



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS



DEPARTAMENTO DE RESISTENCIA DE MATERIALES
Y ESTRUCTURAS EN LA INGENIERÍA

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROCESOS DE COMPACTACIÓN Y EXTRUSIÓN DE MATERIALES PULVERULENTOS

Aplicación a la Pulvimetalurgia Industrial

TRABAJO REALIZADO COMO PARTE DE LOS REQUISITOS
EXIGIDOS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR.

Presentada por:

RAFAEL WEYLER PÉREZ

Dirigida por el profesor:

Dr. XAVIER OLIVER OLIVELLA

Barcelona, Mayo de 2000.

Anexo B1

Cálculo de la matriz de rigidez tangente.

En el capítulo 4 se planteó la forma débil de la ecuación de equilibrio junto con las condiciones de contorno. Una vez discretizado el cuerpo deformable Ω_0 , en un instante de tiempo t fijo pero arbitrario el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$G(\varphi^h, \eta^h) = G^{int}(\varphi^h, \eta^h) - G^{ext}(\varphi^h, \eta^h) = 0 \quad \forall \eta^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B1.1})$$

Como ya se mencionó en dicho capítulo, en general se trata de una ecuación no lineal por lo que su resolución se realiza de forma iterativa. Para ello se resuelve una secuencia de problemas linealizados cuya matriz de rigidez tangente se desarrolla detalladamente en este anexo.

En la primera parte se describe la matriz de rigidez asociada al método de Galerkin, tanto los términos correspondientes a las fuerzas internas como los correspondientes a las fuerzas externas. En la segunda parte, se desarrollan los mismos términos para el caso de la formulación mixta.

B1.1 Linealización de la formulación de Galerkin.

B1.1.1 Linealización de las fuerzas internas.

La contribución de las fuerzas internas a la matriz de rigidez se obtiene a partir de la expresión:

$$G^{int}(\varphi^h, \eta^h) = \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\varphi^h) \cdot \mathbf{S}(\varphi^h) : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.2})$$

la cual se ha formulado en términos de las variables materiales. Aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ se tiene:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} [D_\varphi \mathbf{F}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F} \cdot D_\varphi \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h)] : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.3})$$

que se puede reescribir como:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = B^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + B^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.4})$$

El primer término, correspondiente a la parte geométrica, se calcula a partir de la derivada del tensor gradiente de deformaciones:

$$D_{\varphi} \mathbf{F}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{F}(\varphi^h + \zeta \Delta\varphi^h) \right|_{\zeta=0} = \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.5})$$

Sustituyendo (B1.5) en (B1.3), el término geométrico B^{geo} se escribe como:

$$B^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \text{GRAD}(\eta^h) : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega \quad (\text{B1.6})$$

El segundo término, correspondiente a la parte material, se calcula derivando el tensor de tensiones. En particular, haciendo uso de la regla de la cadena se tiene:

$$D_{\varphi} \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : D_{\varphi} \mathbf{E}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.7})$$

La derivada de las tensiones respecto a las deformaciones es por definición el tensor constitutivo tangente $\Xi^{ep} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}$, cuyo cálculo se describió detalladamente en el capítulo 3. Derivando las definiciones (3.3a) y (3.4a) y combinando el resultado con la ecuación (B1.5), se llega a una expresión de la forma:

$$D_{\varphi} \mathbf{E}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{2} (\text{GRAD}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h)) \quad (\text{B1.8})$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta la simetría menor del tensor constitutivo tangente Ξ^{ep} , la ecuación (B1.7) se reescribe como:

$$D_{\varphi} \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \Xi^{ep} : \mathbf{F}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.9})$$

Sustituyendo (B1.9) en (B1.3) se obtiene el término material B^{mat} :

$$B^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \text{GRAD}(\eta^h) : \mathbf{F} \cdot \Xi^{ep} : \mathbf{F}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \, d\Omega \quad (\text{B1.10})$$

Por otro lado, aplicando el operador *push-forward* sobre el tensor de tensiones \mathbf{S} y sobre el tensor constitutivo tangente Ξ^{ep} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \phi_*(\mathbf{S}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \\ \mathbf{c}_{ijkl}^{ep} &= [\phi_*(\Xi^{ep})]_{ijkl} = F_{ia} F_{jb} F_{kc} F_{ld} \Xi_{abcd}^{ep} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el operador gradiente espacial y gradiente material se relacionan a través de la expresión $\text{GRAD}(\cdot) = \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{F}$, las expresiones (B1.6) y (B1.10) se pueden reescribir en términos de las variables espaciales como:

$$B^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \nabla(\eta^h) : \nabla(\Delta\varphi^h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Omega \quad (\text{B1.11a})$$

$$B^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \nabla(\eta^h) : \mathbf{c}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) \, d\Omega \quad (\text{B1.11b})$$

Por otro lado, φ^h y η^h son elementos del espacio \mathcal{V}^h , los cuales se aproximan como:

$$\varphi^h(\mathbf{X}) = \sum_{p=1}^{n_p} N_p(\mathbf{X}) \hat{\varphi}_p^h \quad (\text{B1.12a})$$

$$\eta^h(\mathbf{X}) = \sum_{p=1}^{n_p} N_p(\mathbf{X}) \hat{\eta}_p^h \quad (\text{B1.12b})$$

Y en el que el gradiente de φ^h y η^h se calcula a través de la relación:

$$\text{GRAD}(\cdot) = \sum_{p=1}^{n_p} \text{GRAD}(N_p) \widehat{(\cdot)}_p^h \quad (\text{B1.13})$$

Haciendo uso de las ecuaciones (B1.12a-b) y (B1.13), la ecuación (B1.3) se puede reescribir en términos de las fuerzas internas como:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \widehat{\eta}^h : D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.14})$$

en el que

$$D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = (\mathbf{K}^{geo}(\varphi^h) + \mathbf{K}^{mat}(\varphi^h)) : \Delta\widehat{\varphi}^h \quad (\text{B1.15})$$

donde \mathbf{K}^{geo} es la matriz geométrica y \mathbf{K}^{mat} es la matriz material. En particular, las matrices \mathbf{K}^{geo} y \mathbf{K}^{mat} se obtienen reemplazando las ecuaciones (B1.12a-b) y (B1.13) en (B1.6) y (B1.10):

$$\mathbf{K}^{geo}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} S_{jk} d\Omega \quad (\text{B1.16a})$$

$$\mathbf{K}^{mat}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} F_{ir} \Xi_{rjks}^{ep} F_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega \quad (\text{B1.16b})$$

Alternativamente, estas matrices se pueden reescribir en términos de las variables espaciales. En particular, combinando la relación $\text{GRAD}(\cdot) = \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{F}$ con las expresiones (B1.12a-b), (B1.13), (B1.11a) y (B1.11b) se llega a las expresiones:

$$\mathbf{K}^{geo}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \tau_{jk} d\Omega \quad (\text{B1.17a})$$

$$\mathbf{K}^{mat}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} c_{ijkl}^{ep} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} d\Omega \quad (\text{B1.17b})$$

B1.1.2 Linealización de las fuerzas externas.

El vector de fuerzas volumétricas es independiente de la ecuación de movimiento φ , y por tanto, su derivada es nula. En particular, la derivada del vector de fuerzas externas se reduce a derivar el vector de fuerzas de contacto definido sobre los nodos ubicados en la pared del molde y que no tienden a despegarse de esta ($\Delta\varphi^h \cdot \widehat{\mathbf{n}} = \Delta\varphi_N^h = 0$). En estos nodos, el cálculo del vector de fuerzas de contacto se realiza en el sistema de coordenadas local (ver figura B1.1):

$$\mathbf{F}^{cont} = \mathbf{F}_N^{cont} \widehat{\mathbf{n}} + \mathbf{F}_T^{cont} \widehat{\mathbf{t}} \quad (\text{B1.18})$$

donde las componentes normal y tangencial se definen como:

$$\mathbf{F}_N^{cont} = \mathbf{F}_N^* = \mathbf{F}^* \cdot \widehat{\mathbf{n}} \quad (\text{B1.19a})$$

$$\mathbf{F}_T^{cont} = -\text{sign}(\widehat{\mathbf{V}}_T^{rel}) \left| \widehat{\mathbf{V}}_T^{rel} \right|^\alpha \widetilde{\mathbf{F}}_N^* = -\text{sign}(\widehat{\mathbf{V}}^{rel} \cdot \widehat{\mathbf{t}}) \left| \widehat{\mathbf{V}}^{rel} \cdot \widehat{\mathbf{t}} \right|^\alpha (\widetilde{\mathbf{F}}^* \cdot \widehat{\mathbf{n}}) \quad (\text{B1.19b})$$

siendo el vector \mathbf{F}^* la diferencia entre las fuerzas internas y las fuerzas de volumen $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{vol}$, $\widehat{\mathbf{V}}^{rel}$ la velocidad relativa a las paredes del molde definida sobre los nodos y $\widetilde{\mathbf{F}}^*$ la diferencia entre

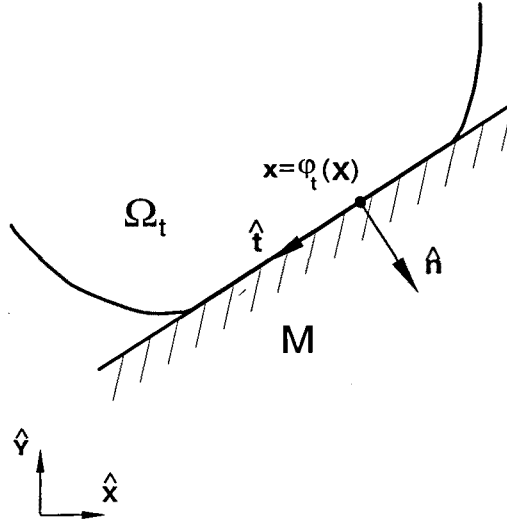


Figura B1.1: Definición del sistema de coordenadas locales $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{t}}$.

las fuerzas internas y las fuerzas de volumen modificadas por el coeficiente de fricción dinámica $\tilde{\mathbf{F}}^* = \tilde{\mathbf{F}}^{int} - \tilde{\mathbf{F}}^{vol}$:

$$\tilde{\mathbf{F}}^{int} = \int_{\Omega_0} \mu_d \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} : \text{GRAD}(N_p) d\Omega \quad (\text{B1.20a})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{vol} = \int_{\Omega_0} \mu_d \rho_0 \mathbf{B} N_p d\Omega \quad (\text{B1.20b})$$

La linealización de las fuerzas externas se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre el vector de fuerzas de contacto \mathbf{F}^{cont} :

$$D_\varphi \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.21})$$

donde la derivada del vector de fuerzas de contacto \mathbf{F}^{cont} se obtiene derivando la ecuación (B1.18).

Linealización del vector de fuerzas internas y volumétricas modificado.

La derivada del vector de fuerzas volumétricas es nula por ser independiente de la ecuación de movimiento φ . Por tanto, derivar el vector \mathbf{F}^* es equivalente a derivar el vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} , cuyo cálculo se describió en la sección anterior:

$$D_\varphi \mathbf{F}^*(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = (\mathbf{K}^{geo}(\varphi^h) + \mathbf{K}^{mat}(\varphi^h)) : \Delta\tilde{\varphi}^h \quad (\text{B1.22})$$

donde \mathbf{K}^{geo} y \mathbf{K}^{mat} se definieron en las ecuaciones (B1.16a-b) y (B1.17a-b).

La derivada del vector $\tilde{\mathbf{F}}^*$ se puede obtener a partir de un funcional sin sentido físico $\tilde{\mathbf{G}}^*$ que se define como:

$$\tilde{\mathbf{G}}^*(\varphi^h, \eta^h) = \tilde{\mathbf{G}}^{int}(\varphi^h, \eta^h) - \tilde{\mathbf{G}}^{vol}(\varphi^h, \eta^h) \quad (\text{B1.23a})$$

$$\tilde{G}^{int}(\varphi^h, \eta^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\varphi^h)) \mathbf{F}(\varphi^h) \cdot \mathbf{S}(\varphi^h) : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.23b})$$

$$\tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \eta^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\varphi^h)) \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta^h d\Omega \quad (\text{B1.23c})$$

En el que la derivada del funcional \tilde{G}^* se obtiene derivando la expresión (B1.23a):

$$D_\varphi \tilde{G}^*(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \tilde{G}^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) - D_\varphi \tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.24})$$

En particular, la derivada de \tilde{G}^{int} se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (B1.23b):

$$D_\varphi \tilde{G}^{int} = \int_{\Omega_0} D_\varphi \mu_d \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega + \int_{\Omega_0} \mu_d \underbrace{[D_\varphi \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F} \cdot D_\varphi \mathbf{S}] : \text{GRAD}(\eta^h)}_{\text{Derivada integrando } \mathbf{F}^{int}} d\Omega \quad (\text{B1.25})$$

que se puede reescribir como:

$$D_\varphi \tilde{G}^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = B_{int}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + \tilde{B}^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + \tilde{B}^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.26})$$

El primer término corresponde a la derivada del coeficiente de fricción dinámica μ_d . En particular, haciendo uso de la regla de la cadena, la derivada de este coeficiente se calcula como:

$$D_\varphi \mu_d(\eta(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = \frac{d\mu_d}{d\eta} D_\varphi \eta(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.27})$$

La derivada de la densidad se obtiene derivando la ecuación de continuidad (3.16) descrita en el capítulo 3, llegando a la expresión:

$$D_\varphi \eta(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -\frac{\eta_0}{\det^2(\mathbf{F})} \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : D_\varphi \mathbf{F}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.28})$$

Por otro lado, la derivada $\frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$ se obtiene a partir de la ecuación (A3.77) presentada en el apartado A3.3.2, de donde se deduce:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{B1.29})$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.16), (B1.5), (B1.28) y (B1.29) en (B1.27), la derivada del coeficiente de fricción dinámica μ_d está dada por la expresión:

$$D_\varphi \mu_d(\eta(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = -\eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \text{DIV}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.30})$$

donde

$$\text{DIV}(\cdot) = \mathbf{F}^{-T} : \text{GRAD}(\cdot) = \mathbf{g}^{-1} : \nabla(\cdot) = \text{div}(\cdot) \quad (\text{B1.31})$$

Por tanto, el primer término de la ecuación (B1.25) se puede escribir como:

$$B_{int}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \text{DIV}(\Delta\varphi^h) \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.32a})$$

Por otro lado, el segundo término de la ecuación (B1.25) corresponde a la derivada del integrando del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} , cuyo cálculo se desarrolló en la sección anterior. En

particular, haciendo uso de las ecuaciones (B1.5) y (B1.9), este término se puede escribir de la forma:

$$\tilde{B}^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d \text{GRAD}(\eta^h) : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega \quad (\text{B1.32b})$$

$$\tilde{B}^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d \text{GRAD}(\eta^h) : \mathbf{F} \cdot \Xi^{ep} : \mathbf{F}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \, d\Omega \quad (\text{B1.32c})$$

Aplicando el operador *push-forward* sobre el tensor de tensiones \mathbf{S} y sobre el tensor constitutivo tangente Ξ^{ep} y teniendo en cuenta el operador gradiente espacial y gradiente material se relacionan como $\text{GRAD}(\cdot) = \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{F}$, las expresiones (B1.32a) y (B1.32b-b) se pueden reescribir en términos de las variables espaciales como:

$$B_{int}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \text{div}(\Delta\varphi^h) \boldsymbol{\tau} : \nabla(\eta^h) \, d\Omega \quad (\text{B1.33a})$$

$$\tilde{B}^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d \nabla(\eta^h) : \nabla(\Delta\varphi^h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Omega \quad (\text{B1.33b})$$

$$\tilde{B}^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d \nabla(\eta^h) : \mathbf{c}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) \, d\Omega \quad (\text{B1.33c})$$

Por otro lado, la derivada del término correspondiente a las fuerzas volumétricas \tilde{G}^{vol} se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (B1.23c):

$$D_\varphi \tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} D_\varphi \mu_d(\eta(\varphi^h); \Delta\varphi^h) \rho_0 \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}^h \, d\Omega = B_{vol}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.34})$$

Sustituyendo la ecuación (B1.30) en (B1.34) se llega a la expresión:

$$B_{vol}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \text{DIV}(\Delta\varphi^h) \rho_0 \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}^h \, d\Omega \quad (\text{B1.35})$$

Finalmente, en virtud de las ecuaciones (B1.26) y (B1.34), la ecuación (B1.24) se puede reescribir de la forma:

$$D_\varphi \tilde{G}^*(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = B^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + \tilde{B}^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + \tilde{B}^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.36})$$

donde

$$B^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = B_{int}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) - B_{vol}^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.37})$$

En el que combinando las ecuaciones (B1.32a), (B1.35) y (B1.37) se define el término B^{fric} como:

$$B^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \text{DIV}(\Delta\varphi^h) [\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} : \text{GRAD}(\eta^h) - \rho_0 \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}^h] \, d\Omega \quad (\text{B1.38})$$

o en términos de las variables espaciales se define como:

$$B^{fric}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \text{div}(\Delta\varphi^h) [\boldsymbol{\tau} : \nabla(\eta^h) - \rho_0 \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}^h] \, d\Omega \quad (\text{B1.39})$$

La derivada del vector de fuerzas $\tilde{\mathbf{F}}^*$ se obtiene sustituyendo las ecuaciones (B1.12a-b) y (B1.13) en la ecuación (B1.36), la cual se reescribe en términos del vector de fuerzas $\tilde{\mathbf{F}}^*$ como:

$$D_\varphi \tilde{G}^*(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \hat{\boldsymbol{\eta}}^h : D_\varphi \tilde{\mathbf{F}}^*(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.40})$$

en el que

$$D_\varphi \tilde{\mathbf{F}}^*(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \left(\mathbf{K}^{fric}(\varphi^h) + \tilde{\mathbf{K}}^{geo}(\varphi^h) + \tilde{\mathbf{K}}^{mat}(\varphi^h) \right) : \Delta\tilde{\varphi}^h \quad (\text{B1.41})$$

Y de donde, a partir de las expresiones (B1.32b-c) y (B1.38), se deduce que:

$$\mathbf{K}_{implp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(F_{ij} S_{jk} \frac{\partial N_m}{\partial X_k} - \rho_0 B_i N_m \right) F_{rl}^{-1} \frac{\partial N_p}{\partial X_r} d\Omega \quad (\text{B1.42a})$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{implp}^{geo} = \int_{\Omega_0} \mu_d \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} S_{jk} d\Omega \quad (\text{B1.42b})$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{implp}^{mat} = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial X_j} F_{ir} \Xi_{rjks}^{ep} F_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega \quad (\text{B1.42c})$$

Alternativamente, a partir de las expresiones (B1.33b-c) y (B1.39), se puede deducir las matrices \mathbf{K}^{fric} , $\tilde{\mathbf{K}}^{geo}$ y $\tilde{\mathbf{K}}^{mat}$ en términos de las variables espaciales:

$$\mathbf{K}_{implp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(\tau_{ij} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} - \rho_0 B_i N_m \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{B1.43a})$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{implp}^{geo} = \int_{\Omega_0} \mu_d \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \tau_{jk} d\Omega \quad (\text{B1.43b})$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{implp}^{mat} = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_j} c_{ijkl}^{ep} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} d\Omega \quad (\text{B1.43c})$$

Linealización de los vectores unitarios normal y tangencial.

Los nodos considerados tienden a desplazarse sobre la pared del molde, o lo que es lo mismo, tienden a mantener el contacto con el molde lo que equivale a considerar que la condición de contacto está activa $g(\varphi^h(\mathbf{X})) = 0$. Bajo esta condición, la derivación del sistema de coordenadas local se resume en el siguiente lema.

Lema B1.1 Sea \mathbf{X} una partícula del contorno que se desplaza sobre la curva $\alpha(s) = \varphi^h(\mathbf{X})$. Sea $\hat{\mathbf{t}}$ el vector unitario tangente y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la curva α en s :

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'(s) \quad (\text{B1.44a})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = k \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k \alpha''(s) \quad (\text{B1.44b})$$

en el que k es la curvatura de α evaluada en s . Entonces, la derivada de Gateaux de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ (tangente a la curva $\alpha(s)$ $\Delta\varphi_N^h = \Delta\varphi^h \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$) están dadas por las expresiones:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{t}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = k \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\varphi^h \quad (\text{B1.45a})$$

$$D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -k \hat{\mathbf{t}} \otimes \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\varphi^h \quad (\text{B1.45b})$$

DEMOSTRACIÓN: Si la partícula \mathbf{X} está sobre la curva $\alpha(s)$, entonces se verifica la ecuación:

$$\mathbf{W} = \alpha(s) - \varphi^h(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (\text{B1.46})$$

Si además, la partícula \mathbf{X} se desplaza sobre la curva $\alpha(s)$, entonces el incremento del campo de desplazamientos $\Delta\varphi^h$ debe verificar la condición:

$$\mathbf{W}^* = \alpha(s^*) - (\varphi^h(\mathbf{X}) + \zeta\Delta\varphi^h) = \mathbf{0} \quad (\text{B1.47})$$

Aplicando la derivada de Gateaux:

$$\mathbf{0} = D_\varphi \mathbf{W}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{d}{d\zeta} [\alpha(s^*) - (\varphi^h(\mathbf{X}) + \zeta\Delta\varphi^h)] \Big|_{\zeta=0}$$

de donde se deduce que

$$\hat{\mathbf{t}} \frac{ds^*}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} - \Delta\varphi^h = \mathbf{0} \quad (\text{B1.48})$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (B1.48) por el vector unitario $\hat{\mathbf{t}}$, se determina $\frac{ds^*}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0}$:

$$\frac{ds^*}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\varphi^h \quad (\text{B1.49})$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (B1.48) por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, se deduce que:

$$\Delta\varphi_N^h = \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta\varphi^h = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \frac{ds^*}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad (\text{B1.50})$$

lo que implica que la derivada se realiza en la dirección tangente a la curva $\alpha(s)$.

Aplicando la derivada de Gateaux sobre el vector unitario tangente $\hat{\mathbf{t}}$ se tiene:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{t}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{d}{d\zeta} [\hat{\mathbf{t}}(s^*)] \Big|_{\zeta=0} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s^*)}{ds^*} \frac{ds^*}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0}$$

Haciendo uso de las ecuaciones (B1.44b) y (B1.49) se llega a la expresión:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{t}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = k \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\varphi^h \quad (\text{B1.51})$$

Por otro lado, los vectores unitarios tangente $\hat{\mathbf{t}}$ y normal $\hat{\mathbf{n}}$ son ortogonales, y por tanto, su producto escalar es nulo $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Derivando esta condición se tiene:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{t}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{t}} \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = 0 \quad (\text{B1.52a})$$

Mientras que el producto escalar del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ por sí mismo es la unidad $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$, por lo que su derivada conduce a la expresión:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{B1.52b})$$

de donde se deduce la derivada del vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ está contenida en la dirección tangente ($D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \beta \hat{\mathbf{t}}$). Combinando esta última con las ecuaciones (B1.51) y (B1.52a) se determina la derivada del vector normal:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -k \hat{\mathbf{t}} \otimes \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\varphi^h$$

□

En este caso, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ se determinan a partir de la geometría del molde, la cual es conocida y se identifica con la curva $\alpha(s)$ del lema B1.1.

Contribución de las fuerzas de contacto a la matriz de rigidez.

Como se deduce de la ecuación (B1.21), la derivada del vector de fuerzas externas en el nodo m se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (B1.18):

$$D_\varphi \mathbf{F}_m^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \hat{\mathbf{n}}^{(m)} + D_\varphi \mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \hat{\mathbf{t}}^{(m)} + \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}} D_\varphi \hat{\mathbf{n}}^{(m)}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) + \mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}} D_\varphi \hat{\mathbf{t}}^{(m)}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.53})$$

donde las derivadas de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}^{(m)}$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(m)}$ evaluados en el nodo m se conocen a partir del lema B1.1.

La derivada de la componente normal de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}$ se determina derivando la ecuación (B1.19a):

$$D_\varphi \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}_m^* (\varphi^h; \Delta\varphi^h) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} + \mathbf{F}_m^* \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{n}}^{(m)}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.54})$$

Teniendo en cuenta la ecuación (B1.15) y que la derivada del vector de fuerzas volumétricas $\mathbf{F}_m^{\text{vol}}$ es nula, la derivada del vector $\mathbf{F}_m^* = \mathbf{F}_m^{\text{int}} - \mathbf{F}_m^{\text{vol}}$ viene dada por la expresión:

$$D_\varphi \mathbf{F}_m^* (\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}_m^{\text{int}} (\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \sum_{p=1}^{n_p} \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{\text{geo}} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{\text{mat}} \right) \cdot \Delta\hat{\varphi}_p^h \quad (\text{B1.55})$$

donde $\left[\mathbf{K}_{(m)(p)}^{\text{geo}} \right]_{ij} = K_{imjp}^{\text{geo}}$ y $\left[\mathbf{K}_{(m)(p)}^{\text{mat}} \right]_{ij} = K_{imjp}^{\text{mat}}$, las cuales están definidas en las ecuaciones (B1.16a-b) y (B1.17a-b).

La derivada del segundo término de la ecuación (B1.54) se obtiene a partir del lema B1.1.

Por tanto, sustituyendo las ecuaciones (B1.45b) y (B1.55) en (B1.54) se determina la derivada de la componente normal de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}$ en el nodo m :

$$D_\varphi \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{p=1}^{n_p} \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{\text{geo}} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{\text{mat}} \right) \cdot \Delta\hat{\varphi}_p^h - k \mathbf{F}_{T_m}^* \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \Delta\hat{\varphi}_m^h \quad (\text{B1.56})$$

donde $\mathbf{F}_{T_m}^* = \mathbf{F}_m^* \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)}$.

Por otro lado, la derivada de la componente tangencial de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}}$ se determina derivando la ecuación (B1.19b):

$$D_\varphi \mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -D_\varphi \left[\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}} \right|^\alpha \right] (\varphi^h; \Delta\varphi^h) \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}} \right|^\alpha D_\varphi \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* (\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.57})$$

Haciendo uso de la relación¹ $\frac{d}{dx} (\text{sign}(x) |x|^\alpha) = \alpha |x|^{\alpha-1}$ la ecuación (B1.57) está dada por:

$$D_\varphi \mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -\alpha \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}} \right|^{\alpha-1} \left[D_\varphi \hat{\mathbf{V}}_m^{\text{rel}} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} + \hat{\mathbf{V}}_m^{\text{rel}} \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \right] \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_m}^{\text{rel}} \right|^\alpha \left[D_\varphi \tilde{\mathbf{F}}_m^* \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} + \tilde{\mathbf{F}}_m^* \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \right] \quad (\text{B1.58})$$

¹Rigurosamente hablando, la derivada de $f(x) = \text{sign}(x) |x|^\alpha$ en $x = 0$ no está definida. No obstante, se comprueba fácilmente que para $\alpha \geq 1$ se trata de una discontinuidad evitable, ya que $f'(0) := \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Teniendo en cuenta que la configuración en el instante t_n es fija, la derivada de la velocidad relativa $\widehat{\mathbf{V}}_m^{rel}$ evaluada en el nodo m está dada por la expresión:

$$D_\varphi \widehat{\mathbf{V}}_{m,n+1}^{rel}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \approx \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\widehat{\varphi}_{m,n+1}^h + \zeta \Delta\varphi_{m,n+1}^h - \widehat{\varphi}_{m,n}^h - \mathbf{V}_{n+1}^{pared}}{\Delta t_{n+1}} \right) \Big|_{\zeta=0} = \frac{\Delta\widehat{\varphi}_{m,n+1}^h}{\Delta t_{n+1}} \quad (\text{B1.59})$$

Además, la velocidad relativa de los nodos en los que la fuerza de contacto no es nula verifican el siguiente lema.

Lema B1.2 Si el nodo m se mueve sobre la pared del molde entonces la componente normal de la velocidad relativa es nula:

$$\widehat{\mathbf{V}}_{N_m}^{rel} = 0 \quad (\text{B1.60})$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha(s, t)$ la curva que describe la pared del molde sobre la que se mueve el nodo m en el instante t . Si el nodo se mueve sobre la pared del molde durante el intervalo de tiempo $t \in [t_n, t_{n+1}]$, entonces se verifica la condición:

$$\alpha(s, t) - \widehat{\varphi}_m^h(t) = 0 \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (\text{B1.61})$$

Derivando en el tiempo la ecuación (B1.61) se tiene:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{\varphi}_m^h(t)}{\partial t} = 0$$

donde $\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \widehat{\mathbf{t}}^{(m)}$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \mathbf{V}^{pared}$, por lo que la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\widehat{\mathbf{V}}_m^{rel} = \frac{\partial \widehat{\varphi}_m^h(t)}{\partial t} - \mathbf{V}^{pared} = \dot{s} \widehat{\mathbf{t}}^{(m)} \quad (\text{B1.62})$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (B1.62) por el vector unitario $\widehat{\mathbf{n}}^{(m)}$, se deduce que:

$$\widehat{\mathbf{V}}_{N_m}^{rel} = \widehat{\mathbf{V}}_m^{rel} \cdot \widehat{\mathbf{n}}^{(m)} = \dot{s} \widehat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \widehat{\mathbf{n}}^{(m)} = 0$$

□

Sustituyendo las ecuaciones (B1.41), (B1.45a-b) y (B1.59) en (B1.58) se determina la derivada de la componente tangencial de contacto $\mathbf{F}_{T_m}^{cont}$ evaluada en el nodo m :

$$D_\varphi \mathbf{F}_{T_m}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = - \left[\alpha \left| \widehat{\mathbf{V}}_{T_m}^{rel} \right|^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Delta t_{n+1}} + k \widehat{\mathbf{V}}_{N_m}^{rel} \right) \widetilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* - k \text{sign}(\widehat{\mathbf{V}}_{T_m}^{rel}) \left| \widehat{\mathbf{V}}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \widetilde{\mathbf{F}}_{T_m}^* \right] \widehat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \Delta\varphi_m^h - \text{sign}(\widehat{\mathbf{V}}_{T_m}^{rel}) \left| \widehat{\mathbf{V}}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \widehat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{p=1}^{n_p} \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{fric} + \widetilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{geo} + \widetilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \Delta\varphi_p^h \quad (\text{B1.63})$$

donde $\widehat{\mathbf{V}}_{N_m}^{rel} = \widehat{\mathbf{V}}_m^{rel} \cdot \widehat{\mathbf{n}}^{(m)}$. Las matrices \mathbf{K}^{fric} , $\widetilde{\mathbf{K}}^{geo}$ y $\widetilde{\mathbf{K}}^{mat}$ están definidas en las ecuaciones (B1.42a-c) y (B1.43a-c).

Por otro lado, la derivada del vector de fuerzas externas \mathbf{F}_m^{ext} se puede escribir como:

$$D_\varphi \mathbf{F}_m^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \sum_{p=1}^{n_p} \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \Delta\varphi_p^h \quad (\text{B1.64})$$

en el que combinando las ecuaciones (B1.21), (B1.45a-b), (B1.53), (B1.56), (B1.60), (B1.63) y (B1.64) se llega a la definición de la matriz $\mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} = & \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{geo} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{mat} \right) - k \delta_{mp} \left[\text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* + \mathbf{F}_{T_m}^* \right] \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - \\ & - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{fric} + \tilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{geo} + \tilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{mat} \right) - \\ & - \delta_{mp} \left[\frac{\alpha}{\Delta t_{n+1}} \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^{\alpha-1} \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* + k \left(\mathbf{F}_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{T_m}^* \right) \right] \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \quad (\text{B1.65}) \end{aligned}$$

donde $\delta_{mp} = 1$ si $m = p$ y $\delta_{mp} = 0$ en caso contrario. La ecuación (B1.65) describe a la matriz $\mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont}$ en coordenadas globales. No obstante, esta matriz se puede reescribir en coordenadas locales por medio de una transformación de cambio de base (ver figura B1.1):

$$\mathbf{K}_{LOC(m)(p)}^{cont} = \mathbf{Q}_{(m)}^T \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \mathbf{Q}_{(m)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (\text{B1.66})$$

donde $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}_1 & \hat{\mathbf{n}}_1 \\ \hat{\mathbf{t}}_2 & \hat{\mathbf{n}}_2 \end{pmatrix}$. Combinando las ecuaciones (B1.65) y (B1.66) se obtienen las componentes de la matriz $\mathbf{K}_{LOC(m)(p)}^{cont}$ escritas en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T_m T_p}^{cont} = & - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{fric} + \tilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{geo} + \tilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - \\ & - \delta_{mp} \left[\frac{\alpha}{\Delta t_{n+1}} \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^{\alpha-1} \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* + k \left(\mathbf{F}_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{T_m}^* \right) \right] \quad (\text{B1.67a}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{T_m N_p}^{cont} = - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{fric} + \tilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{geo} + \tilde{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \quad (\text{B1.67b})$$

$$\mathbf{K}_{N_m T_p}^{cont} = \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{geo} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - k \delta_{mp} \left[\text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{N_m}^* + \mathbf{F}_{T_m}^* \right] \quad (\text{B1.67c})$$

$$\mathbf{K}_{N_m N_p}^{cont} = \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{geo} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \quad (\text{B1.67d})$$

B1.2 Linealización de la formulación de mixta.

El vector de fuerzas internas y externas se evalúan siguiendo la misma metodología que para el método de Galerkin pero corrigiendo el tensor gradiente de deformaciones y modificando la ecuación constitutiva. Como consecuencia de ello, la matriz de rigidez resultante difiere considerablemente de la obtenida en la formulación de Galerkin.

B1.2.1 Linealización de las fuerzas internas.

En el caso de la formulación mixta, la contribución de las fuerzas internas a la matriz de rigidez se obtiene a partir de la expresión:

$$G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}}(\varphi^h, \vartheta^h) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.68})$$

en el que $\vartheta^h = \vartheta^h(\varphi^h)$ y $\pi^h = \pi^h(\varphi^h)$, por lo que la ecuación (B1.68) se puede reescribir como:

$$G^{int}(\varphi^h, \boldsymbol{\eta}^h) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\bar{J}^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}(\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\varphi^h) : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \quad (\text{B1.69})$$

Aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre esta expresión se tiene:

$$D_\varphi G^{int} = \int_{\Omega_0} \left(D_\varphi \left(\frac{\bar{J}^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \left(\frac{\bar{J}^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} D_\varphi \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \left(\frac{\bar{J}^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot D_\varphi \bar{\mathbf{S}} \right) : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \quad (\text{B1.70})$$

El cálculo del primer término se obtiene derivando las variables relativas a la deformación volumétrica $J^h = \det(\mathbf{F})$ y $\bar{J}^h = \exp(\vartheta^h)$, mientras que el segundo y tercer término equivalen en principio al término geométrico y material de la formulación de Galerkin.

La derivada de J^h se obtiene haciendo uso de la regla de la cadena:

$$D_\varphi J^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \det(\mathbf{F}) : D_\varphi \mathbf{F}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.71})$$

La primera derivada corresponde a la derivación del determinante de un tensor de segundo orden que, concretamente, se calculó previamente en la ecuación (B1.29). Por tanto, sustituyendo (B1.29) y (B1.5) en (B1.71) se tiene:

$$D_\varphi J^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = J^h \text{DIV}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.72})$$

donde

$$\text{DIV}(\cdot) = \mathbf{F}^{-T} : \text{GRAD}(\cdot) = \mathbf{g}^{-1} : \nabla(\cdot) = \text{div}(\cdot) \quad (\text{B1.73})$$

Por otro lado, la derivada de \bar{J}^h se calcula como:

$$D_\varphi \bar{J}^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi [\exp(\vartheta^h)](\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \exp(\vartheta^h) D_\varphi \vartheta^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.74})$$

A partir de las ecuaciones (4.43a) y (B1.72) se comprueba fácilmente que:

$$D_\varphi \vartheta^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \text{DIV}(\Delta\varphi^h) d\Omega = \bar{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.75})$$

En virtud de las ecuaciones (B1.73) y (B1.75) es inmediato comprobar la igualdad $\bar{\text{DIV}}(\cdot) = \overline{\text{div}}(\cdot)$. Por otro lado, sustituyendo la ecuación (B1.75) en (B1.74) se tiene:

$$D_\varphi \bar{J}^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \bar{J}^h \bar{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.76})$$

En el que haciendo uso de la regla de la cadena y combinando las ecuaciones (B1.72) y (B1.76) se llega a la expresión:

$$D_\varphi \left[\left(\frac{\bar{J}^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \right] (\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left(\frac{\bar{J}^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} (\bar{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \quad (\text{B1.77})$$

Utilizando esta expresión, el primer término de la ecuación (B1.70) se calcula como:

$$\int_{\Omega_0} D_\varphi \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0} \frac{\Theta}{n_{\text{dim}}} [\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)] \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.78})$$

donde por simplicidad en la notación se define la variable $\Theta = \left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}}$.

El segundo término de la ecuación (B1.70) se obtiene a partir de la derivada del tensor gradiente de deformaciones corregido $\bar{\mathbf{F}}$, la cual se obtiene derivando la expresión (4.33):

$$D_\varphi \bar{\mathbf{F}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \left[\left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \right] (\varphi^h; \Delta\varphi^h) \mathbf{F} + \left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} D_\varphi \mathbf{F}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.79})$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.33), (B1.5) y (B1.77) en (B1.79) se llega a la expresión:

$$D_\varphi \bar{\mathbf{F}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \bar{\mathbf{F}} + \left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.80})$$

Con base a este resultado, se define el operador gradiente deformaciones corregido como:

$$\overline{\text{GRAD}}(\cdot) = \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\cdot) - \text{DIV}(\cdot)) \bar{\mathbf{F}} + \left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \text{GRAD}(\cdot) \quad (\text{B1.81a})$$

$$\overline{\nabla}(\cdot) = \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\cdot) - \text{div}(\cdot)) \mathbf{g} + \left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \nabla(\cdot) \quad (\text{B1.81b})$$

en el que se ha considerado la relación $\overline{\text{GRAD}}(\cdot) = \overline{\nabla}(\cdot) \cdot \bar{\mathbf{F}}$ combinada con la expresión (4.33). Por otro lado, es fácil comprobar que las ecuaciones (B1.81a-b) se relacionan entre si a través del tensor gradiente deformaciones corregido $\overline{\text{GRAD}}(\cdot) = \overline{\nabla}(\cdot) \cdot \bar{\mathbf{F}}$.

A partir de la ecuación (B1.80), el segundo término de la ecuación (B1.70) se calcula como:

$$\int_{\Omega_0} \Theta D_\varphi \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0} \frac{\Theta}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega + \int_{\Omega_0} \Theta^2 \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.82})$$

en el que $\Theta = \left(\frac{J^h}{J^h}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}}$.

Por último, el tercer término de la ecuación (B1.70) se calcula a partir de la derivada del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff corregido $\bar{\mathbf{S}}$ que se obtiene derivando las expresiones:

$$\bar{\mathbf{S}} = (\pi^h - \bar{p}^h) \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \mathbf{S} \quad (\text{B1.83a})$$

$$\bar{p}^h = \frac{1}{n_{\text{dim}}} \mathbf{S} : \bar{\mathbf{C}} \quad (\text{B1.83b})$$

donde \mathbf{S} es el tensor de tensiones sin corregir. Derivando la ecuación (B1.83a) se tiene que:

$$D_\varphi \bar{\mathbf{S}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \pi^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \bar{\mathbf{C}}^{-1} - D_\varphi \bar{p}^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \bar{\mathbf{C}}^{-1} + (\pi^h - \bar{p}^h) D_\varphi \bar{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) + D_\varphi \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.84})$$

en el que la derivada de \bar{p}^h se obtiene a partir de la ecuación (B1.83b):

$$D_\varphi \bar{p}^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{n_{\text{dim}}} (D_\varphi \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) : \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{S} : D_\varphi \bar{\mathbf{C}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h)) \quad (\text{B1.85})$$

El desarrollo de la ecuación (B1.85) implica calcular previamente la derivada del tensor derecho de Cauchy $\bar{\mathbf{C}}$. En particular, haciendo uso de las ecuaciones (B1.80) y (B1.81a) se llega a la expresión:

$$D_\varphi \bar{\mathbf{C}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \overline{\text{GRAD}}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.86})$$

Por otro lado, la derivada del tensor de tensiones sin corregir se obtiene a través de la expresión:

$$D_\varphi \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{\mathbf{E}}} : D_\varphi \bar{\mathbf{E}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.87})$$

La primera derivada corresponde al tensor constitutivo tangente $\bar{\Xi}^{ep} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{\mathbf{E}}}$ descrito en el capítulo 3. Es importante destacar que la metodología seguida en la obtención del tensor $\bar{\Xi}^{ep}$ es similar a la empleada en la formulación de Galerkin. No obstante, debe tenerse muy presente (sobre todo en la implementación del código) que el tensor $\bar{\Xi}^{ep}$ se obtiene a partir del tensor de tensiones sin corregir, por lo que en este punto se pierde el paralelismo seguido con la formulación de Galerkin.

La derivada del tensor de deformaciones de Green-Lagrange se obtiene a partir de la ecuación (B1.86):

$$D_\varphi \bar{\mathbf{E}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{2} D_\varphi \bar{\mathbf{C}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{GRAD}}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) \right) \quad (\text{B1.88})$$

Combinando las ecuaciones (B1.87) y (B1.88), y teniendo en cuenta la simetría menor del tensor constitutivo tangente $\bar{\Xi}^{ep}$, la derivada del tensor de tensiones sin corregir esta dada por la expresión:

$$D_\varphi \mathbf{S}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.89})$$

Sustituyendo las ecuación (B1.86) y (B1.89) en (B1.85) y teniendo en cuenta la simetría del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff sin corregir \mathbf{S} se obtiene la derivada de la variable \bar{p}^h :

$$D_\varphi \bar{p}^h(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} + 2\mathbf{S} \right) : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.90})$$

Por otro lado, la ecuación (B1.90) constituye el punto de partida para la evaluación de la derivada de π^h , la cual se obtiene derivando la ecuación (4.43b) en el elemento e :

$$D_\varphi \pi^h(\varphi_{(e)}^h; \Delta\varphi_{(e)}^h) = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) D_\varphi \bar{p}^h(\varphi_{(e)}^h; \Delta\varphi_{(e)}^h) d\Omega \quad (\text{B1.91})$$

En el que sustituyendo (B1.90) en (B1.91) se puede reescribir como:

$$D_\varphi \pi^h(\varphi_{(e)}^h; \Delta\varphi_{(e)}^h) = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} + 2\mathbf{S} \right) : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi_{(e)}^h) d\Omega \quad (\text{B1.92})$$

El tercer término de la ecuación (B1.84) se obtiene a partir de la derivada del tensor $\bar{\mathbf{C}}^{-1}$, el cual se calcula derivando la relación $\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{1}$:

$$D_\varphi \bar{\mathbf{C}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \bar{\mathbf{C}} \cdot D_\varphi \bar{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \mathbf{0} \quad (\text{B1.93})$$

Sustituyendo en ella la ecuación (B1.86) se tiene:

$$D_\varphi \bar{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -\bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \left(\overline{\text{GRAD}}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) \right) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \quad (\text{B1.94})$$

Por último, el cuarto término de (B1.84) se determinó previamente en la expresión (B1.89).

Teniendo en cuenta la relación $\text{DIV}(\cdot) = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\cdot)$ y combinando las ecuaciones (B1.73), (B1.84), (B1.89), (B1.90), (B1.92) y (B1.94), el tercer término de la ecuación (B1.70) se escribe como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot D_\varphi \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega &= \int_{\Omega_0} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \text{DIV}(\eta^h) \left(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} + 2\mathbf{S} \right) : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega_0} \Theta(\pi^h - \bar{p}^h) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \text{SIM}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h)) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_0} \Theta \text{GRAD}(\eta^h) : \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi^h) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B1.95})$$

en el que $\Theta = \left(\frac{J^h}{J^k} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}}$ y donde se define el operador $\text{SIM}(\cdot)$ como $\text{SIM}(\cdot) = \frac{1}{2} [(\cdot) + (\cdot)^T]$.

El primer término de la ecuación (B1.95) se desarrolla a partir de la ecuación (B1.91). El resultado se formula en el siguiente lema.

Lema B1.3 *La derivada de la variable π^h en el elemento e verifica la igualdad:*

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \overline{\text{DIV}}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.96})$$

DEMOSTRACIÓN: Haciendo uso de la relación (B1.91) se tiene que:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} \left(\bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) D_\varphi \bar{p}^h d\Omega \right) \text{DIV}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.97})$$

La ecuación (B1.97) es un escalar, por lo que se puede reescribir como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} \left(\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) d\Omega \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \right) \text{DIV}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.98})$$

Por otro lado, la integral interior en el término de la derecha de la ecuación (B1.98) y la matriz $\mathbf{H}_{(e)}^{-1}$ son valores fijos e independientes de la coordenada material \mathbf{X} , por lo que pueden salir fuera de la integral exterior:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) d\Omega \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-T} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \text{DIV}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.99})$$

Un argumento similar permite introducir la segunda integral de la derecha dentro de la primera, por lo que la ecuación (B1.99) se puede escribir como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \left(\bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-T} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \text{DIV}(\eta^h) d\Omega \right) d\Omega \quad (\text{B1.100})$$

Haciendo uso de la definición (B1.75) y teniendo en cuenta la simetría de la matriz $\mathbf{H}_{(e)}^{-1}$, la ecuación (B1.100) se puede reescribir como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \overline{\text{DIV}}(\eta^h) d\Omega$$

□

A partir del lema B1.3 y de la ecuación (B1.90), el primer término de la ecuación (B1.95) se reescribe como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \overline{\text{DIV}}(\eta^h) \left[(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} + 2\mathbf{S}) : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi_{(e)}^h) \right] d\Omega \quad (\text{B1.101})$$

Substituyendo las ecuaciones (B1.78), (B1.81a), (B1.82), (B1.95) y (B1.101) en la ecuación (B1.70) permiten reescribir a esta última como:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \sum_{k=1}^7 B_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.102})$$

donde se define

$$B_1 = \int_{\Omega_0} \Theta^2 \text{GRAD}(\eta^h) : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{S}} d\Omega \quad (\text{B1.103a})$$

$$B_2 = \int_{\Omega_0} \Theta^2 \text{GRAD}(\eta^h) : \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.103b})$$

$$B_3 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\eta^h) - \text{DIV}(\eta^h)) \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.103c})$$

$$B_4 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} (\overline{\text{DIV}}(\eta^h) - \text{DIV}(\eta^h)) (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) (\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h) d\Omega \quad (\text{B1.103d})$$

$$B_5 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\eta^h) - \text{DIV}(\eta^h)) \Theta \bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \Theta \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} d\Omega \quad (\text{B1.103e})$$

$$B_6 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{DIV}}(\eta^h) - \text{DIV}(\eta^h)) \text{DIV}(\Delta\varphi^h) d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \text{DIV}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.103f})$$

$$B_7 = \int_{\Omega_0} 2\Theta^2 (\bar{p}^h - \pi^h) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \text{SIM}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h)) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.103g})$$

Alternativamente, la ecuación (B1.102) puede formularse en términos de las variables espaciales. Aplicando el operador *push-forward* sobre el tensor de tensiones $\bar{\mathbf{S}}$ y sobre el tensor constitutivo tangente $\bar{\Xi}^{ep}$:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \bar{\phi}_*(\bar{\mathbf{S}}) = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T \\ \bar{\mathbf{c}}_{ijkl}^{ep} &= \left[\bar{\phi}_*(\bar{\Xi}^{ep}) \right]_{ijkl} = \bar{\mathbf{F}}_{ia} \bar{\mathbf{F}}_{ia} \bar{\mathbf{F}}_{kc} \bar{\mathbf{F}}_{ld} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta las relaciones $\left(\frac{J^h}{J^k}\right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \text{GRAD}(\cdot) = \nabla(\cdot) \cdot \bar{\mathbf{F}}$ y $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{F}}$, se pueden reescribir los términos B_k como:

$$B_1 = \int_{\Omega_0} \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) : \nabla(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} d\Omega \quad (\text{B1.104a})$$

$$B_2 = \int_{\Omega_0} \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.104b})$$

$$B_3 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \\ + \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)) \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.104c})$$

$$B_4 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)) (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) (\mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h) d\Omega \quad (\text{B1.104d})$$

$$B_5 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)) \mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \nabla(\Delta\varphi^h) : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} d\Omega \quad (\text{B1.104e})$$

$$B_6 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)) \text{div}(\Delta\varphi^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \quad (\text{B1.104f})$$

Por otro lado, a partir de la relación $\bar{\mathbf{C}}^{-1} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-T}$, el cálculo del término B_7 en función de las variables espaciales se lleva a cabo a través de la relación:

$$\Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot (\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) + \text{GRAD}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{F}}) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) = \\ = \Theta \mathbf{g}^{-1} (\mathbf{g} \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} + \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \text{GRAD}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}^{-1} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} \\ = \mathbf{g}^{-1} (\mathbf{g} \cdot \nabla(\Delta\varphi^h) + \nabla^T(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}^{-1} : \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)$$

Por lo que, teniendo en cuenta que los tensores métricos \mathbf{g} y \mathbf{g}^{-1} coinciden con el tensor identidad $\mathbf{1}$, el término B_7 se escribe como:

$$B_7 = \int_{\Omega_0} (\bar{p}^h - \pi^h) [\nabla(\Delta\varphi^h) + \nabla^T(\Delta\varphi^h)] : \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \quad (\text{B1.104g})$$

Teniendo en cuenta que φ^h y $\boldsymbol{\eta}^h$ son elementos del espacio de funciones de prueba \mathcal{V}^h , haciendo uso de las ecuaciones (B1.12a-b) y (B1.13) se reescribe la ecuación (B1.70) en términos de las fuerzas internas:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h), \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) = \hat{\boldsymbol{\eta}}^h : D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.105})$$

donde

$$D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) : \Delta\hat{\varphi}^h \quad (\text{B1.106})$$

En el que las matrices \mathbf{K}_k se obtienen a partir de los términos B_k sustituyendo las ecuaciones (B1.12a-b) y (B1.13) en (B1.103a-g):

$$[\mathbf{K}_1]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \Theta^2 \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \bar{S}_{jk} d\Omega \quad (\text{B1.107a})$$

$$[\mathbf{K}_2]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \Theta^2 \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{F}_{ir} \bar{\Xi}_{rjsk}^{ep} \bar{F}_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega \quad (\text{B1.107b})$$

$$[\mathbf{K}_3]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \Theta \left(\bar{D}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{F}_{ik} + \bar{D}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_j} \bar{F}_{lk} \right) \bar{S}_{kj} d\Omega \quad (\text{B1.107c})$$

$$[\mathbf{K}_4]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} \bar{D}_{im} \bar{D}_{lp} \left(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h \right) d\Omega \quad (\text{B1.107d})$$

$$[\mathbf{K}_5]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \Theta \left(\bar{D}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_d} \bar{C}_{ab} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \bar{F}_{lc} + \bar{D}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_b} \bar{F}_{ia} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \bar{C}_{cd} \right) d\Omega \quad (\text{B1.107e})$$

$$[\mathbf{K}_6]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \Theta (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\bar{D}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_s} \bar{F}_{sl}^{-1} + \bar{D}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \bar{F}_{ri}^{-1} \right) d\Omega \quad (\text{B1.107f})$$

$$[\mathbf{K}_7]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \Theta^2 (\bar{p}^h - \pi^h) \bar{F}_{ia} \bar{C}_{ab}^{-1} \left(\bar{F}_{lb} \frac{\partial N_p}{\partial X_c} + \bar{F}_{lc} \frac{\partial N_p}{\partial X_b} \right) \bar{C}_{cd}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_d} d\Omega \quad (\text{B1.107g})$$

donde la matriz $\bar{\mathbf{D}}$ se define a partir del operador $\bar{\text{DIV}}(\cdot)$ como:

$$\bar{D}_{im} = \left(\Theta \bar{F}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \right) - \Theta \bar{F}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \quad (\text{B1.108})$$

en el que el operador $\bar{(\cdot)}$ está dado por:

$$\bar{(\cdot)} \Big|_{(e)} = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{(\cdot)} d\Omega \quad (\text{B1.109})$$

Alternativamente, las ecuaciones (B1.107a-g) se pueden reescribir en términos de las variables espaciales. Combinando la relación $\left(\frac{\bar{J}^h}{\bar{J}^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \text{GRAD}(\cdot) = \nabla(\cdot) \cdot \bar{\mathbf{F}}$ con las expresiones (B1.12a-b), (B1.13) y (B1.104a-g) se tiene:

$$[\mathbf{K}_1]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \bar{\tau}_{kj} d\Omega \quad (\text{B1.110a})$$

$$[\mathbf{K}_2]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \bar{c}_{ijkl}^{ep} d\Omega \quad (\text{B1.110b})$$

$$[\mathbf{K}_3]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \left[\left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \bar{\tau}_{lj} \right] d\Omega \quad (\text{B1.110c})$$

$$[\mathbf{K}_4]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) (\mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h) d\Omega \quad (\text{B1.110d})$$

$$[\mathbf{K}_5]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ablj}^{ep} + \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ijab}^{ep} \right] d\Omega \quad (\text{B1.110e})$$

$$[\mathbf{K}_6]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) \left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} + \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (\text{B1.110f})$$

$$[\mathbf{K}_7]_{imlp} = \int_{\Omega_0} (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{il} + \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) d\Omega \quad (\text{B1.110g})$$

B1.2.2 Linealización de las fuerzas externas.

Al igual que para la formulación de Galerkin, el vector de fuerzas volumétricas es independiente de la ecuación de movimiento φ , por lo que su derivada es nula. Por tanto, la derivada del vector de fuerzas externas se reduce a derivar el vector de fuerzas de contacto:

$$D_\varphi \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.111})$$

La fuerza de contacto de los nodos que se desplazan sobre la pared del molde está dada por la expresión (ver figura B1.1):

$$\mathbf{F}^{cont} = \mathbf{F}_N^{cont} \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{F}_T^{cont} \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{B1.112})$$

en el que, siguiendo el paralelismo con la formulación de Galerkin, las componentes normal y tangencial se definen como:

$$\mathbf{F}_N^{cont} = \mathbf{F}_N^* = \mathbf{F}^* \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B1.113a})$$

$$\mathbf{F}_T^{cont} = -\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_T^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_T^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_N^* = -\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{t}}) \left| \hat{\mathbf{V}}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{t}} \right|^\alpha (\tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{B1.113b})$$

siendo el vector \mathbf{F}^* la diferencia entre las fuerzas internas y las fuerzas de volumen $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{vol}$ para el caso de la formulación mixta, $\hat{\mathbf{V}}^{rel}$ la velocidad relativa a las paredes del molde definida sobre los nodos y $\tilde{\mathbf{F}}^*$ la diferencia entre las fuerzas internas y las fuerzas de volumen modificadas por el coeficiente de fricción dinámica $\tilde{\mathbf{F}}^* = \tilde{\mathbf{F}}^{int} - \tilde{\mathbf{F}}^{vol}$:

$$\tilde{\mathbf{F}}^{int} = \int_{\Omega_0} \mu_d \left(\frac{\bar{J}^h}{J} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(N_p) d\Omega \quad (\text{B1.114a})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{vol} = \int_{\Omega_0} \mu_d \rho_0 \mathbf{B} N_p d\Omega \quad (\text{B1.114b})$$

Linealización del vector de fuerzas internas y volumétricas modificado.

Al igual que para la formulación de Galerkin, la derivada del vector \mathbf{F}^* coincide con la derivada del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} , cuyo cálculo se describió en la sección anterior:

$$D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) : \Delta\hat{\varphi}^h \quad (\text{B1.115})$$

en el que $\vartheta^h = \vartheta^h(\varphi^h)$ y $\pi^h = \pi^h(\varphi^h)$ y donde las matrices \mathbf{K}_k se definieron en las ecuaciones (B1.107a-g) y (B1.110a-g).

Análogamente, la derivada del vector $\tilde{\mathbf{F}}^*$ se puede obtener a partir de un funcional sin sentido físico \tilde{G}^* que se define como:

$$\tilde{G}^*(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h) = \tilde{G}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h) - \tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h) \quad (\text{B1.116a})$$

$$\tilde{G}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\vartheta^h)) \left(\frac{\bar{J}(\vartheta^h)}{J(\varphi^h)} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}}(\varphi^h, \vartheta^h) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.116b})$$

$$\tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\vartheta^h)) \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta^h d\Omega \quad (\text{B1.116c})$$

La derivada del funcional \tilde{G}^* se descompone en dos términos, uno correspondiente a las fuerzas internas y otro correspondiente a las fuerzas volumétricas:

$$D_\varphi \tilde{G}^*(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \tilde{G}^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) - D_\varphi \tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) \quad (B1.117)$$

El primero se calcula aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre el funcional \tilde{G}^{int} definido en la ecuación (B1.116b):

$$\begin{aligned} D_\varphi \tilde{G}^{int} &= \int_{\Omega_0} D_\varphi \mu_d \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_0} \mu_d \left[D_\varphi \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} D_\varphi \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot D_\varphi \bar{\mathbf{S}} \right] : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \end{aligned} \quad (B1.118)$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$D_\varphi \tilde{G}^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \bar{B}_{int}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + \sum_{k=1}^7 \tilde{B}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (B1.119)$$

El primer término corresponde a la derivada del coeficiente de fricción dinámica μ_d , el cual depende de la densidad. Por lo que haciendo uso de la regla de la cadena se llega a la expresión:

$$D_\varphi \mu_d(\eta(\vartheta^h(\varphi^h)); \Delta\varphi^h) = \frac{d\mu_d}{d\eta} D_\varphi \eta(\vartheta^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) \quad (B1.120)$$

Por otro lado, en el caso de la formulación mixta, la ecuación de continuidad está dada por la expresión:

$$\eta = \frac{\eta_0}{J^h} \quad (B1.121)$$

Derivando la ecuación (B1.121) y haciendo uso de la ecuación (B1.76) se tiene:

$$D_\varphi \eta(\vartheta^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = -\eta \overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) \quad (B1.122)$$

Y sustituyendo (B1.122) en (B1.120) se obtiene la derivada del coeficiente de fricción dinámica μ_d :

$$D_\varphi \mu_d(\eta(\vartheta^h(\varphi^h)); \Delta\varphi^h) = -\eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) \quad (B1.123)$$

De donde se deduce que el primer término de la ecuación (B1.118) se puede escribir como:

$$\bar{B}_{int}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \Theta \overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (B1.124)$$

en el que $\Theta = \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}}$.

El segundo término de la ecuación (B1.118) se obtiene derivando el término $\left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}}$, cuya derivada se determinó previamente en la ecuación (B1.77):

$$\int_{\Omega_0} \mu_d D_\varphi \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\Theta}{n_{dim}} [\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)] \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (B1.125)$$

El tercer término de la ecuación (B1.118) corresponde a la derivada del tensor gradiente de deformaciones corregido $\bar{\mathbf{F}}$. Sustituyendo las ecuaciones (B1.80) y (B1.81a) en (B1.118) se tiene:

$$\int_{\Omega_0} \mu_d \Theta D_\varphi \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\Theta}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta \varphi^h) - \text{DIV}(\Delta \varphi^h)) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta^2 \text{GRAD}(\Delta \varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

(B1.126)

El último término de la ecuación (B1.118) se calcula a partir de la derivada del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff corregido $\bar{\mathbf{S}}$. Combinando las ecuaciones (B1.73), (B1.84), (B1.89), (B1.90) y (B1.94) se llega a la expresión:

$$\int_{\Omega_0} \mu_d \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot D_\varphi \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{1}{n_{\text{dim}}} \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) (\bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\Xi}}^{ep} + 2\mathbf{S}) : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta \varphi^h) d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta (\pi^h - \bar{p}^h) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \text{SIM}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta \varphi^h)) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) : \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Xi}}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta \varphi^h) d\Omega$$

(B1.127)

en el que $\text{SIM}(\cdot) = \frac{1}{2} [(\cdot)^T + (\cdot)]$.

Hasta el momento, el desarrollo de la ecuación (B1.118) ha seguido un paralelismo total con el desarrollo llevado a cabo en la formulación de Galerkin, para la cual se vio que el producto del coeficiente de fricción por la derivada del integrando de las fuerzas internas \mathbf{F}^{int} era igual al producto del coeficiente de fricción por el integrando de las matrices \mathbf{K}^{geo} y \mathbf{K}^{mat} . Sin embargo, esta afirmación es falsa en el caso de la formulación mixta por no ser aplicable el lema B1.3 en el cálculo del primer término de la ecuación (B1.127). En su lugar, se hace uso del siguiente lema.

Lema B1.4 *El coeficiente de fricción dinámica μ_d por la derivada de la variable π^h en el elemento e verifica la igualdad:*

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \overline{\mu_d \overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h)} d\Omega$$

(B1.128)

DEMOSTRACIÓN: Haciendo uso de la relación (B1.91) se tiene que:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} \left(\bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) D_\varphi \bar{p}^h d\Omega \right) \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

(B1.129)

La ecuación (B1.129) es un escalar, por lo que se puede reescribir como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} \left(\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) d\Omega \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \right) \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

(B1.130)

Por otro lado, la integral interior en el término de la derecha y la matriz $\mathbf{H}_{(e)}^{-1}$ son valores fijos e independientes de la coordenada material \mathbf{X} , por lo que pueden salir fuera de la integral exterior:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) d\Omega \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-T} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \quad (\text{B1.131})$$

Un argumento similar permite introducir la segunda integral de la derecha dentro de la primera, por lo que la ecuación (B1.131) se puede escribir como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \left(\bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-T} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \right) d\Omega \quad (\text{B1.132})$$

Teniendo en cuenta la simetría de la matriz $\mathbf{H}_{(e)}^{-1}$, la ecuación (B1.132) se puede reescribir como:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h \overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

donde se define

$$\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \mu_d \text{DIV}(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.133})$$

□

Por tanto, a partir del lema B1.4 y de las ecuaciones (B1.90) y (B1.127) se tiene:

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} \mu_d D_\varphi \pi^h \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega = \int_{\Omega_0^{(e)}} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) \left[(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} + 2\mathbf{S}) : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\text{GRAD}}(\Delta\varphi_{(e)}^h) \right] d\Omega \quad (\text{B1.134})$$

Combinando las ecuaciones (B1.81a), (B1.119), (B1.125), (B1.126), (B1.127) y (B1.134) se determinan los términos B_k :

$$B_1 = \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta^2 \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{S}} d\Omega \quad (\text{B1.135a})$$

$$B_2 = \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta^2 \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) : \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.135b})$$

$$B_3 = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) \Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.135c})$$

$$B_4 = \int_{\Omega_0} (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \left(\frac{1}{n_{\text{dim}}^2} \bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} + \frac{2}{n_{\text{dim}}} \bar{p}^h \right) d\Omega \quad (\text{B1.135d})$$

$$B_5 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) \Theta \bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \Theta \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} d\Omega \quad (\text{B1.135e})$$

$$B_6 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \mu_d \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) \text{DIV}(\Delta\varphi^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \text{DIV}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.135f})$$

$$B_7 = \int_{\Omega_0} 2\mu_d \Theta^2 (\bar{p}^h - \pi^h) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \text{SIM} \left(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \right) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.135g})$$

Siguiendo la misma metodología que para las fuerzas internas (apartado B1.2.1), los términos B_k se reescriben en función de las variables espaciales como:

$$B_1 = \int_{\Omega_0} \mu_d \nabla(\eta^h) : \nabla(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} d\Omega \quad (\text{B1.136a})$$

$$B_2 = \int_{\Omega_0} \mu_d \nabla(\eta^h) : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.136b})$$

$$B_3 = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla(\eta^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\overline{\mu_d \text{div}}(\eta^h) - \mu_d \text{div}(\eta^h)) \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega \quad (\text{B1.136c})$$

$$B_4 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} (\overline{\mu_d \text{div}}(\eta^h) - \mu_d \text{div}(\eta^h)) (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) (\mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h) d\Omega \quad (\text{B1.136d})$$

$$B_5 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\mu_d \text{div}}(\eta^h) - \mu_d \text{div}(\eta^h)) \mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{1}{n_{\text{dim}}} (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \nabla(\Delta\varphi^h) : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} d\Omega \quad (\text{B1.136e})$$

$$B_6 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\mu_d \text{div}}(\eta^h) - \mu_d \text{div}(\eta^h)) \text{div}(\Delta\varphi^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \text{div}(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.136f})$$

$$B_7 = \int_{\Omega_0} \mu_d (\bar{p}^h - \pi^h) [\nabla(\Delta\varphi^h) + \nabla^T(\Delta\varphi^h)] : \nabla(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.136g})$$

Adicionalmente, teniendo en cuenta las expresiones (B1.73) y (B1.75), la ecuación (B1.124) se reescribe como:

$$\bar{B}_{int}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla(\eta^h) d\Omega \quad (\text{B1.137})$$

La derivada del funcional \tilde{G}^{vol} correspondiente a las fuerzas volumétricas se obtiene derivando la ecuación (B1.116c):

$$D_\varphi \tilde{G}^{vol}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \int_{\Omega_0} D_\varphi \mu_d(\eta(\vartheta^h); \Delta\varphi^h) \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta^h d\Omega = \bar{B}_{vol}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.138})$$

Sustituyendo la expresión (B1.123) en (B1.138) se deduce el término B_{vol}^{fric} :

$$\bar{B}_{vol}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta^h d\Omega \quad (\text{B1.139})$$

Combinando las ecuaciones (B1.117), (B1.119) y (B1.138) la derivada del funcional \tilde{G}^* se puede reescribir como:

$$D_\varphi \tilde{G}^*(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \bar{B}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + \sum_{k=1}^7 \tilde{B}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (B1.140)$$

donde

$$\bar{B}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = \bar{B}_{int}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) - \bar{B}_{vol}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) \quad (B1.141)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B1.124) y (B1.139) en (B1.141), el término \bar{B}^{fric} se define como:

$$\bar{B}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) [\Theta \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\eta^h) - \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta^h] d\Omega \quad (B1.142)$$

o en términos de variables espaciales:

$$\bar{B}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) [\bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla(\eta^h) - \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta^h] d\Omega \quad (B1.143)$$

La derivada del vector de fuerzas $\tilde{\mathbf{F}}^*$ se obtiene sustituyendo las ecuaciones (B1.12a-b) y (B1.13) en la ecuación (B1.140) que se reescribe como:

$$D_\varphi \tilde{G}^*(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = \hat{\boldsymbol{\eta}}^h : D_\varphi \tilde{\mathbf{F}}^*(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (B1.144)$$

en el que

$$D_\varphi \tilde{\mathbf{F}}^*(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \left(\bar{\mathbf{K}}^{fric}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) + \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) \right) : \Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}^h \quad (B1.145)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B1.12a-b), (B1.13), (B1.135a-g) y (B1.142) en (B1.144) y comparándola con (B1.145), se deducen las matrices $\bar{\mathbf{K}}^{fric}$ y $\tilde{\mathbf{K}}_k$:

$$[\mathbf{K}_1]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta^2 \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \bar{\mathbf{S}}_{jk} d\Omega \quad (B1.146a)$$

$$[\mathbf{K}_2]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta^2 \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{\mathbf{F}}_{ir} \bar{\Xi}_{rjsk}^{ep} \bar{\mathbf{F}}_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega \quad (B1.146b)$$

$$[\mathbf{K}_3]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \Theta \left(\mu_d \bar{\mathbf{D}}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{\mathbf{F}}_{ik} + \bar{\mathbf{D}}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_j} \bar{\mathbf{F}}_{lk} \right) \bar{\mathbf{S}}_{kj} d\Omega \quad (B1.146c)$$

$$[\mathbf{K}_4]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} \bar{\mathbf{D}}_{im} \bar{\mathbf{D}}_{lp} \left(\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h \right) d\Omega \quad (B1.146d)$$

$$[\mathbf{K}_5]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \Theta \left(\bar{\mathbf{D}}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_d} \bar{\mathbf{C}}_{ab} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \bar{\mathbf{F}}_{lc} + \mu_d \bar{\mathbf{D}}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_b} \bar{\mathbf{F}}_{ia} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \bar{\mathbf{C}}_{cd} \right) d\Omega \quad (B1.146e)$$

$$[\mathbf{K}_6]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \Theta (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\bar{\mathbf{D}}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_s} \bar{\mathbf{F}}_{sl}^{-1} + \mu_d \bar{\mathbf{D}}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \bar{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \right) d\Omega \quad (B1.146f)$$

$$[\mathbf{K}_7]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \Theta^2 (\bar{p}^h - \pi^h) \bar{\mathbf{F}}_{ia} \bar{\mathbf{C}}_{ab}^{-1} \left(\bar{\mathbf{F}}_{lb} \frac{\partial N_p}{\partial X_c} + \bar{\mathbf{F}}_{lc} \frac{\partial N_p}{\partial X_b} \right) \bar{\mathbf{C}}_{cd}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_d} d\Omega \quad (B1.146g)$$

$$[\mathbf{K}]_{imlp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(\Theta \bar{\mathbf{F}}_{ij} \bar{\mathbf{S}}_{jk} \frac{\partial N_m}{\partial X_k} - \rho_0 B_i N_m \right) \left(\Theta \bar{\mathbf{F}}_{rl}^{-1} \frac{\partial N_p}{\partial X_r} \right) d\Omega \quad (B1.146h)$$

donde la matriz $\overline{\mathbf{D}}$ se definió en la ecuación (B1.108), mientras que la matriz $\tilde{\mathbf{D}}$ se define a partir del operador $\overline{\mu_d \text{DIV}(\cdot)}$:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{im} = \left(\overline{\mu_d \Theta \overline{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r}} \right) - \mu_d \Theta \overline{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \quad (\text{B1.147})$$

De la misma forma, las matrices $\overline{\mathbf{K}}^{fric}$ y $\tilde{\mathbf{K}}_k$ se pueden reescribir en términos de las variables espaciales como:

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_1 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \tau_{jk} d\Omega \quad (\text{B1.148a})$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_2 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_j} c_{ijkl}^{ep} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} d\Omega \quad (\text{B1.148b})$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_3 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \left[\mu_d \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} + \left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \bar{\tau}_{lj} \right] d\Omega \quad (\text{B1.148c})$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_4 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} \left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) (\mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h) d\Omega \quad (\text{B1.148d})$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathbf{K}}_5 \right]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ablj}^{ep} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \mu_d \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ijab}^{ep} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B1.148e})$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_6 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) \left[\left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} + \mu_d \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (\text{B1.148f})$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_7 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{il} + \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) d\Omega \quad (\text{B1.148g})$$

$$\left[\overline{\mathbf{K}} \right]_{imlp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(\bar{\tau}_{ij} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} - \rho_0 B_i N_m \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{B1.148h})$$

Contribución de las fuerzas de contacto a la matriz de rigidez.

La derivada del vector de fuerzas de contacto se obtiene aplicado la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta \varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (B1.112):

$$\begin{aligned} D_\varphi \mathbf{F}_m^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) &= D_\varphi \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) \hat{\mathbf{n}}^{(m)} + D_\varphi \mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) \hat{\mathbf{t}}^{(m)} + \\ &+ \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}} D_\varphi \hat{\mathbf{n}}^{(m)}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) + \mathbf{F}_{T_m}^{\text{cont}} D_\varphi \hat{\mathbf{t}}^{(m)}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) \end{aligned} \quad (\text{B1.149})$$

en el que las derivadas de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}^{(m)}$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(m)}$ evaluados en el nodo m se determinaron en el lema B1.1 del apartado B1.1.2.

Al igual que para la formulación de Galerkin, la derivada de la componente normal de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}$ se determina derivando la ecuación (B1.113a):

$$D_\varphi \mathbf{F}_{N_m}^{\text{cont}}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}_m^*(\varphi^h; \Delta \varphi^h) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} + \mathbf{F}_m^* \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{n}}^{(m)}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) \quad (\text{B1.150})$$

Teniendo en cuenta que la derivada del vector de fuerzas volumétricas $\mathbf{F}_m^{\text{vol}}$ es nula, la derivada del vector $\mathbf{F}_m^* = \mathbf{F}_m^{\text{int}} - \mathbf{F}_m^{\text{vol}}$ se determina a partir de la ecuación (B1.106):

$$D_\varphi \mathbf{F}_m^*(\varphi^h; \Delta \varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}_m^{\text{int}}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_{k(m)(p)}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) \cdot \Delta \hat{\varphi}_p^h \quad (\text{B1.151})$$

donde las matrices $[\mathbf{K}_{k(m)(p)}]_{ij} = [\mathbf{K}_k]_{imjp}$ se definieron previamente en las ecuaciones (B1.107a-g) y (B1.110a-g).

Sustituyendo las ecuaciones (B1.45b) y (B1.151) en (B1.150) se determina la derivada de la componente normal de la fuerza de contacto $F_{N_m}^{cont}$ en el nodo m :

$$D_\varphi F_{N_m}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_{k(m)(p)} \cdot \Delta\hat{\varphi}_p^h - k F_{T_m}^* \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \Delta\hat{\varphi}_m^h \quad (\text{B1.152})$$

donde $F_{T_m}^* = \mathbf{F}_m^* \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)}$.

Por otro lado, la derivada de la componente tangencial de la fuerza de contacto $F_{T_m}^{cont}$ se determina derivando la ecuación (B1.113b):

$$D_\varphi F_{T_m}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -D_\varphi \left[\text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \right] (\varphi^h; \Delta\varphi^h) \tilde{F}_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha D_\varphi \tilde{F}_{N_m}^*(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (\text{B1.153})$$

Haciendo uso de la regla de la cadena y de la relación $\frac{d}{dx} (\text{sign}(x) |x|^\alpha) = \alpha |x|^{\alpha-1}$, la ecuación (B1.153) se escribe como:

$$D_\varphi F_{T_m}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -\alpha \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^{\alpha-1} \left[D_\varphi \hat{V}_m^{rel} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} + \hat{V}_m^{rel} \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \right] \tilde{F}_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \left[D_\varphi \tilde{F}_m^* \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} + \tilde{F}_m^* \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \right] \quad (\text{B1.154})$$

Siguiendo un procedimiento completamente similar al de la formulación de Galerkin (ver apartado B1.1.2), combinando las ecuaciones (B1.45a-b), (B1.59), (B1.60), (B1.145) y (B1.154), se llega a la expresión:

$$D_\varphi F_{T_m}^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = - \left[\alpha \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Delta t_{n+1}} + k \hat{V}_{N_m}^{rel} \right) \tilde{F}_{N_m}^* - k \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{F}_{T_m}^* \right] \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \Delta\hat{\varphi}_m^h - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{p=1}^{n_p} \left(\bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{fric} + \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_{k(m)(p)} \right) \cdot \Delta\hat{\varphi}_p^h \quad (\text{B1.155})$$

donde las matrices $\bar{\mathbf{K}}^{fric}$ y $\tilde{\mathbf{K}}_k$ se definieron en las ecuaciones (B1.146a-h) y (B1.148a-h).

Finalmente, escribiendo la derivada del vector de fuerzas externas como:

$$D_\varphi \mathbf{F}_m^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \sum_{p=1}^{n_p} \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \Delta\hat{\varphi}_p^h \quad (\text{B1.156})$$

La matriz $\bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont}$ se define sustituyendo las ecuaciones (B1.45a-b), (B1.149), (B1.152) y (B1.155) en (B1.111) y comparando el resultado con la ecuación (B1.156):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} &= \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_{k(m)(p)} - k \delta_{mp} \left[\text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{F}_{N_m}^* + F_{T_m}^* \right] \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - \\ &- \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{fric} + \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_{k(m)(p)} \right) - \\ &- \delta_{mp} \left[\frac{\alpha}{\Delta t_{n+1}} \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^{\alpha-1} \tilde{F}_{N_m}^* + k \left(F_{N_m}^* - \text{sign}(\hat{V}_{T_m}^{rel}) \left| \hat{V}_{T_m}^{rel} \right|^\alpha \tilde{F}_{T_m}^* \right) \right] \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \otimes \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \quad (\text{B1.157}) \end{aligned}$$

donde $\delta_{mp} = 1$ si $m = p$ y $\delta_{mp} = 0$ en caso contrario.

Al igual que para la formulación de Galerkin, la ecuación $\bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont}$ se puede reescribir en coordenadas locales por medio de una transformación de cambio de base (ver figura B1.1):

$$\bar{\mathbf{K}}_{LOC(m)(p)}^{cont} = \mathbf{Q}_{(m)}^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \mathbf{Q}_{(m)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (\text{B1.158})$$

donde $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}_1 & \hat{\mathbf{n}}_1 \\ \hat{\mathbf{t}}_2 & \hat{\mathbf{n}}_2 \end{pmatrix}$. Combinando las ecuaciones (B1.157) y (B1.158) se obtienen las componentes de la matriz $\bar{\mathbf{K}}_{LOC(m)(p)}^{cont}$ escritas en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{TmTp}^{cont} = & -\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{fric} + \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_{k(m)(p)} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - \\ & -\delta_{mp} \left[\frac{\alpha}{\Delta t_{n+1}} \left| \hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel} \right|^{\alpha-1} \tilde{\mathbf{F}}_{Nm}^* + k \left(\mathbf{F}_{Nm}^* - \text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{Tm}^* \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B1.159a})$$

$$\mathbf{K}_{TmNp}^{cont} = -\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{fric} + \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_{k(m)(p)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \quad (\text{B1.159b})$$

$$\mathbf{K}_{NmTp}^{cont} = \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_{k(m)(p)} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - k \delta_{mp} \left[\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{Nm}^* + \mathbf{F}_{Tm}^* \right] \quad (\text{B1.159c})$$

$$\mathbf{K}_{NmNp}^{cont} = \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_{k(m)(p)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \quad (\text{B1.159d})$$

Capítulo 5

Adaptación a una metodología del tipo lagrangiano actualizado. Remallado automático.

En el capítulo 4 se planteó la forma débil de la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno (ver ecuaciones (4.5) o (4.36a-c)). Estas ecuaciones plantean el equilibrio en la configuración de referencia. En este punto se debe escoger entre plantear una formulación del tipo lagrangiano total, que mantiene fija la configuración de referencia, o del tipo lagrangiano actualizado, la cual actualiza la configuración de referencia. Evidentemente, en ambos casos se resuelve la misma ecuación pero siguiendo una estrategia distinta.

La formulación del modelo siguiendo un esquema lagrangiano total presenta numerosas ventajas. Sin embargo, durante el proceso de compactación se producen grandes deformaciones que pueden ocasionar distorsiones considerables en la malla, lo que supone una limitación importante. En la práctica, la simulación de una secuencia de prensado óptima (aquella que produce una distribución final de densidades lo más uniforme posible) no ocasiona distorsiones importantes. En la medida que el proceso se desvía de la secuencia óptima las distorsiones aumentan, aunque si bien, también es cierto que decrece el interés por los resultados obtenidos para dicha secuencia. No sucede lo mismo durante la fase de transferencia y el transporte de cámaras, donde se producen distorsiones importantes incluso para secuencias óptimas.

Las distorsiones producidas durante el proceso de compactación provocan distribuciones irregulares de las propiedades (densidad, tensiones, etc.) como consecuencia de una mala integración. Al mismo tiempo, pueden producir una violación de las condiciones de contorno cada vez más importante a medida que aumenta la distorsión. Para evitar las distorsiones se dota al modelo de una metodología de

remallado en la cual se actualizan las coordenadas materiales. Esta modificación permite eliminar las distorsiones producidas en la malla sin perder las ventajas que proporciona la formulación lagrangiana del problema. Como se mostrará en la sección 5.1, las modificaciones que se deben realizar sobre el algoritmo son muy simples, puesto que solo requiere actualizar las condiciones iniciales y modificar un número mínimo de ecuaciones.

Posteriormente, en el apartado 5.2, se expone una estrategia de remallado automático. Al contrario de lo que sucede en la simulación de procesos con pequeñas deformaciones en los que una vez generada la nueva malla se reinicializa el cálculo desde el principio [120][78], el propósito aquí es proseguir el cálculo en el punto que se había dejado antes de generar la malla [21][44][53][17]. De hecho, en este trabajo, el objetivo se centra en la generación de mallas óptimas manteniendo invariable dentro de lo posible el número de elementos.

5.1 Descomposición del problema.

Como se vio en el capítulo 3, la configuración deformada Ω_t se relaciona con la configuración de referencia Ω_0 a través de la ecuación de movimiento $\Omega_t = \varphi(\Omega_0, t)$. A partir de ella es posible conocer cualquier propiedad del medio.

Una formulación lagrangiana del problema parte de considerar la ecuación de movimiento en su totalidad $\varphi : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ planteando la ecuación de equilibrio en la configuración de referencia Ω_0 . Esta metodología produce distorsiones indeseables sobre la malla durante la simulación del proceso de compactación. El problema se evita con una formulación del tipo lagrangiano actualizado. Básicamente, el procedimiento consiste en plantear la ecuación de equilibrio en una configuración deformada Ω_{t^*} correspondiente a un instante de tiempo intermedio fijo pero arbitrario $t^* \in (0, t)$. Esta configuración es considerada como la nueva configuración de referencia $\Omega_0^* = \Omega_{t^*}$. En este caso, el movimiento φ puede ser descompuesto en dos movimientos $\varphi_1 : \Omega_0 \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y $\varphi_2 : \Omega_{t^*} \times [t^*, t] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ (ver figura 5.1). El primero es un movimiento fijo que relaciona la configuración de referencia original Ω_0 con la configuración de referencia actualizada Ω_0^* . El segundo relaciona la configuración de referencia actualizada Ω_0^* con la configuración deformada Ω_t . Una vez resuelto el problema en el instante t^* el objetivo es resolver el problema en el instante t sin hacer uso de la ecuación de movimiento φ_1 .

La figura 5.1 muestra dos alternativas para describir el movimiento del cuerpo. Por un lado, considerar el movimiento del cuerpo desde el inicio, o bien, considerar el movimiento del cuerpo como la composición de dos movimientos secuenciales. En consecuencia, el cálculo del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} se puede realizar por dos caminos diferentes, uno a través de la ecuación de movimiento completa φ y

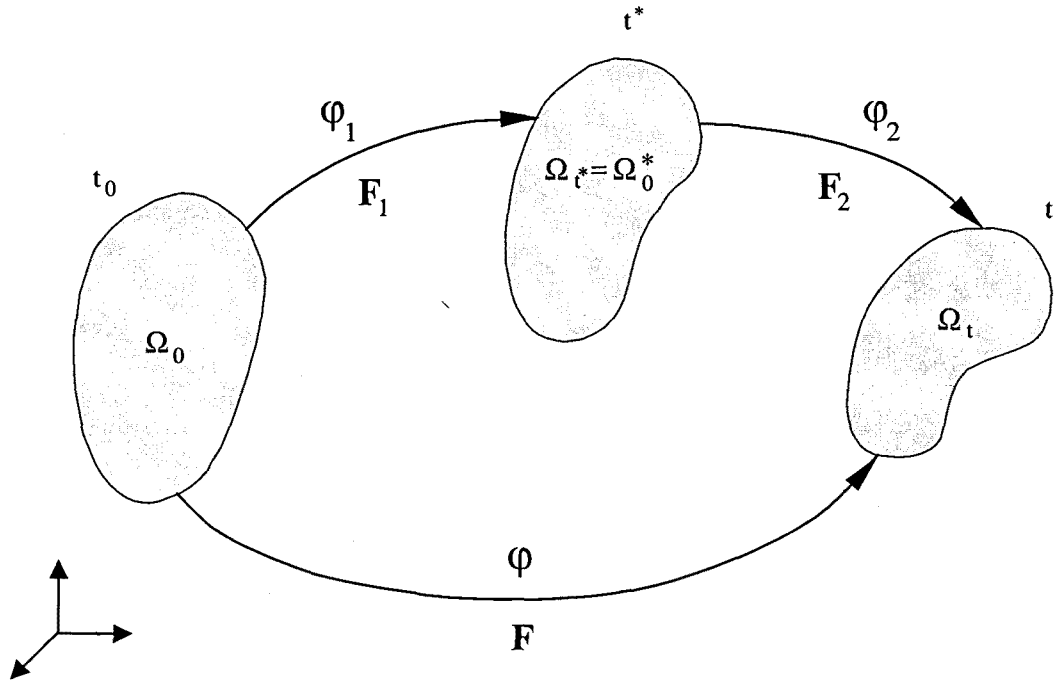


Figura 5.1: Descomposición del movimiento $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$.

otro a través de las ecuaciones de movimiento parciales φ_1 y φ_2 :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \quad (5.1)$$

La ecuación de continuidad (3.16) y la descomposición del tensor gradiente de deformaciones (5.1) permiten reformular la ecuación de continuidad tomando como configuración de referencia la configuración deformada Ω_{t^*} :

$$\eta = \frac{\eta_0}{\det(\mathbf{F})} = \frac{\eta_0}{\det(\mathbf{F}_1) \det(\mathbf{F}_2)} = \frac{\eta_0^*}{\det(\mathbf{F}_2)} \quad (5.2)$$

donde $\eta_0^* = \eta_{t^*}$ es la densidad en el instante t^* . Desde el punto de vista algorítmico, conviene destacar la similitud entre las ecuaciones (3.16) y (5.2), lo que supone una ventaja. Hacer uso de la ecuación (5.2) requiere actualizar la distribución de densidades de referencia y considerar únicamente la ecuación de movimiento φ_2 . El efecto de la ecuación de movimiento φ_1 sobre la conservación de la masa queda implícito en la distribución de densidades η_0^* .

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange \mathbf{E} correspondiente a la ecuación de movimiento φ se definió en la ecuación (3.4a) del capítulo 3. Este tensor de deformación se puede escribir en la configuración de referencia actualizada Ω_0^* aplicando

Ω_0	$\xrightarrow[\phi_1^*]{\phi_{1*}}$	$\Omega_0^* = \Omega_{t^*}$	$\xleftarrow[\phi_2^*]{\phi_{2*}}$	Ω_t
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G})$		$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}_1^{-1})$		$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1})$
$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^T \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{F}_1 - \mathbf{G})$		$\mathbf{E}_1^* = \frac{1}{2}(\mathbf{G}^* - \mathbf{F}_1^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}_1^{-1})$		$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{F}_2^{-1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1})$
$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F}_1^T \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{F}_1)$		$\mathbf{E}_2^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}_2 - \mathbf{G}^*)$		$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{F}_2^{-1})$
$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$		$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*$		$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

Cuadro 5.1: Tensores deformación asociados a las ecuaciones de movimiento φ , φ_1 y φ_2 .

el operador *push-forward* $\phi_{1*}(\cdot)$ asociado a la ecuación de movimiento φ_1 :

$$\mathbf{E}^* = \phi_{1*}(\mathbf{E}) = \mathbf{F}_1^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}_1^{-1}) \quad (5.3)$$

Desde otro punto de vista, las ecuaciones de movimiento φ_1 y φ_2 definen dos nuevos tensores de deformación en la configuración de referencia actualizada Ω_0^* . En particular, el tensor deformación de Almansi correspondiente a la ecuación de movimiento φ_1 se escribe sobre la configuración de referencia actualizada Ω_0^* como:

$$\mathbf{E}_1^* = \frac{1}{2} (\mathbf{G}^* - \mathbf{F}_1^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}_1^{-1}) \quad (5.4)$$

donde \mathbf{G}^* corresponde al tensor métrico de la configuración de referencia actualizada Ω_0^* . Análogamente, el tensor deformación de Green-Lagrange correspondiente a la ecuación de movimiento φ_2 se escribe sobre la configuración de referencia actualizada Ω_0^* como:

$$\mathbf{E}_2^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}_2 - \mathbf{G}^*) \quad (5.5)$$

Los tensores deformación que definen las ecuaciones de movimiento φ , φ_1 y φ_2 en distintas configuraciones se resumen en el cuadro 5.1.

A partir de las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5) se comprueba fácilmente que la descomposición del movimiento en dos movimientos secuenciales ($\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$) conduce a una descomposición aditiva del tensor de deformaciones \mathbf{E}^* :

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^* \quad (5.6)$$

Como se desprende de la ecuación (5.4), el tensor deformación \mathbf{E}_1^* depende únicamente del movimiento anterior al instante t^* . De forma similar, de la ecuación (5.5)

se aprecia como el cálculo del tensor deformación \mathbf{E}_2^* depende única y exclusivamente del movimiento posterior al instante t^* . Por tanto, el cálculo del tensor deformación total \mathbf{E}^* en la configuración de referencia actualizada Ω_0^* se lleva a cabo fácilmente calculando de forma estándar el tensor de deformaciones de Green-Lagrange asociado a la ecuación de movimiento φ_2 y sumándole un tensor deformación constante \mathbf{E}_1^* .

Por otro lado, las definiciones (3.4a-c) del capítulo 3 permiten una descomposición aditiva del tensor deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} en su componente elástica y su componente plástica. Esta descomposición también se verifica en la configuración de referencia actualizada Ω_0^* . En particular, aplicando el operador *push-forward* $\phi_{1*}(\cdot)$ asociado a la ecuación de movimiento φ_1 sobre la ecuación (3.4d) se tiene:

$$\mathbf{E}^* = \phi_{1*}(\mathbf{E}) = \phi_{1*}(\mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p) = \phi_{1*}(\mathbf{E}^e) + \phi_{1*}(\mathbf{E}^p) = \mathbf{E}^{e*} + \mathbf{E}^{p*} \quad (5.7)$$

Además, la ecuación de movimiento φ y la ecuación de movimiento parcial φ_1 coinciden en cualquier instante de tiempo τ anterior al nuevo instante de referencia t^* , esto es $\varphi_1(\mathbf{X}, \tau) = \varphi(\mathbf{X}, \tau)$ para $\forall \tau \in [0, t^*]$, por lo que la descomposición aditiva del tensor deformación \mathbf{E}_1^* en una parte elástica y otra plástica también se verifica:

$$\mathbf{E}_1^* = \mathbf{E}_1^{e*} + \mathbf{E}_1^{p*} \quad (5.8)$$

donde las componentes elástica \mathbf{E}_1^{e*} y plástica \mathbf{E}_1^{p*} del tensor deformación asociado a la ecuación de movimiento φ_1 se definen a partir de las ecuaciones (3.6b-c) del capítulo 3 como:

$$\mathbf{E}_1^{e*} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{G}^* - \mathbf{F}_1^{e^{-T}} \cdot \overline{\mathbf{G}}_1 \cdot \mathbf{F}_1^{e^{-1}} \right) \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{E}_1^{p*} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_1^{e^{-T}} \cdot \overline{\mathbf{G}}_1 \cdot \mathbf{F}_1^{e^{-1}} - \mathbf{F}_1^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}_1^{-1} \right) \quad (5.9b)$$

siendo \mathbf{F}_1^e la componente elástica del tensor gradiente deformación asociado a la ecuación de movimiento φ_1 y $\overline{\mathbf{G}}_1$ el tensor métrico en la configuración intermedia correspondiente.

Suponiendo válida la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F}_2 en una parte elástica \mathbf{F}_2^e y otra plástica \mathbf{F}_2^p (ver figura 5.2), las ecuaciones (3.4a-c) permiten definir los tensores deformación elástico \mathbf{E}_2^{e*} y plástico \mathbf{E}_2^{p*} sobre la configuración de referencia actualizada Ω_0^* :

$$\mathbf{E}_2^{e*} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2^{pT} \cdot \overline{\mathbf{G}}_2 \cdot \mathbf{F}_2^p \right) \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{E}_2^{p*} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_2^{pT} \cdot \overline{\mathbf{G}}_2 \cdot \mathbf{F}_2^p - \mathbf{G}^* \right) \quad (5.10b)$$

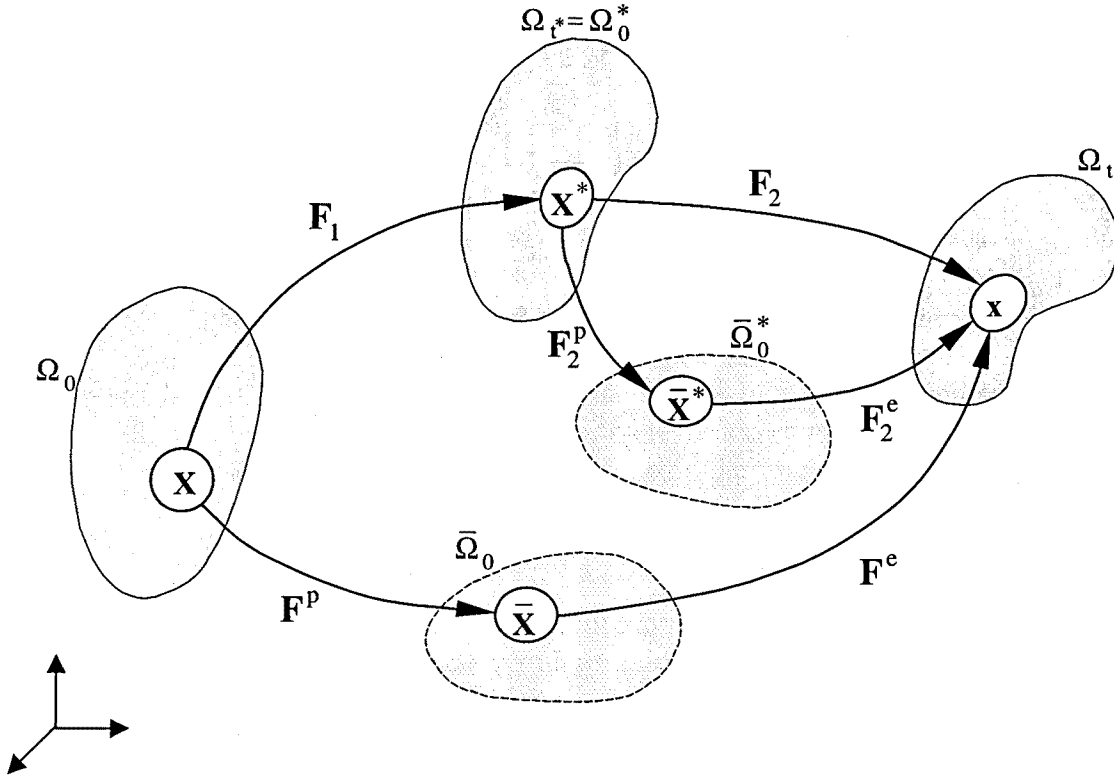


Figura 5.2: Descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} y \mathbf{F}_2 . Siendo $\bar{\mathbf{G}}_2$ el tensor métrico de la configuración intermedia asociada al movimiento φ_2 . Estas ecuaciones permiten descomponer el tensor deformación \mathbf{E}_2^* , definido en (5.5), como la suma de una deformación elástica y otra plástica:

$$\mathbf{E}_2^* = \mathbf{E}_2^{e*} + \mathbf{E}_2^{p*} \tag{5.11}$$

La sustitución de las ecuaciones (5.8) y (5.11) en (5.6) y su posterior comparación con la ecuación (5.7) permiten relacionar la deformación elástica \mathbf{E}^{e*} y la deformación plástica \mathbf{E}^{p*} con las deformaciones elásticas y plásticas correspondientes a las ecuaciones de movimiento φ_1 y φ_2 :

$$\mathbf{E}^{e*} = \mathbf{E}_1^{e*} + \mathbf{E}_2^{e*} \tag{5.12a}$$

$$\mathbf{E}^{p*} = \mathbf{E}_1^{p*} + \mathbf{E}_2^{p*} \tag{5.12b}$$

Aplicando el operador *push-forward* $\phi_{2*}(\cdot)$ asociado a la ecuación de movimiento φ_2 sobre las ecuaciones (5.6) y (5.12a-b) es posible escribir el tensor deformación y sus componentes elástica y plástica en la configuración deformada:

$$\mathbf{e} = \phi_{2*}(\mathbf{E}^*) = \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{F}_2^{-1} = \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{F}_2^{-1} + \mathbf{e}_2 \tag{5.13a}$$

$$\mathbf{e}^e = \phi_{2*}(\mathbf{E}^{e*}) = \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{E}^{e*} \cdot \mathbf{F}_2^{-1} = \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{E}_1^{e*} \cdot \mathbf{F}_2^{-1} + \mathbf{e}_2^e \quad (5.13b)$$

$$\mathbf{e}^p = \phi_{2*}(\mathbf{E}^{p*}) = \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{E}^{p*} \cdot \mathbf{F}_2^{-1} = \mathbf{F}_2^{-T} \cdot \mathbf{E}_1^{p*} \cdot \mathbf{F}_2^{-1} + \mathbf{e}_2^p \quad (5.13c)$$

Las ecuaciones (5.6) y (5.12a-b) permiten determinar las deformaciones del cuerpo conociendo el tensor de deformación de Almansi¹ asociado a la ecuación de movimiento φ_1 y el tensor de deformación de Green-Lagrange asociado a la ecuación de movimiento φ_2 . En ambos casos, los tensores se escriben sobre la configuración de referencia actualizada Ω_0^* y pueden ser reescritos en la configuración deformada Ω_t aplicando el operador *push-forward* $\phi_{2*}(\cdot)$. Desde el punto de vista algorítmico, conviene destacar la similitud entre las ecuaciones (3.4a-c) y las ecuaciones (5.5) y (5.10a-b). Esta similitud permite calcular los tensores de deformación sin necesidad de distinguir entre el tipo de movimiento efectuado (bien sea el movimiento completo φ en el caso de usar una formulación del tipo lagrangiano total, o bien, el movimiento parcial φ_2 en el caso de usar una formulación del tipo lagrangiano actualizado). La única distinción reside en el tensor de deformación inicial correspondiente al movimiento previo φ_1 , siendo este un tensor constante en la configuración de referencia actualizada o en cualquier otra configuración fija. Por tanto, la actualización de la configuración de referencia requiere únicamente inicializar los tensores de deformación, todo ello sin alterar la forma de calcularlos.

Observación 5.1 *Alternativamente, la descomposición del problema en dos movimientos secuenciales puede plantearse bajo la perspectiva de la descomposición aditiva del tensor de tensiones. En particular, a partir de la ecuación (5.12a) se obtiene fácilmente el tensor de tensiones en la configuración de referencia actualizada Ω_0^* :*

$$\mathbf{S}^* = \Xi^* : \mathbf{E}^{e*} = \Xi^* : \mathbf{E}_1^{e*} + \Xi^* : \mathbf{E}_2^{e*} = \mathbf{S}_1^* + \mathbf{S}_2^* \quad (5.14)$$

donde $\Xi^* = \phi_2^*(\mathbf{c})$ es el tensor constitutivo elástico en la configuración de referencia actualizada. Sin embargo, el tensor de tensiones \mathbf{S}_1^* es función del movimiento φ_2 por ser el tensor constitutivo elástico \mathbf{c} constante en la configuración deformada Ω_t (ver apartado 3.2.1). Circunstancia que hace perder atractivo a esta alternativa, puesto que el término inicial debe ser corregido constantemente al tiempo que se añade un término adicional en el tensor constitutivo tangente \mathbf{c}^{ep} .

El cálculo de las tensiones en la configuración espacial se obtiene aplicando el operador *push-forward* $\phi_{2*}(\cdot)$ asociado a la ecuación de movimiento φ_2 sobre la

¹Solo es necesario conocer dos de los tres tensores de deformación definidos puesto que el tercero se determina a través de la relación (5.8).

ecuación (5.14), llegando a la expresión:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^p) + \mathbf{c} : \phi_{2*} \left(\mathbf{E}_1^* - \mathbf{E}_1^{p*} \right) \quad (5.15)$$

La resolución del problema utilizando el método de los elementos finitos requiere plantear la ecuación de equilibrio en su forma débil. Para una formulación lagrangiana, en el capítulo 4 se mostró como la forma débil del problema conlleva a realizar una integración sobre la configuración de referencia. Sin embargo, esta configuración se actualiza en una formulación del tipo lagrangiano actualizado, lo que implica replantear la forma débil. En particular, la integración en la configuración de referencia Ω_0 y la integración en la configuración de referencia actualizada Ω_0^* se relacionan a través de la expresión:

$$\int_{\Omega_0} (\cdot) d\Omega = \int_{\Omega_0^*} \frac{1}{J_1} (\cdot) d\Omega \quad (5.16)$$

donde $J_1 = \det(\mathbf{F}_1)$. Algorítmicamente, modificar la configuración de referencia implica corregir el integrando por un factor que se obtiene a partir de la ecuación de movimiento φ_1 .

5.1.1 Consideraciones sobre la formulación mixta.

Considérese una descomposición del movimiento del cuerpo en dos movimientos secuenciales como los descritos en la figura 5.1. Bajo esta perspectiva, el cálculo del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} se puede realizar a partir de las ecuaciones de movimiento parciales φ_1 y φ_2 llegando a la descomposición multiplicativa descrita en la ecuación (5.1). Sin embargo, tal y como se muestra en la ecuación (4.33) del capítulo 4, la parte volumétrica de este tensor se corrige en el caso de la formulación mixta, por lo que la validez de la descomposición debe ser revisada.

El punto de partida es calcular la deformación volumétrica \bar{J} a partir de las ecuaciones de movimiento parciales φ_1 y φ_2 . Por un lado, el determinante del tensor gradiente de deformación sin corregir \mathbf{F} conduce a la expresión:

$$J = J_1 J_2 \quad (5.17)$$

donde $J = \det(\mathbf{F})$. Como se demostrará en el anexo C1, la deformación volumétrica \bar{J} se calcula de una forma similar:

$$\bar{J} = \bar{J}_1 \bar{J}_2 \quad (5.18)$$

La descomposición multiplicativa de la deformación volumétrica \bar{J} combinada con las ecuaciones (4.33), (5.1) y (5.17) permiten descomponer el tensor gradiente de

deformación corregido $\bar{\mathbf{F}}$ de forma similar al tensor gradiente de deformación sin corregir \mathbf{F} :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_2 \cdot \bar{\mathbf{F}}_1 \quad (5.19)$$

Por otro lado, la densidad se calcula utilizando la deformación volumétrica \bar{J} , por lo que la ecuación de continuidad (3.16) se escribe como:

$$\eta = \frac{\eta_0}{\bar{J}} = \frac{\eta_0}{\bar{J}_1 \bar{J}_2} = \frac{\eta_0^*}{\bar{J}_2} \quad (5.20)$$

El tensor gradiente de deformación corregido constituye el punto de partida para el cálculo de las deformaciones. De hecho, la similitud entre las ecuaciones (5.1) y (5.19) conduce a las mismas expresiones pero utilizando el tensor gradiente de deformación corregido $\bar{\mathbf{F}}$ en lugar del tensor gradiente de deformación sin corregir \mathbf{F} , por lo que el cálculo de las deformaciones no merece ningún comentario adicional.

Algorítmicamente, la formulación mixta no conlleva más complicaciones que las propias del método mixto, esto es, la corrección del tensor gradiente de deformaciones. Sin embargo, la integración espacial sobre la configuración de referencia Ω_0 y la integración sobre la configuración de referencia actualizada Ω_0^* se relacionan a través de la expresión (5.16), lo que implica considerar la deformación volumétrica sin corregir $J_1 = \det(\mathbf{F}_1)$. Esto obliga a almacenar dos variables distintas con significados similares. Por un lado, se debe conservar la deformación volumétrica corregida \bar{J} para calcular las variables cinemáticas y, por otro, la deformación volumétrica sin corregir J para corregir la integración sobre la configuración de referencia actualizada.

5.2 Estrategia automática de remallado.

La simulación del proceso de compactación siguiendo un esquema lagrangiano total produce distorsiones en la malla que pueden generar errores considerables durante el cálculo y en casos extremos impedir la convergencia. Estos problemas se evitan adoptando un esquema del tipo lagrangiano actualizado donde la actualización de la configuración de referencia Ω_0^* y la elaboración de la nueva malla están íntimamente relacionadas. Concretamente, en cada actualización de la configuración de referencia se realiza una nueva discretización. Como se puede apreciar en la figura 5.1, esto permite reducir la magnitud del movimiento φ_2^h reproducida por cada malla en particular, puesto que el problema se plantea en la configuración actualizada Ω_0^* prescindiendo del movimiento previo φ_1^h . Con ello se eliminan las distorsiones sobre la malla, lo que proporciona una mayor eficiencia numérica respecto al esquema lagrangiano total.

Por tanto, el objetivo es regenerar las mallas cuando las actuales presentan una distorsión inaceptable². No obstante, no se debe olvidar que la finalidad no es evitar la distorsión en sí, sino el error que la distorsión ocasiona en el cálculo. Además, es importante tener presente que la generación de las mallas se realiza con la finalidad de proseguir el cálculo y no con la intención de reiniciar de nuevo la simulación de una forma más efectiva, puesto que la finalidad es eliminar las distorsiones y no mejorar la precisión del cálculo. En consecuencia, el número de grados de libertad de las mallas generadas debe ser similar, puesto que carece de sentido utilizar una malla burda al principio de la simulación para acabar con una malla muy refinada en las etapas finales del proceso o viceversa. No obstante, otros autores prefieren aprovechar el remallado para refinar la malla hasta llegar a una determinada precisión [53][55].

Aprovechando la necesidad de remallar, se ha adoptado una metodología para obtener mallas óptimas [47][29], pero siempre manteniendo en lo posible invariable el número de elementos. Solo en casos extremos en los que el error estimado es considerablemente grande se procede a refinar la malla aumentando el número de grados de libertad.

Como se muestra en la figura 5.3, una estrategia automática de remallado se subdivide en las siguientes etapas [35]:

1. Controlar la calidad de la malla y tomar la decisión de remallar.
2. Caracterizar la nueva discretización de la configuración deformada Ω_{t^*} .
3. Generar la nueva malla.
4. Transferir la información desde la malla vieja a la malla nueva.
5. Reiniciar la simulación.

5.2.1 Estimador de error.

La resolución numérica del problema proporciona una solución aproximada que depende, entre otras cosas, del tamaño h de los elementos que componen la discretización. Una forma usual de cuantificar la aproximación es medir el error absoluto en tensiones, el cual se define como la diferencia entre la tensión calculada σ^h y la tensión real σ :

$$e_\sigma = \sigma^h - \sigma \quad (5.21)$$

Sin embargo, desde el punto de vista industrial, la densidad es la variable que caracteriza la calidad del proceso. De hecho, a pesar de usar una formulación lagrangiana, la densidad es una variable trascendental durante la simulación. Por esta razón, resulta conveniente definir el error en función de la densidad:

²Otro motivo por el que se procede a generar una nueva malla es cuando la violación de las condiciones de contorno ocasionada por los desplazamientos nodales comienza a ser importante.

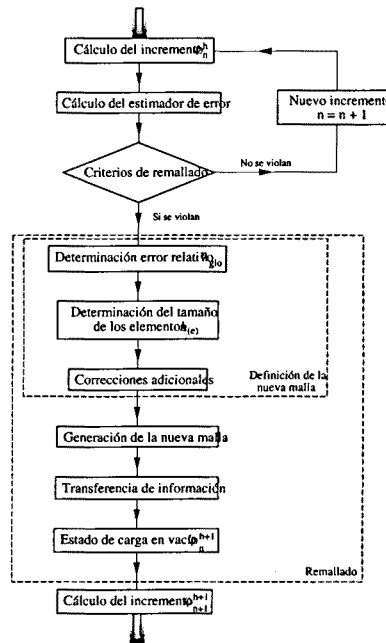


Figura 5.3: Algoritmo de remallado automático.

$$e_\eta = \eta^h - \eta \quad (5.22)$$

En la práctica, conocer la solución exacta generalmente es inviable, por lo que resulta imposible conocer el error. Sin embargo, existe diversas técnicas para estimarlo. En particular, el estimador de error empleado en este trabajo es del tipo Zhu-Zienkiewicz [120], el cual es un estimador *a posteriori* en el que la distribución real de tensiones o de densidades es aproximada por la distribución alisada.

La distribución alisada es el elemento de \mathcal{V}^h que mejor se aproxima a la distribución obtenida originariamente a partir de la ecuación de movimiento φ^h . Su cálculo se determina por el método de los mínimos cuadrados [119][14], llegando a la expresión:

$$\widetilde{(\cdot)}^h = \mathbf{M}^{-1} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\cdot)^h d\Omega \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega \quad (5.23b)$$

donde $\widetilde{(\cdot)}^h$ representa la distribución alisada. Esta distribución es continua y más uniforme que no la distribución original que es discontinua, razón por la que es considerada una distribución mejorada. No obstante, ambas tienden a la solución

exacta a medida que se reduce el tamaño de los elementos de la malla, por lo que el estimador de error también tiende al valor exacto.

En la práctica, una forma más conveniente de usar la función de error es a través de una norma. En particular se empleará la norma en L_2 :

$$\|e_\sigma\|_{L_2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} (\sigma^h - \tilde{\sigma}^h) : (\sigma^h - \tilde{\sigma}^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.24a)$$

$$\|e_\eta\|_{L_2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} (\eta^h - \tilde{\eta}^h)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.24b)$$

La integral de las expresiones (5.24a-b) se puede efectuar para todo el dominio Ω_t , obteniendo una estimación del error a nivel global. Restringiendo el dominio de integración al elemento $\Omega_t^{(e)}$ la norma del error se estima a nivel elemental, siendo esta estimación más útil cuando se quiere refinar localmente la malla. El cuadrado de ambas normas se relacionan a través de la expresión $\|\cdot\|_{L_2(\Omega_t)}^2 = \sum_e^{n_e} \|\cdot\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})}^2$.

5.2.2 Criterio automático de remallado.

Durante la compactación se producen cambios considerables en la geometría de la cámara de compactación, lo que implica distorsionar la malla durante el transcurso de la simulación con la consecuente pérdida de eficiencia de cálculo. Fundamentalmente, la decisión de regenerar la malla se toma cuando la aproximación obtenida con la malla actual deja de ser aceptable. En este momento, la malla actual se considera ineficaz y se procede a generar una nueva malla con la que proseguir el cálculo. Por tanto, una estrategia para remallar de forma automática se subdivide en una etapa de control y en una etapa de generación. La primera evalúa la calidad del cálculo y toma la decisión de regenerar la malla. Mientras que la segunda se centra en determinar el tamaño de los elementos para que la malla sea óptima bajo algún determinado criterio y mantener al mismo tiempo invariable el número de elementos.

Desde un punto de vista práctico, pueden considerarse tres procedimientos para controlar los errores ocasionados por la distorsión:

- Remallar en instantes de tiempo prefijados. En la práctica, este es un método más o menos manual en el que la decisión de remallar se fija para determinados incrementos. Esta metodología permite controlar el número de mallas empleadas durante la simulación del proceso y la magnitud del movimiento reproducida por cada una de ellas. Sin embargo, esto puede resultar un inconveniente, puesto que requiere conocer la evolución de cada pieza o, en caso

contrario, puede llevar a remallar en exceso o de forma insuficiente con la consecuente aparición de elementos distorsionados.

- Remallar según una función de error. En principio, cuanto más distorsión peor es la aproximación, lo que puede utilizarse como una forma indirecta de cuantificar la distorsión. La función de error permite desarrollar un método automatizado en el que la decisión de remallar se toma cuando se sobrepasa ciertos valores límite de error. No obstante, la relación entre estos valores límite y la distorsión admisible puede variar considerablemente para cada tipo de elemento, lo que supone un inconveniente. Además, la función de error depende de multitud de parámetros en el que la distorsión es uno de ellos. Sin embargo, este es un método muy efectivo para cuantificar la calidad de la malla durante la simulación.
- Remallar según un criterio de distorsión. Está basada en la idea intuitiva que a mayor distorsión peor aproximación del cálculo. La distorsión se mide cuantificando ciertos parámetros geométricos de los elementos [44][36]. Esto permite desarrollar un método automatizado en el que la decisión de remallar se toma cuando existe un número considerable de elementos que superan ciertos valores límite de distorsión. La desventaja de esta metodología es que los criterios utilizados para medir la distorsión dependen del tipo de elemento, donde además, los valores límite de distorsión se cuantifican de forma empírica. Otro inconveniente es que este criterio puede tomar la decisión de remallar innecesariamente en mallas distorsionadas sobre las que no se producen errores de cálculo significativos. O lo que es peor, no remallar en mallas poco distorsionadas pero que violan de forma ostensible las condiciones de contorno como resultado de grandes desplazamientos nodales.

En el presente trabajo se ha utilizado indistintamente los dos primeros, pero solo se procede a describir el segundo puesto que el primero no entraña dificultad alguna. En este caso, las expresiones (5.24a-b) constituyen el punto de partida.

El criterio para regenerar las mallas se basa en controlar que la norma del error no supere ciertos valores límite. Un primer criterio es limitar la norma del error medido sobre todo el dominio, error global, a un cierto porcentaje³ [120]:

$$\|e_\eta\|_{L_2(\Omega_t)} \leq \eta_{glo} \|\tilde{\eta}^h\|_{L_2(\Omega_t)} \quad (5.25)$$

donde η_{glo} es la proporción de error relativo considerado como admisible. Cuando la desigualdad (5.25) se viola entonces la precisión del cálculo está fuera de los límites

³El error en tensiones y el error en densidades conducen a expresiones completamente idénticas, por lo que, salvo mención expresa, solo se hará uso del error en densidades en lo que resta de capítulo.

exigidos, lo que conlleva a refinar la malla [77][14]. Este caso, aunque debe ser tenido en cuenta, es irrelevante para el desarrollo de una formulación del tipo lagrangiano actualizado, ya que lo que se pretende es generar mallas óptimas manteniendo constante el número de elementos.

Por otro lado, aunque se verifique la desigualdad (5.25) no significa que localmente, en alguna porción del dominio, se tenga una norma de error considerablemente grande. Por tanto, un segundo criterio es limitar la norma del error sobre el elemento e , error local, a una cierta proporción η_{loc} del error local considerado óptimo [14]:

$$\|e_\eta\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})} \leq \eta_{loc} \|e_\eta^{opt}\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})} = \eta_{loc} \left(\gamma_{(e)} \eta_{glo} \|\tilde{\eta}^h\|_{L_2(\Omega_t)} \right) \quad (5.26)$$

donde $\gamma_{(e)}$ es un coeficiente que relaciona el error local óptimo con el error global. Este coeficiente establece como se redistribuye el error en una malla óptima según algún criterio de optimización. En particular, para el criterio de malla óptima basado en la equidistribución del error global [120] este coeficiente vale $\gamma_{(e)} = 1/\sqrt{\bar{n}_e}$. O alternativamente, usando el número de elementos predicho para la nueva malla [68][67], el coeficiente $\gamma_{(e)}$ se evalúa como $\gamma_{(e)} = 1/\sqrt{\hat{n}_e}$. Sin embargo, ambas alternativas son similares dado que se mantiene aproximadamente constante el número de elementos. Otro criterio de malla óptima está basado en la equidistribución del error específico [78], en cuyo caso el coeficiente vale $\gamma_{(e)} = \sqrt{\Omega_t^{(e)}/\Omega_t}$. Por otro lado, conviene mencionar que el parámetro η_{loc} en principio no está acotado, pudiendo tomar perfectamente un valor mayor que la unidad.

Cuando la desigualdad (5.26) se viola entonces la precisión del cálculo en alguna región del cuerpo está por debajo del límite permitido. En este caso se procede a generar una nueva malla optimizada procurando mantener invariable el número de elementos.

5.2.3 Optimización y definición de la nueva malla.

Una vez se ha decidido remallar se procede a diseñar la nueva malla, esto es, a definir su geometría y la distribución del tamaño de los elementos de la nueva malla. Concretamente, el tamaño de los elementos se designa a partir del estimador del error de tal forma que verifique las condiciones:

1. Obtener una malla óptima bajo algún criterio de equidistribución del error.
2. Mantener invariable el número de elementos de la malla.

Imponer simultáneamente un valor del parámetro η_{glo} y fijar el número de elementos de la nueva malla \hat{n}_e es incompatible. Normalmente no se impone ninguna

condición sobre el número de elementos de la malla a cambio de prefijar la precisión del cálculo a través del parámetro η_{glo} . Por contra, la segunda condición implica que, una vez adoptado un criterio de optimalidad, el parámetro η_{glo} sea calculado indirectamente a partir del número de elementos de la nueva malla:

$$\widehat{n}_e(\eta_{glo}) - n_o = 0 \quad (5.27)$$

siendo n_o el número de elementos deseado.

La definición de la nueva malla se lleva a cabo en dos etapas. En la primera se determina el error relativo η_{glo} que mantiene invariable el número de elementos. No obstante, resolver la ecuación (5.27) sin generar la malla implica realizar una predicción del número de elementos. En una segunda etapa, una vez determinado el error relativo η_{glo} que verifica la ecuación (5.27), se determina la distribución del tamaño de los elementos. A continuación se exponen estas etapas en orden inverso por motivos de claridad.

Distribución del tamaño de los elementos.

El tamaño de los elementos se determina equilibrando la precisión de los elementos de la nueva malla en base a la precisión obtenida por los elementos de la malla vieja. Sin embargo, establecer la precisión de los elementos de la nueva malla implica efectuar una estimación *a priori* de la norma de error. En particular, la precisión de las densidades η^h obtenidas a partir del campo de desplazamientos discreto \mathbf{u}^h puede estimarse *a priori* a través de la relación:

$$\|e_\eta\|_{L_2(\Omega_t)} \leq C_\eta h^m \quad (5.28)$$

donde C_η es una constante, m es el grado de los polinomios de orden completo de los elementos del espacio \mathcal{V}^h y h el tamaño característico de los elementos de la malla. Localmente, el estimador *a priori* para el elemento e puede escribirse como:

$$\|e_\eta\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})} \leq C_\eta h_{(e)}^m \left(\Omega_t^{(e)}\right)^{\frac{1}{2}} \approx C_\eta^* h_{(e)}^{m+\frac{d}{2}} \quad (5.29)$$

donde se supone válida la relación $\Omega_t^{(e)} \approx \alpha h_{(e)}^d$ siendo $h_{(e)}$ la dimensión característica del elemento e , d la dimensión del problema y α un parámetro que depende de la geometría del elemento (ver figura 5.4).

Dado el error relativo η_{glo} y adoptado un criterio de optimalidad, la norma del error local óptimo en el elemento e se obtiene a partir de la norma del error global como:

$$\|e_\eta^{opt}\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})} = \gamma_{(e)} \eta_{glo} \left\| \widetilde{\eta}^h \right\|_{L_2(\Omega_t)} \quad (5.30)$$

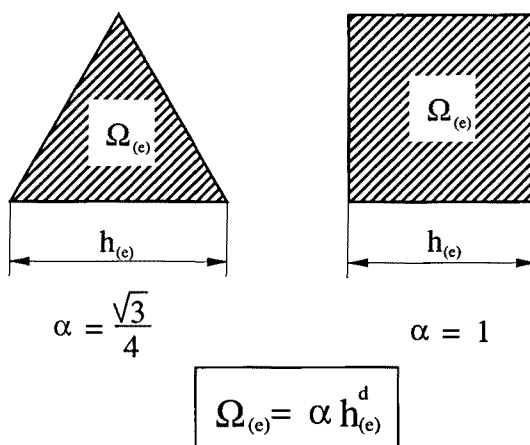


Figura 5.4: Relación entre el área $\Omega_{(e)}$ y el tamaño característico $h_{(e)}$ en el caso de elementos triangulares y cuadrados. En este caso $d = 2$ por tratarse de un elemento bidimensional.

donde el parámetro $\gamma_{(e)}$ depende del criterio de optimalidad usado y $\tilde{\eta}^h$ es la distribución de densidades relativas alisadas.

El tamaño de los elementos se obtiene comparando la norma de error óptima con la norma de error medida sobre cada elemento. Concretamente, recurriendo a la velocidad de convergencia a nivel local marcada por la desigualdad (5.29), se puede estimar la distribución del tamaño de los elementos de la nueva malla a partir de los tamaños actuales $h_{(e)}$ como:

$$\hat{h}_{(e)} = \left(\frac{\|e_{\eta}^{opt}\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})}}{\|e_{\eta}\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})}} \right)^{\frac{2}{2m+d}} h_{(e)} = \left(\gamma_{(e)} \frac{\eta_{glo} \|\tilde{\eta}^h\|_{L_2(\Omega_t)}}{\|e_{\eta}\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})}} \right)^{\frac{2}{2m+d}} h_{(e)} \quad (5.31)$$

siendo $\hat{h}_{(e)}$ el tamaño característico de los elementos de la nueva malla en la región del espacio definida por el elemento e de la vieja malla $\Omega_t^{(e)}$.

Predicción del número de elementos.

Normalmente, el error relativo η_{glo} se supone conocido, lo que permite obtener la distribución del tamaño de los elementos $\hat{h}_{(e)} = \hat{h}_{(e)}(\eta_{glo})$ haciendo uso de la ecuación (5.31). Por otro lado, si se conoce la distribución de tamaños $\hat{h}_{(e)}$ entonces es posible predecir el número de elementos de la nueva malla \hat{n}_e . Sin embargo, aquí se desea proceder en orden inverso: partir del número de elementos \hat{n}_e para llegar al error relativo η_{glo} , y a partir de aquí conocer la distribución del tamaño de los elementos.

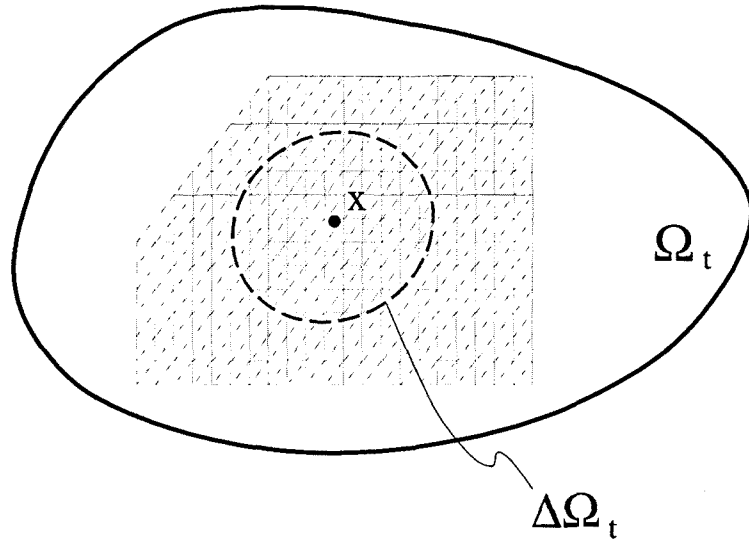


Figura 5.5: Número de elementos Δn_e por unidad de área $\Delta\Omega_t$ en el "entorno" del punto x .

En particular, combinando las ecuaciones (5.27) y (5.31) se llega a una expresión que relaciona directamente el número de elementos \hat{n}_e con el error relativo η_{glo} .

Considérese una región del cuerpo discretizado $\Delta\Omega_t$ suficientemente grande que contiene un número de elementos Δn_e . Se define la densidad de elementos δ en el punto x como [20]:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta\Omega_t \rightarrow 0} \frac{\Delta n_e}{\Delta\Omega_t} \quad (5.32)$$

A partir de la cual se comprueba fácilmente que conocer la densidad de elementos en todos los puntos del dominio equivale a conocer el número de elementos que componen la malla:

$$n_e = \int_{\Omega_t} \delta(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (5.33)$$

En la práctica, salvo casos particulares, la evaluación de la ecuación (5.32) de una forma precisa es inviable a la escala con que se trabaja (figura 5.5). Sin embargo, una sencilla aproximación se obtiene a través de la relación:

$$\delta(\mathbf{x}, t) \approx \delta_{(e)} = \frac{1}{\Omega_t^{(e)}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^{(e)} \quad (5.34)$$

La distribución del tamaño de los elementos de la nueva malla $\hat{h}_{(e)}$ se obtiene a partir de la ecuación (5.31), llegando a una distribución discontinua formada por tramos constantes en cada elemento e de la malla vieja. Dado que la ecuación (5.34)

define una distribución similar para la densidad de elementos y teniendo en cuenta la relación $\Omega_t^{(e)} \approx \alpha h_{(e)}^d$ (siendo α un parámetro que depende de la geometría del elemento y d la dimensión del problema), la densidad de elementos de la nueva malla se puede estimar sobre cada elemento e de la malla vieja como:

$$\widehat{\delta}_{(e)} \approx \frac{1}{\alpha \widehat{h}_{(e)}^d} \quad (5.35)$$

Las ecuaciones (5.33) y (5.35) junto con la relación $\Omega_t^{(e)} \approx \alpha h_{(e)}^d$ permiten efectuar una predicción del número de elementos de la nueva malla \widehat{n}_e a partir de la distribución del tamaño de los elementos de la malla vieja $h_{(e)}$ y de la malla nueva $\widehat{h}_{(e)}$ [67]:

$$\widehat{n}_e = \int_{\Omega_t} \widehat{\delta} d\Omega \approx \sum_e^{n_e} \widehat{\delta}_{(e)} \Omega_t^{(e)} \approx \sum_e^{n_e} \left(\frac{h_{(e)}}{\widehat{h}_{(e)}} \right)^d \quad (5.36)$$

Haciendo uso de la ecuación (5.31) se obtiene una forma equivalente de la ecuación (5.36) que pone el número de elementos de la nueva malla \widehat{n}_e en función del error relativo η_{glo} :

$$\widehat{n}_e \approx \frac{\sum_e^{n_e} \left[\gamma_{(e)}^{-1} \|e_\eta\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})} \right]^{\frac{2d}{2m+d}}}{\left[\eta_{glo} \left\| \widetilde{\eta}^h \right\|_{L_2(\Omega_t)} \right]^{\frac{2d}{2m+d}}} \quad (5.37)$$

Por tanto, el error relativo η_{glo} que mantiene invariable el número de elementos se obtiene sustituyendo (5.27) en (5.37) y despejando η_{glo} del resultado:

$$\eta_{glo} \approx \frac{\left(\sum_e^{n_e} \left[\gamma_{(e)}^{-1} \|e_\eta\|_{L_2(\Omega_t^{(e)})} \right]^{\frac{2d}{2m+d}} \right)^{\frac{2m+d}{2d}}}{n_o^{\frac{2m+d}{2d}} \left\| \widetilde{\eta}^h \right\|_{L_2(\Omega_t)}} \quad (5.38)$$

Correcciones adicionales sobre la distribución de tamaños.

Las ecuaciones (5.31) y (5.38) constituyen las herramientas necesarias para definir las características de la nueva malla. Sin embargo, cualquier generador de mallas proporcionará una malla de características similares a las realmente definidas. Es más, el tamaño e incluso la distorsión de los elementos generados son sensibles al contorno de la malla, por lo que una evolución geométrica tan notoria como la de la cámara de compactación puede hacer evolucionar el número de elementos de la malla de forma impredecible. Esta circunstancia junto con las aproximaciones efectuadas

en la deducción de las ecuaciones (5.31) y (5.38) motivan el desarrollo de alguna estrategia correctiva. En realidad, la estrategia adoptada corrige las mallas antes de generarlas, pero una vez que estas son generadas se utilizan para la corrección de mallas futuras.

Concretamente, la metodología seguida se centra en escalar el tamaño de los elementos de las mallas que van a ser generadas. Esto es, si con el estimador de error se predice un tamaño de elemento $\hat{h}_{(e)}$, el tamaño que se pasará al mallador $\hat{h}_{(e)}^*$ estará escalado por un factor β :

$$\hat{h}_{(e)}^* = \beta \hat{h}_{(e)} \quad (5.39)$$

La discrepancia entre el número de elementos real y el número de elementos deseado en las mallas que ya han sido generadas constituye la base para determinar el factor de escala. En particular, el punto de partida para la elección adecuada del factor de escala β lo constituye la ecuación (5.36) que estima el número de elementos de la nueva malla a partir del tamaño actual de los elementos $h_{(e)}$ y del tamaño predicho para los elementos de la nueva malla $\hat{h}_{(e)}$. Si el tamaño de estos últimos se escala por el factor β entonces se modifica automáticamente el número de elementos de la nueva malla, en cuyo caso la ecuación (5.36) toma la forma:

$$\hat{n}_e^* \approx \sum_e^{n_e} \left(\frac{h_{(e)}}{\beta \hat{h}_{(e)}} \right)^d = \frac{\hat{n}_e}{\beta^d} \quad (5.40)$$

donde \hat{n}_e es el número de elementos inicialmente estimado y \hat{n}_e^* el número de elementos predicho para la malla con los elementos escalados por el factor β .

Sin embargo, la ecuación (5.40) puede ser interpretada desde un punto de vista distinto. Si una vez generada la malla a partir de la distribución de tamaños $\hat{h}_{(e)}$ se hace coincidir el número de elementos corregido \hat{n}_e^* con el número de elementos realmente generados n_e , entonces se obtiene el factor de escala β que relaciona el tamaño real de los elementos generados con respecto al tamaño inicialmente predicho. En particular, supóngase que la malla actual posee $n_e^{(i)} = \hat{n}_e^{*(i)}$ elementos cuando realmente se deseaba generar una malla con n_o elementos (lo que equivale a decir que $\hat{n}_e^{(i)} = n_o$). El coeficiente corrector $\beta^{(i)}$ que teóricamente se ha aplicado se deduce de la ecuación (5.40):

$$\beta^{(i)} = \left(\frac{n_o}{n_e^{(i)}} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (5.41)$$

Si el número de elementos generados no coincide con el número de elementos deseado entonces este coeficiente debe ser corregido. Para ello, la condición que se desea

verificar en el siguiente remallado está dada por la relación:

$$\frac{\widehat{n}_e^{(i+1)}}{\widehat{n}_e^{*(i+1)}} = \frac{n_o}{n_e^{(i+1)}} = 1 \quad (5.42)$$

El calculo del cociente $\beta^{(i)}/\beta^{(i+1)}$ utilizando la ecuación (5.41) y la condición (5.42) permite deducir la corrección que debe efectuarse sobre el factor de escala $\beta^{(i)}$ para que, en principio, se verifique la condición (5.42). Esta corrección está dada por la expresión:

$$\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} \left(\frac{n_o}{n_e^{(i)}} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (5.43)$$

Evidentemente, el factor de escala $\beta^{(i+1)}$ no garantiza que el número de elementos de la malla generada vaya a ser igual al número de elementos deseado. Pero lo que si consigue es reducir la desviación entre el número de elementos deseado y el número de elementos realmente generado.

Observación 5.2 *Incluso una posible discrepancia entre el programa de cálculo y el generador de mallas referente a la definición del tamaño característico de los elementos es corregida con esta metodología en muy pocos remallados. Esta circunstancia compatibiliza al programa de cálculo con cualquier generador de mallas.*

5.2.4 Transferencia de información.

Una vez generada la nueva malla, el siguiente paso es reiniciar el cálculo en el punto que se había dejado. Para ello, la información que no es inicializada se transfiere desde la malla vieja a la malla nueva. Como se vio en el apartado 5.1, entre la información que se debe transferir se encuentra la deformación total $\mathbf{e}_{t^*}^h$, la deformación plástica $\mathbf{e}_{t^*}^{p^h}$, la densidad $\eta_{t^*}^h$ y el determinante del gradiente de deformaciones $J_{t^*}^h$. Adicionalmente, la ecuación constitutiva del material impone la necesidad de transferir el vector de variables internas en deformaciones $\boldsymbol{\xi}_{t^*}^h$ en caso de ser una variable del problema⁴. Todas estas variables son conocidas en los puntos de integración. En el capítulo 4 se vio que las fuerzas de contacto dependen de la velocidad $\mathbf{V}_{t^*}^h$, por lo que su transferencia también es necesaria. Sin embargo, esta variable se conoce en los nodos de la malla. Todas estas variables definen el conjunto de variables a transferir \mathbb{V}^h :

$$\mathbb{V}^h = \left\{ \mathbf{e}_{t^*}^h, \mathbf{e}_{t^*}^{p^h}, \eta_{t^*}^h, J_{t^*}^h, \boldsymbol{\xi}_{t^*}^h, \mathbf{V}_{t^*}^h \right\} \quad (5.44a)$$

⁴Hay que recordar que en los procesos de compactación es frecuente usar la densidad en lugar del vector de variables internas \mathbf{q} .

$$\mathbb{V}_I^h = \left\{ \mathbf{e}_{t^*}^h, \mathbf{e}_{t^*}^{p^h}, \eta_{t^*}^h, J_{t^*}^h, \xi_{t^*}^h, \bullet \right\} \quad (5.44b)$$

$$\mathbb{V}_N^h = \left\{ \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \mathbf{V}_{t^*}^h \right\} \quad (5.44c)$$

Salvo la velocidad $\mathbf{V}_{t^*}^h$ que puede determinarse en cualquier punto del dominio, el resto de variables se conoce únicamente en los puntos de integración. En el caso de la velocidad, la transferencia de información se realiza directamente desde los nodos de la malla vieja a los nodos de la malla nueva. Para el resto de variables, la transferencia de información se realiza desde los puntos de integración de la malla vieja a los puntos de integración de la malla nueva. Sin embargo, en general los puntos de integración no coinciden con los nodos, por lo que la transferencia de información se subdivide en dos etapas:

1. Proyección de la información desde los puntos de integración a los nodos de la vieja malla [120][121][122].
2. Transferencia de información desde la malla vieja a la malla nueva [90][85].

La distribución del campo de desplazamientos $\varphi_{t^*}^h$ es continua pero no sus derivadas, lo que implica que la distribución de las variables a transferir \mathbb{V}_I^h sea discontinua. Sin embargo, la distribución suavizada es continua y más uniforme que no la obtenida directamente a partir de los desplazamientos, por lo que se la considera una distribución mejorada y, en consecuencia, adecuada para ser transferida a la nueva malla. Además, es posible conocer el valor de las variables suavizadas en cualquier punto del dominio a partir de los valores nodales. Es por ello que la proyección desde los puntos de integración a los nodos usualmente se realiza a través de la distribución suavizada [21].

Antes de transferir la información a los puntos de la malla nueva se debe localizar previamente a que elementos de la malla vieja pertenecen, lo que puede suponer un gran coste de cómputo. Por esta razón, se debe transferir la información al menor número de puntos posible. En este momento surgen dos alternativas para las variables \mathbb{V}_I^h . La primera consiste en transferir la información a los nodos de la nueva malla para posteriormente interpolar la información a los puntos de integración [21]. La otra alternativa es transferir la información directamente a los puntos de integración de la nueva malla. Ambas alternativas son igualmente válidas y la elección de una u otra dependerá del número de puntos a transferir⁵.

Observación 5.3 *Durante la proyección de los elementos del conjunto \mathbb{V}_I^h a los nodos mediante distribuciones suavizadas se genera un estado*

⁵Hay que tener en cuenta que la única variable nodal a transferir es la velocidad \mathbf{V}^h y solo necesita ser transferida en los nodos de la frontera, por lo que la necesidad de transferir variables nodales no supone un argumento decisivo.

que ni está en equilibrio ni verifica la ecuación constitutiva, por lo que el estado inicial de la nueva malla presentará este inconveniente. El problema se solventa resolviendo un incremento adicional denominado estado de carga en vacío. Este incremento tiene por finalidad recuperar el equilibrio y la consistencia con la ecuación constitutiva perdidas durante la transferencia de información.

Una visión más detallada para la implementación del proceso de transferencia de información entre mallas, especialmente del estado de carga en vacío, se muestra en el anexo C2.

Anexo C1

Descomposición del movimiento para la formulación mixta.

En el apartado 5.1 se demostró que, para la formulación convencional, la descomposición del movimiento en dos movimientos secuenciales conduce a una descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} . Sin embargo, el punto de partida para la formulación mixta es la corrección de la parte volumétrica de este tensor. La finalidad de este anexo se centra demostrar que la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones corregido $\bar{\mathbf{F}}$ sigue siendo válida.

C1.1 Modelo continuo.

Como se mostró en el apartado 5.1, dado un instante de tiempo fijo pero arbitrario $t^* \in (0, t)$, el movimiento del cuerpo puede descomponerse en dos movimientos secuenciales (ver figura 5.1). Esta descomposición permite reescribir la ecuación de movimiento $\varphi = \varphi(\mathbf{X}, t)$ en función de cada uno de los movimientos por separado:

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 \quad (\text{C1.1})$$

El primer movimiento $\varphi_1 = \varphi_1(\mathbf{X}, \tau)$ tiene lugar para instantes $\tau \in [0, t^*]$ y se trata de un movimiento fijo. Por contra, el segundo movimiento $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1(\mathbf{X}, t^*), \tau)$ tiene lugar en instantes posteriores $\tau \in [t^*, t]$. En la formulación convencional, la descomposición del movimiento en dos movimientos secuenciales conduce a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \quad (\text{C1.2})$$

de donde resulta inmediata la descomposición de la deformación volumétrica J :

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}_1) \det(\mathbf{F}_2) = J_1 J_2 \quad (\text{C1.3})$$

Por otro lado, la corrección efectuada sobre el tensor gradiente de deformaciones viene dada por la expresión (4.33):

$$\bar{\mathbf{F}} = \left(\frac{\bar{J}}{J} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \mathbf{F} \quad (\text{C1.4})$$

Por otro lado, la corrección de la parte volumétrica del tensor gradiente de deformaciones está caracterizada por la variable \bar{J} , cuya determinación se realiza por medio de la ecuación (4.36b):

$$\int_{\Omega_0} \bar{q} (\ln J - \ln \bar{J}) d\Omega = 0 \quad \forall \bar{q} \in L_2(\Omega_0) \quad (C1.5)$$

Sustituyendo (C1.3) en (C1.5) se llega a la expresión:

$$\int_{\Omega_0} \bar{q} (\ln J_1 + \ln J_2 - \ln \bar{J}) d\Omega = 0 \quad \forall \bar{q} \in L_2(\Omega_0) \quad (C1.6)$$

Sin embargo, para cualquier instante $\tau \in [0, t^*]$ se tiene que $\varphi(\mathbf{X}, \tau) = \varphi_1(\mathbf{X}, \tau)$, por lo que la ecuación (C1.5) se verifica de forma automática para la ecuación de movimiento φ_1 . Esto es:

$$\int_{\Omega_0} \bar{q} (\ln J_1 - \ln \bar{J}_1) d\Omega = 0 \quad \forall \bar{q} \in L_2(\Omega_0) \quad (C1.7)$$

que combinada con (C1.6) se llega a la ecuación:

$$\int_{\Omega_0} \bar{q} \left(\ln J_1 - \ln \frac{\bar{J}}{\bar{J}_1} \right) d\Omega = 0 \quad \forall \bar{q} \in L_2(\Omega_0) \quad (C1.8)$$

Por analogía con la ecuación (C1.5), la ecuación de movimiento φ_2 debería tener una forma similar, por lo que \bar{J}_2 se define a partir de la relación¹:

$$\int_{\Omega_0} \bar{q} (\ln J_2 - \ln \bar{J}_2) d\Omega = 0 \quad \forall \bar{q} \in L_2(\Omega_0) \quad (C1.9)$$

Comparando esta definición con la expresión (C1.8) se llega a la conclusión que:

$$\bar{J} = \bar{J}_1 \bar{J}_2 \quad (C1.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (C1.2), (C1.3) y (C1.10) en (C1.4) es inmediato llegar a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones corregido $\bar{\mathbf{F}}$:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_2 \cdot \bar{\mathbf{F}}_1 \quad (C1.11)$$

C1.2 Modelo discreto.

En el modelo discreto, la deformación volumétrica \bar{J}^h se determina a partir de la relación (4.43a):

$$\vartheta_{(e)}^h = \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}} \ln J^h d\Omega \quad (C1.12)$$

¹Es importante observar que la similitud no es completa puesto que el dominio de integración no corresponde a la configuración de referencia del movimiento φ_2 (o lo que es lo mismo, a la configuración de referencia acualizada Ω_0^*) sino a la configuración de referencia del movimiento completo φ (es decir, a la configuración de referencia original Ω_0). En realidad, la segunda parte del movimiento no es completamente independiente del movimiento que le antecede.

donde $\vartheta^h = \ln \bar{J}^h$. Sustituyendo (C1.3) en (C1.12) se llega a la expresión:

$$\vartheta_{(e)}^h = \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^h(e)} \bar{\mathbf{N}} \ln J_1^h d\Omega + \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^h(e)} \bar{\mathbf{N}} \ln J_2^h d\Omega \quad (\text{C1.13})$$

Al igual que sucedía en el modelo continuo, para cualquier instante $\tau \in [0, t^*]$ se tiene que $\varphi^h(\mathbf{X}, \tau) = \varphi_1^h(\mathbf{X}, \tau)$. Por tanto, la ecuación (C1.12) también es válida para la ecuación de movimiento φ_1^h , lo que equivale a identificar directamente el primer término de la ecuación (C1.13) con la variable $\vartheta_{1(e)}^h = \ln \bar{J}_{1(e)}^h$.

Por otro lado, si se define $\bar{J}_{2(e)}^h$ como:

$$\vartheta_{2(e)}^h = \ln \bar{J}_{2(e)}^h = \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^h(e)} \bar{\mathbf{N}} \ln J_2^h d\Omega \quad (\text{C1.14})$$

la ecuación (C1.13) se puede reescribir como:

$$\vartheta_{(e)}^h = \vartheta_{1(e)}^h + \vartheta_{2(e)}^h \quad (\text{C1.15})$$

Desaciendo logaritmos, la ecuación (C1.15) corresponde a la descomposición multiplicativa de la deformación volumétrica $\bar{J}_{(e)}^h$:

$$\bar{J}_{(e)}^h = \bar{J}_{1(e)}^h \bar{J}_{2(e)}^h \quad (\text{C1.16})$$

Sustituyendo las ecuaciones (C1.2), (C1.3) y (C1.16) en (C1.4) es inmediato llegar a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones corregido $\bar{\mathbf{F}}^h$ en el modelo discreto:

$$\bar{\mathbf{F}}_{(e)}^h = \bar{\mathbf{F}}_{2(e)}^h \cdot \bar{\mathbf{F}}_{1(e)}^h \quad (\text{C1.17})$$

Desde el punto de vista algorítmico, el cálculo de la ecuación (C1.14) (correspondiente a la formulación del tipo lagrangiano actualizado) se realiza de forma similar al de la ecuación (C1.12) (correspondiente a la formulación del tipo lagrangiano total), lo que supone una ventaja importante. La única modificación a tener en cuenta durante la implementación es la descrita por la ecuación (5.16) correspondiente a la corrección del dominio de integración por el factor J_1 .

Anexo C2

Transferencia de información.

Uno de los componentes más importantes que integran la técnica de remallado es la transferencia de información. Su finalidad es transferir la información desde la malla vieja a la malla nueva. Este proceso no aporta nada nuevo a la resolución del problema, sin embargo, la calidad de los resultados dependerá en gran medida de la eficacia con que se lleve a cabo la transferencia de información. Una mala metodología para transferir la información puede arruinar cualquier resultado por buenos que estos sean. Por ello, aspectos tan aparentemente simples como la elección de las variables a transferir no son en absoluto triviales. Por un lado, las variables a transferir vendrán determinadas no solo por la cinemática o por la ecuación constitutiva, sino que también dependerá de los errores que genere el propio proceso de transferir la información y el modo en que son corregidos.

La proyección desde los puntos de gaus a los nodos proporciona un estado tensional que ni está en equilibrio ni verifica la ecuación constitutiva. El problema se agrava todavía más cuando se transfiere la información desde una malla a otra. Para corregir estas inconsistencias se realiza lo que se ha denominado estado de carga en vacío, el cual no es más que repetir el último incremento convergido antes de mallar pero partiendo de la información transferida desde la malla vieja. Repetir el último incremento implica transferir información del estado en el instante t_n , lo que se efectúa transfiriendo el estado prueba $(\cdot)^{h^{trial}}$ correspondiente al instante t_{n+1} . Con ello, lo que se consigue es que el procedimiento de cálculo del modelo *rate-independent* sea el mismo que el del modelo *rate-dependent*. En particular, las variables que se transfieren en el instante t_{n+1} debidas al movimiento φ_1 son¹:

$$\mathbb{V}^h = \left\{ \tau_1^{h^{trial}}, \eta_1^{h^{trial}}, J_1^h, \xi_1^{h^{trial}}, \mathbf{V}_1^h \right\} \quad (C2.1)$$

El resto de variables son inicializadas a cero. Adoptando esta estrategia no hace falta transferir la ecuación de movimiento φ_1 , estrategia adoptada en [90], ni las deformaciones totales y plásticas simultáneamente como proponen en [55].

Como se refleja de la figura C2.1, el objetivo es volver a calcular el estado t_{n+1} sobre la nueva malla $h + 1$ pero partiendo de la información transferida desde la malla vieja:

$$\tilde{\mathbb{V}}^{h+1} = \left\{ \tilde{\tau}_1^{h+1^{trial}}, \tilde{\eta}_1^{h+1}, \tilde{J}_1^{h+1}, \tilde{\xi}_1^{h+1^{trial}}, \tilde{\mathbf{V}}_1^{h+1} \right\} \quad (C2.2)$$

En primer lugar, el cálculo de la densidad en el instante t_{n+1} se obtiene a partir de la densidad inicializada $\tilde{\eta}_1^{h+1}$ y del determinante del tensor gradiente de deformaciones $J_{2_{n+1}}$ correspondiente

¹En el caso de usar la formulación mixta también debe ser transferida la deformación volumétrica \bar{J}_{n+1}^h .

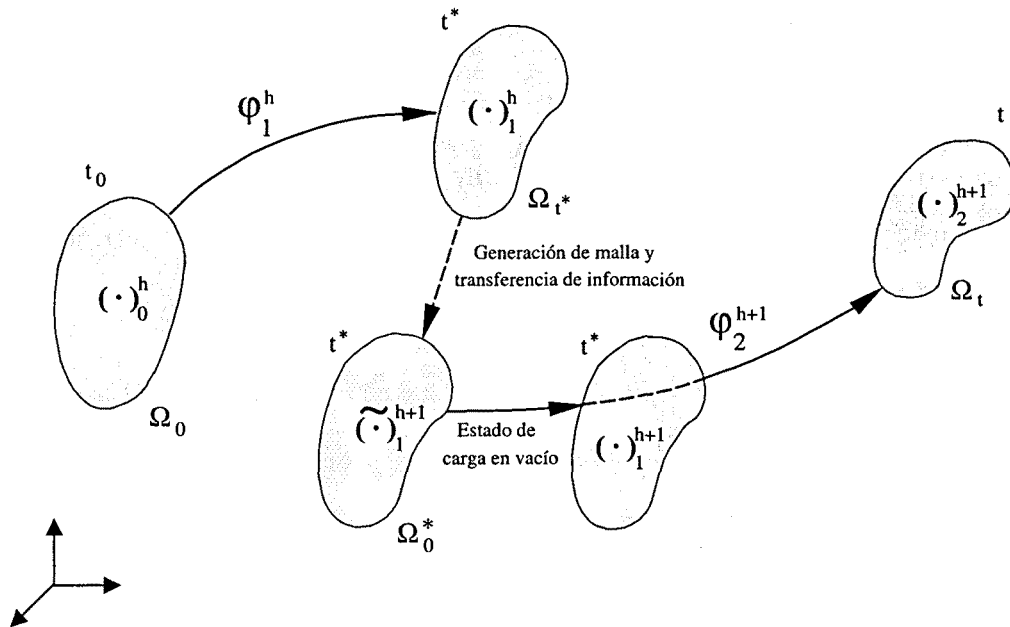


Figura C2.1: Transferencia de información y estado de carga en vacío.

al movimiento φ_2 por medio de la ecuación (5.2)²:

$$\eta_{n+1} = \frac{\tilde{\eta}_1^{h+1}}{J_{2n+1}} \quad (C2.3)$$

Por otro lado, el cálculo del estado tensional en el instante t_{n+1} se obtuvo en el capítulo 3 como:

$$\tau_{n+1} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) \quad (C2.4a)$$

$$\tau_{n+1}^{trial} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}}) \quad (C2.4b)$$

Por tanto, la deformación elástica inicial procedente del movimiento φ_1 se calcula como:

$$\Delta \mathbf{E}_1^{e^{trial}} = \mathbf{E}_1^* - \mathbf{E}_1^{p^{trial}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^{p^{trial}} = \mathbf{c}^{-1} : \tilde{\tau}_1^{h+1^{trial}} \quad (C2.5)$$

Por otro lado, haciendo uso de las ecuaciones (5.13a-c) y (C2.4a), el cálculo de la tensión debida al movimiento φ_1 y φ_2 (movimiento completo) se puede formular como:

$$\tau_{n+1} = \mathbf{c} : \Delta \mathbf{E}_1^{e^{trial}} + \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{2n+1} - \mathbf{e}_{2n+1}^p) \quad (C2.6)$$

cuyo cálculo se realiza utilizando el algoritmo predictor-corrector descrito en el capítulo 3 y en el que se hace uso de las relaciones cinemáticas descritas en el apartado 5.1. La única modificación

²Por simplicidad en la notación, y salvo mención expresa, se suprimirá el superíndice referente a la discretización del problema $(\cdot)^h$.

que implica la ecuación (C2.6) en el código informático es la adición del término correspondiente a las deformaciones elásticas asociadas al movimiento φ_1 .

Antes de reinicializar el cálculo, las deformaciones totales y las plásticas son inicializadas a cero mientras que las deformaciones elásticas se inicializan por medio de la ecuación (C2.5). Posteriormente, todas las deformaciones asociadas al movimiento φ_2 se calculan de forma estándar a como se procedería para el movimiento completo φ , por lo que su cálculo no implica ninguna modificación en el código informático. En particular, las deformaciones totales correspondientes al movimiento φ_2 se determinaran a partir de la expresión (5.5) como:

$$\mathbf{e}_{2n+1} = \phi_{2*}^{n+1}(\mathbf{E}_{2n+1}^*) = \mathbf{g} + \mathbf{F}_{2n+1}^{-T} \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{F}_{2n+1}^{-1} \quad (\text{C2.7})$$

donde $\phi_{2*}^{n+1}(\cdot) = \mathbf{F}_{2n+1}^{-T} \cdot (\cdot) \cdot \mathbf{F}_{2n+1}^{-1}$. En cuanto a la deformación plástica correspondiente al movimiento φ_2 , su cálculo en un modelo elastoplástico se realiza a partir de la expresión (3.82):

$$\mathbf{e}_{2n+1}^p = \phi_{2*}^{n+1}(\mathbf{E}_n^{*p}) + \sum_{\alpha \in \mathbf{J}_\phi} \Delta \lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{m}_\alpha^{n+1} \quad (\text{C2.8})$$

Mientras que en el caso del modelo elastoviscoplastico, la deformación viscoplastica correspondiente al movimiento φ_2 se calcula a partir de la expresión (3.110) como:

$$\mathbf{e}_{2n+1}^{vp} = \phi_{2*}^{n+1}(\mathbf{E}_{2n}^{*vp}) + \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_{n+1}} \mathbf{c}^{-1} : (\boldsymbol{\tau}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) \quad (\text{C2.9})$$

Por otro lado, el cálculo de las variables de endurecimiento se realiza por medio de las ecuaciones (3.87) y (3.88):

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} + \sum_{\alpha \in \mathbf{J}_\phi} \Delta \lambda_\alpha^{n+1} \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (\text{C2.10a})$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = -\hat{\mathbf{K}}'(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \quad (\text{C2.10b})$$

donde $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^{h+1, trial}$ en el estado de carga en vacío.

Las ecuaciones (C2.3), (C2.6), (C2.7), (C2.8), (C2.9) y (C2.10a-b) son válidas para cualquier incremento ($t_{n+1} \geq t^*$) y en particular para el estado de carga en vacío.

Observación C2.1 *Es fácil comprobar que si la transferencia de información fuese perfecta, entonces se recuperaría el mismo estado que antes de remallar. A pesar de ello, si que se produciría deformación plástica puesto que la información que se transfiere es el estado prueba. No obstante, la deformación plástica generada sería la misma que la correspondiente al incremento $[t_n, t_{n+1}]$ antes de remallar.*

Capítulo 6

Ejemplos de simulación numérica.

En este capítulo se presentan algunas simulaciones numéricas llevadas a cabo con el modelo presentado en el capítulo 3.

En la sección 6.1 se describe las características del material empleado que definen el modelo. En particular, se describen las propiedades físicas del material, la evolución de la superficie de fluencia, el coeficiente de fricción entre el polvo y las paredes del model. Adicionalmente se definen la evolución del tiempo de relajación empleado en la definición del modelo viscoplástico.

En la sección 6.2 se describen distintos ejemplos de simulación. Los dos primeros tienen la finalidad de validar el modelo durante la fase de prensado. Estos ejemplos corresponden a piezas de geometría muy simple que son presandas directamente sin la necesidad de tener en cuenta la fase de transferencia o transporte de cámaras. En ambos casos se dispone de valores experimentales que son comparados con los resultados numéricos obtenidos. El ejemplo siguiente, tiene por objeto mostrar la relevancia de considerar las etapas previas al prensado, mostrando la utilidad de la herramienta numérica en cámaras de compactación complejas y difíciles de llenar. En este caso, se hace necesario tener en cuenta la transferencia. No obstante, se consedera el caso en que la cámara de compactación inicial está llena y el caso en que está parcialmente llena, estudiando en ambas situaciones la misma secuencia de prensado con la finalidad de ver las diferencias.

Todos los ejemplos simulados corresponden a piezas de revolución. Por esta razón, solo se discretiza media sección con la intención de reducir el coste de cómputo, aplicando las condiciones de simetría axial pertinentes.

6.1 Definición de datos.

El comportamiento del pulvimaterial queda caracterizado por el material base empleado, la proporción de los componentes de la mezcla, la morfología de las par-

ticulas, la granulometría, el lubricante empleado, etc. Todos estos aspectos deben ser tenidos en cuenta de alguna manera por el modelo numérico propuesto. En particular, el modelo descrito en el capítulo 3 engloba todas estas características en un reducido grupo de propiedades observables que consideran a las partículas en su conjunto desde un punto de vista macroscópico. De esta manera, describir el modelo se reduce a especificar las propiedades físicas del pulvimaterial (la densidad, las constantes elásticas, etc), la evolución de la superficie de fluencia o el coeficiente de fricción entre el polvo y las paredes del molde. Sin embargo, efectuar una simple modificación en las características del pulvimaterial, como un cambio en la morfología de las partículas, implica alterar su comportamiento y, por tanto, tener que considerarlo como un material distinto.

En este apartado se describe las propiedades que definen el modelo empleado durante los ejemplos de simulación presentados en este capítulo.

Definición del material.

El polvo considerado para la simulación de los ejemplos propuestos en este capítulo está compuesto por un 99.2% de hierro atomizado mezclado con un 0.8% de estearato de zinc. Las propiedades físicas atribuidas a este material son:

- Densidad aparente inicial: $\rho_0 = 3.29 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- Densidad teórica: $\rho_{teo} = 7.495 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- Módulo de Young: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$
- Resistencia máxima a compresión: $\sigma_y = 274.33 \text{ MPa}$

A partir de estos datos, la densidad relativa inicial η_0 se obtiene de forma inmediata a través de la relación $\eta_0 = \rho_0/\rho = 0.4389$.

En el capítulo 3, se describió el modelo empleado para la simulación de las etapas de transporte de cámaras y prensado de los procesos de compactación. Este modelo se basa en la teoría de la plasticidad, por lo que el comportamiento del pulvimaterial está vinculado a la evolución de la superficie de fluencia. En particular, la superficie de fluencia se definió en las ecuaciones (3.67a-c), (3.68) y (3.69):

$$\phi_{01} = I_1 - \sqrt{3} \frac{c(\hat{\eta})}{\tan \phi} \quad (6.1a)$$

$$\phi_1 = \sqrt{J_2} + \frac{\tan \phi}{\sqrt{6}} \left(I_1 - \sqrt{3} \frac{c(\hat{\eta})}{\tan \phi} \right) \quad (6.1b)$$

$$\phi_2 = 2J_2 + 2 \left(\frac{r_1(\hat{\eta})}{r_2(\hat{\eta})} \right)^2 I_1^2 - 2r_2^2(\hat{\eta}) \quad (6.1c)$$

donde c , ϕ , r_1 y r_2 son parámetros que dependen del material considerado.

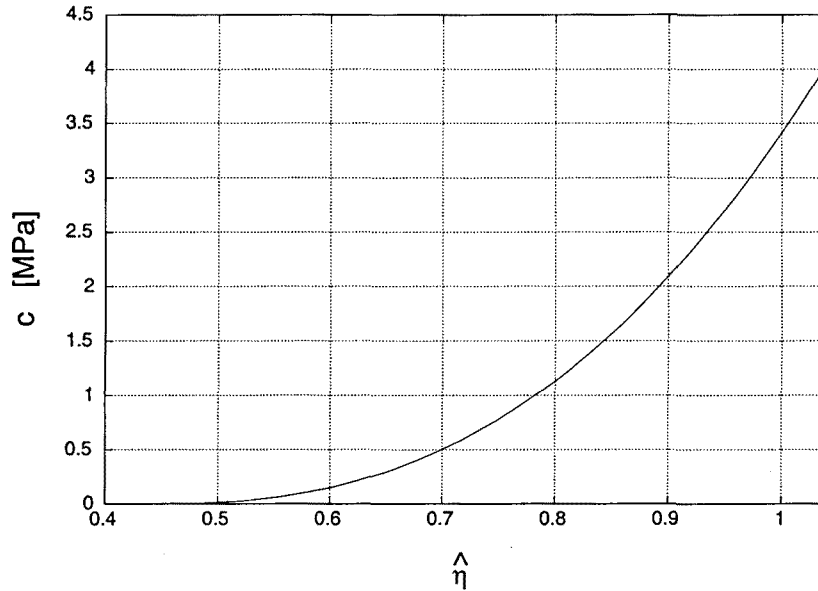


Figura 6.1: Evolución de c en función de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$.

Esencialmente, las superficies ϕ_{01} y ϕ_1 caracterizan el comportamiento del polvo durante las etapas de transferencia y el transporte de cámaras. Su evolución está definida por los parámetros del material c y ϕ , cuyo significado físico se describió en el capítulo 3. La evolución considerada para estos parámetros están dadas por las expresiones:

$$c = 4.056 \left(\frac{\hat{\eta} - \eta_0}{1.04 - \eta_0} \right)^{2.5} \text{ MPa} \quad (6.2a)$$

$$\phi = 49.4^\circ \quad (6.2b)$$

En particular, ensayos realizados por Doremus y Bouvard [109] muestran que, en la práctica, el parámetro ϕ es independiente de la densidad. Además, este parámetro apenas varía dentro de las distintas mezclas de polvo que fueron ensayadas, razón por la que se ha adoptado el valor propuesto en dicha referencia. Por otro lado, la cohesión c si depende de la densidad máxima alcanzada en la historia del proceso $\hat{\eta}(t) = \max_{\tau \in [0, t]} \eta(\tau)$ como se muestra en la figura 6.1.

La superficie ϕ_2 caracteriza el comportamiento del polvo durante la etapa de prensado. En particular, la superficie ϕ_2 inicialmente empleada fue utilizada con éxito por Oliver y Cante [15][83] en la simulación de procesos de compactación. Posteriormente, la superficie fue calibrada para el polvo considerado a partir de un conjunto de datos experimentales medidos en un rango de densidades relativas

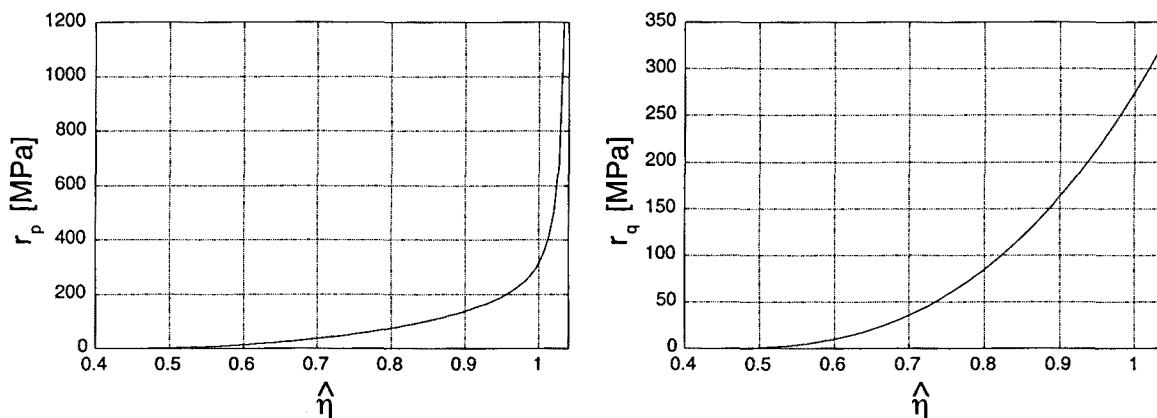


Figura 6.2: Evolución de los radios de la elipse $\phi_2 = 0$ en el plano p - q en función de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$.

comprendido entre $\eta_{\min} \approx 0.75$ y $\eta_{\max} \approx 0.95$ [16][10][81]. No obstante, la etapa de transferencia y transporte de cámaras tiene lugar a densidades inferiores. Por esta razón, se ha procedido a reformular la superficie ϕ_2 de tal manera que coincida con la superficie calibrada dentro del rango de densidades $\eta \in [0.75, 0.95]$ pero que reproduzca adecuadamente, aunque por el momento de forma cualitativa, las etapas de transferencia y transporte de cámaras. Concretamente, los cambios realizados conciernen básicamente a la forma y a la evolución de la superficie para densidades próximas a la densidad inicial o a la densidad teórica.

La ecuación (6.1c) define la superficie $\phi_2 = 0$ en términos de los radios r_1 y r_2 correspondientes a una elipse en el plano $I_1 - \sqrt{J_2}$. Estos radios están dados por las expresiones:

$$r_1 = 10^{-1} + 1737.4 (\hat{\eta} - \eta_0)^{2.257} + 33.404 \frac{\hat{\eta} - \eta_0}{1.04 - \eta_0} \text{ MPa} \quad (6.3a)$$

$$r_2 = 10^{-4} + 736.485 (\hat{\eta} - \eta_0)^{2.659} \text{ MPa} \quad (6.3b)$$

donde r_1 corresponde al eje esférico I_1 , mientras que r_2 corresponde al eje desviador $\sqrt{J_2}$. Sin embargo, en lugar de los invariantes tensionales I_1 y J_2 es habitual en pulvimetalurgia hablar en términos de $p = -I_1/3$ y $q = \sqrt{3J_2}$. La evolución de los radios asociados a la elipse representada en el plano p - q respecto a la densidad máxima histórica $\hat{\eta}$ está representada gráficamente en la figura 6.2.

Inicialmente, la calibración de la superficie ϕ_2 se efectuó para un rango de densidades intermedio con la finalidad de reproducir correctamente la etapa de prensado. Por este motivo, es de esperar que las curvas (6.3a) reproduzcan correctamente el comportamiento del polvo durante la etapa de prensado. De hecho, el modelo original y las curvas (6.3a) conducen a resultados similares en la simulación de procesos

de compactación que son meramente de prensado.

Modelo viscoplástico. Además de la superficie de fluencia y de la regla de flujo, las deformaciones irreversibles dependen de un parámetro adicional τ en el modelo viscoplástico. Como ya se comentó en el capítulo 3, el tiempo de relajación τ se ha considerado dependiente de la densidad máxima histórica $\tau = \tau(\hat{\eta})$. El motivo es utilizar un tiempo de relajación pequeño en las etapas iniciales de la compactación, donde el orden de magnitud de las tensiones es muy pequeño, mientras que en las etapas finales de la compactación se utiliza un tiempo de relajación mayor en concordancia con el utilizado en la simulación de la fase de prensado.

En particular, la evolución considerada para el tiempo de relajación está dada por la expresión:

$$\tau(\hat{\eta}) = \frac{1}{2} (\tau_{\infty} + \tau_0) - \frac{1}{2} (\tau_{\infty} - \tau_0) \tanh(20(\hat{\eta} - 0.6)) \quad \text{ms} \quad (6.4)$$

donde τ_{∞} es el tiempo de relajación correspondiente a las etapas finales de la compactación y τ_0 el tiempo de relajación correspondiente a las etapas iniciales. En particular, los tiempos de relajación considerados son $\tau_{\infty} = 1$ ms y $\tau_0 = 0.1$ ms.

Como se refleja de la figura 6.3, en la práctica el tiempo de relajación empleado durante la etapa de transferencia de cámaras coincide con τ_0 , mientras que el tiempo de relajación empleado durante la etapa de prensado coincide con τ_{∞} .

Definición del modelo de fricción.

Otro aspecto relevante a tener en cuenta para efectuar una correcta modelización del proceso de compactación es el efecto de la fricción entre polvo y las paredes del molde. En gran medida, este fenómeno es responsable de la pérdida de homogeneidad en las propiedades del compacto final. Por lo que reproducir correctamente el comportamiento del polvo requiere emplear un modelo de fricción apropiado. En particular, el modelo de fricción considerado es un modelo de fricción dinámica del tipo Northon-Hoff, cuya descripción se efectuó en el apartado 3.4. Concretamente, el modelo utilizado viene descrito por la relación:

$$t_T = -\mu_d(\hat{\eta}) V_T^{rel} < t_N > \quad (6.5)$$

donde t_T es el esfuerzo tangencial que el polvo realiza sobre la superficie de contacto, t_N es el correspondiente esfuerzo normal, μ_d es el coeficiente de fricción dinámico y V_T^{rel} es la componente tangencial de la velocidad relativa entre el polvo y la pared del molde.

Entre otras cosas, el coeficiente de fricción dinámico depende del polvo empleado y de las propiedades del molde. No obstante, la característica principal del modelo

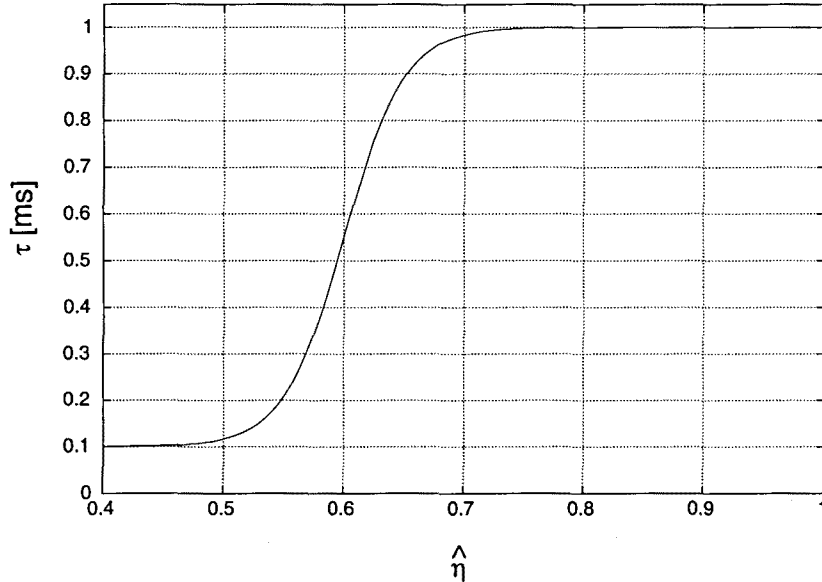


Figura 6.3: Evolución del tiempo de relajación τ en función de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$.

de fricción en los procesos de compactación es la evolución del coeficiente de fricción dinámico μ_d con la densidad. Admitiendo que las propiedades del molde se mantienen invariables en los distintos ejemplos simulados, el comportamiento del coeficiente de fricción dinámico μ_d ha sido calibrado en un proyecto conjunto elaborado entre el Departamento de Resistencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Cataluña y la empresa AMES S.A. [16][10][81][82]. El resultado obtenido para el polvo considerado puede ser resumido en una única expresión formulada de la forma:

$$\mu_d(\hat{\eta}) = 0.014199 + 42.209 \left[-0.015777 + \frac{0.93837 - 0.73179 \hat{\eta}^{0.52606}}{8.5716 \hat{\eta}^{0.33262} + 5.5245 \hat{\eta}^{5.6757} - \hat{\eta}^{6.6757}} \right]^2 \quad (6.6)$$

válida para $\forall \hat{\eta} \in [\eta_0, 1]$. La representación gráfica de la ecuación (6.6) está reproducida en la figura 6.4.

En la gráfica 6.4 se aprecia que el coeficiente de fricción dinámico μ_d es muy grande a bajas densidades, reduciéndose monótonamente hasta un valor mínimo correspondiente a la densidad teórica. Esto se traduce en una pérdida de homogeneidad de las propiedades del compacto ya en las etapas iniciales del proceso de compactación.

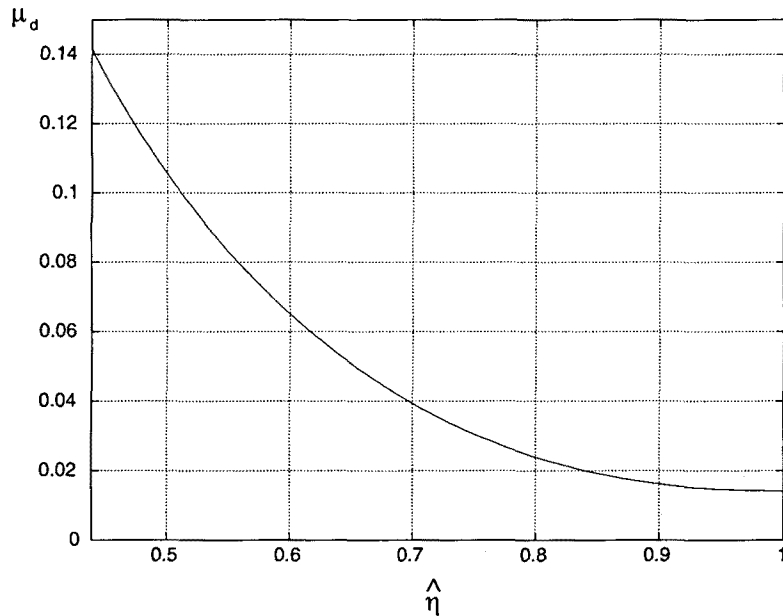


Figura 6.4: Evolución del coeficiente de fricción dinámico μ_d en función de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$.

Tipo de elemento.

Por último, conviene hacer algunos comentarios de carácter numérico, y en concreto, referentes al tipo de elemento empleado en la discretización del cuerpo.

En particular, se han tenido en cuenta dos tipos de elementos, los cuales se describen en la figura 6.5. En ambos casos se han empleado elementos de geometría triangular porque facilitan la generación de las mallas evitando en gran medida la formación de elementos distorsionados.

En primer lugar se ha utilizado el elemento triangular lineal por ser un elemento simple, de bajo coste computacional que proporciona unos buenos resultados durante la fase de prensado.

No obstante, como ya se mencionó en los capítulos 3 y 4, el empleo de una regla de flujo puramente desviadora combinada con el tipo de movimiento que implica la transferencia de cámaras (cuyo objetivo es desplazar el polvo sin compactarlo) pueden generar conocidos problemas numéricos debido a la incompresibilidad de estos procesos. En el capítulo 4 se describió una forma de solventar estos problemas mediante el empleo de una formulación mixta. Sin embargo, esta formulación requiere un tipo de elemento específico, por lo que se ha empleado el elemento mixto P2Q1B. Se trata de un elemento con buenas prestaciones pero de elevado coste computacional.

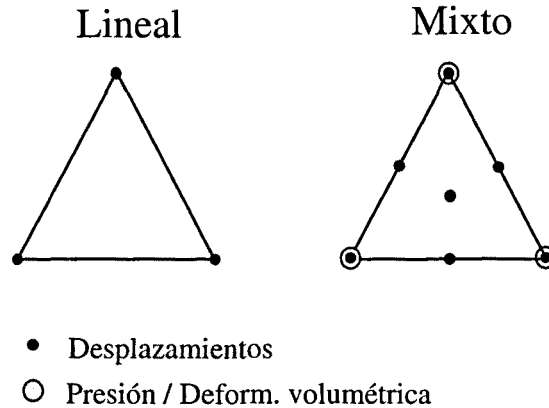


Figura 6.5: Elementos empleados en la discretización del medio. A la izquierda, el elemento triangular lineal. A la derecha, el elemento triangular mixto P2Q1B.

Por otro lado, la integración numérica empleada en ambos tipos de elementos corresponde a la cuadratura de Gauss.

Salvo mención expresa, los ejemplos propuestos se han resuelto empleado la formulación mixta, y por tanto, utilizando el correspondiente elemento mixto P2Q1B. Mientras que el estimador de error empleado corresponde a la función de error en densidades.

6.2 Ejemplos de simulación.

6.2.1 Compactación de una pieza cilíndrica.

El finalidad de este ejemplo es comparar la curva de compresibilidad del pulvimaterial medida experimentalmente con la curva obtenida numéricamente utilizando el modelo descrito en el capítulo 3 y particularizado en la sección 6.1. Para ello, se analiza la compactación uniaxial con efecto simple de una pieza cilíndrica poco esbelta (con una esbeltez¹ del orden de 0.68) con el objetivo de minimizar los efectos de la fricción del polvo con las paredes del molde y obtener así unas propiedades finales altamente homogéneas que son únicamente características del material. La geometría de la cámara de compactación inicial y final, así como la sección a discretizar, se describen en las figuras 6.6 y 6.7, donde el paso de una cámara a otra se lleva a cabo moviendo el punzón superior.

Por otro lado, los resultados de este ejemplo dependen única y exclusivamente de

¹El grado de esbeltez (r/h) se obtiene como el cociente entre el radio de la pieza r y la altura de la pieza compactada h .

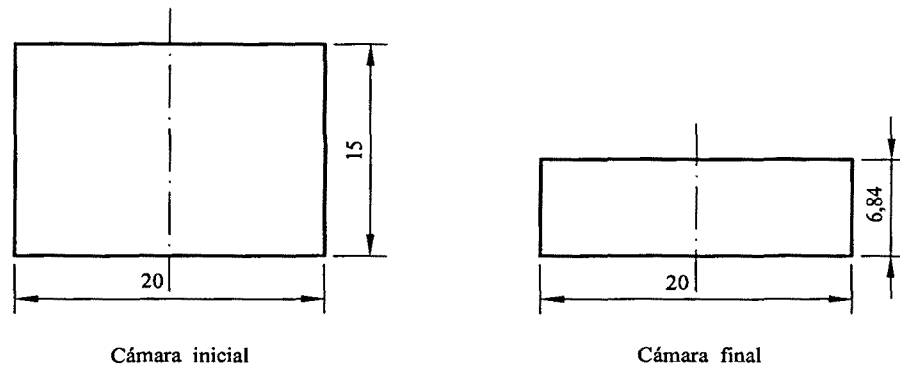


Figura 6.6: Geometría de la cámara de compactación inicial y de la cámara de compactación final.

la superficie de fluencia ϕ_2 , puesto que las superficies ϕ_{01} y ϕ_1 permanecen inactivas durante todo el proceso. Por este motivo, este ejemplo supone una valoración de la respuesta proporcionada por la superficie ϕ_2 durante la fase de prensado.

Se procede a remallar a intervalos regulares correspondientes al 20% del movimiento total del punzón superior. El número de elementos se mantiene entorno a los 400 elemento, utilizando elementos lineales triangulares. El estimador de error empleado en la estrategia de remallado corresponde a la función de error en densidades descrita en el capítulo 5.

Experimentalmente, se mide la presión media aplicada por el punzón superior y la presión radial en un punto de la superficie lateral de la cámara de compactación, mientras que la densidad considerada es la densidad media obtenida de dividir la masa entre el volumen de la cámara de compactación. De esta forma, si los efectos de la fricción no son importantes, se conoce la distribución real de densidades y tensiones en toda la pieza.

El contraste de resultados se muestra en la figura 6.8. En ella se compara la evolución de la presión media aplicada sobre el punzón superior y sobre las paredes laterales con los valores medidos experimentalmente. En general, en la figura se observa una buena correspondencia entre ambos. No obstante, la validez de la comparación depende en gran medida de suponer despreciables los efectos de la fricción, por lo que esta hipótesis debe ser revisada. En particular, la fricción es responsable de la pérdida de homogeneidad dentro de la pieza considerada, pudiendo distorsionar completamente el significado de las mediciones efectuadas. En la figura 6.10 se muestra la distribución correspondiente a las densidades relativas, mientras que las figuras 6.11 y 6.12 hacen referencia a la distribución del estado tensional. En todas ellas, los efectos producidos por la fricción están muy localizados en la cara

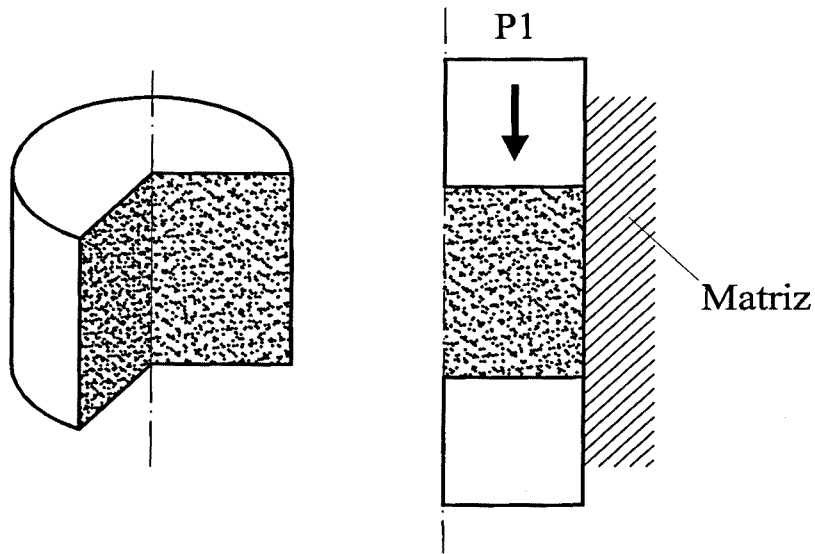


Figura 6.7: Geometría de la cámara de compactación inicial.

lateral del cilindro, y en particular, en la parte superior. En cualquier caso, aunque los efectos que se producen no son grandes, tampoco son despreciables. Esto podría ser en parte el origen de la ligera desviación observada en la presión radial. (ver figura 6.8)

Como se observa en la figura 6.12, la tensión tangencial σ_{rz} es pequeña (del orden de unas 35 veces menor que la presión aplicada por el punzón superior) lo que significa que las fuerzas de fricción son pequeñas. Sin embargo, estas fuerzas son lo suficientemente grandes como para producir una pérdida de homogeneidad apreciable.

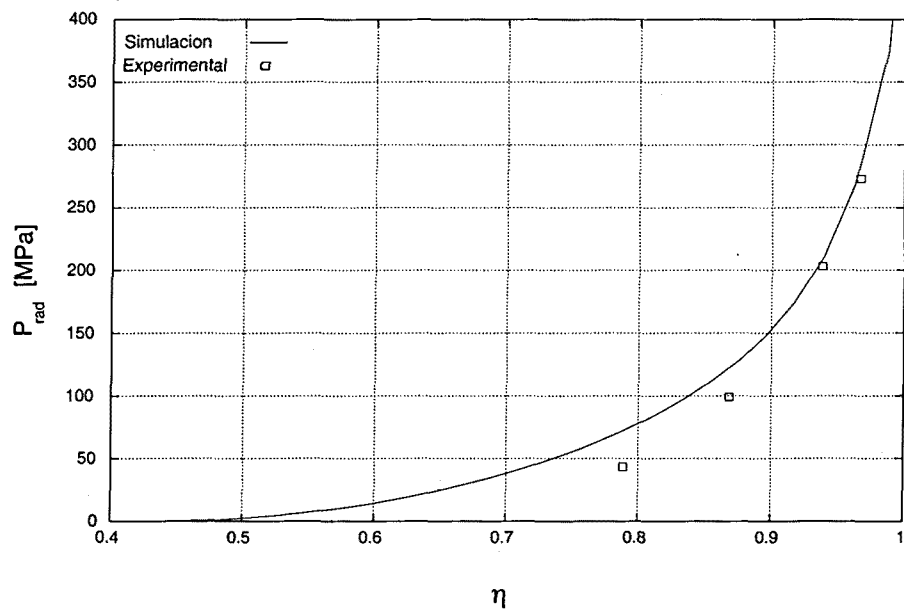
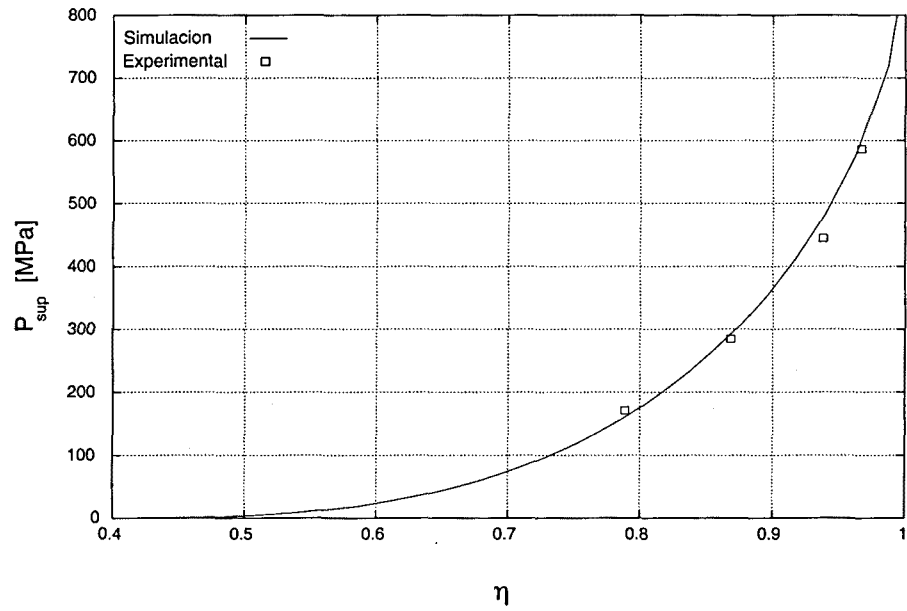


Figura 6.8: Presión axial superior aplicada por el punzón superior y presión radial aplicada por la matriz para distintas densidades relativas.

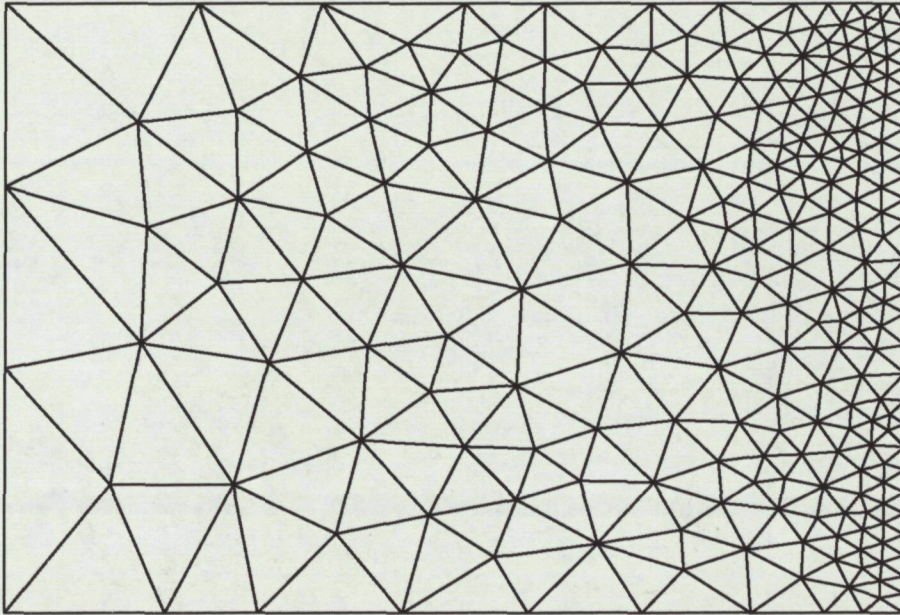


Figura 6.9: Discretización correspondiente a media sección del último incremento de carga.

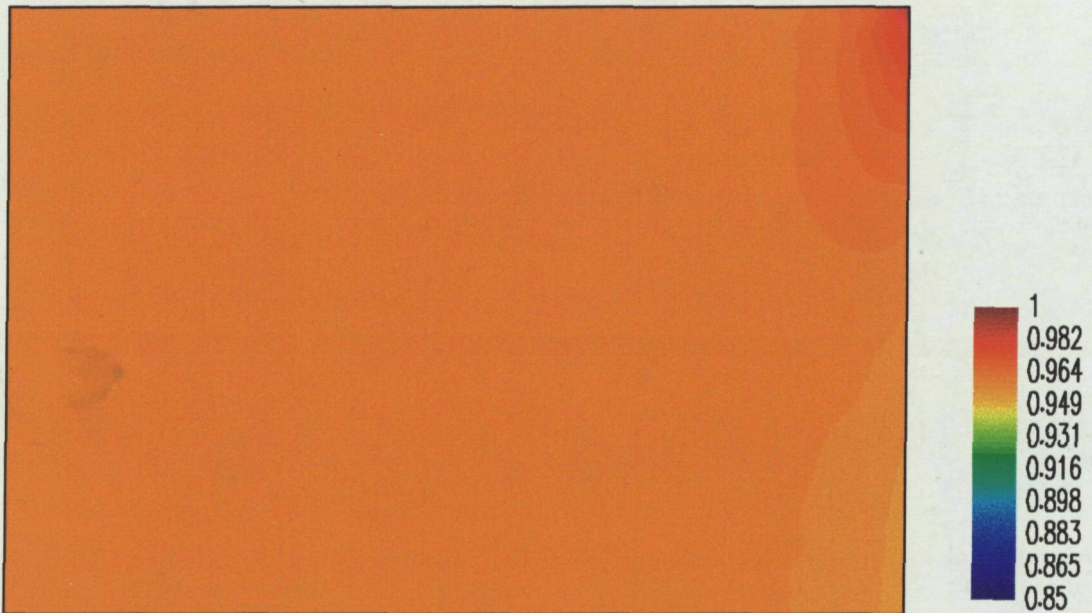


Figura 6.10: Distribución final de densidades relativas η correspondientes al último incremento de carga.

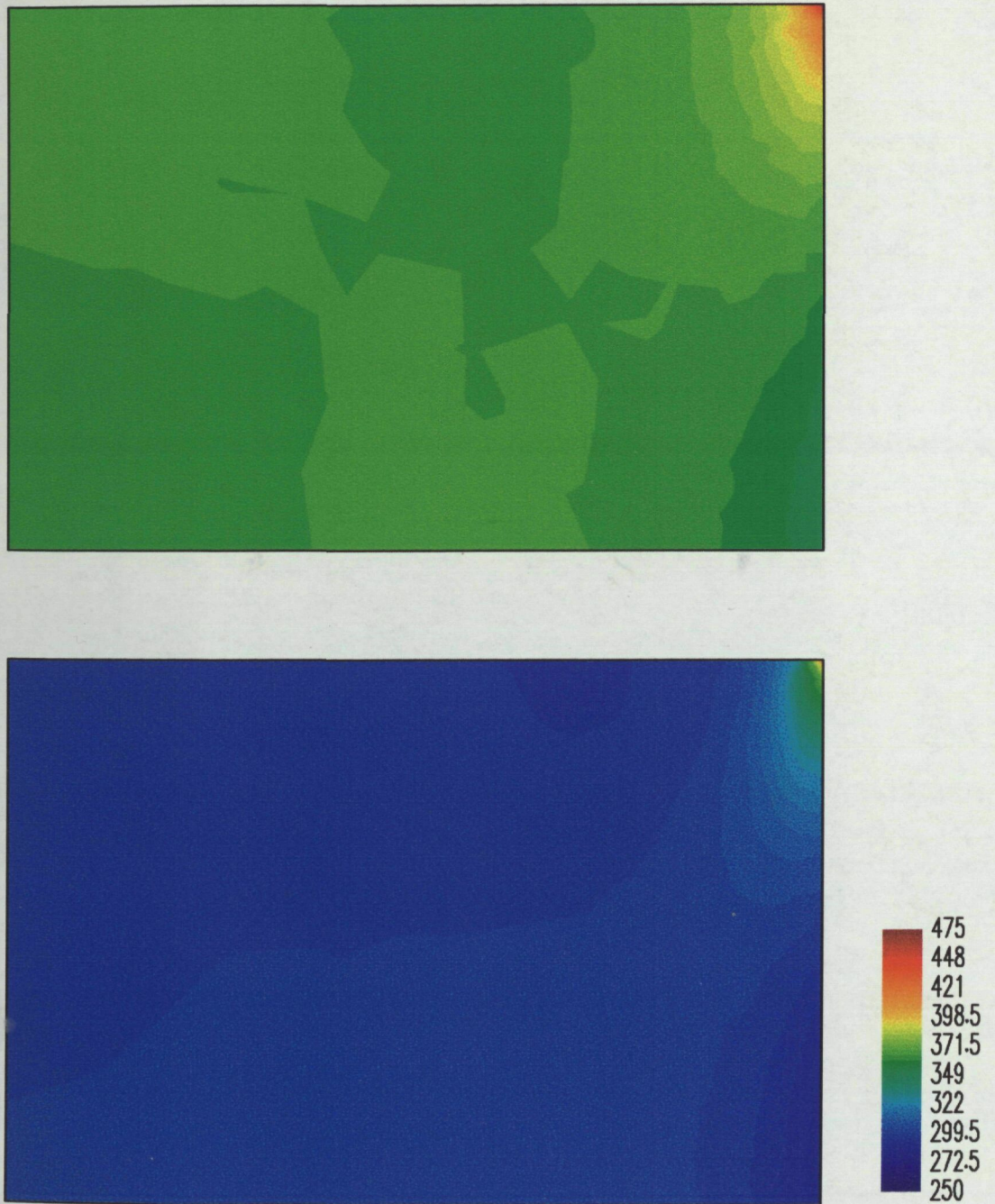


Figura 6.11: Arriba, distribución de presiones $p = -I_1/3$ correspondientes al último incremento de carga. Abajo, distribución del término desviador $q = \sqrt{3J_2}$ correspondiente al último incremento de carga.

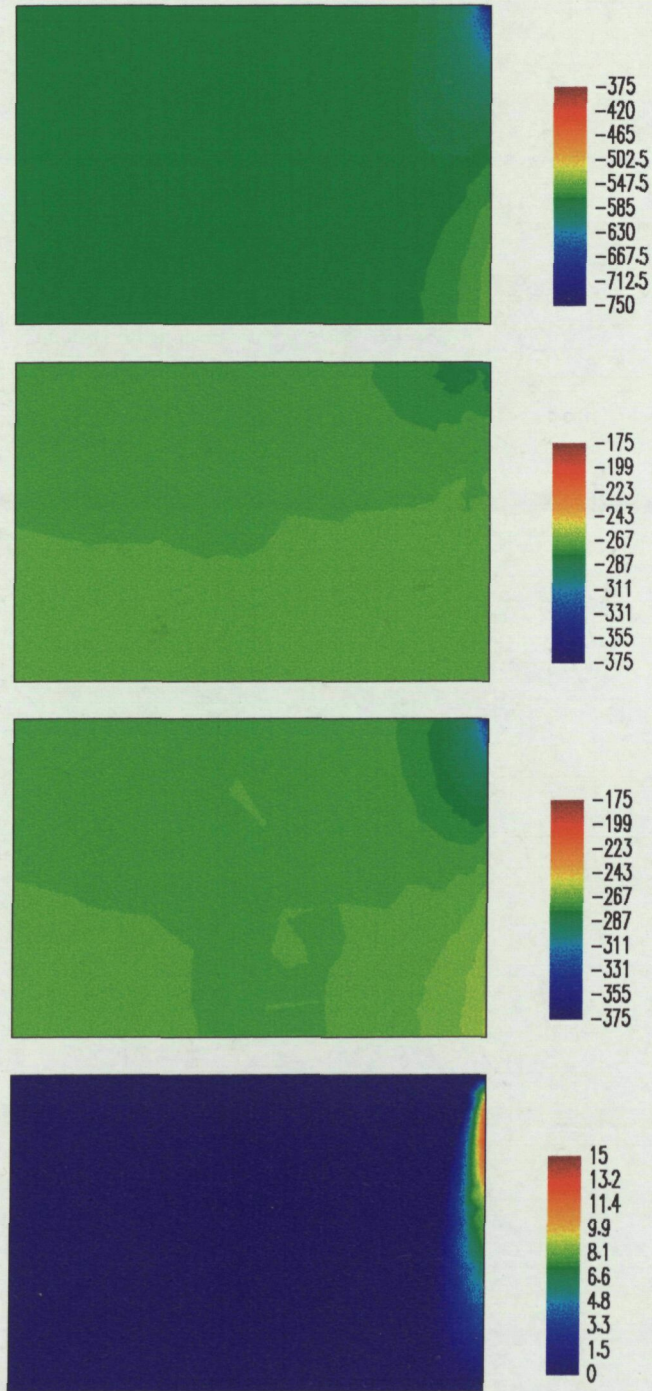


Figura 6.12: Distribución de las componentes correspondientes al tensor de tensiones de Cauchy en el último incremento de carga. De arriba a abajo: a) Componente axial σ_{zz} . b) Componente radial σ_{rr} . c) Componente circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$. d) Componente tangencial σ_{rz} .

6.2.2 Compactación de un casquillo de gran esbeltez.

La finalidad de este ejemplo es examinar el modelo propuesto cuando los efectos de la fricción son trascendentales. La pieza a estudiar es un casquillo de gran esbeltez como el mostrado en las figuras 6.13 y 6.14. La superficie lateral es muy grande en comparación con la sección transversal, lo que implica que el gradiente de densidades en la dirección de prensado sea considerable. Teniendo esto presente, el objetivo es comparar la distribución de densidades obtenida numéricamente con la medida experimentalmente a lo largo de la altura del casquillo.

El proceso considerado es una compactación uniaxial con efecto simple en el que el punzón superior es el punzón móvil. La geometría de la cámara de compactación inicial y final, así como la sección a discretizar, se describen en las figuras 6.13 y 6.14.

La simulación se lleva a cabo utilizando elementos lineales y elementos mixtos, ambos correspondientes a las formulaciones presentadas en el capítulo 4. El número de elementos se mantiene entorno a los 825 en el caso de los elementos lineales, siendo de unos 150 elementos aproximadamente en el caso mixto.

Dada simplicidad de la geometría, se efectúa un primer cálculo de la etapa de prensado sin remallar. La distribución final de densidades obtenida junto con los valores experimentales medidos se muestran en la figura 6.15. En ella se aprecia que tanto el elemento lineal como el elemento mixto predicen correctamente la distribución de densidades en la zona intermedia del casquillo. Sin embargo, el elemento

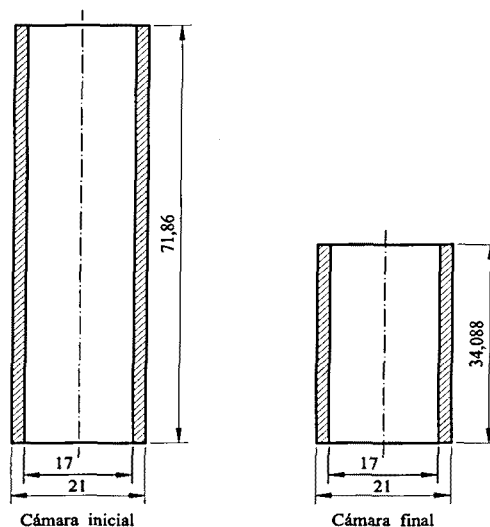


Figura 6.13: Geometría de la cámara de compactación inicial y de la cámara de compactación final.

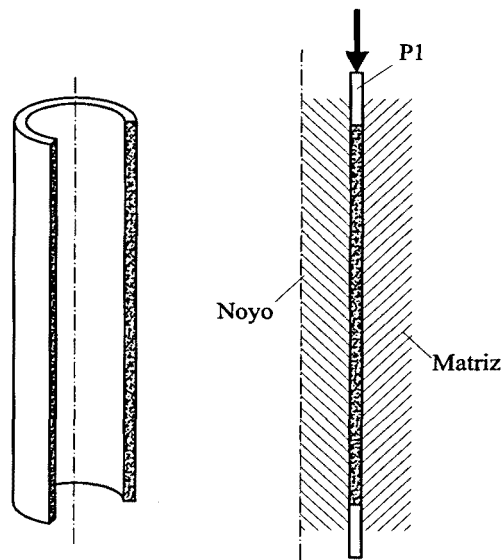


Figura 6.14: Geometría de la cámara de compactación inicial.

lineal presenta importantes oscilaciones en el extremo superior, donde la densidad se uniforma en un valor próximo a la densidad teórica. Por contra, este comportamiento caótico no se reproduce con el elemento mixto que predice correctamente la distribución de densidades. En realidad, en esta zona la superficie de fluencia ϕ_2 prácticamente ha degenerado en el cilindro de Von Mises cuya regla de flujo es puramente desviadora y, por tanto, las deformaciones plásticas son incompresibles.

En principio, este resultado parece mostrar los típicos problemas numéricos debidos a la incompresibilidad plástica. Sin embargo, una observación detallada de la distribución de densidades relativas y sus correspondientes mallas en la figura 6.17 muestran que en ambos tipos de elementos se pierde la uniformidad del alisado al tiempo que se distorsionan los elementos de la malla. De hecho, la distorsión es el motivo real de las inestabilidades mostradas por el elemento lineal y no la incompresibilidad plástica, como se expone a continuación.

En una segunda etapa, se procede a repetir el cálculo en las mismas condiciones con la salvedad de emplear una estrategia de remallado automático a fin de eliminar las distorsiones. Para ello, se emplea el estimador de error en función de las densidades descrito en el capítulo 5. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.16. En este caso, ambos tipos de elementos tienen un comportamiento similar en todo el dominio y, en particular, en la parte superior del casquillo, reproduciendo correctamente la distribución de densidades observada experimentalmente en esta

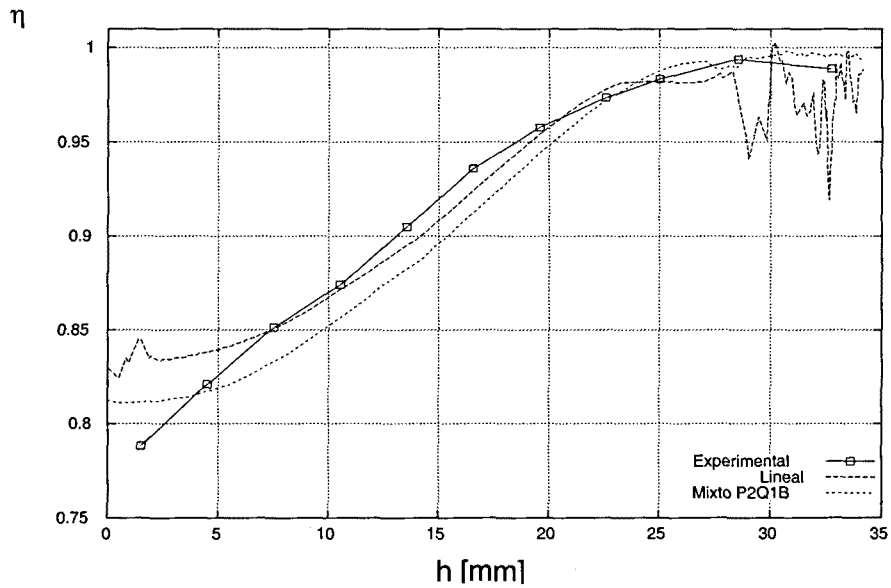


Figura 6.15: Densidad relativa η evaluada a distintas alturas de la pieza final. Resultados numéricos obtenidos sin remallar.

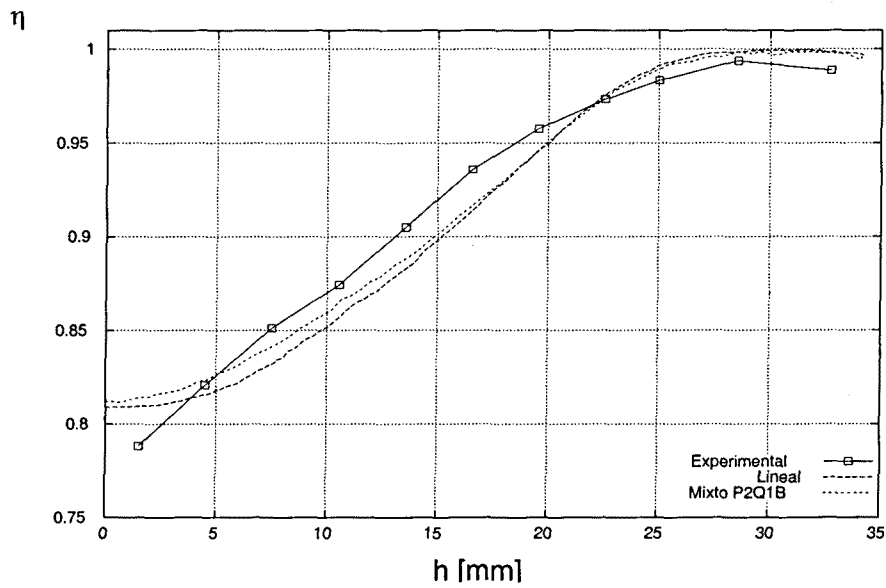


Figura 6.16: Densidad relativa η evaluada a distintas alturas de la pieza final. Resultados numéricos obtenidos remallando.

zona.

En la figura 6.17 se puede apreciar el mapa de densidades obtenidas. En ella se observa una distribución alisada sin irregularidades entorno a los nodos de los elementos distorsionados.

Una comparación de las figuras 6.15 y 6.16 permite concluir que la fuente de las oscilaciones producidas por el elemento lineal se debe a las distorsiones y no a la incompresibilidad plástica. En realidad, las deformaciones plásticas son incompresibles pero no las deformaciones totales, ya que el modelo tiene cierta compresibilidad elástica que permite eludir los problemas de bloqueo numérico por incompresibilidad. Por este motivo, el empleo de la formulación mixta es innecesario en las etapas finales del prensado.

Por otro lado, tanto en la figura 6.15 como en la 6.16, se observa que la densidad en la parte inferior del casquillo se desvía de los valores experimentales independientemente del tipo de elemento empleado en el cálculo. La causa se debe a que el modelo de fricción dinámica no funciona bien en las zonas con una velocidad muy pequeña, ya que tiende a anular la fricción (como consecuencia del término correspondiente a la velocidad relativa tangente V_T^{rel} entre el polvo y la pared del molde) cuando en realidad existe un valor umbral. Por ejemplo, el modelo no tiene en cuenta el coeficiente de fricción estática observado experimentalmente por Pavier en [89] y [87]. Esto supone una limitación del modelo de fricción.

No obstante, en líneas generales, la distribución de densidades concuerda de forma muy aceptable con las experimentales, lo que induce a pensar que tanto el modelo constitutivo como el modelo de fricción reproducen adecuadamente el comportamiento del polvo durante el proceso de prensado.

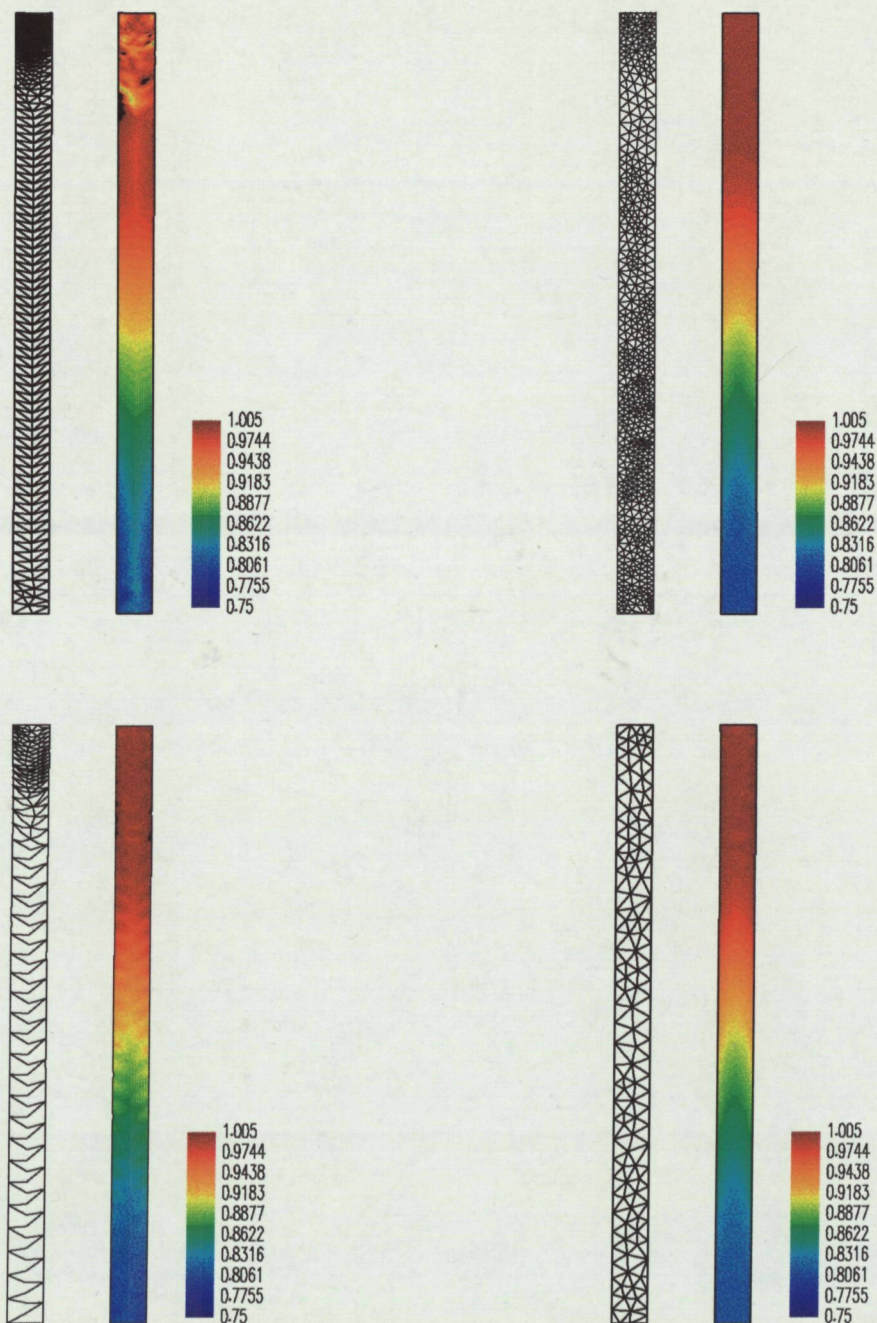


Figura 6.17: Discretización y distribución de la densidad relativa η correspondiente a la pieza final. Los figuras corresponden a resolución con elementos triangulares lineales sin remallar (arriba a la izquierda), con elementos triangulares lineales remallando (arriba a la derecha), con elementos mixtos P2Q1B sin remallar (abajo a la izquierda) y con elementos mixtos P2Q1B remallando (abajo a la derecha).

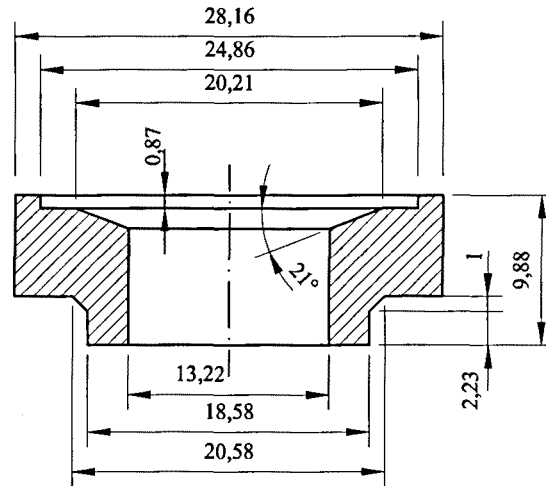


Figura 6.18: Geometría de la pieza.

6.2.3 Pieza 4844.

La finalidad de este ejemplo es mostrar la influencia que tiene la transferencia de cámaras en el proceso de compactación. Para ello se estudia la elaboración de una pieza con una geometría compleja, como la descrita en la figura 6.18, en la que es físicamente imposible llenar completamente de polvo la cámara de compactación inicial. El proceso se estudia considerando dos hipótesis iniciales distintas con la intención de compararlas y evaluar las consecuencias de la transferencia de cámaras.

El primer caso se realiza con el propósito de simular exclusivamente la etapa de prensado. Para ello, es necesario efectuar la simulación suponiendo la cámara de compactación inicial completamente llena. Adicionalmente, se considera la hipótesis que presupone una distribución inicial de densidades homogénea e igual a la densidad inicial del polvo. En este caso, la cámara de compactación inicial coincide con la cámara correspondiente al inicio de la fase de prensado, por lo que el movimiento de punzones se efectúa únicamente con la finalidad de compactar el polvo.

En el segundo caso, el proceso se estudia desde un punto de vista más realista que supone la cámara de compactación inicial parcialmente llena. Concretamente, la superficie libre del polvo se considera enrasada y tocando al punzón superior correspondiente en su cota más baja. Al igual que en el primer caso, también se acepta la hipótesis que supone una distribución de densidades homogénea en la cámara inicial e igual a la densidad inicial del polvo. Sin embargo, la trascendencia de la cámara inicial de este caso es distinta a la que tenía en el caso anterior, por lo que esta hipótesis tiene implicaciones distintas. En este caso, el movimiento de los punzones se efectúa con la intención de mover el polvo de unas zonas a otras

y compactarlo simultáneamente. Por esta razón, el proceso de compactación se subdivide en dos categorías: la fase transferencia de cámaras, cuya finalidad es llenar la cámara de compactación al tiempo que el polvo se compacta; y la fase de prensado, cuya finalidad es única y exclusivamente compactar el polvo.

A efectos de poder comparar ambos procesos de compactación, la cámara inicial y el movimiento de punzones se escoge de forma que durante la fase de prensado tengan la misma secuencia, al menos, en lo referente a la evolución de la cámara de compactación. Esto implica diseñar la fase de transferencia para que la cámara de compactación al inicio de la fase de prensado² tenga la misma geometría en ambos procesos.

Compactación a partir de una cámara inicialmente llena.

La geometría de la cámara inicial y final, así como la sección a discretizar, se describe en las figuras 6.19 y 6.20. El proceso de compactación se desarrolla desplazando los tres punzones (P1, P2 y P3) simultáneamente. La magnitud del movimiento de cada uno de ellos se indica en el cuadro 6.1.

		Etapa de prensado
Duración		1 s
P1		2.7 mm
P2		6.6 mm
P3		7.31 mm

Cuadro 6.1: Movimiento de punzones.

Durante la simulación se adopta una estrategia de remallado automático basada en el estimador de error en función de las densidades, procurando mantener el número de elementos de la malla entorno a los 225 elementos. En particular, en la figura 6.21 se muestran las mallas correspondientes a distintos instantes del proceso de compactación, concretamente al 25%, 50%, 75% y al compacto final. Los resultados obtenidos para los correspondientes incrementos de carga se resumen en las figuras 6.22, 6.23, 6.24 y 6.25.

La figura 6.22 muestra la evolución de las densidades durante el proceso de compactación. En ella se aprecia una distribución con un grado de homogeneidad considerable durante todo el proceso. Una observación más detallada revela la aparición

²Como se muestra más adelante, salvo que la cámara inicial esté completamente llena, el inicio real de la fase de prensado es muy difícil de precisar. Por este motivo, y ha efectos de establecer un criterio comparativo, el inicio de la fase de prensado se atribuye a la cámara de compactación que tiene el volumen correspondiente a la masa de polvo sin compactar (ésto es con densidad aparente inicial).

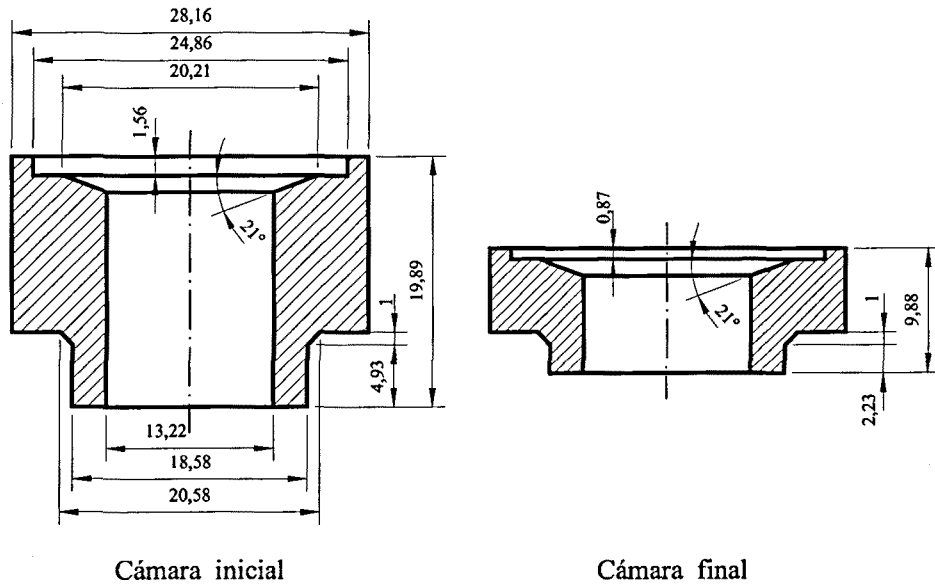


Figura 6.19: Geometría de la cámara de compactación inicial y de la cámara de compactación final.

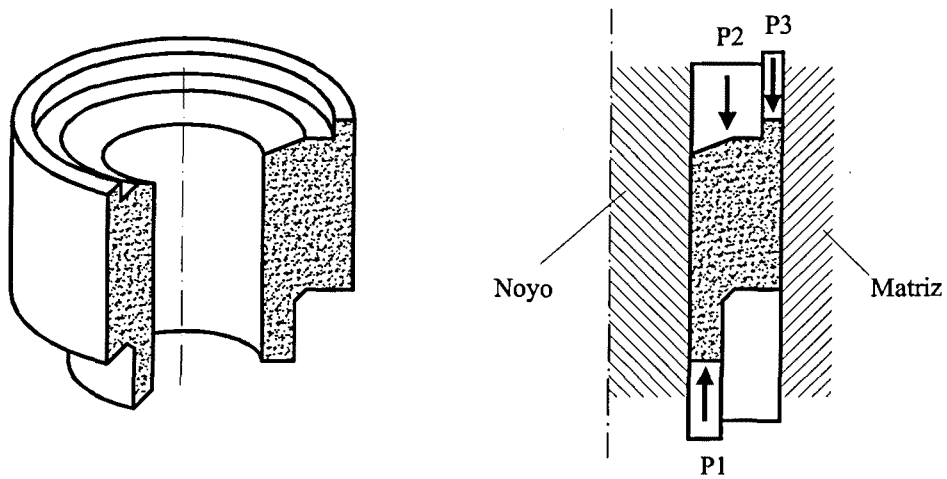


Figura 6.20: Geometría de la cámara de compactación inicial.

de gradientes de densidad en las esquinas definidas por los punzones móviles, sobre todo en la parte superior que corresponde a los punzones de mayor desplazamiento y en especial en la pared lateral exterior de la pieza.

Las figuras 6.23 y 6.24 muestran el estado tensional en función de los términos $p = -I_1/3$ y $q = \sqrt{3J_2}$ durante el proceso de prensado. En ellas se aprecia una distribución bastante uniforme, del orden de unos 300-400MPa al final del prensado, salvo en algunas esquinas. No obstante, este gradiente se debe más a errores de discretización por usar elementos excesivamente grandes que no a la distribución real de tensiones. Hay que recordar que el estimador de error empleado en la optimización de las mallas está en función de la densidad y no de las tensiones, por lo que el refinamiento se efectúa allí donde el gradiente de densidades es mayor, y no necesariamente donde el gradiente de tensiones es mayor. Sin embargo, este problema puede solventarse fácilmente aumentando el número de elementos de la malla.

Por último, en la figura 6.25 se muestran los desplazamientos sufridos por la superficie lateral exterior y la superficie superior de la pieza a consecuencia de la recuperación elástica (*spring back*) producidas durante la descarga. La magnitud de estos desplazamientos viene a ser del orden del 0.2% en la dirección radial y del orden de 0.5% en la dirección longitudinal.

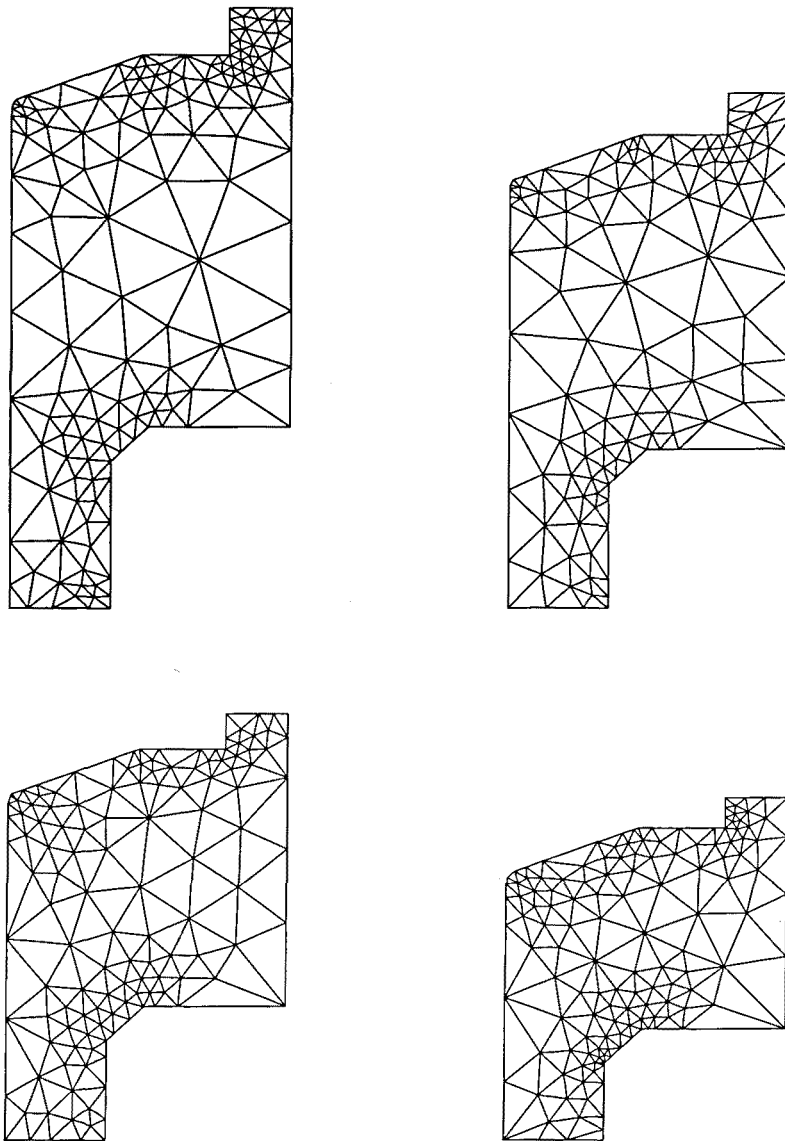


Figura 6.21: Discretización en distintos instantes del proceso de compactación suponiendo una cámara inicial completamente llena.

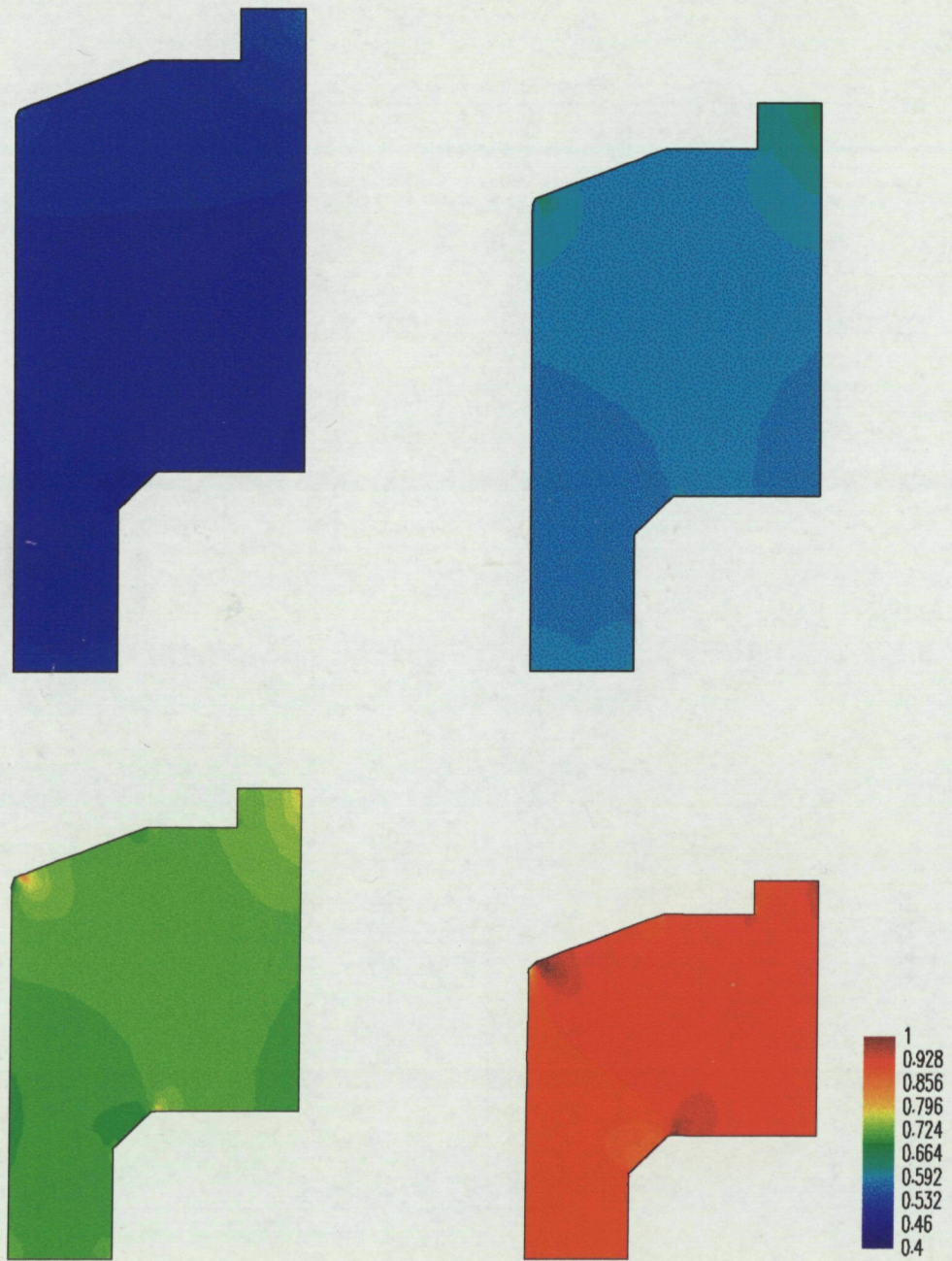


Figura 6.22: Distribución de la densidad relativa η para distintos instantes del proceso de compactación suponiendo una cámara inicial completamente llena.

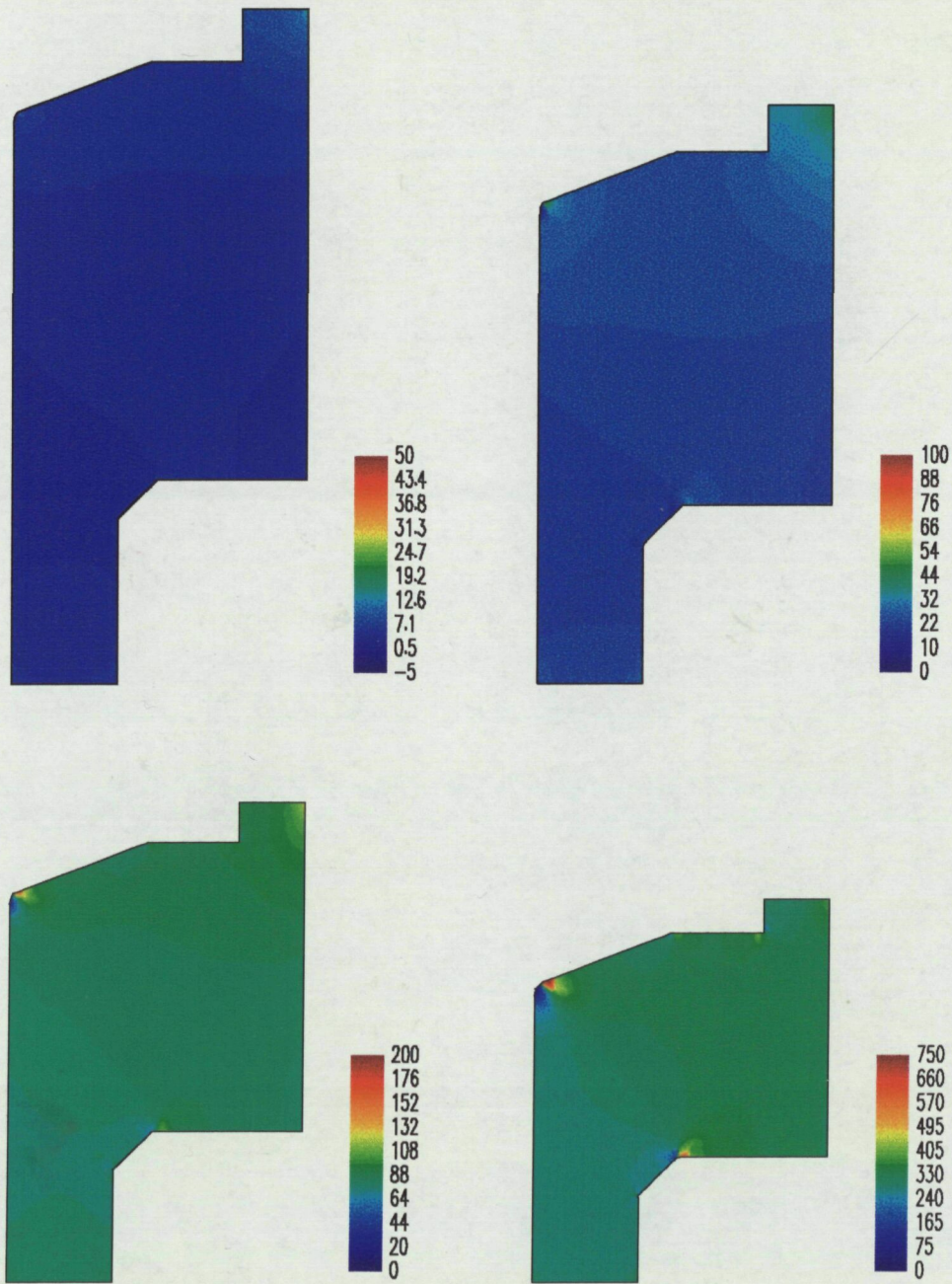


Figura 6.23: Distribución de la presión $p = -I_1/3$ para distintos instantes del proceso de compactación suponiendo una cámara inicial completamente llena.

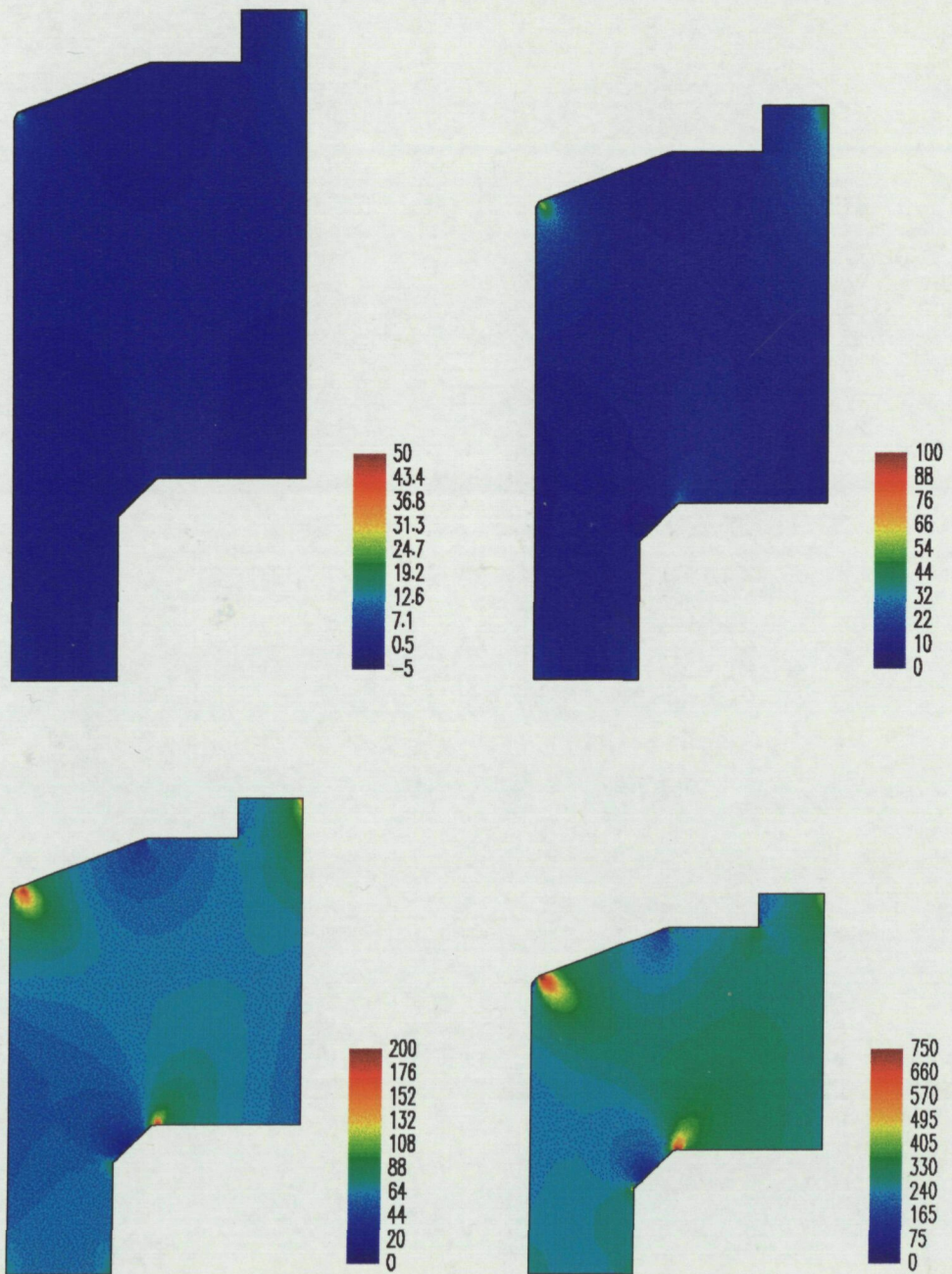


Figura 6.24: Distribución del término desviador $q = \sqrt{3J_2}$ para distintos instantes del proceso de compactación suponiendo una cámara inicial completamente llena.

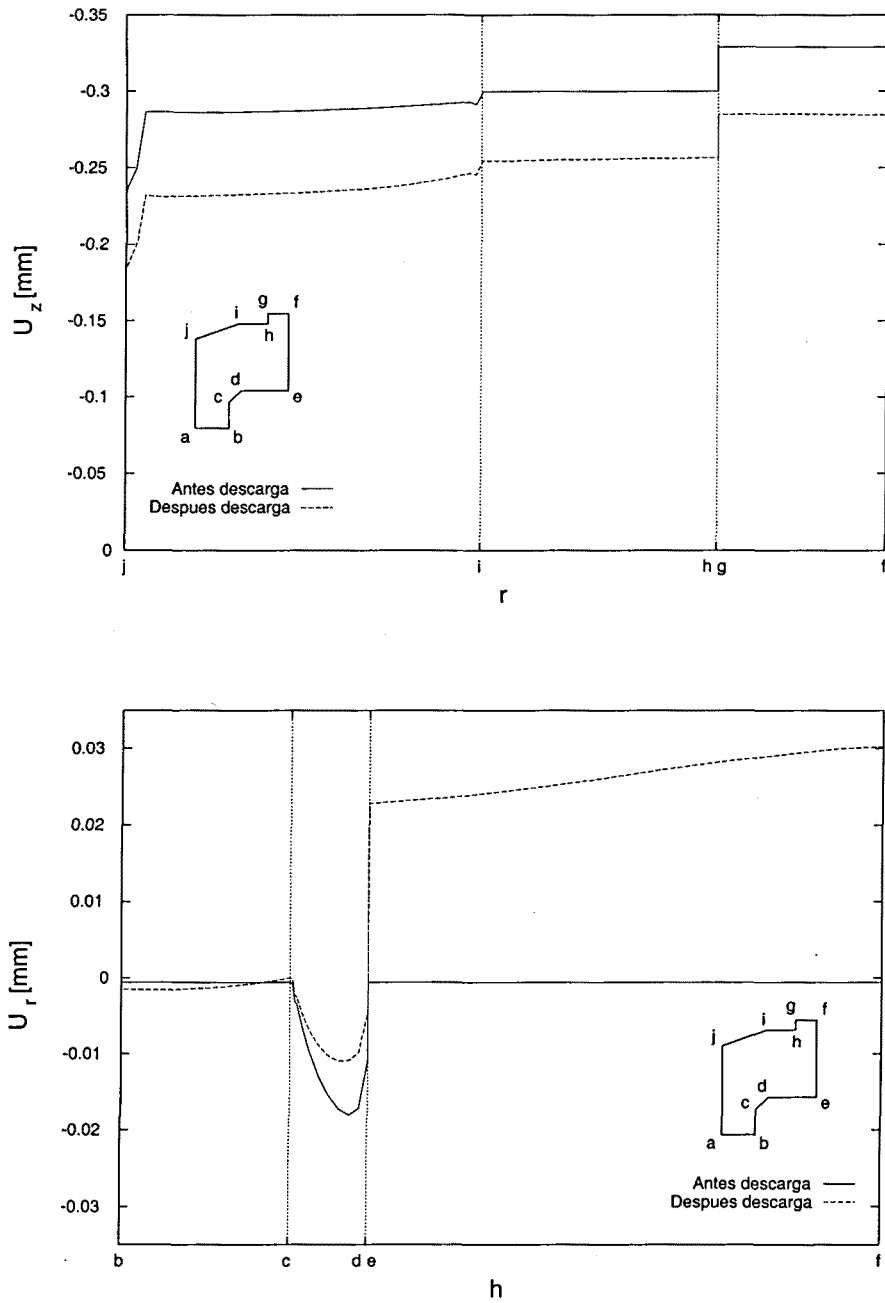


Figura 6.25: Recuperación elástica (Spring-back) de la pieza obtenida a partir de la cámara inicial completamente llena.

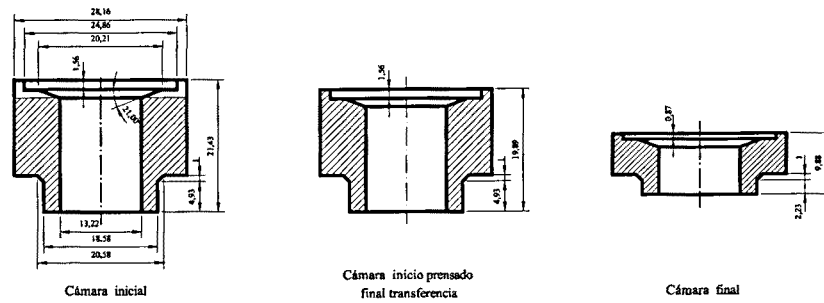


Figura 6.26: Geometría de la cámara de compactación inicial, geometría de la cámara inicial de prensado y de la cámara de compactación final.

Compactación a partir de una cámara parcialmente llena.

La geometría de la cámara inicial de la fase de transferencia y la geometría final de la cámara de prensado se describen en las figuras 6.26 y 6.27. El proceso de compactación se desarrolla en dos etapas, siendo el movimiento de los punzones simultáneo en cada una de ellas. La magnitud del desplazamiento de cada punzón se indica en el cuadro 6.2.

	Etapa de transferencia	Etapa de prensado
Duración	1 s	1 s
P1	—	2.7 mm
P2	1.536 mm	6.6 mm
P3	1,536 mm	7.31 mm

Cuadro 6.2: Movimiento de punzones.

En este caso también se adopta una estrategia de remallado automático basada en el estimador de error en densidades, procurando mantener el número de elementos de la malla entorno a los 250 elementos.

En la figura 6.28 se muestran las mallas utilizadas en los instantes correspondientes al 25%, 50%, 75% y 100% de la etapa de transferencia. Adicionalmente, en la figura 6.29 se muestran las mallas correspondientes a distintos instantes de la etapa de prensado, concretamente al 25%, 50%, 75% y al compacto final. En estas figuras se aprecia claramente el llenado parcial de la supuesta cámara inicial de prensado, permaneciendo todavía vacía una porción importante de la misma. En realidad, el llenado completo de la cámara se produce estando relativamente avanzado el proceso de compactación.

En las figuras 6.30 y 6.31 se muestra la distribución de densidades durante las etapas de transferencia y prensado. Durante la transferencia la densificación se pro-

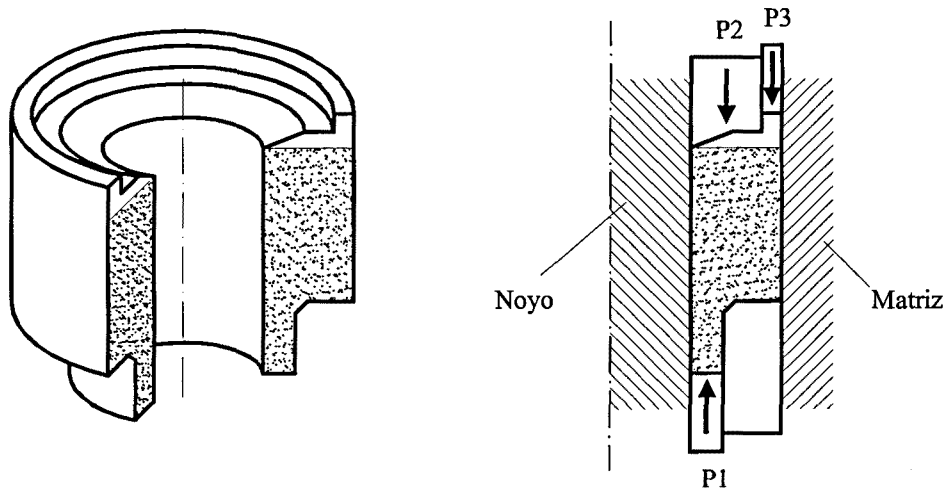


Figura 6.27: Geometría de la cámara de compactación inicial.

duce en la región de contacto con el punzón móvil, resultado que era fácilmente previsible. Sin embargo, en la figura 6.30 se observa una densificación igualmente intensa en la parte inferior que permanece inmóvil, fenómeno que no se observa durante el prensado. Una vez la cámara de compactación ha sido llenada completamente la densificación se produce principalmente en las esquinas definidas por los punzones móviles más veloces.

Las figuras 6.32 y 6.34 se muestra la distribución del estado tensional durante la transferencia, mientras que en las figuras 6.33 y 6.35 se presenta el estado tensional durante el prensado. En ellas se aprecia que el estado tensional obtenido durante la transferencia es insignificante en comparación con el estado tensional generado durante el prensado. Por las mismas razones que se indicaron en el apartado anterior, se aprecian fuertes gradientes del estado tensional en las esquinas propiciados por errores de discretización.

En la figura 6.36 se gráfica el *spring back* estimado a partir del proceso considerado. La magnitud los desplazamientos debidos a la recuperación elástica son del orden del 0.2% en la dirección radial y del orden de 0.5% en la dirección longitudinal.

Resultados y conclusiones.

Una comparación entre las figuras 6.31 y 6.31 muestra diferencias significativas durante las etapas iniciales del prensado. Estas diferencias tienen su origen en las hipótesis considerada al inicio de la simulación. En los dos procesos considerados, se acepta la hipótesis que considera una distribución uniforme de las densidades. En

ambos casos, esta hipótesis es una aproximación motivada por el desconocimiento de las condiciones iniciales. Sin embargo, en el segundo caso considerado su aplicación se traslada para tener en cuenta procesos adicionales que generan heterogeneidades. El resultado obtenido es una cámara inicial de prensado con una distribución de densidades no uniforme. Otra hipótesis más importante hace referencia al llenado de la cámara de compactación al inicio de la fase de prensado. En el primer caso considerado, una de las condiciones iniciales desconocidas es la región ocupada por el polvo, simplificando el problema al considerar que éste ocupa toda la cámara. Por contra, en el segundo caso se considera una situación más realista conforme a las técnicas de llenado, obteniendo una cámara de compactación al inicio del prensado parcialmente llena.

Las diferencias observadas entre las figuras 6.31 y 6.31 se deben más al llenado parcial de la cámara que no a la distribución de densidades. Sin embargo, una vez llena la cámara de compactación, estas diferencias parecen reducirse a medida que avanza el prensado. En la figura 6.37 se muestra las diferencias en la distribución final de densidades. Las diferencias entre ambas se produce en las regiones contiguas a las zonas inicialmente vacías, concentrándose básicamente en la región de la cámara que ha sido la última en ser llenada. Una consecuencia inmediata es la necesidad de aumentar el movimiento del punzón P3 para compensar la disminución de densidades predicha por el primer proceso de compactación considerado.

A partir de los resultados presentados se deduce que la cámara inicial de prensado no está completamente llena. Por este motivo, prescindir de la etapa de transferencia durante el diseño asistido por ordenador conlleva a determinar una secuencia de compactación óptima que resulta errónea.

Por otro lado, el tránsito de la etapa de transferencia a la de prensado se desarrolla de forma gradual, siendo necesario incrementar la densidad en algunas regiones para reducir la porción de cámara vacía. Por esta razón, el estudio de ambos procesos debe ser realizado de forma conjunta.