condiciones de contorno  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = 1$  la forma de la solución será,

$$\varphi(x) = \left( \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) \quad (\text{D.9})$$

Del mismo modo los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en (D.7), deben determinarse a partir de las condiciones de contorno. Si imponemos como condiciones de contorno, al igual que en el caso anterior,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = 1$ , la forma de la solución será,

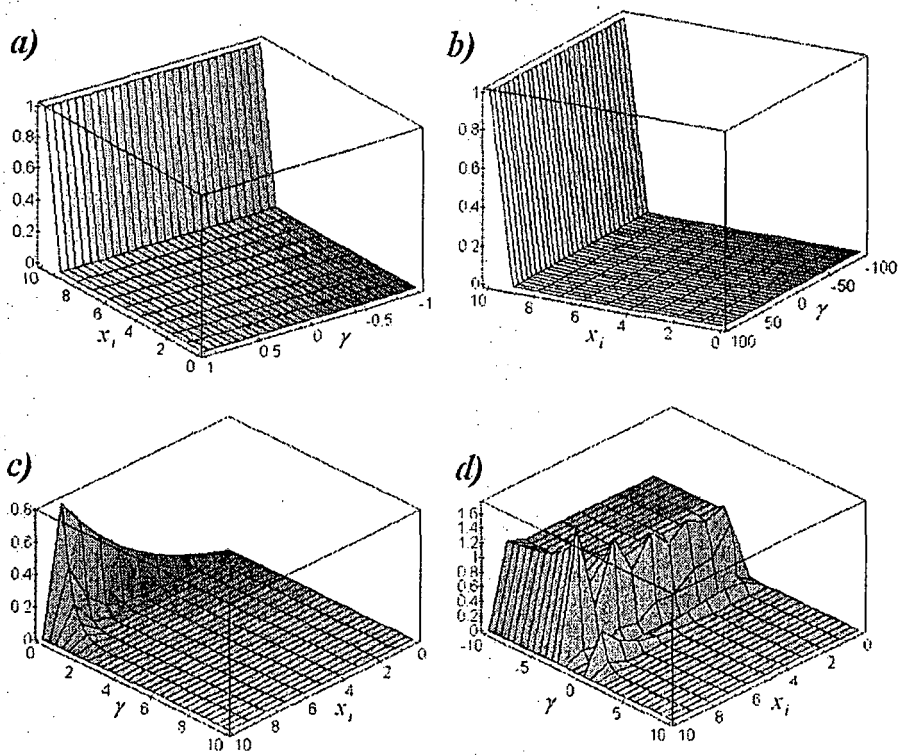
$$\varphi_i = \frac{1}{1 - \left[ \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^N} \left[ 1 - \left[ \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \right] \quad (\text{D.10})$$

En los gráficos a) y b) de la figura D.1 se ha representado la solución de la función (D.10) para  $\alpha = 1.01 - \frac{1}{\gamma}$  (se hace notar que la solución (D.7)-(D.10) es singular para el valor crítico  $\alpha_c = 1 - \frac{1}{\gamma}$ ). Como puede apreciarse en la figura D.1, la solución para  $\gamma < 0$  no se parece nada a la esperable. Se han incluido también (gráficos c) y d) de la figura D.1) representaciones del error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original (D.9). Este error está dado por,

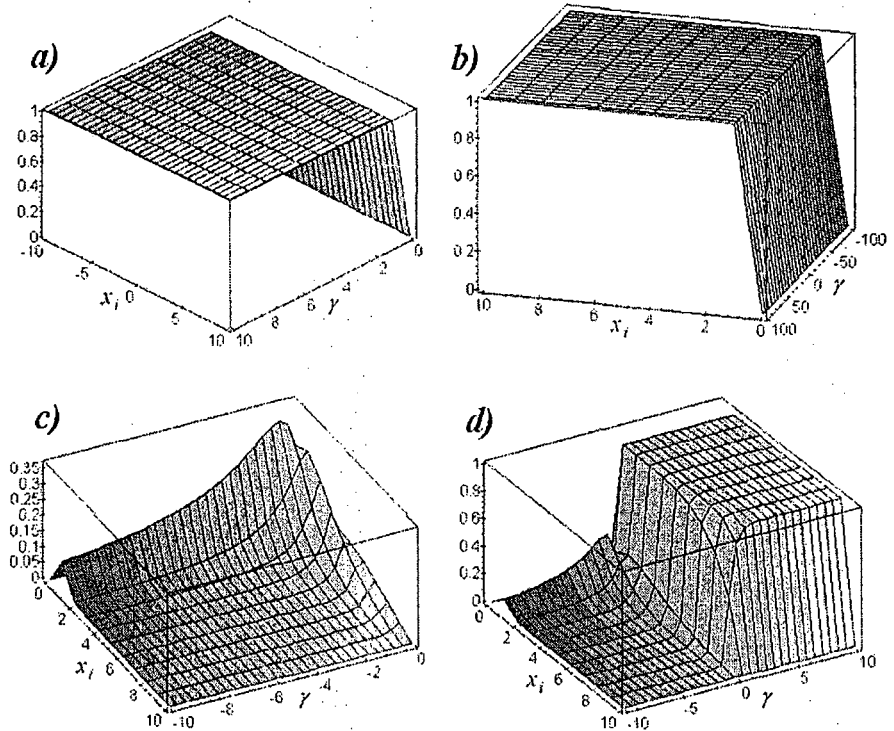
$$E(x_i, \gamma) = \left| \left( \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x_i}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma l}{h}}} \right) - \frac{1}{1 - \left[ \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^N} \left[ 1 - \left[ \frac{1 + \alpha\gamma + \gamma}{1 + \alpha\gamma - \gamma} \right]^i \right] \right| \quad (\text{D.11})$$

En los gráficos a) y b) de la figura D.2 se ha representado la solución de la función (D.10) para  $\alpha = -1.01 - \frac{1}{\gamma}$  (se hace notar que la solución (D.7)-(D.8) esta indefinida en  $x_0 = 0$  para el valor crítico  $\alpha_c = -1 - \frac{1}{\gamma}$ ). Como puede apreciarse, en este caso a la inversa del anterior) la solución para  $\gamma > 0$  no se parece nada a la esperable. Se han incluido también (gráficos c) y d) de la figura D.1) representaciones del error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original (D.9).

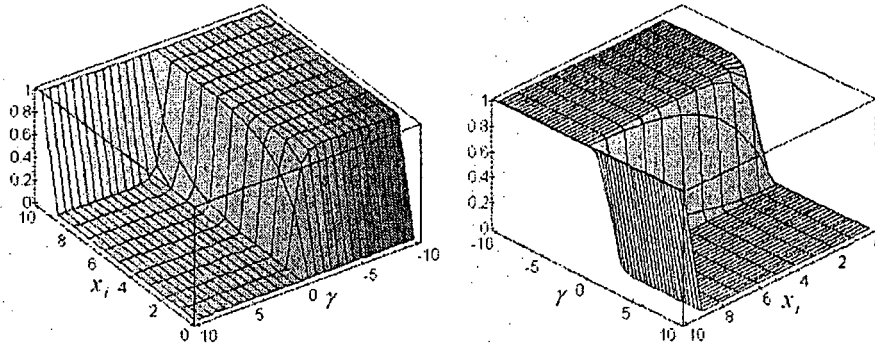




**Figura D.1:** Solución de la ecuación de convección difusión modificada con  $\alpha = 1.01 - \frac{1}{\gamma}$ . (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.

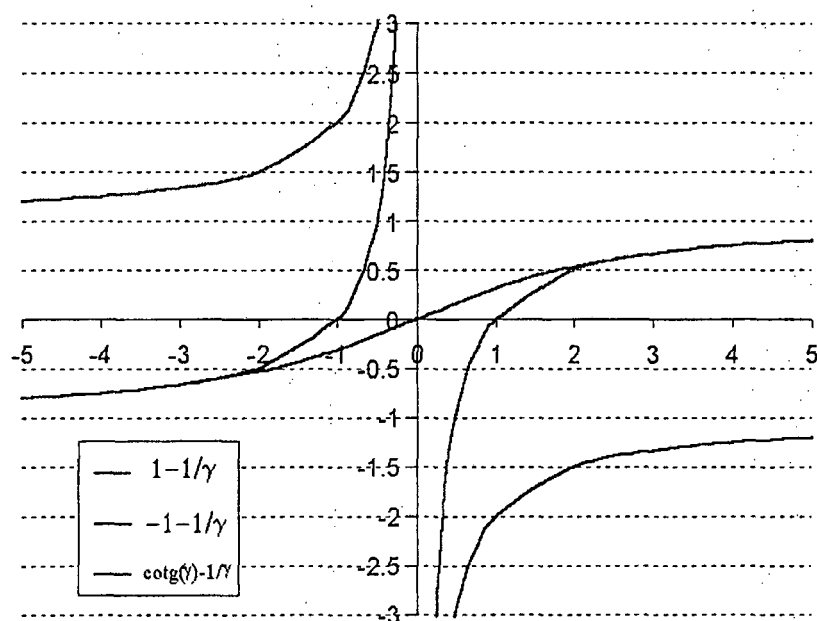


**Figura D.2:** Solución de la ecuación de convección difusión modificada con  $\alpha = -1.01 - \frac{1}{\gamma}$  (gráficos a) y b)). En los gráficos c) y d) se representa el error cometido en la aproximación utilizando la solución analítica de la ecuación original.



**Figura D.3:** Solución de la ecuación de convección difusión modificada con  $\alpha = \cotgh(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$ .

Por último se incluyen en la figura D.3 gráficos de la solución de la función (D.10) para el valor óptimo  $\alpha = \cotgh(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$ , obtenido en el apéndice E. En estas gráficas se puede comprobar que, como era esperable, la solución numérica es nodalmente exacta (en las evaluaciones numéricas el error máximo que se apreció era del orden de  $10^{-15}$ ). Por otra parte, en la figura D.4 se han representado las curvas de los valores críticos y óptimo de  $\alpha$ .

Figura D.4: Comparación de las curvas de  $\alpha$  críticos y óptimo.

## Apéndice E

# Ecuación de Convección Difusión Modificada Óptima

El objetivo del presente apéndice es calcular el valor de  $\alpha$  óptimo para obtener un error de truncamiento nulo en la ecuación de convección difusión modificada siguiente:

$$\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} (1 + \alpha\gamma) \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{en } 0 < x < l \quad (\text{E.1})$$

La solución por el método de Galerkin, de la ecuación (E.1) anterior, da como resultado la siguiente ecuación en diferencias (ver apéndice D),

$$(1 + \gamma(\alpha - 1))\varphi(x_{i+1}) - 2(1 + \alpha\gamma)\varphi(x_i) + (1 + \gamma(1 + \alpha))\varphi(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{E.2})$$

*con*  $i = 1, N - 1$

Cuando el intervalo  $[0, l]$  es dividido en  $N$  elementos iguales, siendo  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$  donde, evidentemente,  $x_{m+1} - x_m = h$  ( $m = 0, N - 1$ ).

Para poder seguir en paralelo el desarrollo hecho en el apéndice C, vamos a escribir el esquema (E.2) en la siguiente forma,

$$(1 - \gamma)\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + (1 + \gamma)\varphi(x_{i-1}) + \alpha\gamma[\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] = 0 \quad \text{con } i = 1, N - 1 \quad (\text{E.3})$$

Si desarrollamos en serie de Taylor la función incógnita  $\varphi(x)$  en torno al punto  $x_i$ , tendremos,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{(x_i - x)^n}{n!} \quad (\text{E.4})$$

Donde  $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ . Si además, el radio de convergencia de la serie es mayor que  $h$ , podemos escribir,

$$\varphi(x_{i+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!} \quad (\text{E.5})$$

$$\varphi(x_{i-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(n)}(x_i) \frac{h^n}{n!}$$

Sustituyendo los desarrollos (E.4) y (E.5) en (E.3) se tiene,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n-1)}(x_i) \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ & + \alpha \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} = 0 \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \varphi^{(2n-1)}(x_i) \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ & + \alpha \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(2n)}(x_i) \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 \varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Dado que  $\varphi(x)$  se pretende cumpla la ecuación original de convección difusión  $\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$  (ver apéndice B), puede obtenerse, de manera sencilla, la relación,

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{2\gamma}{h} \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \frac{d^n \varphi}{dx^n} = \left[ \frac{2\gamma}{h} \right]^{n-2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (\text{E.7})$$

Que sustituida en (E.6), resulta,

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[ (1 + \alpha\gamma) \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-2} \frac{h^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{2\gamma}{h} \right]^{2n-3} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0 \\
& \left[ \frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} \left[ (1 + \alpha\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2n-1}}{(2n-1)!} - (1 + \alpha\gamma) \right] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Considerando los siguientes desarrollos en serie de Taylor,

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{E.9}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \tag{E.10}$$

la relación (E.8), puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{h}{2\gamma} \right]^2 \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)] + \\
& \quad + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} - \gamma h \frac{d\varphi(x_i)}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{E.11}$$

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \left[ \frac{h}{2} + \frac{h}{4\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)] \right] \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0$$

Es decir la discretización (E.2) resuelve de forma exacta (nodalmente exacta) la ecuación,

$$\gamma \frac{d\varphi(x_i)}{dx} - \frac{h}{2} (1 - K) \frac{d^2\varphi(x_i)}{dx^2} = 0 \tag{E.12}$$

con  $K = -\frac{1}{2\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) \cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - (1 + \alpha\gamma)]$ . Por lo tanto el error de truncamiento del método es:

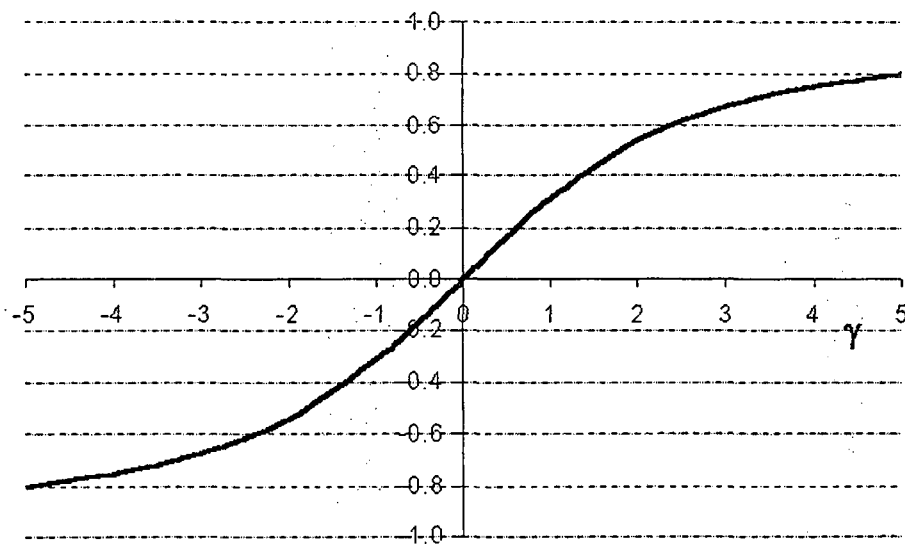


Figura E.1: Gráfica de  $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$ .

$$E_T = \frac{h}{4\gamma^2} [(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] - \gamma \sinh(2\gamma)]$$

Como hemos mencionado, la condición para la determinación del parámetro  $\alpha$ , es que el error de truncamiento sea nulo, esto es, que la solución sea nodalmente exacta para la ecuación original  $\gamma \frac{d\varphi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$ . Por lo tanto queremos que se cumpla la siguiente relación,

$$(1 + \alpha\gamma) [\cosh(2\gamma) - 1] = \gamma \sinh(2\gamma) \Rightarrow \alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$$

Esta curva ( $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$ ) se ha representado en la figura E.1.



## Apéndice F

# La Condición de Superficie Libre de Dawson

Dawson [Daw77] presentó en 1977 el, probablemente, más conocido de los algoritmos numéricos basado en el método de elementos de contorno para resolver el problema de flujo potencial con superficie libre. Su propuesta de resolución del problema de flujo tridimensional de superficie libre se basaba en el acoplamiento de un algoritmo de resolución para el problema del modelo doble sumergido basado en el algoritmo de Hess y Smith [HS64b] [HS64a] [GSP98] con un método de resolución del problema con superficie libre basado en la denominada teoría de los buques lentos.

Esta teoría está basada en la suposición de que el flujo con superficie libre sólo supone una pequeña variación del flujo sin ella (el conocido tradicionalmente como flujo de modelo doble sumergido). Esta suposición se cumple para pequeños números de Froude, y esta es la razón por la que esta forma de abordar el problema es conocida como teoría de los buques lentos. En este sentido, el potencial de velocidades y por lo tanto el campo de velocidad ( $\mathbf{v} = (u, v, w)$ ) se descompone en dos partes aditivas. La componente debida al doble modelo sumergido y la componente de perturbación debida a las olas generadas.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}^x(x, y, z) + \mathbf{v}'(x, y, z) \quad (\text{F.1})$$

Donde  $\mathbf{v}^x$  es la velocidad correspondiente al doble modelo sumergido y  $\mathbf{v}'$  es la velocidad de perturbación, por lo cual podemos escribir que  $|\mathbf{v}^x| \ll |\mathbf{v}'|$ . Si aplicamos la descomposición de la velocidad hecha en la teoría de los buques lentos (F.1) a la ecuación de Bernoulli, tenemos,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ C - \frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2) \right] \approx \frac{1}{g} \left[ C - \frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^x + \mathbf{v}')^2 \right] \quad (\text{F.2})$$

Donde  $C$  es una constante,  $p_o$  es la presión sobre la superficie libre,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\eta$  la elevación de la superficie libre. Si se considera que  $p_o = 0$ , podemos escribir que,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ C - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^x + \mathbf{v}')^2 \right] \quad (\text{F.3})$$

Si, en (F.3), despreciamos las componentes de la velocidad segun  $Oz$ , tenemos que,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ C - \frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2} (u^{x2} + v^{x2} + u'^2 + v'^2 + 2u^x u' + 2v^x v') \right] \quad (\text{F.4})$$

Si además eliminamos los términos cuadráticos de la velocidad de perturbación, nos resulta finalmente,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ C - \frac{1}{2} (u^{x2} + v^{x2} + 2u^x u' + 2v^x v') \right] \quad (\text{F.5})$$

Con el objeto de simplificar la exposición, en lo que sigue se notará  $\mathbf{v}^x = (u^x, v^x)$  y  $\mathbf{v}' = (u', v')$ , dado que se considera despreciable la componente vertical de la velocidad. De esta manera la ecuación (F.5), se puede escribir como,

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ C - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{x2} + 2\mathbf{v}^x \cdot \mathbf{v}') \right] \quad (\text{F.6})$$

La ecuación de superficie libre, en el caso estacionario, y suponiendo que se cumple, aproximadamente sobre  $z = \eta_{ref}$ , puede escribirse como,

$$w = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\eta \quad \text{en} \quad z = \eta_{ref} \quad (\text{F.7})$$

Donde, en (F.7) y en lo que sigue debe entenderse que  $\mathbf{v} = (u, v)$  y  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ . Sustituyendo (F.6) en (F.7), tenemos que,

$$2gw + [(\mathbf{v}^x + \mathbf{v}') \cdot \nabla] (\mathbf{v}^x + \mathbf{v}')^2 = 0 \quad (\text{F.8})$$

Si en lo anterior sustituimos la ecuación (F.6), pero sólo en el término multiplicado por  $\mathbf{v}^x$ , resulta,

$$2gw + (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) (\mathbf{v}^{x^2} + 2\mathbf{v}^x \cdot \mathbf{v}') + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) (\mathbf{v}^x + \mathbf{v}')^2 = 0 \quad (\text{F.9})$$

En el tercer término, se desprecia el sumando  $\mathbf{v}'$ , para dar,

$$2gw + (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) (\mathbf{v}^{x^2} + 2\mathbf{v}^x \cdot \mathbf{v}') + u' \frac{\partial \mathbf{v}^{x^2}}{\partial x} + v' \frac{\partial \mathbf{v}^{x^2}}{\partial y} = 0 \quad (\text{F.10})$$

Operando los dos últimos términos, la ecuación (F.10) puede escribirse como,

$$2gw + (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) (\mathbf{v}^{x^2} + 2\mathbf{v}^x \cdot \mathbf{v}') + 2u^x \mathbf{v}' \cdot \nabla u^x + 2v^x \mathbf{v}' \cdot \nabla v^x = 0 \quad (\text{F.11})$$

Por otra parte, si suponemos que la velocidad, y sus componentes aditivas, derivan de funciones potencial, es decir,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ u' &= \frac{\partial \phi'}{\partial x}, v' = \frac{\partial \phi'}{\partial y}, w' = \frac{\partial \phi'}{\partial z} \\ u^x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v^x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, w^x = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

se cumplirán las siguientes relaciones,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x}, \frac{\partial u^x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v^x}{\partial x} \quad (\text{F.13})$$

Que aplicadas sobre (F.11), permiten escribir que,

$$\begin{aligned} gw + (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \left( \frac{\mathbf{v}^{x^2}}{2} + \mathbf{v}^x \cdot \mathbf{v}' \right) + \mathbf{v}^x \cdot \nabla (u' u^x + v' v^x) = \\ = u^x \mathbf{v}^x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + v^x \mathbf{v}^x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Lo anterior se puede poner en forma más compacta como,

$$gw + (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^{x^2} + \mathbf{v}^x \cdot \mathbf{v}' \right) + (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}^x) - \mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}' = 0 \quad (\text{F.15})$$

Simplificando en la ecuación anterior, se tiene que,

$$gw + \mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}^x + \mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}' + 2\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}^x = 0 \quad (\text{F.16})$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}^x$ , podemos escribir que,

$$gw + \mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}^x + \mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^x) = 2(\mathbf{v}^x - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}^x \quad (\text{F.17})$$

y operando,

$$gw + \mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}^x = 2\mathbf{v}^x \cdot (\mathbf{v}^x \cdot \nabla) \mathbf{v}^x \quad (\text{F.18})$$

Si denominamos  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^x}{|\mathbf{v}^x|}$  (vector unitario en la dirección de la velocidad de doble modelo sumergido), el operador  $(\mathbf{v}^x \cdot \nabla)$  puede escribirse como  $|\mathbf{v}^x| \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}}$ . Así podemos reescribir la ecuación (F.18) como,

$$gw + \mathbf{v}^x \cdot \left( |\mathbf{v}^x| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{l}} \right) + 2\mathbf{v} \cdot \left( |\mathbf{v}^x| \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial \mathbf{l}} \right) = 2\mathbf{v}^x \cdot \left( |\mathbf{v}^x| \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial \mathbf{l}} \right) \quad (\text{F.19})$$

Finalmente, la ecuación (F.19) puede escribirse de forma aproximada como,

$$gw + \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \mathbf{v}^{x^2} |\mathbf{v}| \right) = 2\mathbf{v}^x \cdot \left( |\mathbf{v}^x| \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial \mathbf{l}} \right) \quad \text{en } z = \eta_{ref} \quad (\text{F.20})$$

que es la forma final propuesta en [Daw77].

Como puede apreciarse la forma de la (F.20) tiene grandes ventajas para su implementación, las cuales son, en gran medida, causa de su éxito. La posibilidad de cálculo de las derivadas según líneas de corriente, de la solución de doble modelo sumergido (cuya dirección está dada por  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^x}{|\mathbf{v}^x|}$ ), facilita su determinación utilizando el método de diferencias finitas. De esta manera, el algoritmo de solución se plantea de la siguiente forma:

1. Resolver el problema de doble modelo sumergido, obteniendo así el campo de velocidades  $\mathbf{v}^x = (u^x, v^x, w^x)$ .
2. A partir de la solución anterior se pueden evaluar las derivadas respecto de la dirección dada por  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}^x}{|\mathbf{v}^x|}$ . Así se puede resolver de nuevo el problema, pero imponiendo en este caso la condición (F.20), obteniendo así la solución  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ .

Para facilitar la implementación del algoritmo, en el método original los paneles de la superficie libre se disponían en *tiras* aproximadamente alineadas con el flujo del modelo doble sumergido. De esta manera las derivadas que aparecen podían ser calculadas directamente usando diferencias finitas sobre los puntos de colocación de sucesivos paneles de la misma *tira*.

Pero, probablemente, el aspecto que ha hecho más famoso al método de Dawson fue la forma de estabilización de la ecuación de convección.

Es conocido desde hace tiempo que el cálculo de las derivadas primeras descentradas y corriente arriba (*upwind*) introduce en las ecuaciones una difusión numérica que puede corregir las inestabilidades asociadas a la ecuación de convección difusión. El problema de esta metodología es que la adición de difusión no puede ser controlada fácilmente, por lo que la solución suele depender significativamente de parámetros como el tamaño de la malla.

Sin embargo, Dawson propone evaluar la derivada primera de una función  $(\frac{\partial f}{\partial l})$  mediante una fórmula de deducción casi mágica y de resultados sorprendentes. Cabe señalar, que en el artículo original, esta fórmula no tiene ninguna justificación teórica y la recomendación de Dawson proviene de una selección usando la técnica de prueba y error.

La propuesta consiste en usar un operador de cuatro puntos de *upwind* (ver figura F.1), el cual debe eliminar los errores de segundo y cuarto orden, pero no del tercero. De esta manera, la función  $f(x)$  debe cumplir las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
 f(x_j - h) &= f_{j-1} = f_j - h \frac{df}{dl} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2f}{dl^2} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4f}{dl^4} \\
 f(x_j - 2h) &= f_{j-2} = f_j - 2h \frac{df}{dl} + 2h^2 \frac{d^2f}{dl^2} + \frac{2h^4}{3} \frac{d^4f}{dl^4} \\
 f(x_j - 3h) &= f_{j-3} = f_j - 3h \frac{df}{dl} + \frac{9h^2}{2} \frac{d^2f}{dl^2} + \frac{27h^4}{8} \frac{d^4f}{dl^4}
 \end{aligned} \tag{F.21}$$

de las anteriores relaciones puede obtenerse,

$$\left( \frac{df}{dl} \right)_{Dawson} = \frac{10f_i - 15f_{i-1} + 6f_{i-2} - f_{i-3}}{6h} \tag{F.22}$$

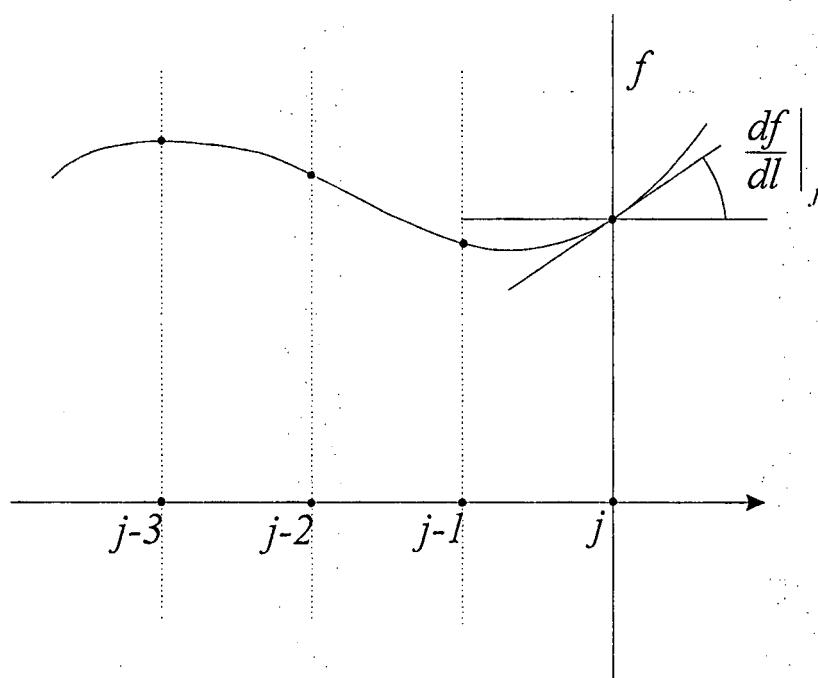


Figura F.1: Esquema de evaluación de la fórmula de *upwind* de Dawson con cuatro puntos.

Que es la mencionada fórmula de cuatro puntos, cuya evaluación, estabiliza de manera notable la ecuación (F.20). La evaluación del término  $\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \times^2 |\mathbf{v}|)$ , de la ecuación (F.20), mediante esta fórmula, permite obtener resultados muy aceptables, no añadiendo difusión en exceso de manera significativa. Sin embargo un estudio profundo del operador (F.22) muestra que su rango de funcionamiento óptimo está limitado a un rango de  $F_n$  y que su efectividad se ve afectada de manera importante por el tamaño de la malla (ver [Let93]).

En la referencia [IOS99] se analiza en profundidad la fórmula (F.22), y se presenta una forma alternativa de escribirla, basada en esquemas centrados. Por otra parte en la referencias [Rav96] [Let93] se discuten varias alternativas a la formulación de Dawson, para la resolución de la ecuación de superficie libre.





# Apéndice G

## La Ecuación de Balance de Masa Estabilizada

El objetivo del presente apéndice es presentar una forma estabilizada alternativa para la ecuación de balance de masa. Esta forma ha demostrado tener muy buenas propiedades y es especialmente indicada para problemas en los que el incremento de tiempo crítico es ínfimo, ya que corrige este valor.

Las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y balance de masa (ecuaciones de Navier-Stokes) ya fueron presentadas<sup>1</sup> en el capítulo 3 del presente trabajo y se reproducen a continuación,

*Balance de Cantidad de Movimiento*

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.1})$$

*Balance de Masa*

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.2})$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (\text{G.3})$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (\text{G.4})$$

---

<sup>1</sup>y su derivación se incluye en el apéndice J.

Al objeto de simplificar la exposición, escribamos la ecuación de balance de masa, multiplicada por la densidad  $\rho$ , en la forma siguiente,

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.5})$$

$$r_d = \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

Para obtener una forma alternativa, útil por sus propiedades especiales para los propósitos del presente trabajo, de la ecuación (G.5) expresaremos las componentes del vector de longitudes características de la ecuación de balance de masa como,

$$h_{d_j} = -2t_{d_j} v_j \quad (\text{G.6})$$

donde  $t_d$  se denomina "tiempo intrínseco". De esta forma la ecuación (G.2) queda como sigue,

$$r_d + t_{d_j} v_j \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{G.7})$$

Por otra parte, derivando la ecuación (G.1), y despreciando los términos de mayor orden de derivación, se tiene que,

$$\frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \quad (\text{G.8})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \simeq 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

De donde podemos escribir que,

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \quad (\text{G.9})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Teniendo en cuenta que se cumple la relación,

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{G.10})$$

Combinado (G.9) y (G.10), y despreciando los términos de orden superior, se puede escribir que,

$$v_i \frac{\partial r_d}{\partial x_i} = \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \quad (G.11)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Sustituyendo la relación (G.11) anterior en la ecuación (G.7), se tiene,

$$r_d - t_{d_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \right] = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (G.12)$$

Que escrito en una forma más compacta, queda como,

$$r_d - t_{d_i} \frac{\partial r'_{m_i}}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (G.13)$$

$$r'_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (G.14)$$

Ya se ha comentado, en diversos momentos, a lo largo del presente trabajo que, las ecuaciones anteriores son el punto de partida para la obtención de diversos métodos numéricos estabilizados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. La derivación de las ecuaciones estabilizadas ha sido hecha a nivel elemental, por lo que el proceso de discretización puede ser llevado a cabo con cualquiera de los métodos disponibles. En nuestro caso, las ecuaciones presentadas, serán resueltas utilizando el método de los elementos finitos. El procedimiento elegido para ello es conocido como algoritmo de pasos fraccionados, aunque puede comprobarse que diversos métodos de elementos finitos estabilizados estándar, que permiten interpolaciones de igual orden para velocidad y presión pueden derivarse a partir de la forma modificada de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa presentadas anteriormente.



## Apéndice H

# Condición de Contorno Estabilizada para la Ecuación de Convección Difusión

En este apéndice determinaremos una forma estabilizada de las condiciones de contorno tipo Neumann para el problema de convección difusión.

Estudiaremos en primer lugar el balance de flujos en un dominio triangular  $DEF$  como el representado en la figura H.1.

Este balance se puede expresar de la siguiente forma, teniendo en cuenta que  $\overline{DE} = 2h_x$  y  $\overline{FD} = 2h_y$ ,

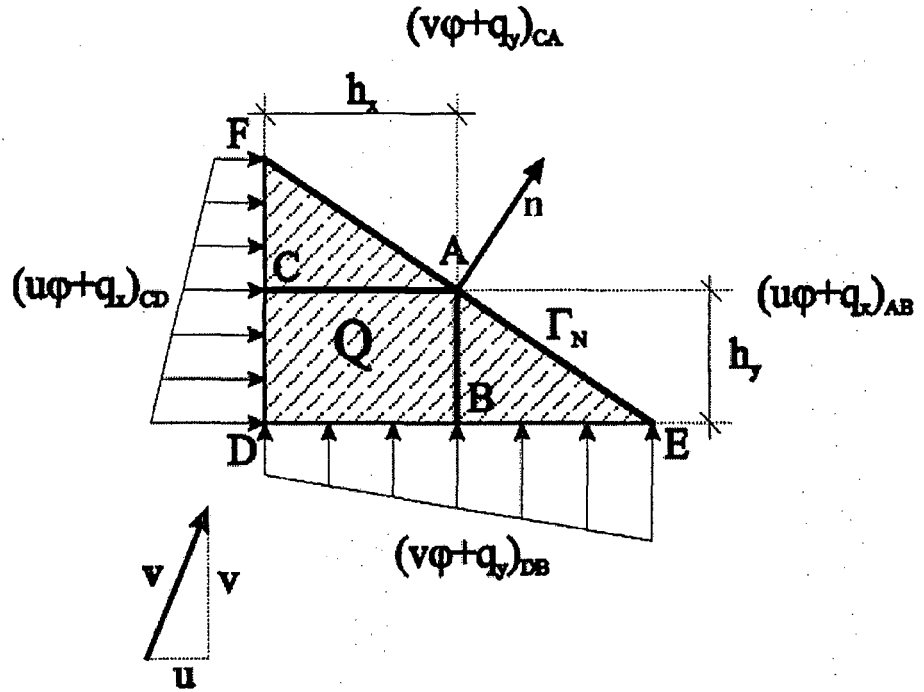
$$q_N l = 2h_y [q_x + (u\varphi)]_C + 2h_x [q_y + (v\varphi)]_B + 2h_x h_y Q \quad (\text{H.1})$$

Donde  $q_N$  es el flujo normal prescrito, a través del contorno de longitud  $l$  ( $\supset \Gamma_N$ ) y  $Q$  es el valor de la fuente distribuida, que se supone constante en el dominio  $DEF$ .

Por otra parte pueden derivarse las siguientes expansiones en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} [q_x + (u\varphi)]_C &= [q_x + (u\varphi)](x - h_x, y) = \\ &= [q_x + (u\varphi)](x, y) - h_x \frac{\partial}{\partial x} [q_x + (u\varphi)] + 0(h_x^2) \quad (\text{H.2}) \\ [q_y + (v\varphi)]_B &= [q_y + (v\varphi)](x, y - h_y) = \\ &= [q_y + (v\varphi)](x, y) - h_y \frac{\partial}{\partial y} [q_y + (v\varphi)] + 0(h_y^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo (H.2) en (H.1), y teniendo en cuenta que la normal al contorno  $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = \left(\frac{2h_y}{l}, \frac{2h_x}{l}\right)$  se tiene que,

Figura H.1: Balance de flujos en un dominio triangular  $DEF$ .

$$q_N = n_x [q_x + (u\varphi)]_A + n_y [q_y + (v\varphi)]_A - \frac{2h_x h_y}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial x} [q_x + (u\varphi)]_A + \frac{\partial}{\partial y} [q_y + (v\varphi)]_A - Q \right] \quad (\text{H.3})$$

donde, reordenando los términos, y teniendo en cuenta que  $4h_x h_y = l(h_y n_x + h_x n_y)$ , se puede escribir que,

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_A + \bar{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}\varphi)_A - q_N - \frac{1}{2} (h_y n_x + h_x n_y) \left[ \bar{\nabla} \cdot [\mathbf{q} + (v\varphi)]_A - Q \right] = 0 \quad (\text{H.4})$$

donde  $\bar{\mathbf{q}}_A = (q_x, q_y)$ ,  $\bar{\mathbf{n}} = (n_x, n_y)$ ,  $\bar{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  y  $\bar{\mathbf{v}} = (u, v)$ .

Sustituyendo la ley de Fourier [HU96],  $\bar{\mathbf{q}} = -\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\nabla}\varphi$ , donde  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  es el tensor de difusión, en la anterior ecuación (H.4), obtenemos la forma final de la ecuación de balance en el contorno, como,

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}\varphi) - \bar{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\nabla}\varphi - q_N - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) r = 0 \quad (\text{H.5})$$

donde se ha tomado  $\tilde{\mathbf{h}} = (h_x, h_y)$  y,

$$r = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\varphi) - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \tilde{\nabla}\varphi) - Q \quad (\text{H.6})$$

Si consideramos constante el valor de  $\tilde{\mathbf{v}}$  en el dominio  $DEF$ , la ecuación (H.5), se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\varphi) - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \tilde{\nabla}\varphi - q_N - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{h}}) r &= 0 \\ r &= (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \tilde{\nabla}\varphi) - Q \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Una forma alternativa de la ecuación (H.6) se puede conseguir si se tiene en cuenta que<sup>1</sup>  $h_x = h \frac{u}{|\tilde{\mathbf{v}}|}$ ,  $h_y = h \frac{v}{|\tilde{\mathbf{v}}|}$ , entonces se puede escribir,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}\varphi) - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \tilde{\nabla}\varphi - q_N - \frac{h}{2|\tilde{\mathbf{v}}|} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} r &= 0 \\ r &= (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \tilde{\nabla}\varphi) - Q \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

Se hace evidente que la extensión de las formas estabilizadas de las ecuaciones de balance en el contorno (H.5)-(H.8) a problemas tridimensionales es inmediata, se puede comprobar de manera sencilla que en este caso las ecuaciones quedan como sigue,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}\varphi) - \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla\varphi - q_N - \frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} r &= 0 \\ r &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) \varphi - \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla\varphi) - Q \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

donde se ha llamado  $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ ,  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  y  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ .

Por otra parte si en el contorno se impone sólo el flujo difusivo  $q_{ND}$ , la ecuación (H.9) anterior se simplifica, quedando en la forma,

$$-\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \nabla\varphi - q_{ND} - \frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} r = 0 \quad (\text{H.10})$$

---

<sup>1</sup>llamando  $h = |\mathbf{h}|$ .





# Apéndice I

## Balance Estabilizado de Cantidad de Movimiento en el Contorno

En este apéndice determinaremos una forma estabilizada de las condiciones de contorno tipo Neumann para la ecuación de balance de cantidad de movimiento del problema de Navier-Stokes en un dominio finito  $\Omega$ , definido por las siguientes ecuaciones diferenciales,

*Balance de Cantidad de Movimiento*

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.1})$$

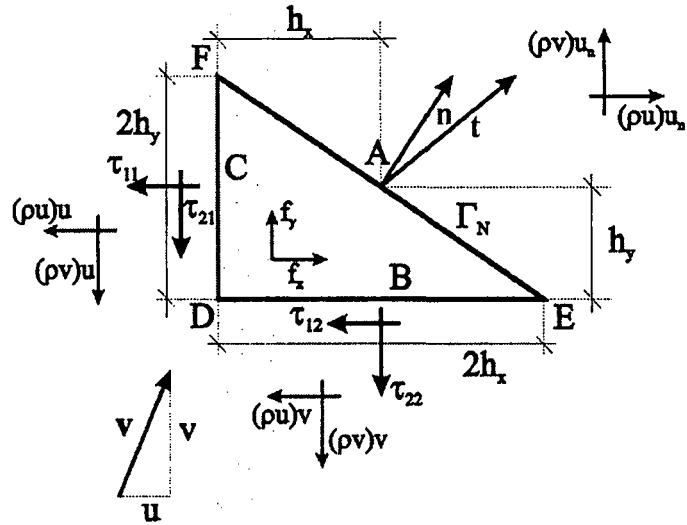
*Balance de Masa*

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.2})$$

Donde, en las ecuaciones (I.1) y (I.2) anteriores, se ha denominado  $p = p(\mathbf{x}, t)$  al campo de presiones del fluido,  $\underline{\tau}'$  a la parte desviadora (excluyendo el término isotrópico de presión) del tensor de tensiones del fluido y  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  al campo de fuerzas volumétricas.

Como se expone en el apéndice J del presente trabajo, las ecuaciones estabilizadas correspondientes a las (I.1) y (I.2) anteriores son,

*Balance de Cantidad de Movimiento*



**Figura I.1:** Balance de flujos en un dominio triangular  $DEF$ , contiguo a un contorno tipo Neumann.

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_j} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.3})$$

*Balance de Masa*

$$r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{I.4})$$

donde

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \quad (\text{I.5})$$

$$r_d = \frac{\partial n_j}{\partial x_j}$$

Para simplificar la exposición, analizaremos el caso bidimensional. Para ello estudiaremos en primer lugar el balance de flujos en un dominio triangular  $DEF$ , contiguo a un contorno tipo Neumann como el representado en la figura I.1.

Si suponemos que todas las fuerzas, tanto las debidas a la convección como las viscosas, varían linealmente a lo largo de los lados del triángulo

$EDF$  y teniendo en cuenta que  $\overline{DE} = 2h_x$ ,  $\overline{FD} = 2h_y$  y  $\overline{EF} = l$ , podemos escribir el balance de fuerzas como,

*Balance de Cantidad de Movimiento según Ox*

$$\begin{aligned} t_x l - 2h_y [\tau_{11}]_C - 2h_x [\tau_{12}]_B + 2h_x h_y f_x &= \\ = [(\rho u) u_n] l - 2h_x [(\rho u) v]_B - 2h_y [(\rho u) u]_C \end{aligned} \quad (I.6)$$

*Balance de Cantidad de Movimiento según Oy*

$$\begin{aligned} t_y l - 2h_x [\tau_{22}]_B - 2h_y [\tau_{21}]_C + 2h_x h_y f_y &= \\ = [(\rho v) u_n] l - 2h_x [(\rho v) v]_B - 2h_y [(\rho v) u]_C \end{aligned} \quad (I.7)$$

donde  $\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$  es el vector de tracciones prescritas en el contorno  $\Gamma_N$ ,

$\underline{\underline{\tau}} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{Bmatrix}$  es el tensor de tensiones del fluido de densidad  $\rho$ ,  $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  el vector velocidad y  $u_n = \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}$ .

Por otra parte, podemos escribir las siguientes expansiones,

$$\begin{aligned} [\tau_{11}]_C &= \tau_{11}(x - h_x, y) = \tau_{11} - h_x \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + 0(h_x^2) \\ [\tau_{21}]_C &= \tau_{21}(x - h_x, y) = \tau_{21} - h_x \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + 0(h_x^2) \\ [\tau_{22}]_B &= \tau_{22}(x, y - h_y) = \tau_{22} - h_y \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [\tau_{12}]_B &= \tau_{12}(x, y - h_y) = \tau_{12} - h_y \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [(\rho u) u]_C &= [(\rho u) u](x - h_x, y) = [(\rho u) u] - h_x \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + 0(h_x^2) \\ [(\rho u) v]_B &= [(\rho u) v](x, y - h_y) = [(\rho u) v] - h_y \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [(\rho v) v]_B &= [(\rho v) v](x, y - h_y) = [(\rho v) v] - h_y \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} + 0(h_y^2) \\ [(\rho v) u]_C &= [(\rho v) u](x - h_x, y) = [(\rho v) u] - h_x \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + 0(h_x^2) \end{aligned} \quad (I.8)$$

Sustituyendo las expansiones (I.8) anteriores en (I.6) y (I.7) y tras un simplificar, se llega a,

*Balance de Cantidad de Movimiento según Ox*

$$t_x = n_x \tau_{11} + n_y \tau_{12} - \frac{2h_x h_y}{l} \left[ b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] \quad (\text{I.9})$$

*Balance de Cantidad de Movimiento según Oy*

$$t_y = n_y \tau_{22} + n_x \tau_{21} - \frac{2h_x h_y}{l} \left[ b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] \quad (\text{I.10})$$

Donde se ha hecho uso de las relaciones  $n_x = \frac{2h_x}{l}$  y  $n_y = \frac{2h_y}{l}$ , de donde se cumple que,

$$\begin{aligned} (\rho u) u_n l &= 2h_x (\rho u) v + 2h_y (\rho u) u \\ (\rho v) u_n l &= 2h_x (\rho v) v + 2h_y (\rho v) u \end{aligned}$$

Por otra parte, podemos escribir el término  $\frac{h_x h_y}{2l}$ , como,

$$\frac{2h_x h_y}{l} = \frac{1}{2} \left( \frac{2h_y}{l} h_x + \frac{2h_x}{l} h_y \right) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{h}}$$

Por lo que las ecuaciones (I.9) y (I.10) pueden escribirse como,

*Balance de Cantidad de Movimiento según Ox*

$$t_x = n_x \tau_{11} + n_y \tau_{12} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{h}} \left[ b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] \quad (\text{I.11})$$

*Balance de Cantidad de Movimiento según Oy*

$$t_y = n_y \tau_{22} + n_x \tau_{21} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{h}} \left[ b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] \quad (\text{I.12})$$

y teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned}
 r_{m_1} &= b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \\
 r_{m_2} &= b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{I.13}$$

Se pueden escribir las ecuaciones (I.11) y (I.12) en forma vectorial como,

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\underline{\underline{\tau}}} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{h}}) \mathbf{r}_m
 \tag{I.14}$$

Señalar que, considerando el problema incompresible, haciendo  $\rho$  constante en (I.13), podemos escribir ,

$$\begin{aligned}
 r_{m_1} &= b_x + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} - \rho \frac{\partial (uv)}{\partial y} \\
 r_{m_2} &= b_y + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} - \rho \frac{\partial (uv)}{\partial x} - \rho \frac{\partial v^2}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{I.15}$$

Despreciando los términos de las derivadas de orden superior. Evidentemente, la condición de contorno (I.14) sigue siendo válida en este caso, teniendo en cuenta la nueva definición del vector  $\mathbf{r}_m$ .

Por otra parte, la fórmula (I.14) puede ser extendida sencillamente al caso tridimensional, quedando en la forma,

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{r}_m
 \tag{I.16}$$



## Apéndice J

# Derivación de las Ecuaciones de Navier Stokes estabilizadas

En este apéndice derivaremos la forma estabilizada de las ecuaciones de Navier-Stokes, en el caso bidimensional.

Como es conocido, el balance de cantidad de movimiento en un fluido dado, puede derivarse de la segunda ley de Newton, que define que la variación de la cantidad de movimiento en un dominio de control  $\Omega$  es igual al total de las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Esto puede escribirse en la siguiente forma [Oña96] [RG96],

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{b} d\Gamma \quad (\text{J.1})$$

Donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre el dominio de control  $\Omega$ , y  $\mathbf{b}$  es la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre la superficie de control  $\Gamma = \partial\Omega$  cuya normal es  $\mathbf{n}$ . El fluido tiene una densidad  $\rho$  y su velocidad está dada por el campo  $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ .

Como es evidente, la ecuación (J.1) es aplicable a cualquier dominio genérico, y en particular al rectángulo  $ABCD$  representado en la figura J.1. En este caso el balance de fuerzas en las direcciones horizontal y vertical, pueden escribirse (ver figura J.1) como,

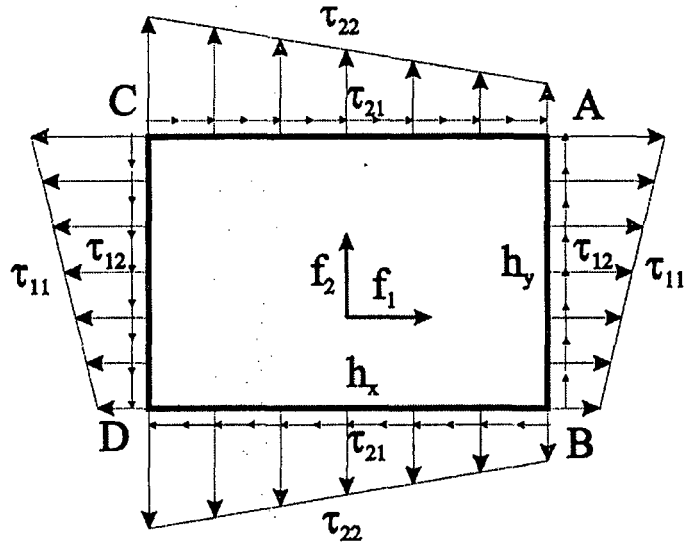


Figura J.1: Dominio rectangular donde se considera el balance de fuerzas.

$$\begin{aligned} \sum \text{Balance horizontal} &= \frac{h_y}{2} ([\tau_{11}]_A + [\tau_{11}]_B) - \frac{h_y}{2} ([\tau_{11}]_C + [\tau_{11}]_D) + \\ &+ \frac{h_x}{2} ([\tau_{21}]_A + [\tau_{21}]_B) - \frac{h_x}{2} ([\tau_{21}]_C + [\tau_{21}]_D) + h_x h_y f_1 \end{aligned} \quad (\text{J.2})$$

$$\begin{aligned} \sum \text{Balance vertical} &= \frac{h_x}{2} ([\tau_{22}]_A + [\tau_{22}]_C) - \frac{h_x}{2} ([\tau_{22}]_D + [\tau_{22}]_B) + \\ &+ \frac{h_y}{2} ([\tau_{12}]_A + [\tau_{12}]_B) - \frac{h_y}{2} ([\tau_{12}]_C + [\tau_{12}]_D) + h_x h_y f_2 \end{aligned}$$

donde  $\underline{\underline{\tau}} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{Bmatrix}$  es el tensor de tensiones del fluido.

Si expandimos en serie de Taylor de tercer orden, los valores de las tensiones de los balances (J.2) en los puntos B, C y D en función de los valores en el punto A, pueden escribirse las siguientes relaciones,



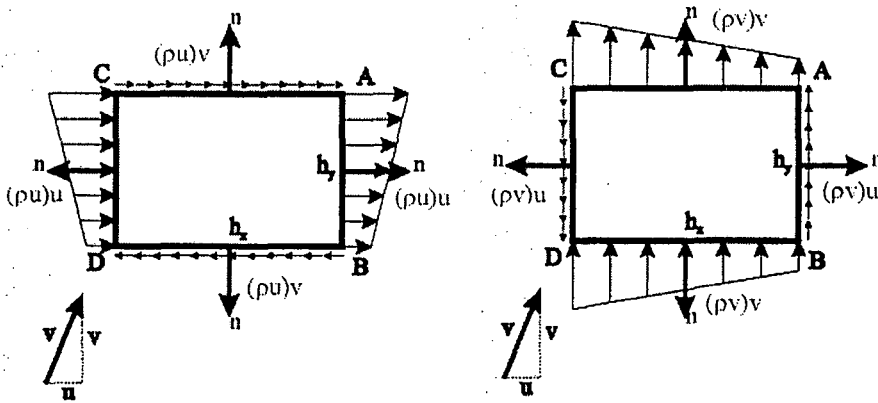


Figura J.2: Dominio de balance de cantidad de movimiento. En la derecha se representa el balance en la dirección vertical y a la izquierda el correspondiente a la dirección horizontal.

$$\begin{aligned}
 [\cdot]_B &= [\cdot]_A - h_y \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial y} + \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial y^2} + 0 (h_y^3) \\
 [\cdot]_C &= [\cdot]_A - h_x \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial x^2} + 0 (h_x^3) \\
 [\cdot]_D &= [\cdot]_A - h_x \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial x} - h_y \frac{\partial [\cdot]_A}{\partial y} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial x^2} + \\
 &\quad + \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial y^2} + h_x h_y \frac{\partial^2 [\cdot]_A}{\partial x \partial y} + 0 (h_x^3, h_y^3)
 \end{aligned} \tag{J.3}$$

Si aplicamos los desarrollos (J.3) anteriores a los balances (J.2), y teniendo en cuenta que  $A$  es un punto genérico, se puede escribir que,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance horizontal} &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 - \\
 - \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] \\
 \frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance vertical} &= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 - \\
 - \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right]
 \end{aligned} \tag{J.4}$$

De la misma manera, podemos escribir los balances de cantidad de movimiento en las direcciones horizontal y vertical, (ver figura J.2) como,

$$\begin{aligned}
& \sum \text{Balance horizontal} = \\
& = \frac{h_y}{2} ([(\rho u) u]_A + [(\rho u) u]_B) - \frac{h_y}{2} ([(\rho u) u]_C + [(\rho u) u]_D) + \\
& \quad + \frac{h_x}{2} ([(\rho u) v]_A + [(\rho u) v]_B) - \frac{h_x}{2} ([(\rho u) v]_C + [(\rho u) v]_D) \quad (J.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum \text{Balance vertical} = \\
& = \frac{h_y}{2} ([(\rho v) u]_A + [(\rho v) u]_B) - \frac{h_y}{2} ([(\rho v) u]_C + [(\rho v) u]_D) + \\
& \quad + \frac{h_x}{2} ([(\rho v) v]_A + [(\rho v) v]_B) - \frac{h_x}{2} ([(\rho v) v]_C + [(\rho v) v]_D)
\end{aligned}$$

Si como antes, aplicamos los desarrollos en serie de Taylor (J.3) a los balances (J.5), tenemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance horizontal} = \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} - \\
& - \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] \quad (J.6) \\
& \frac{1}{h_x h_y} \sum \text{Balance vertical} = \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} - \\
& - \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] - \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

Si sustituimos los balances de fuerzas (J.4) y cantidad de movimiento (J.6) en la ecuación (J.1), tenemos las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega + \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] = \\
& = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] \quad (J.7) \\
& \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] = \\
& = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right]
\end{aligned}$$

Si además, tenemos en cuenta que  $\int_{\Omega} \rho u d\Omega \simeq h_x h_y \rho u$  y  $\int_{\Omega} \rho v d\Omega \simeq h_x h_y \rho v$ , podemos escribir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\rho u]}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial [(\rho u) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho u) v]}{\partial y} \right] &= \\
= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + f_1 \right] & \quad (\text{J.8}) \\
\frac{\partial [\rho v]}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial [(\rho v) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(\rho v) v]}{\partial y} \right] &= \\
= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + f_2 \right] &
\end{aligned}$$

Que se puede escribir en una forma más compacta como,

$$\begin{aligned}
r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_j} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2 \quad \text{en } \Omega & (\text{J.9}) \\
r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
\end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta que la densidad del fluido ( $\rho$ ) es constante.

En la anterior exposición se ha considerado que el dominio de balance para los flujos y fuerzas verticales es el mismo que para las horizontales. Es evidente que esto es una restricción, pues en el caso general puede existir una importante variación de las cantidades en una dirección y no en otra<sup>1</sup>, no siendo los dominios de balance óptimos iguales. Una forma más general de las ecuaciones (J.9), puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2 \quad \text{en } \Omega & (\text{J.10}) \\
r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos derivar la ecuación de conservación de masa, a partir del balance en el dominio representado en la figura J.3.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum \text{Balance masa} = \frac{h_y}{2} ([\rho u]_A + [\rho u]_B) - \frac{h_y}{2} ([\rho u]_C + [\rho u]_D) + \\
&\quad + \frac{h_x}{2} ([\rho v]_A + [\rho v]_B) - \frac{h_x}{2} ([\rho v]_C + [\rho v]_D) & (\text{J.11})
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Podemos imaginar, por ejemplo, un flujo tenga una dirección preferente o de simetría.

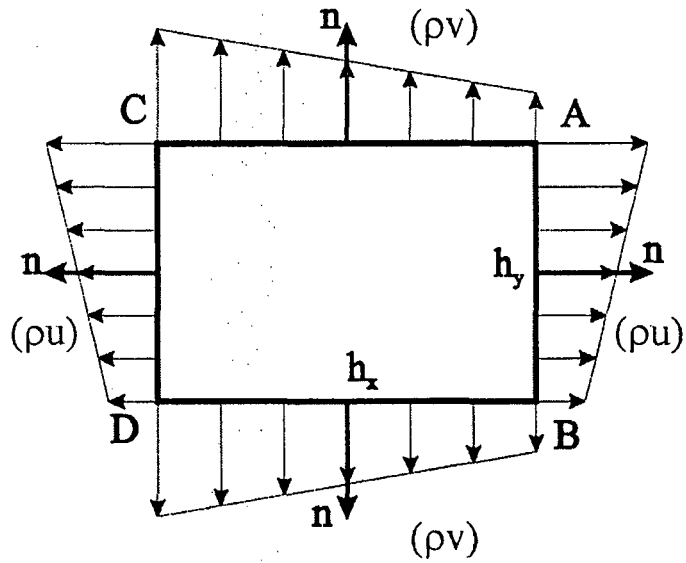


Figura J.3: Dominio sobre el que se calcula el balance de masa.

Si aplicamos a la relación anterior (J.11), los desarrollos (J.3), y tenemos en cuenta que  $\rho$  es constante, podemos escribir,

$$r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{J.12})$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad j = 1, 2$$

Es conveniente señalar que, el dominio de balance para el balance de masa no tiene porqué ser el mismo que para el balance de cantidad de movimiento.

Por otra parte, se hace evidente que las ecuaciones derivadas, pueden generalizarse al caso tridimensional, quedando en la siguiente forma,

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega$$

$$r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{J.13})$$

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

$$r_d = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad j = 1, 2$$

Por último, podemos derivar fácilmente, esquemas estabilizados de mayor orden en el tiempo. Para ello, si integramos en el tiempo las ecuaciones (J.13) en la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+\delta} \left[ r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right] dt \simeq \\
 & \simeq \frac{\delta}{2} \left[ \left[ r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^t + \left[ r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^{t+\delta} \right] \simeq \quad (J.14) \\
 & \simeq \delta \left[ \left[ r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^t + \frac{\delta}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^t \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+\delta} \left[ r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right] dt \simeq \\
 & \simeq \frac{\delta}{2} \left[ \left[ r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^t + \left[ r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^{t+\delta} \right] \simeq \quad (J.15) \\
 & \simeq \delta \left[ \left[ r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^t + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right]^t \right]
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos escribir las ecuaciones (J.13), como,

$$\begin{aligned}
 r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial t} &= 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\
 r_d - \frac{1}{2} h_{d_j} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial r_d}{\partial t} &= 0 \quad \text{en } \Omega \quad (J.16) \\
 r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \\
 r_d &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad j = 1, 2
 \end{aligned}$$

donde, para la obtención de las ecuaciones (J.16) se han despreciado los términos de mayor orden.



# Apéndice K

## Balance de Masa Cerca de un Contorno tipo Dirichlet

En este apéndice haremos una discusión sobre como expresar el balance de masa cerca de un contorno del dominio.

Para simplificar la exposición, analizaremos el caso bidimensional. Para ello estudiaremos el balance de masa en un dominio triangular  $DEF$ , contiguo a un contorno tipo Dirichlet ( $\Gamma_D$ ) como el representado en la figura K.1, donde se prescribe la velocidad normal a  $u_n$ .

De la simple observación de la figura K.1, y teniendo en cuenta que  $\overline{DE} = 2h_x$ ,  $\overline{FD} = 2h_y$  y  $\overline{EF} = l$ , podemos derivar la siguiente relación,

$$\rho [u_C h_y + v_B h_x] = \rho l u_n \quad (\text{K.1})$$

Si suponemos que la velocidad varía linealmente a lo largo de los lados del triángulo  $EDF$ , podemos expresar las velocidades en los puntos  $B$  y  $C$  en función de su valor en  $A$ , de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} u_C &= u_A - \frac{h_x}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_A + O(h_x^2) \\ u_B &= u_A - \frac{h_y}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_A + O(h_y^2) \end{aligned} \quad (\text{K.2})$$

Si sustituimos las relaciones (K.2) anteriores en (K.1), y tenemos en cuenta que  $A$  es un punto genérico, podemos obtener,

$$(u n_x + v n_y) - \frac{1}{2} (h_x n_x + h_y n_y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u_n \quad (\text{K.3})$$

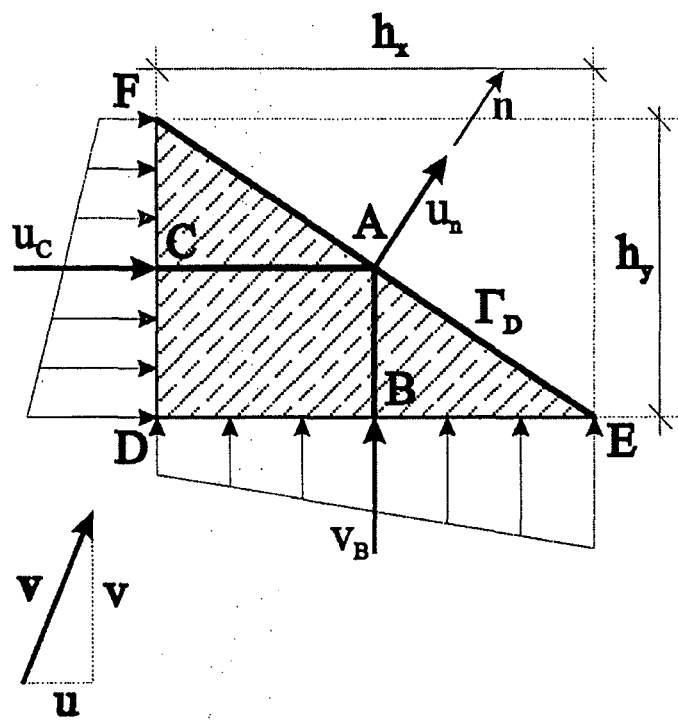


Figura K.1: Dominio de balance cerca de un contorno tipo Dirichlet.



Donde se ha hecho uso de las relaciones  $n_x = \frac{h_x}{l}$  y  $n_y = \frac{h_y}{l}$ , siendo  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  el vector normal al contorno.

Evidentemente la expresión (K.3) puede ser extendida de manera sencilla al caso tridimensional, quedando como sigue,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} r_d &= u_n \\ r_d &= \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{K.4})$$

Por otra parte, si expresamos las componentes del vector de longitudes características, en la siguiente forma<sup>1</sup>,

$$h_j = -2t_{d_j} v_j \quad (\text{K.5})$$

donde  $\mathbf{t}_d$  es el vector de tiempos intrínsecos, podemos reescribir la condición (K.4), como,

$$\begin{aligned} v_j n_j + t_{d_j} v_j n_j r_d &= u_n \\ r_d &= \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{K.6})$$

Si además consideramos la ecuación de balance de cantidad de movimiento estabilizada, cuya expresión se deriva en el apéndice G, quedando en la forma siguiente,

$$\begin{aligned} r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_{ij}} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} &= 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \\ r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \end{aligned} \quad (\text{K.7})$$

Podemos escribir, despreciando los términos de orden superior que,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i \simeq 0 \quad (\text{K.8})$$

<sup>1</sup>por simplificar la exposición se usará en lo siguiente notación de índices y se aplicará la convención de Einstein de suma para los índices repetidos en productos y derivadas. Así, por ejemplo,  $h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j} = \sum_j h_{d_j} \frac{\partial r_{d_i}}{\partial x_j}$ .

y combinado (K.8) con (K.6), obtener,

$$v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i + \frac{t_{d_i}}{\rho} n_i r'_{m_i} \quad \text{en } \Gamma_{D_n} \times (0, t) \quad (\text{K.9})$$

$$r'_{m_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i$$

## Apéndice L

# Un Procedimiento para el Cálculo de los Parámetros de Estabilización

En este apéndice presentaremos un procedimiento iterativo para el cálculo de los parámetros de estabilidad del método de cálculo finitesimal. Para ello fijémonos primero en un problema unidimensional estabilizado genérico, definido por,

$$r(\varphi) - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx}(\varphi) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.1})$$

Si conocemos una solución aproximada  $\varphi_0$  del problema (L.1), su evaluación resulta en,

$$r(\varphi_0) - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx}(\varphi_0) = r_\Omega \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.2})$$

Por otra parte, definiremos la media del residuo de una solución numérica particular sobre un elemento  $\Omega^e$ , como,

$$\bar{r}^e = \frac{1}{\Omega^e} \left| \int_{\Omega^e} r_\Omega d\Omega \right| \quad (\text{L.3})$$

Si sustituimos la ecuación (L.2) en (L.3), tenemos,

$$\bar{r}^e = r^e(\varphi_0) - \left[ \frac{h}{2} \frac{dr}{dx}(\varphi_0) \right]^e \quad (\text{L.4})$$

donde, hemos llamado,

$$a^e = \frac{1}{\Omega^e} \left| \int_{\Omega^e} a_{\Omega} d\Omega \right| \quad (\text{L.5})$$

Si consideramos, por simplicidad, que  $h$  es constante por elementos, podemos escribir (L.4) como,

$$\bar{r} = r^e(\varphi_0) - \frac{h^e}{2} \left[ \frac{dr}{dx}(\varphi_0) \right]^e \quad (\text{L.6})$$

Supongamos ahora, que hemos encontrado una solución numérica  $\varphi_1$ , mejorada<sup>1</sup>, entonces, debe cumplirse que,

$$\bar{r}^e(\varphi_0) - \bar{r}^e(\varphi_1) \geq 0 \quad (\text{L.7})$$

Sustituyendo la relación (L.4) en (L.7), podemos obtener una expresión para la longitud característica del elemento, dada por,

$$h^e \geq \frac{2(r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0))}{\left[ \left( \frac{dr(\varphi_1)}{dx} \right)^e - \left( \frac{dr(\varphi_0)}{dx} \right)^e \right]} \quad (\text{L.8})$$

Puede demostrarse (ver [Oña98a]) que la relación (L.8) se cumple para valores mayores que el crítico en caso de la ecuación de convección difusión homogénea con coeficientes constantes.

Si expresamos la longitud característica en función de una dimensión típica del elemento  $l^e$ , como,

$$h^e = \alpha^e l^e$$

podemos escribir (L.8) como,

$$\alpha^e \geq \frac{2(r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0))}{l^e \left[ \left( \frac{dr(\varphi_1)}{dx} \right)^e - \left( \frac{dr(\varphi_0)}{dx} \right)^e \right]} \quad (\text{L.9})$$

A partir de la relación (L.9) es posible desarrollar metodologías iterativas para la resolución del problema unidimensional estabilizado, como se

<sup>1</sup>Que puede obtenerse, por ejemplo, por un suavizado de la solución original.

muestra en [Oña98a] [OGI97b]. De la misma manera, es posible derivar esquemas para el cálculo de los parámetros de estabilidad en el caso general. La metodología propuesta en [OGI97c] [OGI97d] se basa en suponer en primera aproximación que el vector de longitudes características toma la dirección de la velocidad, para luego corregirlo.

Tomemos el problema general estabilizado, dado por,

$$r(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \nabla) r(\varphi) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.10})$$

Al igual que en el caso anterior, si conocemos una solución aproximada  $\varphi_0$  del problema (L.10), su evaluación resulta en,

$$r(\varphi_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \nabla) r(\varphi_0) = r_\Omega \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{L.11})$$

Que sustituido en (L.3), resulta en,

$$\bar{r}^e = r^e(\varphi_0) - \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{h} \cdot \nabla) r(\varphi_0) \right]^e \quad (\text{L.12})$$

Si tomamos el mismo criterio (L.7) anterior y sustituimos en él la relación (L.12), tenemos que,

$$(\mathbf{h}^e \cdot \nabla) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)] \geq 2[r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)] \quad (\text{L.13})$$

Donde se ha supuesto, que  $\mathbf{h}$  es constante por elementos. Si, además, suponemos que  $\mathbf{h}^e = \alpha_v^e l^e \frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|}$ , donde  $\mathbf{v}^e$  es una velocidad media del elemento, la relación (L.13) puede escribirse como,

$$\alpha_v^e \geq \frac{2[r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]}{l^e \left( \frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|} \cdot \nabla \right) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]} \quad (\text{L.14})$$

Una vez calculado iterativamente<sup>2</sup>  $\alpha_v^e$ , cumpliendo la relación (L.14), podemos corregir la suposición inicial hecha para  $\mathbf{h}^e$ , mediante la adición de un nuevo término según la dirección del gradiente de la variable, es decir,

<sup>2</sup>Sustituyendo el signo  $\geq$  por  $=$ , puede definirse un proceso iterativo que asegura que el error elemental no aumenta entre iteraciones.

$$\mathbf{h}^e = \alpha_v^e l^e \frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|} + \alpha_\varphi^e l^e \frac{\mathbf{v}_r^e}{|\mathbf{v}_r^e|}$$

donde  $\mathbf{v}_r^e = \frac{r^e(\varphi)}{|\nabla\varphi|^2} \nabla\varphi$ ; de esta forma podemos calcular el valor de  $\alpha_\varphi^e$  gracias a la relación,

$$\alpha_v^e \geq \frac{\frac{2}{l^e} [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)] - \alpha_v^e \left( \frac{\mathbf{v}^e}{|\mathbf{v}^e|} \cdot \nabla \right) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]}{\left( \frac{\mathbf{v}_r^e}{|\mathbf{v}_r^e|} \cdot \nabla \right) [r^e(\varphi_1) - r^e(\varphi_0)]} \quad (\text{L.15})$$

obtenida a partir de (L.13).

Una exposición más detallada de esta metodología y de otras alternativas, junto con ejemplos de su aplicación puede encontrarse en [OGI97a] [OJI98].