

Universitat Politècnica de Catalunya
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de
Telecomunicació de Barcelona
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

TESIS DOCTORAL

**Análisis y Optimización de Circuitos
Autónomos Mediante Técnicas
Temporales Discretas**

Autor **Pere Palà Schönwälder**

Director **Joan M. Miró Sans**

Barcelona, 1994

A mi familia



Agradecimientos

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a Joan Maria Miró Sans, director de esta tesis doctoral, por el gran esfuerzo personal dedicado a esta labor y, en especial, por la racionalidad de que constantemente ha hecho gala al abordar cuestiones complejas, una cualidad que, sin duda, ha contribuido decisivamente a mi formación humana.

Asimismo quiero dejar constancia de mi gratitud al resto de *los de circuitos* por el clima de cordialidad que ha reinado en el día a día y por sus acertados comentarios en los momentos clave, sin los cuales este trabajo no se hubiera llevado a término.

Finalmente, también deseo agradecer la paciencia que han demostrado tener quienes han sufrido, directa o indirectamente, la realización de esta tesis.

Índice

1.	Introducción	1
1.1	Organización de la tesis	5
1.2	Acerca del análisis de circuitos no lineales	7
1.3	Métodos para la determinación de la respuesta periódica en circuitos autónomos	9
1.4.	El problema de la optimización de circuitos no lineales	17
15.	Análisis y optimización de circuitos autónomos mediante técnicas temporales discretas	19
2.	Análisis de circuitos autónomos mediante técnicas temporales discretas	21
2.1.	Representación circuital de las alinealidades	23
2.1.1.	Extracción de las fuentes independientes y las alinealidades	23
2.1.2	Representación circuital de las alinealidades	24
	Conductancia no lineal controlada por tensión	24
	Resistor no lineal controlado por corriente	26
	Condensador no lineal controlado por tensión	26
	Condensador no lineal controlado por carga	29
	Inductor no lineal controlado por corriente	29

	Inductor no lineal controlado por flujo	30
2.2.	Formulación de las ecuaciones	33
2.2.1.	Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio	33
2.2.2.	El sistema discreto equivalente	37
	Invarianza de la respuesta impulsional	38
	Substitución del operador derivada	39
	Transformaciones de plano- s a plano- z	50
2.2.3.	Formulación de las ecuaciones de equilibrio en términos de convoluciones circulares	61
2.2.4.	Ejemplo : Ecuaciones de equilibrio para el oscilador de van der Pol	68
2.3.	Relación con otras técnicas de análisis	71
2.3.1.	Relación con las técnicas en el dominio temporal	71
	Métodos temporales directos	71
	Métodos de <i>shooting</i>	73
2.3.2.	Relación con el método de balance armónico	75
	Diagonalización de matrices circulantes	75
	Vínculos con las técnicas de balance armónico	79
3.	Cálculo analítico de sensibilidades	89
3.1.	Derivadas parciales respecto a las muestras de las variables	93
3.2.	Derivadas parciales respecto al periodo de oscilación	95
3.3.	Ejemplo : Sensibilidades para el oscilador de van der Pol	98

4.	Optimización	101
4.1.	Optimización de circuitos no lineales autónomos	107
4.2.	Derivadas parciales respecto a los elementos de circuito	111
4.3.	Análisis simbólico de la subred lineal	115
4.4	Ejemplo : Sensibilidades respecto a los elementos en el oscilador de van der Pol	123
5.	Métodos de resolución del sistema de ecuaciones	125
5.1.	Relación con el problema de la optimización no lineal	129
5.2.	Métodos de relajación	131
5.3.	El método de Newton	135
5.4.	Modificaciones globalmente convergentes sobre el método de Newton	139
5.4.1.	Métodos de búsqueda en la dirección de Newton	139
	Direcciones descendentes	140
5.4.2.	Pasos óptimos de longitud máxima determinada	145
	Pasos óptimos aproximados	147
	Pasos óptimos linealizados	151
	Actualización de la zona de confianza	153
5.4.3.	El problema de los mínimos locales	155
5.5.	Métodos de continuación	159
5.5.1.	Continuación sobre un parámetro físico	160
5.5.2.	El método de Davidenko	161

5.5.3.	Continuación sobre el periodo de muestreo	162
5.6.	Métodos basados en la difusión simulada	163
5.6.1.	Métodos estocásticos	163
5.6.2.	La difusión simulada	165
6.	Aplicaciones	173
6.1.	El oscilador de Van der Pol	175
6.1.1.	Análisis de la respuesta periódica del oscilador de Van der Pol	175
6.1.2.	Efectos de la elección de la transformación de plano s a plano z	193
6.1.3.	Optimización de la respuesta periódica del oscilador de Van der Pol	200
6.1.4.	Inclusión de una capacidad no lineal	205
6.2.	Oscilador de Colpitts	209
6.2.1.	Análisis de la respuesta periódica del oscilador de Colpitts	210
6.2.2.	Optimización de la respuesta periódica del oscilador de Colpitts	219
6.3.	Análisis y ajuste de un oscilador OTA-C	223
6.4.	Comentarios finales	235
7.	Conclusiones y líneas futuras	237
7.1.	Conclusiones	237
7.2.	Líneas futuras de investigación	239
8.	Referencias	241



Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En el diseño actual de circuitos, resulta imprescindible intercalar, entre las etapas de diseño previo y realización del prototipo, una fase de análisis y optimización. En numerosas aplicaciones, el conocimiento de la respuesta en régimen permanente aporta la información más significativa acerca del comportamiento de un circuito. En consecuencia, en la simulación de circuitos no lineales es de gran interés la determinación directa de la respuesta periódica en régimen permanente, sin necesidad de calcular el transitorio, un proceso de integración muy costoso en cuanto a carga computacional, especialmente en el caso de circuitos poco amortiguados, tales como amplificadores autopolarizados, fuentes de alimentación, amplificadores y filtros con un factor de calidad Q elevado y osciladores a cristal.

La respuesta periódica de un circuito *lineal* puede ser obtenida de forma sencilla mediante la aplicación del análisis fasorial. No obstante, la generación de armónicos, producida por la presencia de alinealidades, hace que esta técnica no sea fácilmente aplicable a circuitos no lineales. La forma más inmediata de abordar este problema consiste en partir de unas condiciones iniciales e integrar las ecuaciones de estado del circuito hasta que el régimen transitorio haya desaparecido. Este método adolece de varios inconvenientes. Por un lado, se presenta la dificultad de detectar, de forma eficaz, la extinción del transitorio. En segundo lugar, y en caso de que las constantes de tiempo del circuito sean elevadas, la respuesta transitoria puede decaer de forma muy lenta con respecto al periodo de la respuesta en régimen permanente, lo que implica un coste computacional innecesariamente elevado. Todo ello, hace que sea deseable disponer de técnicas más eficaces en cuanto a coste computacional.

Con éste objetivo se han desarrollado distintos métodos, temporales y frecuenciales, todos ellos orientados a la determinación de la respuesta directamente en régimen permanente. Este problema, planteado en el dominio temporal, puede interpretarse como el de la solución de una ecuación diferencial con condiciones de contorno en $t=0$ y $t=T$, siendo T el periodo de la respuesta. Entre los métodos que siguen esta vía, destacan los denominados *shooting methods*, cuyo objetivo es determinar aquéllas condiciones iniciales que hacen nulo el transitorio, a la vez que satisfacen las condiciones de contorno. Aunque esta técnica ha sido mejorada sucesivamente, la carga computacional que requiere su aplicación es muy elevada. En efecto, la necesidad de utilizar algoritmos de solución eficaces, basados todos ellos en el método de Newton, implica el cálculo del jacobiano del sistema en cada iteración, siendo para ello necesario integrar repetidamente las ecuaciones de estado del circuito.

Los métodos en el dominio frecuencial asumen una solución en forma de serie de Fourier. Entre este grupo de técnicas destacan, por su generalidad, los métodos de *balance armónico*. El circuito es dividido en una subred lineal y otra no lineal, aprovechando la facilidad que supone la resolución de la primera. En efecto, para realizar el filtrado de cada armónico basta conocer la función de transferencia de la parte lineal. Por este motivo, los métodos frecuenciales permiten la inclusión inmediata de elementos distribuidos, ya que éstos son fácilmente caracterizables en el dominio frecuencial. No obstante, dado que la mayor parte de las alinealidades se evalúan mejor en el dominio temporal, durante el proceso de solución es necesario realizar sucesivas transformaciones entre los dominios frecuencial y temporal. La aplicación repetida de transformadas discretas de Fourier directas e inversas consume una parte importante de tiempo de cálculo y limita la precisión de los resultados debido al solapamiento de espectros que inevitablemente se introduce en cada iteración. Además, en el caso de que las señales existentes en el circuito presenten un espectro ancho, el número de armónicos requeridos para aproximar las formas de onda de manera satisfactoria puede ser muy elevado.

Por otra parte, y acercándonos al objetivo de esta tesis, cabe destacar que la extensión de estos métodos al caso de circuitos autónomos, esto es, aquellos que no requieren la inyección de una señal externa para producir una respuesta periódica, incrementa sensiblemente la complejidad del problema, tanto si se aborda en el

dominio temporal como en el frecuencial. Las dificultades provienen fundamentalmente de que los métodos descritos asumen el conocimiento a priori del periodo de oscilación. Si bien éste es conocido en los circuitos excitados, en el caso autónomo el periodo de oscilación es una nueva incógnita, que se añade al conjunto de variables a determinar. Es importante destacar que la aparición de una nueva variable no viene acompañada de ninguna restricción adicional, lo que indica que existirá un grado de libertad en las soluciones. En efecto, al no estar definido un origen de tiempos, aparece un continuo de soluciones que únicamente difieren en un retardo. La existencia de soluciones no aisladas provoca serias dificultades de convergencia en la mayoría de métodos de solución, un problema que, habitualmente, se solventa introduciendo una restricción adicional, llegando así a definir un sistema con igual número de incógnitas que de restricciones.

Dentro de lo que se entiende como CAD de circuitos, la optimización de algunos parámetros de la respuesta representa, como es evidente, un objetivo mucho más importante que la mera simulación de un circuito. El hecho de disponer de herramientas que permitan, por ejemplo, determinar el valor de algún elemento para que un circuito oscile a una frecuencia dada, supone un avance cualitativo importante en el ámbito de la ayuda al *diseño*. En el caso de circuitos lineales, es posible incorporar algoritmos de minimización a los programas de análisis, resultando una herramienta de diseño por optimización. En el caso de circuitos no lineales, este enfoque deviene muy ineficaz al requerir sucesivos análisis ya de por sí costosos, lo que podría explicar la escasa bibliografía existente en este campo. Las técnicas hasta ahora desarrolladas se basan en la construcción de una función de coste en la que intervienen tanto las ecuaciones estructurales del circuito como una medida de la calidad del diseño. La posterior aplicación de algoritmos de optimización permite reducir iterativamente el valor de dicha función de coste. No obstante, este enfoque adolece de algunos inconvenientes, entre los que cabe destacar la posibilidad de obtener un diseño, aparentemente óptimo, pero en el que no se cumplen las ecuaciones de equilibrio y, por tanto, carente de cualquier interés práctico. Existen métodos que evitan esta posibilidad, formulando el problema como el de una optimización con restricciones, que son, precisamente, las ecuaciones de equilibrio del circuito. Sin embargo, la complejidad del problema resultante hace que su resolución sea muy costosa y, por ende, de difícil aplicación práctica.

En el marco así esbozado, en esta tesis se presenta un método temporal discreto para la determinación directa y la optimización de la respuesta periódica de circuitos no lineales autónomos. Frente a los métodos frecuenciales, que exigen repetidas transformaciones sobre las *variables*, en el método aquí descrito, las *ecuaciones* del circuito son transformadas una sola vez al dominio temporal discreto en el que se efectúa todo el proceso de análisis. De esta forma, se reduce el coste de cálculo a la vez que se incrementa la exactitud de los resultados. Para ello, se propone la discretización del circuito, resultando una formulación en la que intervienen convoluciones discretas y las muestras de las variables. Tras imponer la periodicidad de las mismas, la formulación resultante queda en términos de convoluciones circulares. Se describe el vínculo existente entre la técnica descrita y los métodos temporales y se demuestra que el sistema de ecuaciones resultante es una generalización de la formulación de balance armónico. Para resolver de forma eficaz las ecuaciones planteadas, es necesario recurrir a métodos que requieren el cálculo del jacobiano del sistema. Una de las principales aportaciones de esta tesis es la obtención de expresiones analíticas para el cálculo exacto de las sensibilidades de las ecuaciones respecto a las muestras de las variables, respecto al periodo y respecto a los valores de los elementos de circuito, permitiendo la aplicación eficaz del método descrito al análisis y la optimización de circuitos autónomos.

1.1. Organización de la tesis

Esta tesis describe un método temporal discreto para el análisis y la optimización de circuitos no lineales autónomos. Con el objetivo de proporcionar un marco adecuado para el posterior desarrollo, en el *capítulo de introducción*, se realiza un repaso de las técnicas habituales de análisis de circuitos no lineales, con especial énfasis en aquéllas que centran sus objetivo en la determinación directa del régimen permanente. Asimismo, se describe la extensión de estas técnicas a los circuitos autónomos, esto es, aquellos que están sometidos a excitaciones constantes y en los que todos sus elementos son invariantes. Como es conocido, un circuito autónomo no lineal puede presentar soluciones periódicas no constantes. La determinación de estas respuestas es uno de los objetivos de esta tesis.

En el *capítulo 2* se describe el método de análisis de circuitos autónomos en el dominio del tiempo discreto. Originalmente propuesto por Frey y Norman [27] para el análisis de circuitos excitados, en esta tesis el método se reformula y se extiende tanto al análisis de circuitos autónomos como a su optimización. Asimismo, en este capítulo se presentan, de forma original, los estrechos vínculos entre el método propuesto y otras técnicas existentes. En particular se demuestra que el método de balance armónico, tal vez el más ampliamente utilizado, puede interpretarse como un caso particular de la técnica temporal discreta presentada.

El objetivo del *capítulo 3* es la obtención de expresiones analíticas cerradas para las derivadas parciales de las ecuaciones resultantes respecto a las muestras de las variables y respecto al periodo de oscilación, lo que hará posible la implementación de algoritmos eficaces de solución.

El problema de la optimización se aborda en el *capítulo 4*. En primer lugar se obtienen expresiones para las derivadas parciales de las ecuaciones respecto a los elementos de circuito. Finalmente, la necesidad de sistematizar todo el proceso de análisis y de optimización obligará a hacer uso de técnicas de análisis simbólico.

Con el objetivo de proporcionar herramientas que permitan afrontar con éxito problemas reales de análisis y diseño, en el *capítulo 5* se detallan algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. En particular, se describen modificaciones globalmente convergentes sobre el método de Newton, aplicaciones

concretas de los métodos de continuación y la implementación de un algoritmo basado en técnicas de difusión simulada que permite alcanzar la solución con independencia de la estimación inicial efectuada.

El *capítulo 6* se dedica a presentar la aplicación de la técnica propuesta a algunos osciladores representativos y ampliamente estudiados, lo que servirá, no únicamente para validar el método, sino para demostrar su eficacia y sus ventajas como herramienta de análisis y diseño.

Finalmente, las conclusiones más destacadas de esta tesis, así como las líneas futuras de investigación que se abren a partir del presente trabajo quedan reflejadas en el *capítulo 7*.

1.2. Acerca del análisis de circuitos no lineales

Los programas de simulación más comunes, como SPICE [49], se basan en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del circuito. Partiendo de unas determinadas condiciones iniciales, se calcula el valor que toman las variables en sucesivos instantes de tiempo aplicando técnicas de integración numérica bien establecidas. De aquí se desprende que, por su propia construcción, el campo de aplicación ideal de esta estrategia es el análisis transitorio.

A pesar de la importancia que tiene el estudio del régimen transitorio, existen magnitudes que caracterizan el funcionamiento de un circuito, tales como la potencia, la distorsión introducida, la frecuencia de las señales o el ruido, que se obtienen a partir de las señales en régimen permanente. Conviene señalar que se entiende como respuesta en régimen permanente aquella que se alcanza asintóticamente conforme desaparece el efecto de las condiciones iniciales. Si en régimen permanente las variables son periódicas, se habla de régimen permanente periódico. Como es conocido, en régimen permanente también pueden darse respuestas quasi-periódicas y caóticas. Todas ellas pueden caracterizarse fácilmente en el dominio frecuencial. En efecto, y haciendo una descripción cualitativa, es posible afirmar que las señales periódicas únicamente presentan componentes frecuenciales a frecuencias que son múltiplos enteros de la denominada frecuencia fundamental. Similarmente, el espectro de las señales quasi-periódicas también es nulo en todo el eje frecuencial excepto en valores discretos del mismo, aunque ahora éstos ya no guardan una relación armónica entre sí. Por el contrario, las señales caóticas presentan un espectro continuo en toda una banda de frecuencias.

A menudo, los programas de simulación por integración sucesiva no resultan eficaces para determinar las variables en régimen permanente. Fundamentalmente, ello es consecuencia de que el régimen permanente se alcanza asintóticamente, lo que puede requerir un tiempo de cálculo excesivo. En el otro extremo, se encuentran los programas habituales de simulación mediante fasores, que sí permiten el cálculo eficaz del régimen permanente. No obstante, éstos están restringidos a circuitos lineales, razón por la cual no son aplicables a aquellos circuitos en los que las alinealidades juegan un papel relevante. Así, el objetivo del

siguiente apartado es presentar las técnicas habitualmente utilizadas para el análisis de circuitos no lineales en régimen permanente periódico, haciendo especial hincapié en las modificaciones requeridas para abordar el problema autónomo.

1.3. Métodos para la determinación de la respuesta periódica en circuitos autónomos

Gran parte de los circuitos que intervienen en sistemas electrónicos alcanzan un régimen permanente periódico si la excitación es periódica. Para que se dé esta situación únicamente es necesario que el circuito sea suficientemente estable. Como ya se ha apuntado, la respuesta periódica de estos circuitos puede calcularse partiendo de unas determinadas condiciones iniciales e integrando las ecuaciones diferenciales que describen el circuito hasta que el transitorio ha desaparecido. Este enfoque es el más general y es el que utilizan los simuladores de la familia SPICE. Conviene añadir, asimismo, que, procediendo de esta forma, se simula el experimento real que tendría lugar en el laboratorio, ya que los circuitos funcionan en el dominio del tiempo y los dispositivos semiconductores también se describen este dominio.

No obstante, la aplicación de esta técnica no está exenta de problemas. Uno de ellos es determinar, de forma automática, cuándo se ha extinguido el transitorio. En efecto, por un lado, la presencia de una constante de tiempo elevada puede provocar la interrupción anticipada de la simulación y, por otro, resulta difícil detectar la periodicidad a partir de las muestras que proporcionan los actuales algoritmos de integración de pasos variables. El segundo gran problema, también relacionado con el anterior, aparece cuando el periodo del régimen permanente es considerablemente menor que las constantes de tiempo que aparecen en el circuito. Esta situación aparece, por ejemplo, en el caso de circuitos en los que intervienen resonadores de factor de calidad elevado: un factor de calidad del orden de 10.000 conlleva un transitorio que puede ser del orden de 10.000 veces el periodo de oscilación. En este caso, la necesidad de realizar pasos de integración suficientemente cortos como para captar la respuesta permanente hace que el número total de pasos de integración sea desorbitado. Todo ello hace que sea deseable disponer de técnicas más eficaces desde el punto de vista del coste de cálculo. Con este objetivo se han desarrollado distintos métodos, todos ellos encaminados a la determinación de la respuesta directamente en régimen permanente.

Este problema, planteado en el dominio temporal, puede interpretarse como el de la solución de una ecuación diferencial con condiciones de contorno en $t=0$ y $t=T$, siendo T el periodo de las señales. Entre los métodos que siguen esta vía destacan los denominados *shooting methods*, cuyo objetivo es la determinación de aquellas condiciones iniciales que hacen que la respuesta arranque directamente en régimen permanente [2, 3]. Denominando x al vector formado por las variables de estado del circuito en el instante inicial, y $g(x,T)$ al valor que toman las variables de estado después de un periodo de la señal, el problema de la determinación de la respuesta periódica permanente puede interpretarse como la resolución de

$$x - g(x,T) = 0$$

para el vector x . La resolución de esta ecuación no lineal por el método de relajación, esto es, aplicando $x_{k+1} = x_k + g(x_k)$, coincide con la integración continuada a partir de unas condiciones iniciales. Con la aplicación de otros métodos de resolución más eficaces, por ejemplo, el método de extrapolación [65, 66] o el de Newton [29, 33], se obtiene una mayor eficacia. No obstante, cabe destacar que, con la aplicación de estas técnicas, el análisis de circuitos con factores de calidad Q elevados continúa siendo un problema debido a que algunas de las variables de estado se amortiguan muy lentamente, efecto que se traduce en un mal condicionamiento del jacobiano y, por ende, en dificultades de convergencia.

Asimismo, al tratarse de una formulación en términos de las variables de estado, la eficacia de este enfoque disminuye rápidamente conforme aumenta el número de elementos con memoria. Afortunadamente, en numerosas situaciones, algunas variables presentan constantes de tiempo muy rápidas. Al no contribuir significativamente en la formulación, éstas pueden ser ignoradas [29] sin que ello se traduzca en una pérdida apreciable de exactitud.

Un enfoque radicalmente distinto es el seguido por los métodos en el dominio frecuencial, que asumen a priori la periodicidad de las variables. En consecuencia, éstas pueden ser expresadas como una serie de Fourier cuyos coeficientes son, precisamente, las variables a determinar. Esta idea es la esencia del método de balance armónico [50], ampliamente utilizado en numerosas aplicaciones. A diferencia de como ocurre con los métodos temporales, procediendo de esta forma, las sucesivas aproximaciones a la verdadera solución del problema son periódicas

por construcción. Asimismo cabe destacar que la respuesta de un elemento o incluso todo un subcircuito *lineal* a una combinación lineal de sinusoides puede ser obtenida de forma inmediata, sin más que filtrar cada una de las componentes. Así, el método permite la inclusión inmediata de elementos distribuidos, fácilmente caracterizables en el dominio frecuencial.

Profundizando en el método de balance armónico, es posible comprobar que en un problema en el que las variables se modelan con N componentes frecuenciales y en el que intervienen N_a alinealidades, el problema resultante consiste en determinar los $N_a(2N+1)$ coeficientes que describen las variables y que pueden ser agrupados en un vector que denominamos, genéricamente, \mathbf{x} . En su forma final, las ecuaciones de equilibrio eléctrico pueden plantearse como un sistema de ecuaciones no lineales de la forma [8, 35]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales así planteado existen diversas técnicas, cada una de las cuales da nombre a una variedad de balance armónico. Nakhla y Vlach [50] traducen el problema de resolución del sistema de ecuaciones en uno de minimización —*harmonic programming*—, introduciendo una función coste asociada, de la forma $g(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$. La aplicación de métodos quasi-Newton [58], que requieren el conocimiento del gradiente de $g(\mathbf{x})$, resulta en una iteración que converge superlinealmente a un mínimo de la función de coste. Los métodos de relajación [8, 37] —*harmonic relaxation*—, por contra, no requieren más que la evaluación de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, aunque la convergencia únicamente se alcanza para circuitos débilmente alineales y en situaciones muy particulares. La técnica más robusta para resolver el sistema de ecuaciones resultante consiste en aplicar la iteración de Newton —*harmonic Newton*—, de la forma

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

Cabe destacar que la eficacia que resulta de la aplicación de este método viene dada, en gran medida, por la disponibilidad de un esquema eficiente para el cálculo de las derivadas parciales requeridas para construir el jacobiano [4, 10]. No obstante, es necesario advertir que, en la práctica, se dan situaciones en las que el método de Newton no converge debido a que la estimación inicial se encuentra fuera del dominio de atracción de la iteración de Newton [67]. Para solventar este

problema es posible hacer uso de los denominados métodos de continuación [31] cuya esencia es traducir un problema inicial de difícil resolución en una sucesión de problemas parciales cuya solución resulte más sencilla.

Por otro lado es necesario advertir que el número de armónicos necesarios para representar satisfactoriamente las señales depende fundamentalmente de las alinealidades presentes en el circuito, al ser éstas las únicas capaces de introducir nuevas componentes frecuenciales. Así, en circuitos que contienen elementos fuertemente alineales será, en general, necesario un gran número de armónicos, lo que incrementa notablemente el coste de la resolución del sistema de ecuaciones planteado.

Asimismo cabe remarcar que, como ya se ha apuntado anteriormente, las alinealidades se evalúan mejor en el dominio del tiempo, al ser éste el dominio en el que se describen los dispositivos semiconductores. Por esta razón, durante la resolución del sistema de ecuaciones resultante, es necesario realizar sucesivas transformaciones entre los dominios temporal y frecuencial, un proceso que consume una parte importante del tiempo de cálculo al tiempo que limita la precisión de los resultados obtenidos debido al solapamiento de espectros que inevitablemente se introduce.

La técnica mixta propuesta por Ushida *et al.* en [70] puede interpretarse como una generalización del método de balance armónico que pretende aprovechar al máximo las posibilidades que brinda el análisis en el dominio temporal. En un primer paso, se efectúa una partición del circuito haciendo uso del teorema de sustitución [12]. Ahora, en el dominio temporal es posible realizar, no únicamente la evaluación de las alinealidades, como ocurre con el balance armónico, sino el análisis completo de toda una parte del circuito. El circuito restante se analiza según el balance armónico clásico. A continuación, la respuesta del circuito original se obtiene aplicando un método iterativo. Realizando adecuadamente la partición es posible conseguir que cada subcircuito sea analizado por la técnica más adecuada en cada caso, lo que eventualmente redundará en una eficacia mayor.

Cabe destacar que los métodos presentados hasta este punto son los que gozan de mayor aceptación. No obstante, existen otras aproximaciones al problema que nos ocupa. Especial atención merecen los métodos basados en series de potencias. Estos describen las alinealidades mediante una serie de potencias, haciendo posible

plantear tanto el problema como su resolución únicamente en el dominio frecuencial. No obstante, procediendo de esta forma únicamente es posible representar satisfactoriamente alinealidades algebraicas débiles, de lo que resulta un campo de aplicación necesariamente restringido, aún haciendo uso del algoritmo propuesto por Eijnde *et al.* [22] para extender estas ideas a circuitos con niveles de excitación elevados. Por otro lado, cabe mencionar la técnica descrita en [25], situada exactamente en el extremo opuesto y que no ha tenido más trascendencia. En efecto, este método plantea todo el problema en el dominio temporal, exigiendo que las señales sean una combinación lineal de splines periódicas. En este caso, las variables a determinar son los parámetros que describen estas funciones.

Un planteamiento distinto a todos los anteriores ha sido propuesto recientemente por Frey y Norman [27] y ha servido como base para el desarrollo de la presente tesis. Las ecuaciones de equilibrio del circuito son planteadas en el dominio transformado de Laplace, considerando las alinealidades como excitaciones que actúan sobre un multipuerto lineal. A continuación, el sistema lineal es discretizado mediante una transformación de plano s a plano z . Tras esta operación, las ecuaciones resultantes se plantean en el dominio temporal discreto y finalmente, introduciendo la periodicidad de las variables, el problema queda formulado en forma matricial, donde las variables a determinar son las muestras temporales de las variables. Procediendo de esta forma las señales, periódicas por construcción, se determinan como un todo, de forma similar a como ocurre aplicando balance armónico, con la ventaja adicional de no requerir repetidas transformaciones entre dominios. En efecto, en vez de realizar sucesivas transformaciones sobre las *variables*, es el *circuito* quien es transformado una única vez al dominio temporal discreto, resultando innecesaria cualquier transformación posterior.

La extensión de todas estas técnicas al caso autónomo presenta dos problemas adicionales que deberán ser resueltos específicamente, dependiendo del método de análisis utilizado. El primero de ellos es que el periodo de oscilación T es desconocido a priori y su determinación es uno de los principales objetivos del análisis cuando no el más importante. En segundo lugar, existen infinitas soluciones debido a que el origen de tiempos no está determinado. Es posible comprobar que, lejos de facilitar la solución del problema, la existencia de un

continuo de infinitas soluciones dificulta seriamente la convergencia de la mayoría de algoritmos de resolución.

El análisis de circuitos mediante métodos de *shooting* por extrapolación requiere, por su propia construcción, el conocimiento del periodo de las variables. En circuitos autónomos no existe un método eficaz para determinar T , siendo necesario integrar las ecuaciones del circuito e intentar localizar los máximos de las variables o sus cruces por un determinado valor [65]. Claramente, este proceso es insatisfactorio. La aplicación del método de *shooting* con la iteración de Newton requiere introducir una restricción adicional que aisle un número finito de soluciones. Habitualmente, esto se realiza fijando arbitrariamente el valor de una de las variables, teniendo la precaución de que el valor asignado esté dentro de su margen dinámico [13]. Asimismo es necesario determinar las derivadas de los estados iniciales respecto al periodo. La complejidad y la inexactitud de este cálculo [37] supone la principal limitación del método.

Al abordar el análisis de circuitos autónomos mediante técnicas de balance armónico, el problema de aislar un número finito de soluciones se resuelve habitualmente anulando la parte imaginaria del coeficiente de Fourier correspondiente a la frecuencia fundamental de una de las variables [37, 43]. Para abordar el problema que supone el desconocimiento del periodo de oscilación es posible seguir dos caminos distintos. El primero de ellos es un método indirecto, propuesto por Rizzoli *et al.* en [61], que consiste en fijar arbitrariamente la frecuencia de oscilación y traducir el problema de análisis en otro, mucho más costoso, de optimización, en el que las variables a determinar son los coeficientes de Fourier de las variables más el valor de un elemento de circuito. Procediendo de esta forma, sería necesario repetir este proceso para distintos valores de la frecuencia de oscilación para estimar la frecuencia de oscilación del diseño original. Otra alternativa que sí permite el análisis directo de circuitos autónomos consiste en plantear el problema como un sistema de ecuaciones no lineales en el que las incógnitas son el periodo de oscilación y los coeficientes de Fourier de las señales. La disponibilidad de expresiones analíticas para las derivadas parciales de las ecuaciones respecto al periodo de oscilación [43] permite la aplicación de métodos de resolución eficaces, basados en la iteración de Newton. No obstante, en ambos casos es necesario señalar que la complejidad del problema crece de forma importante en la medida en que las alinealidades son fuertes y, por tanto, el número de armónicos es elevado.

Finalmente, es necesario hacer hincapié en que la mayor o menor eficacia de una formulación determinada está condicionada por la mayor o menor facilidad con que puede abordarse la resolución de las ecuaciones resultantes. Dado que los circuitos bajo estudio son no lineales, las ecuaciones que se plantean, tanto en el dominio temporal como en el frecuencial, son no lineales, aunque algebraicas. Como es conocido, en general no existen métodos cerrados que permitan la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, siendo, por tanto, necesario recurrir a algoritmos iterativos. De entre los métodos de solución más profusamente utilizados [29, 33, 43, 70] destaca, por su robustez, el método de Newton para cuya aplicación se requiere la determinación del jacobiano. A pesar de que el método de Newton presenta unas excelentes propiedades de convergencia, ésta depende fuertemente de la estimación inicial realizada, hecho que relativiza totalmente las medidas de eficacia habitualmente utilizadas, tales como el número de iteraciones requeridas para alcanzar la convergencia. En consecuencia, para incrementar las posibilidades de resolver con éxito un determinado problema, es necesario hacer uso de algoritmos denominados globalmente convergentes [20] o de métodos de continuación [1, 59], aunque únicamente los métodos estocásticos garantizan la consecución del objetivo *con probabilidad igual a la unidad* [14, 63].

1.4. El problema de la optimización de circuitos no lineales

La eficacia al abordar el problema del *análisis* de circuitos no lineales es, sin lugar a dudas, la primera exigencia que se impone a cualquier herramienta pensada para ser una ayuda al diseño de circuitos. No obstante, resulta obvio que la *optimización* de circuitos representa un objetivo mucho más importante y constituye la continuación natural del problema del análisis. En el caso de circuitos lineales es posible insertar el algoritmo de análisis en un bucle exterior de optimización [17, 58] de forma que éste recoja la información requerida acerca de la función objetivo de los datos proporcionados por el primero [47, 55]. El resultado es una herramienta que permite la modificación de un cierto diseño previo de acuerdo con las pautas especificadas por el diseñador.

Esta aproximación al problema de la optimización de circuitos no es aplicable directamente a circuitos no lineales debido, fundamentalmente, al elevado coste de cálculo asociado al propio análisis del circuito. En efecto, realizar sucesivos análisis completos de un circuito no lineal supone un coste infinitamente superior al que se requiere para un circuito lineal. Así, la dificultad de utilizar algoritmos de optimización en forma de paquetes *standard* podría ayudar a explicar la gran desproporción existente entre los numerosos trabajos dedicados al análisis de circuitos y la esporádica atención que se presta a su optimización.

Habitualmente, la optimización de circuitos no lineales se aborda planteando un problema asociado de forma que el proceso de análisis y el de optimización puedan confluir en algunos momentos de su resolución. Según este criterio, los algoritmos más adecuados son aquellos en los que el propio análisis es planteado como la minimización de una cierta función objetivo. En este caso, la idea más inmediata consiste en incrementar el número de restricciones entre las que figurarán, además de las ecuaciones de equilibrio eléctrico, aquellas relacionadas con el comportamiento deseado del circuito. Una implementación de estas ideas basada en el método de *shooting* es descrita por Director *et al.* en [21]. Esencialmente, el problema que se plantea es la determinación simultánea de las condiciones iniciales y los valores de los elementos de circuito de forma que la respuesta resultante sea periódica y satisfaga las especificaciones de diseño. Los

resultados obtenidos por la aplicación de esta estrategia distan de ser satisfactorios ya que es frecuente encontrar mínimos de la función objetivo en los que las condiciones iniciales obtenidas no corresponden a una situación de régimen permanente periódico.

Una conclusión a extraer de esta constatación es que, a priori, las técnicas de análisis más adecuadas para este problema son aquellas que imponen la periodicidad ya en el momento de plantear las ecuaciones de equilibrio. Entre éstas figura el método de balance armónico clásico. Una aproximación habitual [42, 62] a la optimización de circuitos no lineales consiste en definir un vector de diseño \mathbf{u} formado por los armónicos de las variables de estado \mathbf{x} y por los parámetros a optimizar \mathbf{p} .

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{p}^T)^T$$

La función objetivo que se construye es de la forma

$$g(\mathbf{u}) = \sqrt{\|\mathbf{g}_1(\mathbf{u})\|^2 + g_2^2(\mathbf{u})}$$

donde $\mathbf{g}_1(\mathbf{u})$ corresponde a las ecuaciones de equilibrio eléctrico del circuito y $g_2(\mathbf{u})$ se define adecuadamente de forma que se anule cuando el diseño es satisfactorio. Así, el objetivo es resolver

$$\min_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u})$$

problema que puede ser abordado mediante la aplicación de algoritmos de minimización de propósito general.

A pesar de que la aplicación de esta estrategia puede ser satisfactoria en algunas ocasiones, es necesario advertir que el problema no está bien formulado. En efecto, no es difícil ver que es posible resolver este problema y que la solución resultante no cumpla las ecuaciones de equilibrio eléctrico. En cambio, como se remarca en [37], la formulación correcta sería

$$\min_{\mathbf{u}} g_2^2(\mathbf{u}) \quad \text{sujeto a la restricción} \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{u}) = 0$$

La resolución directa de este problema podría abordarse mediante diferentes técnicas, tales como el método de los multiplicadores de Lagrange o el método de

la función de penalización [58]. No obstante, el problema así planteado presenta una complejidad muy elevada, lo que limita seriamente su campo de aplicación.

1.5. Análisis y optimización de circuitos autónomos mediante técnicas temporales discretas

En el marco así esbozado, esta tesis describe la extensión del método temporal discreto presentado por Frey y Norman [27] para el análisis de la respuesta periódica de circuitos no lineales excitados.

Específicamente, el método se ha reformulado y extendido al caso autónomo, habiéndose desarrollado, además, expresiones originales para el cálculo analítico de las derivadas parciales respecto a las muestras de las señales, respecto al periodo de oscilación y respecto a los elementos de circuito, lo que permite la aplicación eficaz del método al análisis [57] y la optimización de circuitos no lineales tanto excitados como autónomos. En particular, algunos problemas de optimización permiten que la formulación resultante presente la misma estructura que el problema del análisis, con lo que su resolución resulta de idéntica complejidad. Asimismo, y en una línea fundamentalmente teórica, se ha demostrado que el método de balance armónico clásico puede ser derivado como un caso particular de la técnica propuesta.

Por otro lado, y con el fin de abordar con eficacia la resolución del sistema de ecuaciones resultante, se han implementado algoritmos globalmente convergentes, basados en modificaciones del método de Newton. También se ha experimentado con éxito la aplicación de una forma de continuación que permite refinar sucesivamente las soluciones numéricas obtenidas. Igualmente, se han utilizado ideas propias de la optimización por difusión simulada para desarrollar un algoritmo que asegura la resolución de las ecuaciones planteadas con independencia de la estimación inicial efectuada. Finalmente, la aplicación de las técnicas propuestas a algunos osciladores representativos ha permitido validar la técnica propuesta y ha desmostrado su eficacia como herramienta de análisis y diseño.

Capítulo 2

ANÁLISIS DE CIRCUITOS AUTÓNOMOS MEDIANTE TÉCNICAS TEMPORALES DISCRETAS

En este capítulo se describe una formulación adecuada para la resolución eficaz del problema del análisis y la optimización de circuitos no lineales autónomos. Sobre el circuito, se efectuará, en primer lugar, la extracción de las fuentes independientes y de los elementos no lineales. Tras representar las alinealidades haciendo uso de fuentes controladas no lineales, el circuito resultante adoptará la forma de un multipuerto lineal excitado por varias fuentes, unas independientes y otras controladas y no lineales. En el caso autónomo, las primeras serán fuentes de polarización mientras que las últimas modelarán, como se ha mencionado, las alinealidades del circuito. Imaginando ambas clases de fuentes como excitaciones que actúan sobre un circuito lineal, será posible plantear las ecuaciones de equilibrio por aplicación del principio de superposición.

Las ecuaciones resultantes pueden plantearse en el dominio temporal como integrales de convolución que, para facilitar la resolución, serán discretizadas. Se comprobará que el proceso utilizado para efectuar la discretización influye decisivamente en los resultados, razón por la cual este problema será estudiado con sumo detalle. Una vez las ecuaciones están planteadas en términos de las muestras de las variables, es posible introducir la periodicidad de las mismas, resultando una formulación matricial compacta en la que intervienen circulantes asociados al multipuerto lineal, con lo que el problema resultante es el de la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales algebraicas. La especial estructura del sistema de ecuaciones permitirá la determinación inmediata de las derivadas parciales, tanto

respecto a las muestras de las variables como respecto al periodo de oscilación y respecto a los elementos de circuito, lo que hace posible la aplicación eficaz del método al análisis y la optimización de circuitos autónomos.

Finalmente, se describirá la relación existente entre la técnica propuesta y los métodos temporales y frecuenciales clásicos. En particular, se hará hincapié en demostrar que el método de balance armónico clásico no es más que un caso particular de la formulación presentada, resultado de aplicar una técnica de discretización concreta.

2.1. Representación circuital de las alinealidades

Como se ha esbozado previamente, para el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio sobre un circuito arbitrario, es necesario efectuar algunos pasos previos. El primero de ellos consiste en llevar el circuito a una estructura interpretable como un multipuerto lineal al que se le han conectado las fuentes independientes y los elementos no lineales del circuito. Esta transformación no supondrá más que una simple redistribución de los elementos en el esquema eléctrico del circuito. En segundo lugar, se hará uso de una técnica por la cual es posible representar circuitalmente las alinealidades mediante la conexión adecuada de un elemento lineal y una fuente controlada no lineal. Como se verá, esta representación es aplicable a elementos no lineales con características tanto estáticas como dinámicas. Tras efectuar estas operaciones que, como es evidente, no modifican el comportamiento del circuito, se estará en condiciones de efectuar el análisis aplicando el principio de superposición al multipuerto lineal.

2.1.1. Extracción de las fuentes independientes y las alinealidades

Con el fin de facilitar la interpretación del método de análisis que se desarrollará, es conveniente considerar el circuito no lineal como un multipuerto lineal al que se han conectado todas las fuentes independientes de polarización y todas las alinealidades, idea que se ilustra en la figura 2.1.

Nótese que, en la práctica, ello equivale a una simple redistribución del esquema eléctrico del circuito, sin que por ello se introduzca modificación alguna en las ecuaciones que rigen su comportamiento.

A continuación, y con el fin de sistematizar el posterior desarrollo, es conveniente modelar cada una de las alinealidades mediante la conexión de una fuente controlada no lineal y un elemento lineal. Pasamos, pues, a describir una técnica que permite realizar esta representación.

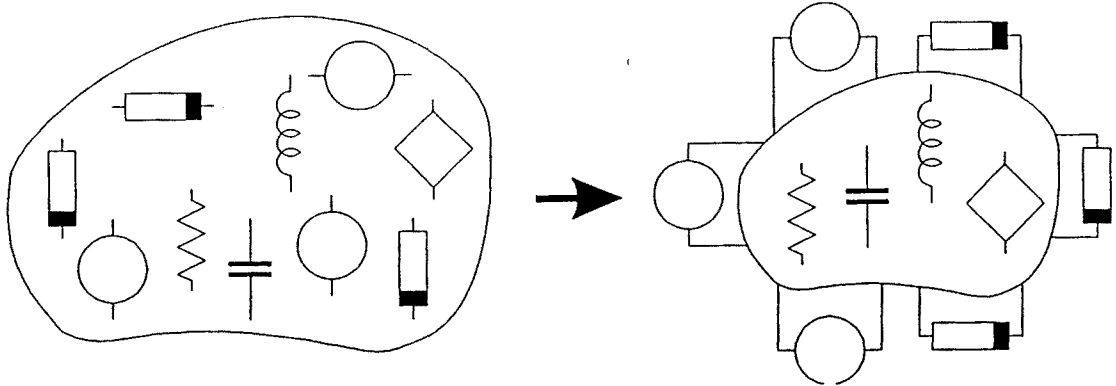


Figura 2.1 Extracción de las fuentes independientes y las alinealidades.

2.1.2. Representación circuital de las alinealidades

El objetivo de este apartado es representar un elemento de dos terminales no lineal arbitrario mediante la combinación de un elemento lineal más una fuente controlada de característica no lineal. Para ello, será necesario distinguir entre distintas clases de elementos no lineales.

Conductancia no lineal controlada por tensión

El elemento conductancia controlada por tensión viene caracterizado por una característica no lineal $i=g(v)$.

Como es inmediato comprobar, esta característica puede ser expresada de la forma

$$i=g_0v+f(v),$$

definiendo

$$f(v)=g(v)-g_0v.$$

Esta expresión admite el modelo circuital ilustrado en la figura 2.2.b, en la que interviene un elemento lineal y una fuente controlada, cumpliendo así el objetivo que nos habíamos marcado.

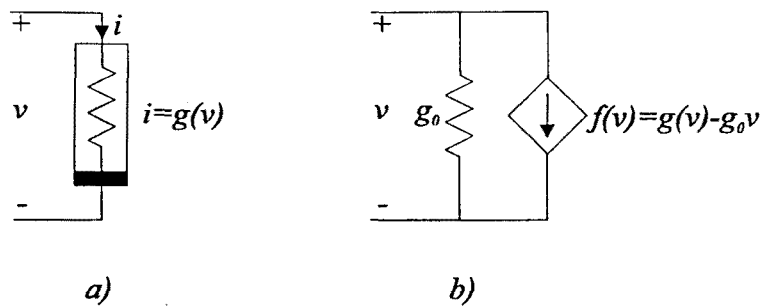


Figura 2.2. Conductancia no lineal controlada por tensión y su circuito equivalente.

Nótese que el circuito equivalente propuesto presenta la característica tensión-corriente original sin depender en absoluto del valor del elemento lineal g_0 . Así, sería incluso posible anular dicho elemento, una práctica que ha venido siendo habitual en numerosos estudios. No obstante, como apuntan Frey y Norman [27], el valor de dicho elemento puede elegirse de forma que aproxime, con un determinado criterio, el comportamiento de la alinealidad. De esta forma, es posible mejorar las características de convergencia de algunos métodos simples de resolución, tales como el de Picard. En efecto, considérese, por ejemplo el caso de circuitos débilmente alineales. En este caso, la solución del circuito asignando a g_0 el valor medio de la conductancia para el margen dinámico esperado (uno de los criterios posibles) será muy parecida a la solución verdadera, constituyendo así un excelente punto de partida para la posterior aplicación de métodos iterativos que permitan refinarla sucesivamente. Este fenómeno beneficioso también se produce en circuitos fuertemente alineales, aunque las ventajas, en este caso, son mucho menos importantes.

No obstante, habitualmente es necesario hacer uso de algoritmos de resolución más robustos que los basados en la iteración de Picard o relajación, derivados, la mayoría de ellos, a partir del método de Newton. En este caso, se ha comprobado que las ventajas que reporta la inclusión de un elemento lineal cuidadosamente seleccionado son menos importantes: Aunque la descripción de los algoritmos utilizados se realizará en un capítulo aparte, es posible adelantar que los algoritmos utilizados efectúan, en cada iteración, una linealización del problema, resultando así en cierto modo innecesaria la linealización previa mediante el elemento lineal auxiliar. Por este motivo, en nuestro análisis será habitual anular la conductancia lineal sin más consecuencias.

Resistor no lineal controlado por corriente

Un desarrollo virtualmente idéntico puede ser aplicado a un resistor no lineal definido por una característica $v=R(i)$. Así, se verifica que

$$v=R_0 i+f(i),$$

con

$$f(i)=R(i)-R_0 i.$$

Como antes, esta característica admite una representación circuital de la forma representada en la figura 2.3

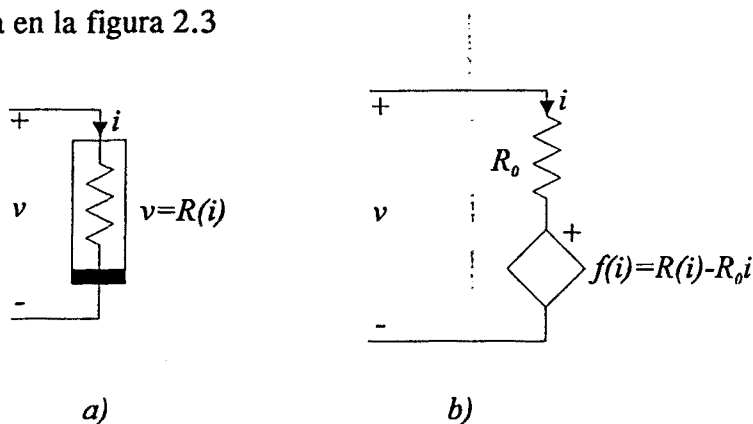


Figura 2.3 Conductancia no lineal controlada por tensión y su circuito equivalente.

Como antes, la elección del valor del elemento lineal R_0 resulta arbitraria, siendo igualmente válidas las consideraciones hechas para el caso anterior.

Condensador no lineal controlado por tensión

La técnica anterior puede ser adaptada, también, a los elementos no lineales con características dinámicas. Consideraremos, en primer lugar el caso de un condensador no lineal controlado por tensión, es decir, un elemento de dos terminales con una relación constitutiva de la forma

$$q=q(v).$$

Recordemos que, en el caso lineal, la carga es proporcional a la tensión entre los terminales a través de una constante C , denominada capacidad del condensador.

Esto es, $q=Cv$. En general, la relación entre la carga y la tensión aplicada será una función no lineal. Por ejemplo, un dispositivo que admite un modelo de condensador controlado por tensión es el diodo varactor, que consiste, esencialmente, en una unión pn polarizada en inversa. Un análisis físico de este dispositivo permite describir la carga acumulada en función de la tensión aplicada de la forma

$$q=-K(V_0-v)^{1/2},$$

relación que se cumple siempre que v sea menor que V_0 , el potencial de contacto de la unión. La constante K viene determinada por la construcción del dispositivo.

Independientemente del dispositivo al que modele, es posible calcular la derivada temporal de la relación constitutiva, obteniéndose

$$i = \frac{dq}{dt} = C(v)\dot{v} = C_0\dot{v} + f(v)\dot{v}$$

donde

$$C(v) = \frac{dq}{dv}$$

y $f(v)$ se define como

$$f(v) = C(v) - C_0.$$

Así, un posible circuito equivalente sería de la forma representada en la figura 2.4

Nótese, sin embargo, que la fuente de corriente viene controlada tanto por la tensión en los terminales del condensador como por su derivada. La cuestión de cómo obtener la derivada de la tensión, puede responderse comprobando que

$$\dot{v} = \frac{i_0}{C_0}$$

no obstante, ello implica que serán dos las variables que controlan la fuente: i_0 y v . Aunque ello no supondría ninguna dificultad en los análisis posteriores, es posible rediseñar el circuito equivalente para que ello no ocurra, a condición de trabajar en el dominio transformado de Laplace. Esto no supone ningún coste adicional, al ser habitual describir la parte lineal del circuito en el dominio transformado.

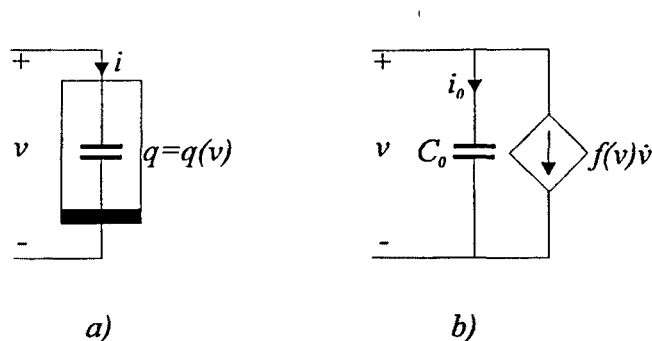


Figura 2.4 Condensador no lineal controlado por tensión y su circuito equivalente.

Para encontrar pautas que permitan modificar adecuadamente el circuito equivalente hasta ahora hallado, bastará con verificar que

$$f(v)\dot{v} = \frac{d}{dt}[q(v) - C_0 v]$$

En consecuencia, la fuente controlada puede definirse en el dominio transformado de la forma

$$s(Q(s) - C_0 V(s)) = sF(s)$$

donde $Q(s)$ es, desde un punto de vista formal, la transformada de Laplace de $q(v(t))$, esto es, $Q(s) = \mathcal{L}\{q(v(t))\}$.

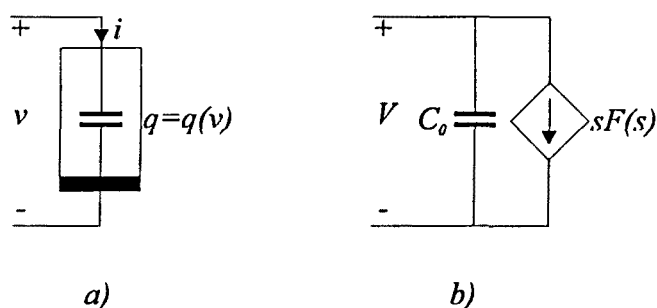


Figura 2.5 Condensador no lineal controlado por tensión y su circuito transformado equivalente.

En la figura 2.5 se ilustra el modelo finalmente desarrollado para un condensador no lineal controlado por tensión. En el caso de que la relación constitutiva venga controlada por carga, el circuito equivalente difiere ligeramente.

Condensador no lineal controlado por carga

En este caso, la relación constitutiva del condensador es del tipo

$$v=v(q).$$

ecuación que puede expresarse como

$$v = \frac{1}{C_0}q + \left[v(q) - \frac{1}{C_0}q \right]$$

y que admite una representación circuital mediante la conexión serie de un condensador lineal de capacidad C_0 y un generador de tensión controlado por la variable q . No obstante, la variable q puede determinarse a partir del conocimiento de la tensión en C_0 ya que $q=C_0v_x$. Así, definiendo

$$f(v_x)=v(C_0v_x)-v_x,$$

es posible obtener el circuito equivalente de la figura 2.6.

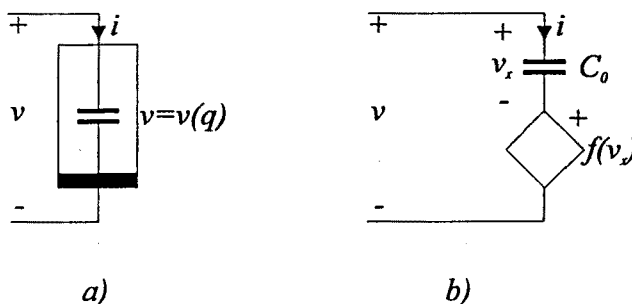


Figura 2.6 Condensador no lineal controlado por carga y su circuito equivalente.

Inductor no lineal controlado por corriente

Dado que el elemento inductor es dual del condensador, los circuitos equivalentes obtenidos serán los duales de los ya descritos. Así, para un inductor no lineal controlado por corriente definido por la relación constitutiva

$$\Phi = \Phi(i).$$

se obtiene

$$v = \frac{d\Phi}{dt} = L(i)i = L_0 i + [L(i)i - L_0 i]$$

siendo

$$L(i) = \frac{d\Phi(i)}{di}$$

Dado que se cumple

$$[L(i) - L_0]i = \frac{d}{dt} [\Phi(i) - L_0 i]$$

es posible construir el modelo equivalente ilustrado en la figura 2.7

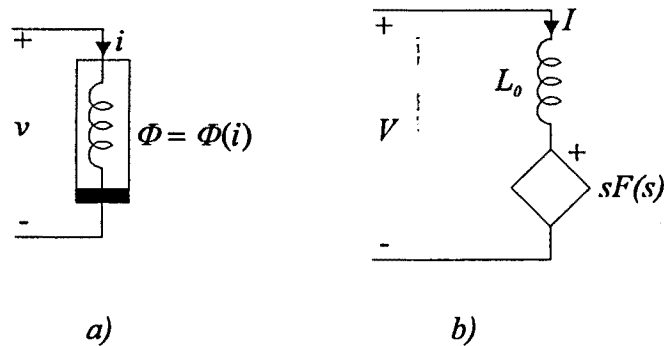


Figura 2.7 Inductor no lineal controlada por flujo y su circuito transformado equivalente.

donde

$$s(\Phi(s) - L_0 J(s)) = sF(s)$$

con $\Phi(s) = \mathcal{L}\{\Phi(i)\}$.

Finalmente, quedaría determinar un circuito equivalente para inductores no lineales controlados por flujo.

Inductor no lineal controlado por flujo

Esta clase de elementos no lineales, vienen caracterizados por una relación constitutiva en la que la intensidad viene controlada por el flujo, a través de una función no lineal, de la forma

$$i = i(\Phi).$$

El desarrollo a seguir es similar al utilizado para el condensador controlado por carga. Así, cabe descomponer

$$i = \frac{1}{L_0} \Phi + \left[i(\Phi) - \frac{1}{L_0} \Phi \right]$$

relación que admite un modelo circuital formado por la conexión en paralelo de un inductor lineal de valor L_0 y una fuente de corriente controlada por flujo. La variable de control flujo puede, a su vez, obtenerse a partir de la corriente en el inductor lineal a través de su relación constitutiva $\Phi = L_0 i_x$. Así, es inmediato llegar al circuito equivalente ilustrado en la figura 2.8.

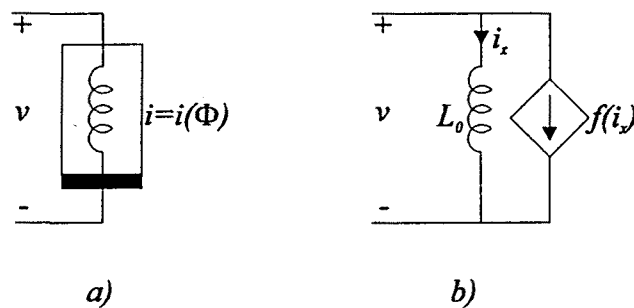


Figura 2.8 Condensador no lineal controlado por tensión y su circuito equivalente.

Los elementos no lineales presentados hasta este punto son suficientes para modelar una clase importante de dispositivos. Por otro lado, la extensión de estas ideas para incluir otras características tensión-corriente no ha de suponer dificultades. Así, en este momento, se está en condiciones de proseguir con la formulación de las ecuaciones de equilibrio.

2.2. Formulación de las ecuaciones

Una vez efectuada la extracción y la representación circuital de las alinealidades, se está en condiciones de abordar la formulación de las ecuaciones de equilibrio del circuito. En su forma final, éstas quedarán planteadas en el dominio del tiempo discreto en forma matricial, donde cada una de las matrices que intervendrán corresponde a una operación de convolución circular. No obstante, para ello es necesario el planteamiento previo de las ecuaciones de equilibrio, bien en el dominio temporal, bien en el dominio transformado de Laplace. Tras discretizar tanto las *variables* a determinar como el *sistema* resultante, será posible imponer la periodicidad de las formas de onda resultantes para llegar a la formulación en su forma final. Es posible adelantar que el procedimiento concreto mediante el que se realizará la discretización del sistema continuo juega un papel primordial, razón por la cual se prestará especial atención a este punto.

Por otro lado, cabe señalar que el procedimiento que se describe es aplicable a circuitos no lineales en su sentido más general, aunque en la exposición se pondrá especial énfasis en el caso de circuitos autónomos, al ser éste el principal objetivo de la presente tesis.

2.2.1. Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio

En este apartado se describe el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio del circuito no lineal obtenido como resultado de la extracción de las alinealidades y su posterior representación circuital.

Para iniciar nuestro estudio, considérese un circuito no lineal autónomo en el que ya se han extraído todas las fuentes de polarización y todos los elementos no lineales y donde cada elemento no lineal ha sido modelado por la conexión en paralelo de un elemento lineal y una fuente controlada no lineal. Para facilitar la descripción del proceso, es útil considerar el ejemplo ilustrado en la figura 2.9, en el que aparece una sola fuente de polarización y una única alinealidad en forma de conductancia no lineal con característica $i=f(x)$. La posterior extensión a un circuito arbitrario no presenta dificultades.

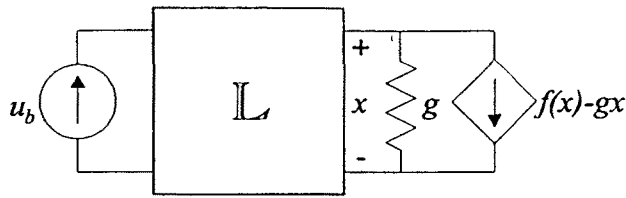


Figura 2.9 Extracción y representación circuital. Un ejemplo ilustratorio.

Dado que el circuito \mathbb{L} es lineal, es posible aplicar el principio de superposición para determinar tanto la variable de control de la alinealidad x como la variable de salida considerada y . En efecto, éstas pueden ser expresadas formalmente como

$$\begin{aligned} x &= A\{u_b\} + B\{f(x)\} \\ y &= C\{u_b\} + D\{f(x)\} \end{aligned}$$

donde A , B , C y D representan operadores lineales. En el caso de circuitos dinámicos, estos operadores pueden escribirse como integrales de convolución en el dominio temporal o como productos en el dominio transformado de Laplace. Así, en este último dominio es posible escribir

$$\begin{aligned} X &= AU_b + BF(X) \\ Y &= CU_b + DF(X) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde A , B , C y D son funciones de transferencia en la variable s y $F(x)$ es, desde un punto de vista estrictamente formal, la transformada de Laplace de $f(x(t))$.

Para la determinación de $A(s)$ y $C(s)$ bastaría con anular $f(x)$ sobre el circuito y calcular las variables X e Y que se obtendrían suponiendo una hipotética excitación $U_b(s)=1$. Para obtener $B(s)$ y $D(s)$ se procedería de forma análoga, desactivando ahora la fuente de polarización y suponiendo el circuito excitado por $F(s)=1$.

En este momento, es importante remarcar el carácter formal de la expresión obtenida, ya que en ella se asume el conocimiento de la función $f(x(t))$ y, como es aparente, para ello sería necesario conocer $x(t)$.

La generalización de la expresión (2.1) para un circuito con N_a alinealidades F_i gobernadas por N_c variables de control X_j y con N_b fuentes independientes U_k conduciría a

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N_b} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N_b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N_c,1} & A_{N_c,2} & \cdots & A_{N_c,N_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N_a} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N_a} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{N_c,1} & B_{N_c,2} & \cdots & B_{N_c,N_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N_a} \end{bmatrix}$$

donde cada una de las funciones no lineales sería, en general, de la forma

$$F_i = F_i(X_1, X_2, \dots, X_{nc})$$

En este caso, la variable de salida considerada sería expresable como

$$Y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_{N_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_{N_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N_a} \end{bmatrix}$$

Cabe reseñar que, en estas expresiones, cada uno de los términos $A_{ij}(s)$, $B_{ij}(s)$, $C_i(s)$ y $D_i(s)$ correspondería a una función de transferencia en la variable compleja s .

Con el fin de facilitar el posterior desarrollo, en lo sucesivo, y sin que ello suponga pérdida de generalidad, se trabajará sobre la formulación aplicada al problema ilustrado en la figura 2.9, con una alinealidad controlada por una sola variable y una única fuente de polarización.

En esta situación, el cálculo del término debido a la fuente de polarización $v = A\{u_b\}$ es sencillo, ya que se trata de obtener la respuesta de un circuito *lineal* a la excitación u_b . El verdadero problema es, pues, la resolución de

$$X = V + BF(X)$$

para la variable X , supuesta periódica de periodo T , desconocido a priori. Nótese que esta expresión puede ser escrita en el dominio temporal como

$$x(t) = v(t) + \int_{-\infty}^t b(t-\tau) f(x(\tau)) d\tau \quad (2.2)$$

donde $b(t)$ es la respuesta impulsional del multipuerto \mathbb{L} a la excitación no lineal $f(x)$ o, en una interpretación alternativa, la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia $B(s)$.

Conviene destacar que el carácter implícito de esta ecuación integral hace, en general, inabordable su resolución analítica, siendo, por tanto, necesario recurrir a métodos numéricos.

En la literatura, se han descrito diversos enfoques para la solución, necesariamente numérica, de este problema. Neill y Stefani [51] parten de una formulación equivalente a la aquí descrita aplicada al problema de la determinación de la respuesta de circuitos casi-lineales a excitaciones periódicas. La estrategia seguida consiste, esencialmente, en aprovechar la especial estructura de la ecuación a resolver para generar una secuencia convergente de aproximaciones. Específicamente, para ello se hace uso de la iteración de Picard, también denominada método de relajación, de la forma

$$x_{k+1}(t) = v(t) + \int_{-\infty}^t b(t-\tau)f(x_k(\tau))d\tau \quad (2.3)$$

Nótese que, como ocurre en todo proceso iterativo, es necesario disponer de una estrategia que permita inicializar el algoritmo. En este caso, la inicialización se efectúa tomando como primera aproximación de $x(t)$ la solución del circuito linealizado. La aplicación de este esquema iterativo requiere el cálculo de una integral de convolución en cada iteración, cálculo que, para mejorar la eficacia del método, se realiza haciendo uso de la transformada discreta de Fourier (DFT). Más adelante se detallará la razón que hace desaconsejable el realizar sucesivas transformaciones entre los dominios temporal y frecuencial mediante la transformada discreta de Fourier. No obstante, en este momento es aún más importante señalar que la iteración antes esbozada, aún implementando las esmeradas modificaciones descritas en [51], solamente es aplicable a circuitos débilmente no lineales, esto es, aquellos en los que la estimación inicial obtenida por linealización está muy próxima a la verdadera solución del circuito*.

Descartada, por su falta de generalidad, esta primera vía de solución, es razonable pensar que el primer paso para la resolución numérica de la ecuación integral (2.2) sea discretizar la convolución analógica que en ella aparece [27]. Así, un objetivo intermedio es llevar (2.2) a la forma

* En un capítulo posterior se verá que la necesidad de disponer de estimaciones iniciales suficientemente buenas es un defecto del que adolecen numerosas técnicas de resolución de ecuaciones. Por esta razón resultará necesario realizar un amplio estudio de algoritmos que permitan solventar esta dificultad.

$$x(n) = v(n) + \sum_{k=-\infty}^n b(n-k)f(x(k))$$

donde $x(n) = x(t) \big|_{t=n\Delta}$, siendo Δ el periodo de muestreo.

Como parece natural, el objetivo a perseguir es que la ecuación en términos de la convolución discreta proporcione una buena aproximación de la expresión inicial. Para ello resulta de excepcional importancia especificar cuidadosamente el proceso por el cual se obtendrá la respuesta impulsional discreta $b(n)$ a partir de su equivalente continuo $b(t)$.

Visto desde otra perspectiva, este problema es equivalente a determinar el sistema discreto, definido en el dominio transformado z por una función de transferencia $B(z)$, equivalente al sistema analógico, definido en el dominio transformado de Laplace, y que, en lo sucesivo, denominaremos $B_a(s)$ para evitar ambigüedades en la notación. En la figura 2.10 se visualiza la relación entre las señales y los sistemas involucrados. Como ya habrá imaginado el lector, el objetivo deseado es conseguir que la *salida* de ambos sistemas coincida en los instantes de muestreo, independientemente de cuál sea la entrada concreta [34].

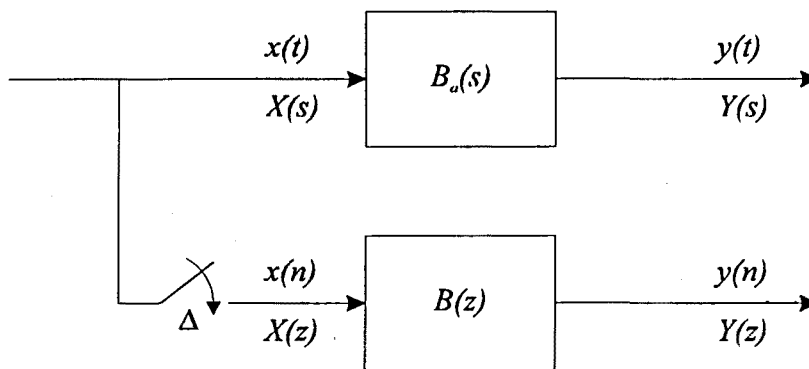


Figura 2.10 El sistema continuo y su equivalente discreto

2.2.2. El sistema discreto equivalente

Una vez definido el primer problema, a saber, la obtención de un filtro discreto a partir de su equivalente continuo, pasamos a describir algunos métodos para su resolución. Se empezará por un procedimiento, tal vez el más inmediato, consistente en discretizar simplemente la respuesta impulsional del filtro analógico.

Como se verá, este enfoque presenta algunos inconvenientes que podrán ser superados haciendo uso de técnicas habituales en el campo de la integración de ecuaciones diferenciales. Un atractivo especial de estos métodos es que podrán ser representados en forma de transformaciones algebraicas entre los planos transformados s y z , permitiendo abordar el problema de la discretización con gran eficacia y con un coste computacional prácticamente nulo.

Invarianza de la respuesta impulsional

Un procedimiento, y tal vez el más inmediato, para transformar un filtro analógico en un filtro discreto consiste en definir la respuesta impulsional del filtro discreto a partir de las muestras de la respuesta impulsional $b_a(t)$ del filtro continuo. Este procedimiento se denomina *invarianza de la respuesta impulsional*. Es decir, se construye

$$b(n) = b_a(n\Delta)$$

Puede demostrarse [53] que la transformada z de $b(n)$ está relacionada con la transformada de Laplace de $b_a(t)$ a través de la ecuación

$$B(z)|_{z=e^{s\Delta}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_a\left(s + j\frac{2\pi}{\Delta}k\right) \quad (2.4)$$

A partir de esta expresión se puede comprobar que el semiplano izquierdo del plano s comprendido entre

$$-\pi/\Delta \leq \text{Im}[s] \leq \pi/\Delta$$

tiene por imagen el interior del círculo unidad, al igual que ocurre con las infinitas bandas

$$(2k-1)\pi/\Delta \leq \text{Im}[s] \leq (2k+1)\pi/\Delta$$

para todo valor entero de k . Por este motivo, no es posible escribir una relación *algebraica* que describa la transformación efectuada entre el plano s y el plano z .

Tiene especial interés estudiar la respuesta frecuencial del filtro discreto así construido. Para ello, se deberá evaluar $B(z)$ sobre el círculo unidad, es decir, tomar $s=j\omega/\Delta$ en (2.4), resultando

$$B(e^{j\omega}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_a\left(j\frac{\omega}{\Delta} + j\frac{2\pi}{\Delta}k\right) \quad (2.5)$$

De esta última expresión se desprende que, a menos que $B_a(j\omega)$ sea de banda limitada a $\omega \leq \pi/\Delta$, aparecerá un solapamiento de los sucesivos términos del sumatorio (2.5). Por tanto, la aplicación de esta técnica está limitada a situaciones muy particulares, y siempre considerando sistemas con respuesta frecuencial de tipo paso-bajo.

El razonamiento anterior conduce a la conclusión de que la técnica de invarianza de la respuesta impulsional no es una buena candidata para realizar la discretización de $B_a(s)$. En relación con ello, es importante advertir del peligro que supone el uso de la DFT para el cálculo de la integral de convolución que aparece en (2.3). En efecto, conocido un sistema (caracterizado por su respuesta bien impulsional, bien frecuencial), es habitual determinar la respuesta $y(t)$ a una excitación $x(t)$ realizando el producto de sus transformadas discretas de Fourier y tomando finalmente la DFT inversa. Este enfoque es el que utilizan las técnicas de análisis en el dominio frecuencial. Nótese que este procedimiento equivale a utilizar muestras de la respuesta impulsional del sistema y, por tanto, adolece de los inconvenientes antes esbozados.

Existen alternativas para la discretización de un sistema continuo que permiten superar estas dificultades. El problema de la determinación del sistema discreto equivalente puede ser visto desde un punto de vista distinto, en un enfoque que permitirá la construcción sistemática de algoritmos a tal efecto.

Substitución del operador derivada

Una segunda estrategia para la discretización de un sistema continuo parte de la representación de $B_a(s)$ en forma de ecuación diferencial. En efecto, $B_a(s)$ tiene, habitualmente, la forma de un cociente de polinomios en la variable s . Esto es

$$B_a(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

expresión que, en el dominio temporal, corresponde a la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y_a(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_a(t)}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m x_a(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx_a(t)}{dt} + b_0 \quad (2.6)$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son, respectivamente, la excitación y la respuesta del sistema bajo estudio. El problema de la resolución de la ecuación diferencial (2.6) podría abordarse aproximando las derivadas que en ella intervienen por diferencias finitas. Esta idea está basada en la constatación de que es posible aproximar la derivada de una función continua a partir del conocimiento de la diferencia de muestras consecutivas. Como es conocido, al ir incrementando la frecuencia de muestreo, la aproximación tiende, efectivamente, al valor de la derivada.

Una forma de aproximar la primera derivada de una función es tomar la primera diferencia hacia el pasado. La expresión resultante, conocida como backward-Euler, es

$$\left. \frac{dy_a(t)}{dt} \right|_{t=n\Delta} \approx \frac{y(n) - y(n-1)}{\Delta}$$

donde se ha definido $y(n) = y_a(n\Delta)$.

Llegados a este punto, es importante darse cuenta de que un sistema que realice esta aproximación de la derivada podrá ser descrito en el dominio transformado z por una función de transferencia de la forma

$$H(z) = (1 - z^{-1}) / \Delta$$

Siguiendo este método, es inmediato obtener la aproximación de derivadas de orden superior sin más que considerar el operador "derivada de orden k " como un sistema formado por la conexión en cascada de k "operadores derivada". Esta aproximación podrá caracterizarse en el dominio transformado z por una función de transferencia

$$H_k(z) = [(1 - z^{-1}) / \Delta]^k$$

La aplicación de esta idea permite escribir una aproximación de la ecuación diferencial de partida (2.6) en el dominio z como

$$\left[a_n \left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta} \right)^n + \dots + a_1 \frac{1-z^{-1}}{\Delta} + a_0 \right] Y(z) = \left[b_m \left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta} \right)^m + \dots + b_1 \frac{1-z^{-1}}{\Delta} + b_0 \right] X(z)$$

llegándose, de forma inmediata, a que el sistema discreto equivalente tiene una función de transferencia $B(z)$ de la forma

$$B(z) = B_a \left(\frac{1-z^{-1}}{\Delta} \right)$$

Así, a partir de la regla utilizada para la estimación de la derivada es posible discretizar un sistema continuo sin más que efectuar sobre $B_a(s)$ la transformación de plano s a plano z dada por la expresión

$$s = \frac{1-z^{-1}}{\Delta} = \frac{T_0(z)}{\Delta}$$

A modo de conclusión, es interesante darse cuenta de que el desarrollo realizado para aproximar la derivada en el dominio temporal puede, finalmente, sintetizarse en una regla sencilla que permitiría la discretización de un sistema continuo. La idea crucial que ha surgido es el concepto de *transformación* de plano- s a plano- z . En el siguiente apartado se profundiza en este aspecto, llegándose a generalizar esta idea hasta obtener algoritmos sencillos y, a la vez, exactos, que cumplan con el propósito especificado.

Transformaciones de plano- s a plano- z

Una amplia clase de transformaciones entre los dominios s y z puede ser deducida a partir de reglas de integración numérica bien establecidas. Para motivar este estudio, es instructivo considerar la realización de una función de transferencia racional de orden n , es decir,

$$B_a(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0},$$

mediante una combinación de n integradores y un cierto número de sumadores. Para ello, es necesario normalizar a la unidad el término de mayor grado del

denominador, esto es $a_n=1$. En esta situación, el diagrama de bloques descrito en la figura 2.11 realiza, efectivamente, la función de transferencia deseada.

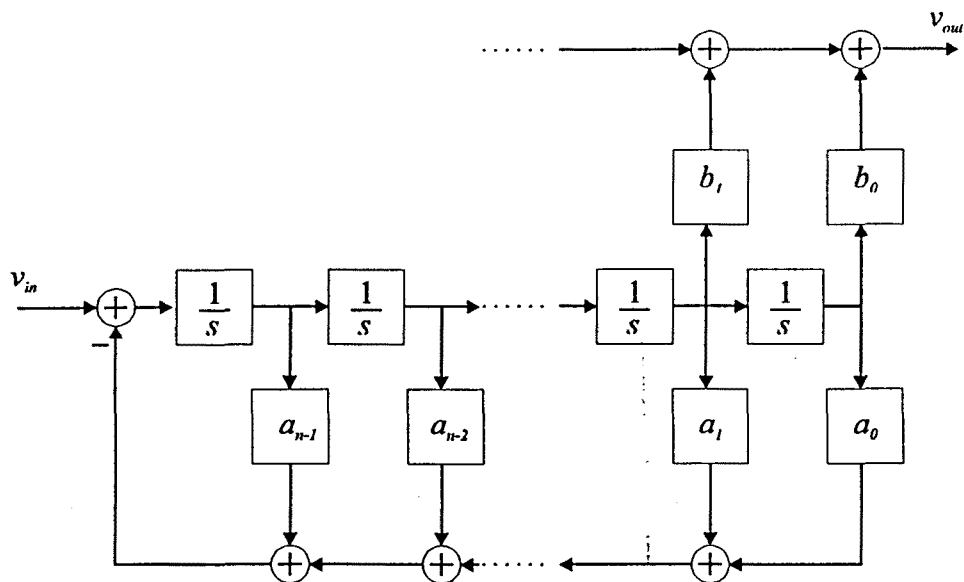


Figura 2.11 Realización mediante integradores.

Esta realización sugiere que el objetivo a perseguir es la aproximación de los integradores en el dominio temporal continuo mediante diferentes fórmulas de integración numérica. Asociada a cada una de las reglas de integración, será posible definir distintas formas de efectuar la discretización del filtro continuo. A continuación se desarrollan algunas ideas que, finalmente, conducirán a las transformaciones entre plano s y plano z buscadas. Para ello, y como paso previo, se esbozará muy brevemente el marco en el que han sido desarrollados los distintos algoritmos de integración.

Como es bien conocido, las ecuaciones de equilibrio de numerosos sistemas físicos pueden ser escritas como un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

...

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

siendo el problema del análisis de dicho sistema la determinación de las variables $x_i(t)$.

Para la solución de esta clase de ecuaciones, se han desarrollado numerosos métodos. Para ilustrarlos resulta especialmente instructivo considerar la resolución del problema en el caso $n=1$. Esto significa calcular $x(t)$ a partir de una cierta condición inicial $x(0)$ a partir de la ecuación

$$\dot{x} = f(x, t)$$

En una interpretación alternativa, este problema puede interpretarse como el de la *integración* de una función: determinar $x(t)$ partiendo del conocimiento de su derivada, $f(x, t)$.

Métodos de integración por aproximación de Taylor

Una forma de obtener sucesivos valores de $x(t)$ en instantes de tiempo $t=n\Delta$, y que denotaremos como x_n , está basada en la aproximación de Taylor de $x(t)$. Despreciando los términos de orden superior a p , es sencillo definir un esquema iterativo de la forma

$$x_n = x_{n-1} + \frac{\Delta}{1!} f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{\Delta^2}{2!} f^{(1)}(x_{n-1}, t_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^p}{p!} f^{(p-1)}(x_{n-1}, t_{n-1})$$

Es decir, el valor actual aproximado de la integral se obtiene a partir del valor que tomaba en el instante anterior más una corrección en la que intervienen las sucesivas derivadas en el instante inmediatamente anterior. Escrito en forma compacta

$$x_n = x_{n-1} + \Delta T_p(x_{n-1}, t_{n-1}; \Delta)$$

donde

$$T_p(x_{n-1}, t_{n-1}; \Delta) = f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{\Delta}{2!} f^{(1)}(x_{n-1}, t_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x_{n-1}, t_{n-1})$$

Distintos algoritmos resultan de considerar distintos valores de p , siendo fácilmente intuible que cuantos más términos se retengan en el desarrollo de Taylor, tanto mejor resultará la aproximación efectuada. En efecto, puede demostrarse [13] que

el error cometido realizando una aproximación de orden p tiende a cero al mismo ritmo que Δ^p tiende a cero. Por este motivo, el algoritmo de Taylor reteniendo p términos se denomina un algoritmo de *orden p* .

El principal inconveniente que aparece al implementar el algoritmo de Taylor es la necesidad de calcular derivadas de orden superior al primero. Esta dificultad puede ser obviada gracias a una técnica desarrollada por Runge y Kutta. La idea subyacente consiste en substituir el término exacto $T_p(x_{n-1}, t_{n-1}; \Delta)$ por una expresión distinta, $K_p(x_{n-1}, t_{n-1}; \Delta)$, que únicamente requiere el cálculo de la primera derivada y que difiere de la original en términos del orden de Δ^p , con lo que se mantiene el orden del algoritmo de Taylor. Los algoritmos resultantes, denominados de Runge-Kutta, gozan de una muy amplia aceptación para la resolución del problema descrito. A título ilustrativo, cabe destacar el algoritmo de Runge-Kutta de orden 4, uno de los más comúnmente utilizados y que viene definido por la expresión

$$x_n = x_{n-1} + \Delta K_4(x_{n-1}, t_{n-1}; \Delta)$$

donde

$$K_4(x_{n-1}, t_{n-1}; \Delta) = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = f(x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$k_2 = f\left(x_{n-1} + \frac{\Delta}{2}k_1, t_{n-1} + \frac{\Delta}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_{n-1} + \frac{\Delta}{2}k_2, t_{n-1} + \frac{\Delta}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_{n-1} + \Delta k_3, t_{n-1} + \Delta)$$

Al tratarse de un algoritmo de orden 4, es posible obtener una elevada exactitud efectuando pasos relativamente largos. A pesar de ello, los algoritmos de Runge-Kutta requieren, en cada paso, la evaluación de la función $f(x, t)$ en un cierto número de puntos. Por ejemplo, en el caso del algoritmo detallado, es necesario evaluar cuatro veces la función para obtener la respuesta en cada instante de tiempo. Además, los valores adicionales calculados no son utilizados en ningún cálculo posterior. Todo ello hace que, desde el punto de vista de la eficacia de cálculo, estos algoritmos no sean tan eficientes [13] como algunos de los algoritmos denominados de *pasos múltiples* o de *integración por aproximación polinómica* que pasamos a describir.

Métodos de integración por aproximación polinómica

Como su nombre sugiere, los métodos de integración por aproximación polinómica se basan en la construcción de un modelo polinómico de la función a integrar. Este modelo se derivará a partir de la información de la función que se ha ido obteniendo en el pasado.

En este momento, es necesario definir un marco para derivar estos métodos. Para ello, supongamos que la solución al problema

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.7)$$

viene dada por un polinomio de grado k . Supongamos, además, conocidos los valores exactos de $x(t)$ y, por consiguiente, de su derivada, en los instantes pasados

$$t = (n-1)\Delta, (n-2)\Delta, \dots, (n-p)\Delta.$$

Nuestro objetivo es construir algoritmos que permitan el cálculo *exacto* del valor actual x_n , siempre y cuando la solución sea polinómica. La expresión más general de esta clase de algoritmos, en forma de una combinación lineal de los valores de la función y de su derivada, es

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_p x_{n-p} + \Delta \left[b_0 f(x_n, t_n) + b_1 f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \dots + b_p f(x_{n-p}, t_{n-p}) \right]$$

o, en forma compacta,

$$x_n = \sum_{j=1}^p a_j x_{n-j} + \Delta \sum_{j=0}^p b_j f(x_{n-j}, t_{n-j}) \quad (2.8)$$

Para facilitar la posterior interpretación en forma de sistema discreto, es conveniente reescribir esta última expresión como

$$x_n = \sum_{j=1}^p a_j x_{n-j} + \Delta \sum_{j=0}^p b_j \dot{x}_{n-j}$$

donde aparece de forma más explícita el argumento central de nuestro razonamiento: la aproximación de la integral de una función a partir del conocimiento de su derivada.

Puede ser instructivo desarrollar un algoritmo particular, exacto para soluciones $x(t)$ polinómicas de grado 2. Esto es

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2,$$

Esta función tiene por derivada

$$\dot{x}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t.$$

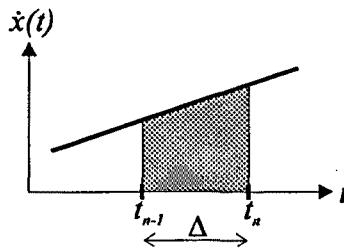


Figura 2.12 Regla de integración trapezoidal.

Dado que la función a integrar es lineal, con la ayuda de la figura 2.12 es inmediato comprobar que la expresión exacta de la integral es

$$x_n = x_{n-1} + \frac{\Delta}{2}(\dot{x}_n + \dot{x}_{n-1})$$

expresión que, efectivamente, concuerda con la forma general (2.8), tomando $p=1$ y con $a_1=1$, $b_0=0.5$ y $b_1=0.5$. La regla de integración así obtenida se conoce como *algoritmo trapezoidal* o, también, *regla de Tustin*.

Nótese que, en el caso de que la función a integrar sea, efectivamente, una recta, la regla de Tustin predice el valor correcto de la integral independientemente del valor del periodo de muestreo Δ . En la práctica, sin embargo, una función solamente es asemejable a una recta para valores suficientemente pequeños del periodo de muestreo por lo que siempre se cometerá un cierto error en la aproximación. En general, puede demostrarse que el error de truncamiento cometido por aplicación de una regla de integración exacta para polinomios de grado k , tiende a cero como Δ^{k+1} , siendo habitual etiquetar dicha regla como de *orden k* . Así, por ejemplo, la regla de Tustin pertenece a la clase de algoritmos de orden 2.

Es interesante notar que el algoritmo trapezoidal requiere, para el cálculo de la función en el instante actual, x_n , el conocimiento de la derivada en este mismo instante. No obstante para determinar esta última es necesario evaluar $f(x_n, t_n)$ y para ello sería necesario conocer previamente x_n . Por este motivo, los algoritmos que presentan esta particularidad, esto es, aquellos en los que el coeficiente b_0 es distinto de cero, se denominan algoritmos *implícitos*, en contraposición con los algoritmos denominados *explícitos* que permiten evaluar el valor actual x_n a partir de la información disponible explícitamente. Es fácil darse cuenta de que, la resolución del problema de valor inicial (2.7) por medio de algoritmos implícitos requiere hacer uso de esquemas iterativos. Habitualmente, éstos son inicializados mediante una estimación realizada por un algoritmo explícito, de fácil aplicación. Al tándem así formado se le denomina algoritmo *predictor-corrector*. No obstante, cabe adelantar que esta dificultad resultará irrelevante en nuestra línea de razonamiento.

Como se ha visto anteriormente, los algoritmos de Runge-Kutta requieren la evaluación de la derivada de la función en instantes de tiempo que no coinciden con los instantes de muestreo. Esta situación no se da en los métodos de integración polinómica. Por este motivo, estos últimos pueden interpretarse como un sistema discreto cuya entrada son las sucesivas muestras de la función a integrar y cuya salida es, en cada instante de tiempo, la aproximación a la integral resultante de aplicar una determinada regla. Así, el comportamiento del sistema discreto así definido se aproxima al de un integrador continuo.

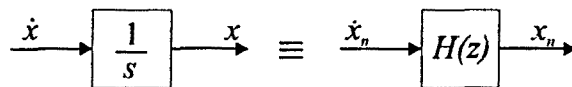


Figura 2.13 Aproximación de un integrador continuo mediante un sistema discreto.

Además, es inmediato comprobar que el sistema discreto caracterizado por la ecuación (2.8) puede ser descrito en el dominio transformado z por una función de transferencia $H(z)$ de la forma

$$H(z) = \frac{X(z)}{\dot{X}(z)} = \Delta \frac{\sum_{j=0}^p b_j z^{-j}}{1 - \sum_{j=1}^p a_j z^{-j}}$$

Una vez definida la forma general de las reglas de integración por interpolación numérica, surge la pregunta, ¿con qué criterios deben fijarse los coeficientes que definen la regla?

Una primera consideración a realizar está relacionada con la propia filosofía de estas técnicas. En efecto, al justificar la existencia de estos algoritmos se ha supuesto la exactitud de los mismos para soluciones polinómicas de grado menor o igual a k . Al imponer esta condición, aparecerán automáticamente $k+1$ restricciones sobre los $2p+1$ coeficientes a determinar. A partir de este punto, la elección de los restantes coeficientes e incluso del valor de p , es arbitraria.

Dos familias importantes de algoritmos son la de Adams-Bashforth y la de Adams-Moulton. La primera de ellas está formada por algoritmos *explícitos* —esto es, $b_0=0$ — obtenidos tomando $p=k$, $a_1=1$, y fijando a cero los coeficientes:

$$a_2=a_3= \dots =a_k=0$$

En esta situación, los coeficientes b_k se obtienen de las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^k (1-i)^{j-1} b_i = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

El algoritmo de orden k de Adams-Moulton es un algoritmo *implícito* obtenido fijando $p=k-1$, $a_1=1$, y fijando a cero los coeficientes:

$$a_2=a_3= \dots =a_{k-1}=0$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (1-i)^{j-1} b_i = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Para diferentes valores de k , se obtienen los algoritmos

Orden	Algoritmo de Adams-Moulton resultante
1	$x_n = x_{n-1} + \Delta \dot{x}_n$
2	$x_n = x_{n-1} + \Delta \left(\frac{1}{2} \dot{x}_n + \frac{1}{2} \dot{x}_{n-1} \right)$
3	$x_n = x_{n-1} + \Delta \left(\frac{3}{12} \dot{x}_n + \frac{8}{12} \dot{x}_{n-1} - \frac{1}{12} \dot{x}_{n-2} \right)$
4	$x_n = x_{n-1} + \Delta \left(\frac{9}{24} \dot{x}_n + \frac{19}{24} \dot{x}_{n-1} - \frac{5}{24} \dot{x}_{n-2} + \frac{1}{24} \dot{x}_{n-3} \right)$

Nótese que los algoritmos de Adams-Moulton de orden 1 y 2 corresponden, respectivamente, a los ya descritos algoritmos backward-Euler y trapezoidal. A medida que aumenta el orden, cabe esperar una reducción en el error de integración. Una mirada atenta a los algoritmos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton revela que, para un orden dado, los últimos requieren un dato menos, por lo que se pueden considerar un orden de magnitud superiores en cuanto a exactitud. Este incremento en la exactitud se produce a costa de definir un algoritmo implícito, cuya resolución, como ya se ha apuntado, no es inmediata.

Una tercera familia de algoritmos ha sido desarrollada con el objetivo de resolver ecuaciones diferenciales en las que la solución está formada por términos cuyas constantes de tiempo difieren notablemente. Para justificar la necesidad de estos métodos, señalaremos que algunos de los algoritmos antes descritos requerirían tomar continuamente muestras a una frecuencia fijada por la constante de tiempo más pequeña, so peligro de producir resultados falsos. Esto puede suponer un coste de cálculo desorbitado en el caso de que las constantes de tiempo difieran varios órdenes de magnitud —una situación muy frecuente en simulación de circuitos. Además de ser exactos para polinomios de grado k , los algoritmos implícitos de Gear se construyen para permitir tomar pasos mayores una vez que las componentes más rápidas se han extinguido [13] sin que ello comprometa la exactitud de los resultados. El algoritmo de Gear de orden k se obtiene tomando $p=k$, y fijando a cero los coeficientes

$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$$

La exactitud del algoritmo para soluciones polinómicas de grado k se obtiene imponiendo las restricciones

$$\sum_{i=1}^k (1-i)^{j-1} a_i + j b_0 = 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

ecuaciones que hay que resolver para las incógnitas b_0, a_1, \dots, a_k .

Para diferentes valores de k , se obtienen los algoritmos siguientes:

Orden	Algoritmo Gear resultante
1	$x_n = x_{n-1} + \Delta \dot{x}_n$
2	$x_n = \frac{4}{3} x_{n-1} - \frac{1}{3} x_{n-2} + \Delta \left(\frac{2}{3} \dot{x}_n \right)$
3	$x_n = \frac{18}{11} x_{n-1} - \frac{9}{11} x_{n-2} + \frac{2}{11} x_{n-3} + \Delta \left(\frac{6}{11} \dot{x}_n \right)$
4	$x_n = \frac{48}{25} x_{n-1} - \frac{36}{25} x_{n-2} + \frac{16}{25} x_{n-3} - \frac{3}{25} x_{n-4} + \Delta \left(\frac{12}{25} \dot{x}_n \right)$

Así como se han derivado estas tres familias de algoritmos, sería posible obtener un sinnúmero de ellas, cada una destinada a resolver de la mejor forma posible un cierto tipo de problemas. No obstante, no es nuestro objetivo hacer un estudio exhaustivo de los distintos algoritmos existentes, sino presentar algunos de los más frecuentemente utilizados. En seguida se presentarán los criterios que hacen preferible el algoritmo de Gear de orden 2 mas antes conviene volver a la realización del sistema discreto equivalente.

Transformaciones de plano- s a plano- z

Una vez fijada una cierta regla de integración, será posible sustituir cada uno de los integradores que aparecen en la figura 2.11 por su correspondiente integrador discreto. El resultado final será un sistema discreto definido por una función de transferencia $B(z)$ obtenible a partir de $B_a(s)$ sin más que substituir cada aparición del término s por

$$s = \frac{T_0(z)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1 - \sum_{j=1}^p a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^p b_j z^{-j}}$$

Así, asociada a la regla de integración trapezoidal, queda definida la transformación

$$s = \frac{2}{\Delta} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

expresión que resulta ser la conocida transformación bilineal, la más comúnmente utilizada para la discretización de filtros analógicos.

A la vista de lo expuesto anteriormente, cabe pensar que haciendo uso de reglas de integración de orden superior, es posible obtener mejores características del filtro discreto equivalente. Aunque esta idea parece inmediata, su decidida aplicación sistemática solamente ha sido descrita muy recientemente por Schneider *et al.* [64]. Una razón por la que habitualmente no se usan aproximaciones de orden superior es citada por estos autores, quienes transcriben un párrafo de Kuo [38], quien afirma:

" En general, existen métodos de integración de orden y complejidad superiores, tales como las reglas de Simpson. No obstante, estos esquemas usualmente generan funciones de transferencia de orden superior que causan serios problemas de estabilidad en los modelos de simulación. Por esta razón, en aplicaciones de sistemas de control, estos métodos de integración de orden superior son utilizados muy raramente. "

Para interpretar correctamente esta afirmación, es necesario definir previamente el significado que tiene el término *estabilidad* al que se refiere Kuo.

Estabilidad de las transformaciones

Tras una ligera reflexión, es fácil darse cuenta de que uno de los objetivos cruciales en el proceso de discretización es conseguir que un sistema estable en el dominio s quede transformado en un sistema estable en el dominio z . Como es conocido, un sistema en el dominio s es estable si y solo si todos sus polos están situados en el semiplano izquierdo mientras que un sistema discreto es estable si y solo si todos sus polos están contenidos en el círculo unidad centrado en el origen. Así, para una transformación particular, es importante analizar qué imagen les corresponde a los

polos de un sistema continuo estable. Una alternativa igualmente válida consiste en determinar a qué zona del plano s le corresponde como imagen el interior del círculo unidad.

Consideremos, en primer lugar, la regla de integración backward-Euler, asimilable a una transformación de la forma

$$s = \frac{1}{\Delta}(1 - z^{-1}) \quad (2.9)$$

Para realizar el estudio de estabilidad independientemente del periodo de muestreo utilizado, es conveniente definir una normalización

$$s' = \Delta s$$

para, a continuación, trabajar únicamente en el plano continuo normalizado s' .

Mediante la transformación (2.9), el círculo de radio unidad centrado en $z=0$, descrito por

$$z = e^{j\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

queda transformado en la curva

$$\sigma(\theta) = 1 - e^{-j\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

sobre el plano s' , expresión que corresponde a una circunferencia de radio unidad centrada en $s' = 1 + j0$. Para determinar la zona que es transformada en el *interior* del círculo unidad basta con determinar la imagen de un punto interior a la circunferencia descrita por $\sigma(\theta)$. Por ejemplo, es inmediato comprobar que $s' = 0.5$ tiene por imagen $z = 2$, punto que es exterior al círculo unidad centrado en $z = 0$, con lo que se concluye que la transformación backward-Euler transforma los puntos *exteriores* a $\sigma(\theta)$ al *interior* del círculo unidad, con lo que a partir de un filtro continuo estable siempre se obtiene un filtro discreto estable.

La pregunta que surge ahora es ¿cuál es el problema que puede aparecer con el uso de algoritmos de integración de orden superior? Para ilustrar lo que puede suceder en estos casos, es instructivo repetir el proceso anterior para la conocida regla de integración de Simpson

$$x_n = x_{n-2} + \frac{\Delta}{3} [\dot{x}_n + 4\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_{n-2}]$$

a partir de la que se puede escribir la transformación

$$s = \frac{3}{\Delta} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}} \quad (2.10)$$

Sobre esta expresión puede verificarse que el círculo

$$z = e^{j\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

queda transformado en un único segmento sobre el eje imaginario del plano s' , definido por la expresión

$$\sigma(\theta) = j \frac{3(1 - \cos 2\theta)}{4\sin\theta + \sin 2\theta}$$

Así, las posibles zonas de estabilidad serían, bien todo el plano s' excepto el segmento $\sigma(\theta)$, bien únicamente el segmento $\sigma(\theta)$. Para comprobar que la segunda posibilidad es la que se produce realmente, estudiaremos cómo quedaría transformado un filtro estable sencillo, descrito por la función de transferencia

$$B_a(s) = \frac{a}{s+a}, \quad a > 0$$

Aplicando la transformación (2.10), se llega a

$$B(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{\left(1 + \frac{3}{\Delta}\right)z^2 + 4z + \left(1 - \frac{3}{\Delta}\right)}$$

Las raíces del denominador de $B(z)$ son

$$z_p = \frac{-2 \pm \sqrt{3 + \frac{9}{\Delta^2}}}{1 + \frac{3}{\Delta}}$$

Sobre esta expresión puede verificarse que, para todo $a > 0$, el polo asociado al signo negativo del discriminante queda fuera del círculo unidad*. En conclusión, cualquier polo real negativo hace aparecer un polo inestable en el filtro discreto

* Asimismo, se cumple que, para todo $a < 0$, el polo asociado al signo positivo del discriminante queda fuera del círculo unidad.

obtenido. Por esta razón, la regla de Simpson no es válida para realizar la discretización de un sistema continuo.

A la vista del ejemplo descrito, resulta imprescindible realizar un estudio previo de las transformaciones obtenidas a partir de reglas de integración con el fin de asegurar que los polos estables del filtro continuo se transforman en polos estables en el equivalente discreto[#].

Un proceso similar al que se ha seguido para determinar la zona de estabilidad de la transformación backward-Euler puede aplicarse para la transformación bilineal. En efecto, en este caso, no es difícil comprobar que el eje imaginario de s' es transformado sobre la circunferencia unidad y que el semiplano izquierdo de s' tiene por imagen el interior del círculo unidad. La figura 2.14 ilustra gráficamente las zonas de estabilidad de las transformaciones backward-Euler y bilineal.

Se ha realizado el mismo estudio para los algoritmos de Adams-Moulton, propuestos recientemente por Schneider *et al.* [64] para la discretización de filtros analógicos. En la figura 2.15 se muestran las zonas de estabilidad asociadas a dichos algoritmos de orden 2 y de orden 3.

En la figura 2.16 se han representado las zonas de estabilidad de las transformaciones asociadas a las reglas de integración Gear de orden 2 y 3. Puede verse que, a medida que aumenta el orden, se reduce la zona de estabilidad. Cabe destacar que para el algoritmo de Gear de orden 4 aparecerían zonas de inestabilidad apreciables en el semiplano izquierdo.

[#] Una alternativa consistiría en elegir una determinada regla de integración, transformar el sistema continuo en su equivalente discreto y, a posteriori, investigar la estabilidad del sistema discreto resultante, siguiendo, por ejemplo, la técnica descrita por Bistriz [5].

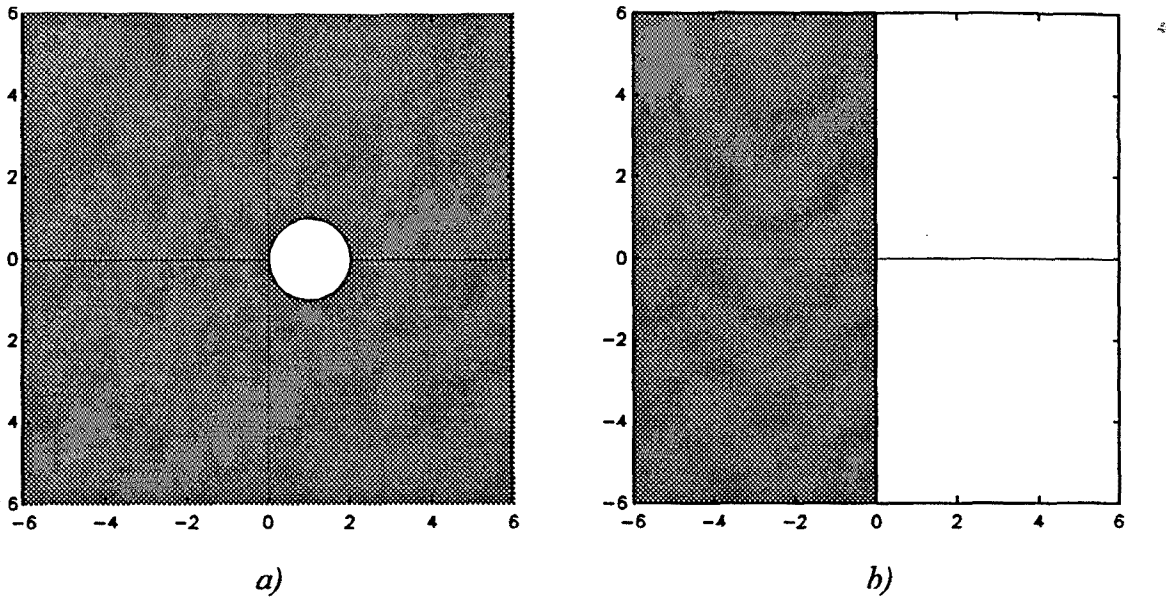


Figura 2.14 Plano s' . Un polo situado en la zona sombreada es transformado en un polo estable en el plano z por las transformaciones :
a) backward-Euler *b)* bilineal.

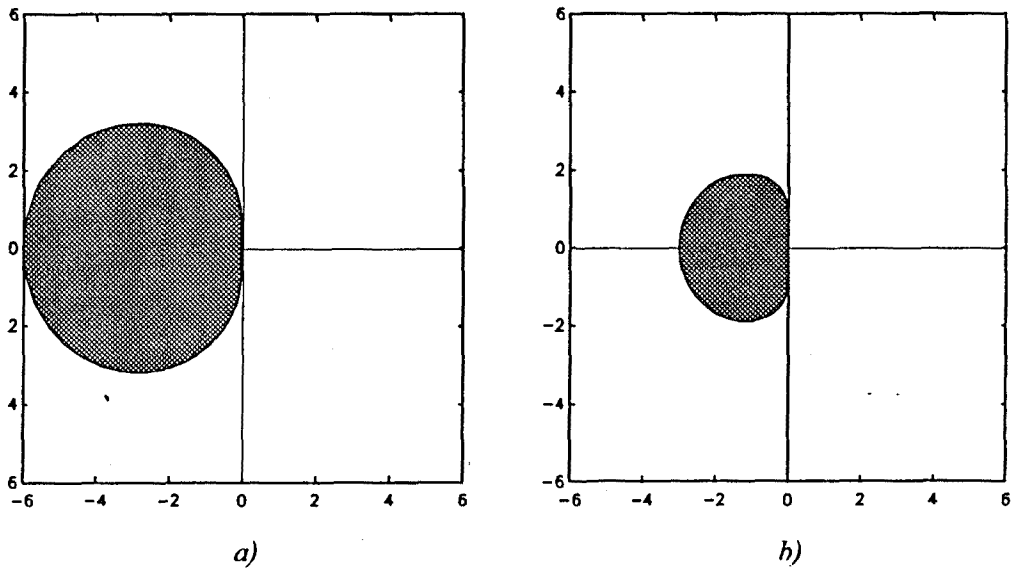


Figura 2.15 Plano s' . Un polo situado en la zona sombreada es transformado en un polo estable en el plano z por las transformaciones :
a) Adams-Moulton de orden 2 *b)* Adams-Moulton de orden 3.

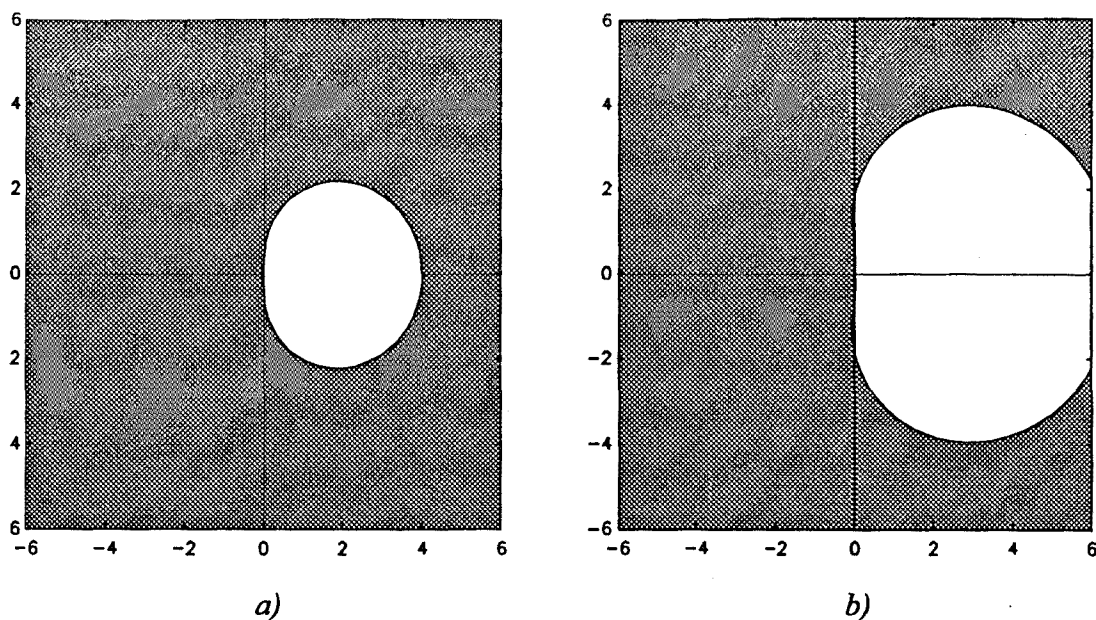


Figura 2.16 Plano s' . Un polo situado en la zona sombreada es transformado en un polo estable en el plano z por las transformaciones :
 a) Gear de orden 2 b) Gear de orden 3.

A la vista de las figuras anteriores, es fácil llegar a la conclusión que la transformación asociada a la regla de integración de Gear de orden 2 supone un buen compromiso entre estabilidad y exactitud. Por este motivo, en esta tesis se ha elegido la transformación Gear-2

$$s = \frac{1}{2\Delta} (3 - 4z^{-1} + z^{-2}) \quad (2.11)$$

para la discretización de las ecuaciones de equilibrio.

Resulta especialmente instructivo comparar, sobre un circuito lineal sencillo, los resultados que se obtienen haciendo uso de la técnica de discretización más sencilla, la técnica de la invarianza de la respuesta impulsional y realizando la transformación s - z descrita por la expresión (2.11). Para ello, considérese un circuito RC paso bajo, sometido a una excitación sinusoidal $v_i(t) = \cos(2\pi t/8)$. Véase la figura 2.17.

En régimen permanente, la tensión en terminales del condensador será

$$v_o(t) = A \cos(2\pi t/8 + \varphi)$$

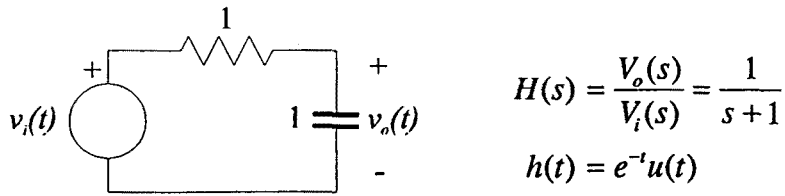


Figura 2.17 Función de red y respuesta impulsional de un circuito RC

con $A \approx 0.78$ y $\varphi \approx -38^\circ$, resultado que puede obtenerse de forma inmediata a partir del análisis fasorial del circuito. Veamos qué respuesta se obtendría por aplicación del método de invarianza de la respuesta impulsional. Para ello, será necesario muestrear tanto la excitación como la respuesta impulsional. En este ejemplo, elegiremos el intervalo de muestreo de 1s, quedando así la cosenoide especificada mediante ocho puntos por periodo. Para determinar la respuesta periódica, calcularemos la convolución discreta hasta detectar el establecimiento del régimen permanente, conscientes de que existen formas alternativas más directas para realizar esta operación produciendo idéntico resultado. En la figura 2.19.a se representa la respuesta impulsional discreta obtenida y un periodo de la excitación, mientras que en la figura 2.19.b se ilustran las muestras de un periodo de la cosenoide de salida exacta y el resultado obtenido a partir de la convolución discreta.

De esta figura se desprende que la aproximación obtenida deja mucho que desear. En este caso, una vía para incrementar la exactitud de los resultados pasa por aumentar el número de muestras por periodo, esto es, la frecuencia de muestreo. Nótese que la inexactitud obtenida en este ejemplo es debida al solapamiento de espectros producido por el muestreo (a frecuencia relativamente baja) sobre la respuesta impulsional. Este efecto podría minimizarse realizando un filtrado antialiasing previo sobre $h(t)$. Procediendo de esta forma, y dado que en este ejemplo la excitación es de banda limitada, podría obtenerse la salida de forma mucho más precisa. También es conveniente señalar que esta operación es la que se realiza, de forma implícita, en el método de balance armónico clásico.

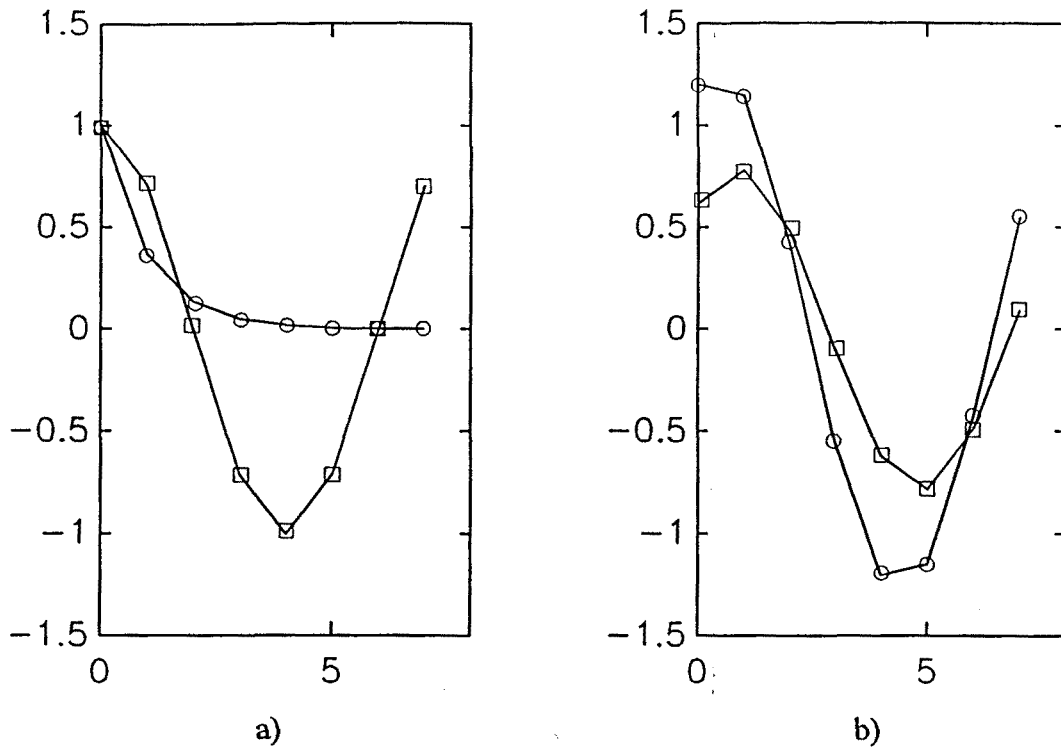


Figura 2.18 Discretización mediante el método de la invarianza de la respuesta impulsional.
a) Respuesta impulsional discreta y muestras de la excitación
b) Salida obtenida (O) y muestras de la salida exacta (□)

Mediante la discretización de Gear de orden 2 es posible obtener resultados mucho mejores, a pesar de la frecuencia de muestreo tan baja que se utiliza en este ejemplo. Para ello, es necesario substituir la transformación (2.11) en la expresión de $H(s)$, resultando

$$H(z^{-1}) = \frac{2}{5 - 4z^{-1} + z^{-2}}$$

cuya respuesta impulsional (discreta) se representa en la figura 2.19.a. Nótese que las muestras de ésta no son muy parecidas a las de $h(t)$. No obstante, obsérvese, en la figura 2.19.b, cómo las muestras de salida aproximan, de forma mucho más satisfactoria que antes, la cosenoide de salida exacta.

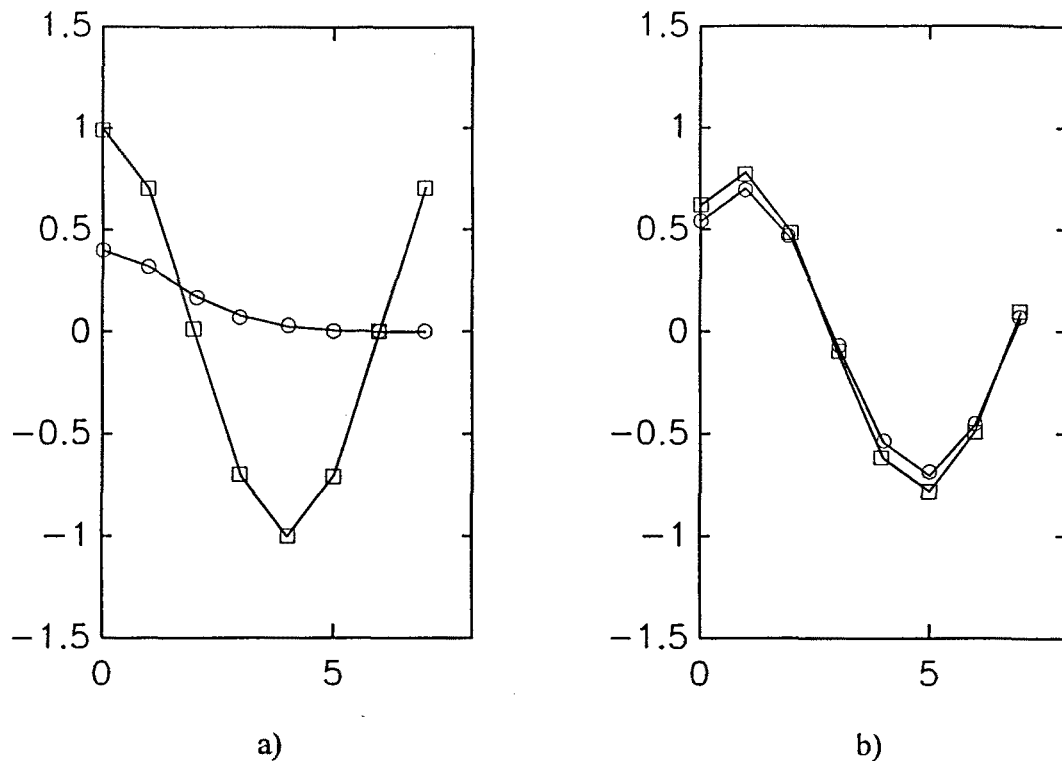


Figura 2.19 Discretización mediante el método de Gear de orden 2.
a) Respuesta impulsional discreta y muestras de la excitación
b) Salida obtenida (o) y muestras de la salida exacta (□)

Sirva este ejemplo para ilustrar cómo la elección de estrategias de discretización más exactas conduce a mejores aproximaciones en los resultados, una conclusión a la que fácilmente podía llegarse de forma intuitiva.

Finalmente, falta remarcar un aspecto que, por obvio, podría pasar desapercibido: dado que el método trabaja sobre las muestras de las variables, por muy sofisticado que sea el algoritmo de discretización utilizado, la exactitud de los resultados viene limitada, en última instancia, por la frecuencia de muestreo utilizada. Como es conocido, ésta debe elegirse de forma que cumpla, de la forma más aproximada posible, el criterio de Nyquist. Una frecuencia de muestreo más elevada redundará, además de en una mejor representación de las señales, en una mayor exactitud en la discretización del sistema. No obstante, ello incrementará la complejidad del sistema de ecuaciones resultante, siendo, en general, necesario alcanzar un compromiso entre ambos objetivos.

Una vez determinado el procedimiento por el cual se efectuará la discretización de los filtros continuos, se está en condiciones de proseguir con la descripción del método propuesto para el planteamiento de las ecuaciones.

2.2.3. Formulación de las ecuaciones de equilibrio en términos de convoluciones circulares

En este momento se dispone de técnicas eficaces para discretizar la ecuación de equilibrio del circuito, planteada en el dominio transformado de Laplace, que reescribimos aquí para facilitar su posterior referencia:

$$X=V+BF(X) \tag{2.12}$$

Conviene destacar que el filtro continuo, sobre el que se han aplicado las distintas transformaciones, $B(s)\equiv B_a(s)$ tiene, en general, la forma de un cociente de polinomios, esto es

$$B(s) = -\frac{Q(s)}{P(s)} = -\frac{\hat{q}_m s^m + \dots + \hat{q}_1 s + \hat{q}_0}{\hat{p}_m s^m + \dots + \hat{p}_1 s + \hat{p}_0}$$

donde el signo negativo se ha introducido para facilitar la notación posterior. Con el mismo objetivo se han igualado formalmente los grados del numerador y del denominador aunque en la práctica cabe la posibilidad de que algunos coeficientes, por ejemplo, los de mayor grado del numerador, sean nulos. Ahora, en vez de efectuar la transformación de plano s a plano z como proponen Frey y Norman [27], aún es posible efectuar un paso intermedio. Definiendo $R=-PV$, la expresión (2.12) puede ser reescrita como

$$PX+QF(X)+R=0 \tag{2.13}$$

expresión que sigue estando definida en el dominio transformado de Laplace.

Aplicando en este momento la transformación s - z elegida, se llega a la expresión formal, definida en el dominio z

$$P_z X_z + Q_z F_z(X) + R_z = 0 \tag{2.14}$$

El siguiente paso es llevar la expresión anterior al dominio de las secuencias. Formalmente, para ello es necesario efectuar la transformada z inversa. No obstante, en la práctica este proceso es extremadamente sencillo, ya que para ello bastará tener en cuenta el proceso por el cual se ha llegado a la expresión (2.14). En efecto

ésima. A partir de este momento, en cada nueva ecuación $i+1$, $i+2$, ..., únicamente aparece una nueva incógnita. Así, la expresión (2.15) permitiría, al menos desde un punto de vista estrictamente formal, encontrar sucesivas muestras de $x(t)$ a partir del conocimiento de las anteriores. No obstante, es importante recordar que el objetivo último que persigue el método que describimos es la determinación de las formas de onda periódicas en *régimen permanente*. Por este motivo, es conveniente introducir la periodicidad de las variables ya en el momento de escribir el sistema de ecuaciones.

Antes de proseguir, imaginemos por un instante que las ecuaciones (2.15) son resueltas para sucesivos valores x_n . ¿Cuándo consideraríamos que se ha alcanzado el régimen periódico? Evidentemente no sería suficiente detectar la repetición de un valor de x , ya que una señal periódica puede tomar los mismos valores dentro de un periodo. Además, para detectar de forma sencilla una repetición cualquiera, es necesario que el periodo de las variables sea un múltiplo entero del periodo de muestreo. Como ya se ha apuntado, una observación atenta del sistema de ecuaciones (2.15) revela que el valor que toma cada muestra depende únicamente de los valores que toman las m muestras anteriores. Esta particularidad permitiría denominar *memoria del sistema de ecuaciones* al valor m . A la vista de ello, cuando se repitan m sucesivos valores de x tendremos la certeza de que se habrá llegado a la respuesta periódica. Está claro que el razonamiento anterior únicamente constituye un experimento hipotético, por lo que será necesario diseñar un proceso sistemático y eficaz que permita la determinación directa de la respuesta periódica.

En lo sucesivo, denotaremos como T el periodo de oscilación de las variables. Como ya se ha expuesto, en el caso de circuitos autónomo, el valor de T es desconocido a priori y su determinación es uno de los principales objetivos del análisis, cuando no *el más importante*. Asimismo, nada impide elegir el valor del periodo de muestreo de forma que el periodo resulte, formalmente, un número entero de veces Δ . Es decir

$$\Delta = \frac{T}{N}$$

siendo el valor de N fijado de antemano. Tras advertir el efecto que tiene sobre el periodo de muestreo, resulta claro que la elección del número de muestras por

periodo, N , deberá realizarse teniendo en cuenta la anchura espectral esperada para las variables del circuito, con el fin de minimizar los efectos del solapamiento de espectros que, inevitablemente se produce al muestrearlas. No obstante, esta elección no resultará crítica a la vista de las técnicas de refinamiento sucesivo que se presentarán en el capítulo correspondiente a la resolución de las ecuaciones.

A continuación desarrollaremos el efecto que produce la periodicidad de las variables en la ecuación recuadrada -correspondiente al instante n -ésimo- en (2.15). Con la notación introducida, es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned} x_{n-m} &= x_{n+N-m} \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= x_{n+N-2} \\ x_{n-1} &= x_{n+N-1} \\ x_n &= x_n \end{aligned}$$

donde se ha perseguido el objetivo de mantener como variables independientes las N muestras $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+N-1}$. Efectuando el mismo proceso sobre las $N-1$ ecuaciones siguientes, no es difícil comprobar que el sistema de ecuaciones resultante es de la forma

$$\begin{bmatrix} p_0 & 0 & \dots & 0 & p_m & \dots & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 & p_m & \dots & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & p_m \\ p_m & & & & & & & 0 \\ 0 & p_m & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_m & \dots & p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+N-m} \\ \vdots \\ x_{n+N-2} \\ x_{n+N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 & 0 & \dots & 0 & q_m & \dots & q_2 & q_1 \\ q_1 & q_0 & 0 & \dots & 0 & q_m & \dots & q_2 \\ q_2 & q_1 & q_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & q_m \\ q_m & & & & & & & 0 \\ 0 & q_m & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_m & \dots & q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_n) \\ f(x_{n+1}) \\ f(x_{n+2}) \\ \vdots \\ f(x_{n+N-m}) \\ \vdots \\ f(x_{n+N-2}) \\ f(x_{n+N-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_n \\ r_{n+1} \\ r_{n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{n+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

expresión que puede ser escrita en forma compacta como

$$\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

donde \mathbf{P} y \mathbf{Q} son matrices de orden $N \times N$, \mathbf{x} y \mathbf{r} son vectores columna formados por N muestras de $x(t)$ y $r(t)$, respectivamente, y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)]^T$

Dado que en la formulación descrita se impone necesariamente la periodicidad de las variables, si es posible encontrar un vector \mathbf{x} que cumpla la expresión (2.16), este vector estará formado por las muestras de la variable $x(t)$ directamente en *régimen permanente*.

Se habrá observado que en la formulación resultante (2.16) las matrices \mathbf{P} y \mathbf{Q} tienen una forma muy especial. En efecto, cada fila no es más que la anterior desplazada una columna hacia la derecha con la particularidad de que el último elemento reaparece en la primera posición. En general, se denomina *matriz circulante* o, simplemente, un *circulante* de orden N a toda matriz cuadrada de la forma

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_N \\ c_N & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & & c_1 \end{bmatrix}$$

En apartados posteriores se hará uso de algunas interesantes propiedades de las matrices circulantes. En este momento, sin embargo, conviene centrar nuestro interés en la operación que se realiza al efectuar el producto de una matriz circulante por un vector arbitrario \mathbf{z}

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z}$$

Es sencillo comprobar que

$$w_n = \sum_{k=1}^N z_k c_{k-n+1}$$

donde los índices deben interpretarse módulo N . Esta expresión corresponde a la convolución circular de los vectores $\mathbf{c} = (c_n, \dots, c_2, c_1)^T$ y \mathbf{z} , es decir

$$\mathbf{w} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{z}$$

Así, definiendo $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_m, 0, \dots, 0, p_0)^T$ y $\mathbf{q}=(q_1, q_2, \dots, q_m, 0, \dots, 0, q_0)^T$, la ecuación (2.16) admite una escritura alternativa, en forma de convoluciones circulares, como

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{q} \otimes f(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

A pesar de su forma más compacta, esta expresión resulta algo menos manejable que su equivalente matricial (2.16), razón por la cual, en lo sucesivo, se trabajará sobre esta última. No obstante, a menudo convendrá recordar que es posible plantear el problema utilizando únicamente *vectores* de N elementos, en vez de matrices de $N \times N$ elementos, con el aprovechamiento de recursos que ello supone.

Tras el desarrollo efectuado, puede ser conveniente recordar cuál es el objetivo del análisis. Este consistirá en la determinación de las N muestras de la variable de control x en un periodo, junto con el valor del propio periodo de oscilación, T . Nótese que la dependencia del sistema de ecuaciones con T aparece de forma implícita al efectuar las transformaciones entre plano s y z , cuya forma general es

$$s = T_0(z) / \Delta,$$

a través del término $\Delta = T/N$.

Se habrá apreciado que, en el sistema de ecuaciones resultante, aparecen un total de $N+1$ variables a determinar (las N muestras más el periodo) mientras que únicamente se han escrito N ecuaciones. Esto lleva a pensar que es posible encontrar múltiples soluciones a un determinado problema de análisis. Una reflexión nos convencerá de que, en efecto, el problema planteado tiene un grado de libertad. Para ello basta la constatación de que, en el problema de la determinación de una variable en régimen permanente, el hecho de fijar un determinado origen de tiempos resulta una elección totalmente arbitraria: si una determinada forma de onda $x(t)$ es solución a un problema, también lo será $x(t-t_0)$ para cualquier valor de t_0 . Efectivamente, una señal periódica cualquiera y la misma señal retardada un tiempo arbitrario resultan físicamente indistinguibles a menos que exista una referencia temporal externa que permita "etiquetar" un determinado instante de tiempo.

Lejos de facilitar la búsqueda de una solución al problema, la existencia de este continuo de soluciones más bien dificulta la convergencia de la mayoría de los algoritmos de resolución, como apuntan Kundert *et al.* en [37]. Por este motivo, es conveniente introducir alguna restricción adicional que aisle un número finito de ellas. Nótese, por otro lado, que la existencia de un mayor número de incógnitas que de ecuaciones es un hecho intrínseco al problema autónomo y, por tanto, aparece independientemente de la estrategia que se siga para su formulación. ¿Cómo afrontan este problema los métodos tradicionales? Los métodos de shooting, en su búsqueda de aquellas condiciones iniciales que hacen nulo el transitorio, fijan el valor de una de ellas, teniendo, eso sí, la precaución de que el valor fijado caiga dentro del intervalo de valores que toma dicha variable en un periodo. Habitualmente, en la práctica, ello no supone ninguna dificultad. Además, algunos autores [33] contemplan la posibilidad de cambiar la variable que se mantiene fija en cada iteración. En los métodos de balance armónico, por contra, se fija arbitrariamente la fase de uno de los armónicos, siempre y cuando éste contribuya con una amplitud no nula a la solución final del problema. Así, es habitual anular la parte imaginaria del primer armónico [43]. En la formulación descrita, es fácil ver que la restricción adicional a introducir consistirá en fijar el valor de una de las muestras a determinar. En particular, y sin pérdida de generalidad, se ha optado por fijar el valor de la primera muestra, esto es. x_1 . Conviene señalar que ello no representa ninguna dificultad especial por cuanto que, en la práctica, es usualmente posible disponer de una estimación del margen de valores que toma *una* de las variables de control del circuito.

2.2.4. Ejemplo : Ecuaciones de equilibrio para el oscilador de van der Pol

Con el fin de presentar una aplicación práctica de la formulación descrita, ilustraremos el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio sobre el oscilador de van der Pol. Como es conocido, la ecuación de van der Pol,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

no es más que una aproximación de las ecuaciones que rigen el comportamiento de ciertos osciladores. Aunque originalmente fue obtenida a partir de un oscilador a triodo, la misma ecuación también aparece en el análisis de osciladores a diodo túnel.

Independientemente del circuito del que provenga, la ecuación de van der Pol puede ser modelada circuitalmente como

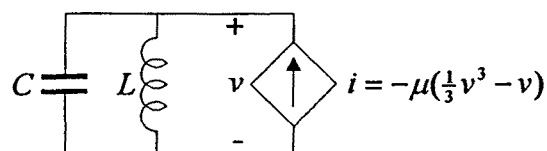
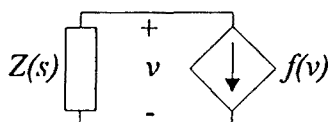


Figura 2.20. Oscilador de van der Pol

con $L=1\text{H}$ y $C=1\text{F}$.

A pesar de su aparente sencillez, el oscilador de van der Pol presenta una gran riqueza de comportamientos que serán descritos en detalle en un capítulo posterior. No obstante, en este momento, nuestro único objetivo es ilustrar el planteamiento de las ecuaciones que rigen el circuito.

El circuito puede llevarse inmediatamente a la estructura



donde en este caso, para no introducir elementos que pudieran oscurecer el proceso seguido, se ha anulado el elemento lineal que, conjuntamente con la fuente

controlada, permite modelar circuitalmente la alinealidad*. También en aras de la claridad, en vez de la variable genérica $x(t)$, utilizada en el desarrollo teórico, en este caso se ha preferido utilizar una variable $v(t)$ con dimensiones de tensión.

Así, denominando $V(s)$ y $F(s)$ a las respectivas transformadas de Laplace de $v(t)$ y $f(v(t))$, se cumple

$$V(s) = -Z(s)F(s)$$

Dado que

$$Z(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

se llega a la expresión

$$(s^2 + 1)V(s) + sF(s) = 0$$

Para efectuar la discretización mediante la transformación Gear de orden 2, es conveniente calcular previamente

$$s = \frac{1}{2\Delta} (3 - 4z^{-1} + z^{-2})$$

$$s^2 = \frac{1}{4\Delta^2} (9 - 24z^{-1} + 22z^{-2} - 8z^{-3} + z^{-4})$$

Haciendo uso de estas relaciones, es posible escribir la ecuación de equilibrio en el dominio transformado z , resultando

$$\left[\frac{1}{4\Delta^2} (9 - 24z^{-1} + 22z^{-2} - 8z^{-3} + z^{-4}) + 1 \right] V(z) + \left[\frac{1}{2\Delta} (3 - 4z^{-1} + z^{-2}) \right] F(z) = 0$$

De aquí es inmediato comprobar que $m=4$ y que los términos p_i y q_i valen

* Recordará el lector que el valor de este elemento puede ser fijado arbitrariamente.

2.3. Relación con otras técnicas de análisis

El objetivo de este apartado es ilustrar los estrechos vínculos existentes entre la formulación descrita tanto con los métodos temporales como con los de balance armónico. Dado que en la formulación presentada aparecen, como a variables a determinar, las muestras temporales de las variables de control, es fácil intuir que debe existir alguna relación con otros métodos que trabajan en el dominio temporal.

Mucho menos aparente resultará la demostración de que la técnica propuesta no solo está estrechamente relacionado con el método de balance armónico, sino que, en cierta forma, no es más que una *generalización* del mismo. En efecto, a partir de las propiedades de diagonalización de los circulantes se comprobará que la formulación matricial presentada equivale a una formulación de balance espectral. El hecho que, dependiendo de la estrategia de discretización utilizada, se obtenga una formulación distinta -aunque, como es obvio, de solución muy parecida- hace que se obtengan distintas formulaciones de balance espectral. El método de balance armónico clásico estará asociado a una de estas estrategias de discretización, concretamente al método de invarianza de la respuesta impulsional.

2.3.1. Relación con las técnicas en el dominio temporal

El objetivo de este apartado es ilustrar el vínculo existente entre la técnica propuesta y las técnicas de análisis en el dominio temporal, entendiendo como tales aquellas que están basadas en la integración de la ecuación diferencial que describe el circuito, partiendo de unas ciertas condiciones iniciales.

Métodos temporales directos

Planteado en el dominio temporal, el problema objeto de análisis puede formularse como la resolución de la ecuación diferencial asociada a la expresión 2.13

$$\left(\hat{p}_0 + \hat{p}_1 \frac{dx}{dt} + \dots + \hat{p}_m \frac{d^m x}{dt^m} \right) + \left(\hat{q}_0 + \hat{q}_1 \frac{df(x)}{dt} + \dots + \hat{q}_m \frac{d^m f(x)}{dt^m} \right) + r = 0$$

a partir de unas condiciones iniciales dadas.

El problema así formulado puede ser resuelto mediante la aplicación de la regla de integración asociada a una transformación de plano s a plano z . Como se ha visto anteriormente, procediendo de esta forma se llega a la ecuación

$$[p_0x(n) + p_1x(n-1) + \dots + p_mx(n-m)] + [q_0f(x(n)) + q_1f(x(n-1)) + \dots + q_mf(x(n-m))] + r(n) = 0$$

a partir de la cual es teóricamente posible obtener la muestra actual $x(n)$ a partir del conocimiento de las m muestras anteriores aunque para ello es necesario resolver iterativamente una ecuación no lineal.

Un programa de simulación basado en esta técnica produciría una secuencia de valores de la variable x , partiendo de ciertas condiciones iniciales. En el caso de conocerse a priori el valor del periodo de oscilación T , nada impediría elegir Δ de forma que $T=N\Delta$, con N un número entero. En esta situación, el establecimiento del régimen permanente se detectaría por la repetición de m valores de x , es decir, cuando

$$\|(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}) - (x_{n-N}, x_{n-N-1}, \dots, x_{n-N-m+1})\| \leq \varepsilon$$

una condición que, como ya se apuntó en el capítulo de introducción, puede requerir un elevado número de iteraciones — la condición anterior se cumpliría para un valor de n muy grande—, por ejemplo en el caso de circuitos débilmente amortiguados, lo que resulta en una baja eficacia del método.

A pesar de utilizar un enfoque distinto, SPICE [49], uno de los programas de simulación de uso general más utilizados, produce unos resultados que pueden asimilarse, en un sentido amplio, al proceso descrito. Para detectar eficazmente la extinción del transitorio utilizando SPICE, es necesario comprobar la repetición de los valores de todas las variables de estado del circuito (tensiones en los condensadores y corrientes en los inductores). Si el periodo de oscilación no es un múltiplo del periodo de muestreo —un caso que se da necesariamente en el caso de desconocerse el primero— sería aún necesario efectuar interpolaciones entre muestras sucesivas con el fin de detectar la periodicidad. Como es fácilmente comprensible, ello contribuye a disminuir todavía más la eficacia de esta técnica.

Métodos de *shooting*

Dado que la evolución futura de x viene determinada por los valores de m muestras que, por tanto, podrían denominarse *muestras de estado*, (la *memoria* de la ecuación en diferencias), es posible interpretar la integración en un periodo — suponiendo éste conocido— como una operación no lineal efectuada sobre m muestras de entrada. Es decir, la muestra actual x_n y las $m-1$ muestras anteriores vienen determinadas por la muestra x_{n-N} y sus $m-1$ muestras anteriores:

$$\begin{bmatrix} x_{n-N} \\ x_{n-N-1} \\ \vdots \\ x_{n-N-m+1} \end{bmatrix} \rightarrow G(\cdot) \rightarrow \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-m+1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-m+1} \end{bmatrix} = G \left(\begin{bmatrix} x_{n-N} \\ x_{n-N-1} \\ \vdots \\ x_{n-N-m+1} \end{bmatrix} \right)$$

En esta situación, la obtención del régimen permanente equivale a la determinación del vector x que es invariante a la operación G , es decir, que satisface

$$x = G(x) \tag{2.17}$$

Así, el problema reside en encontrar un punto fijo de $G(x)$. Una vez determinado éste, lo que equivale a conocer las m muestras de estado, es inmediato determinar las muestras restantes sin más que efectuar una integración final.

Nótese que la resolución de esta ecuación no lineal por el conocido método iterativo de relajación, esto es

$$x^{k+1} = G(x^k)$$

no significa otra cosa que obtener m nuevas muestras de estado a partir de la integración en un periodo a partir de m muestras previas. La repetición del proceso es equivalente a la simple integración descrita en el apartado anterior. Por tanto, comparte todos sus inconvenientes, pero también sus ventajas. Entre éstas cabe destacar que, aún siendo un proceso que puede llegar a requerir un coste de cálculo muy elevado, la integración directa es una alternativa a la que se puede recurrir en caso de necesidad. Nótese, sin embargo, que, en el caso de circuitos autónomos, este esquema iterativo no es aplicable de forma directa, al haberse supuesto conocida la periodicidad de las variables al construir la función $G(\cdot)$. Esta

dificultad podría ser superada estimando el periodo a partir de los resultados de la integración que se realiza para evaluar $G(\cdot)$ [65]. No obstante, existe un obstáculo mucho más importante. Se habrá advertido que en el esquema iterativo planteado no aparece explícitamente el periodo de oscilación, una de las variables a determinar. Por tanto, la dificultad de incluir de forma natural a la variable T en el algoritmo de relajación, limita su campo de aplicación a los circuitos en los que el periodo de oscilación es conocido de antemano, es decir, en general, a los circuitos excitados.

Así, una idea clave para mejorar la eficiencia del proceso para esta clase de circuitos, consistirá en intentar resolver (2.17) mediante métodos más eficaces, tales como los métodos de extrapolación [65, 66] o bien recurriendo al método de Newton. Como es aparente, una simulación utilizando estos algoritmos de resolución resultará mucho más eficaz que la integración directa de la ecuación diferencial. Además, en algunos de estos métodos, será posible plantear iteraciones en las que se pueda incluir el periodo de oscilación como una variable adicional, posibilitando el análisis de circuitos autónomos.

Como es conocido, los métodos más eficaces para la resolución de ecuaciones no-lineales requieren el cálculo del jacobiano, esto es, la derivada parcial de cada ecuación con respecto a cada una de las variables. Conviene destacar que el cálculo del jacobiano exacto del sistema de ecuaciones (2.17) es difícil, cuando no imposible, siendo necesario recurrir a aproximaciones del mismo.

En este sentido, la formulación propuesta en esta tesis presenta una ventaja importante ya que permitirá el cálculo exacto de las derivadas parciales de las ecuaciones tanto respecto a las muestras de las variables como respecto al periodo de oscilación y respecto a los elementos de circuito. Ello es posible a costa de incrementar el número de variables a determinar de m a N en el caso excitado y de $m+1$ a $N+1$ para circuitos autónomos. No obstante, este incremento en el número de variables* queda compensado con creces por las ventajas que se obtienen durante la resolución de las ecuaciones y por la posibilidad de afrontar con eficacia problemas de optimización, campo que se abre al disponer de las sensibilidades respecto a los elementos de circuito.

* Otra situación en la que se incrementa el número de incógnitas más allá del número estrictamente necesario ocurre al plantear las ecuaciones de equilibrio de un circuito cuando, habitualmente, se opta por el método nodal modificado en vez de por una formulación en variables de estado.

2.3.2. Relación con el método de balance armónico

Al tratarse, esencialmente, de una formulación en el dominio temporal, resulta fácil intuir que la formulación descrita esté estrechamente relacionada con las técnicas clásicas de análisis en el dominio temporal. Ello hace, además, que resulte difícil descubrir posibles relaciones con los métodos frecuenciales. El objetivo de este apartado es demostrar cuán íntimos son los vínculos que relacionan la técnica propuesta con los métodos de análisis de balance espectral, hasta el punto de que se comprobará que el método de balance armónico clásico no es más que un caso *particular* del método aquí descrito, asociado a una determinada discretización del sistema. Para ello se hará uso de las propiedades de diagonalización de las matrices circulantes. Como se comprobará, esta clase de matrices es diagonalizada por la matriz de Fourier. A partir de aquí, será posible demostrar que la ecuación matricial resultante de la técnica propuesta equivale a una formulación en la que las variables a determinar no son más que las transformadas discretas de Fourier de las variables $x(t)$ y $f(x(t))$.

La conclusión más importante que se deriva de ello es que la técnica descrita es, como mínimo, equivalente, en cuanto a eficacia, a las técnicas de balance armónico, presentando, respecto a éstas, algunas ventajas adicionales. Entre ellas destacan *a)* la posibilidad de elegir una regla de integración determinada al discretizar el sistema equivalente, *b)* la facilidad con la que se podrán calcular las sensibilidades de las ecuaciones respecto al periodo de oscilación y respecto a los elementos de circuito, posibilitando la aplicación eficaz del método a circuitos autónomos y, abriendo el campo de la optimización y *c)* la especial estructura del jacobiano resultante, que permite reducir espectacularmente el coste de cálculo de los pasos de Newton.

Diagonalización de matrices circulantes

Para el objetivo que se persigue, resulta imprescindible efectuar un estudio de algunas propiedades de las matrices circulantes [18]. Como ya se ha descrito con anterioridad, se denomina matriz circulante o, simplemente, circulante de orden N a toda matriz cuadrada de la forma

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_N \\ c_N & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & & c_1 \end{bmatrix}$$

Con el fin de facilitar el desarrollo posterior, es conveniente trabajar con una representación alternativa de los circulantes. Esta representación está basada en la matriz Π definida como

$$\Pi = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Es inmediato comprobar que al multiplicar la matriz Π por un vector, se obtiene un vector adelantado cíclicamente una posición. Teniendo en cuenta el efecto que produce la matriz Π , está claro que Π^2 producirá un adelanto cíclico de dos posiciones, al ser esta operación interpretable como la concatenación de dos adelantos. Así, Π^2 será de la forma

$$\Pi^2 = \text{circ}(0, 0, 1, 0, \dots, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Este proceso se puede repetir indefinidamente. Es inmediato comprobar que un adelanto cíclico de N posiciones efectuado sobre un vector de N elementos vuelve a dejar el vector inalterado, propiedad que puede expresarse como

$$\Pi^N = \Pi^0 = \mathbf{I}$$

La forma especial de las matrices \mathbf{I} , Π , Π^2 , ..., Π^{N-1} hace que éstas constituyan una base para las matrices circulantes. En efecto, todo circulante puede ser expresado como la combinación lineal

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N) = c_1 \mathbf{I} + c_2 \Pi + c_3 \Pi^2 + \dots + c_N \Pi^{N-1}$$

La diagonalización de C se obtendrá de forma sencilla a partir de la diagonalización del circulante básico Π . No obstante, para ello, aún es necesario introducir previamente la denominada *matriz de Fourier* F .

Se denomina matriz de Fourier de orden N a

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}^*$$

donde w se define como

$$w = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

Observando que los valores de w^k se repiten para $k > N-1$, se comprueba que la matriz F está formada únicamente por N elementos distintos. Así, de forma alternativa, es posible escribir

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{N-2} & \dots & w \end{bmatrix}^*$$

La matriz de Fourier así definida presenta la importante propiedad de ser unitaria, es decir, su inversa es igual a su transpuesta conjugada:

$$FF^* = F^*F = I$$

propiedad que puede ser comprobada sin más que escribir la forma explícita del elemento $[m,n]$ de la matriz FF^* , que resulta ser

$$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} w^{r(n-m)} = \frac{1}{N} \frac{1-w^{N(n-m)}}{1-w^{(n-m)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Por otro lado, y acercándonos a nuestro objetivo, se verifica la propiedad

$$F^* \Omega F = \Pi$$

donde $\Omega = \text{diag}(1, w, w^2, \dots, w^{N-1})$.

Para comprobar esta identidad basta calcular el elemento $[m, n]$ de $F^* \Omega F$. La fila m -ésima de F^* resulta ser

$$[1 \ w^{(m-1)} \ w^{2(m-1)} \ \dots \ w^{(N-1)(m-1)}]$$

que deberá multiplicarse elemento a elemento por Ω . Por otro lado, la columna n -ésima de F es

$$[1 \ w^{-(n-1)} \ w^{-2(n-1)} \ \dots \ w^{-(N-1)(n-1)}]^T$$

de forma que el producto resultante es expresable como

$$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} w^{r(n-m+1)} = \frac{1}{N} \frac{1 - w^{N(n-m+1)}}{1 - w^{(n-m+1)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = (m-1) \bmod N \\ 0 & \text{si } n \neq (m-1) \bmod N \end{cases}$$

En estas condiciones, resulta inmediato comprobar que

$$\Pi^2 = (F^* \Omega F)(F^* \Omega F) = F^* \Omega^2 F$$

Repitiendo el proceso para Π^k , con k un entero arbitrario, es posible escribir

$$C = c_1 I + c_2 \Pi + c_3 \Pi^2 + \dots + c_N \Pi^{N-1} = c_1 F^* \Omega^0 F + c_2 F^* \Omega F + c_3 F^* \Omega^2 F + \dots + c_N F^* \Omega^{N-1} F$$

Dado que $\Omega^k = \text{diag}(1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(N-1)k})$ es una matriz diagonal, la matriz Λ , definida como

$$\Lambda = c_1 \Omega^0 + c_2 \Omega + c_3 \Omega^2 + \dots + c_N \Omega^{N-1} \tag{2.18}$$

es también diagonal. Por tanto, la matriz circulante C puede ser expresada como

$$C = F^* \Lambda F$$

donde, efectivamente, esta última expresión indica que si C es una matriz circulante, entonces es diagonalizada por la matriz de Fourier. Nótese, además, la forma tan particular como se ha construido la matriz diagonal Λ . En efecto, a partir de (2.18) no es difícil comprobar que la diagonal de Λ no es más que la

transformada discreta de Fourier inversa del vector $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ dividida por N , es decir

$$N \cdot \text{diag}(\Lambda) = \text{DFT}^{-1}(\mathbf{c})$$

Tras esta breve incursión en el extenso campo de las matrices circulantes, el lector dispone de las herramientas suficientes para avanzar en el estudio de la relación existente entre la formulación propuesta y las técnicas de balance armónico.

Vínculos con las técnicas de balance armónico

En primer lugar, es conveniente recordar la expresión matricial resultante del método descrito (2.16)

$$\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Dado que las matrices \mathbf{P} y \mathbf{Q} son circulantes, son diagonalizadas simultáneamente por la matriz de Fourier. Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse como

$$(\mathbf{F}^* \Lambda_P \mathbf{F})\mathbf{x} + (\mathbf{F}^* \Lambda_Q \mathbf{F})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Premultiplicando esta expresión por \mathbf{F} , resulta

$$\Lambda_P \mathbf{F} \mathbf{x} + \Lambda_Q \mathbf{F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

En este momento, resulta de crucial importancia interpretar el significado físico del producto de la matriz de Fourier \mathbf{F} por un vector \mathbf{v} .

No es difícil comprobar que la componente k -ésima del vector

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{v}$$

es

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N w^{-(k-1)(r-1)} v_r$$

donde $k=1,2,\dots,N$, expresión que resulta ser la transformada discreta de Fourier del vector \mathbf{v} (que se diferencia de la DFT habitualmente utilizada por el factor $N^{1/2}$). A la luz de esta constatación, la expresión (2.19) puede escribirse como

$$\Lambda_p \mathbf{X} + \Lambda_Q \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

donde se ha denotado como $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a la transformada discreta de Fourier del vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, a no confundir con la matriz de Fourier que notamos como \mathbf{F} . De forma análoga, \mathbf{X} y \mathbf{R} son las transformadas discretas de Fourier de los vectores \mathbf{x} y \mathbf{r} , respectivamente.

Es ahora el momento de interpretar físicamente esta última ecuación. A la vista del desarrollo seguido, la ecuación (2.20) está, efectivamente, planteada en el dominio frecuencial. Asimismo, el objetivo del análisis se ha traducido en determinar un vector \mathbf{x} cuyo espectro satisfaga ciertas restricciones. Recuértese que Λ_p es una matriz diagonal y, por tanto, el producto $\Lambda_p \mathbf{X}$ no es más que una operación de filtrado, es decir, cada componente espectral de \mathbf{X} es multiplicada por un número complejo cuyo módulo y fase representan, respectivamente, la ganancia y el desfase a esa frecuencia. Así, la ecuación (2.20) nos insta a determinar un vector \mathbf{x} cuyo espectro filtrado se compense con el espectro filtrado de la fuente alineal que es gobernada por \mathbf{x} más una cierta componente continua*. Finalmente, únicamente hace falta señalar que esta es, precisamente, la esencia del método de balance armónico.

Es igualmente instructivo detenerse a considerar un algoritmo genérico (ver figura 2.21) conducente a la resolución de (2.20). Para ello, se partiría de una cierta estimación de \mathbf{X} . Mediante la transformación discreta de Fourier inversa, sería posible determinar \mathbf{x} . Seguidamente, se evaluaría $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (en el dominio temporal) para, a continuación, calcular su transformada discreta de Fourier $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Con esta información, se estaría en condiciones de comprobar si se cumple la ecuación a resolver (2.20). En caso negativo, sería necesario modificar la estimación inicial de la forma más inteligente posible y se reiteraría el proceso.

* Nótese que en circuitos autónomos el vector \mathbf{r} únicamente refleja la contribución de las polarizaciones y, por tanto, es un vector de elementos iguales. En consecuencia, su transformada discreta de Fourier se anulará para las frecuencias distintas de cero.

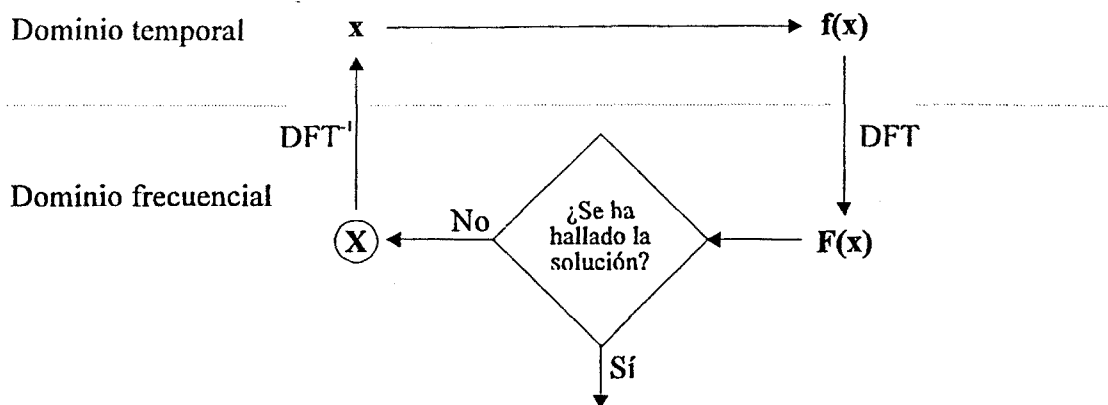


Figura 2.21 Algoritmo básico de resolución en el dominio frecuencial

Queda, no obstante, una cuestión importante a resolver. Si bien se ha comprobado que la ecuación matricial (2.16), planteada en el dominio temporal discreto, es equivalente a una formulación planteada en el dominio frecuencial, ¿dónde queda reflejada la elección -hasta cierto punto arbitraria- del método de discretización utilizado para llegar a la ecuación final? Dado que, dependiendo de la transformación s a z utilizada, se obtendrán matrices \mathbf{P} y \mathbf{Q} distintas, aunque conducentes a soluciones parecidas, resulta que se obtendrán matrices Λ_p y Λ_q distintas, aunque parecidas. ¿Cómo relacionar esta constatación con la *unicidad* del método de balance armónico*?

Para responder a esta cuestión, sin duda inquietante, definiremos una sistemática a partir de la cual sería posible construir las matrices \mathbf{P} y \mathbf{Q} asociadas al método de balance armónico. A partir del proceso constructivo seguido, comprobaremos que el método de balance armónico corresponde a una discretización del sistema continuo, realizada muestreando la respuesta impulsional y limitándola en banda.

En este momento, es posible afirmar que la principal diferencia entre el método de balance armónico y la técnica propuesta está en la forma en que se procesan las señales en la parte lineal del circuito. En efecto, no existen diferencias al evaluar la parte no lineal: ambos métodos realizan esta operación en el dominio temporal, a partir de las muestras de las variables. Así, el rasgo distintivo estriba

* La idea de unicidad debe entenderse como unicidad en el *planteamiento* de las ecuaciones. Esta unicidad contrasta con las múltiples estrategias de solución, que son, precisamente, las que diferencian y dan nombre a distintos algoritmos, tales como *programación armónica*, *relajación armónica*, *Newton armónico*, entre otros.

en que los métodos de balance armónico filtran las componentes espectrales de las variables, mientras que en la técnica propuesta se convolucionan sus muestras temporales.

En la figura 2.22.a se ilustra el proceso exacto que permite obtener la respuesta de un filtro a una excitación periódica arbitraria: a partir de la señal periódica $x(t)$, el espectro de la señal periódica de salida $y(t)$ se obtiene realizando el producto del espectro de entrada por la función de transferencia del filtro $Y(f)=H(f)X(f)$. ¿Qué ocurre cuando no se dispone más que de muestras de las variables? El espectro de la señal $x(t)$ muestreada idealmente a frecuencia $f_s=1/\Delta$ ($X_m(f)$) se ha representado en la figura 2.22.b. Nótese el solapamiento de espectros que se produce, debido a que $x(t)$ no es, en general, de banda limitada. Habiendo elegido el periodo de las variables como un múltiplo entero de la frecuencia de muestreo, esto es $T=N\Delta$, la transformada discreta de Fourier de la secuencia asociada a la señal de entrada proporciona la información indicada en la figura, donde las frecuencias f superiores a $f_s/2$ se encuentran asociadas a las frecuencias negativas $f-f_s$.

A partir de la DFT de las muestras de entrada, los métodos de balance armónico clásicos multiplican cada elemento de esta DFT por la función de transferencia del filtro evaluada en la frecuencia asociada a dicho elemento, obteniéndose así la DFT de las muestras de salida. Esta operación corresponde al producto de la DFT de entrada por la función de transferencia sombreada en la figura 2.22.b, dando como resultado la DFT de salida, que ha sido convenientemente señalada en la parte inferior de dicha figura. Pero los valores de la DFT de salida podrían obtenerse asimismo a partir del espectro de una señal periódica muestreada idealmente a f_s Herzios ($Y_m(f)$), señal que se obtendría por el producto de $X_m(f)$ por el filtro $H(f)$, limitado previamente en banda a $0.5f_s$ Hz y repetido periódicamente. Este filtro se denomina $H_d(f)$ en la figura 2.22. De aquí se deduce que la aplicación del balance armónico es equivalente a transformar el filtro continuo $H(f)$ en otro, $H_d(f)$, que admite una realización discreta inmediata: En efecto, recordará el lector que la técnica de discretización denominada *invarianza de la respuesta impulsional* da como resultado un filtro cuya función de transferencia, según se desprende de la expresión (2.5), se repite periódicamente cada f_s Hz. Esta situación se corresponde precisamente con la que se acaba de describir.

Desde otro punto de vista, el filtro $H_d(f)$ puede interpretarse como la repetición periódica de $H(f)$ limitada en banda a $0.5f_s$ Hz. En el dominio temporal ello corresponde al muestreo de $h(t)$, previamente limitada en banda.

Por tanto, ya es posible concluir que la técnica del balance armónico puede ser interpretada, en un punto de vista alternativo y unificador, como una cierta discretización del sistema continuo, esto es, como un caso particular de la técnica descrita. Así, es posible definir distintos métodos de "balance armónico", siendo el balance armónico clásico uno de ellos, obtenido mediante una determinada técnica de discretización.

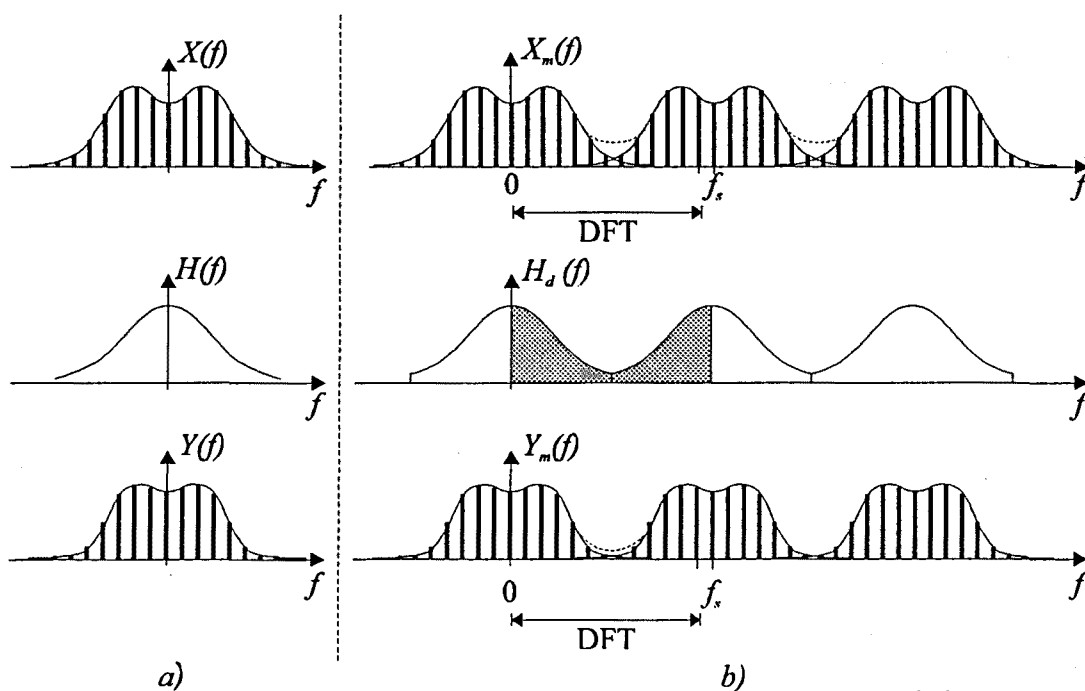


Figura 2.22

a) Espectro de la señal periódica de entrada, función de transferencia del filtro y señal periódica de salida.

b) Muestreo ideal de la señal periódica de entrada. El espectro se repite cada f_s Hz, produciéndose solapamiento de espectros (véase, además, la información que proporciona la DFT de la secuencia asociada). En el método de balance armónico clásico, cada componente es filtrada (porción sombreada), obteniéndose la DFT de la secuencia de salida. Ello es equivalente al producto del espectro de la señal muestreada $X_m(f)$ por la repetición periódica de $H(f)$ limitada en banda a $0.5f_s$ Hz. Finalmente, la aproximación a la señal periódica de salida se obtiene realizando un filtrado paso-bajo.

Todavía es posible realizar un paso más conducente a relacionar el método de balance armónico clásico con la técnica temporal discreta desarrollada. La idea clave consiste ahora en construir un circulante equivalente al proceso de filtrado antes descrito.

Como es conocido, la DFT de la secuencia asociada a las muestras de la señal de entrada es una secuencia formada por N valores complejos, que contienen información acerca del contenido espectral de la señal original a las frecuencias

$$\frac{f_s}{N}[0, 1, \dots, (N/2), -(N/2)+1, \dots, -1]$$

Así, para el cálculo de la salida, bastará con conocer la amplificación y el desfase que introduce el filtro a estas frecuencias. En forma vectorial, esta información puede expresarse como

$$\mathbf{h} = H \left(j2\pi \frac{f_s}{N} [0, 1, \dots, -(N/2), -(N/2)+1, \dots, -1] \right)$$

La operación de filtrado sobre la DFT de entrada \mathbf{X} puede expresarse como el producto

$$\mathbf{Y} = \Lambda \mathbf{X}$$

siendo $\Lambda = \text{diag}(\mathbf{h})$. Dado que \mathbf{X} e \mathbf{Y} son las transformadas discretas de Fourier de las secuencias x e y , respectivamente, es inmediato escribir

$$\mathbf{Fy} = \Lambda \mathbf{Fx}$$

de donde se obtiene la relación directa entre las secuencias

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

con $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} \Lambda \mathbf{F}$ expresión que, efectivamente, define una matriz circulante.

Ejemplo

Para ilustrar la idea de que el balance armónico clásico no es más que el resultado de *una* discretización del sistema continuo, puede ser instructivo considerar la

aplicación del balance armónico para la determinación de la respuesta de un sistema definido por

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad \text{o bien} \quad h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

a una excitación periódica de periodo 5 s.

La resolución de este problema haciendo uso del balance armónico clásico suponiendo que se representan las señales mediante su componente continua y dos armónicos (un total de 5 coeficientes complejos de Fourier) seguiría el siguiente proceso. Una vez conocidas las 5 componentes de la DFT de la excitación $\mathbf{X} = \text{DFT}(\mathbf{x})$, éstas se multiplicarían por la función de transferencia del filtro evaluada a la frecuencia correspondiente, es decir

$$\omega = \frac{2\pi}{5} [0 \quad 1 \quad 2 \quad -2 \quad 1]$$

La función de transferencia en estas frecuencias, tomando $\alpha = 0.5$, resulta ser

$$\mathbf{h} = [2 \quad 0.74_{-68^\circ} \quad 0.39_{-79^\circ} \quad 0.39_{+79^\circ} \quad 0.74_{+68^\circ}]$$

Por tanto, para obtener la salida se realizaría el producto

$$\mathbf{Y} = \text{diag}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{X}$$

y, finalmente, para obtener las muestras temporales de salida, se realizaría la DFT inversa de \mathbf{Y} .

Ello significa que y se podría escribir como

$$\mathbf{y} = \mathbf{F} * \text{diag}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

donde se ha hecho uso de que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \text{DFT}(\mathbf{x})$. No es difícil comprobar que el producto $\mathbf{F} * \text{diag}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}$ define el circulante

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5398 & 0.0578 & 0.3050 & 0.3369 & 0.7605 \\ 0.7605 & 0.5398 & 0.0578 & 0.3050 & 0.3369 \\ 0.3369 & 0.7605 & 0.5398 & 0.0578 & 0.3050 \\ 0.3050 & 0.3369 & 0.7605 & 0.5398 & 0.0578 \\ 0.0578 & 0.3050 & 0.3369 & 0.7605 & 0.5398 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Así, en el dominio de las secuencias, la operación de filtrado que realiza el método de balance armónico es expresable como el producto

$$y = C \cdot x$$

A continuación vamos a describir el proceso por el cual se llegará a la misma expresión realizando el muestreo de la respuesta impulsional del filtro, limitada en banda.

Recordemos que la respuesta impulsional del filtro es

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

El efecto de la limitación en banda a una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia de muestreo (en este caso 0.5 Hz) se traduce, en el dominio temporal, en la convolución por la función sinc(t)

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Así, la respuesta impulsional limitada en banda es expresable como

$$h_L(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$$

expresión que puede ser calculada de forma numérica. En la figura 2.23 se ilustra la función resultante en el intervalo $[-10, 20]$, donde puede apreciarse claramente el rizado producido por la limitación en banda.

Según el desarrollo teórico efectuado, el filtro discreto debe construirse especificando que sus muestras coincidan con las del filtro continuo $h_L(t)$ en los instantes de muestreo, es decir

$$h(n) = \int_{-\infty}^{n\Delta} \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} e^{-\alpha(n\Delta-\tau)} d\tau$$

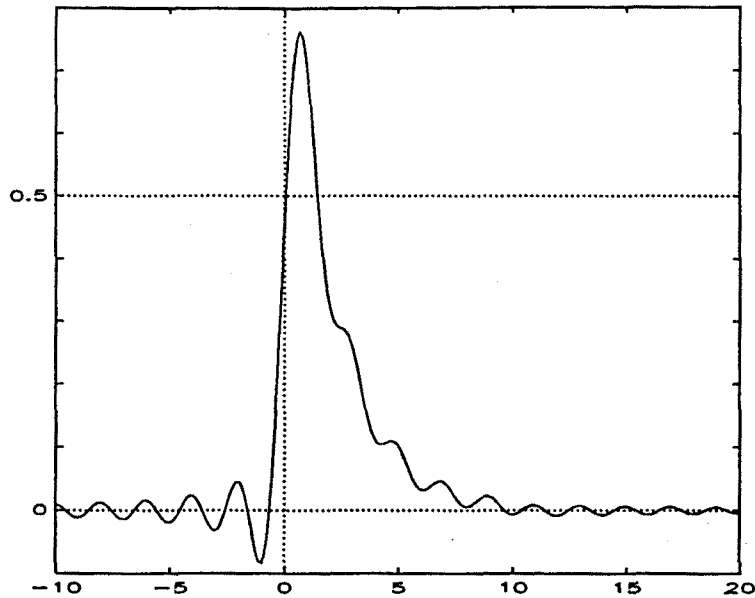


Figura 2.23 Respuesta impulsional $\exp(-\alpha t)u(t)$ limitada en banda.

La respuesta de este filtro discreto a una excitación periódica $x(n)$ de periodo N puede obtenerse como

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i)$$

expresión que puede desarrollarse de la forma

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} x(l-kN)h(n-l-kN) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-l-kN) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)a_{nl}$$

Tras constatar que el coeficiente a_{nl} únicamente depende de la diferencia $n-l$, es posible relacionar dos periodos de las señales de entrada y salida a través de

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{n+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{N-1} \\ A_{N-1} & A_0 & A_1 & & A_{N-2} \\ A_{N-2} & A_{N-1} & A_0 & & A_{N-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+N-1} \end{bmatrix}$$

donde

$$A_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m-kN)$$

Finalmente, es posible calcular de forma *numérica* los coeficientes A_k , coeficientes que resultan ser *idénticos* a los que forman el circulante (2.21). En conclusión, tanto la aplicación del balance armónico clásico como la discretización del sistema tomando muestras de la respuesta impulsional limitada en banda conducen a las mismas ecuaciones.

Así, y a modo de resumen, en este apartado se ha demostrado que la formulación descrita admite una interpretación que coincide con la que habitualmente se conoce como balance armónico. Dado que es posible llegar a sistemas de ecuaciones distintos en función de la técnica de discretización empleada, se deduce que, en realidad, existen distintos métodos de balance armónico, conclusión que contrasta con la *unicidad* del método de balance armónico clásico. Esta aparente contradicción se ha resuelto demostrando que el balance armónico clásico no es más que un *caso particular* de la formulación presentada en esta tesis, resultado de aplicar una estrategia de discretización determinada.

Capítulo 3

CÁLCULO ANALÍTICO DE SENSIBILIDADES

En última instancia, la elección de una u otra formulación para resolver un determinado problema, en cualquier campo de la ciencia, viene dictada por la mayor o menor dificultad que supone su posterior resolución. Así, para evaluar la eficacia de un método es necesario tener en cuenta las posibles vías para su solución y, especialmente, las dificultades que pueden aparecer en este proceso. Por ejemplo, en el caso de problemas lineales, la dificultad de resolución está relacionada tanto con el *tamaño* del sistema resultante como con la *estructura* de las matrices que aparecen: en algunas ocasiones, un elevado número de ecuaciones y de incógnitas queda justificado por la aparición de únicamente unos pocos elementos no nulos en las matrices resultantes, debido a la existencia de algoritmos extremadamente eficaces para esta clase de sistemas.

Las ecuaciones resultantes de la formulación descrita que, para mayor comodidad escribimos a continuación

$$Px + Qf(x) + r = 0 \quad (3.1)$$

son claramente no lineales en las variables a determinar. Recordaremos que, en el caso autónomo, éstas son tanto las muestras de las variables de control x como el periodo de oscilación T .

Conviene recordar que la dependencia respecto a T aparece al efectuar las transformaciones de plano s a plano z . Así, de forma más explícita, es posible expresar (3.1) como

$$P(T)x+Q(T)f(x)+r=0 \quad (3.2)$$

Dado que, con el fin de llegar a un problema con idéntico número de ecuaciones que de incógnitas, se ha introducido una restricción adicional consistente en fijar la primera de las muestras de una de las variables de control, el problema resultante tiene la forma general

$$G(T, x_2, x_3, \dots, x_N) = \begin{cases} g_1(T, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ g_2(T, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_N(T, x_2, x_3, \dots, x_N) \end{cases} \quad (3.3)$$

Al tratarse de un sistema de ecuaciones no lineal, su resolución deberá abordarse necesariamente haciendo uso de algoritmos iterativos. En un capítulo posterior se efectuará un estudio de los distintos métodos de solución con el grado de detalle que merecen, al ser los que, en última instancia, darán una medida de la eficacia del esquema general de análisis. No obstante, en este momento ya se puede adelantar que las técnicas más eficaces requieren el conocimiento de la matriz del jacobiano del sistema de ecuaciones (3.3), esto es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial T} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial T} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial T} & \frac{\partial g_N}{\partial x_2} & \frac{\partial g_N}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Algunos métodos plantean ecuaciones de equilibrio en las que no es fácil (y, en algunos caso, imposible) realizar el cálculo exacto de las derivadas parciales necesarias para construir el jacobiano. En este caso, es frecuente recurrir a aproximaciones basadas en diferencias finitas, un proceso que requiere la repetida evaluación de la función G . El hecho de disponer de expresiones analíticas para el cálculo del jacobiano supone un avance indiscutible. Así, una razón que explica la eficacia del método de balance armónico clásico es la disponibilidad de estas expresiones tanto en el caso excitado [4, 10] como en el autónomo [43]. Si,

además, este cálculo no supone un coste computacional elevado, la eficacia del método aumenta sustancialmente.

El objetivo de este capítulo consiste en obtener expresiones analíticas y de implementación numérica con coste prácticamente nulo para las derivadas parciales de las ecuaciones de equilibrio respecto a las muestras, respecto al periodo y respecto a los elementos del circuito. La disponibilidad de estas últimas contribuirá a abrir uno de los campos a los que tradicionalmente se les ha prestado menos atención, el de la optimización de circuitos no lineales.

3.1. Derivadas parciales respecto a las muestras de las variables

Las derivadas parciales de cada una de las ecuaciones en (3.3) respecto a las muestras de las variables desconocidas, x_2, x_3, \dots, x_N pueden ser obtenidas de forma sencilla. Para ello bastará con escribir de forma explícita la ecuación i -ésima, que resulta ser

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}x_j + \sum_{j=1}^N Q_{ij}f(x_j) + r_j = 0$$

Ahora, resulta inmediato comprobar que la derivada parcial de esta ecuación respecto a la muestra k -ésima no es más que

$$P_{ik} + Q_{ik}f'(x_k) \quad (3.5)$$

donde se ha definido

$$f'(x_k) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_k}$$

A partir de esta información es posible construir de forma sistemática el jacobiano completo, sin más que tener en cuenta que la expresión (3.5) debe aparecer en la posición $[i,k]$ del jacobiano :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial T} & P_{12} + Q_{12}f'(x_2) & P_{13} + Q_{13}f'(x_3) & \dots & P_{1N} + Q_{1N}f'(x_N) \\ \frac{\partial g_2}{\partial T} & P_{22} + Q_{22}f'(x_2) & P_{23} + Q_{23}f'(x_3) & \dots & P_{2N} + Q_{2N}f'(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial T} & P_{N2} + Q_{N2}f'(x_2) & P_{N3} + Q_{N3}f'(x_3) & \dots & P_{NN} + Q_{NN}f'(x_N) \end{bmatrix}$$

En un primer paso tendente a facilitar la vectorización del algoritmo, no es difícil comprobar que la submatriz del Jacobiano sin la primera columna, puede obtenerse a partir de la expresión

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1N} \\ P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N2} & P_{N3} & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{1N} \\ Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{N2} & Q_{N3} & \cdots & Q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f'(x_3) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f'(x_N) \end{bmatrix}$$

Utilizando una notación habitual para referenciar submatrices [28, 44], es posible escribir

$$\mathbf{J}(:,2:N) = \mathbf{P}(:,2:N) + \mathbf{Q}(:,2:N) \cdot \text{diag}(f'(x_2), f'(x_3), \dots, f'(x_N)) \quad (3.6)$$

Nótese la extrema sencillez con la que es posible construir este bloque de la matriz del Jacobiano. En efecto, su construcción es inmediata sin más que conocer los N elementos que describen cada uno de los circulantes \mathbf{P} y \mathbf{Q} y la derivada de la función no lineal evaluada en los N valores que toman las muestras de las variables. De aquí se deduce, además, que para almacenar esta parte de la matriz del jacobiano no se requiere ninguna variable adicional, con el consiguiente ahorro de recursos de ordenador.

Otra característica digna de especial mención es el elevado número de elementos nulos que aparecen en este bloque, concretamente, un total de $(N-m) \times (N-1)$, donde el valor de m , la memoria del sistema de ecuaciones, es el producto del orden de la función de red por el orden de la transformación (2, en el caso habitualmente utilizado, correspondiente a la discretización de Gear de orden 2). En la mayor parte de circuitos de interés, m es considerablemente menor que el número de muestras por periodo N con lo que la matriz del jacobiano presenta pocos elementos distintos de cero. No obstante, la característica que posibilitará una espectacular reducción del coste de cálculo de los pasos de Newton que, como se detallará, exigen efectuar una descomposición LU del jacobiano, es la especial estructura de los elementos no nulos, agrupados en bandas diagonales por debajo de la diagonal principal.

3.2. Derivadas parciales respecto al periodo de oscilación

Conviene recordar que la dependencia del sistema de ecuaciones (3.3) respecto al periodo de oscilación aparece, de forma implícita, a través de la transformación utilizada para pasar del plano continuo s al plano discreto z . En efecto, a partir de un polinomio definido en el plano s

$$\hat{P}(s) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 s + \dots + \hat{p}_m s^m$$

se llega a otro polinomio, $P(z^{-1})$, aplicando una transformación s a z . De forma esquemática

$$\hat{P}(s) \xrightarrow{s=T_0(z^{-1})/\Delta} P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_m z^{-m}$$

donde $\Delta = T/N$.

Los coeficientes p_0, p_1, \dots, p_m pueden obtenerse a partir de sus homólogos con tilde sin más que efectuar algunas manipulaciones algebraicas, como se ha ilustrado en el ejemplo de formulación de las ecuaciones de equilibrio del oscilador de van der Pol. No obstante, es posible escribir una expresión que relacione formalmente ambos polinomios. Para ello basta con darse cuenta de que el polinomio $P(z^{-1})$ queda totalmente especificado conociendo los valores que toma en $m+1$ puntos distintos. A partir de esta información, se reconstruye el polinomio mediante técnicas de interpolación. Desde el punto de vista de la estabilidad numérica del proceso, los $m+1$ puntos óptimos sobre los que se evaluará el polinomio resultan ser las $m+1$ raíces de la unidad [71]

$$z_k = \exp\left(j \frac{2\pi k}{m+1}\right) = w^k$$

y el polinomio interpolante se obtiene como [18]

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \mathbf{F}_{m+1} \begin{bmatrix} P(z_0) \\ P(z_1) \\ \vdots \\ P(z_m) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donde \mathbf{F}_{m+1} es la matriz de Fourier de orden $m+1$.

Para el cálculo de $P(z_k)$ basta tener en cuenta que

$$P(z_k) = \hat{P}(s) \Big|_{s=T_0(z_k^{-1})/\Delta} = \sum_{r=0}^{\hat{m}} \frac{\hat{P}_r}{\Delta^r} T_0^r(z_k^{-1})$$

Ahora, definiendo

$$\mathbf{T}_{m+1, \hat{m}+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_0^1(z_0^{-1}) & \cdots & T_0^{\hat{m}}(z_0^{-1}) \\ 1 & T_0^1(z_1^{-1}) & \cdots & T_0^{\hat{m}}(z_1^{-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & T_0^1(z_m^{-1}) & \cdots & T_0^{\hat{m}}(z_m^{-1}) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}_{\hat{m}} = \text{diag}(1, \Delta^{-1}, \Delta^{-2}, \dots, \Delta^{-\hat{m}})$$

es posible establecer la expresión

$$\mathbf{p}_z = \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} \mathbf{F}_{m+1} \mathbf{T}_{m+1, \hat{m}+1} \mathbf{D}_{\hat{m}} \right) \hat{\mathbf{p}}_s \quad (3.8)$$

que relaciona $\mathbf{p}_z = (p_0, p_1, \dots, p_m)^T$ con $\hat{\mathbf{p}}_s = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{\hat{m}})^T$.

A partir de los coeficientes p_0, p_1, \dots, p_m , obtenidos bien por manipulaciones algebraicas, bien por interpolación, se construye, sin más, el circulante

$$\mathbf{P} = \text{circ}(p_0, 0, \dots, 0, p_m, \dots, p_1).$$

El mismo proceso se repite para obtener el circulante \mathbf{Q} .

Ahora, para calcular la derivada parcial del sistema de ecuaciones (3.3) respecto al periodo, será necesario calcular

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial T} = \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial \Delta} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Delta} \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \Delta} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.9)$$

donde se ha utilizado la expresión (3.1) y se ha tenido en cuenta que el vector \mathbf{r} no depende de Δ , al ser únicamente reflejo de las polarizaciones. El siguiente paso será el cálculo del circulante

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Delta} = \frac{\partial \text{circ}(p_0, 0, \dots, 0, p_m, \dots, p_1)}{\partial \Delta} = \text{circ}\left(\frac{\partial p_0}{\partial \Delta}, 0, \dots, 0, \frac{\partial p_m}{\partial \Delta}, \dots, \frac{\partial p_1}{\partial \Delta}\right)$$

Para ello, será conveniente hacer uso de la expresión (3.8). Nótese que en (3.8) la dependencia respecto a Δ únicamente aparece en la matriz \mathbf{D} . Así, definiendo

$$\mathbf{D}'_m = \text{diag}(0, -\Delta^{-2}, -2\Delta^{-3}, \dots, -\hat{m}\Delta^{-\hat{m}-1})$$

es posible obtener el vector

$$\mathbf{p}'_z = (p'_0, p'_1, \dots, p'_m)^T = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \Delta}, \frac{\partial p_1}{\partial \Delta}, \dots, \frac{\partial p_m}{\partial \Delta}\right)^T$$

a partir de la expresión

$$\mathbf{p}'_z = \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} \mathbf{F}_{m+1} \mathbf{T}_{m+1, \hat{m}+1} \mathbf{D}'_m\right) \hat{\mathbf{p}}_s$$

Repetiendo un proceso similar para

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \Delta} = \frac{\partial \text{circ}(q_0, 0, \dots, 0, q_m, \dots, q_1)}{\partial \Delta} = \text{circ}\left(\frac{\partial q_0}{\partial \Delta}, 0, \dots, 0, \frac{\partial q_m}{\partial \Delta}, \dots, \frac{\partial q_1}{\partial \Delta}\right)$$

se dispone de toda la información necesaria para el cálculo de las derivadas parciales de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ respecto al periodo, según la expresión (3.9).

3.3. Ejemplo : Sensibilidades para el oscilador de van der Pol

Recordemos que las ecuaciones de equilibrio del oscilador de van der Pol obtenidas a partir de la transformación de Gear de orden 2 son de la forma

$$\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$\text{circ}\left(1 + \frac{9}{4\Delta^2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4\Delta^2}, \frac{-8}{4\Delta^2}, \frac{22}{4\Delta^2}, \frac{-24}{4\Delta^2}\right)\mathbf{v} + \text{circ}\left(\frac{-3}{2\Delta}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2\Delta}, \frac{-4}{2\Delta}\right)\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

donde todos los vectores son de longitud N y los circulantes de tamaño $N \times N$.

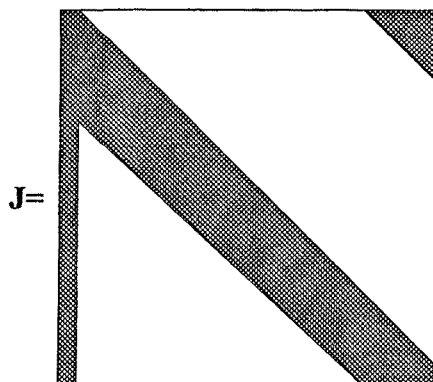
La primera columna del jacobiano estará formada por la derivada parcial del sistema de ecuaciones anterior respecto al periodo, que resulta

$$\mathbf{J}(:,1) = \frac{1}{N} \text{circ}\left(1 + \frac{-18}{4\Delta^3}, 0, \dots, 0, \frac{-2}{4\Delta^3}, \frac{16}{4\Delta^3}, \frac{-44}{4\Delta^3}, \frac{48}{4\Delta^3}\right)\mathbf{v} + \text{circ}\left(\frac{-3}{2\Delta^2}, 0, \dots, 0, \frac{-1}{2\Delta^2}, \frac{-4}{2\Delta^2}\right)\mathbf{f}(\mathbf{v})$$

mientras que las $N-1$ columnas restantes se obtienen a partir de la expresión (3.6):

$$\mathbf{J}(:,2:N) = \mathbf{P}(:,2:N) + \mathbf{Q}(:,2:N) \cdot \text{diag}(f'(v_2), f'(v_3), \dots, f'(v_N))$$

Nótese que para la construcción del jacobiano únicamente ha sido necesario evaluar la característica incremental de la alinealidad para las N muestras y realizar la derivación de la primera fila de las matrices \mathbf{P} y \mathbf{Q} respecto a Δ . Ello requiere un almacenamiento temporal de únicamente 3 vectores. Asimismo cabe destacar que el jacobiano así construido tiene la estructura



donde se han sombreado los elementos distintos de cero. Esta estructura tan especial será aprovechada cuando, durante el proceso de resolución iterativa del

sistema de ecuaciones no lineales, sea necesario resolver diferentes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{J}\mathbf{s}=\mathbf{e} \quad (3.10)$$

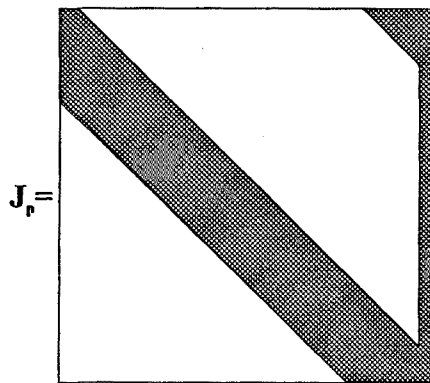
En efecto, una expresión equivalente a (3.10) es

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{J}\mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{s}=\mathbf{\Pi}\mathbf{e}$$

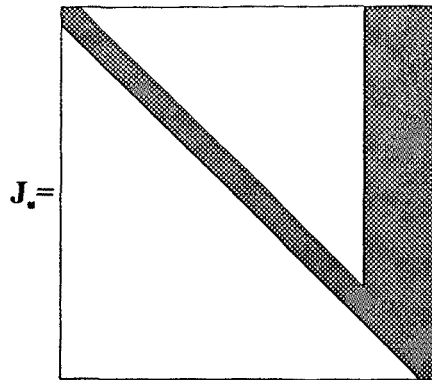
o bien

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p\mathbf{\Pi}\mathbf{s} &= \mathbf{\Pi}\mathbf{e} \\ \mathbf{J}_p\mathbf{s}_p &= \mathbf{e}_p \end{aligned}$$

donde la matriz $\mathbf{\Pi}$ se ha definido en un capítulo anterior. No es difícil comprobar que la matriz \mathbf{J}_p tiene la estructura



A partir de esta constatación resulta evidente que, durante el proceso de condensación pivotal, no será necesario forzar ceros en gran parte del triángulo inferior de \mathbf{J}_p al ser éstos nulos por construcción. La matriz triangular superior resultante, presenta, a su vez una estructura que reducirá sustancialmente el coste de la *back-substitution*:



De esta estructura se puede deducir que, para el cálculo de cada elemento de s_p , se requerirán, como máximo, m productos. Visto de otra forma, a medida que se progresa hacia atrás, cada variable depende únicamente de m variables anteriores.

Resulta claro que esta estructura tan especial únicamente aparece para el arquetipo de problema que estamos utilizando para presentar el método. No obstante, en el caso general, también es posible aprovechar la estructura de ceros resultante, hasta el punto de que, para un problema especificado, la resolución del sistema de ecuaciones (3.10) que, en general, requiere del orden de N^3 operaciones en coma flotante (*flops*) [28], requerirá únicamente del orden de N *flops*.

Capítulo 4

OPTIMIZACIÓN

Llegados a este punto, se dispone de una técnica eficaz para abordar el problema del *análisis* de circuitos no lineales, quedando así cubierta la primera exigencia que se impone a cualquier herramienta pensada para ser una ayuda al diseño de circuitos. No obstante, resulta obvio que la *optimización* de algunos parámetros del comportamiento de un circuito representa un objetivo mucho más importante y constituye la continuación natural del problema del análisis.

En el caso de circuitos lineales, es frecuente enfrentarse al problema de conseguir un módulo de la respuesta frecuencial especificado, $A(\omega)$. En este caso, la medida de la calidad del diseño se especifica a través de una función, denominada función error o función objetivo que, por ejemplo, puede tomar la forma

$$f(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j \left(|H(\mathbf{h}, \omega_j)| - A(\omega_j) \right)^2$$

En esta expresión \mathbf{h} es un vector formado por las variables de diseño a optimizar, ω_j son los puntos del eje de frecuencias en el que se ha especificado una determinada amplificación y q_j son pesos con los que es posible ponderar los errores en cada frecuencia. Como es habitual al especificar funciones error, cada uno de los errores es elevado al cuadrado con el fin de evitar posibles cancelaciones. Finalmente, el factor 0.5 se introduce para facilitar el cálculo posterior del gradiente de la función objetivo, una información que resultará imprescindible para implementar algoritmos eficaces de minimización [58].

Para abordar el cálculo de las derivadas parciales que construyen el gradiente de la función error es conveniente definir

$$\begin{aligned} H_j &= H(\mathbf{h}, \omega_j) \\ A_j &= A(\omega_j) \\ E_j &= \frac{1}{2} (|H_j| - A_j)^2 \end{aligned}$$

de forma que la función error puede escribirse como

$$f(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j E_j$$

Ahora, el cálculo del gradiente de f requiere la determinación de los términos

$$\frac{\partial E_j}{\partial h_i} = (|H_j| - A_j) \frac{\partial |H_j|}{\partial h_i}$$

que, haciendo uso de la relación

$$\frac{\partial |H_j|}{\partial h_i} = |H_j| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial h_i} \right)$$

pueden ser expresados como

$$\frac{\partial E_j}{\partial h_i} = (|H_j| - A_j) |H_j| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial h_i} \right) \quad (4.1)$$

Por otro lado, las ecuaciones resultantes de aplicar el método nodal modificado sobre un circuito arbitrario pueden ser escritas de la forma

$$\mathbf{T}\mathbf{v}=\mathbf{w} \quad (4.2)$$

donde la matriz \mathbf{T} es la denominada matriz del sistema, el vector \mathbf{v} es el vector de tensiones nodales (más posibles variables auxiliares) a determinar y el vector \mathbf{w} refleja la contribución de las excitaciones del circuito [32]. La variable de salida considerada puede ser escrita como una combinación lineal de los elementos de \mathbf{v} , de la forma

$$H = \mathbf{d}^T \mathbf{v}$$

Derivando las ecuaciones de equilibrio (4.2) respecto al elemento x_i , se obtiene la relación

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h_i} \mathbf{v} + \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial h_i} = 0$$

Ahora, de las dos últimas expresiones se desprende la igualdad

$$\frac{\partial H}{\partial h_i} = -\mathbf{d}^T \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h_i} \mathbf{v}$$

Insertando esta expresión en (4.1) se obtiene

$$\frac{\partial E_j}{\partial h_i} = \text{Re} \left(-|H_j| \frac{|H_j| - A_j}{H_j} \mathbf{d}^T \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h_i} \mathbf{v} \right)$$

Definiendo el vector

$$\mathbf{v}_a^T = -|H_j| \frac{|H_j| - A_j}{H_j} \mathbf{d}^T \mathbf{T}^{-1}$$

se obtiene

$$\frac{\partial E_j}{\partial h_i} = \text{Re} \left(\mathbf{v}_a^T \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h_i} \mathbf{v} \right)$$

Conviene destacar especialmente la sencillez con la que es posible calcular esta expresión. Por un lado, dado que un determinado elemento de circuito como máximo puede aparecer en 4 posiciones de la matriz \mathbf{T} , se deduce que la matriz

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h_i}$$

presenta, como máximo, cuatro elementos no nulos que se encuentran, además, en posiciones conocidas. Por otro lado, el vector \mathbf{v}_a puede obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{T}^T \mathbf{v}_a = -|H_j| \frac{|H_j| - A_j}{H_j} \mathbf{d}$$

Nótese que para la determinación de las variables \mathbf{v} es necesario realizar la descomposición LU de la matriz \mathbf{T} . A partir de esta descomposición, la descomposición de \mathbf{T}^T y la subsiguiente determinación del vector \mathbf{v}_a es inmediata.

Siguiendo la misma línea de razonamiento, no es difícil obtener expresiones analíticas de complejidad abordable para las segundas derivadas de la función objetivos respecto a los elementos a optimizar [55]. Asimismo es posible extender el método para la optimización simultánea del módulo y la fase de circuitos lineales, siendo posible implementar programas de ordenador basados en algoritmos de optimización de segundo orden altamente eficaces para la optimización de la respuesta frecuencial de circuitos lineales [47, 56].

Cabría pensar en extender, sin más, estas ideas a los circuitos no lineales. El principal inconveniente que se deriva de este enfoque es la necesidad de efectuar sucesivos análisis completos del circuito. En el caso lineal ello suponen un coste muy reducido. Por el contrario, el simple análisis de un circuito no lineal requiere técnicas elaboradas, con el consiguiente coste de cálculo.

No obstante, a partir de la formulación presentada en esta tesis, el problema puede plantearse formalmente en los siguientes términos. El objetivo es minimizar respecto a los parámetros agrupados en el vector \mathbf{h} una función coste determinada, f , construida a partir de las muestras de las variables \mathbf{x} . Esto es

$$\min_{\mathbf{h}} f(\mathbf{h}), \quad \text{donde } f(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{h}))$$

Para resolver eficazmente este problema es necesario determinar el gradiente de la función objetivo respecto a los parámetros de diseño

$$\nabla f(\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial f}{\partial h_1}, \frac{\partial f}{\partial h_p}, \dots, \frac{\partial f}{\partial h_p} \right)^T$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial h_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{h})}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial h_i} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{h})}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial h_i} + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{h})}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial h_i}$$

Por otro lado, las muestras de las variables dependen de los parámetros de diseño, a través de la ecuación de equilibrio

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{P}(\mathbf{h})\mathbf{x} + \mathbf{Q}(\mathbf{h})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$$

La función \mathbf{g} puede ser escrita de forma más explícita como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \begin{cases} g_1((x_1, x_2, \dots, x_N), (h_1, h_2, \dots, h_p)) \\ g_2((x_1, x_2, \dots, x_N), (h_1, h_2, \dots, h_p)) \\ \vdots \\ g_N((x_1, x_2, \dots, x_N), (h_1, h_2, \dots, h_p)) \end{cases}$$

Ahora es posible escribir

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial g_1}{\partial h_1} dh_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial h_p} dh_p = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial g_2}{\partial h_1} dh_1 + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial h_p} dh_p = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_N}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial g_N}{\partial h_1} dh_1 + \dots + \frac{\partial g_N}{\partial h_p} dh_p = 0 \end{cases}$$

expresión a partir de la que se puede obtener la matriz de derivadas parciales

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial h_1} & \frac{\partial x_1}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial h_p} \\ \frac{\partial x_2}{\partial h_1} & \frac{\partial x_2}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial h_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial h_1} & \frac{\partial x_N}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial h_p} \end{bmatrix}$$

a partir de la ecuación

$$\mathbf{J}_x \mathbf{S} + \mathbf{J}_h = \mathbf{0}$$

donde se ha definido

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1} & \frac{\partial g_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial h_1} & \frac{\partial g_1}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial h_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial h_1} & \frac{\partial g_2}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial h_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial h_1} & \frac{\partial g_N}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial h_p} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Haciendo uso de estas expresiones se está en condiciones de calcular el gradiente de la función error de forma analítica y, por tanto, ya es posible abordar con eficacia el problema de optimización. No obstante, es necesario advertir de que, en cada iteración del algoritmo de optimización, será necesario resolver el sistema de ecuaciones no lineales que gobierna el circuito, con el consiguiente coste computacional.

En un apartado posterior se describe detalladamente el algoritmo que hace posible la determinación de las derivadas parciales de las ecuaciones respecto a los elementos de circuito, necesarias para construir la matriz \mathbf{J}_h .

No obstante, antes de abordar esta cuestión conviene prestar especial atención a un problema de optimización particular, a saber, la determinación de un elemento de circuito con el objetivo de conseguir una frecuencia de oscilación determinada. Así, el siguiente apartado se dedica a exponer una estrategia para abordar este problema con gran eficacia.

4.1. Optimización de circuitos no lineales autónomos

La necesidad de realizar sucesivos análisis completos ha sido, tradicionalmente, la principal barrera a la hora de implementar herramientas de optimización de circuitos no lineales. Como ya se ha apuntado en el capítulo de introducción, para evitar este problema en el marco de las técnicas de balance armónico, la aproximación habitual [42, 62] a la optimización de circuitos no lineales, consiste en definir un vector de diseño \mathbf{u} formado por los armónicos de las variables de estado \mathbf{x} y por los parámetros a optimizar \mathbf{p} .

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{p}^T)^T$$

A partir del vector de diseño se construye una función objetivo en la que intervienen, simultáneamente, las ecuaciones de equilibrio y una medida de la calidad del diseño, de la forma

$$g(\mathbf{u}) = \sqrt{\|\mathbf{g}_1(\mathbf{u})\|^2 + g_2^2(\mathbf{u})}$$

donde $\mathbf{g}_1(\mathbf{u})$ corresponde a las ecuaciones de equilibrio eléctrico del circuito y $g_2(\mathbf{u})$ se define adecuadamente de forma que se anule cuando el diseño es satisfactorio.

En esta situación, el objetivo es resolver

$$\min_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u})$$

problema que puede ser abordado mediante la aplicación de algoritmos de minimización de propósito general. Nótese que, procediendo de esta forma ya no es necesario anidar la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales en un bucle exterior de minimización.

No obstante, y a pesar de que la aplicación de esta estrategia puede ser satisfactoria en algunas ocasiones, es necesario advertir que el problema no está correctamente formulado. En efecto, no es difícil ver que es posible resolver este problema y que la solución resultante no cumpla las ecuaciones de equilibrio eléctrico. En cambio, como se remarca en [37], la formulación correcta sería

$$\min_{\mathbf{u}} g_2^2(\mathbf{u}) \quad \text{sujeto a la restricción} \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

La resolución directa de este problema podría abordarse mediante diferentes técnicas, tales como el método de los multiplicadores de Lagrange o el método de la función de penalización [58]. No obstante, el problema así planteado presenta una complejidad muy elevada, lo que limita seriamente su campo de aplicación.

De esta descripción, es posible concluir que el incremento en la complejidad del problema de optimización respecto al del análisis proviene de la necesidad de cambiar la estructura del problema debido a la aparición de restricciones y grados de libertad adicionales que, además, no tienen por qué ser iguales en número. Como se ha apuntado, en esta situación, la solución más sencilla, y por ello la más comúnmente utilizada, consiste en intentar alcanzar un compromiso entre todos los objetivos por la vía de la optimización conjunta.

No obstante, en algunos problemas es posible seguir un planteamiento radicalmente distinto, cuya línea argumental se expone a continuación. Esencialmente, se trata de mantener la estructura inicial del problema de análisis, a saber, la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Si ello es posible, la complejidad del problema de optimización pasa a ser idéntica que la del análisis con la particularidad de que *nunca* se llegará a resultados que no cumplen parte de las especificaciones.

Este enfoque es posible, por ejemplo, en el problema de diseño de osciladores. En este contexto, la primera de las especificaciones a cumplir es la frecuencia de oscilación. El diseño asistido por ordenador partiría de un diseño previo, obtenido por métodos tradicionales. El análisis del mismo revelaría, probablemente, que la frecuencia de oscilación no coincide con la especificada. Si se dispusiera únicamente de una herramienta de *simulación*, el objetivo de conseguir la frecuencia especificada se lograría después de un cierto número de simulaciones en las que se modificaría el valor de uno o varios elementos de circuito.

A modo de ejemplo, considérese un problema hipotético sobre el oscilador de van der Pol, con los valores de los elementos normalizados de la forma descrita. Para un valor de $\mu=4$, el periodo de oscilación resulta ser de 10.2 segundos. Si éste debe ser incrementado hasta valer 15 segundos, un análisis cualitativo del circuito llevaría a pensar, por ejemplo, que debe incrementarse el valor de C , mas

no hay ninguna información acerca de cuál debe ser su valor exacto. No obstante, éste podría obtenerse de la forma siguiente.

Si la frecuencia de oscilación viene fijada de antemano, en el sistema de ecuaciones

$$Px + Qf(x) + r = 0$$

únicamente aparecen, como incógnitas, las $N-1$ variables $x(2:N)$. En esta situación, es posible considerar como incógnita el valor de un elemento —en el ejemplo apuntado, C — y encontrar la solución del sistema no lineal

$$P(C)x + Q(C)f(x) + r(C) = 0 \quad (4.4)$$

haciendo uso de los algoritmos que se presentarán en el capítulo siguiente. Dado que las ecuaciones planteadas son formalmente idénticas a las que resultan del problema de análisis se puede adelantar que su resolución presentará una complejidad equivalente.

Cabe destacar que la facilidad con la que será posible resolver el problema (4.4) viene dictada, en gran medida, por la disponibilidad de las derivadas parciales de las ecuaciones respecto a los elementos de circuito. En efecto, se ha desarrollado un esquema que permite tanto el planteamiento de los sistemas de ecuaciones (3.2) y (4.4) como el cálculo de sus jacobiano a partir de las ecuaciones que resultan de aplicar el método nodal modificado al multipuerto lineal resultante de extraer y modelar las alinealidades.

4.2. Derivadas parciales respecto a los elementos de circuito

Con el fin de facilitar su posterior referencia, transcribimos a continuación el sistema de ecuaciones resultante de aplicar la técnica descrita a determinado problema de análisis:

$$\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = 0 \quad (4.5)$$

donde el vector \mathbf{r} refleja la contribución de las polarizaciones, a través de la expresión $\mathbf{r} = -\mathbf{P}\mathbf{v}$.

Conviene recordar que, en la situación actual, las variables a determinar son las $N-1$ muestras desconocidas de las variables, es decir, el vector $\mathbf{x}(2:N)$ y el valor de determinado elemento de circuito que denominaremos h . Por otro lado, la extensión a un problema con un número arbitrario p de elementos es inmediata, sin más que repetir el desarrollo que sigue. En esta situación, es posible escribir la ecuación 4.5 de forma explícita como

$$\mathbf{g}(h, x_2, x_3, \dots, x_N) = \begin{cases} g_1(h, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ g_2(h, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_N(h, x_2, x_3, \dots, x_N) \end{cases} \quad (4.6)$$

La resolución eficaz del sistema de ecuaciones así planteado requerirá el cálculo de su jacobiano. Cabe señalar que la única diferencia con el jacobiano expresado en (3.4) estriba en la primera columna. En el problema que nos ocupa, ésta vendrá dada por el vector

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial h} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial h} \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial h} \mathbf{v} \quad (4.7)$$

Así, para el cálculo del jacobiano del sistema de ecuaciones, es necesario determinar la derivada parcial de los circulantes \mathbf{P} y \mathbf{Q} respecto al elemento h . A continuación se desarrolla la sistemática requerida para \mathbf{P} , que podrá ser trasladada, de forma inmediata, a \mathbf{Q} . En primer lugar, es inmediato comprobar que

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial h} = \frac{\partial \text{circ}(p_0, 0, \dots, 0, p_m, \dots, p_1)}{\partial h} = \text{circ}\left(\frac{\partial p_0}{\partial h}, 0, \dots, 0, \frac{\partial p_m}{\partial h}, \dots, \frac{\partial p_1}{\partial h}\right)$$

Para relacionar los coeficientes \mathbf{p} con el elemento h , conviene recordar que las funciones de transferencia del circuito son formas bilineales en la variable h [71], y por tanto, los polinomios que intervienen en cualquier función de red del circuito son de la forma

$$\hat{P}(s) = (\hat{p}_0 + \hat{p}_1 s + \dots + \hat{p}_{\hat{m}} s^{\hat{m}}) + h(\hat{p}_{h0} + \hat{p}_{h1} s + \dots + \hat{p}_{h\hat{m}} s^{\hat{m}}) \quad (4.8)$$

En esta situación, es posible escribir

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_s &= (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{\hat{m}})^T + h(\hat{p}_{h0}, \hat{p}_{h1}, \dots, \hat{p}_{h\hat{m}}) \\ &= \hat{\mathbf{p}} + h\hat{\mathbf{p}}_h \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que los coeficientes del polinomio en el dominio discreto se obtienen a partir de los coeficientes en el dominio s , a partir de la expresión

$$\mathbf{p}_z = \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} \mathbf{F}_{m+1} \mathbf{T}_{m+1, \hat{m}+1} \mathbf{D}_{\hat{m}}\right) \hat{\mathbf{p}}_s$$

es posible obtener el vector

$$\mathbf{p}'_{zh} = \left(\frac{\partial p_0}{\partial h}, \frac{\partial p_1}{\partial h}, \dots, \frac{\partial p_m}{\partial h}\right)^T$$

a partir de

$$\mathbf{p}'_{zh} = \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} \mathbf{F}_{m+1} \mathbf{T}_{m+1, \hat{m}+1} \mathbf{D}_{\hat{m}}\right) \hat{\mathbf{p}}_h$$

Una vez obtenido el vector \mathbf{p}'_{zh} se dispone de los valores necesarios para construir el circulante

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial h}$$

Repitiendo el proceso para \mathbf{Q} se dispone de todos los datos para construir la primera columna del jacobiano a partir de la expresión (4.7).

Conviene destacar que el procedimiento descrito es igualmente aplicable para la determinación de las derivadas parciales respecto a un número p de elementos, lo que hace posible el cálculo eficaz del jacobiano definido por la expresión (4.3)

Finalmente, únicamente queda por describir el proceso por el cual es posible llegar a obtener los diferentes polinomios en la forma factorizada descrita en (4.8). Para ello se hará uso de algunas técnicas de análisis simbólico que pasamos a describir.

4.3. Análisis simbólico de la subred lineal

En apartados anteriores se ha visto la necesidad de disponer de expresiones simbólicas de los distintos polinomios que intervienen en la formulación propuesta, entendiendo por expresiones simbólicas aquellas en las que aparecen explícitamente tanto las sucesivas potencias de la variable compleja s como la dependencia respecto a algunos elementos, agrupados en el vector \mathbf{h} . El objetivo del presente apartado es proporcionar las herramientas necesarias para llegar a estas expresiones simbólicas a partir de las ecuaciones de equilibrio eléctrico.

Existen numerosos métodos [45] para la determinación simbólica de funciones de transferencia, de la forma

$$H(s, \mathbf{h}) = \frac{N(s, \mathbf{h})}{D(s, \mathbf{h})} = \frac{\sum_{i=0}^n s^i n_i(\mathbf{h})}{\sum_{i=0}^n s^i d_i(\mathbf{h})}$$

con $n_i(\mathbf{h})$ y $d_i(\mathbf{h})$ funciones de los elementos de diseño. Entre ellos destacan los métodos de interpolación numérica [71] y los métodos de grafo de señal que recientemente han sido objeto de estudio detallado [23]. Conviene destacar que el principal inconveniente, tradicionalmente relacionado con las técnicas de análisis simbólico, es la gran cantidad de información generada, en forma de términos simbólicos. Ello hace que la principal ventaja que ofrece el análisis simbólico, a saber, el conocimiento profundo del circuito, se vea eclipsada por la dificultad que supone interpretar los resultados simbólicos obtenidos cuando el número de elementos simbólicos supera la media docena. No obstante, en los problemas de optimización, es habitual que el número de parámetros de diseño no llegue a esta cota, razón por la que no será necesario hacer uso de técnicas sofisticadas para el manejo de las expresiones simbólicas.

Por otro lado, el hecho de tener un número de variables simbólicas reducido —en cualquier caso mucho menor que el número total de elementos— hace que resulte especialmente atractiva la aplicación de técnicas de interpolación numérica. Cabe destacar asimismo que en el grupo de trabajo en el que se ha desarrollado esta

tesis* se dispone de experiencia previa en la aplicación de esta técnica al análisis simbólico de circuitos, lo que ha servido para calificar como acertada su elección para afrontar el presente problema.

Para la implementación de esta técnica se tomarán, como punto de partida, las ecuaciones del circuito planteadas en el dominio transformado de Laplace. En particular, se partirá de las ecuaciones resultantes de aplicar el método nodal modificado (MNA) [32] sobre el circuito genérico representado en la figura 4.1.

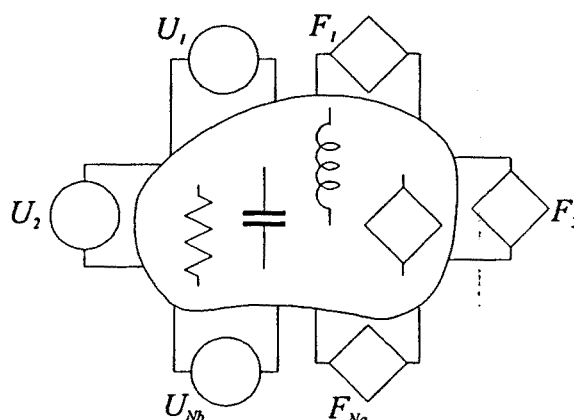


Figura 4.1. Circuito resultante de extraer las alinealidades en un circuito genérico.

Las ecuaciones resultantes de aplicar el método nodal modificado son expresables de la forma general

$$[G+sC]v=w$$

donde las matrices G y C dependen de los elementos y de la estructura del circuito, el vector w está formado por las excitaciones aplicadas —en el caso que nos ocupa tanto fuentes de polarización como fuentes que modelan las alinealidades— y el vector v está formado por las variables generadoras a determinar.

La matriz $T=G+sC$ se denomina matriz del sistema y en su construcción intervienen todos los elementos de circuito, en particular, también los que forman el vector h . La función de transferencia que relaciona una variable cualquiera —por ejemplo, las variables de control de las alinealidades— con *una* excitación cualquiera, vendrá dada, formalmente, por

* Grupo de Electrónica de Comunicaciones del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones.

$$H = \mathbf{d}^T \mathbf{v} = \mathbf{d}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{T})}{\det(\mathbf{T})} \mathbf{w}$$

donde el vector \mathbf{d} únicamente contiene dos entradas no nulas de valores $+1$ y -1 en el caso de que la variable a determinar sea la diferencia de dos tensiones nodales. En caso contrario, \mathbf{d} únicamente contiene el valor $+1$ en una posición. Así, para determinar la función de transferencia $H(s)$ es, formalmente, necesario calcular un máximo de dos determinantes para obtener el numerador y un determinante para el denominador.

Conviene señalar que la especial estructura de la matriz del sistema hace que al evaluar cada uno de los determinantes no aparezcan potencias de ninguno de los elementos [71]. Por este motivo, es posible expresar la función de red de la forma

$$H(s, \mathbf{h}) = \frac{N(s, \mathbf{h})}{D(s, \mathbf{h})} = \frac{\sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_p=0}^1 a_{j_1 j_2 \cdots j_p}(s) h_1^{j_1} h_2^{j_2} \cdots h_m^{j_m}}{\sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_p=0}^1 b_{j_1 j_2 \cdots j_p}(s) h_1^{j_1} h_2^{j_2} \cdots h_m^{j_m}} \quad (4.9)$$

Nótese que el numerador y el denominador tienen 2^p sumandos y cada coeficiente $a(s)$ o $b(s)$ es un polinomio de grado n en la variable s .

Al abordar un problema de *análisis*, en el que no se precisa retener ningún elemento en forma simbólica más que la propia variable s , cualquiera de los polinomios del numerador o del denominador, que notamos genéricamente como $P(s)$ puede obtenerse interpolando los valores que toma su determinante en $n+1$ puntos equiespaciados sobre el círculo complejo de radio unidad aplicando la expresión (3.7). De esta forma, a partir de las ecuaciones del circuito, es posible construir sistemáticamente los vectores

$$\hat{\mathbf{p}}_s = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)^T$$

requeridos por la expresión (3.8).

En el caso particular de tener *un único elemento* en forma simbólica, tanto el numerador como el denominador de la función de red son polinomios de la forma

$$P(s, h) = (a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n) + h(b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n)$$

Con el fin de simplificar la notación, conviene definir los vectores

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$$

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)^T$$

Para el cálculo de los coeficientes a_k y b_k , el objetivo de nuestro análisis, se procederá como sigue. En un primer paso, se asignará $h=1$. La determinación del polinomio $P(s,1)$ puede interpretarse nuevamente como un problema de interpolación. En efecto, $P(s,1)$ queda totalmente determinado conociendo el valor que toma este polinomio en $n+1$ puntos distintos.

Definiendo

$$\mathbf{p}^+ = (P(s_0,1), P(s_1,1), \dots, P(s_n,1))^T$$

el polinomio interpolante se obtiene, aplicando (3.7), como

$$\mathbf{q}^+ = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{p}^+$$

que, a su vez, puede expresarse como la suma

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{4.10}$$

El mismo proceso es repetido tomando ahora $h=-1$. Definiendo

$$\mathbf{p}^- = (P(s_0,-1), P(s_1,-1), \dots, P(s_n,-1))^T$$

se obtiene el polinomio interpolante

$$\mathbf{q}^- = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{p}^-$$

verificándose, además,

$$\mathbf{q}^- = \mathbf{a} - \mathbf{b} \tag{4.11}$$

De las expresiones 4.10 y 4.11 se obtiene, de forma inmediata, la expresión buscada:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-) \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{p}^+ - \mathbf{p}^-) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Desde el punto de vista algorítmico, y a modo de resumen, los pasos a seguir son los siguientes. En primer lugar, se asigna a h el valor $+1$. A continuación, se evalúa el valor del polinomio deseado en los $n+1$ puntos equiespaciados sobre el círculo unidad. Para ello se calcula el determinante correspondiente realizando, por ejemplo, la descomposición LU de la matriz. Tras esta operación se dispone del vector \mathbf{p}^+ . A continuación, el proceso se repite para $h=-1^*$ obteniéndose, a su término, el vector \mathbf{p}^- . Finalmente, los coeficientes buscados se obtienen realizando dos DFT, según se desprende de la ecuación (4.12).

En el caso de requerirse la dependencia simbólica respecto a un número p de elementos, la complejidad el proceso aumenta aunque continua siendo eficaz, especialmente si, como se ha apuntado, el número de elementos simbólicos es reducido.

La esencia del método utilizado consiste en derivar adecuadamente los polinomios que intervienen en la expresión (4.9) para aislar determinados términos. Así, por ejemplo, es posible comprobar que sería posible aislar el término $b_{11\dots 1}$ de la forma

$$b_{11\dots 1} = \frac{\partial^p D(s, \mathbf{h})}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_p}$$

En general, se obtiene una relación que puede ser expresada matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & h_m & h_{m-1} & \dots & h_1 h_2 \dots h_p \\ & 1 & 0 & \dots & h_1 h_2 \dots h_{p-1} \\ & & 1 & & h_1 h_2 \dots h_{p-2} h_p \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00\dots 00} \\ b_{00\dots 01} \\ b_{00\dots 10} \\ \vdots \\ b_{11\dots 11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{00\dots 00} \\ D_{00\dots 01} \\ D_{00\dots 10} \\ \vdots \\ D_{11\dots 11} \end{bmatrix}$$

donde

* Nótese que los valores $h=1$ y $h=-1$ corresponden, nuevamente, a puntos equiespaciados sobre el círculo complejo de radio unidad.

$$D_{h_1 h_2 \dots h_p} = \frac{\partial^q D(s, \mathbf{h})}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_p}$$

siendo q el número de elementos h_i distintos de cero.

Para el cálculo de las derivadas parciales de los polinomios respecto a los elementos existe una técnica que únicamente requiere el cálculo de ciertos determinantes, que, a su vez, se construyen a partir de una única matriz de tamaño $p \times p$. Para el desarrollo del método, es conveniente considerar cada elemento de \mathbf{h} como un valor nominal más un incremento:

$$h_i = h_{i0} + \delta_i$$

Para los valores nominales de los elementos, las ecuaciones del circuito son de la forma

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{v}_0 = \mathbf{w}$$

y la salida considerada

$$H_0 = \mathbf{d}^T \mathbf{v}_0$$

que, puede expresarse formalmente como

$$H_0 = \mathbf{d}^T \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{w}$$

Por otro lado, al plantear las ecuaciones según el método nodal modificado, los elementos del circuito entran a formar parte de la matriz del sistema \mathbf{T} en las columnas j y k y las filas l y m

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 l \\
 \\
 m \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \dots & & & \\
 h_i & \dots & -h_i & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 -h_i & \dots & h_i & \\
 & & & \dots
 \end{bmatrix}$$

a partir de términos de la forma

$$h_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}_i^T$$

donde los vectores \mathbf{p}_i y \mathbf{q}_i son

$$\mathbf{p}_i = \left[0, \dots, 0, \overset{j}{+1}, 0, \dots, \overset{k}{-1}, 0, \dots, -1 \right]^T$$

$$\mathbf{q}_i = \left[0, \dots, 0, \overset{l}{+1}, 0, \dots, \overset{m}{-1}, 0, \dots, -1 \right]^T$$

Definiendo las matrices

$$\hat{\mathbf{P}} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_p, \mathbf{w}]$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p, \mathbf{d}]$$

es posible construir la matriz

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{T}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}}$$

de dimensiones $p \times p$, en cuyo cálculo únicamente interviene el sistema de ecuaciones evaluado para los valores nominales de los elementos. Ahora, la determinación de las derivadas parciales del numerador y denominador de $H(s, \mathbf{h})$ respecto a los valores h_i o, lo que es lo mismo, respecto a los incrementos δ_i , puede obtenerse a partir de las expresiones [71]

$$\frac{\partial^l D(s, \mathbf{h})}{\partial h_{j_1} \partial h_{j_2} \dots \partial h_{j_l}} = \det \mathbf{T}_0 \det \hat{\mathbf{F}}(j_1, j_2, \dots, j_l)$$

$$\frac{\partial^l N(s, \mathbf{h})}{\partial h_{j_1} \partial h_{j_2} \dots \partial h_{j_l}} = \det \mathbf{T}_0 \det \hat{\mathbf{F}}(j_1, j_2, \dots, j_l, p+1)$$

donde se utiliza la notación

$$\det \hat{\mathbf{F}}(j_1, j_2, \dots, j_l) = \det \left[\begin{array}{l} \text{matriz formada por la intersección} \\ \text{de las filas y columnas } j_1, j_2, \dots, j_l \end{array} \right]$$

Finalmente, es necesario advertir que los elementos

$$D_{h_1 h_2 \dots h_{p-1} h_p} = \frac{\partial^p D(s, \mathbf{h})}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_p} \quad (4.13)$$

son polinomios en la variable compleja s . El grado máximo de los polinomios puede estimarse a priori como la suma de elementos reactivos. De este modo, para

el cálculo de cada uno de los términos definidos por la expresión (4.13) es necesario realizar una interpolación compleja. Dado que, en general, el orden de los circuitos no es muy elevado, ello no supone ninguna dificultad insalvable.

4.4 Ejemplo : Sensibilidades respecto a los elementos de circuito en el oscilador de van der Pol

Con el fin de ilustrar las ideas expuestas se presenta su aplicación al oscilador de van der Pol. Las ecuaciones resultantes de aplicar el método nodal modificado a este circuito, ilustrado en la figura 2.20, son

$$\begin{bmatrix} Cs & 1 \\ -1 & Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(V) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde V es la tensión de control de la alinealidad y I_L la corriente que circula a través del inductor.

La determinación de los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ suponiendo $L=1$ y reteniendo C en forma simbólica se realizaría de la siguiente forma.

1. Fijar $C=1$. Calcular el determinante del sistema y el determinante del primer adjunto:

$$P(s,1) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1$$
$$Q(s,1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = -s$$

2. Fijar $C=-1$. Calcular el determinante del sistema y el determinante del primer adjunto:

$$P(s,-1) = \begin{vmatrix} -s & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = -s^2 + 1$$
$$Q(s,-1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = -s$$

3. Finalmente, $P(s)$ y $Q(s)$ se obtienen como

$$P(s) = \frac{1}{2}[(s^2 + 1) + (-s^2 + 1)] + C \frac{1}{2}[(s^2 + 1) - (-s^2 + 1)] = Cs^2 + 1$$
$$Q(s) = \frac{1}{2}[(s) + (-s)] + C \frac{1}{2}[(s) - (-s)] = s$$

Discretizando ambos polinomios mediante la transformación de Gear de orden 2 se llega a la expresión matricial

$$\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

que puede ser escrita, de forma más explícita, como

$$\text{circ}\left(1 + \frac{9C}{4\Delta^2}, 0, \dots, 0, \frac{C}{4\Delta^2}, \frac{-8C}{4\Delta^2}, \frac{22C}{4\Delta^2}, \frac{-24C}{4\Delta^2}\right)\mathbf{v} + \text{circ}\left(\frac{3}{2\Delta}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2\Delta}, \frac{-4}{2\Delta}\right)\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

donde todos los vectores son de longitud N y los circulantes de tamaño $N \times N$.

La primera columna del jacobiano estará formada por la derivada parcial del sistema de ecuaciones anterior respecto a C , que resulta ser

$$\mathbf{J}(:, 1) = \text{circ}\left(\frac{9}{4\Delta^2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4\Delta^2}, \frac{-8}{4\Delta^2}, \frac{22}{4\Delta^2}, \frac{-24}{4\Delta^2}\right)\mathbf{v}$$

Así, en este ejemplo se pone de manifiesto la eficacia del método propuesto, eficacia que se basa tanto en la facilidad con la que es posible calcular las sensibilidades de las ecuaciones respecto a los elementos de circuito como en la posibilidad de expresarlas de forma tan compacta, un aspecto que, sin duda, puede servir para extraer importantes conclusiones acerca de otras características de las soluciones.

Capítulo 5

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

En capítulos anteriores ya se ha apuntado que la mayor o menor adecuación de una formulación a un problema físico concreto depende, en gran medida, de la mayor o menor eficacia alcanzable durante el proceso de su resolución. Hemos adelantado que los mejores algoritmos requerirán el conocimiento del jacobiano del sistema de ecuaciones resultante. En este sentido, se han descrito métodos extremadamente sencillos que permiten su obtención de forma casi inmediata, sin requerir, en ningún caso, cálculos adicionales de complejidad. Quedan, pues, por describir, las estrategias que finalmente se han utilizado para la resolución de las ecuaciones planteadas.

Así, en este capítulo se aborda el problema de la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales

$$g(x)=0 \quad (5.1)$$

Utilizando una notación más formal, el problema a resolver puede enunciarse de la siguiente forma:

Dada una función vectorial $g : R^n \rightarrow R^n$, encontrar el vector $x^* \in R^n$ tal que cumpla $g(x^*)=0$.

Antes de proseguir, conviene aclarar algunos términos referentes a la notación. En este capítulo, x se utiliza para designar el vector formado por las n variables a determinar en un problema general. Así, en el caso de circuitos excitados, este vector estaría formado únicamente por las muestras de las variables de control de

las alinealidades. Para circuitos autónomos, el primer elemento de x representaría el periodo de oscilación y , análogamente, en el caso de abordar problemas de optimización planteables como un sistema de ecuaciones no lineales, en el vector x aparecería el valor del elemento a optimizar.

Dado el carácter no lineal de las ecuaciones planteadas, resulta evidente que no existen expresiones generales que permitan su solución exacta realizando un número finito de cálculos. Así, el mejor resultado que puede esperarse de un algoritmo de solución es una aproximación a la misma.

Existen diferentes técnicas para llegar a esta aproximación final. Tradicionalmente, se han desarrollado algoritmos iterativos, descritos por una expresión cuya forma general es

$$x_{k+1} = \Phi_k(x_k) \quad (5.2)$$

Así, a partir de un vector inicial x_0 , es posible construir, de forma sistemática, una secuencia de vectores $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$

Siguiendo esta idea se han desarrollado numerosos algoritmos donde cada uno de ellos debe afrontar obligatoriamente algunos problemas de enorme trascendencia. Así, siguiendo el orden en el que aparecerán en la práctica, figura en primer lugar la necesidad de inicializar el proceso iterativo proporcionando un vector x_0 . La elección de una u otra estimación inicial tendrá importantes repercusiones en el comportamiento del proceso, condicionando, no solamente el número de iteraciones necesarias para converger, sino, en numerosas ocasiones, la propia convergencia de la iteración. En segundo lugar, está el problema de la elección de una función de iteración Φ_k adecuada a un determinado problema, elección que resulta el principal rasgo distintivo entre diferentes algoritmos. Para resolver esta cuestión se requiere un estudio detallado de la estructura del problema particular, siendo, además, habitualmente necesario alcanzar un compromiso entre el coste que supone construir Φ_k y la convergencia del algoritmo resultante. El tercer gran problema consiste, precisamente, en detectar cuándo se ha alcanzado la convergencia, esto es, cuándo dejan de producirse mejoras significativas por la aplicación de la iteración. En contra de lo que podría dictar la intuición, ésta no es, en absoluto, una cuestión secundaria, ya que de ello depende, en gran medida, la eficacia global del algoritmo.

Existe, finalmente, un último problema. A saber, ¿qué ocurre si la iteración, cuidadosamente seleccionada, converge hacia un vector que *no* es solución del problema original? La respuesta no puede ser menos desalentadora: en realidad, no es posible poner remedio a esta situación, por otro lado frecuente en la práctica. En este caso, como apuntan aquellos autores que mencionan esta posibilidad, la única vía de salida consiste en partir de una estimación inicial distinta y esperar a que esta vez el proceso tenga éxito. De hecho, gran parte de los algoritmos de solución han sido desarrollados desde un punto de vista esencialmente formal. Así, se han desarrollado algoritmos que convergen —y lo hacen de forma rápida— en el caso de que se cumplan unas determinadas condiciones. En la práctica, determinar si éstas se cumplen o no, puede suponer un coste incluso mayor que la propia resolución del problema original, por lo que es práctica habitual aplicar directamente un algoritmo y comprobar a posteriori si éste converge.

A pesar de la forma tan general que adopta la expresión (5.2), existen algoritmos de solución, desarrollados muy recientemente, que no pueden ser descritos por ella [14, 63]. De hecho, no existe *ninguna* ecuación *determinista* que los describa: son los denominados métodos estocásticos. En efecto, estos algoritmos, originalmente desarrollados para el problema de la optimización global de funciones*, generan sucesivos vectores mediante perturbaciones aleatorias, asimilables a una agitación térmica, sobre una secuencia de vectores determinista. Disminuyendo de forma inteligente la amplitud de los términos aleatorios, es posible, al menos teóricamente, encontrar una solución al problema original, independientemente de la estimación inicial y de la forma particular de la función $g(x)$. No obstante, el uso de estas técnicas supone, en general, un tiempo de cálculo considerablemente superior al requerido por los algoritmos clásicos. Por este motivo, se reservará su uso a aquellas situaciones en las que los métodos iterativos tradicionales fracasen.

* Un método basado en estas ideas, ampliamente utilizado en algunas aplicaciones, es el denominado método de *simulated annealing*.

5.1. Relación con el problema de la optimización no lineal

Ya se ha apuntado que los algoritmos clásicos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales presentan la forma general

$$x_{k+1} = \Phi_k(x_k)$$

siendo el objetivo de los siguientes apartados la determinación de aquellas funciones de iteración Φ_k que presenten mejores características.

La primera pregunta que aparece en este contexto es cómo decidir si una determinada iteración es aceptable o no. En concreto, debemos ser capaces de distinguir, dados dos vectores x_i y x_j , cuál de ellos es *mejor*.

Dado que el problema a resolver es $g(x)=0$, es fácil deducir que x_i es *mejor* que x_j si, para una determinada norma, se cumple

$$\|g(x_i)\| < \|g(x_j)\|$$

Así, por ejemplo, podría utilizarse la norma l_2 , definida como

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$$

Tras estas consideraciones, es inmediato construir una función escalar, asociada al problema original $g(x)=0$ de la forma

$$g(x) = \frac{1}{2} g(x)^T g(x) \quad (5.3)$$

donde, por conveniencia, se ha eliminado la raíz y se ha introducido el factor 1/2.

Ahora, puede comprobarse de forma inmediata que, con esta definición, toda solución de $g(x)=0$ es también solución del problema de minimización de $g(x)$ y viceversa. La introducción de esta función de coste asociada, justificada por la necesidad de comparar entre sí diferentes vectores, servirá, además, para poder aplicar ideas propias de la optimización no lineal al problema que nos ocupa. Así, algunos de los algoritmos que se han utilizado, se derivarán para un problema de

optimización y, en una segunda fase, se aplicarán a la resolución de ecuaciones no lineales.

5.2. Métodos de relajación

En este apartado se describe una clase de algoritmos que destaca por su extrema sencillez y por la velocidad de cálculo que de ello se deriva. No obstante, como ya se puede intuir, el campo de aplicación de estas técnicas será necesariamente restringido.

Para ilustrar los métodos iterativos de relajación, también denominados de Picard, consideraremos el problema resultante de la formulación temporal discreta aplicada a un circuito *excitado*. En esta situación, las variables a determinar son únicamente las muestras de las variables, resultando la formulación

$$\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Ahora es posible aislar la variable \mathbf{x} , resultando

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}' + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{r}' = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}$ y $\mathbf{B} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$. Nótese que esta ecuación presenta la forma descrita por la expresión (5.2), siendo, por tanto, natural definir el esquema iterativo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{r}' + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (5.4)$$

Nótese que, una vez calculada la matriz \mathbf{B} , cada iteración solamente requiere un producto, además de la evaluación de la función no lineal, siendo posible conseguir una velocidad de cálculo muy elevada si estas operaciones son vectorizables. No obstante, en la práctica, la iteración definida por (5.4) converge únicamente en contadas situaciones. Además, se ha detectado que la convergencia descrita por Frey y Norman [27] en circuitos excitados es extremadamente sensible a la estimación inicial, siendo frecuente que las sucesivas iteraciones diverjan. Ello es así incluso actuando sobre los valores de los elementos lineales que se utilizan para modelar las alinealidades.

La iteración modificada

$$\mathbf{x}_{k+1} = \alpha \mathbf{x}_k + (1 - \alpha)(\mathbf{r}' + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))$$

consigue estabilizar algunas situaciones al introducir una componente de inercia elevada con $\alpha \approx 1$ (por ejemplo, $\alpha = 0.99$) aunque los resultados globales aún dejan mucho que desear.

Nótese, además, que, en este problema, la elección de la función Φ_k ha venido aconsejada por la estructura especial del problema. No obstante, conviene notar que existen múltiples alternativas, igualmente válidas, para plantear una iteración similar. Así, el problema

$$g(x) = 0$$

tiene, por ejemplo, la misma solución que

$$x = x + g(x)$$

y que

$$x = x + \alpha g(x)$$

con α de valor y signo (!) arbitrarios. No es difícil comprobar que la convergencia en este caso depende fuertemente de la elección realizada*, hasta el punto que, si la iteración converge para $\alpha > 0$, entonces diverge para $\alpha < 0$ y viceversa [39, 54]. La siguiente figura ilustra esta situación, donde se elegido una función $g(x)$ lineal con el fin de facilitar la comprensión del problema.

* También es posible considerar α como una cierta función de x . De hecho, el método de Newton, que se describirá posteriormente, adopta esta forma con $\alpha = -J^{-1}(x)$.

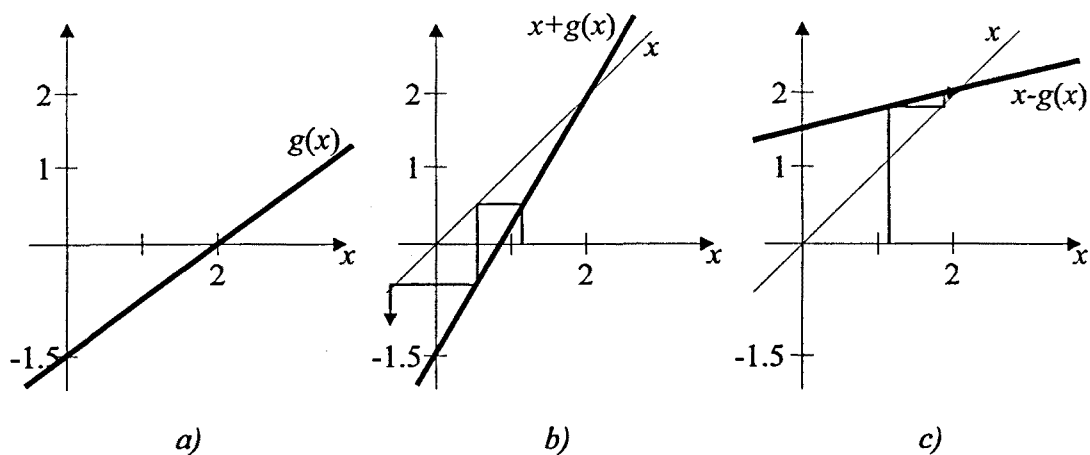


Figura 5.1. Método de relajación.

- a) El problema a resolver es la ecuación $g(x)=0.75x-1.5=0$
- b) Sucesión divergente obtenida realizando la iteración $x_{k+1}=x_k+g(x_k)$
- c) Sucesión convergente obtenida realizando la iteración $x_{k+1}=x_k-g(x_k)$

Así, en un caso general, no existe una elección obvia a priori. Ello hace que este enfoque no sea aplicable, por ejemplo, cuando las variables a determinar no sean únicamente las muestras de las variables, sino que entre ellas también aparezca, bien el periodo de oscilación, bien valores de elementos de circuito. En este caso, la dificultad proviene del hecho de que tanto el periodo de oscilación como los valores de los elementos de circuito no aparecen de forma explícita en las ecuaciones, siendo aún más difícil escribir a priori una iteración eficaz.

En consecuencia, es necesario diseñar esquemas iterativos más robustos. Estos estarán basados en el método de Newton que pasamos a describir.