

Universitat Politècnica de Catalunya
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de
Telecomunicació de Barcelona
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

TESIS DOCTORAL

**Análisis y Optimización de Circuitos
Autónomos Mediante Técnicas
Temporales Discretas**

Autor **Pere Palà Schönwälder**

Director **Joan M. Miró Sans**

Barcelona, 1994

5.3. El método de Newton

El propósito de este apartado es presentar brevemente las características esenciales del bien conocido método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Para ello se introducirán algunos conceptos que serán de utilidad en apartados posteriores.

Recordemos que el problema a resolver consiste en determinar un vector x^* que cumple $g(x^*)=0$. Dado que es imposible encontrar una solución exacta de este problema, la estrategia general a seguir podría ser la siguiente:

1. Encontrar un *modelo* para la función no lineal a resolver, $m(x)$. Este modelo debe ser tal que aproxime de la mejor forma posible el comportamiento de $g(x)$ y, simultáneamente, permita obtener la solución de $m(x)=0$ de forma sencilla.
2. Encontrar la solución del problema $m(x)=0$.
3. Dado que la función g no es exactamente igual que el modelo m , la solución obtenida en el paso anterior no será la solución del problema original, sino únicamente una aproximación a ella. Por tanto, es necesario iterar el proceso.

No es difícil imaginar que es posible construir un sinnúmero de algoritmos basados en esta idea general, cuya única diferencia estribará en el tipo de modelo que se utiliza en cada ocasión. Así, antes de abordar la solución de un determinado problema, será conveniente buscar modelos que aproximen de forma satisfactoria el comportamiento de la función no lineal.

Como es conocido, una función de una variable puede ser aproximada por una recta en la vecindad de un punto. Asimismo, una función vectorial de n variables puede aproximarse, en la vecindad de un punto x_c , por un hiperplano. Por tanto, un modelo sencillo de una función no lineal arbitraria, en la vecindad del punto actual, x_c , viene dado por

$$m(x)=m(x_c+s)=g(x_c)+J(x_c)s \quad (5.5)$$

donde $J(x_c)$ es la matriz del jacobiano evaluada en x_c . La solución del problema

$$m(x) = m(x_c + s) = 0$$

es sencilla, ya que se trata de un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, la solución se obtiene resolviendo

$$J(x_c)s_N = -g(x_c) \quad (5.6)$$

para el vector s_N .

En esta situación, cabe pensar que una estimación mejor de la solución del problema original, vendrá dada por

$$x_+ = x_c + s_N \quad (5.7)$$

La repetida aplicación de las ecuaciones (5.6) y (5.7) da lugar a lo que se conoce como *método o iteración de Newton* para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, denominándose habitualmente *paso* de Newton al vector s_N .

Bajo ciertas condiciones de continuidad de $g(x)$ y de $J(x)$, puede demostrarse [54] que la secuencia de vectores generada por el método de Newton converge cuadráticamente hacia x^* si el proceso se inicia en una vecindad de x^* . Esto significa que se verifica

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \gamma_r \|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

donde γ_r es una constante positiva menor que la unidad.

Así, el principal atractivo del método de Newton reside en la velocidad de convergencia que se obtiene en el caso de que la estimación inicial sea lo suficientemente buena y el jacobiano no sea singular en x^* . Nótese, además, que en el caso de que la función $g(x)$ sea lineal el método de Newton proporciona la solución en una sola iteración.

No obstante, en numerosas situaciones la iteración de Newton no converge. Ello es así en aquellos problemas en los que no es fácil determinar una estimación inicial que pertenezca a la vecindad convergente de la iteración. Así, es frecuente observar que los pasos de Newton s_N conducen incluso a puntos *peores*, es decir, a puntos en los que la función de coste asociada es mayor.

Otro argumento que frecuentemente dificulta e incluso desaconseja el uso del método de Newton es la necesidad de calcular el jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ en cada iteración. En efecto, el cálculo del jacobiano puede requerir, en algunos problemas, un coste de cálculo tan elevado que difícilmente es compensado por la mejora que introduce la convergencia cuadrática (en caso de que ésta se produzca). Sin embargo, para el problema que nos ocupa, se ha descrito un procedimiento extraordinariamente eficaz para el cálculo del jacobiano, de forma que esta dificultad resulta irrelevante.

Finalmente, queda por destacar un aspecto que podría pasar desapercibido en una primera evaluación del método de Newton. Nótese que, en cada iteración, es necesario resolver el sistema de ecuaciones (5.6). ¿Qué ocurre si el jacobiano es singular o está mal condicionado? En esta situación, no es inmediato encontrar el paso de Newton y, en consecuencia, es necesario redefinir adecuadamente el problema a resolver. Como se detallará más adelante, esto se realiza modificando de forma inteligente el jacobiano del sistema de ecuaciones.

A modo de resumen, cabe destacar que el método de Newton desarrolla una enorme eficacia siempre y cuando sea posible iniciar el proceso iterativo en un punto suficientemente cercano a la verdadera solución del problema. Conviene notar que la noción de *cercanía* puede ser muy distinta en situaciones distintas, siendo posible que, para ciertos problemas, el método de Newton converja siempre. Por contra, se dan situaciones en las que es virtualmente imposible determinar a priori un punto que reúna las características requeridas. En consecuencia, es necesario desarrollar algoritmos que no adolezcan de esta elevada sensibilidad a la estimación inicial. Simultáneamente, sería deseable solventar el problema que puede suponer la singularidad o el mal condicionamiento del jacobiano en algún momento del proceso iterativo. En el siguiente apartado se desarrollan estas ideas y se describen los algoritmos resultantes, que han sido implementados para resolver el problema del análisis y la optimización de circuitos no lineales.

5.4. Modificaciones globalmente convergentes sobre el método de Newton

Como reza el título de este apartado, el objetivo que se persigue en este momento es el diseño de algoritmos *globalmente convergentes*, entendiendo como tales aquellos que llegan a *una* solución del problema $g(x)=0$ partiendo de *casi* cualquier estimación inicial. Es necesario señalar que el problema asociado de optimización *global* ha sido objeto de comparativamente pocos estudios, con resultados que distan mucho de ser satisfactorios. En efecto, sólo recientemente se han presentado algoritmos, que no vienen descritos por iteraciones deterministas, sino que incluyen términos estocásticos, que encuentran el mínimo global de una función con *probabilidad* igual a la unidad.

Definido el concepto de *globalmente convergentes* queda por justificar que nuestro objetivo sea *modificar* el método de Newton. Para ello conviene recordar que el método de Newton presenta excelentes características, aunque únicamente en las proximidades de la solución. Por tanto, resulta sensato exigir que los algoritmos globalmente convergentes deriven hacia el método de Newton a medida que la iteración se acerca a la zona en la que éste converge cuadráticamente.

5.4.1. Métodos de búsqueda en la dirección de Newton

Uno de los principales problemas que aparecen con el uso de la iteración de Newton, descrita por las expresiones (5.6) y (5.7), es la posibilidad de que el nuevo vector encontrado x_+ resulte *peor* que el actual x_e , en el sentido de que la función de coste asociada a nuestro problema sea mayor. Como es fácilmente comprensible, ello es debido a que el modelo elegido no aproxima suficientemente bien a la función $g(x)$ en el intervalo considerado.

En el caso de que se detecte esta situación, una posible estrategia consistiría en partir de una dirección en la que la función de coste asociada decrezca para determinar, a continuación, la longitud del paso a efectuar en esa dirección. Así, se plantea, en primer lugar, la determinación de direcciones descendentes.

Direcciones descendentes

Dada una función escalar de variable vectorial $g(\mathbf{x})$, se puede asegurar que la dirección dada por el vector unitario \mathbf{p} es descendente a partir de \mathbf{x}_c si y solo si

$$\nabla g(\mathbf{x}_c)^T \mathbf{p} < 0. \quad (5.8)$$

Si se cumple (5.8), entonces se verifica que $g(\mathbf{x}_c + \delta \mathbf{p}) < g(\mathbf{x}_c)$ para un valor δ positivo y suficientemente pequeño. Asimismo, es posible determinar cuál es el vector unitario \mathbf{p} que apunta hacia la dirección en la que g decrece más rápidamente. La solución a este problema haciendo uso de la norma l_2 viene dada por

$$\mathbf{p} = -\frac{\nabla g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}$$

Por tanto, la dirección dada por el gradiente cambiado de signo es la dirección de *máxima pendiente*.

Ahora está claro que, para determinar direcciones descendentes para el problema que nos ocupa, será necesario calcular el gradiente de la función de coste (5.3), resultando

$$\nabla g(\mathbf{x}_c) = \frac{d}{d\mathbf{x}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (g_i(\mathbf{x}_c))^2 = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c)$$

Como consecuencia, la dirección de máxima pendiente para el problema (5.1) con la función de coste (5.3) viene dada por $-\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c)$. Asimismo, es interesante comprobar que la dirección de Newton dada por (5.6) es siempre una dirección descendente. En efecto

$$\nabla g(\mathbf{x}_c) \mathbf{s}_N = -\mathbf{g}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{J}(\mathbf{x}_c) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_c) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) = -\mathbf{g}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) < 0 \quad (5.9)$$

siempre y cuando no se esté en la solución, es decir $\mathbf{g}(\mathbf{x}_c) \neq \mathbf{0}$.

Asimismo, es inmediato comprobar que el paso de Newton (5.6) conduce al mínimo de la función cuadrática definida a partir del modelo (5.5), por la expresión

$$\begin{aligned}
m_2(\mathbf{x}_c + \mathbf{s}) &= \frac{1}{2} \mathbf{m}^T(\mathbf{x}_c + \mathbf{s}) \mathbf{m}(\mathbf{x}_c + \mathbf{s}) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{g}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) + \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) \right)^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{J}(\mathbf{x}_c) \right) \mathbf{s}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

función que será utilizada posteriormente para modelar el comportamiento de $g(\mathbf{x})$.

Conviene destacar que el modelo (5.10) *no* coincide con el modelo cuadrático que se obtendría reteniendo los términos de orden dos del desarrollo de Taylor de $g(\mathbf{x})$, ya que, en general

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}_c) \neq \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_c) \mathbf{J}(\mathbf{x}_c)$$

Por tanto, el especial atractivo del modelo de la función de coste así construido no está tanto en el grado de la aproximación obtenida como en que los pasos de Newton del problema original $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ coinciden con los pasos que conducen al mínimo de (5.10).

Nótese, por otro lado, que el hecho de que la dirección determinada por \mathbf{s}_N sea descendente no significa necesariamente que $g(\mathbf{x}_c + \mathbf{s}_N) < g(\mathbf{x}_c)$ ya que la expresión (5.9) refleja una propiedad local de la función, que únicamente garantiza que un paso *infinitesimal* en la dirección \mathbf{s}_N será descendente.

Una vez se ha comprobado que la dirección de Newton es descendente, el problema que ahora se plantea consiste en determinar cuál es la longitud óptima a recorrer en esta dirección. Como ya se ha mencionado, el paso completo puede ser insatisfactorio al aumentar la función coste mientras que tomar pasos excesivamente cortos conlleva, en el mejor de los casos, un número de iteraciones desorbitado.

En consecuencia, resulta intuitivo exigir que $g(\mathbf{x}_{k+1}) < g(\mathbf{x}_k)$ mas esta condición, repetida en cada iteración, no garantiza que la secuencia obtenida converja, ni que, en caso de converger, lo haga hacia el mínimo de la función g .

Para garantizar la convergencia hacia el mínimo de la función, es necesario exigir, en cada iteración, una reducción del valor de la función proporcional a la pendiente inicial de la misma [20].

Esta exigencia puede expresarse como

$$\frac{g(x_c + \lambda s_N) - g(x_c)}{\lambda} < \alpha (\nabla g(x_c))^T s_N \quad (5.11)$$

para un valor de α perteneciente al intervalo $(0,1)$, siendo posible elegir cualquier valor de λ que cumpla esta ecuación.

Con el mismo objetivo, resulta, asimismo, necesario exigir que la longitud de los pasos sea suficientemente grande como para garantizar que, en el nuevo punto, la función decrezca menos rápidamente de lo que decrece en el punto actual. Así serán aceptables aquellos puntos definidos por un λ que cumple la relación

$$\nabla g(x_c + \lambda s_N)^T s_N \geq \beta (\nabla g(x_c))^T s_N \quad (5.12)$$

Nótese que el término de la derecha de la desigualdad corresponde a la derivada direccional en el punto actual y, por tanto, es negativo. Además, si β está comprendida en el intervalo $(\alpha,1)$ entonces es posible encontrar un valor de λ que cumpla simultáneamente las condiciones (5.11) y (5.12).

Las restricciones (5.11) y (5.12) son de excepcional importancia práctica. En efecto, puede demostrarse [20] que un algoritmo que genera una secuencia de vectores x_k de forma que en cada iteración se elige una dirección descendente y además se cumplen las condiciones (5.11) y (5.12), entonces este algoritmo es *globalmente convergente**.

Con esta información, estamos en condiciones de escribir un algoritmo globalmente convergente basado únicamente en explorar la función a lo largo de la dirección dada por el paso Newton. Dado que éste irá cambiando en cada iteración, resultará más adecuado definir

$$p_k = (s_N)_k = -J^{-1}(x_k)g(x_k)$$

Con esta notación, el algoritmo sería de la forma

* En sentido estricto, las condiciones enunciadas únicamente implican la convergencia global hacia $g = -\infty$ o hacia $\nabla g = 0$ [18]. No obstante, en un sentido menos riguroso, de hecho, implican la convergencia hacia el mínimo global de g .

Inicializar α y las cotas l y u , con $0 < l < u < 1$

$$\lambda_k = 1$$

mientras $g(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{p}_k) - g(\mathbf{x}_k) > \alpha (\lambda \nabla g(\mathbf{x}_k))^T \mathbf{p}_k$ hacer

$$\lambda_k = \rho \lambda_k \quad \text{con } l < \rho < u$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{p}_k$$

En la práctica, el valor de α se escoge pequeño, del orden de 10^{-4} de forma que, en realidad, se exige poco más que un decrecimiento de la función. Nótese, además, que la existencia de una cota inferior l , ya previene de tomar pasos excesivamente pequeños, haciendo innecesario comprobar la condición (5.12) explícitamente. En esta situación, la única cuestión que queda pendiente es determinar los criterios con los que modificar el valor de λ_k .

Para estudiar este problema, definiremos, por comodidad, la función

$$\varphi(\lambda) = g(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{p}_k).$$

Inicialmente se dispone del valor de $\varphi(0)$ y de $\varphi'(0)$. Tras calcular $g(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k)$ se dispone, asimismo de $\varphi(1)$. Con esta información, es posible construir un modelo cuadrático de $\varphi(\lambda)$, definido por

$$m_2(\lambda) = [\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)]\lambda^2 + \varphi'(0)\lambda + \varphi(0)$$

y cuyo mínimo se produce en

$$\lambda_+ = \frac{-\varphi'(0)}{2[\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)]}$$

Dado que $\varphi(1) > \varphi(0)$, se tiene que $\lambda_+ < 0.5$, de forma que se establece, implícitamente, una cota superior $u = 0.5$. Por otro lado, si $\varphi(1)$ es mucho mayor que $\varphi(0)$, entonces λ_+ podría hacerse demasiado pequeña. Por esta razón, es útil imponer un límite inferior $l = 0.1$ en el algoritmo descrito.

Supóngase que el nuevo valor de λ_k aún no satisface (5.11). Aunque sería posible repetir el mismo desarrollo, hacerlo significaría, de hecho, desaprovechar la información adicional $\varphi(\lambda_k)$ de que se dispone. En efecto, con cuatro datos, es posible encontrar un polinomio de orden tres, cuyo mínimo nos servirá para

obtener la nueva estimación de λ_+ . La cúbica que interpola los datos $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi(\lambda_k)$ y $\varphi(\lambda_{k-1})$ viene dada por la expresión

$$m_3(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + \varphi'(0)\lambda + \varphi(0)$$

con

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_k + \lambda_{k-1}} \begin{bmatrix} \lambda_k^{-2} & -\lambda_{k-1}^{-2} \\ -\lambda_{k-1}\lambda_k^{-2} & \lambda_k\lambda_{k-1}^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_k) - \varphi(0) - \varphi'(0)\lambda_k \\ \varphi(\lambda_{k-1}) - \varphi(0) - \varphi'(0)\lambda_{k-1} \end{bmatrix}$$

El mínimo de la cúbica viene dado por la expresión

$$\lambda_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3a\varphi'(0)}}{3a}$$

Al hacer uso de este valor, es conveniente fijar la cota superior $u=0.5$. La cota inferior se mantiene, como antes, en $l=0.1$ a fin de evitar pasos excesivamente pequeños, provocados, muy probablemente, por un modelo excesivamente simplificado de la función.

En aquellas situaciones en las que no es costoso obtener el valor de la derivada de la función de coste (el caso que nos ocupa es uno de ellos), es posible modelar la función mediante una cúbica ya desde el primer momento, haciendo uso de los 4 datos $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi(\lambda_k)$ y $\varphi(\lambda_{k-1})$, obteniéndose [16]

$$\lambda_+ = \lambda_k \frac{1 - (\varphi'(\lambda_k) + w - z)}{2w + \varphi'(\lambda_k) - \varphi'(0)}$$

con

$$z = \frac{3(\varphi(0) - \varphi(\lambda_k))}{\lambda_k} + \varphi'(\lambda_k) + \varphi'(0)$$

y

$$w = \sqrt{z^2 - \varphi'(0)\varphi'(\lambda_k)}$$

donde la forma especial de las ecuaciones se ha elegido para minimizar los efectos de la sustracción de cantidades similares.

Independientemente de la estrategia de interpolación utilizada, la implementación final de un algoritmo basado en seguir la dirección de Newton requiere aún de algunas modificaciones conducentes a evitar problemas que pueden surgir en la práctica. Así, si la longitud del paso $\lambda_k \mathbf{p}_k$ es inferior a una cierta cota, es conveniente abandonar la búsqueda en dicha dirección. Este criterio es útil cuando en ocasiones, debido a problemas numéricos, la dirección \mathbf{p}_k no es descendente. También es útil limitar la longitud máxima del primer paso, \mathbf{p}_k , con el fin de no abandonar la zona de interés —situación que puede darse en caso de que el jacobiano sea casi singular.

La implementación de estas ideas conduce a un algoritmo globalmente convergente —en el sentido descrito al comienzo de este apartado— de gran eficacia. Nótese que, en aquellos casos en los que el método de Newton daría buenos resultados, el algoritmo descrito necesitará el mismo número de iteraciones, ya que siempre se tantea el resultado que produce el paso de Newton completo.

A continuación se presenta una familia de métodos que siguen un enfoque distinto que redundará en una eficacia aún mayor: en vez de conservar la dirección de Newton y determinar después cuál es la longitud óptima a recorrer, se determinará de antemano la máxima distancia a recorrer (que dependerá de la medida en que el comportamiento de la función se aproxima al del modelo) y posteriormente se elegirá la mejor dirección. A los pasos así determinados les denominaremos pasos óptimos de longitud máxima determinada.

5.4.2. Pasos óptimos de longitud máxima determinada

Supongamos que, en un determinado momento, el paso de Newton completo no es satisfactorio. Esto es claramente un indicio de que el modelo cuadrático utilizado no modela adecuadamente la función g en la región que contiene el paso de Newton completo. En los métodos antes descritos, esta situación se resuelve manteniendo la misma dirección y eligiendo una longitud menor, construyendo un modelo *unidimensional* a partir del conocimiento de la función en la dirección de Newton. Por el contrario, los métodos que se describirán en este apartado fijan en primer lugar la longitud del paso a recorrer para, a continuación, hacer uso de un modelo n -dimensional para determinar la mejor *dirección*.

Para desarrollar estos métodos, supongamos que, en un cierto momento de la iteración, partimos de un punto \mathbf{x}_c y que disponemos de una estimación de la máxima longitud a recorrer δ . El problema a resolver es encontrar cuál es el mejor paso de longitud máxima δ partiendo de \mathbf{x}_c . Para aproximar el comportamiento de la función g , podemos suponer válido el modelo cuadrático definido positivo (5.10), que reescribimos como

$$m_2(\mathbf{x}_c + \mathbf{s}) = g_c + \nabla g_c^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}_c \mathbf{s} \quad (5.13)$$

con la matriz $\mathbf{H}_c = \mathbf{J}_c^T \mathbf{J}_c$ definida positiva.

Así, la determinación del paso óptimo de longitud máxima igual a δ puede escribirse como el problema de determinar el mínimo de $m_2(\mathbf{s})$, con la restricción

$$\|\mathbf{s}\| \leq \delta$$

La función de Lagrange asociada a este problema [58] resulta ser

$$L(\mathbf{s}, \lambda) = g_c + \nabla g_c^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}_c \mathbf{s} + \lambda (\mathbf{s}^T \mathbf{s} - \delta)$$

Imponiendo que las derivadas parciales de $L(\mathbf{s}, \lambda)$ respecto a las componentes de \mathbf{s} se anulen, se llega a

$$\nabla g_c + \mathbf{H}_c \mathbf{s} + 2\lambda \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

Definiendo $\mu = 2\lambda$, la solución del problema se obtiene resolviendo

$$(\mathbf{H}_c + \mu \mathbf{I}) \mathbf{s} = -\nabla g_c \quad (5.14)$$

para el vector $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mu)$ sujeto a la condición

$$\|\mathbf{s}\| = \delta$$

a no ser que la solución de (5.14) se produzca a una distancia menor que δ , en cuyo caso la solución viene dada por el paso de Newton, obtenido tomando $\mu = 0^*$. Conviene notar, además, que para valores de $\mu \rightarrow \infty$, la solución de (5.14) es un vector de longitud infinitesimal en la dirección de máxima pendiente. Realizando

* Recuérdese que el mínimo del modelo cuadrático (5.13) coincide con el paso de Newton sobre el problema original.

un barrido para valores de μ entre ambos extremos, se obtienen sucesivas soluciones que definen, todas ellas, direcciones descendentes.

En este momento puede ser interesante aclarar algunas ideas referentes a la nomenclatura habitualmente utilizada en este contexto. Así, a los algoritmos que abordan el problema de optimización de la función $g(x)$ mediante el planteamiento descrito, se les denomina, de forma tal vez demasiado general, métodos de Levenberg-Marquardt. Aunque, en efecto, la ecuación (5.14) fue introducida por primera vez por Levenberg en fecha tan temprana como 1944, las implementaciones actuales [20, 56] derivan, en su mayoría, del trabajo de Moré [48] publicado en 1978.

Volviendo al desarrollo que nos ocupa, y a la vista de cómo queda planteado el problema, no es difícil intuir de que no existirá ningún algoritmo cerrado que resuelva (5.14) fijando la longitud de s . Por esta razón, será necesario desarrollar ideas que permitan encontrar soluciones aproximadas de este problema. La primera vía que se describirá consiste en determinar un valor μ tal que

$$\|s(\mu)\| \approx \delta$$

mientras que una segunda alternativa consistirá en construir una aproximación lineal por tramos a la curva $s(\mu)$ para, posteriormente, realizar un paso de longitud exactamente igual a δ sobre la curva linealizada. Denominaremos, respectivamente, métodos de *pasos óptimos aproximados* y métodos de *pasos óptimos linealizados* a ambas estrategias. Pasamos a detallar ambas técnicas, postergando la determinación de la distancia a recorrer, δ , hasta después de la descripción de aquéllas.

Pasos óptimos aproximados

La primera estrategia para determinar los pasos óptimos de longitud máxima determinada consistirá en relajar los requerimientos en cuanto a la longitud, de forma que el problema queda traducido en la determinación del valor de μ que hace aproximadamente cero la función $\psi(\mu)$.

$$\psi(\mu) = \|s(\mu)\| - \delta = 0 \quad (5.15)$$

Al ser éste un problema no lineal, su resolución deberá abordarse mediante un algoritmo iterativo. Esta constatación no debe llevar al lector a pensar que se ha entrado en un círculo (el algoritmo para resolver ecuaciones no lineales requiere, a su vez, resolver una ecuación no lineal) ya que la complejidad del problema (5.15) es reducida. En efecto, se trata de un problema en una sola variable, con la particularidad que la función $\psi(\mu)$ es monótona decreciente y convexa para todo $\mu \geq 0$ [20] además de tender a cero conforme $\mu \rightarrow \infty$.

Aunque la iteración de Newton convergería en un problema de estas características, aún es posible diseñar un esquema iterativo mejor, teniendo en cuenta la especial estructura del problema.

Para ello es conveniente partir de la descomposición espectral de $(\mathbf{H}_c + \mu \mathbf{I})^{-1}$ [56]

$$(\mathbf{H}_c + \mu \mathbf{I})^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T}{w_k + \mu}$$

donde \mathbf{v}_k son los autovectores de \mathbf{H}_c y w_k son sus autovalores correspondientes. Teniendo en cuenta que se puede realizar la descomposición

$$\nabla g_c = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{v}_k$$

se llega a

$$\psi(\mu) = \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T}{w_k + \mu} \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{v}_k \right\| - \delta = 0$$

expresión que sugiere un un modelo de la forma

$$\psi_m(\mu_c) = \frac{\alpha}{\beta + \mu_c} - \delta \quad (5.16)$$

donde α y β representan parámetros del modelo. Además, se ha introducido la notación μ_c para explicitar que el valor de μ se obtiene mediante sucesivas iteraciones. Para determinar los parámetros α y β , resultará sensato imponer la función $\psi(\mu)$ y su derivada coincidan con el modelo $\psi(\mu_c)$ en el valor actual de μ_c :

$$\psi_m(\mu_c) = \frac{\alpha}{\beta + \mu_c} - \delta = \psi(\mu_c) = \|\mathbf{s}(\mu_c)\| - \delta$$

$$\psi'_m(\mu_c) = \frac{\alpha}{(\beta + \mu_c)^2} = \psi'(\mu_c) = \frac{\mathbf{s}(\mu_c)^T (\mathbf{H}_c + \mu_c \mathbf{I})^{-1} \mathbf{s}(\mu_c)}{\|\mathbf{s}(\mu_c)\|^2}$$

donde cabe destacar que el cálculo de $\psi'(\mu_c)$ no supone un coste computacional elevado, ya que para obtener el valor de $\mathbf{s}(\mu_c)$ se ha tenido que efectuar previamente la descomposición de $\mathbf{H}_c + \mu_c \mathbf{I}$. De estas expresiones se obtiene

$$\alpha = -\frac{(\psi(\mu_c) + \delta)^2}{\psi'(\mu_c)}$$

$$\beta = -\frac{(\psi(\mu_c) + \delta)}{\psi'(\mu_c)} - \mu_c$$

Una vez determinados estos parámetros, es obvio que la iteración a realizar será la que anule nuestro modelo (5.16), es decir

$$\mu_c = \frac{\alpha}{\delta} - \beta$$

expresión que, desarrollada, conduce a la iteración que se utilizará para resolver $\psi(\mu) = 0$:

$$\mu_+ = \mu_c - \frac{\|\mathbf{s}(\mu_c)\|}{\delta} \left[\frac{\psi(\mu_c)}{\psi'(\mu_c)} \right] \quad (5.17)$$

De cara a la implementación práctica del algoritmo, quedan por considerar dos aspectos: la elección del valor inicial de μ y la regla con la que se fijarán cotas superiores e inferiores para μ . Conviene destacar que aunque la iteración (5.17) converge partiendo de $\mu=0$, es desable disponer de una estimación inicial más próxima a la solución. Para ello se aprovechará que, antes de calcular \mathbf{H}_c , aún se dispone de la factorización de $\mathbf{H}_- + \mu_- \mathbf{I}$ en la iteración anterior, siendo fácil calcular

$$\mu_0 = \mu_- - \frac{\|\mathbf{s}(\mu_-)\|}{\delta} \left[\frac{\psi(\mu_-)}{\psi'(\mu_-)} \right]$$

Las cotas superiores e inferiores para μ se obtienen a partir de las siguientes consideraciones. Al ser $\psi(\mu)$ decreciente y convexa, la iteración de Newton

siempre subestima la solución verdadera del problema. Por tanto, es razonable tomar como primera cota inferior

$$l_0 = -\psi(0)/\psi'(0)$$

y, posteriormente,

$$l_+ = \max\{l_c, \mu_c - \psi(\mu_c)/\psi'(\mu_c)\}$$

Por otro lado, dado que

$$\delta = \left\| (\mathbf{H}_c + \mu^* \mathbf{I})^{-1} \nabla g(\mathbf{x}_c) \right\| < \frac{\|\nabla g(\mathbf{x}_c)\|}{\mu^*}$$

al ser $\mu^* > 0$ y \mathbf{H}_c definida positiva, la primera cota superior se tomará como

$$u_0 = \frac{\|\nabla g(\mathbf{x}_c)\|}{\delta}$$

y, en las iteraciones subsiguientes, esta cota se actualizará según

$$u_+ = \min\{u_c, \mu_c\}$$

Es también conveniente tomar

$$\mu_+ = \max\{(l_+ \cdot u_+)^{1/2}, 10^{-3} u_+\}$$

en aquellas situaciones en las que μ_+ cae fuera de las cotas especificadas. El segundo término previene de situaciones en las que l_+ puede tomar valores próximos a cero.

Finalmente, cabe señalar que, como ya se ha adelantado, no se buscará una solución exacta de (5.15), sino que bastará con determinar un valor de μ tal que

$$0.75\delta \leq \|s(\mu)\| \leq 1.5\delta$$

criterio que resultará razonable a la luz de cómo se actualizará el valor de δ . En efecto, el valor de δ siempre se multiplicará o dividirá por un factor igual o superior a 2, pudiéndose considerar que el valor actual de δ es una elección que tiene una incertidumbre de esta magnitud.

Pasos óptimos linealizados

La segunda estrategia para obtener pasos óptimos de longitud máxima determinada también intenta obtener una solución aproximada del problema (5.15). No obstante, en este caso la estrategia a seguir consiste en construir una aproximación lineal a tramos de la curva $s(\mu)$ para, a continuación, encontrar sobre ésta el punto que se encuentra exactamente a distancia δ de x_c .

Específicamente, la aproximación lineal a tramos se construye mediante un segmento que une el punto x_c con el punto de Cauchy c , el mínimo del modelo cuadrático (5.13) en la dirección de máxima pendiente. El siguiente tramo une el punto c con n , punto que se encuentra en la dirección de Newton p y que dista de x_c una fracción η ($0 < \eta < 1$) de la longitud del paso de Newton s_N efectuado desde x_c (ver figura 5.2). La función lineal así construida presenta dos características remarcables. En primer lugar, se verifica que la distancia respecto a x_c aumenta monótonamente, con lo que existe un único punto situado a distancia δ . Segundo, el valor del modelo cuadrático decrece monótonamente al pasar de x_c a s_N pasando por c y n , una característica que podía exigirse razonablemente.

El punto c sobre la figura 5.2 se encuentra resolviendo el problema

$$\min_{\lambda} m_2(x - \lambda \nabla g_c) = g_c - \lambda \|\nabla g_c\|^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \nabla g_c^T H_c \nabla g_c$$

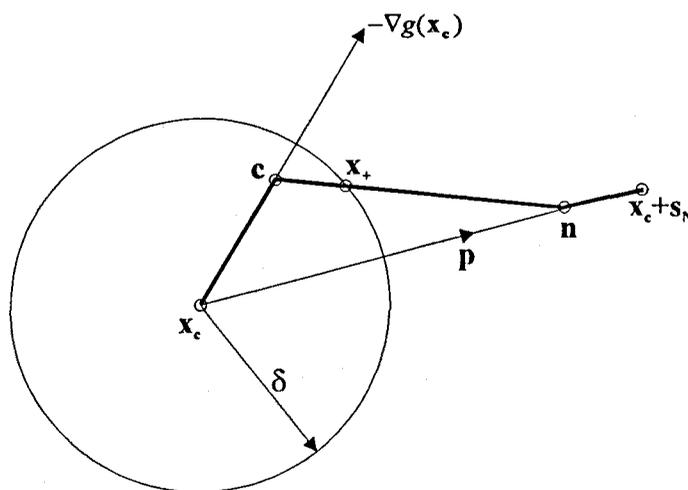


Figura 5.2 Linealización a tramos de $s(\mu)$

cuya solución viene dada por

$$\lambda^* = \frac{\|\nabla g_c\|^2}{\nabla g_c^T \mathbf{H}_c \nabla g_c}$$

En consecuencia

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}_c + \lambda^* \nabla g_c$$

Si la distancia de \mathbf{c} a \mathbf{x}_c supera δ entonces el algoritmo efectuará el paso

$$\mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_c - \delta \frac{\nabla g_c}{\|\nabla g_c\|^2}$$

en la dirección de máxima pendiente.

El punto \mathbf{n} de la aproximación lineal se construye a partir de la expresión genérica

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_c - \eta \mathbf{H}_c^{-1} \nabla g_c$$

con $\gamma < \eta \leq 1$, estando γ definido por la expresión

$$\gamma = \frac{\|\nabla g_c\|^4}{(\nabla g_c^T \mathbf{H}_c \nabla g_c)(\nabla g_c^T \mathbf{H}_c^{-1} \nabla g_c)}$$

En consecuencia, la elección de η es, hasta cierto punto, arbitraria. Las primeras implementaciones de estas ideas construían una aproximación lineal con $\mathbf{n} = \mathbf{s}_N$, es decir, $\eta = 1$, con lo que se obtienen únicamente dos segmentos. No obstante, es posible mejorar el comportamiento del algoritmo tomando $\eta = 0.8\gamma + 0.2$, con lo que se elige la dirección de Newton para valores de δ menores.

Ambos métodos, el de pasos óptimos aproximados y el de pasos óptimos linealizados, presenta características de convergencia parecidas, siendo el primero ligeramente superior al segundo. Como ocurre a menudo, existen problemas para el que uno de ellos requiere un número menor de iteraciones, aunque, en general, no se dan diferencias apreciables. Sin embargo, el método de pasos linealizados requiere un coste de cálculo menor en cada iteración, lo que se traduce en una mayor eficacia desde el punto de vista numérico.

Actualización de la zona de confianza

Como ya se ha esbozado anteriormente, el hecho de limitar la máxima longitud de los pasos es fruto de la constatación de que el modelo cuadrático (5.13) únicamente aproxima razonablemente bien a la función de coste asociada a nuestro problema dentro de una zona que bien puede denominarse *zona de confianza*. Al describir los dos algoritmos anteriores se ha supuesto conocido el radio de la zona de confianza δ . El objetivo de este apartado es dar criterios con los que actualizar automáticamente el valor de este parámetro.

Supóngase que, haciendo uso de alguno de los algoritmos anteriores, se llega a determinar un nuevo vector \mathbf{x}_+ . En primer lugar, hay que determinar si el paso es aceptable o no. Para ello se utilizará el criterio (5.11), es decir, se comprobará si

$$g(\mathbf{x}_+) - g(\mathbf{x}_c) < \alpha (\nabla g(\mathbf{x}_c))^T (\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_c)$$

tomando $\alpha \in (0, 0.5)$. Como antes, es conveniente exigir poco más que un decrecimiento de la función, habiéndose comprobado que $\alpha = 10^{-4}$ produce buenos resultados. Si esta condición no se produce, es necesario reducir el radio de la zona de confianza, δ , mediante interpolaciones cuadráticas, de forma análoga a como se ha descrito en los métodos de busca en la dirección de Newton.

En caso de que el nuevo punto sea aceptable, hay que decidir si mantener o aumentar δ . De todas formas, si el paso efectuado desde \mathbf{x}_c a \mathbf{x}_+ no es ya el paso de Newton, aún cabe considerar la posibilidad de intentar un paso más largo partiendo desde \mathbf{x}_c y *aprovechando* el modelo actual. ¿En qué situaciones puede ser razonable intentar un paso más largo? Para responder a esta cuestión habrá que tener en cuenta los siguientes criterios.

En primer lugar, es conveniente comparar el decrecimiento en el valor de la función

$$\Delta g = g(\mathbf{x}_+) - g(\mathbf{x}_c)$$

con el decrecimiento que preveía nuestro modelo

$$\Delta g_{\text{pred}} = m_2(\mathbf{x}_+) - m_2(\mathbf{x}_c).$$

Así, si el modelo predice resultados similares a los realmente obtenidos, es decir, si

$$\frac{|\Delta g_{pred} - \Delta g|}{\Delta g} \leq 0.1$$

entonces podemos pensar en aumentar la zona de confianza de nuestro modelo. A la misma conclusión se llegaría en caso de que se haya entrado en una zona de curvatura negativa, detectada al verificarse

$$g(\mathbf{x}_+) - g(\mathbf{x}_c) < \nabla g(\mathbf{x}_c)^T (\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_c)$$

En efecto, en esta situación es de esperar un decrecimiento mucho más importante aumentando la longitud máxima del paso.

En ambos casos conviene, en primer lugar, memorizar el valor de \mathbf{x}_+ para, a continuación, averiguar si un aumento de δ produce buenos resultados. En caso afirmativo, el proceso puede repetirse mientras que, en caso, contrario, habrá que retomar el último valor obtenido.

Finalmente, queda por describir la estrategia a seguir cuando no se dé ninguna de las situaciones descritas. El criterio a seguir, está basado, nuevamente, en la correlación entre las predicciones del modelo y los resultados obtenidos, aunque la verdadera cuantificación de esta correlación es algo arbitraria. Así, en el caso de que la predicción en cuanto a la reducción de la función sea razonablemente buena, es decir, si

$$\Delta g < 0.75 \Delta g_{pred}$$

doblabamos el radio de confianza y si el modelo ha sobreestimado de forma importante el decremento producido,

$$\Delta g > 0.1 \Delta g_{pred}$$

se reducirá δ a la mitad. Asimismo, si no se da ninguna de las condiciones anteriores se mantendrá inalterado el radio de confianza de cara al próximo paso.

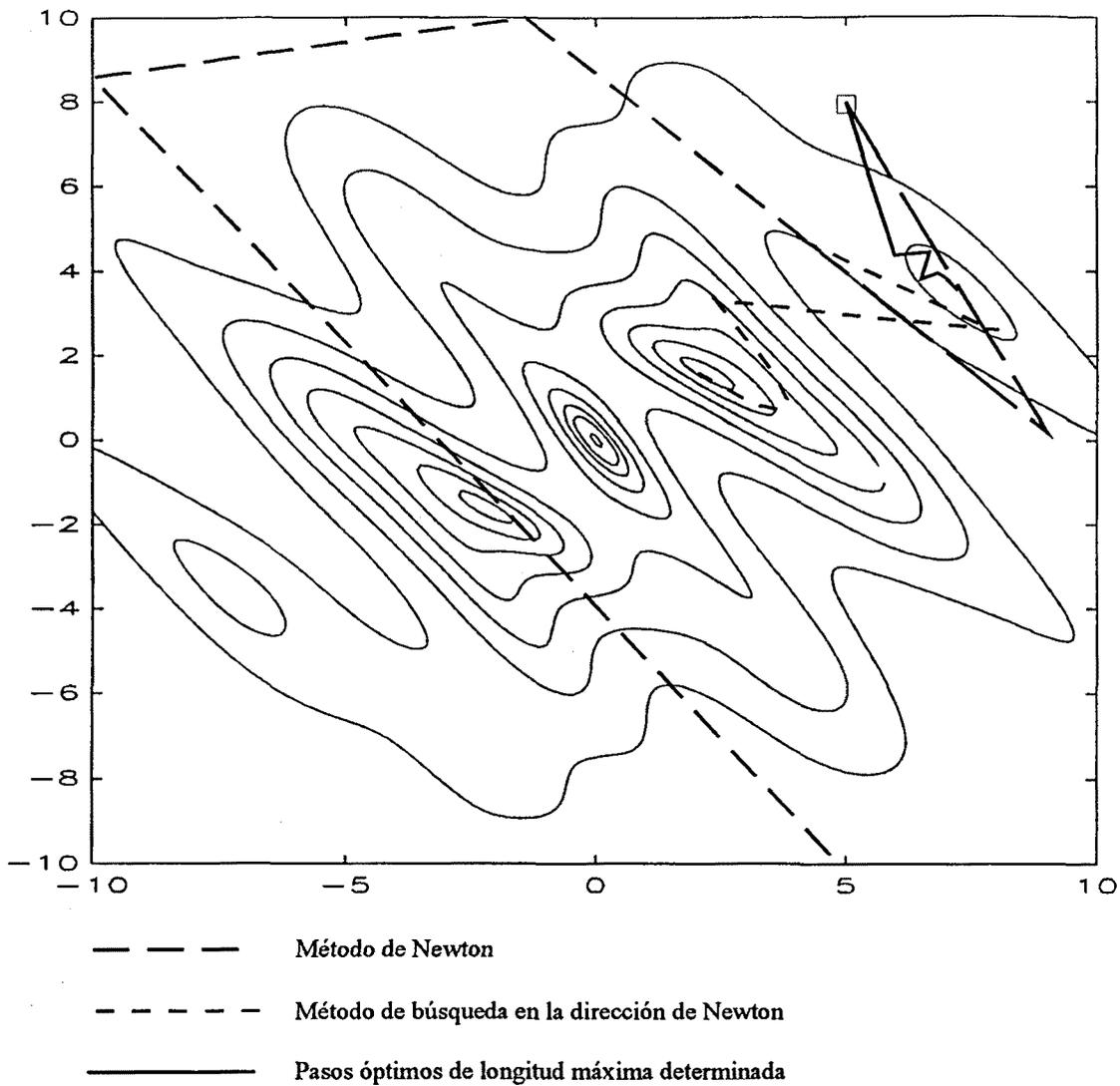


Figura 5.3. Curvas de nivel de la función error asociada al problema (5.18) y pasos que efectúan distintos algoritmos

Nótese, sin embargo, que en el problema de solución de ecuaciones no lineales, a diferencia de como ocurre con la optimización, es posible *detectar*, de forma razonablemente precisa, esta situación. En efecto, basta con comprobar si, en el punto en el que se ha detenido el proceso, la función de coste se hace cero. No obstante, aún siendo posible detectar esta situación, no existen métodos sistemáticos para salir del mínimo local en cuestión. Así, la única forma de abordar este problema consiste en reinicializar el proceso con una estimación distinta [20]. Recordaremos que, en el problema que nos ocupa, las variables a determinar son las muestras de las variables de control de la alinealidad y el periodo de oscilación o el valor de los elementos de circuito. Una forma habitual de realizar la

5.4.3. El problema de los mínimos locales

Como habrá apreciado el lector, los algoritmos descritos basan su estrategia en encontrar una secuencia de pasos de forma que, en cada uno de ellos, el valor de la función coste asociada decrezca. No es difícil llegar a ver que, en el mejor de los casos, esta forma de proceder únicamente garantiza llegar a un mínimo local de la función de coste, siendo posible y, por otro lado, frecuente que este mínimo no sea una solución del problema original $g(x)=0$. Como ilustración de este problema, considérese la resolución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}f_1(x,y) &= x + 3 \sin(x+y) \\f_2(x,y) &= y - \sin(x)\end{aligned}\tag{5.18}$$

La única solución del sistema de ecuaciones (5.18) se da para $x=y=0$. No obstante, la función de error asociada presenta varios mínimos locales, como se ilustra en la figura (5.3).

Sobre esta curva se aprecia con claridad la estrategia que siguen los distintos algoritmos. En primer lugar cabe destacar el comportamiento, virtualmente aleatorio, del método de Newton clásico: tras unas pocas iteraciones los sucesivos puntos obtenidos incluso caen fuera del margen de valores representado. Mucho más ordenado parece el algoritmo de búsqueda en la dirección de Newton, aunque cabe destacar que las primeras iteraciones presentan cambios de dirección muy acusados, una característica poco deseable. Asimismo, conviene destacar el hecho que este método, pese a encontrarse en cierto momento próximo al mínimo local situado en (7.24,3.54), abandona este valle saltando una zona en la que la función crece apreciablemente. Por contra, en la figura (5.18) destaca a simple vista la evolución, mucho más suave, del método de los pasos óptimos aproximados. En efecto, la limitación en cuanto a la distancia máxima a recorrer, por un lado frena el progreso del algoritmo pero, por otro, produce trayectorias con menos cambios de dirección.

estimación inicial consiste en asignar a las variables formas de onda sencillas, como sinusoides o señales cuadradas. Los parámetros que caracterizan estas formas de onda, tales como la amplitud y la posible componente continua, se obtienen a partir de análisis elementales sobre el circuito. En esta situación, cuando se detecta la convergencia a un mínimo local, es razonable pensar en modificar algunos de estos parámetros, una alternativa mucho más inmediata que elegir muestras de otra posible forma de onda. Asimismo, la estimación del periodo de oscilación se realiza a partir de notables simplificaciones del circuito, siendo habitual que esta estimación inicial esté alejada de la verdadera solución, especialmente en el caso de circuitos fuertemente alineales. Así, otra alternativa para salir de un mínimo local consiste en repetir el proceso para estimaciones iniciales del periodo distintas.

Al abordar problemas de optimización, esta situación puede solventarse de forma distinta. Para ilustrar esta idea, supóngase el siguiente escenario. Se ha simulado el comportamiento de determinado oscilador. A continuación se desea modificar su frecuencia de oscilación en un 50%. Partiendo de los valores utilizados en la fase de análisis, se inicia el algoritmo de solución, llegándose a un mínimo local. Es fácil intuir que esta situación se daría con menor probabilidad si el cambio deseado en la frecuencia de oscilación fuera menor. Por tanto, una posible vía de solución consistiría en dividir el problema global en varios problemas parciales, donde cada uno de ellos es más fácilmente resoluble.

Ahora, es posible diseñar incluso algoritmos completos basados en esta idea, por otro lado sencilla, de dividir un problema complejo en una sucesión de problemas más sencillos. Los métodos que siguen este camino se denominan *métodos de continuación*. El objeto del siguiente apartado es describir la implementación de algunos algoritmos basados en estas ideas.

5.5. Métodos de continuación

Bajo el epígrafe de métodos de continuación se conoce una clase de algoritmos cuyo objetivo, esencialmente, es resolver el problema

$$g(\mathbf{x})=0$$

mediante la solución de sucesivos problemas intermedios de complejidad menor.

El objetivo del presente apartado es presentar la esencia de estos métodos de forma muy breve y esquemática ya que su estudio detallado supera el ámbito de este trabajo. Una primera introducción es la presentada por Richter *et al.* [59] mientras que una descripción exhaustiva de los métodos de continuación puede encontrarse en el artículo de Allgower *et al.* [1].

Para ilustrar la idea subyacente en estos métodos, considérese la función

$$h(\mathbf{x},t)=g(\mathbf{x})-(1-t)g(\mathbf{x}_0) \quad (5.19)$$

construida a partir del problema $g(\mathbf{x})=0$. En esta expresión \mathbf{x}_0 es un vector arbitrario que, en la práctica, corresponde a una estimación inicial del problema original.

Es inmediato comprobar que la solución de $h(\mathbf{x},t)=0$ es obvia en el caso particular de $t=0$. Asimismo puede verificarse que el problema $h(\mathbf{x},1)=0$ no es más que el problema original. Nótese que (5.19) es la expresión de una curva, definida por un parámetro t . Así, al definir la función $h(\mathbf{x},t)$ se ha traducido el problema original, consistente en determinar un vector \mathbf{x}^* , en el de seguir la curva definida por (5.19) desde $t=0$ hasta $t=1$. La forma más inmediata para abordar este problema consiste en construir una sucesión de valores, t_k entre 0 y 1 y abordar la resolución del problema (5.19) utilizando la solución del problema para t_{k-1} como punto de partida para el problema k -ésimo.

Es a destacar la extraordinaria arbitrariedad con la que se ha introducido el parámetro t para reformular el problema original en uno de continuación. En efecto, no es difícil construir una función $h(\mathbf{x},t)$ que satisfaga la exigencia $h(\mathbf{x},1)=g(\mathbf{x})$ y que el problema $h(\mathbf{x},0)=0$ sea fácilmente resoluble. Existen, sin embargo, numerosas situaciones en las que, en la propia estructura del problema,

interviene un parámetro con significado físico que permite la aplicación inmediata de estas ideas.

5.5.1. Continuación sobre un parámetro físico

Para presentar la idea de fondo, resultará ilustrativo considerar un problema particular, el oscilador de van der Pol. Como ya se ha apuntado, el oscilador de van der Pol presenta una gran riqueza de comportamientos, que vienen gobernados por el parámetro μ de la alinealidad. A medida que μ aumenta, las formas de onda pierden el carácter sinusoidal obtenido para $\mu \sim 0$ para convertirse en señales con flancos cada vez más abruptos. Es fácil intuir que, si la estimación inicial se realiza con sinusoides, las dificultades para alcanzar la convergencia aumentan conforme aumenta μ . Así, por ejemplo, para valores de $\mu=10$, es habitual que los algoritmos globalmente convergentes que se han descrito queden atrapados en un mínimo local partiendo de una estimación inicial *sinusoidal*.

Ahora bien, el problema de la determinación de las formas de onda para $\mu=10$ puede abordarse planteando, en primer lugar, el problema para $\mu=0.1$. Dado que, en este caso, la alinealidad es poco activa, las formas de onda resultantes serán aproximadamente sinusoidales. Por tanto, es de esperar que se produzca la convergencia partiendo de estimaciones iniciales de la misma forma. Una vez obtenida la primera forma de onda, con el periodo correspondiente, ésta puede utilizarse como estimación inicial para el problema de $\mu=1$ y así sucesivamente, para valores $\mu=4$, $\mu=6$, $\mu=8$ y, finalmente, $\mu=10$. Así, para cada valor de μ se obtiene un vector solución distinto, de forma que la solución del problema así planteado define una curva en un espacio n -dimensional en función del parámetro μ .

5.5.2. El método de Davidenko

En vez de seguir la curva

$$h(x(t), t) = 0$$

para un conjunto discreto de valores de t , como se ha propuesto hasta este momento, existe la posibilidad de seguir la curva de forma continua. En efecto, derivando la expresión de esta curva respecto a t , se obtiene

$$J(x) \frac{dx}{dt} + g(x_0) = 0$$

expresión que puede interpretarse como la integración de una ecuación diferencial con la condición inicial $x(0) = x_0$.

En caso de que el jacobiano $J(x)$ sea no singular, es posible resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -J^{-1}(x(t))g(x_0), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

mediante cualquier algoritmo standard de integración numérica, por ejemplo, el método de Gear de orden 2. Procediendo de esta forma, el valor de x en el instante $t=1$ coincidirá con la solución del problema original.

La aplicación de esta técnica no está exenta de dificultades, algunas de las cuales apuntamos brevemente y cuya solución eficaz sigue siendo objeto de estudio [1, 59]. Entre ellas figura, por un lado, la propia dificultad de integrar un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución puede presentar discontinuidades. Por otro lado, está la posibilidad de que el jacobiano se haga singular. En este caso, la mejor estrategia consiste en cambiar el tipo parametrización para remover la singularidad. En esta línea, una alternativa aplicada en [31] es la parametrización respecto a la longitud de arco, aunque esta técnica presenta el inconveniente de exigir realizar una integración numérica en un intervalo cuya longitud se desconoce a priori y que puede llegar a ser desorbitada.

5.5.3. Continuación sobre el periodo de muestreo

En el contexto de esta tesis, se ha desarrollado una técnica que permite aumentar significativamente la eficacia del proceso de solución. Dado que la solución del problema final también se obtiene a través de una secuencia de problemas intermedios, incluimos este método en el grupo de métodos de continuación, aunque el proceso que se sigue es distinto a lo que habitualmente se asocia bajo este nombre.

La idea que sirve de base a este método no es otra que la constatación de que, en general, un problema es más fácilmente resoluble cuanto menor sea el número de incógnitas que en él aparecen. En este trabajo, el número de variables a determinar está en relación directa con la exactitud deseada en los resultados. En efecto, al aumentar o reducir el número de muestras por periodo, se reproducen con mayor o menor fidelidad las formas de onda que son solución del problema original. Ya se ha apuntado que el número de muestras por periodo debe cumplir, de forma aproximada, el criterio de Nyquist, con el fin de prevenir el solapamiento de espectros. Denominemos N^* al número de muestras por periodo necesarias en un determinado problema.

Desde el punto de vista de la eficiencia de cálculo, puede ser rentable determinar la solución utilizando un número de muestras inferior a N^* , aún sabiendo que se obtendrán resultados inexactos. En efecto, esta solución puede refinarse sucesivamente. Para ello, el problema siguiente se planteará con un número superior de muestras que serán inicializadas a partir de una interpolación de las anteriores manteniéndose inalterados los parámetros restantes. Aunque las primeras muestras obtenidas tal vez aún no representen adecuadamente la solución del problema, una interpolación de las mismas estará, en general, *más próxima* a la solución que cualquier estimación inicial obtenida por otros métodos. De esta forma, la probabilidad de que el algoritmo de solución quede atrapado en un mínimo local disminuye considerablemente. Repitiendo este proceso se obtiene una secuencia de formas de onda, cada vez con mayor número de muestras, que, finalmente, conduce a la solución del problema con N^* muestras por periodo. La aplicación de esta idea reportará notables ventajas, como se comprobará en el capítulo 6.

5.6. Métodos basados en la difusión simulada

Los métodos presentados hasta este punto presentan el denominador común de estar descritos mediante ecuaciones determinísticas. No obstante, existen algoritmos denominados *estocásticos* cuya esencia consiste en introducir adecuadamente componentes aleatorias en algún punto del proceso iterativo.

5.6.1. Métodos estocásticos

Los métodos estocásticos aparecen originalmente para resolver el problema de encontrar el mínimo *global* de una función de coste. Para ilustrar esta situación es útil referirse a la figura 5.4.

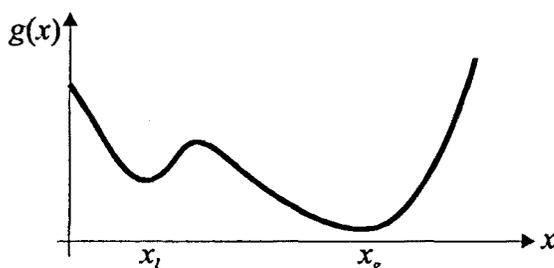


Figura 5.4. Función de coste con un mínimo local.

Como es conocido, un proceso de optimización clásico iniciado en $x=0$ conduciría probablemente al mínimo local x_l . Ello es debido a que los métodos clásicos siempre rechazan los pasos que conducen a puntos *peores* que el actual. Por contra, la idea que se encuentra detrás de los métodos estocásticos es permitir que, bajo ciertas condiciones, se visiten zonas del espacio de diseño que aparentemente son peores. Al abrirse la posibilidad de superar las cimas que rodean los mínimos locales, cabe aspirar a llegar al mínimo global.

Un algoritmo que lleva estas ideas a su extremo es el conocido bajo el nombre de *simulated annealing**. Este método consiste en explorar todo el espacio de diseño realizando pasos aleatorios. Si un determinado paso se traduce en un decremento de la función objetivo, el nuevo punto es aceptado. En caso contrario,

* Se denomina *annealing* al lento proceso de enfriamiento a que se somete un metal fundido con el fin de conseguir que solidifique en una estructura cristalina de mínima energía.

el nuevo punto se acepta con una probabilidad que es tanto menor cuanto mayor sea el incremento producido en la función objetivo. Concretamente, el paso se acepta con probabilidad

$$p = e^{-\frac{\Delta g}{T}}$$

donde el parámetro T , denominado *temperatura* del sistema, se decrementa adecuadamente a medida que se avanza en el proceso de optimización.

Efectivamente, esta estrategia de aceptación y rechazo permite escapar de posibles mínimos locales. Asimismo es posible demostrar que mediante una técnica de enfriamiento adecuada, se alcanza el óptimo global independientemente de la estimación inicial efectuada [14]. Por otro lado, cabe señalar que en un problema de optimización general no es posible detectar cuándo se ha llegado al mínimo global, siendo necesario inferir esta situación a partir del hecho que ya no se producen progresos apreciables y que la temperatura es suficientemente baja.

Al tratarse de un método en el que los pasos intentados son siempre aleatorios su aplicación conlleva un coste computacional muy elevado. Una forma de mejorar notablemente la eficacia del proceso consiste en realizar pasos que sean una combinación de términos aleatorios y determinísticos, donde estos últimos se obtendrían, por ejemplo, a partir de alguna de las técnicas clásicas. La componente aleatoria es la que permitiría visitar todo el espacio de diseño. Reduciendo adecuadamente la amplitud de los términos aleatorios a medida que se avanza en el proceso se llegaría finalmente a un mínimo global. La implementación de estas ideas se conoce bajo el nombre de *difusión simulada*.

Cabe señalar asimismo, que, a diferencia de como ocurre en el marco de la optimización, el único en el que, según nuestro conocimiento, se han utilizado estas técnicas, en el problema de resolución de ecuaciones es posible detectar fácilmente cuándo se ha alcanzado la convergencia, ya que en esta situación el valor de la función coste asociada es cero. Este hecho se traduce en una drástica reducción del tiempo total de cálculo al permitir finalizar el proceso iterativo mucho antes de lo que sería posible sin esta información.

5.6.2. La difusión simulada

En primer lugar, se describirá la idea sobre la que se basa el método. En esencia, el método de difusión simulada imita el comportamiento de una partícula dotada de movimiento browniano y sometida a un potencial. El proceso de difusión de esta partícula, en una sola dirección, puede describirse por la expresión

$$dx = -\nabla g(x)dt + \sqrt{2T}dw \quad (5.20)$$

donde la variable t es el tiempo, x es la posición de la partícula $g(x)$ es el perfil de potencial al que está sometida la partícula, T es la temperatura y dw es ruido gaussiano. El primer término, proporcional al gradiente de potencial, provoca el arrastre de la partícula, mientras que el segundo término corresponde al movimiento browniano aleatorio. Si la temperatura es elevada, el término dominante corresponde al movimiento aleatorio mientras que, a temperatura cero, únicamente resta el término en la dirección de máxima pendiente. Ya se puede adelantar que el segundo término, será útil para salir de los posibles mínimos locales mientras que el primero aseguraría la consecución de un mínimo.

Con una estrategia de enfriamiento adecuada, puede demostrarse que la función de distribución de probabilidad de x presenta picos alrededor de los mínimos globales de $g(x)$, independientemente del valor inicial. Esto sugiere que, integrando la ecuación (5.20) durante un intervalo de tiempo suficientemente grande, es posible encontrar el mínimo global de la función. Esta vía ha sido seguida por algunos autores con resultados satisfactorios. No obstante, el proceso de integración resulta costoso en cuanto a carga computacional.

Una vía para reducir el coste de cálculo asociado a este problema consiste en adaptar la formulación para obtener expresiones que puedan ser resueltas mediante redes neuronales artificiales. Esta idea se desarrolla extensamente en [14], aunque su realización tiene lugar en el plano de la simulación, con lo que el problema revierte nuevamente en un largo proceso de integración. Así, únicamente se producirá una mejora significativa en cuanto a eficacia en la medida en que se disponga de realizaciones *hardware* de dichas redes neuronales.

Existe aún otra alternativa para evitar la integración directa de la ecuación (5.20), descrita recientemente por Sakurai *et al.* en [63]. Su estrategia, denominada

fast simulated diffusion (FSD) parte de dos modificaciones importantes de la formulación original. En primer lugar se introduce una regla de aceptación o rechazo basada en una distribución de Boltzmann, utilizada también en el método de *simulated annealing* (SA). Así, una vez se ha obtenido un nuevo punto $x_+ = x_c + dx$ éste se acepta según el siguiente criterio: si $f(x_+) < f(x_c)$, entonces se acepta $x_c = x_+$; en caso contrario, se genera un número aleatorio $r \in [0, 1]$ aceptándose $x_c = x_+$ si

$$r < \exp\left(\frac{g(x_+) - g(x_c)}{T}\right)$$

mientras que, en caso contrario, se calcula otro punto. De esta forma, cuanto mayor sea el incremento que se produce en la función de coste, tanto menor es la probabilidad de aceptar dicho paso, con lo que los pasos especialmente *malos* prácticamente no se toman nunca.

La segunda modificación se introduce a la hora de calcular el nuevo candidato x_+ . La expresión (5.20) insta a calcular dos términos, uno en la dirección de máxima pendiente y otro aleatorio y sumar ambas contribuciones. No obstante, globalmente resulta más eficaz utilizar de forma *alternada* los términos descendente y aleatorio que, en lo sucesivo, se denominarán, respectivamente, paso *inteligente* y paso *aleatorio*. Generando un paso en la dirección de máxima pendiente y el siguiente de forma aleatoria es posible conseguir decrementos en la función de coste incluso cuando la amplitud del término aleatorio es elevada, al contrario de como ocurriría con la simple adición de ambos términos donde la componente aleatoria puede enmascarar la componente inteligente, con el resultado final de que numerosos pasos son rechazados. Así, un primer prototipo de algoritmo basado en esta estrategia sería de la forma siguiente.

1. Inicializar parámetros del algoritmo
2. $k=0$
3. Mientras no se encuentre el óptimo hacer
 - 3.1. $k=k+1$
 - 3.2. Si k es impar entonces dx =término aleatorio;
sino dx =término inteligente
 - 3.3. $x_+=x_c+dx$
 - 3.4. si $g(x_+) < g(x_c)$ entonces $x_c=x_+$
sino,
 - 3.4.1. generar un número aleatorio r entre 0 y 1.
 - 3.4.2. calcular $p=\exp((g(x_+)-g(x_c))/T)$
 - 3.4.3. si $r < p$ entonces $x_c=x_+$
sino, se descarta x_+ y se mantiene x_c
 - 3.5. Actualizar parámetros

En la implementación realizada se han recogido estas ideas. Asimismo, teniendo en cuenta la especial estructura del problema a resolver, se han introducido algunas modificaciones adicionales que mejoran sustancialmente la eficacia del algoritmo. La primera modificación hace referencia al cálculo *inteligente* del nuevo candidato. En efecto, en numerosas aplicaciones el coste de cálculo asociado a la determinación del gradiente de la función objetivo es muy elevado, siendo necesario recurrir a direcciones descendentes en las direcciones de los ejes coordenados. En el problema que nos ocupa la obtención de pasos inteligentes no supone ninguna dificultad. Asimismo conviene recalcar que los métodos de SA y FSD tienen su origen en el problema de la minimización de funciones: En nuestro caso, el problema original es la solución de un sistema de ecuaciones, habiéndose introducido una función de coste con el único fin de poder comparar distintos vectores candidatos. Por tanto, con poco esfuerzo de cálculo es posible disponer no sólo de la *dirección* de máxima pendiente, sino del *paso* de Newton, con lo que, en un primer momento, puede obviarse el problema de la distancia a recorrer. Especialmente atractivo es el hecho que, siguiendo esta estrategia, no es necesario preocuparse por si el paso de Newton es o no decreciente: si, en verdad, resulta decreciente, entonces será aceptado en la fase de test mientras que, en caso contrario, el resultado neto final será equivalente a si se hubiera efectuado un paso aleatorio.

Con notable éxito se ha experimentado asimismo la determinación del paso inteligente, no mediante *un* paso de Newton sino mediante una *sucesión* de ellos. Procediendo de esta forma, cuando una iteración conduce a la zona de convergencia del método de Newton, es altamente probable que se llegue a la solución de forma muy rápida. Sin embargo, es conveniente limitar el número máximo de pasos consecutivos de Newton con el fin de no invertir un tiempo excesivo en obtener puntos de los que se saldrá a continuación por efecto del término aleatorio. En la práctica se ha comprobado que realizar de 3 a 5 pasos de Newton seguidos supone un buen compromiso entre ambos objetivos.

Siguiendo en esta línea de razonamiento, cabría pensar en llevar esta idea a su límite: cada vez que hay que calcular un paso *inteligente*, se inicia un algoritmo globalmente convergente que nos conducirá, bien a la solución del problema, bien a un mínimo local. En este último caso, cabría esperar que los términos aleatorios salvarían la situación en iteraciones posteriores. Aunque, efectivamente, esta estrategia proporciona buenos resultados, su implementación dista mucho de ser óptima debido al coste de cálculo, relativamente elevado, que supone realizar una minimización completa en cada iteración.

Por otro lado, queda por describir el proceso por el cual se inicializa la temperatura del sistema. Ya se puede adelantar que la inicialización del parámetro temperatura es un proceso heurístico, aunque es posible seguir algunas pautas generales. En efecto, la temperatura inicial debe ser tal que, en las primeras iteraciones, permita visitar todo el espacio de diseño de interés. Para conseguir este objetivo, en primer lugar se realiza una exploración aleatoria con el fin de detectar, de forma aproximada, el orden de magnitud de las variaciones que sufre la función objetivo. A partir de esta información, Sakurai *et al.* [63] proponen que la temperatura inicial sea 0.2 veces la desviación standard de los valores de la función. Aunque este criterio no tiene en cuenta que el valor mínimo de la función coste es cero, los resultados que se obtienen de su aplicación son satisfactorios, aunque con una tendencia a resultar excesivamente conservadores en el sentido de que habitualmente una temperatura inferior proporcionaría el mismo resultado final con menor coste.

Finalmente, es necesario hacer algunas consideraciones sobre la forma en que se irá enfriando el proceso. Para ello, en primer lugar, conviene señalar que el proceso iterativo consiste realmente de dos iteraciones anidadas: en la iteración

exterior se controla básicamente la temperatura del sistema mientras que en el bucle interior se efectúa un cierto número de pasos, alternativamente inteligentes y aleatorios, a temperatura constante. La técnica propuesta en [63] para la actualización de la temperatura se basa en el siguiente razonamiento. Después de efectuadas las iteraciones a temperatura constante, se compara el mínimo valor de la función de coste obtenido hasta el momento con el mínimo que se tenía anteriormente. Si el decrecimiento es considerable, entonces se disminuye geoméricamente el valor de la temperatura. Si el decrecimiento no es considerable, ello puede ser indicio de que se está cerca de un mínimo, tal vez local. En las primeras iteraciones en las que se detecta este estancamiento después de una fase de decrecimientos importantes, se aumenta la temperatura para facilitar la salida del mínimo en caso de que éste sea, efectivamente, local. No obstante, si la situación se repite más allá de un cierto número de veces, conviene enfriar progresivamente el sistema hasta llegar a temperatura cero, ya que se tratará, muy probablemente, del mínimo global. Este extremo se utiliza asimismo, para detectar la convergencia. En este trabajo, se ha preferido un criterio distinto.

Cabe recordar que, al abordar un problema general de optimización no hay forma de conocer cuál será el valor mínimo global de la función de coste y, por tanto, es necesario tomar medidas como las descritas. No obstante, en el problema de la resolución de ecuaciones no lineales, es posible detectar que se ha llegado a un mínimo local gracias a la valiosísima información de que el valor mínimo de la función coste asociada es igual a cero. Así, en la implementación efectuada, en cada iteración externa se disminuye geoméricamente la temperatura del sistema, a menos que se detecte un mínimo local, en cuyo caso ésta se aumenta para permitir la salida del mismo.

A continuación se presenta el algoritmo implementado, donde aparecen reflejadas las consideraciones antes expuestas.

```

    fr={valor de la función en Ni puntos aleatorios}
xc={el mejor de los puntos hallados}
Ti=0.2*std(fr)
Si=maxX/3;
S=Si
Mientras no se detecte convergencia, hacer
    k=0
    Repetir a temperatura constante c*N veces {c~5}
        k=k+1
        x+=generar_vector
        dg=g(x+)-g(xc)
        si dg<0
            xc=x+
            si es el mejor de todos, entonces xopt=xc
        sino,
            aceptar xc=x+ con probabilidad
                p=exp(dg/T)
        fin
    fin del bucle a temperatura constante
    {retomar el valor óptimo:xc=xopt}
    {enfriar el sistema: T=T*fac, fac=0.75..0.95}
    {reducir la amplitud de los términos aleatorios de
        forma similar a T: S=Si*(T/Ti)^0.75}
    {si la amplitud de los términos aleatorios es pequeña
        y no se ha alcanzado la solución, aumentar T=[T,Ti]}
    fin del bucle principal

```

Finalmente, se reproduce el algoritmo para la generación de nuevos vectores, generar_vector

```

funcion  $x_+$ =generar_vector
Si son las primeras iteraciones, HACER=aleatorio
en caso contrario,
    si k es par, HACER=aleatorio
    si k es impar HACER=inteligente.
Si HACER=aleatorio,
     $x_+=x_c+\{\text{vector aleatorio n-dimensional, gaussiano,}$ 
        de media 0 y varianza S}
Si HACER=inteligente, (hay varias opciones válidas)
    a) Tomar un paso de Newton, aunque la función pueda
        aumentar
    b) Tomar uno o más pasos de Newton si van resultando
        decrecientes (limitar a un máximo de 3 ó 5)
    c) Iniciar un algoritmo que converja a un mínimo (ya
        sea local o global)

```

Con el fin de ilustrar los resultados obtenidos por la aplicación de este algoritmo, en la figura 5.5 se presentan la evolución del mismo sobre el problema (5.18).

En esta figura se aprecia la evolución del algoritmo partiendo del punto inicial (5,8), siendo destacable la forma en que es barrido el espacio de diseño para, finalmente, llegar al mínimo global situado en (0,0).

Es necesario advertir que la implementación de algoritmos estocásticos presenta una problemática distinta a la de los algoritmos determinísticos. En especial destaca la no repetibilidad de los experimentos aún partiendo de condiciones iniciales idénticas. La presencia de componentes aleatorias puede llegar a provocar que un determinado experimento tenga éxito o fracase sin que por ello sea posible sacar conclusiones acerca de la bondad de la implementación. En el marco de los métodos estocásticos se define como parámetro de mérito la *probabilidad* de alcanzar el mínimo global. Teóricamente el algoritmo FSD garantiza la consecución del mínimo global con probabilidad igual a la unidad siempre que se utilice una estrategia de enfriamiento suficientemente conservativa [63]. La implementación descrita desarrolla una eficacia similar con un coste menor.

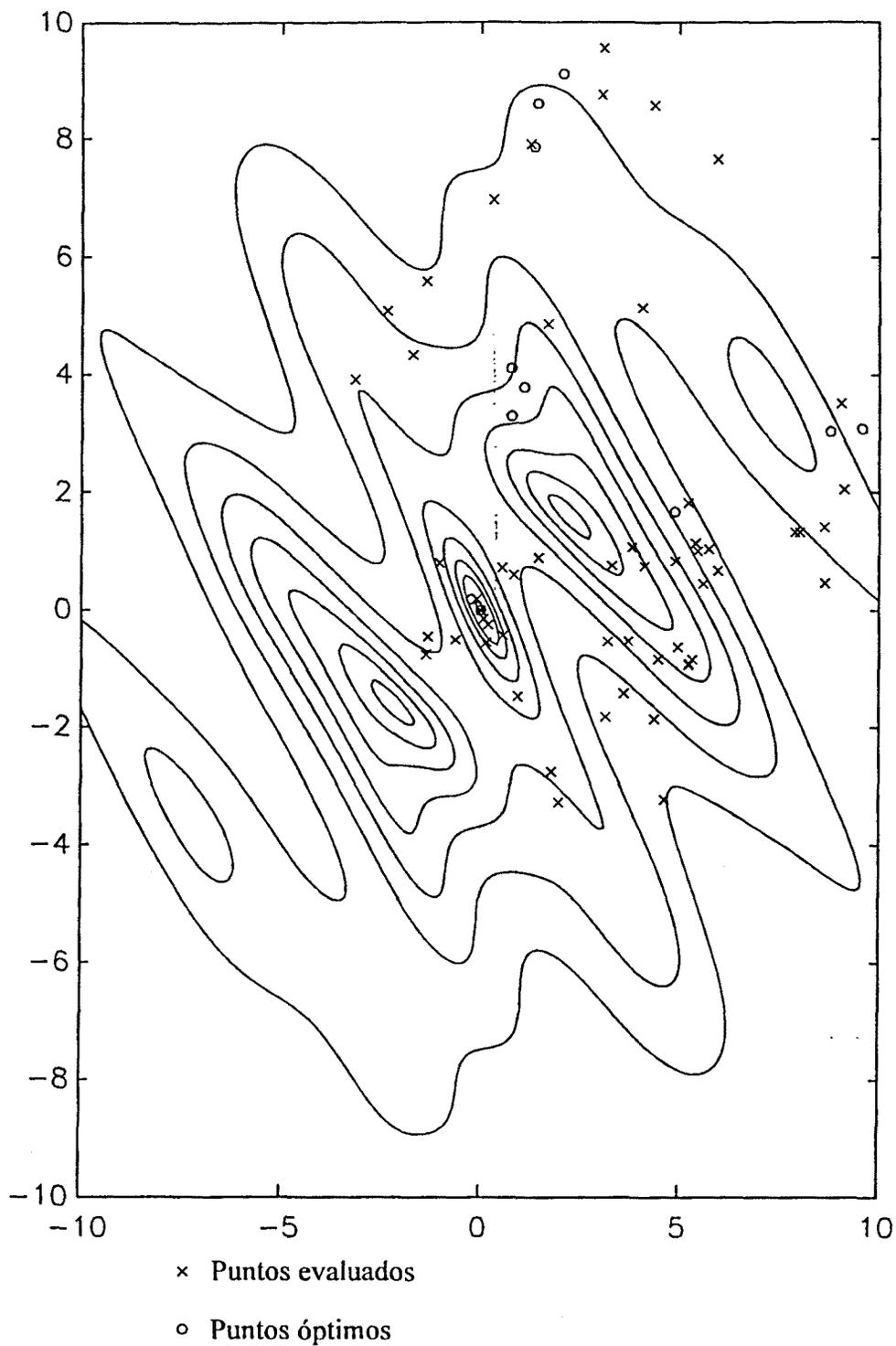


Figura 5.5. Evolución del algoritmo de difusión simulada sobre el problema (5.18). Los puntos marcados con un aspa corresponden a los sucesivos vectores generados, mientras que los marcados con un círculo representan los distintos vectores que han resultado ser óptimos en algún momento.

Capítulo 6

APLICACIONES

Con el fin de validar la técnica propuesta se presentan algunos ejemplos de análisis y optimización. Uno de los problemas clásicos, utilizado como banco de pruebas para los distintos algoritmos de análisis de circuitos no lineales [3, 31, 43, 65], es el oscilador de van der Pol. Estrictamente hablando, en este problema se trata de resolver una ecuación diferencial, denominada ecuación de van der Pol, que aproxima el comportamiento de determinados circuitos. Históricamente, esta ecuación aparece al estudiar el comportamiento de un oscilador sinusoidal utilizando un triodo como elemento activo. Posteriormente se ha verificado que el comportamiento de una amplia clase de osciladores basados en elementos no lineales de dos terminales, tales como diodos túnel, viene descrito por la misma ecuación, sin más que realizar algunas aproximaciones en la característica del elemento no lineal. Por estos motivos, se presentarán, en primer lugar, los resultados obtenidos del análisis de este oscilador. Como se comprobará, en el campo del *análisis*, la técnica descrita, resultado de la reformulación y la extensión a los circuitos autónomos del método propuesto en [27], resulta claramente competitiva con las técnicas habituales [31, 43]. No obstante, frente a éstas destaca, de forma especial, la extrema eficacia con la que es posible modificar el valor de un elemento de circuito —otra de las aportaciones de esta tesis— para conseguir que la frecuencia de oscilación sea la especificada por el diseñador. La eficacia al abordar este problema es fruto de la técnica utilizada para su planteamiento, donde se llega a formular un sistema de ecuaciones cuyo jacobiano, además de ser obtenible a un coste prácticamente nulo, presenta una estructura que permite el cálculo de los pasos de Newton con especial eficiencia.

Por otro lado, entre los osciladores de radiofrecuencia más habitualmente utilizados figura el oscilador de Colpitts. Así, este oscilador también ha sido ampliamente estudiado haciendo uso de las diversas técnicas existentes [3, 33, 65, 70]. Para ilustrar la aplicación del método descrito a un circuito con múltiples alinealidades, se trabajará sobre una implementación concreta en la que el elemento activo es un transistor bipolar. Este se ha modelado por las ecuaciones de Ebers-Moll, resultando un circuito equivalente con dos alinealidades muy fuertes. A pesar de ello, la simulación no presenta dificultades, a diferencia de como ocurre con la aplicación de algunas técnicas de análisis. Nuevamente, se ilustra la eficacia de la formulación descrita en el campo de la ayuda al *diseño*, al permitir el cálculo automático de elementos de circuito para satisfacer una determinada frecuencia de oscilación.

Recientemente se ha descrito una clase de osciladores sinusoidales que hacen uso exclusivo de amplificadores operacionales de transconductancia (OTA) y condensadores [40], razón por la cual resultan especialmente atractivos con vistas a su integración monolítica. Estos osciladores, conocidos bajo el nombre de TACO (osciladores realizados mediante la interconexión de condensadores y amplificadores operacionales de transconductancia) presentan notables ventajas respecto a otras implementaciones activas RC. Entre éstas, cabe destacar el margen de frecuencias de utilización, del orden de las decenas de megaherzios, y la posibilidad de ajustar con relativa facilidad la frecuencia de oscilación aprovechando la controlabilidad de la transconductancia de los OTA. Parte de este capítulo se dedica al análisis y el ajuste de los valores de los elementos de una estructura TACO particular haciendo uso de la técnica propuesta.

6.1. El oscilador de Van der Pol

6.1.1. Análisis de la respuesta periódica del oscilador de Van der Pol

Las ecuaciones de equilibrio que rigen el comportamiento de ciertos circuitos no lineales autónomos, pueden aproximarse por una ecuación diferencial, denominada ecuación de van der Pol, de la forma

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (6.1)$$

Esta ecuación diferencial admite el siguiente modelo circuital

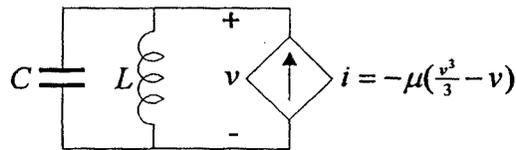


Figura 6.1 Oscilador de van der Pol

con $L=1$, $C=1$ y donde se identifica la variable de control de la alinealidad, $v(t)$ con la variable a determinar en la ecuación de van der Pol, $x(t)$.

A pesar de su extrema sencillez, el circuito de la figura 6.1 presenta una gran riqueza de comportamientos, gobernados por el parámetro μ que define a la alinealidad. No es difícil verificar que para $\mu=0$ el circuito resultante es un oscilador sinusoidal de periodo $T=2\pi$ segundos. A medida que aumenta el valor de μ las formas de onda resultantes se asemejan a las de un oscilador de relajación, con un elevado número de componentes frecuenciales relevantes. Conviene destacar que la ecuación diferencial (6.1) se considera de difícil resolución, una de las razones por las que es utilizada como problema de test para algoritmos de resolución de ecuaciones diferenciales. Por otro lado, los resultados que se describen se centran en la respuesta periódica del circuito autónomo. El estudio de su sincronización mediante una excitación externa revierte en un problema en el que el periodo de oscilación deja de ser una incógnita y, por tanto, sería abordable como un circuito excitado*.

* El artículo de Odyniec [47] describe la teoría de osciladores LC sincronizados desde un punto de vista alternativo.

Antes de efectuar el análisis numérico del circuito, es recomendable hacer un primer estudio acerca de los comportamientos esperados del mismo. Para ello, consideremos, en primer lugar, el caso particular en el que $\mu=0$. Como ya se ha apuntado, es inmediato comprobar que, en esta situación, el elemento no lineal equivale a un circuito abierto, de forma que el circuito resultante no es más que un circuito LC paralelo sin pérdidas. Así, el periodo de oscilación resultaría de $T=2\pi$ segundos, mientras que no existe ninguna restricción en cuanto a la amplitud de las oscilaciones. Esta vendría fijada a partir del conocimiento de dos condiciones iniciales. ¿Qué otras características acerca del comportamiento del oscilador pueden preverse en este momento? Para responder a esta cuestión, puede ser conveniente referirse a la figura 6.2, donde se visualiza la característica $i-v$ de la alinealidad, en función del parámetro μ . Es fácil comprobar que, con independencia del valor de μ , se verifica que, para tensiones

$$|v| < \sqrt{3}$$

el bipolo no lineal se comporta como un elemento activo, entregando energía al resto de circuito. En esta situación, las variables de circuito tenderán a crecer, llegando a la zona en la que la alinealidad absorba energía. La existencia de este mecanismo disipativo eventualmente conduciría a las variables nuevamente hacia la zona activa, repitiéndose el proceso. La importante conclusión a extraer en este momento es que, en régimen permanente, las oscilaciones serán de amplitud suficiente como para entrar en la zona en la que el bipolo es localmente disipativo. Así, y sin realizar consideraciones más detalladas, la amplitud de las variables puede estimarse razonablemente a priori, resultando del orden de entre 1 y 2 voltios.

Asimismo, conviene destacar que las formas de onda resultantes no tendrán componente continua, ya que el circuito lineal se comporta como un cortocircuito a la frecuencia 0. Todo ello hace que la elección de un punto de paso, necesaria para introducir un número finito de soluciones, no represente dificultad alguna. En este ejemplo, se fijará el valor de la primera muestra de v igual a cero.

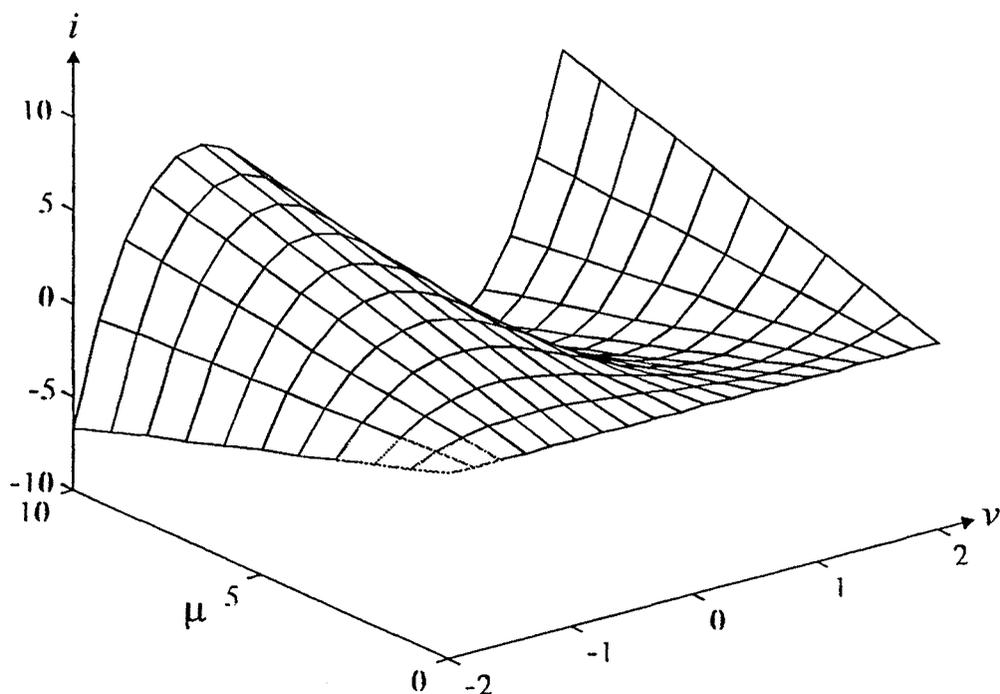


Figura 6.2 Característica $i-v$ de la alinealidad en función del parámetro μ

Sin efectuar análisis más detallados, poco puede decirse del papel que desempeña el parámetro μ . No obstante, sí puede constatar que, en las proximidades del origen, la alinealidad se comporta como una conductancia lineal de valor $\mu(v^2-1)$, valor que resulta ser tanto más negativo como mayor es μ^* . En consecuencia, a medida que aumente μ , el circuito es más inestable, con lo que las variables abandonarán la vecindad del origen con más celeridad. Así, es razonable pensar que las formas de onda presentarán pendientes más acusadas en los pasos por cero conforme μ crece.

Con esta información, es posible comenzar el análisis del oscilador de van der Pol. En primer lugar se estudiará su respuesta para valores bajos de μ , por ejemplo, $\mu=0.1$. En este caso, para obtener una representación suficientemente detallada de la forma de onda, se tomarán $N=60$ muestras por periodo. La discretización del sistema se realizará aplicando la transformación de Gear de orden 2.

* Nótese que el valor de μ ha de ser positivo para que exista el mecanismo físico que conduce a la oscilación.

Según las consideraciones efectuadas, es razonable inicializar el algoritmo de resolución con las muestras de la senoide

$$v(t)=2\sin(t)$$

cuyo periodo es $T=2\pi$.

Tras efectuar dos iteraciones[#] se llega a la forma de onda representada en la figura (6.3). Con idéntica estimación inicial, para valores de $\mu=0.5$, $\mu=1$ y $\mu=2$, se llega a las formas de onda representadas en las figuras (6.4) (6.5) y (6.6) en 3, 4 y 5 iteraciones, respectivamente. Nótese que, en el caso de $\mu=2$ ya se produce una diferencia aproximada del 20% entre la estimación inicial y el valor real del periodo, sin que ello repercuta apreciablemente en la convergencia.

También con las mismas condiciones de partida se han analizado los casos $\mu=4$ y $\mu=6$ (ver figuras 6.7 y 6.8) , requiriéndose, respectivamente 13 y 17 iteraciones.

Sirva el problema con $\mu=6$ para poner de manifiesto la robustez de los algoritmos globalmente convergentes que se han implementado. En efecto, para este valor de μ la forma de onda resultante dista mucho de la senoide utilizada como estimación inicial, aunque tal vez sea aún más destacable el hecho de que el periodo obtenido sea el doble del utilizado como estimación inicial (un 103% superior).

Para valores de $\mu=8$ y $\mu=10$ la estimación inicial está lo suficientemente lejana como para que el algoritmo quede atrapado en un mínimo local. No obstante, esta situación puede solventarse sin más que utilizar el periodo y la forma de onda resultante del problema $\mu=6$ como estimación inicial, una idea descrita en el apartado de *métodos de continuación*. Procediendo de esta forma, en ambos casos bastan 4 iteraciones para obtener las formas de onda ilustradas en las figuras 6.9 y 6.10.

[#] En lo sucesivo, a menos que se indique lo contrario, las indicaciones en cuanto al número de iteraciones requeridas para llegar a los resultados que se presenten es el resultado de la aplicación del método de búsqueda en la dirección de Newton.

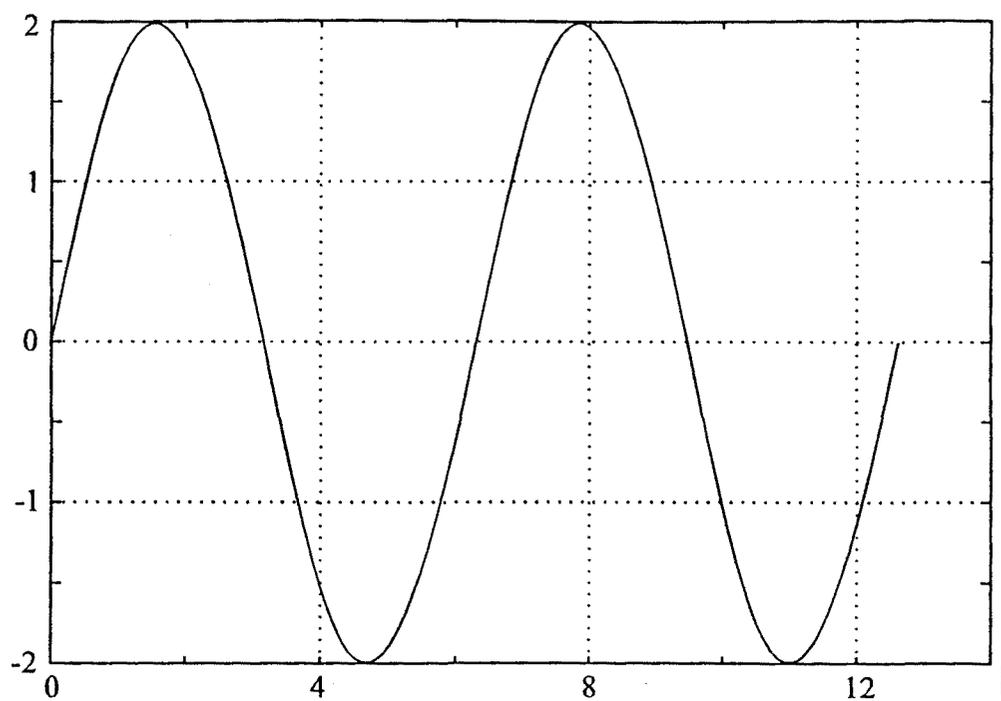


Figura 6.3. Forma de onda resultante para $\mu=0.1$ y $N=60$ muestras por periodo.

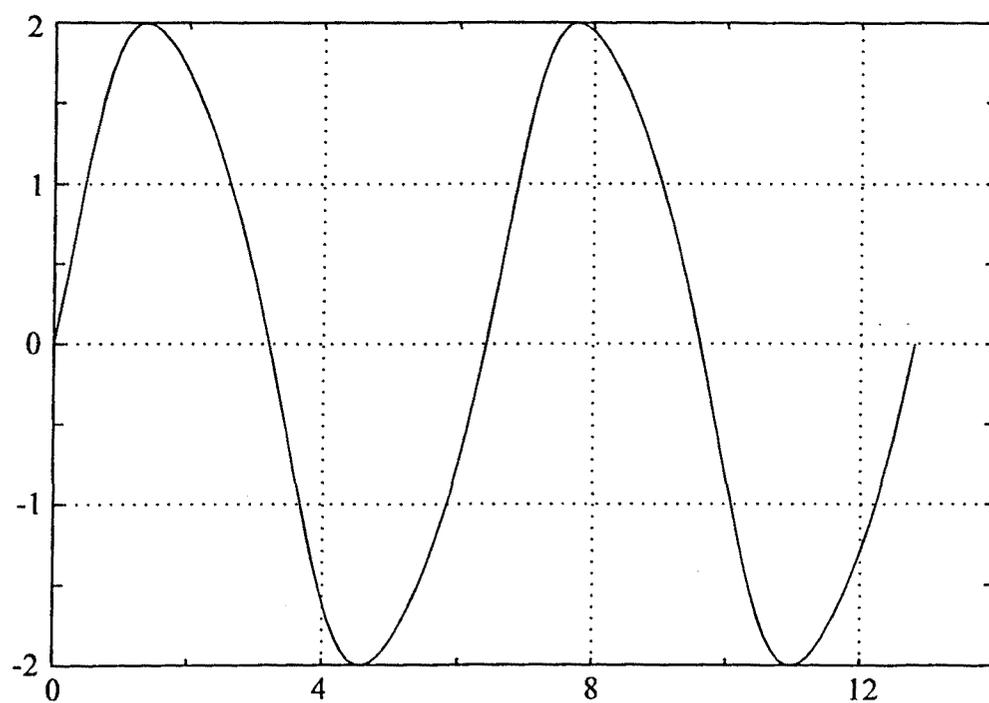


Figura 6.4. Forma de onda resultante para $\mu=0.5$ y $N=60$ muestras por periodo.

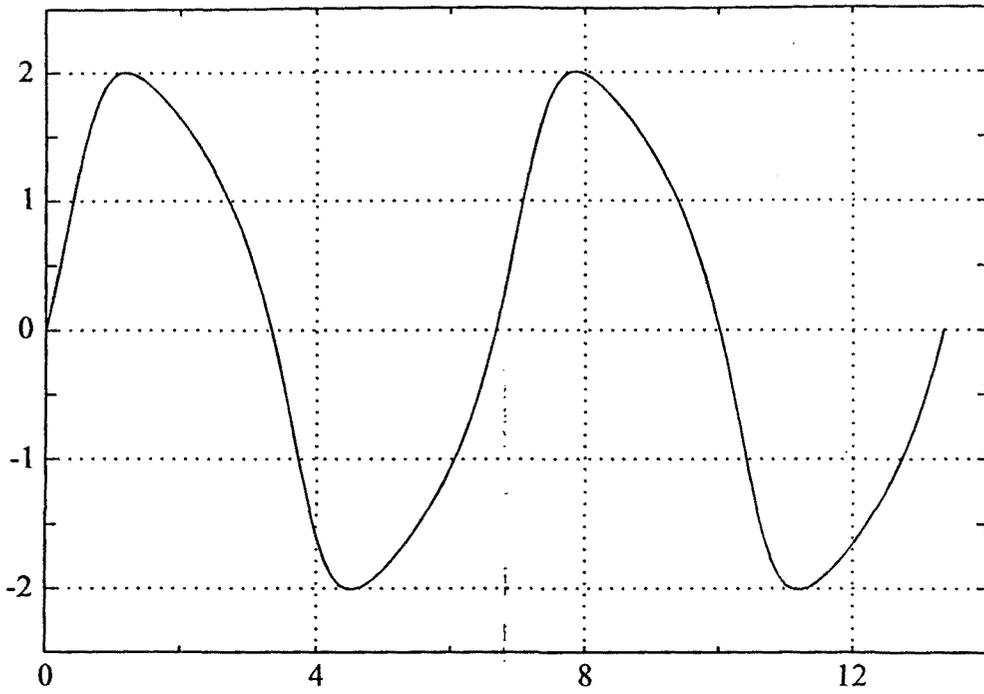


Figura 6.5. Forma de onda resultante para $\mu=1$ y $N=60$ muestras por periodo.

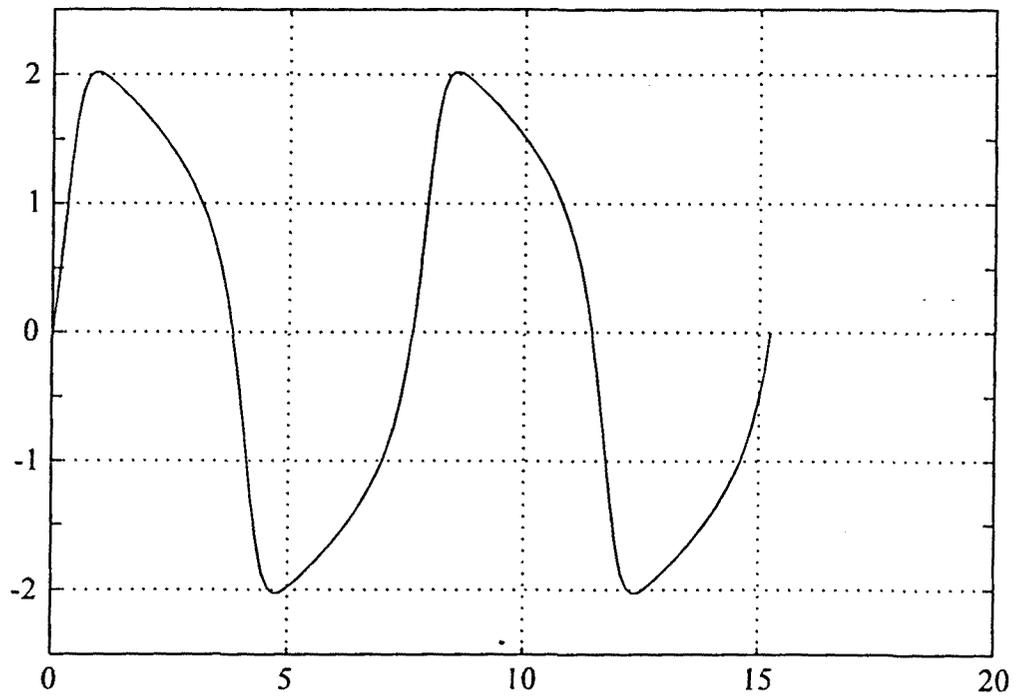


Figura 6.6. Forma de onda resultante para $\mu=2$ y $N=60$ muestras por periodo.

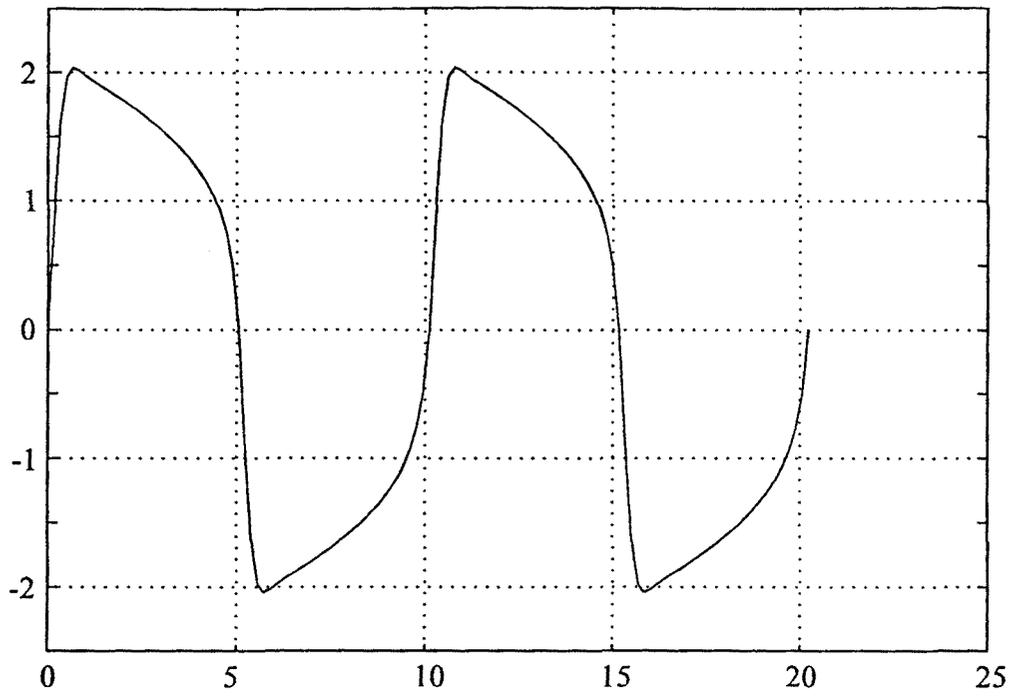


Figura 6.7. Forma de onda resultante para $\mu=4$ y $N=60$ muestras por periodo.

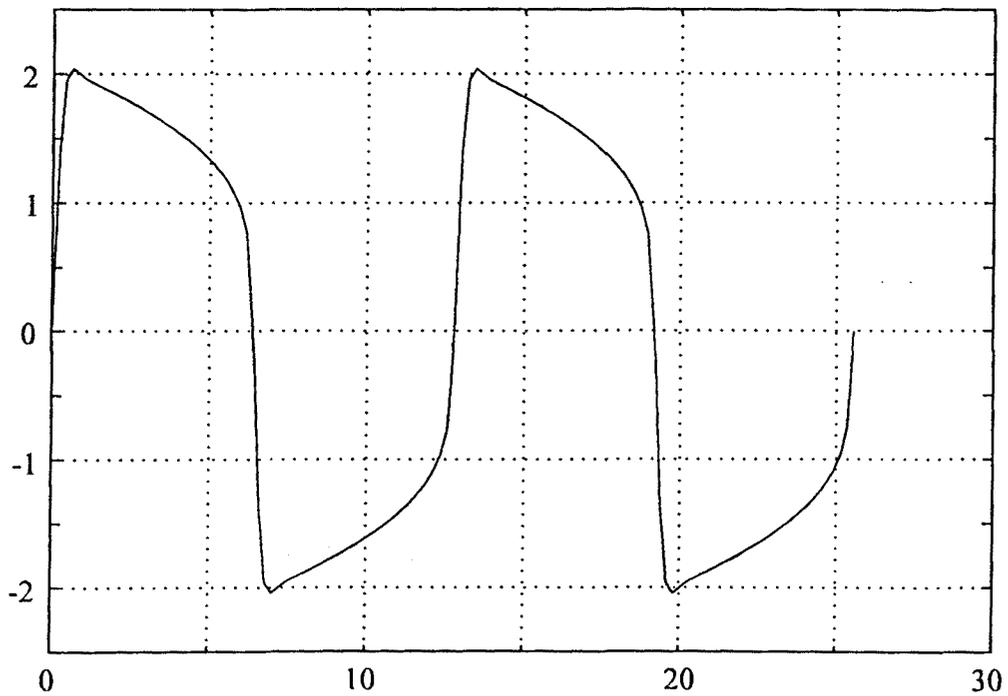


Figura 6.8. Forma de onda resultante para $\mu=6$ y $N=60$ muestras por periodo.

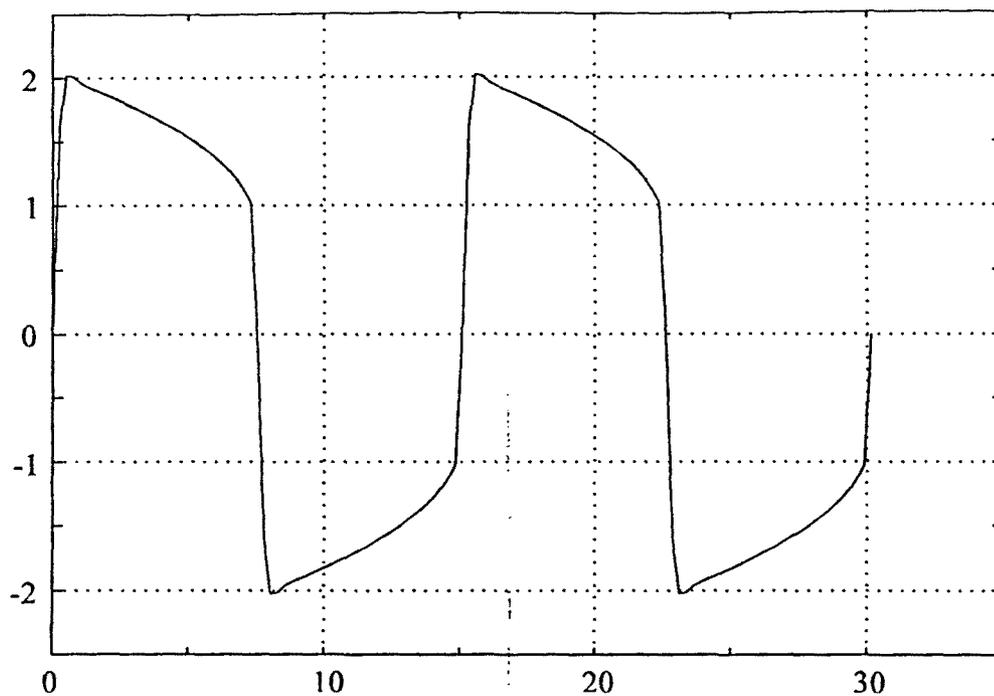


Figura 6.9. Forma de onda resultante para $\mu=8$ y $N=60$ muestras por periodo.

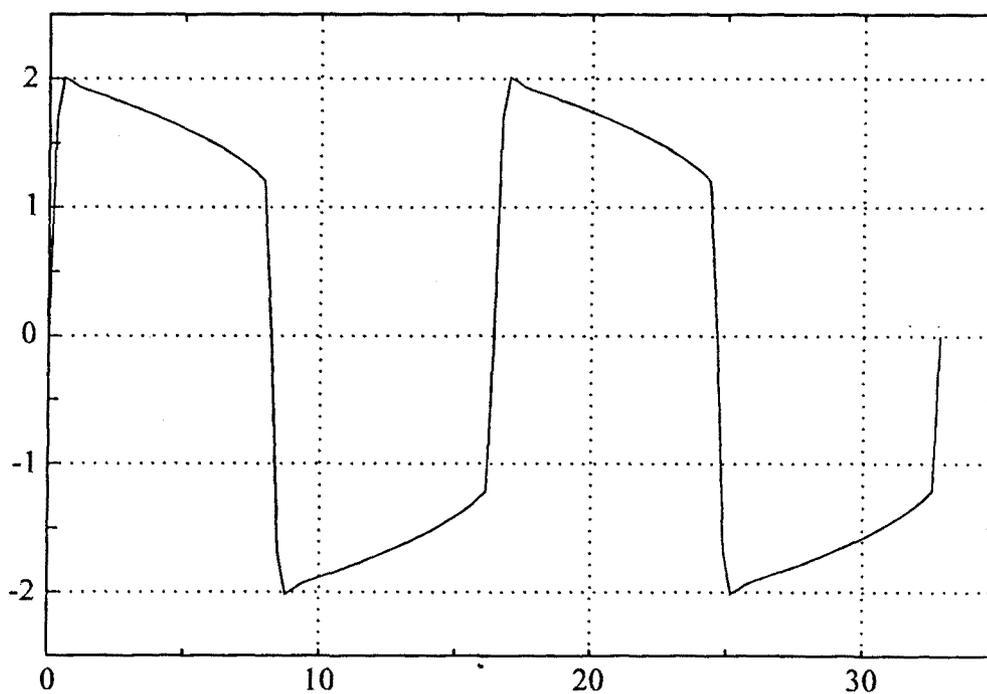


Figura 6.10. Forma de onda resultante para $\mu=10$ y $N=60$ muestras por periodo.

La determinación de las formas de onda para el valor de $\mu=10$ constituye un problema que, por su dificultad, sirve para poner a prueba distintos algoritmos. La forma de onda resultante se hallado aplicando una implementación muy sencilla del método de continuación, a saber, utilizar la estimación obtenida para otros valores de μ .

Aunque el método de continuación es el utilizado habitualmente en otros trabajos [31], cabría preguntarse si es posible, en el caso de $\mu=10$, llegar a la solución partiendo de una estimación inicial tan pobre como considerar la tensión sinusoidal de amplitud 2 y periodo 2π segundos. En efecto, esto es posible haciendo uso del algoritmo de difusión simulada. Como ya se ha mencionado, bajo ciertas condiciones, el método de difusión simulada permite encontrar el mínimo global de una función de coste con probabilidad igual a la unidad independientemente de la estimación inicial efectuada. No obstante, al hacer uso de esta técnica reviste especial importancia la problemática de la multiplicidad de las soluciones.

En el ejemplo que nos ocupa, es inmediato comprobar que existen otras soluciones, además de las obtenidas. En particular, la solución $v=0$ para cualquier valor de T es solución del problema original. Asimismo, si un valor de T y una forma de onda determinada v son solución del problema, también lo es $2T$ junto con v . No obstante, estas situaciones pueden detectarse y corregirse a posteriori.

Algo distinto sucede con las soluciones representadas en las figuras 6.11, 6.12, 6.13 y 6.14. En todos los casos, las formas de onda son solución de las ecuaciones del oscilador de van der Pol con $\mu=10$ y $N=30$, obtenidas por aplicación de la difusión simulada. Cabe señalar que las ecuaciones planteadas mediante técnicas de balance armónico clásicas también presentan múltiples soluciones. Esta situación es descrita en [31], donde se hace uso de una técnica de continuación sobre un parámetro artificial. Conviene destacar que con la aplicación de continuación sobre el parámetro μ no se ha detectado la aparición de múltiples soluciones.

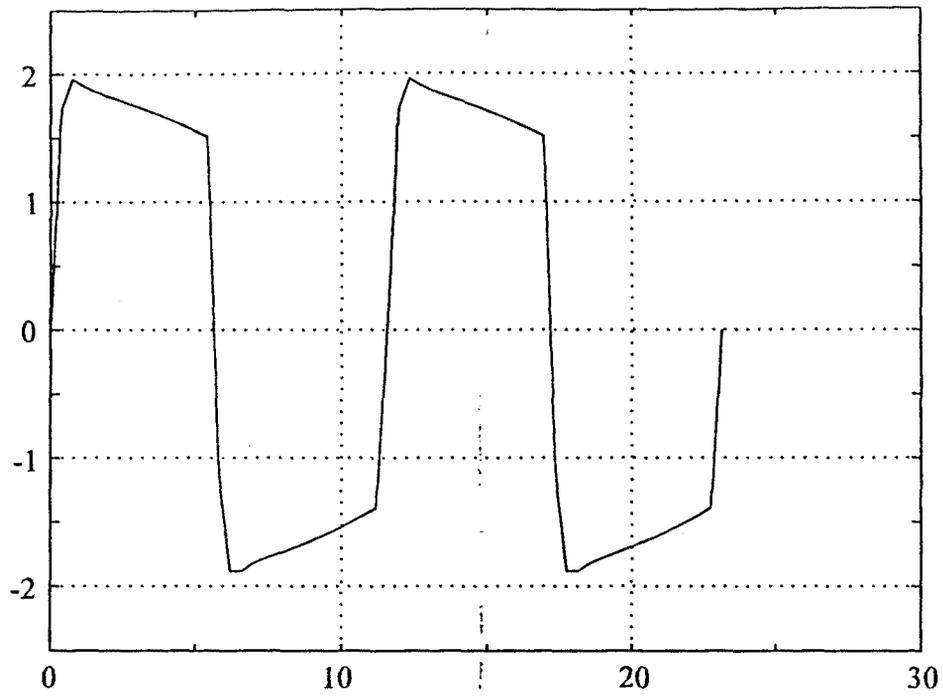


Figura 6.11. Una solución para $\mu=10$, $N=30$. ($T=11.57$)

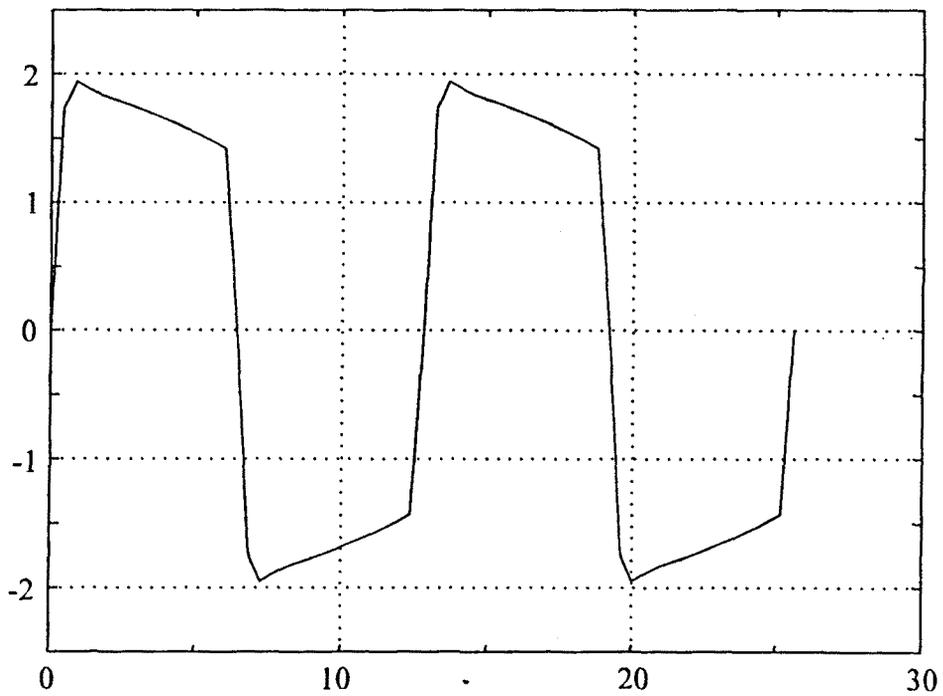


Figura 6.12. Una solución para $\mu=10$, $N=30$. ($T=12.79$)

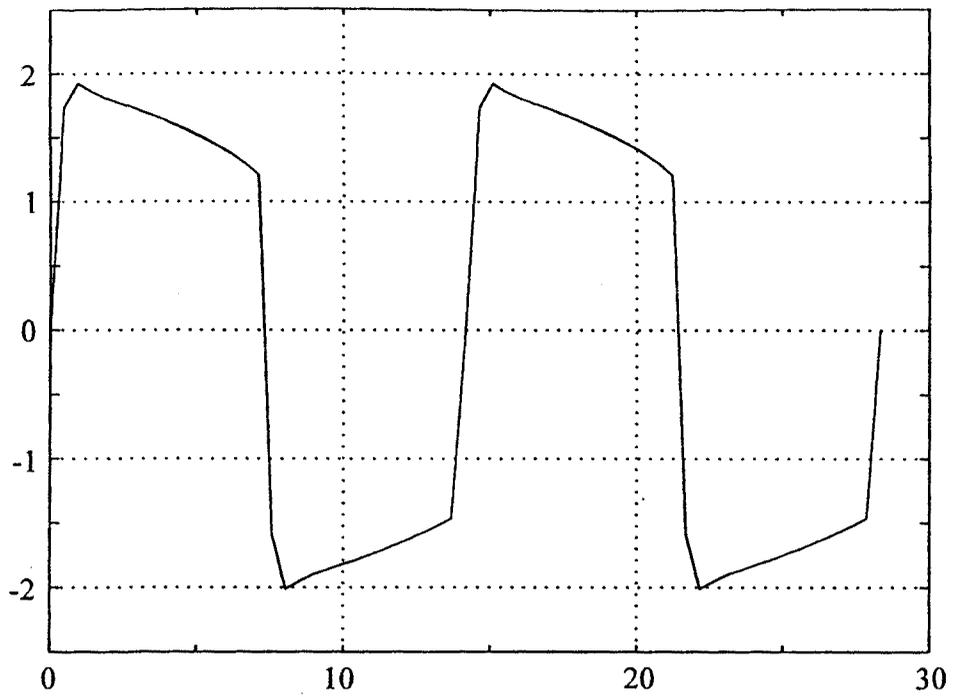


Figura 6.13. Una solución para $\mu=10$, $N=30$. ($T=14.16$)

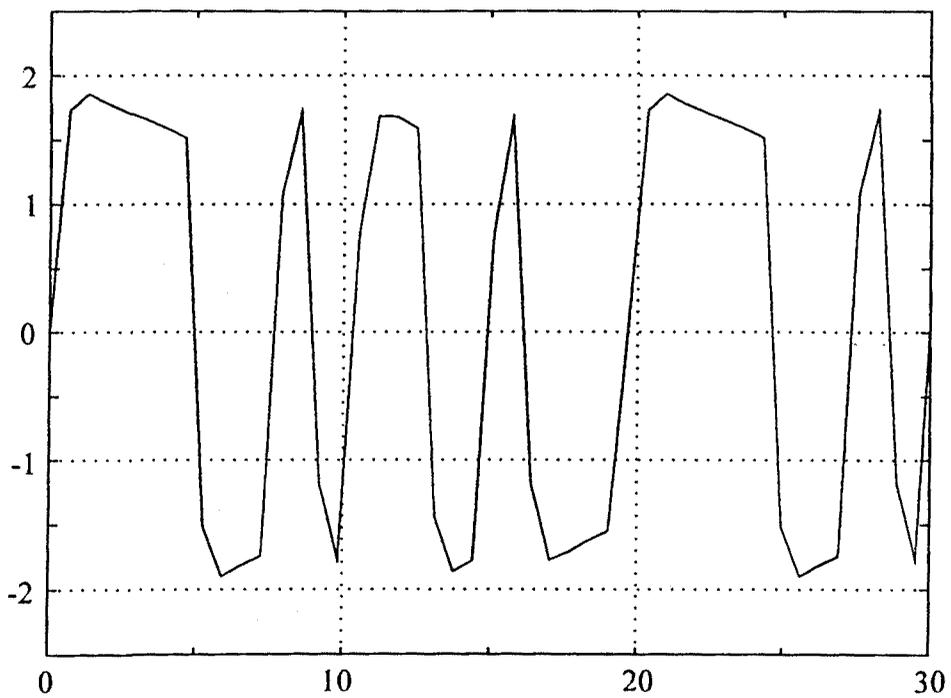


Figura 6.14. Una solución espúrea para $\mu=10$, $N=30$. ($T=19.69$)

Ahora es el momento de realizar algunos comentarios sobre las formas de onda obtenidas. En primer lugar, conviene destacar que las soluciones representadas en las figuras 6.11, 6.12 y 6.13 guardan cierto parecido entre sí —de hecho difieren básicamente en el periodo de oscilación— y son radicalmente distintas a la solución representada en la figura 6.14. Un análisis espectral de esta última solución revela que los armónicos de la señal de la figura 6.14 no disminuyen conforme aumenta la frecuencia. Según Hente y Jansen [31], esto corresponde a una situación en la que hay un solapamiento de espectros significativo, y por tanto, los resultados carecen de sentido físico.

A la misma conclusión se ha llegado utilizando un enfoque radicalmente distinto. En efecto, aplicando la técnica de continuación sobre el periodo de muestreo, se ha tratado de refinar sucesivamente las soluciones obtenidas. En los tres primeros casos, las formas de onda convergen a una única a medida que aumenta el número de muestras por periodo. Por el contrario, no ha sido posible alcanzar la convergencia a partir de la interpolación efectuada sobre la señal de la figura 6.14 aún incrementando el número de muestras de 30 a tan solo 31. Así, este experimento reafirma, de hecho, la hipótesis de que se trata de una solución espúrea.

Se habrá observado que el periodo de las formas de onda utilizando 30 muestras por periodo difiere del periodo de la solución representada en la figura 6.10. Es un hecho conocido que, independientemente de la técnica de análisis utilizada, ya sea mediante técnicas en el dominio temporal, como el método de extrapolación, o mediante el método de balance armónico, para un valor de μ fijo, el periodo obtenido depende del grado de aproximación efectuada, siendo, en general, esta dependencia tanto más acusada cuanto más discontinuas resultan las formas de onda. La tabla 6.1 refleja los resultados obtenidos en distintas condiciones.

	N=30	N=60	N=120
$\mu=0.1$	6.38	6.32	6.29
$\mu=0.5$	6.46	6.40	6.39
$\mu=1$	6.71	6.67	6.67
$\mu=2$	7.60	7.62	7.63
$\mu=4$	9.87	10.1	10.2
$\mu=6$	11.6	12.8	13.0
$\mu=8$	12.4	15.1	15.9
$\mu=10$	12.8	16.4	18.8

Tabla 6.1. Periodo de oscilación en función de μ y del número de muestras por periodo

De esta tabla se desprende que, para aproximar satisfactoriamente las formas de onda obtenidas con valores elevados de μ (que comportan señales con discontinuidades apreciables) es necesario trabajar con un mayor número de muestras por periodo. Este hecho no es más que una consecuencia del teorema de muestreo, según el cual la frecuencia de muestreo debe ser superior al doble del ancho de banda de las señales presentes en el circuito. En el caso de $\mu=10$ las formas de onda presentan componentes espectrales apreciables a frecuencias elevadas, lo que dificulta realizar un muestreo correcto.

En este punto es conveniente realizar algunas consideraciones en cuanto al coste de cálculo asociado al método descrito. Por un lado hay que señalar que, en algunos casos, como el problema que nos ocupa, es posible hacer uso de las propiedades de simetría del circuito, hecho que comporta la propiedad

$$v(t+T/2)=-v(t)$$

De aquí es inmediato concluir que, si el número de muestras elegido es par, basta con determinar las $N/2$ primeras muestras $x(1:N/2)$ ya que $x(N/2+1:N)=-x(1:N/2)$. Así, el problema resultante presenta la mitad de incógnitas a determinar, disminuyendo de forma importante la complejidad del sistema.

Por otro lado, cabe destacar las siguientes propiedades, de carácter absolutamente general, fruto de la estructura en banda que presentan los circulantes que intervienen en la formulación. Se recordará que el producto de un circulante por un vector

$$Cx$$

equivale a la convolución circular de dos vectores de longitud N . El producto matriz por vector requiere, en general, N^2 productos. Sin embargo, en la formulación utilizada, el número de productos se reduce a bN , siendo b el ancho de banda de la matriz C . Más aún, en general, el algoritmo de Winograd, permite efectuar el producto Cx realizando menos de $2N$ productos [7]. La operación equivalente en el dominio frecuencial, esto es, un simple filtrado, requiere $N/2$ productos complejos, equivalentes a su vez también a $2N$ productos reales. No obstante, en el caso del balance armónico, en cada iteración es necesario realizar una DFT inversa y directa sobre las muestras de las variables que, en el mejor de los casos, requieren del orden de $M\log_2 N$ productos adicionales. En conclusión, el coste de la evaluación de la función error en cada iteración resulta del orden de N con la formulación descrita, mientras que es del orden de $M\log_2 N$ utilizando la técnica de balance armónico clásica.

Una mejora incluso más apreciable se produce a la hora de calcular los pasos de Newton resolviendo, en cada iteración

$$Js_N = -g$$

En la formulación propuesta el jacobiano del sistema de ecuaciones presenta una estructura en bandas claramente definidas que permiten un ahorro considerable a la hora de la factorización del mismo. En concreto, el orden de complejidad es de Nb^2 frente a un orden N^3 en el caso general, en el que se incluye el jacobiano obtenido aplicando balance armónico, donde ahora b representa el número de elementos no nulos en una columna del jacobiano. A modo de ejemplo, en la tabla 6.2 se presenta el coste en flops* de la determinación del paso de Newton, para el oscilador de van der Pol (una sola alinealidad) para distintos valores de N y haciendo uso de la transformación de Gear de orden 2.

* En el término flop [floating point operation] se incluyen tanto sumas como productos reales.

	Algoritmo standard	Algoritmo específico	Factor de mejora
N=30	23.5	2.1	11
N=60	168.0	4.3	39
N=120	1247.2	8.7	143
N=200	5592.5	14.6	383

Tabla 6.2. Coste del paso de Newton en Kflop

A la vista de los resultados presentados en la tabla 6.2, puede afirmarse que, con una codificación adecuada, y siempre bajo la hipótesis de que b es mucho menor que N , el coste de la determinación del paso de Newton para un problema dado crece *linealmente* con el número de muestras, a diferencia de como ocurre en el caso general, en el que se incluye asimismo el método de balance armónico, donde este coste crece como N^3 debido a que el jacobiano es denso. A modo de conclusión, de lo expuesto se desprende que la determinación de un elevado número de muestras no supone un coste tan elevado como en principio podría suponerse extrapolando las características del método de balance armónico. Este hecho, contribuye, por otro lado, a validar la eficacia del método de continuación sobre el periodo de muestreo.

En estas condiciones, se dispone de recursos más que suficientes para abordar el análisis del oscilador de van der Pol incluso bajo condiciones adversas. Consideremos un último problema de análisis con $\mu=10$ y con 250 muestras por periodo con la estimación inicial $v(t)=2\sin(t)$. Una estrategia inteligente, que combina las distintas herramientas de solución de que se dispone, podría ser la que se representa en la figura 6.15 y que consiste de varios pasos:

1. A partir de la estimación inicial, abordar el problema con $N=30$ y $\mu=4$. La convergencia se consigue en 8 iteraciones.
2. Aplicar continuación sobre el parámetro μ para llegar hasta $\mu=10$ manteniendo el mismo número de muestras. Para ello bastan 5 iteraciones.
3. Aplicar un refinamiento sucesivo sobre el periodo de muestreo, esto es, incrementar paulatinamente el número de muestras por periodo pasando de $N=30$ a $N=60$, de aquí hasta $N=120$ para, finalmente, llegar a $N=250$. Estos pasos requieren, respectivamente, 6, 5 y 4 iteraciones. El hecho de que el número de iteraciones se mantenga e incluso decrezca puede interpretarse como un síntoma de que las sucesivas soluciones aproximadas convergen hacia la verdadera solución del problema, ya que cada estimación inicial está más próxima a ella. En el límite, la solución estaría tan fielmente representada por sus muestras que una interpolación lineal entre ellas ya sería solución del problema, sin necesidad de realizar iteración alguna.

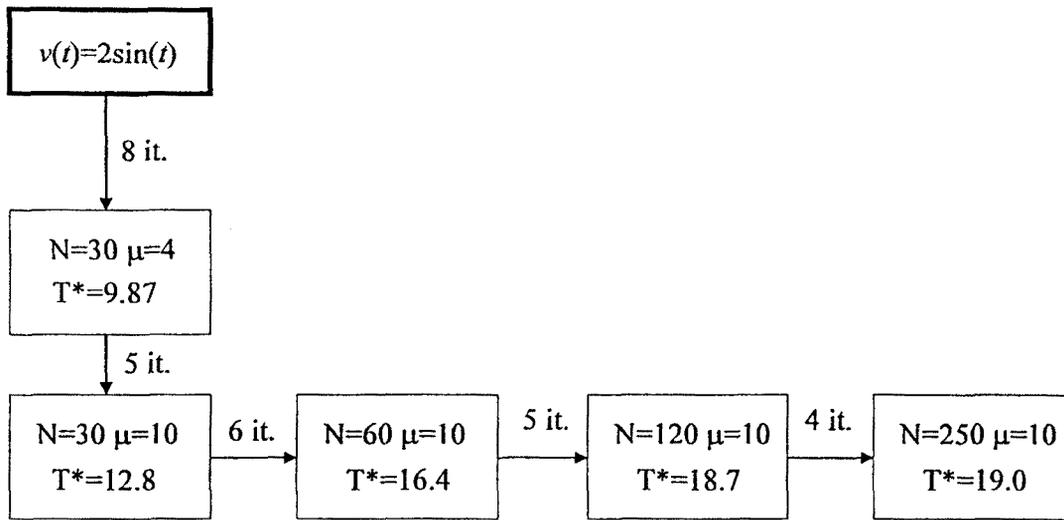


Figura 6.15. Una vía eficaz para la determinación de las formas de onda con $\mu=10$ y $N=250$ muestras por periodo

Tras estas operaciones, se llega a la forma de onda representada a continuación, en la figura (6.16).

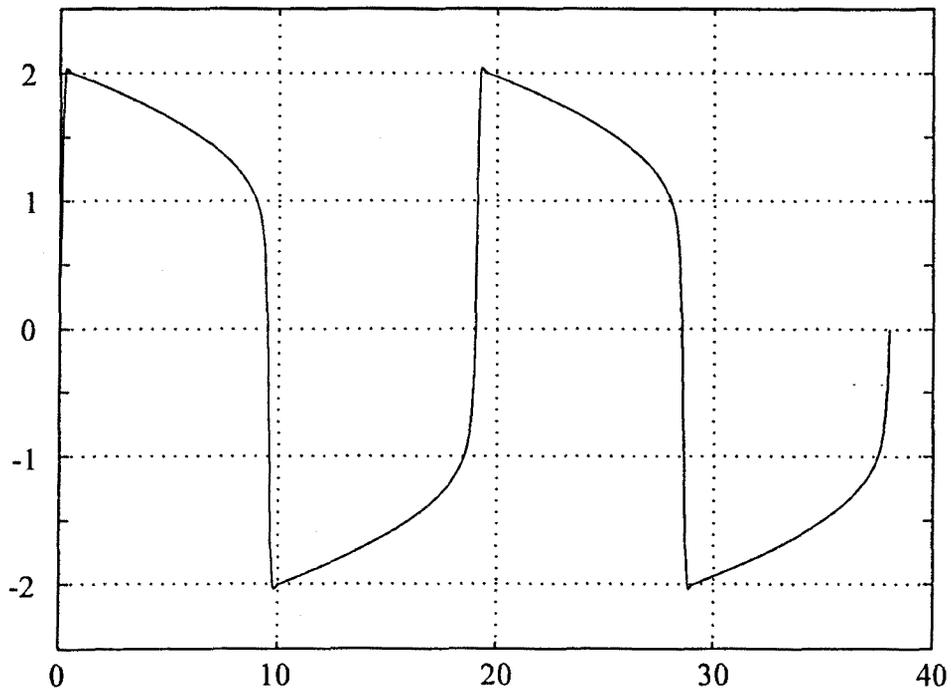


Figura 6.16. Solución para $\mu=10$ y $N=250$.

6.1.2 Efectos de la elección de la transformación de plano s a plano z

En este momento cabe preguntarse en qué medida se verían modificados los resultados anteriores haciendo uso de otras transformaciones, asociadas a reglas de integración distintas. En un capítulo anterior se ha justificado que la elección de la transformación Gear-2 provenía de establecer un compromiso entre la exactitud de la aproximación y la estabilidad del sistema discreto resultante. Para ilustrar este compromiso, se presentan, en primer lugar, las formas de onda obtenidas para el oscilador de van der Pol haciendo uso de la transformación asociada a la regla de integración de Gear de orden 4

$$s = \frac{1}{12\Delta} [25 - 48z^{-1} + 36z^{-2} - 16z^{-3} + 3z^{-4}]$$

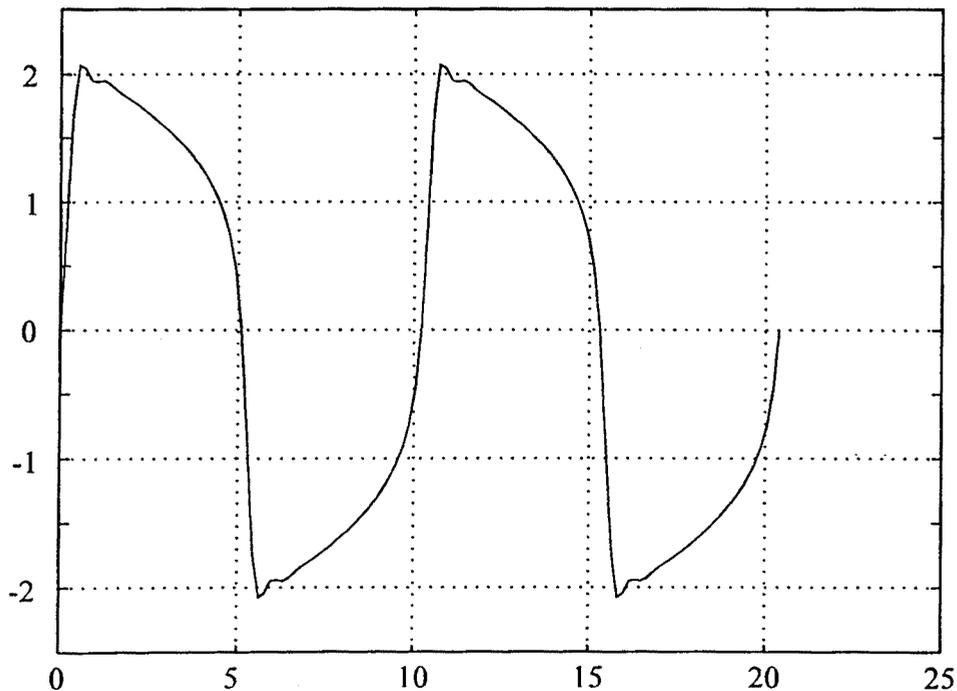


Figura 6.17. Discretización Gear-4, $\mu=4$, $N=60$.

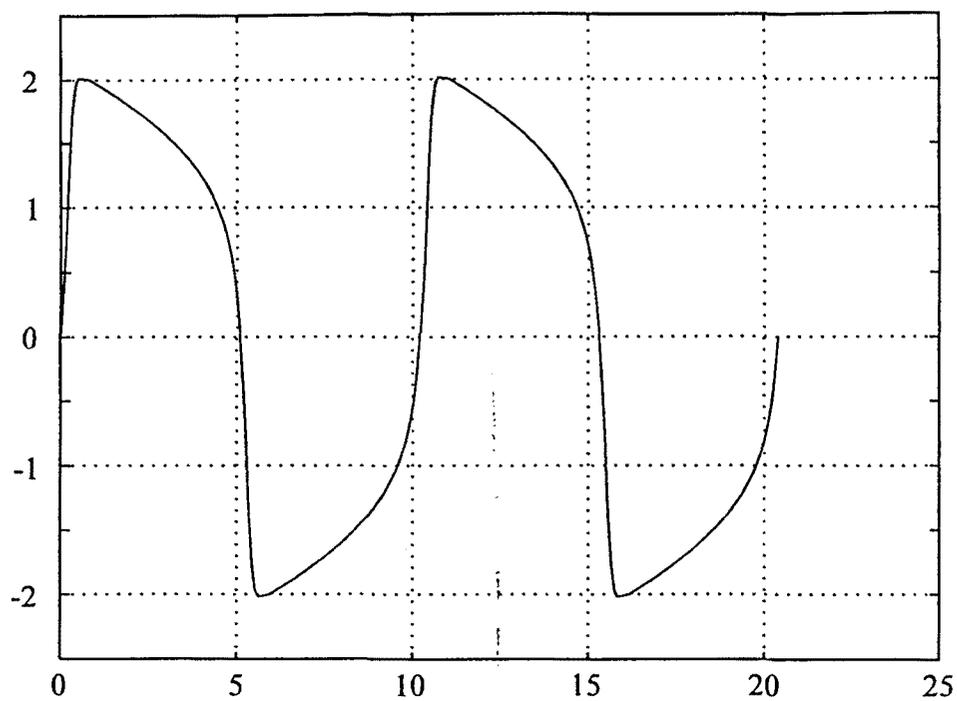


Figura 6.18. Discretización Gear-4, $\mu=4$, $N=120$.

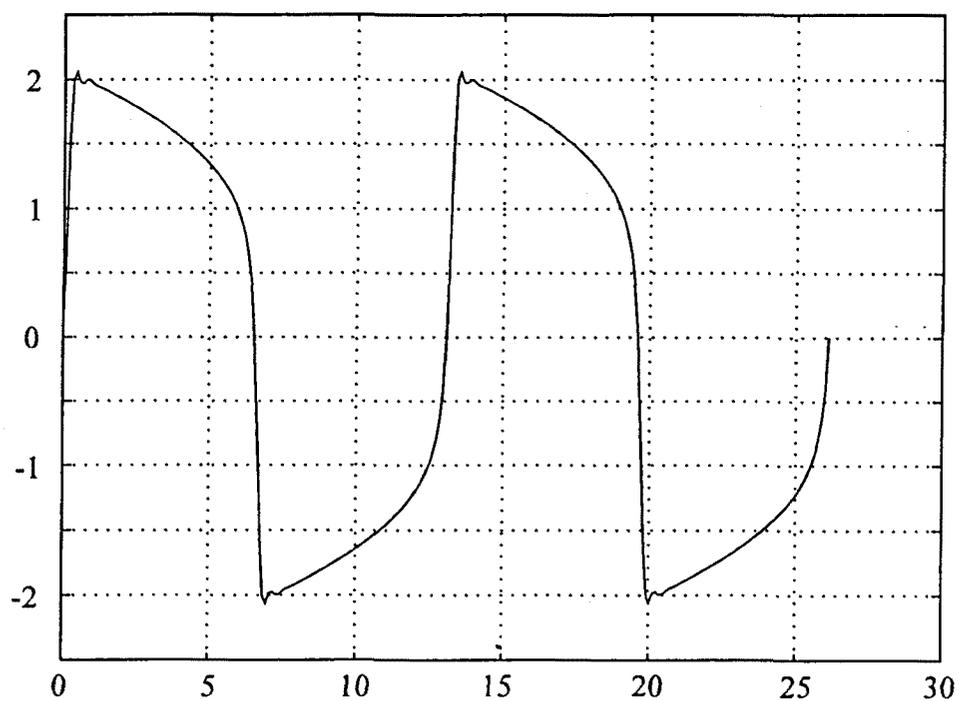


Figura 6.19. Discretización Gear-4, $\mu=6$, $N=120$.

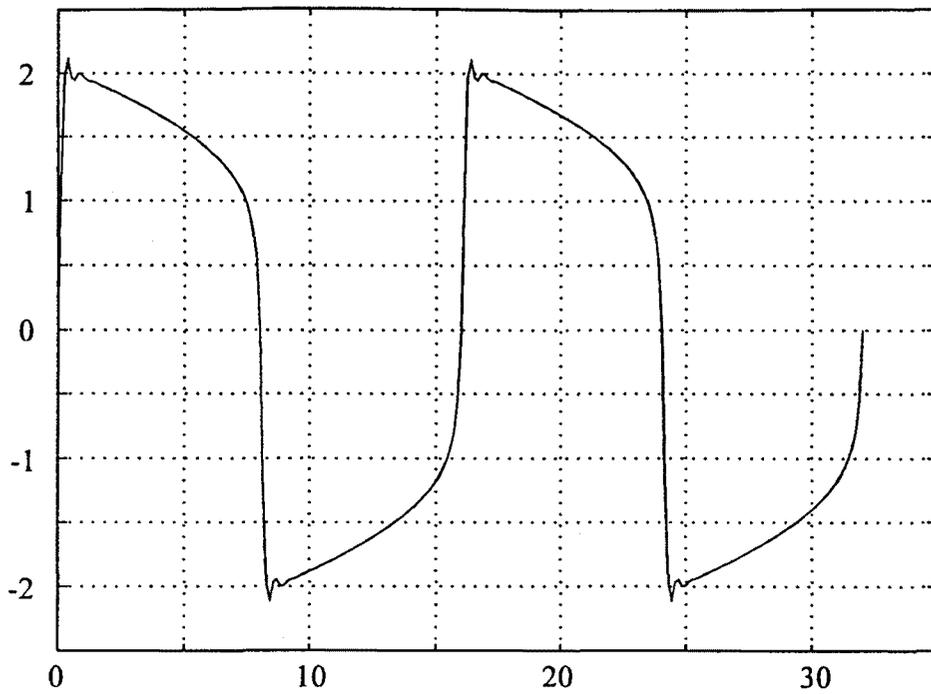


Figura 6.20. Discretización Gear-4, $\mu=8$, $N=120$.

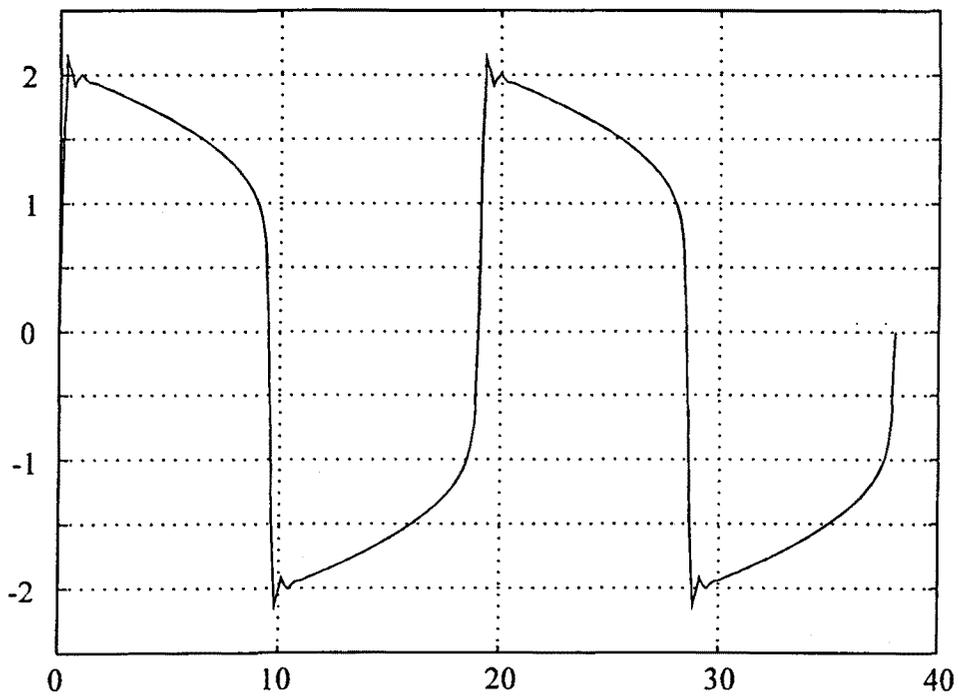


Figura 6.21. Discretización Gear-4, $\mu=10$, $N=120$.

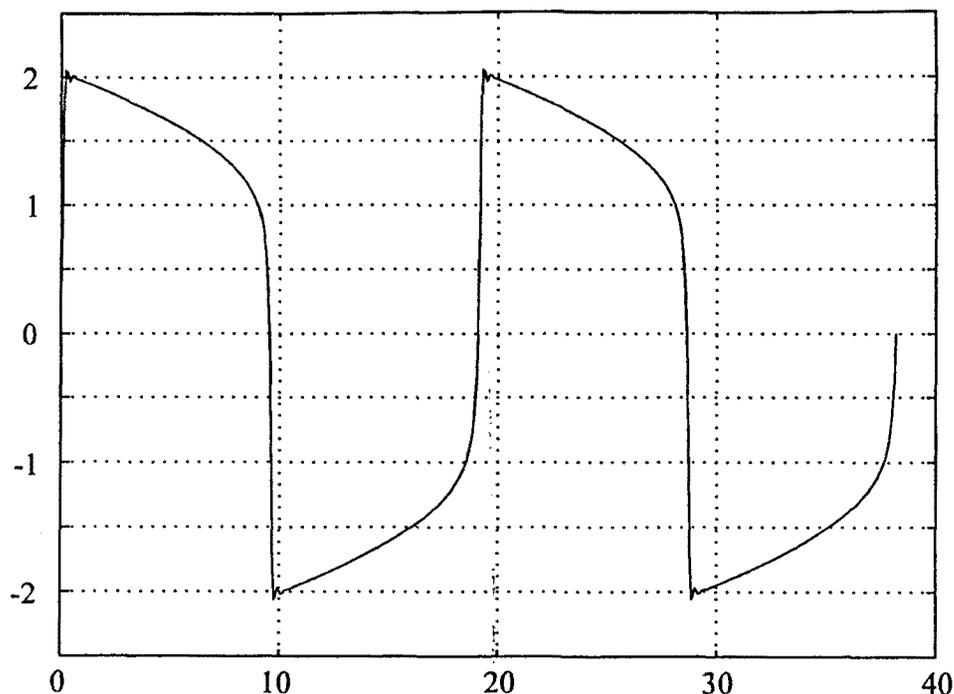


Figura 6.22. Discretización Gear-4, $\mu=10$, $N=250$.

En la figura 6.17 se representa la forma de onda obtenida para $\mu=4$ con $N=60$ muestras por periodo. El rizado que aparece en las muestras inmediatamente posteriores a los flancos de subida y bajada desaparece a medida que se aumenta la frecuencia de muestreo. Este efecto se aprecia claramente en la figura 6.18 donde se ha doblado el número de muestras por periodo. No obstante, a medida que aumenta el valor de μ las formas de onda presentan cada vez mayor contenido en armónicos, lo que se traduce nuevamente en la aparición de fenómenos oscilatorios en las proximidades de los flancos. Esta situación queda reflejada en las figuras 6.19, 6.20 y 6.21. Finalmente, en la figura 6.22 se ilustra la forma de onda obtenida para $\mu=10$ y 250 muestras por periodo.

Conviene destacar que la aparición de inestabilidades invalida totalmente las soluciones obtenidas en el caso de que la integración se realice de la forma habitual, es decir, paso a paso, sin exigir que las variables sean periódicas. Así, se observa que la imposición de la periodicidad de las formas de onda limita el deterioro de la solución, haciendo que los resultados aún sean aprovechables. Por otro lado, en el caso de que la frecuencia de muestreo sea suficientemente elevada, los resultados obtenidos, para los mismos valores de N , son ligeramente más exactos haciendo uso de la regla de Gear de orden 4. A pesar de esta previsible

mejora en la exactitud es menester señalar que un aumento en el orden de la transformación s a z repercute directamente en el número de elementos no nulos en los circulantes del sistema, lo que, a su vez, se traduce en una eficacia numérica ligeramente inferior. Este hecho, añadido a la ya mencionada posibilidad de aparición de sobreimpulsos espúreos, confirma la bondad a priori de la transformación de Gear de orden 2.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de aplicar la transformación SKG, recientemente propuesta por Schneider [64] como candidato para la discretización de filtros continuos. Esta transformación, basada en la fórmula de integración de Adams-Moulton de orden 4, resulta ser

$$s = \frac{24}{\Delta} \frac{1 - z^{-1}}{9 + 19z^{-1} - 5z^{-2} + z^{-3}}$$

A diferencia de como ocurre con las transformaciones de Gear, la transformación SKG presenta la forma de un cociente de polinomios. Así, a igualdad de exactitud en la aproximación, el orden de los polinomios resultantes en el dominio transformado z es inferior al requerido por las transformaciones de Gear, lo que se traduce en un menor número de elementos no nulos en los circulantes del sistema de ecuaciones. No obstante, cuando las señales presentan un amplio contenido en armónicos, la exactitud finalmente obtenida es menor, efecto que se pretende ilustrar en las siguientes figuras.

Los resultados obtenidos mediante la discretización SKG del problema del oscilador de van der Pol con $\mu=4$ y $N=60$ muestras por periodo se representan en la figura 6.23. En la figura 6.24 se ha doblado N , obteniéndose una mayor exactitud. Por otro lado, las figuras 6.25 y 6.26 ilustran las formas de onda con $N=120$ para las situaciones $\mu=6$ y $\mu=8$, respectivamente. Destaca, en este último caso, la aparición de oscilaciones de gran amplitud y de frecuencia igual a la mitad de la de muestreo, lo que, de hecho, contradice la hipótesis de que se han muestreado correctamente las señales.

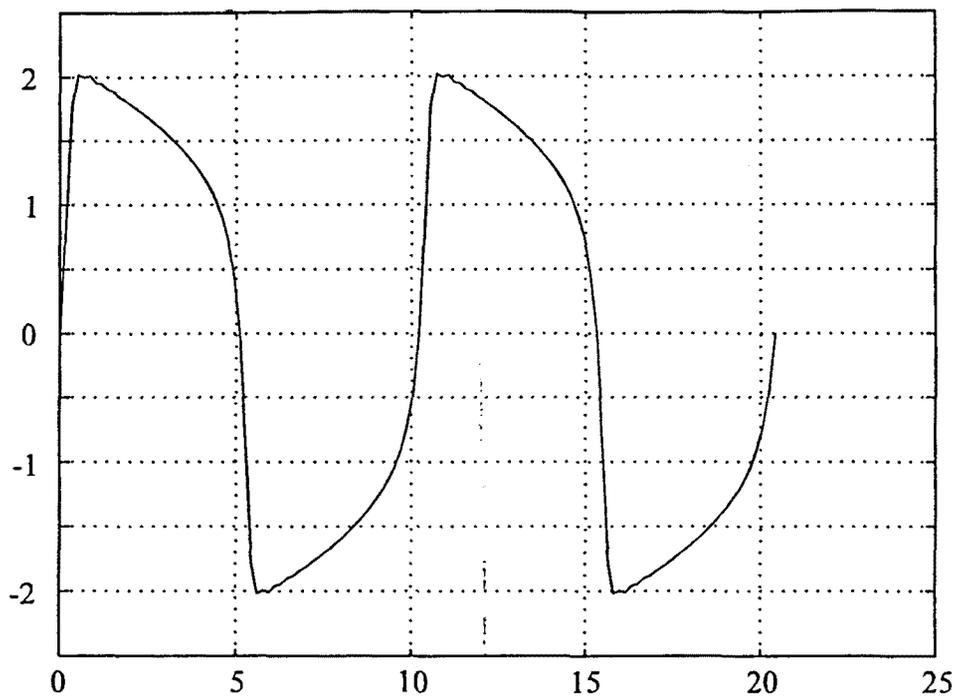


Figura 6.23. Discretización SKG, $\mu=4$, $N=60$

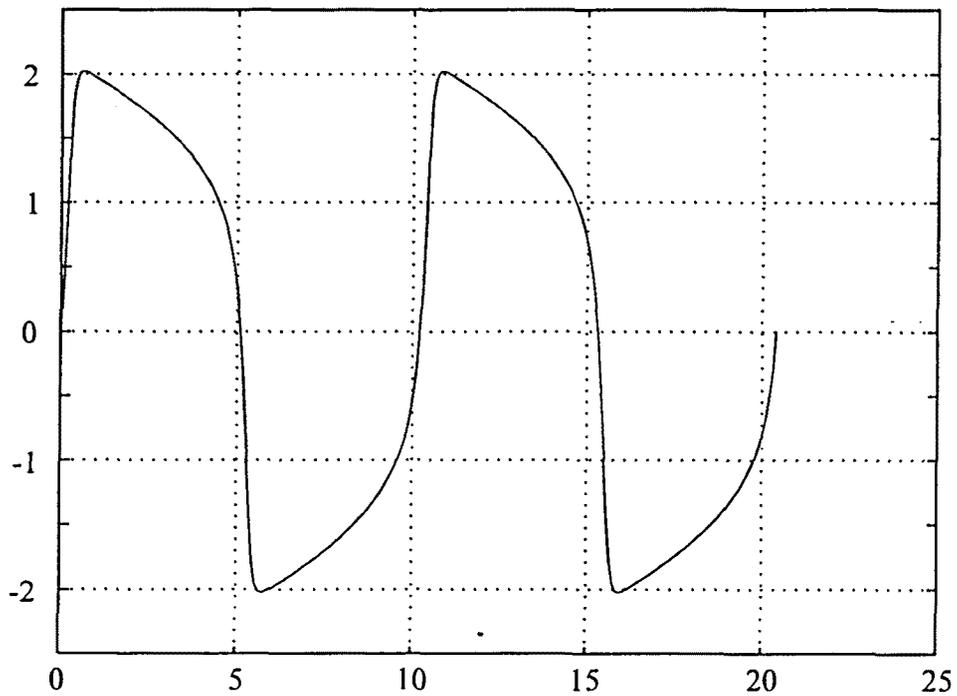


Figura 6.24. Discretización SKG, $\mu=4$, $N=120$

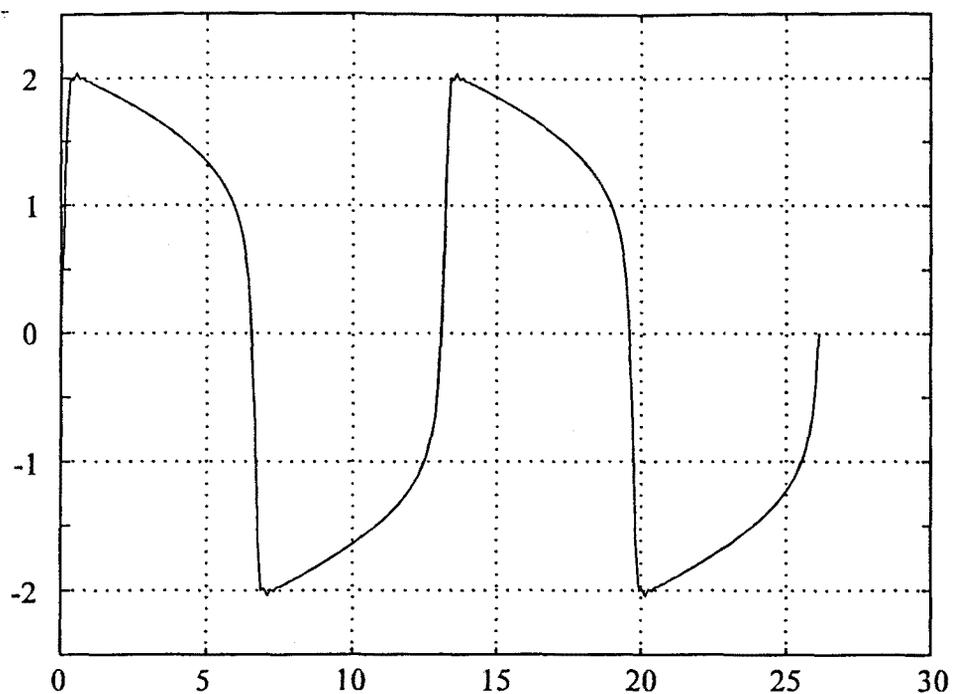


Figura 6.25. Discretización SKG, $\mu=6$, $N=120$

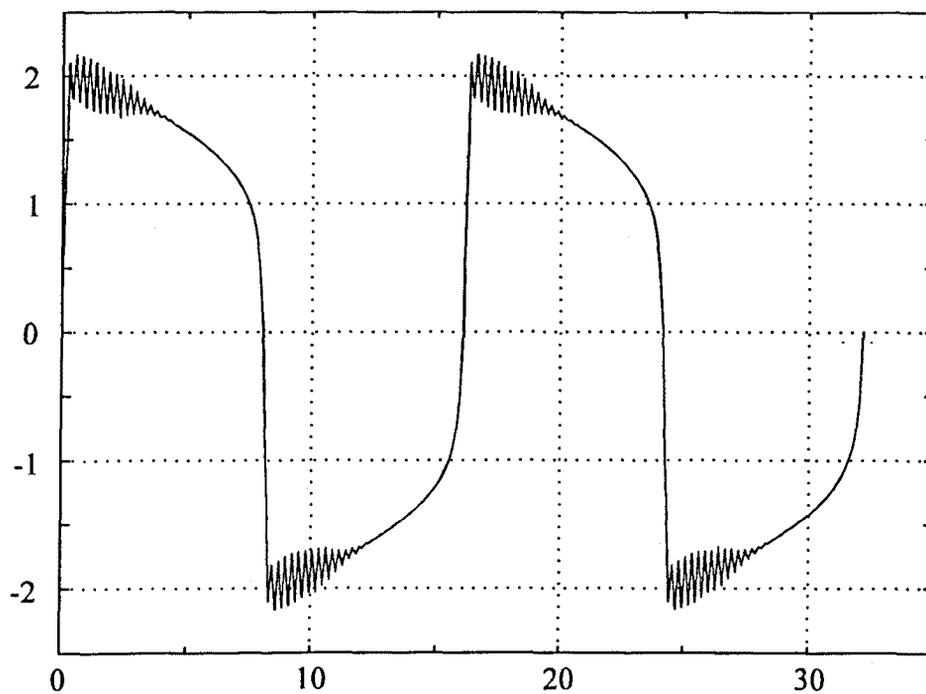


Figura 6.26. Discretización SKG, $\mu=8$, $N=60$. Nótese la inestabilidad producida en la vecindad de los flancos.

6.1.3. Optimización de la respuesta periódica del oscilador de Van der Pol

Llegados a este punto, tal vez sea necesario recordar que, en la práctica, el análisis de circuitos únicamente tiene sentido en la medida en que sirva de ayuda para el diseño. En este momento, se dispone de información acerca de las formas de onda y los periodos asociados a distintos valores del parámetro μ que describe la alinealidad del oscilador de van der Pol. Así, se dispone de una herramienta eficaz de análisis que, de forma indirecta, podría servir para el diseño: a partir de una determinada configuración, con determinados valores de los elementos, éstos se modificarían ligeramente de forma sucesiva con el fin de inferir pautas que permitirían que el circuito se ajustara a unos ciertos criterios de diseño. Este es el procedimiento habitual, ya que la mayoría de las herramientas de CAD de circuitos no lineales existentes únicamente abordan con eficacia el problema del análisis*. En estas circunstancias, el diseño de un oscilador a una frecuencia dada, basado en la estructura de la figura 6.1, con la alinealidad fijada, por ejemplo, en $\mu=4$, sería un largo y tedioso proceso de prueba y error en el que se irían variando sucesivamente los valores de alguno de los elementos hasta conseguir la frecuencia de oscilación exigida.

Por contra, mediante la aplicación de las técnicas propuestas en capítulos anteriores, la resolución de este problema no representa ninguna dificultad, como se ilustra a continuación. Se ha planteado el problema de determinar el valor de C necesario para que el oscilador de van der Pol oscila a distintas frecuencias, para un valor de $\mu=4$ y manteniendo $L=1$. Para ello se ha trabajado con $N=60$ muestras por periodo y se ha partido de $C=1$ como estimación inicial, utilizándose asimismo

$$v = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

* En el polo exactamente opuesto se encuentra la técnica propuesta por Rizzoli *et al.* [57] que consiste, esencialmente, en considerar fija la frecuencia de oscilación e incluir el valor de un elemento de sintonía como una de las variables a determinar. Así, en un sentido estricto, esta técnica no permite el *análisis* directo de circuitos autónomos al ser necesario repetir el proceso para distintos valores de la frecuencia de oscilación para inferir finalmente la respuesta del circuito nominal.

como estimación inicial de las formas de onda*. Los resultados obtenidos, para algunos valores del periodo se reflejan en la tabla 6.3.

	C	iteraciones
T=20	8.15	6
T=15	3.82	7
T=12.5	2.19	8
T=10	0.954	11
T=7.5	0.245	22
T=5 (1)	→0	

Tabla 6.3. Valores de C para conseguir un periodo de oscilación especificado (en segundos) y número de iteraciones requeridas.

⁽¹⁾ No alcanzable (ver texto)

Es igualmente instructivo observar las formas de onda obtenidas, representadas a continuación.

* Del análisis del problema para $\mu=4$ podía haberse obtenido una estimación inicial mejor. No obstante, se ha elegido de forma deliberada una estimación inicial pobre para mostrar la eficacia del proceso propuesto.

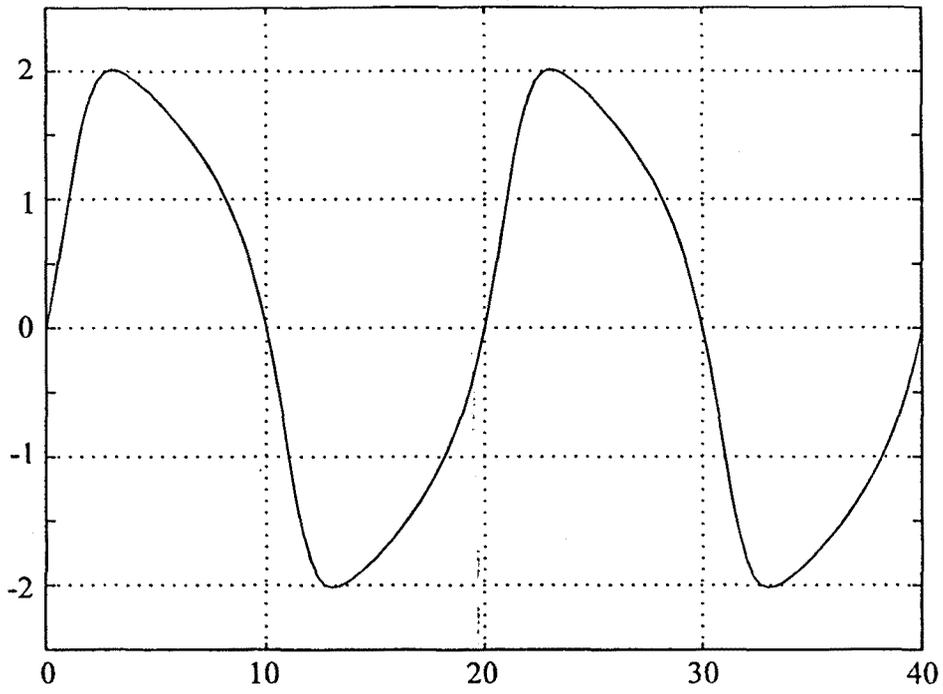


Figura 6.27. Optimización para conseguir $T=20$.

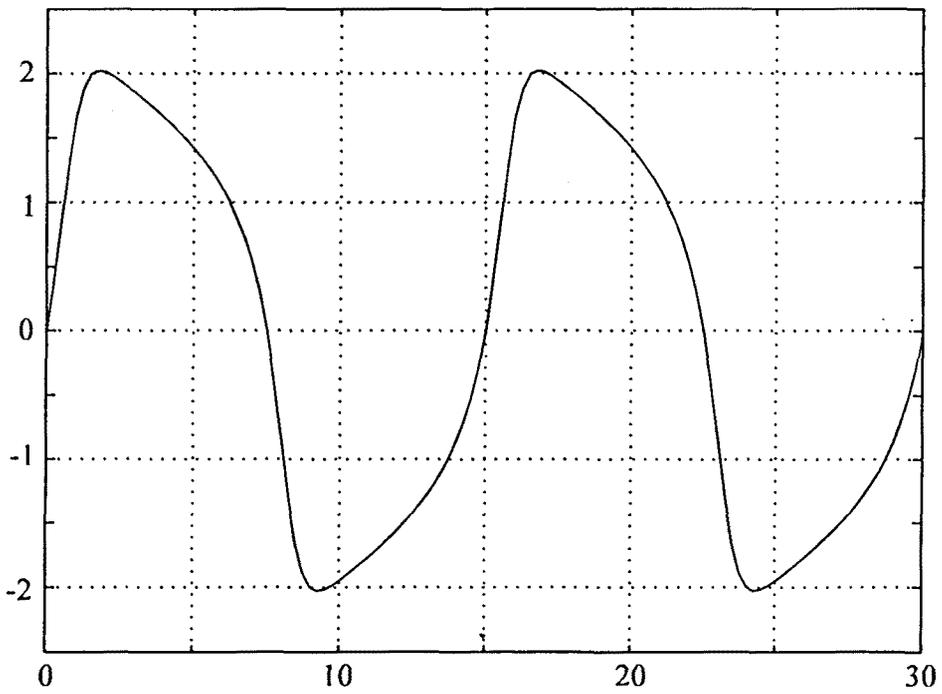


Figura 6.28. Optimización para conseguir $T=15$.

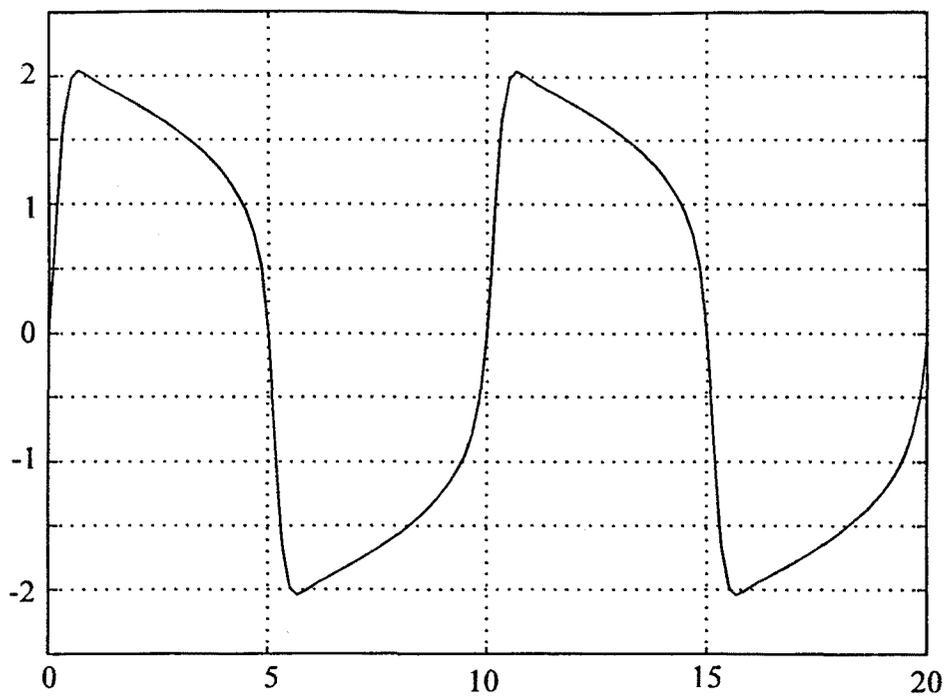


Figura 6.29. Optimización para conseguir $T=10$.

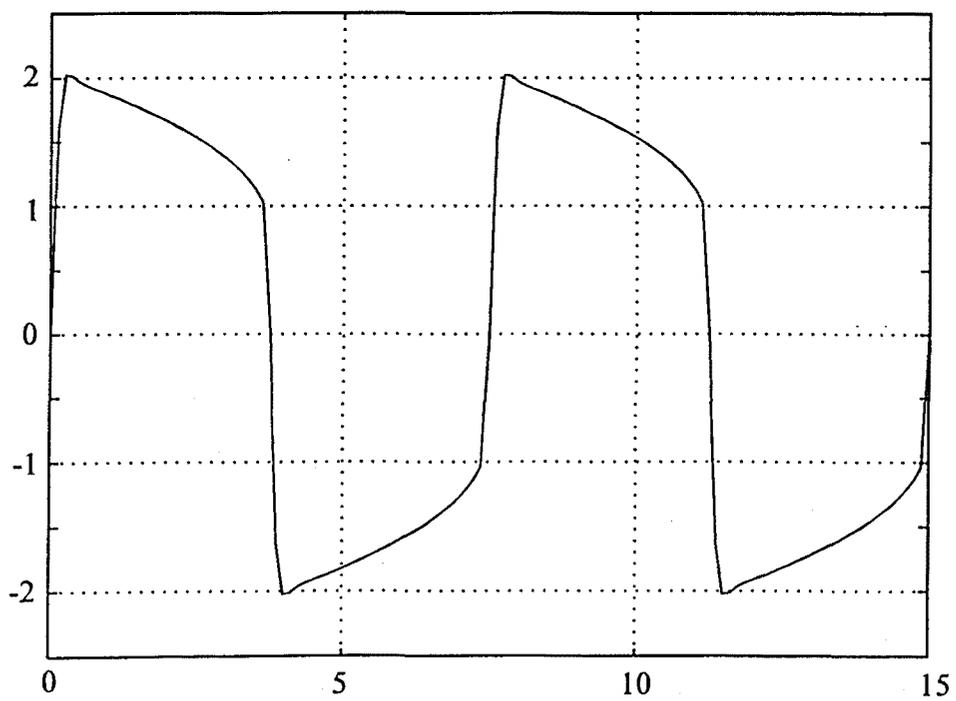


Figura 6.30. Optimización para conseguir $T=7.5$.

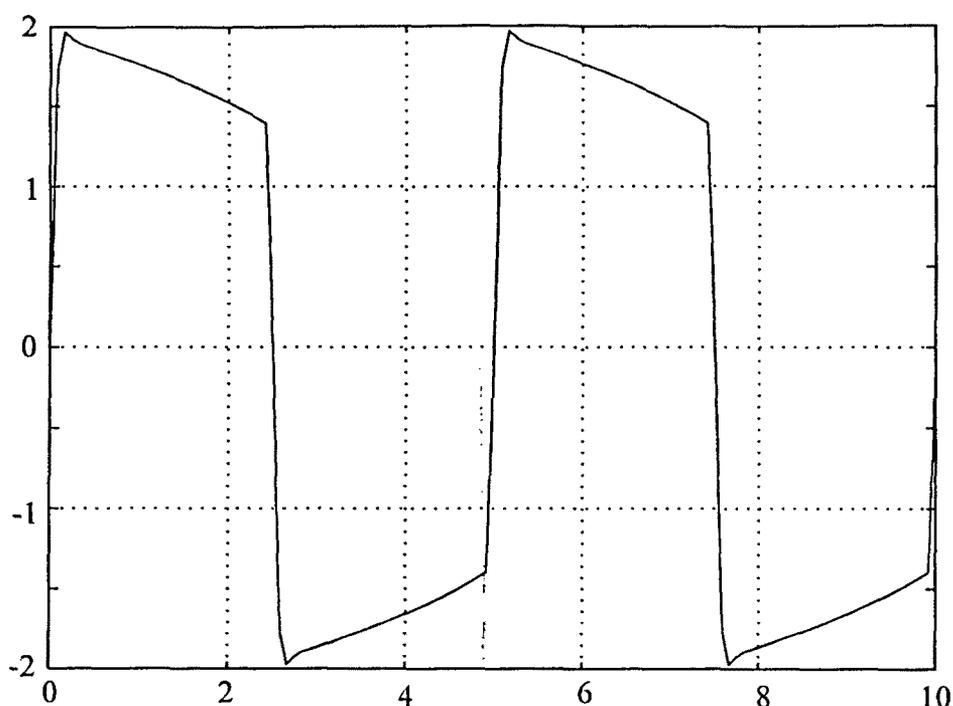


Figura 6.31. Optimización para conseguir $T=5$

De las formas de onda obtenidas se desprende que, a medida que se exige un periodo de oscilación menor, las formas de onda presentan cada vez mayor riqueza espectral, por lo que sería necesario incrementar paulatinamente el número de muestras por periodo, con el fin de aumentar la exactitud de los resultados.

Al realizar este proceso en el caso de $T=5$, se comprueba que el valor de C tiende a hacerse cada vez más pequeño conforme aumenta el número de muestras por periodo. Esta observación obliga a analizar el comportamiento del oscilador de van der Pol para valores pequeños de C , llegándose a la conclusión de que, para $L=1$ fijo, el valor mínimo de periodo de oscilación es $T \approx 6.46$ s, que corresponde al oscilador de relajación obtenido con $C=0$ en la figura 6.1. Así, no es congruente exigir un periodo de oscilación de 5 s, lo que explica que el valor de C no converja hacia un valor positivo al reducir el periodo de muestreo.

6.1.4. Inclusión de una capacidad no lineal

En este apartado se estudiará el efecto que produce una capacidad no lineal sobre el oscilador de van der Pol, situación representada en la figura 6.32 y que se ha incluido en esta memoria con el fin de ilustrar sobre un ejemplo sencillo la forma de incluir elementos no lineales con memoria en la formulación propuesta.

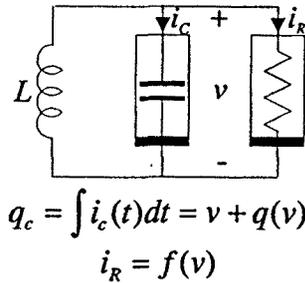


Figura 6.32 Oscilador de van der Pol con una capacidad no lineal

En este caso, se considerará un condensador no lineal controlado por tensión, caracterizado por la ecuación

$$q_c = \hat{q}(v) = v + 0.5v^3$$

mientras que, como antes,

$$f(v) = \mu\left(\frac{1}{3}v^3 - v\right)$$

Haciendo uso de la representación circuital de las alinealidades descrita en el capítulo 2, el circuito equivalente en el dominio transformado de Laplace es de la forma

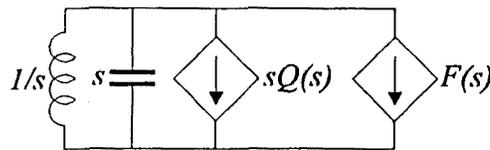


Figura 6.33. Circuito transformado de Laplace

donde $Q(s)$ y $F(s)$ denotan, respectivamente, y desde un punto de vista formal, las transformadas de Laplace de $q(v(t))$ y $f(v(t))$.

Un análisis elemental revela que la ecuación de equilibrio es

$$(s^2 + 1)V(s) + s^2Q(s) + sF(s) = 0$$

Aplicando la técnica propuesta, haciendo uso de la transformación de Gear de orden 2, se llega a la ecuación

$$\text{circ}\left(1 + \frac{9}{4\Delta^2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4\Delta^2}, \frac{-8}{4\Delta^2}, \frac{22}{4\Delta^2}, \frac{-24}{4\Delta^2}\right)\mathbf{v} + \text{circ}\left(\frac{9}{4\Delta^2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4\Delta^2}, \frac{-8}{4\Delta^2}, \frac{22}{4\Delta^2}, \frac{-24}{4\Delta^2}\right)\mathbf{q}(\mathbf{v}) + \text{circ}\left(\frac{3}{2\Delta}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2\Delta}, \frac{-4}{2\Delta}\right)\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

planteada en el dominio temporal discreto.

Expresando esta ecuación en forma matricial, se obtiene

$$\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{Q}_1\mathbf{f}_1(\mathbf{v}) + \mathbf{Q}_2\mathbf{f}_2(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones se aborda de forma análoga a como ocurría en el caso de que la única alinealidad era la conductancia negativa.

A modo de ilustración, en las figuras 6.34 a 6.36 se presentan las formas de onda obtenidas para $\mu=1$, $\mu=4$ y $\mu=8$. El periodo de oscilación resultante es de 10.22, 12.45 y 17.75 s, respectivamente.

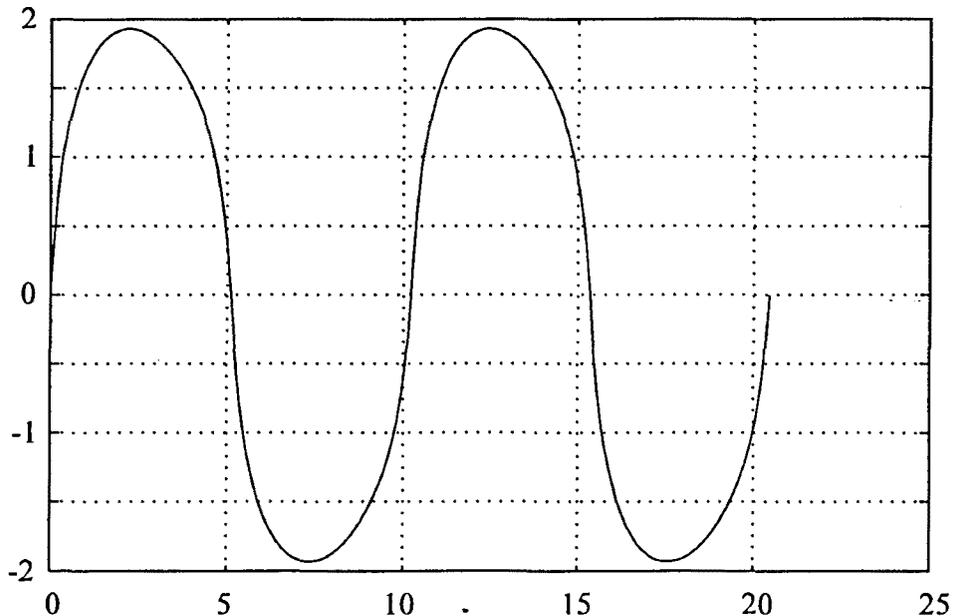


Figura 6.34. Forma de onda resultante para $\mu=1$

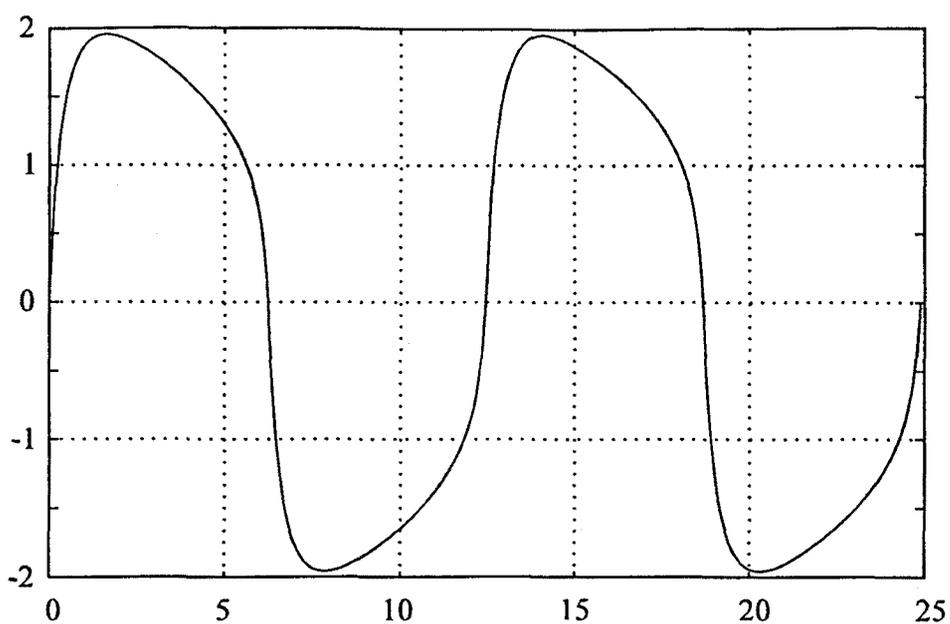


Figura 6.35. Forma de onda resultante para $\mu=4$

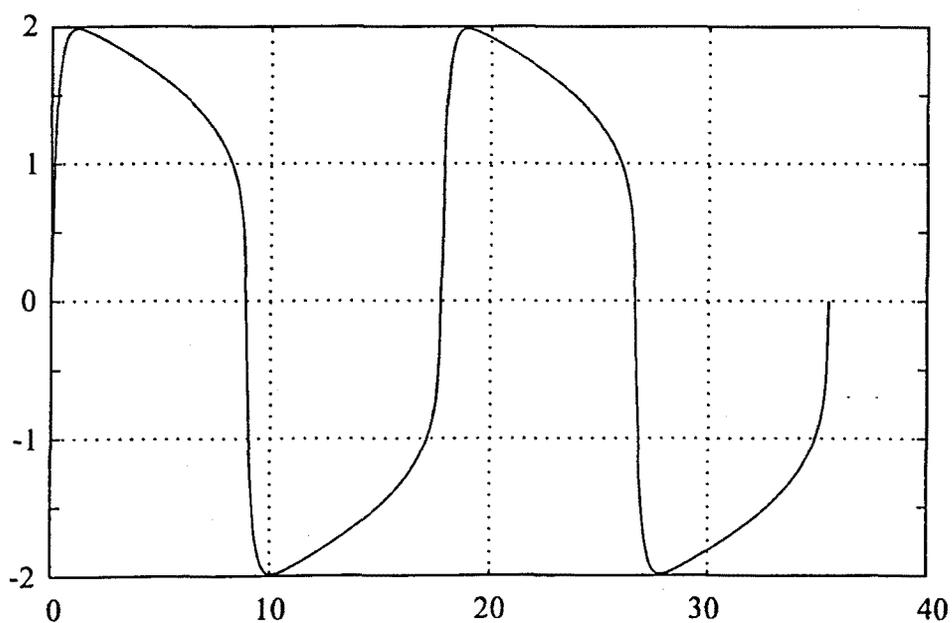


Figura 6.36. Forma de onda resultante para $\mu=8$

De los resultados obtenidos se desprende que, para valores de μ bajos, el término cúbico en la característica del condensador provoca una disminución de la amplitud y el suavizado de la tensión en sus terminales.

Cabe remarcar que las formas de onda obtenidas concuerdan plenamente con los resultados de la simulación del circuito de la figura 6.37 realizada con SPICE. Sobre este circuito cabe destacar la implementación de la capacidad no lineal, en forma de una fuente de corriente controlada por la tensión $v_a(t)$, que resulta ser la derivada respecto al tiempo de la función $q(v(t))$, consiguiéndose así el objetivo marcado.

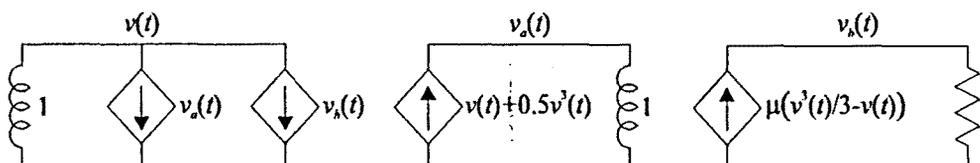


Figura 6.37. Circuito para la simulación SPICE del oscilador de van der Pol con una capacidad no lineal

6.2. Oscilador de Colpitts

Uno de los osciladores más comúnmente utilizados en aplicaciones de radiofrecuencia es el oscilador denominado de Colpitts. Existen un sinnúmero de realizaciones de este oscilador, construidas alrededor de distintos tipos de elementos activos. En este ejemplo se presenta una realización (ver figura 6.38), descrita en [29], construida alrededor de un transistor bipolar con únicamente dos resistores de polarización además de los elementos que conforman el circuito resonante. A pesar de su sencillez, en este ejemplo se ponen de manifiesto todas las características esenciales en esta clase de osciladores. En efecto, la presencia de dos alinealidades fuertes, resultantes del modelo de Ebers-Moll, y el funcionamiento en clase C del transistor bipolar [46] hacen el problema del análisis especialmente difícil.

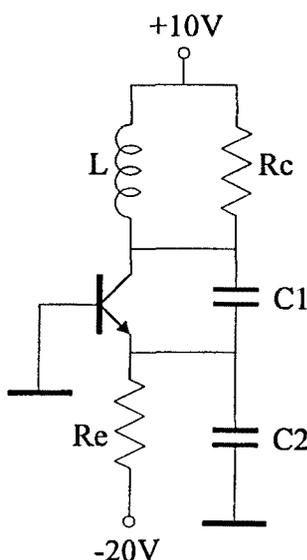


Figura 6.38 Oscilador Colpitts

Los valores de los elementos han sido normalizados, llegándose a los valores $R_c=10$, $L=0.1$, $C_1=2$, $C_2=0.8$ y $R_e=20$. El transistor bipolar ha sido modelado por las ecuaciones de Ebers-Moll, con parámetros $I_{cs}=462 \cdot 10^{-12}$, $I_{es}=7 \cdot 10^{-12}$, $\alpha_F=0.99$, $\alpha_R=0.015$ and $V_T=0.025$. Con el fin de simplificar la presentación, en la simulación no se han tenido en cuenta las capacidades parásitas (no lineales) del dispositivo. Además, conviene destacar que la inclusión de éstas no modificaría esencialmente el problema.

6.2.1. Análisis de la respuesta periódica del oscilador de Colpitts

También en este caso es conveniente efectuar un análisis previo del circuito con el fin de anticipar algunas características que permitan realizar una estimación inicial razonablemente próxima a la verdadera solución del circuito. Para ello, puede ser de ayuda trabajar sobre el circuito resultante tras introducir el modelo de Ebers-Moll.

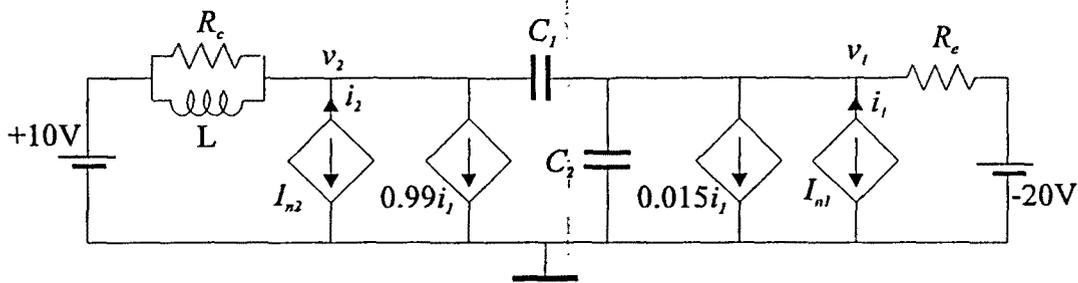


Figura 6.39. Circuito equivalente del oscilador Colpitts.

En la figura 6.39 se representa el circuito equivalente, donde las fuentes no lineales I_{n1} y I_{n2} vienen determinadas por las expresiones

$$I_{n1} = -I_{EO}(\exp(-40v_1) - 1)$$

$$I_{n2} = -I_{CO}(\exp(-40v_2) - 1)$$

Así, las variables a determinar serán, precisamente, v_1 y v_2 , las variables de control de las alinealidades que corresponden a v_{cb} y v_{cb} , respectivamente. A partir de ellas es posible determinar cualquier otra variable de circuito.

En este momento ya se puede adelantar que la tensión v_1 tendrá una componente continua igual a 10 v, ya que el inductor se comporta como un cortocircuito para la fuente de polarización. Asimismo, cabe esperar que el valor mínimo de v_2 sea del orden de -0.7 v, aproximadamente la tensión de codo de la característica I_{n2} . Dado que únicamente es necesario conocer un punto de paso de una de las variables, tras este análisis por simple inspección, ya se dispondría de información más que suficiente para abordar el problema de la determinación tanto de la forma de onda como del periodo de oscilación. No obstante, aún es deseable obtener una estimación inicial del periodo, con el fin de facilitar la resolución del sistema de ecuaciones sin tener que recurrir a la difusión simulada. El

procedimiento más inmediato para llegar a una estimación del mismo consiste en linealizar el circuito alrededor del punto de trabajo en continua y efectuar un análisis del circuito linealizado.

El circuito resultante en continua es el representado en la figura 6.40

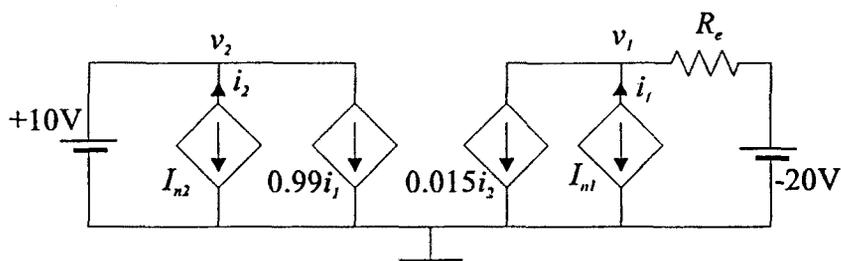


Figura 6.40. Circuito en continua.

Dado que la tensión v_2 viene fijada por la fuente de polarización, es posible determinar i_2 a partir de la característica de I_{n2} , resultando

$$i_{2Q} = -462 \cdot 10^{-12} \text{ A}$$

mientras que, escribiendo un KCL en el nodo donde está definida v_1 se obtiene

$$v_{1Q} = -0.6413 \text{ v}$$

Para obtener las conductancias lineales equivalentes a I_{n1} y I_{n2} para tensiones próximas a las de polarización es necesario calcular

$$\left. \frac{\partial i_1}{\partial v_1} \right|_{v_1 = -0.6413} \approx -38.72 \text{ } \Omega^{-1}$$

$$\left. \frac{\partial i_2}{\partial v_2} \right|_{v_2 = 10} \approx 0$$

Finalmente, el circuito equivalente en pequeña señal es el representado en la figura 6.41.

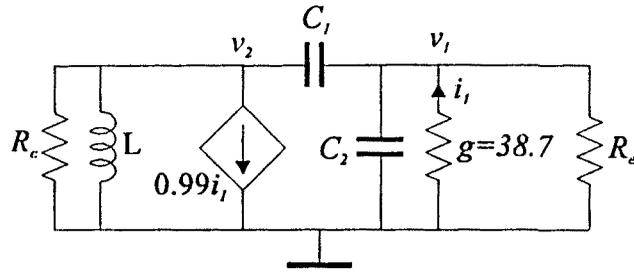


Figura 6.41. Circuito equivalente en pequeña señal

Tras un sencillo análisis del circuito lineal equivalente, se llega a obtener el denominador de las funciones de red, que resulta ser

$$1.6s^3 + 0.38s^2 + 31.88s + 387.7$$

y cuyas raíces resultan ser

$$s \approx \begin{cases} 2.5 \pm 6.32j \\ -5.24 \end{cases}$$

El polo situado en el semiplano izquierdo contribuirá a la respuesta libre mediante una exponencial decreciente, mientras que el par de polos complejos conjugados se traducirá en una componente senoidal cuya amplitud crecerá exponencialmente. Como es natural, la presencia de elementos no lineales limitará la amplitud máxima a una determinada cota; no obstante, en este momento interesa el periodo de la senoide creciente, ya que puede servir como primera aproximación al periodo finalmente obtenido. Así, una estimación inicial razonable para el periodo podría ser

$$T = \frac{2\pi}{6.32} \approx 1 \text{ s}$$

Con la información de que se dispone, ya es posible escribir, como una posible primera estimación,

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \sin(2\pi t) \\ v_2(t) &= 10 + \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Las formas de onda resultantes del análisis para diferentes números de muestras por periodo se representan en las figuras siguientes. De éstas se desprende que la estimación del periodo realizada por linealización alrededor de las polarizaciones difiere del orden de un 50% del periodo que realmente se obtiene. No obstante, ello no compromete la solución de las ecuaciones.

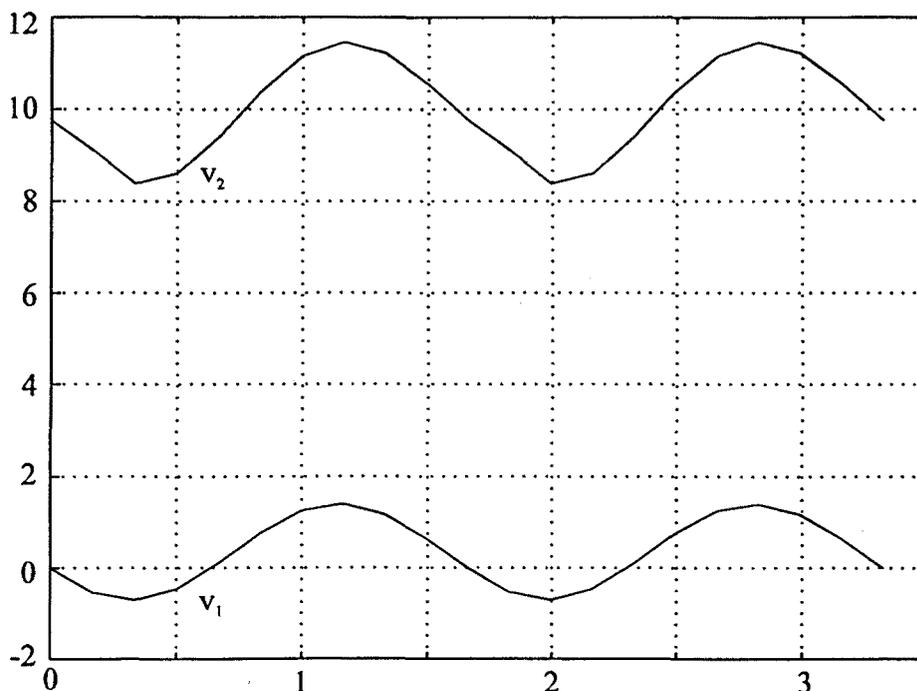


Figura 6.42. Formas de onda obtenidas. (N=10)

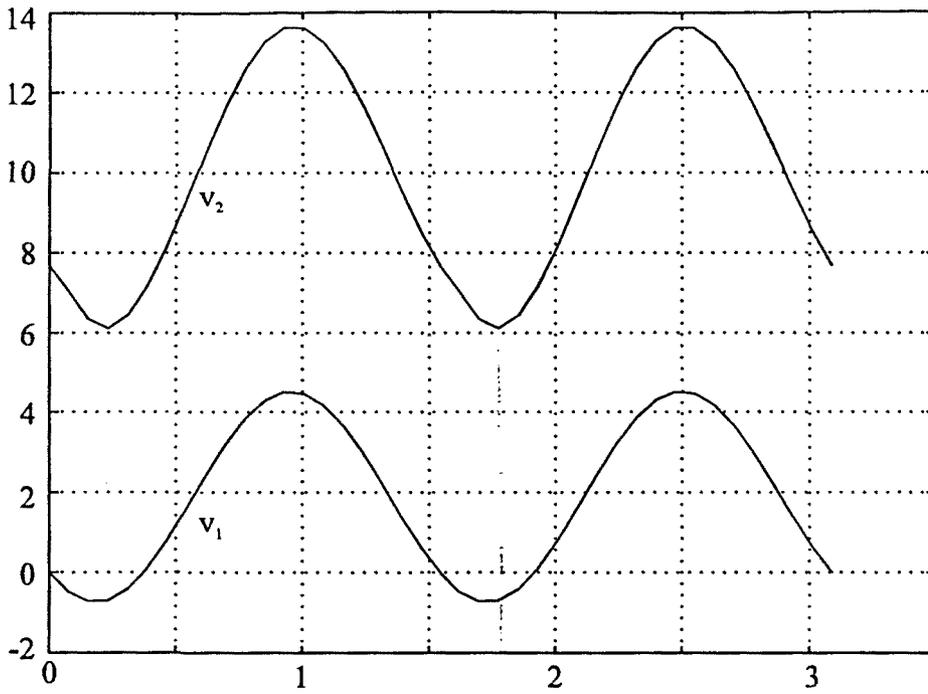


Figura 6.43. Formas de onda obtenidas. (N=20)

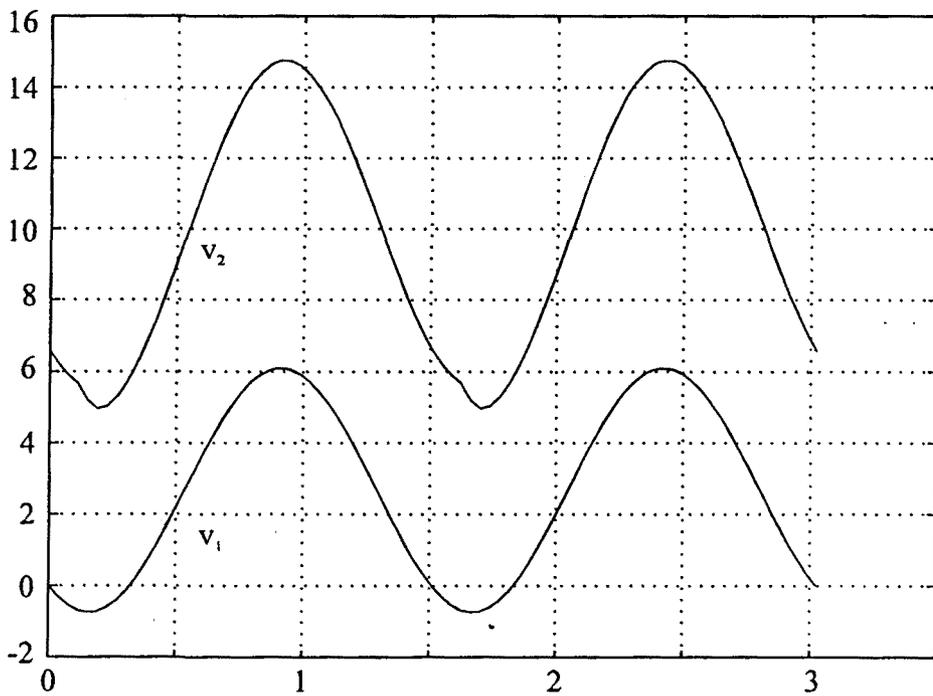


Figura 6.44. Formas de onda obtenidas. (N=40)

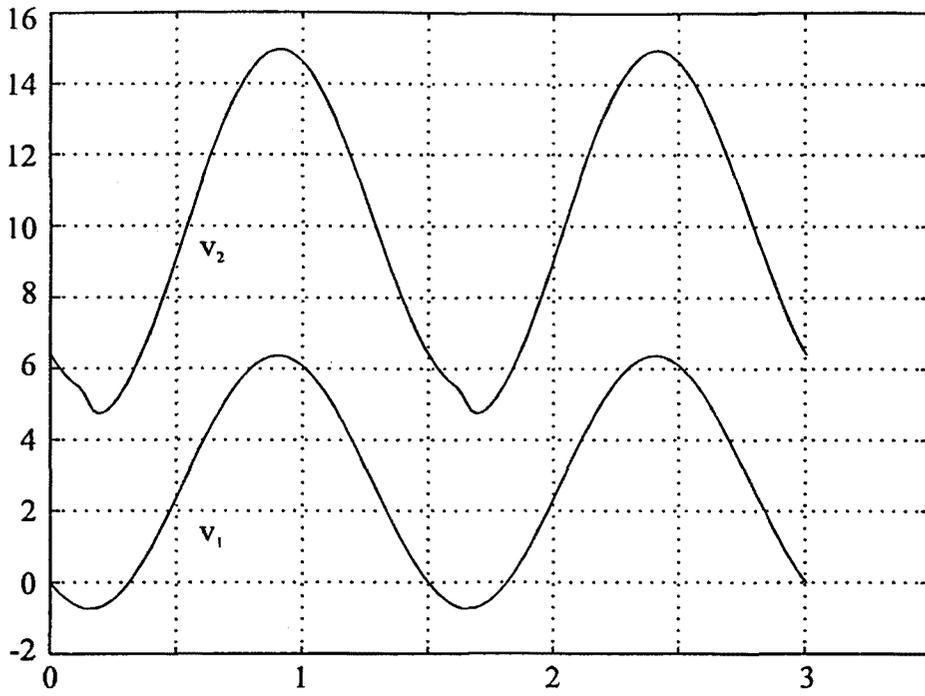


Figura 6.45. Formas de onda obtenidas. (N=80)

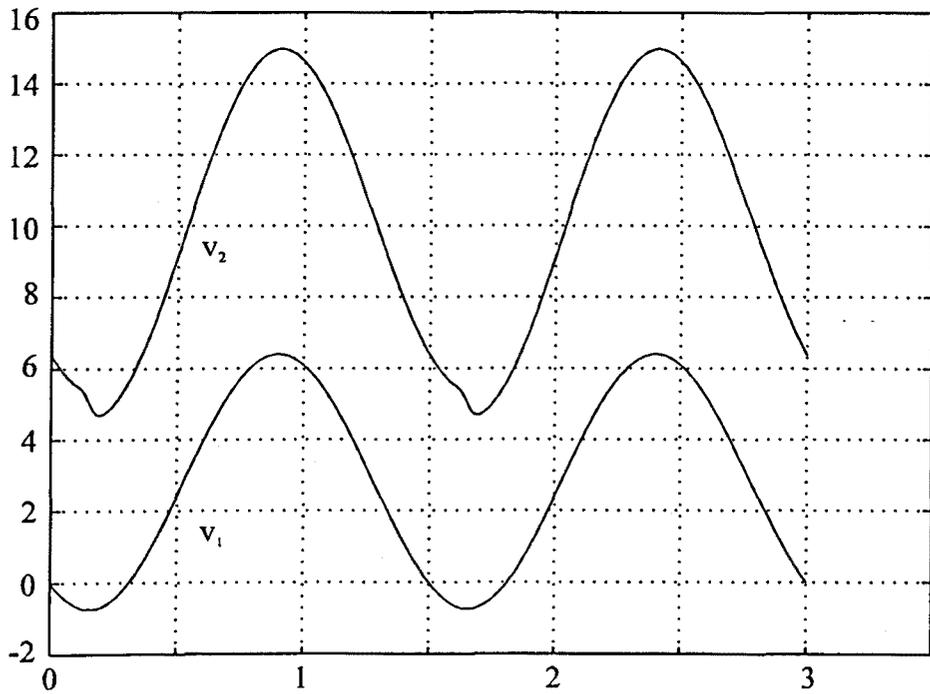


Figura 6.46. Formas de onda obtenidas. (N=160)

Como era previsible, también se observa que, a medida que el número de muestras por periodo aumenta, las formas de onda obtenidas convergen hacia una forma de onda límite, la solución exacta del problema continuo.

Cabe señalar que la solución de este problema haciendo uso de SPICE requiere tomar una serie de precauciones con el fin de evitar la obtención de resultados erróneos. Las formas de onda que resultan de una simulación directa del circuito de la figura 6.39 mediante SPICE se presentan en la figura 6.47.

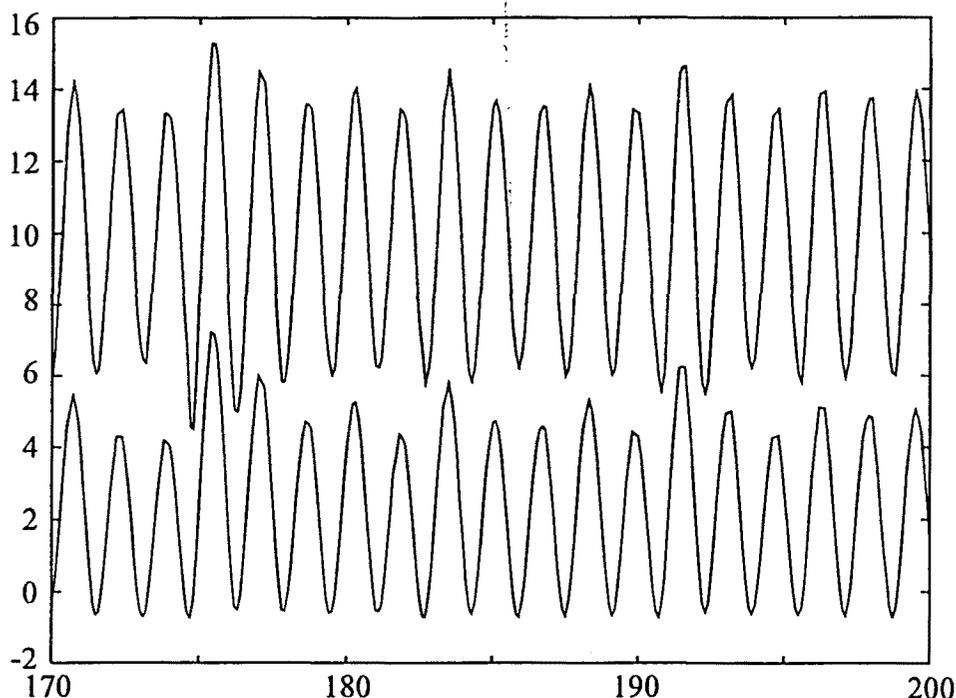


Figura 6.47. Resultado de la simulación SPICE del oscilador Colpitts en el intervalo de tiempo de 170 a 200 segundos

Una mirada superficial a los resultados de la simulación tras, aproximadamente 100 segundos podría llevar a pensar que se ha alcanzado el régimen permanente. Ello no es así, como se comprueba al representar el intervalo de tiempos entre 170 y 200 segundos. En la figura 6.47 se comprueba que, aunque la forma de onda se mantiene acotada, no puede hablarse de respuesta periódica.

Así, también al abordar el análisis de este oscilador con SPICE, es necesario efectuar un análisis previo para estimar el valor máximo del paso de integración. Considerando que 20 muestras por periodo son suficientes para obtener una buena representación de las señales, el paso de integración que debe suministrarse a

SPICE es de 0.075 segundos. Una segunda simulación con este parámetro conduce a las formas de onda representadas en la figura 6.48 donde, nuevamente, la forma de onda obtenida aún no resulta periódica. En realidad, es necesario reducir el paso de integración hasta 0.01 segundos para conseguir una respuesta aceptablemente periódica, lo que equivale a tomar 150 muestras por periodo, cifra comparable a la que se requiere con la técnica propuesta.

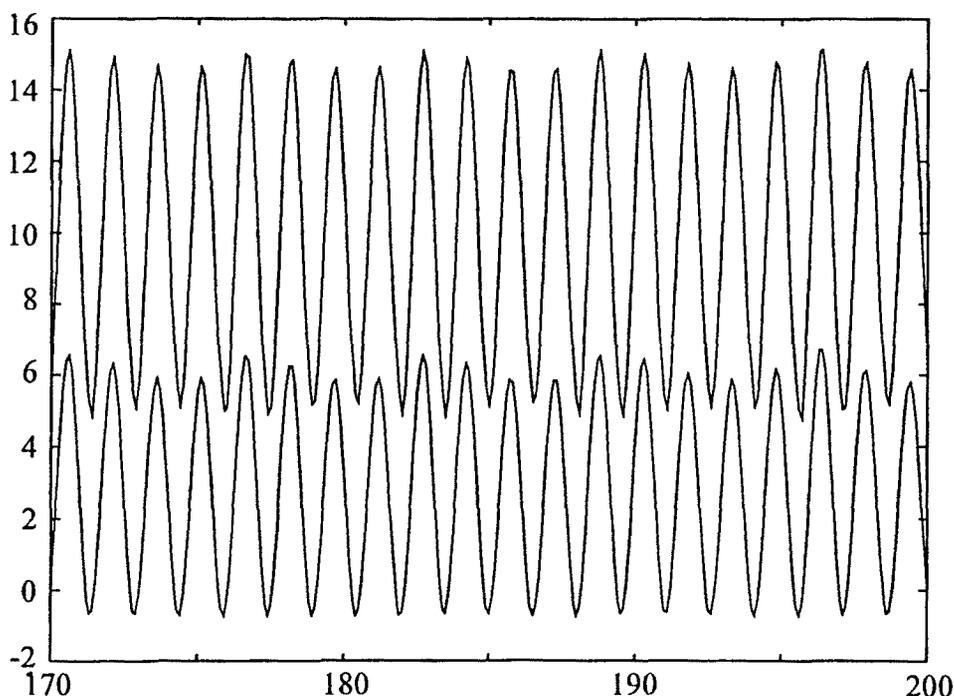


Figura 6.48. Simulación SPICE del oscilador Colpitts tomando un paso de integración que resulte en 20 muestras por periodo, aproximadamente.

En conclusión, este ejemplo ha servido tanto para demostrar la eficacia de la técnica de análisis propuesta como para corroborar las dificultades que entraña la determinación del régimen periódico a partir de una simulación directa del circuito en el dominio temporal.

6.2.2. Optimización de la respuesta periódica del oscilador de Colpitts

El siguiente problema a abordar consiste en modificar el valor de alguno de los elementos de circuito con el fin de obtener un periodo de oscilación especificado a priori. Eligiendo como elemento variable el condensador C2 y efectuando el análisis con N=80 muestras por periodo, se llega a los resultados presentados en la tabla 6.4. En ella se detalla el valor necesario de C2 para conseguir un periodo especificado junto con el número de iteraciones necesarias para llegar a este resultado, partiendo de las estimaciones adyacentes.

Por otro lado, en la figura 6.49 se representan gráficamente los valores recogidos en la tabla 6.4. A estos datos se les ha superpuesto la curva

$$T = 2\pi \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (6.2)$$

que corresponde a la condición de oscilación resultante de imponer que los polos del circuito, supuesto *lineal*, estén sobre el eje imaginario.

Cabe destacar que las condiciones en las que realmente funciona el oscilador distan mucho de ser asemejables a funcionamiento lineal. Además, la linealización realizada alrededor de la solución en continua resulta en un circuito inestable, lo que explica el arranque del circuito. Por todo esto, no deja de ser sorprendente la concordancia que se observa en la figura y que se verifica para valores del periodo de oscilación muy distintos. No obstante, de hecho, es práctica habitual utilizar la expresión analítica 6.2 como ecuación de diseño para determinar los valores de los elementos reactivos con el fin de conseguir una frecuencia determinada. Así, en el caso que nos ocupa, esta expresión sirve, de hecho, para validar los resultados obtenidos numéricamente.

	C2	iteraciones
T=0.6	0.0979	14
T=0.8	0.178	9
T=1	0.290	7
T=1.1	0.362	7
T=1.2	0.446	6
T=1.3	0.544	6
T=1.4	0.659	6
T=1.5	0.794	4
T=1.6	0.956	6
T=1.7	1.15	6
T=1.8	1.38	6
T=1.9	1.67	6
T=2.0	2.04	13
T=2.2	3.16	27
T=2.5	7.63	32

Tabla 6.4. Valores de C2 para conseguir un periodo de oscilación especificado a priori.

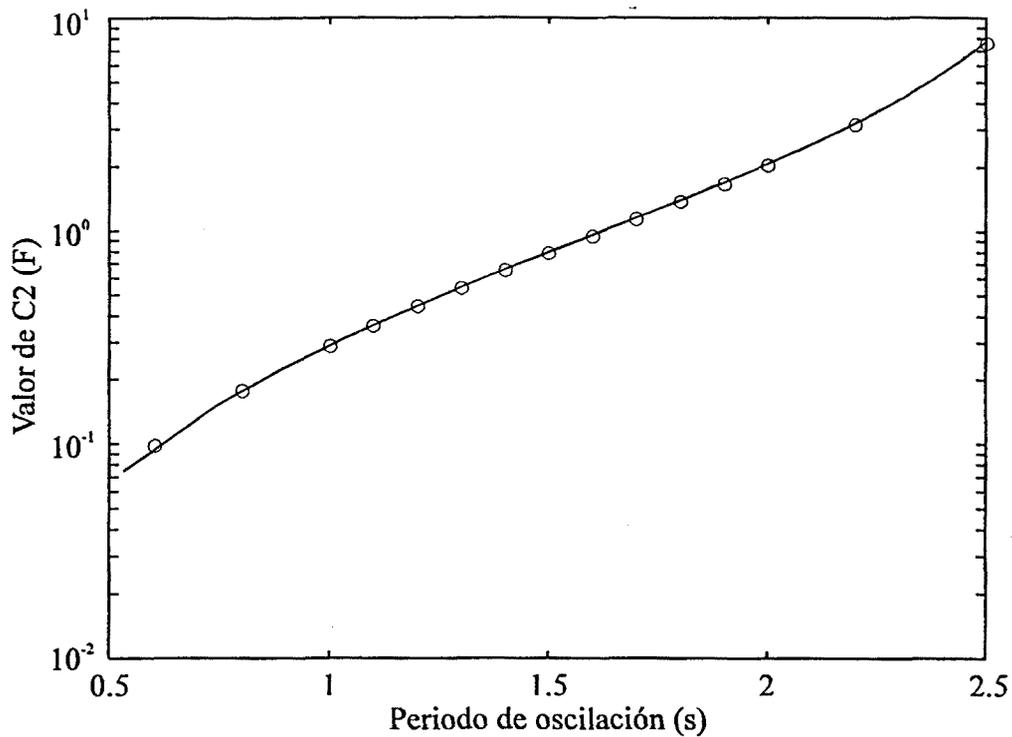


Figura 6.49. Valor de C_2 necesario para conseguir un periodo determinado.

Es igualmente interesante representar las formas de onda resultantes en los casos $T=0.6$ con $C_2=0.0979$ y $T=2.5$ con $C_2=7.63$. Ambas situaciones se representan en las figuras 6.50 y 6.51. Se comprueba que, a medida que disminuye C_2 , la amplitud de las señales disminuye, proceso que podría llevarse al límite, haciendo $C_2=0$, situación en la que deja de producirse el lazo de realimentación positiva que conduce a la oscilación.

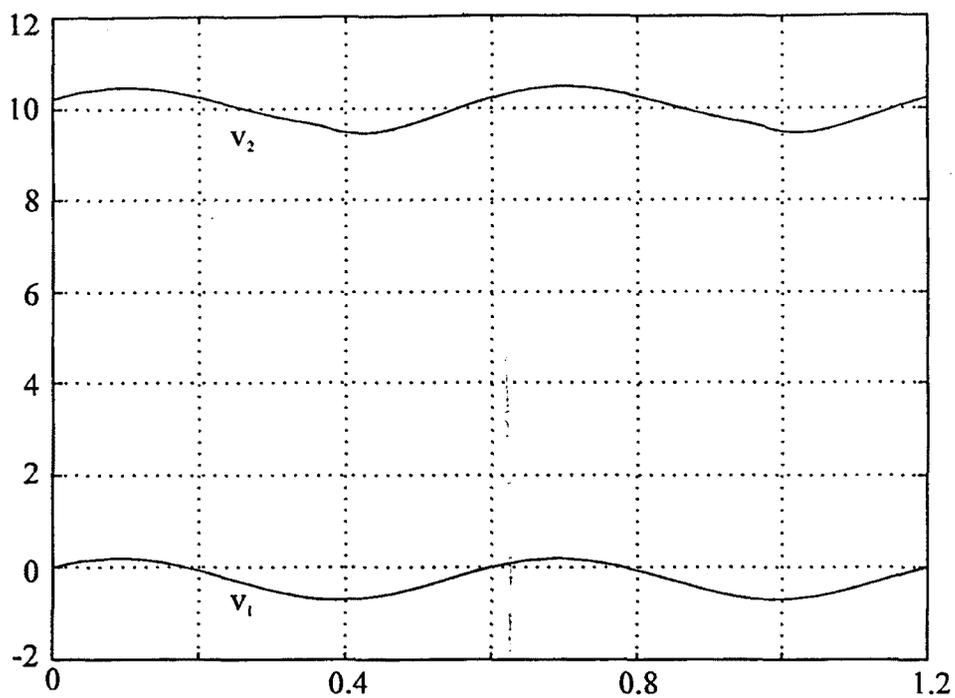


Figura 6.50. Oscilación de periodo $T=0.6$

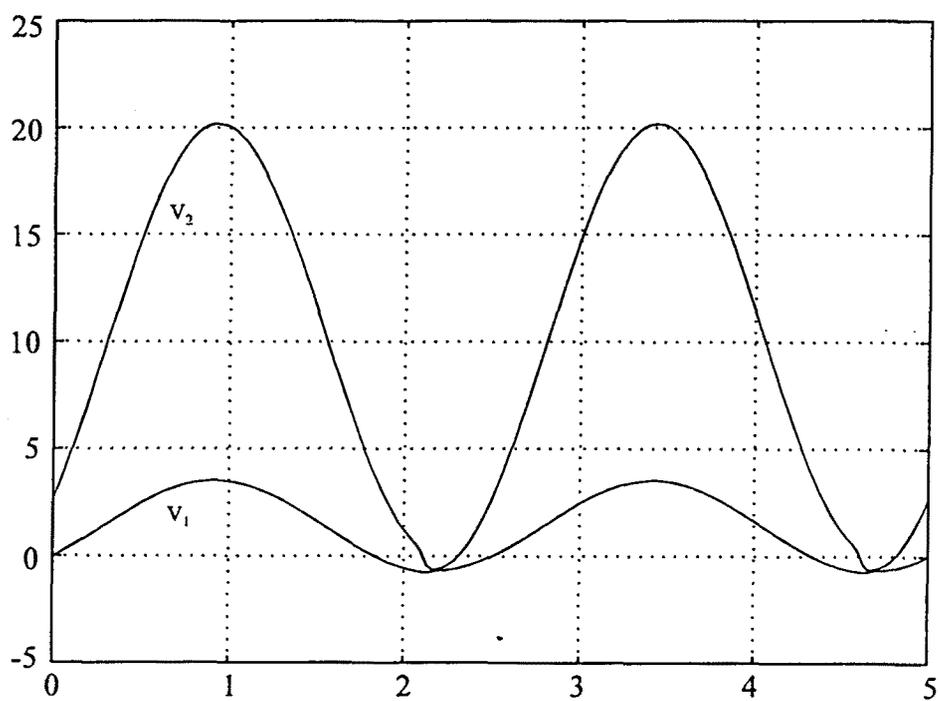


Figura 6.51. Oscilación de periodo $T=2.5$

6.3. Análisis y ajuste de un oscilador OTA-C

De entre las múltiples estructuras de osciladores realizados mediante la interconexión de OTAs y condensadores [40], la representada en la figura 6.52 es la que presenta menor complejidad en cuanto al número de componentes.

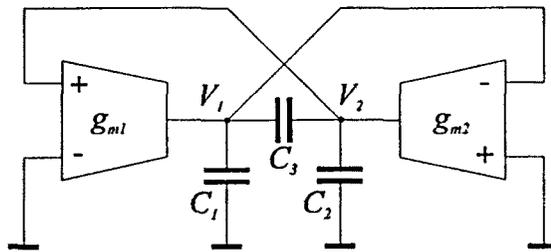


Figura 6.52. Oscilador TACO

Como es fácilmente intuible, el reducido número de elementos dificultará el proceso de diseño, al ser los grados de libertad necesariamente restringidos.

En el circuito de la figura 6.52 todos los elementos se comportan de forma aproximadamente lineal. Ello es cierto también para ciertas realizaciones de OTA, siempre y cuando la amplitud de las tensiones de entrada no supere 1V, aproximadamente. El determinante de la matriz nodal de este circuito lineal resulta ser

$$C_{eq}^2 s^2 - C_3(g_{m1} - g_{m2})s + g_{m1}g_{m2}$$

o, en su forma normalizada

$$s^2 - \frac{C_3(g_{m1} - g_{m2})}{C_{eq}^2} s + \frac{g_{m1}g_{m2}}{C_{eq}^2} = s^2 - bs + \omega_o^2 \quad (6.3)$$

donde

$$C_{eq}^2 = C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3$$

Así, para que el circuito se comporte como un oscilador sinusoidal, es necesario que el coeficiente del término en s se anule, llevando los polos sobre el eje imaginario. En este caso, la frecuencia de oscilación viene dada por

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g_{m1}g_{m2}}{C_{eq}}} \quad (6.4)$$

No obstante, en la práctica es imposible asegurar que los polos estén situados exactamente sobre el eje $j\omega$. En consecuencia, para garantizar el arranque del oscilador es necesario realizar el diseño situando inicialmente los polos en el semiplano derecho, de forma que la respuesta libre del circuito sea una oscilación de amplitud creciente.

Como es conocido, para conseguir respuestas oscilatorias estables —sean o no sinusoidales— es necesario introducir algún tipo de alinealidades. En el circuito de la figura 6.52 la propia característica no lineal de los elementos activos serviría para estabilizar las oscilaciones. Otra posibilidad consiste en incluir un elemento no lineal adicional que actúe antes que las alinealidades de los OTA. De esta forma, la limitación se produce de forma más controlada.

Una forma de implementar esta idea es conectar una conductancia no lineal, con la característica i - v representada en la figura 6.53, entre los nodos en los que se define V_I .

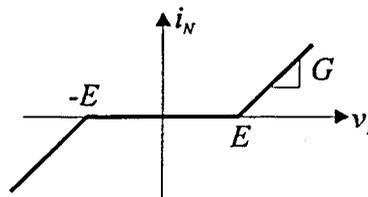


Figura 6.53. Conductancia no lineal para la limitación de amplitud

Tras introducir este elemento, el circuito equivalente a analizar es el que se representa a continuación

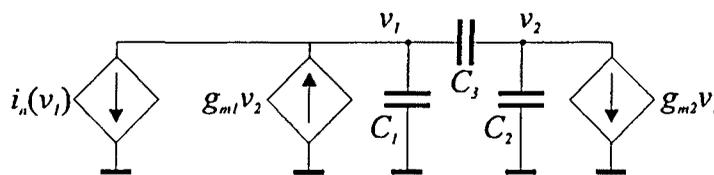


Figura 6.54. Circuito equivalente

El análisis de este circuito se ha realizado inicialmente tomando los valores normalizados $C_1=C_2=C_3=0.5$, $g_{m1}=2$, $E=0.35$ y $G=1$, correspondientes a los

valores sin normalizar $C_1=C_2=C_3=5$ pF, $g_{m1}=2$ mmho, $E=0.35$ V y $G=1$ mmho.

Para garantizar el arranque del circuito es necesario tomar $g_{m1} < 2$, siendo a priori razonable tomar $g_{m1} \approx 2$ con el fin de que los polos no se aparten excesivamente del eje imaginario. En la figura 6.55 se representa la forma de onda resultante con $g_{m1}=1.99$.

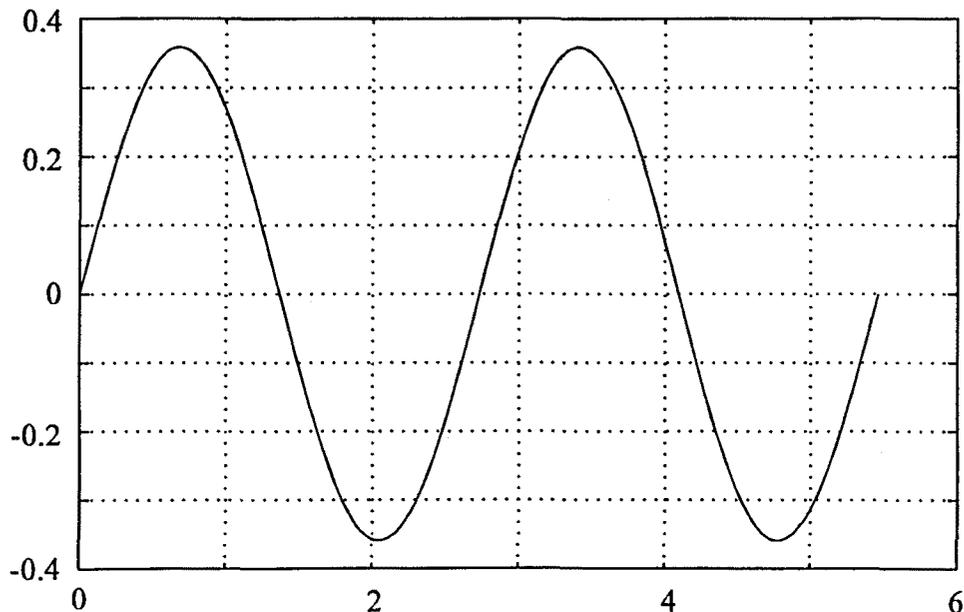


Figura 6.55. Tensión $v_I(t)$ con $g_{m1}=1.99$. La frecuencia de oscilación resultante desnormalizada es. $f=36.63$ Mhz

Obsérvese que la forma de onda resultante $v_I(t)$, obtenida con $N=120$ muestras por periodo, presenta una amplitud máxima de 0.359 V, cercana a los 0.35 V que corresponden a la tensión de codo E de la característica no lineal. Ello hace que sea previsible que la distorsión armónica sea muy reducida. Esta se ha calculado a partir de los coeficientes de Fourier, c_n , a partir de la expresión

$$D(\%) = 100 \frac{\sum_{k=2}^{N/2} |c_k|^2}{\sum_{k=1}^{N/2} |c_k|^2}$$

donde N es el número de muestras por periodo utilizadas.

En la situación representada en la figura 6.55, el valor de distorsión armónica calculado es $D=1.4 \cdot 10^{-4} \%$, lo que concuerda con las expectativas iniciales. Excelente concordancia es también la que se produce en la frecuencia de oscilación, con un error relativo menor de 0.08%.

En el circuito de la figura 6.54 los parámetros que presentan mayor facilidad para su ajuste son los valores de las transconductancias g_{m1} y g_{m2} . Nótese, sin embargo, que el *ajuste* de la frecuencia de oscilación presentará dificultades, ya que al modificar la frecuencia de oscilación, según la expresión (6.3), también se modifica el término b que controla el desplazamiento de los polos respecto al eje imaginario. Idealmente, el ajuste debería efectuarse simultáneamente sobre g_{m1} y g_{m2} de forma que su diferencia fuera nula y su producto determinara la frecuencia de oscilación.

No obstante, cabría pensar en modificar únicamente g_{m2} , dejando g_{m1} fija. Dado que g_{m2} ha de ser superior a g_{m1} para garantizar el arranque del oscilador, podría pensarse en disminuir progresivamente g_{m2} . Al desplazarse los polos progresivamente hacia el semiplano derecho, cabe esperar que el comportamiento del circuito se aleje de los resultados teóricos.

La figura 6.56 ilustra parte de este experimento. En efecto, en esta figura se representan en forma de círculos las frecuencias de oscilación resultantes para valores de g_{m2} entre 0.1 y 2. A los resultados numéricos obtenidos se les ha superpuesto la frecuencia de oscilación f_o que resultaría en el caso de funcionamiento lineal, observándose una concordancia elevada, además de una cierta linealidad.

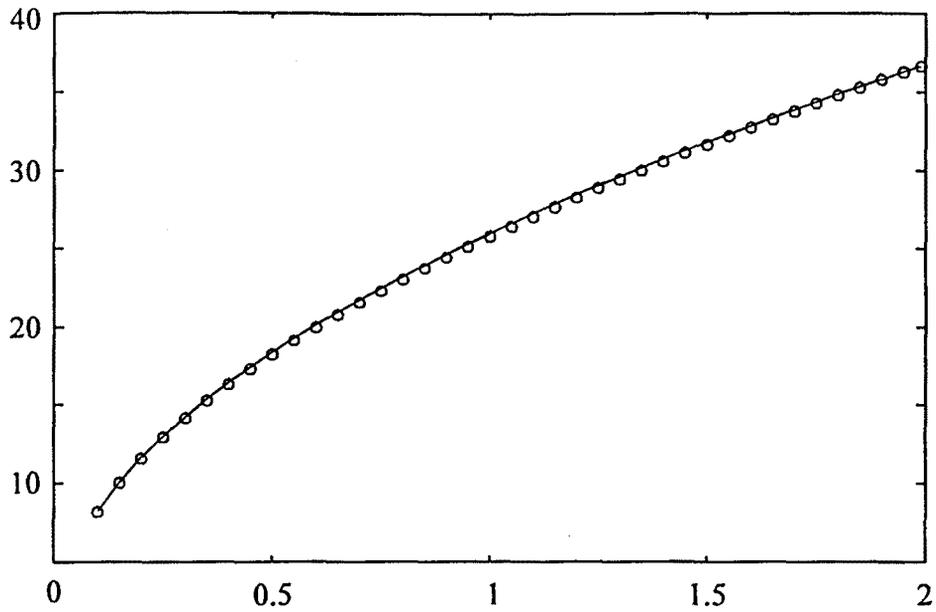


Figura 6.56. Frecuencia de oscilación (en MHz) en función de g_{m2} (en mmho)

La distorsión armónica resultante para cada uno de los diferentes valores de g_{m2} se representa a continuación.

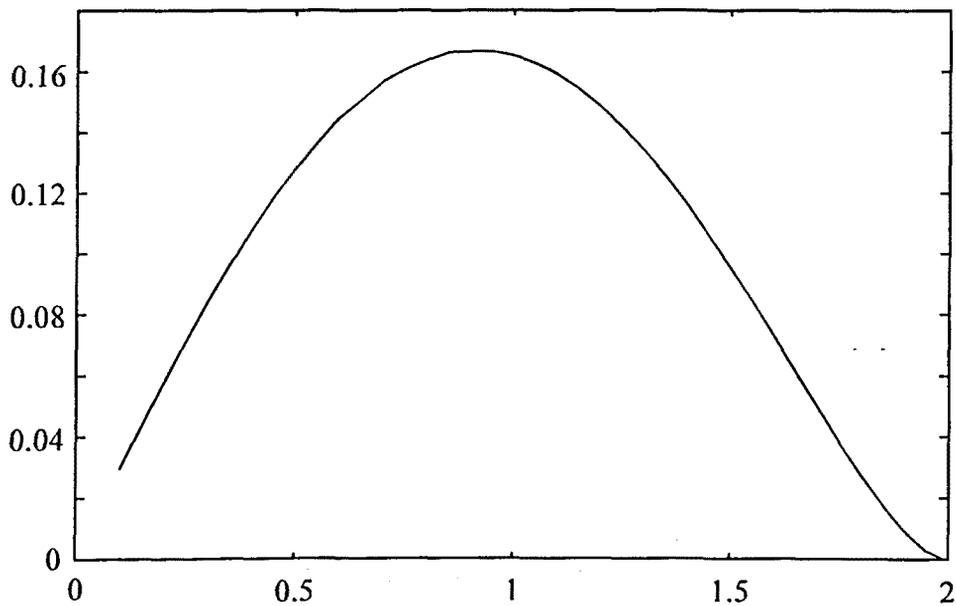


Figura 6.57. Distorsión armónica (en %) en función de g_{m2} .

En esta figura se observa que, para valores de g_{m2} próximos a $g_{m2}=2$, la distorsión es prácticamente nula. Disminuyendo progresivamente g_{m2} la distorsión aumenta hasta un valor máximo de D cercano al 0.16%, que se produce para g_{m2}

aproximadamente 0.9. A partir de este punto, la disminución de g_{m2} se traduce en una *disminución* de la distorsión armónica a pesar de que el término b se hace cada vez mayor.

No obstante, y como era previsible, los cambios producidos en g_{m2} , además de afectar a la frecuencia de oscilación, también afectan a la amplitud de las oscilaciones. La evolución de ésta en función de g_{m2} se muestra en la figura 6.58, donde se aprecia el incremento en la amplitud de las oscilaciones a medida que g_{m2} va disminuyendo.

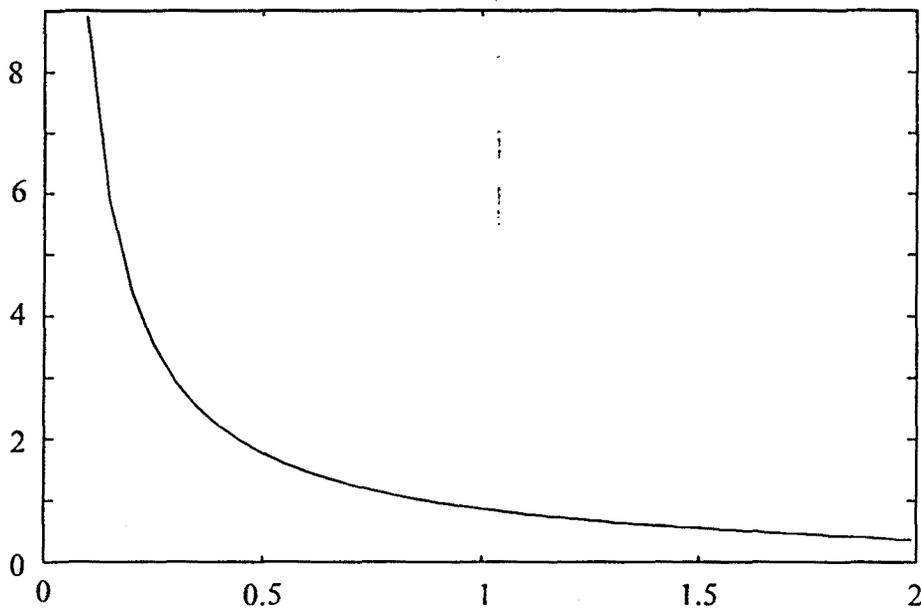


Figura 6.58. Amplitud máxima en función de g_{m2}

Determinados OTA presentan una transconductancia lineal aunque únicamente para tensiones de entrada pequeñas, en general inferiores al voltio. A la vista de la figura 6.58 puede concluirse que para valores de g_{m2} inferiores a 1, la amplitud de las oscilaciones supera el margen en el que los OTA operan en zona lineal, siendo necesario incluir este efecto en la simulación. No obstante, cabe la posibilidad de reducir la amplitud de las oscilaciones actuando sobre el valor E de la conductancia no lineal de limitación.

Esta situación se ilustra en la figura 6.59, donde se representa la tensión v_1 para $E=0.35$ V y para $E=0.1$ V. Conviene notar que la forma de onda resultante en este segundo caso únicamente difiere del primero en un factor de amplitud igual

al cociente 0.1/0.35. Así, es posible mantener inalterada la amplitud y la forma de las oscilaciones sin más que actuar convenientemente sobre el parámetro E .

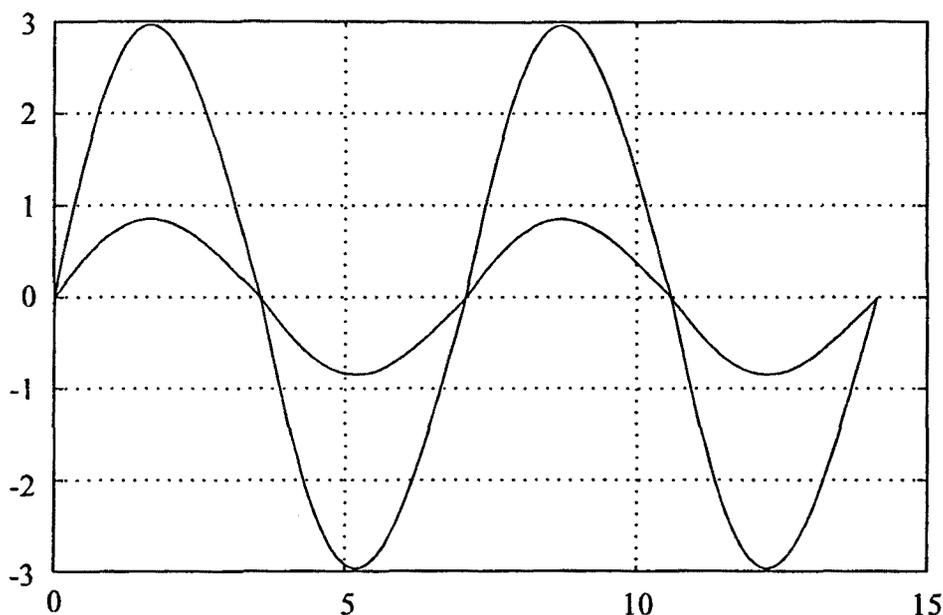


Figura 6.59. Reducción lineal de la amplitud actuando sobre la tensión de codo E .

Esta constatación sugiere que para variar la frecuencia de oscilación actuando únicamente sobre el parámetro g_{m2} , es conveniente introducir un control automático de amplitud, basado en la modificación de la tensión de codo de forma inversamente proporcional a la amplitud de pico. Es decir, desde un punto de vista formal, se tendría el esquema de la figura 6.60.

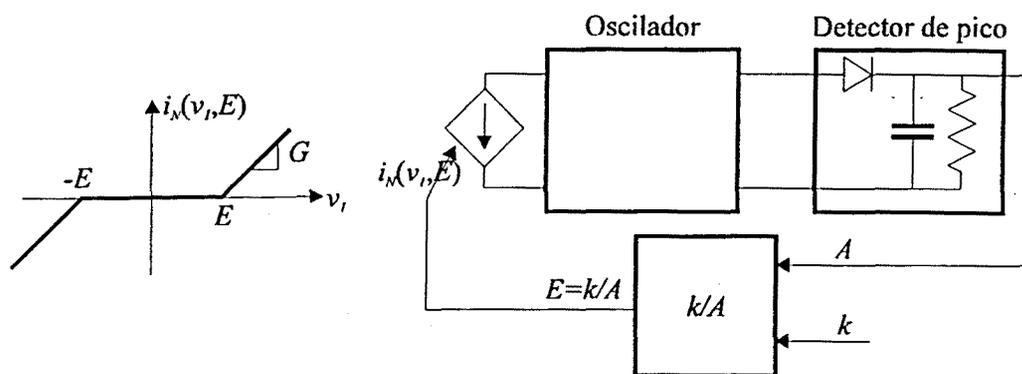


Figura 6.60. Diagrama conceptual para el control de la amplitud.

Cabe destacar que los resultados presentados hasta este momento no tienen en cuenta la presencia de efectos parásitos. El efecto que produce la inclusión de los mismos es el objeto del siguiente estudio.

Entre los principales efectos parásitos a considerar en el diseño de TACOs figura, por un lado la conductancia de salida de los OTA y, por otro, la dependencia frecuencial de su transconductancia. A partir de ahora, se considerará la presencia de una conductancia de salida distinta de cero $G_o = 10^{-6}$ mho— y una dependencia frecuencial de g_m de la forma

$$g_m(s) = g_m \left(1 - \frac{s}{\omega_z} \right)$$

con $\omega_z = 5 \cdot 10^9$.

La introducción de estos efectos parásitos modifica ligeramente los resultados de las simulaciones efectuadas. En particular, las expresiones de b y de ω_o cambian ligeramente, como describen Linares *et al.* en [40]. La figura siguiente ilustra la forma de onda obtenida con la inclusión de los mencionados efectos parásitos además de la conductancia no lineal controladora de la amplitud, siendo el incremento de la amplitud de las oscilaciones la diferencia principal con respecto al caso anterior.

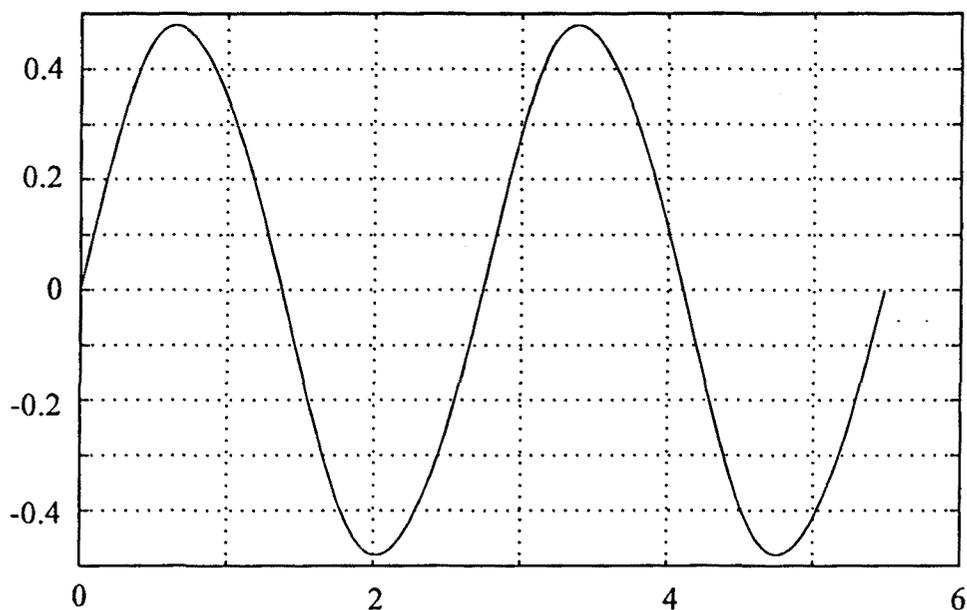


Figura 6.61. Tensión $v_f(t)$ con la influencia de efectos parásitos. La frecuencia de oscilación desnormalizada es de 36.52 MHz

Puede observarse que se ha producido un ligero desplazamiento de la frecuencia respecto al caso anterior, aunque éste no llega a ser del 0.3%.

La frecuencia de oscilación resultante al realizar un barrido en g_{m2} se representa en la figura 6.62, mientras que la variación porcentual respecto a la frecuencia teórica obtenida de la expresión (6.4) queda reflejada en la figura 6.63.

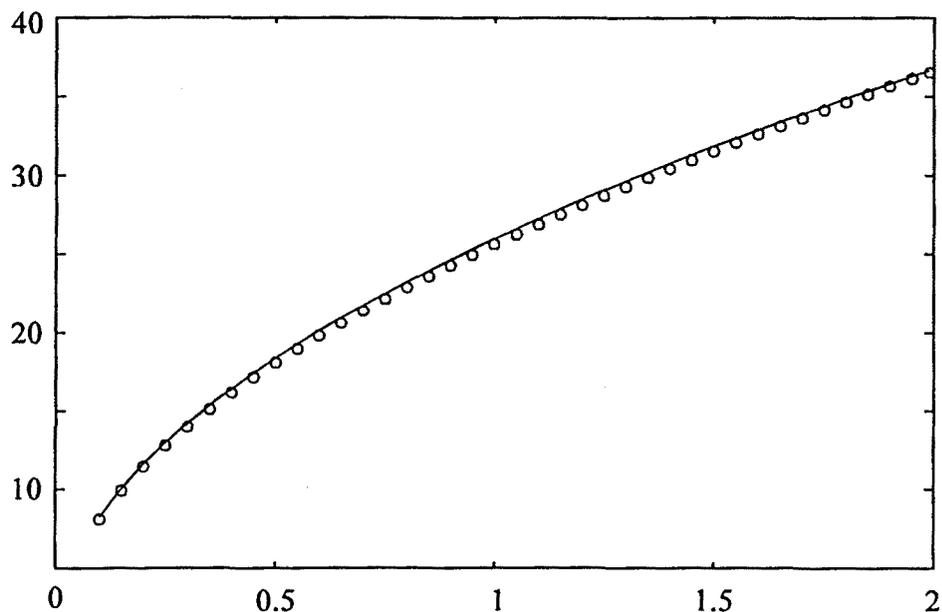


Figura 6.62. Frecuencia de oscilación (en MHz) frente a g_{m2} (mmho) considerando la presencia de efectos parásitos.

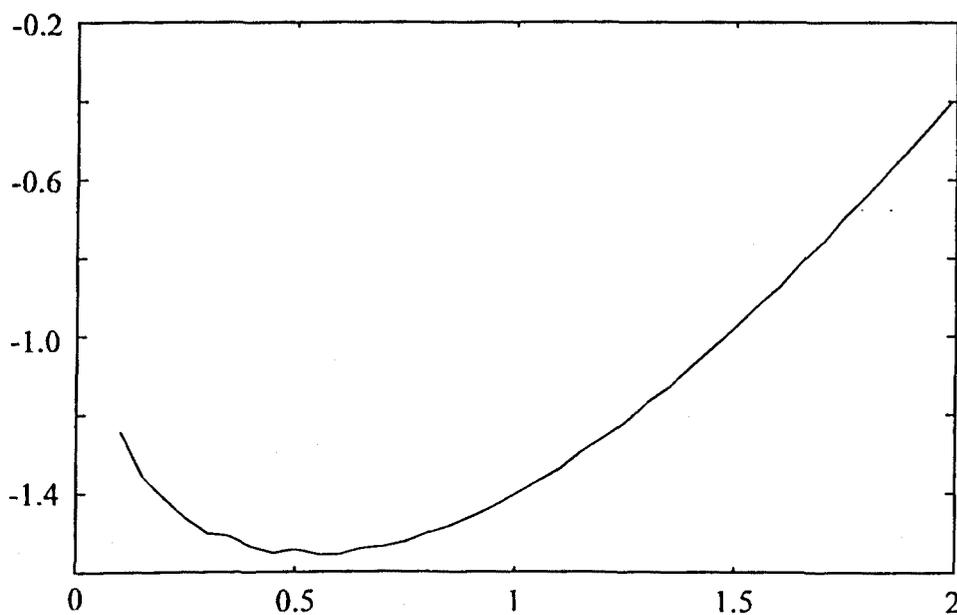


Figura 6.63. Desviación porcentual de la frecuencia de oscilación respecto a la teórica, considerando la presencia de efectos parásitos.

La distorsión armónica resultante queda reflejada en la figura 6.64. Es a destacar que la distorsión para $g_{m2}=2^*$ es claramente superior a la obtenida sin la presencia de los parásitos. No obstante, el máximo de la gráfica 6.64 es inferior al caso ideal, al igual como ocurre para valores pequeños de g_{m2} .

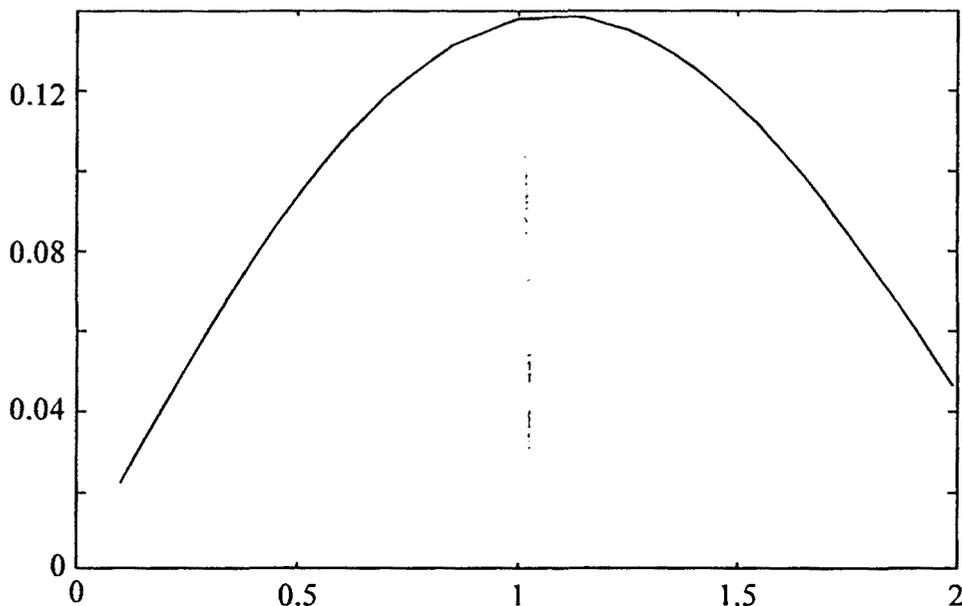


Figura 6.64. Distorsión armónica total (en %) incluyendo los efectos parásitos

Asimismo, como ilustra la figura 6.65, en este caso se observa un incremento de la amplitud de las oscilaciones, aunque la variación relativa de amplitud frente a variaciones de g_{m2} ha disminuido.

A continuación se aborda un problema de ajuste de la frecuencia de oscilación haciendo uso de la técnica propuesta. En particular, el problema consiste en conseguir una frecuencia de oscilación de 30 MHz, teniendo en cuenta la influencia de los elementos parásitos incluidos en el apartado anterior.

En este caso consideraremos fijos los valores de todos los elementos de circuito, incluyendo los parámetros de la alinealidad, y dejando libre el valor del condensador C_3 . Para esta experiencia se han elegido los valores (normalizados) de $g_{m1}=2$, $g_{m2}=1.8$, $C_1=C_2=0.5$, $G=1$ y $E=0.35$.

* Nótese que la presencia de efectos parásitos hace posible la oscilación con $g_{m2}=g_{m1}$.

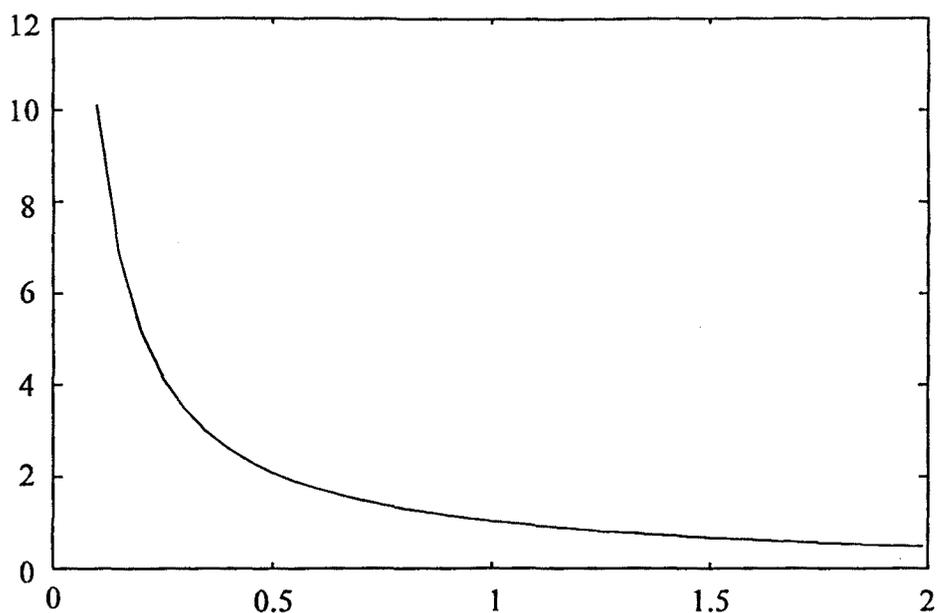


Figura 6.65. Amplitud de las oscilaciones (en voltios) frente a g_{m2} , expresada en mmho.

Con estos valores y $C_3=0.5$, la frecuencia teórica de oscilación calculada a partir de la expresión (6.4) resulta 34.87 MHz. Por otro lado, la simulación teniendo en cuenta la alinealidad y los elementos parásitos revela que la frecuencia de oscilación se desplaza hasta 34.65 MHz, con una distorsión armónica inferior al 0.08% y una amplitud de 0.54 V.

En primer lugar se especificará una frecuencia de oscilación de 30MHz. El proceso de optimización converge sin dificultad alguna hacia un valor de $C_3=0.7497$, correspondiente a $C_3=7.497$ pF, partiendo del diseño inicial con $C_3=0.5$. La tensión $V_1(t)$ que resulta con los nuevos valores se representa en la figura 6.66.

El análisis de esta forma de onda revela que la distorsión resultante aumenta ligeramente, aunque se mantiene en un valor tan bajo como el 0.087%. Por otro lado, la amplitud de las oscilaciones se mantiene prácticamente igual, pasando de 0.544V a 0.537V.

Por otro lado, la figura 6.67 refleja la forma de onda $V_1(t)$ resultante de exigir una frecuencia de oscilación de 40MHz, correspondiente a un periodo normalizado de 2.5s. El valor de C_3 que hace posible esta situación resulta ser $C_3=3.129$ pF.

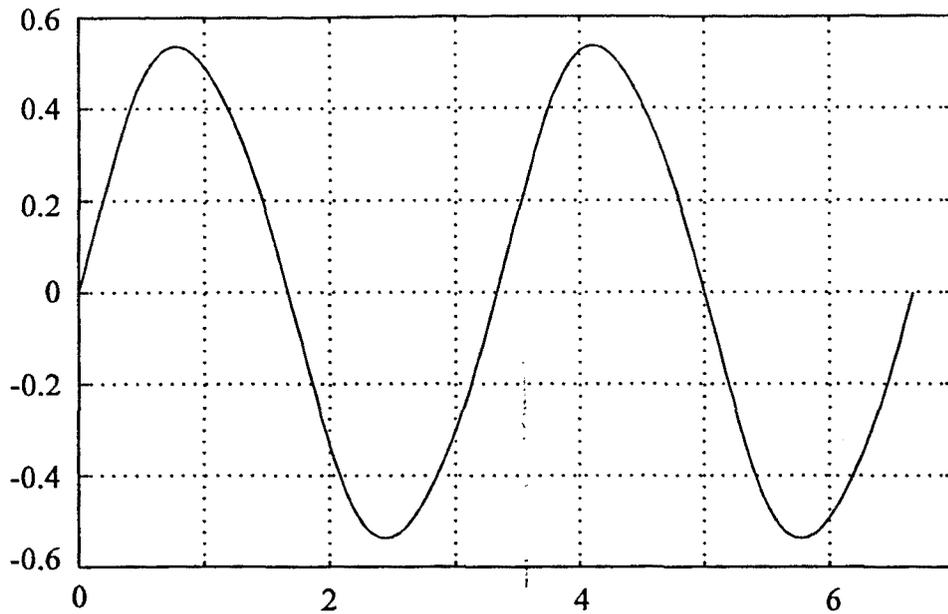


Figura 6.66. Forma de onda $V_1(t)$ resultante tras exigir una frecuencia de oscilación de 30 MHz, correspondiente a un periodo normalizado de 3.333s. El valor normalizado de C_3 que permite cumplir esta exigencia es $C_3=0.7497$, correspondiente a $C_3=7.497$ pF.

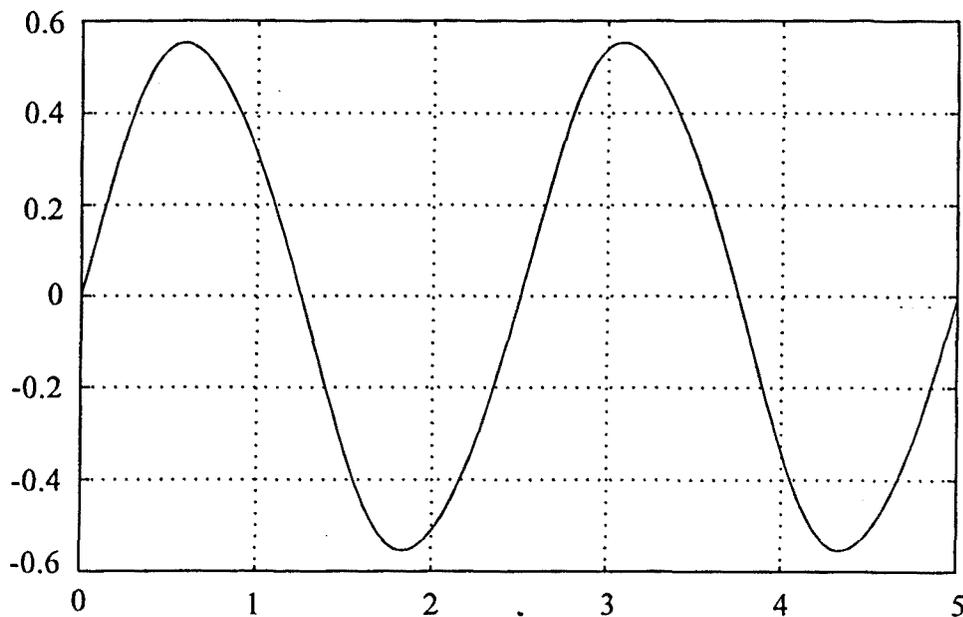


Figura 6.67. Forma de onda $V_1(t)$ resultante tras exigir una frecuencia de oscilación de 40 MHz, correspondiente a un periodo normalizado de 2.5s. El valor normalizado de C_3 que permite cumplir esta exigencia es $C_3=0.3129$, correspondiente a $C_3=3.129$ pF.

6.4. Comentarios finales

En este capítulo se ha ilustrado la aplicación del método de análisis y optimización propuesto en la presente tesis. De los ejemplos presentados es posible concluir que la formulación descrita permite abordar con eficacia la determinación de las formas de onda periódicas de circuitos autónomos.

En el capítulo 2 se ha demostrado que el método utilizado en la presente tesis es formalmente equivalente al método de balance armónico, tal vez el más ampliamente utilizado. No obstante, el enfoque temporal discreto presenta, respecto a éste, algunas ventajas:

- Posibilidad de elegir una regla de integración determinada al efectuar la discretización de la parte lineal del circuito.
- La formulación resultante permite el cálculo de derivadas parciales respecto a las muestras de las variables, respecto al periodo de oscilación y respecto a los elementos de circuito de forma sistemática y con una complejidad de cálculo extremadamente reducida.
- La matriz del jacobiano de las ecuaciones presenta una estructura muy bien definida, con un gran número de elementos nulos en posiciones conocidas, lo que permite reducir drásticamente el coste computacional de los pasos de Newton.
- Finalmente, la implementación de los algoritmos de solución descritos en la presente tesis permite abordar con suficientes garantías de éxito problemas que tradicionalmente presentan notables dificultades de convergencia.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS

7.1. Conclusiones

En esta tesis, se ha abordado la determinación de la respuesta periódica de circuitos no lineales planteando las ecuaciones de equilibrio en forma vectorial en el dominio temporal discreto. Para ello se ha discretizado el multipuerto lineal resultante de extraer las alinealidades del circuito mediante la aplicación de transformaciones de plano s a plano z .

A diferencia de como ocurre con los métodos temporales habituales, la solución de las ecuaciones resultantes son, directamente, las formas de onda en régimen permanente, de forma análoga a como ocurre con los métodos frecuenciales. No obstante, dado que el problema está planteado íntegramente en el dominio temporal, durante su resolución no es necesario realizar las repetidas transformaciones entre dominios necesarias al hacer uso de métodos frecuenciales.

Esta técnica, desarrollada recientemente [27] para el *análisis* de circuitos excitados, ha sido extendida al análisis de circuitos *autónomos*. Asimismo se ha desarrollado una sistemática que permite la *optimización* de circuitos tanto excitados como autónomos. Para ello se han obtenido expresiones originales que permiten el cálculo analítico de las derivadas parciales de las ecuaciones respecto a las muestras de las señales, respecto al periodo de oscilación y respecto a los elementos de circuito.

Por otro lado, otra contribución de esta tesis consiste en la identificación de la relación existente entre la técnica temporal discreta propuesta y los métodos

temporales y frecuenciales habituales. En particular, y en una línea fundamentalmente teórica, se ha presentado una demostración de que las ecuaciones del conocido método de balance armónico pueden derivarse como un caso particular del método descrito.

Con el fin de abordar con eficacia la resolución del sistema de ecuaciones resultante, se han implementado algoritmos globalmente convergentes, basados en modificaciones del método de Newton. También se ha experimentado con éxito la aplicación de una forma de continuación que permite refinar sucesivamente las soluciones numéricas obtenidas. Asimismo, se han utilizado ideas propias de la optimización por difusión simulada para desarrollar un algoritmo que asegura la resolución de las ecuaciones planteadas con independencia de la estimación inicial efectuada.

Finalmente, se ha presentado la aplicación de las ideas propuestas a dos osciladores clásicos y representativos: el oscilador de van der Pol y el oscilador de Colpitts, además de a un oscilador OTA-C. Los resultados obtenidos demuestran que el método descrito es claramente competitivo tanto con las técnicas habituales de análisis como con las escasas estrategias de optimización existentes.

7.2. Líneas futuras de investigación

A lo largo de las investigaciones efectuadas, reflejadas en esta tesis, se han planteado diversas cuestiones que merecen un estudio detallado. A continuación se describen algunas de ellas, de forma muy esquemática.

- La técnica descrita en esta tesis permite el análisis eficaz de circuitos no lineales tanto excitados como autónomos en régimen permanente *periódico*. La siguiente extensión del método podría ir en la línea de abordar el problema de la respuesta casi-periódica, propia de algunos circuitos de comunicaciones, tales como los mezcladores.
- En régimen permanente periódico, es frecuente que las señales presentes en un circuito presenten variaciones rápidas en determinadas zonas y sean mucho más suaves en otras. En el enfoque descrito, es necesario que la frecuencia de muestreo sea lo suficientemente elevada como para captar las variaciones rápidas de la señal. No obstante, para representar las zonas más suaves podría utilizarse un número menor de muestras. Por tanto, sería muy interesante investigar la posibilidad de realizar un muestreo no uniforme de las señales. Si este proceso pudiera llevarse a cabo de forma sistemática y eficaz, sería posible disminuir el número de incógnitas a determinar.
- La resolución de ecuaciones no lineales continúa siendo un campo abierto. Prueba de ello son las continuas contribuciones de diversos autores a solventar determinados aspectos de este problema. En el marco de los métodos globalmente convergentes, basados en modificaciones sobre el método de Newton, se vislumbran algunas posibles mejoras, basadas en la incorporación de razonamientos *fuzzy** en determinados puntos de los algoritmos. Sirva como ejemplo la forma en que se realiza la actualización de la zona de confianza donde, en esencia se aplica un razonamiento del tipo

Si el comportamiento real de la función se aproxima bastante a la predicción del modelo, entonces conviene aumentar ligeramente el radio de la zona de confianza.

* La referencia [15] puede servir como una primera introducción a los sistemas de lógica fuzzy.

La implementación tradicional de la condición *se aproxima bastante* consiste en fijar una cota arbitraria para la máxima desviación permisible, de lo cual resulta un valor que es o bien *cierto*, o bien *falso*, es decir, 1 o 0. Asimismo, la sentencia *aumentar ligeramente el radio* se codifica de una forma tan drástica como *doblar el radio*. Simplificando de forma importante, se puede afirmar que la lógica fuzzy permitiría distinguir entre toda la gradación de valores de certeza que puede tomar la premisa

el comportamiento real de la función se aproxima bastante a la predicción del modelo

obteniéndose, como consecuencia, un amplio abanico de acciones a tomar. A modo de ejemplo, la lógica fuzzy concluiría que

Si el comportamiento real de la función se aproxima mucho a la predicción del modelo, entonces conviene aumentar mucho el radio de la zona de confianza.

sin necesidad de tener que explicitar este conocimiento.

- Con el fin de permitir la aplicación de la técnica descrita a circuitos de microondas es necesario aún elaborar una *sistemática* que permita la inclusión de elementos distribuidos. En este sentido cabe pensar que cualquier elemento caracterizable de forma analítica en el dominio transformado de Laplace puede ser sistemáticamente aproximado por un circuito discreto, por ejemplo haciendo uso de aproximantes de Padé multipunto*.

* Véase, por ejemplo, P. Palà-Schönwälder and J. M. Miró-Sans, "An explicit method for modeling lossy and dispersive transmission lines" en *Proceedings 23rd European Microwave Conference*, páginas 701 a 704, Madrid Septiembre 1993.

Referencias

- [1] E. Allgower and K. Georg, "Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations", *SIAM Review*, vol. 22, pp. 28-85, 1980.
- [2] T. J. Aprille Jr. and T. N. Trick, "Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs", *Proc. IEEE*, vol 60, pp. 108-114, January 1972.
- [3] T. J. Aprille Jr. and T. N. Trick, "A computer algorithm to determine the steady-state response of nonlinear oscillators", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, July 1972.
- [4] J. W. Bandler, Q. Zhang, R. Biernacki, "A unified theory for frequency-domain simulation and sensitivity analysis of linear and nonlinear circuits", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-36, pp. 1661-1668, December 1988.
- [5] Y. Bistritz, "Zero location with respect to the unit circle of discrete-time linear system polynomials", *Proc. IEEE*, vol 72, pp.1131-1142, September 1984.
- [6] R. K. Brayton and R. Spence, *Sensitivity and Optimization*, Amsterdam, Elsevier, 1980.
- [7] C. S. Burrus and T. W. Parks, *DFT/FFT and Convolution Algorithms*, John Wiley and Sons, 1985
- [8] C. Camacho Peñalosa, "Numerical steady-state analysis of nonlinear microwave circuits with periodic excitation", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-31, pp. 724-730, September 1983.

- [9] C. Camacho Peñalosa and C. S. Aitchison, "Analysis and design of MESFET gate mixers", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-35, pp. 643-652, July 1987.
- [10] C. Camacho Peñalosa, L. Mariscal Rico and A. Alonso Pardo, "Efficient calculation of partial derivatives in nonlinear conductances driven by periodic input signals", *Electronics Letters*, vol. 23, pp. 565-566, May 1987.
- [11] C. Chang, S. Martin and E. Reese, "Computer-aided analysis of free-running microwave oscillators", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-39, pp. 1735-1745, October 1991.
- [12] L. O. Chua, C. A. Desoer and E. S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, 1987
- [13] L. Chua, P. Lin, *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1975.
- [14] A. Cichoki and R. Unbehauen, *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*, Stuttgart, John Wiley & Sons, 1993.
- [15] E. Cox, "Fuzzy fundamentals", *IEEE Spectrum*, pp. 58-61, October 1992.
- [16] T. R. Cuthbert, Jr., *Circuit Design Using Personal Computers*, New York, John Wiley & Sons, 1983.
- [17] T. R. Cuthbert, Jr., *Optimization Using Personal Computers*, New York, John Wiley & Sons, 1987.
- [18] P. J. Davis, *Circulant Matrices*, New York, John Wiley & Sons, 1979.
- [19] J. E. Dennis, Jr., "A user's guide to nonlinear optimization algorithms", *Proc. IEEE*, vol. 72, pp. 1765-1776, December 1984.
- [20] J. E. Dennis, Jr. and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1983.

- [21] S. W. Director and K. W. Current, "Optimization of forced nonlinear periodic circuits", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-23, pp. 329-334, June 1976.
- [22] E. Van den Eijnde and J. Schoukens, "Steady-state analysis of a periodically excited nonlinear system", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-37, pp. 232-242, February 1990.
- [23] F. V. Fernández, *Técnicas de análisis simbólico para el modelado y diseño de circuitos integrados analógicos*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1992.
- [24] F. Filicori, V.A. Monaco and C. Naldi, "Simulation and design of microwave class-C amplifiers through harmonic analysis", *IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-27, pp. 1043-1051, December 1979.
- [25] F. Filicori and M. R. Scalas, "Nonlinear circuit analysis through periodic spline approximation", *Electronics Letters*, vol. 15, pp. 597-599, September 1979.
- [26] D. Frey, "A simple generalized modeling technique for nonlinear networks", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, pp. 343-347, May 1984.
- [27] D. Frey and O. Norman, "An integral equation approach to the periodic steady-state problem in nonlinear circuits", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-39, pp. 744-755, September 1992.
- [28] G. H. Golub and C. Van Loan, *Matrix computations*, London, The John Hopkins University Press, 1989.
- [29] F. Grosz and T. Trick, "Some modifications to Newton's method for the determination of the steady-state response of nonlinear oscillatory circuits", *IEEE Trans. Computer Aided Design*, vol. CAD-1, pp. 116-119, July 1982.
- [30] M. Hasler and J. Neiryneck, *Nonlinear circuits*, Norwood, Artech House, 1986.

- [31] D. Hente and R. H. Jansen, "Frequency domain continuation method for the analysis and stability investigation of nonlinear microwave circuits", *Proc. IEE*, vol. 133, Pt. H, pp. 351-362, October 1986.
- [32] C. W. Ho, A. E. Ruehli and P. A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-22, pp. 504-509, June 1975.
- [33] M. Kakizaki and T. Sugawara, "A modified newton method for the steady-state analysis", *IEEE Trans. Computer Aided Design*, vol. CAD-4, pp. 662-667, October 1985.
- [34] Z. Kowalczyk, "Discrete approximation of continuous-time systems: a survey", *Proc. IEE*, vol. 140, Pt. G, pp. 264-278, August 1993.
- [35] K. S. Kundert and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Simulation of nonlinear circuits in the frequency domain", *IEEE Trans. Computer Aided Design*, vol. CAD-5, pp. 521-535, October 1986.
- [36] K. S. Kundert, A. Sangiovanni-Vincentelli and T. Sugawara, "Techniques for finding the periodic steady-state response of circuits", *Analog Methods for Computer-Aided Circuit Analysis and Diagnosis*, T. Ozawa, Ed., New York, Marcel Dekker, 1988.
- [37] K. S. Kundert, J. K. White and A. Sangiovanni-Vincentelli, *Steady-State Methods for Simulating Analog and Microwave Circuits*, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [38] B. C. Kuo, *Digital Control Systems*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1980.
- [39] E. S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, New York, Academic Press, 1968.
- [40] B. Linares-Barranco, A. Rodríguez-Vázquez, E. Sánchez-Sinencio and J. L. Huertas, "Generation, design and tuning of OTA-C high-frequency sinusoidal oscillators", *Proc. IEE*, vol. 139, Pt. G, pp. 557-568, October 1992.

- [41] W. Liniger, F. Odeh and A. Ruehli, "Integration methods for the solution of circuit equations", *Circuit Analysis, Simulation and Design*, A. Ruehli (Ed.), Amsterdam, North-Holland, 1986.
- [42] A. Lipparini, E. Marazzi and V. Rizzoli, "A new approach to the computer-aided design of nonlinear networks and its application to microwave parametric frequency dividers", *IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-30, pp. 1050-1058, July 1982.
- [43] E. Martín, *Contribución al Análisis de Circuitos Autónomos Mediante Técnicas de Balance Armónico*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Septiembre 1990.
- [44] *386-MATLAB User's Guide*, The Mathworks, 1990
- [45] T. Matsumoto, "Symbolic network analysis", *Analog Methods for Computer-Aided Circuit Analysis and Diagnosis*, T. Ozawa, Ed., New York, Marcel Dekker, 1988.
- [46] J. Millman y C. C. Halkias, *Dispositivos y Circuitos Electrónicos*, MacGraw-Hill, 1972.
- [47] J.M. Miró and P. Palà, "CiOpt: a program for optimization of the frequency response of linear circuits", *Proc. 34th Midwest Symp. Circuits and Systems*, pp. 915-920, California, May 1991.
- [48] J. J. Moré, "The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory", *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 630, pp. 105-116, Berlin, Springer-Verlag, 1978.
- [49] L. W. Nagel and D. O. Peterson, "SPICE (Simulation program with integrated circuit emphasis)", Memorandum ERL-M382, University of California, Electronics Research Laboratory, April 1973.
- [50] M. S. Nakhla and J. Vlach, "A piecewise harmonic-balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems", *IEEE, Trans. Circuits Syst.*, vol CAS-23 pp. 85-91, February 1976.

- [51] T. B. M. Neill and J. Stefani, "Self-regulating Picard-type iteration for computing the periodic response of a nearly linear circuit to a periodic input", *Electronics Letters*, vol. 11, pp. 413-415, August 1975.
- [52] M. Odyniec, "Nonlinear synchronized LC oscillators: Theory and simulation", *IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-41, pp. 774-780, May 1993.
- [53] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, London, Prentice-Hall, 1975.
- [54] J. M. Ortega and W. C. Rheinoldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, New York, Academic Press, 1970.
- [55] P. Palà Schönwälder, *Optimización de la Respuesta Frecuencial de Circuitos Analógicos Lineales*, Proyecto fin de Carrera, E.T.S.I. Telecomunicación de Barcelona, Diciembre 1989.
- [56] P. Palà Schönwälder y J. M. Miró Sans, "Algoritmo Adaptativo de Levenberg-Marquardt Aplicado a la Optimización de Circuitos Lineales", *Actas del VII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, pp. 751-755, Septiembre 1992.
- [57] P. Palà Schönwälder and J. M. Miró Sans, "A Discrete-Time Equivalent System Approach to the Periodic Response of Nonlinear Autonomous Circuits", *Proc. International Symp. Circuits and Systems*, London, May 1994.
- [58] S. S. Rao, *Optimization: Theory and Applications*, New Delhi, Wiley Eastern, 1987.
- [59] S. L. Richter and R. A. DeCarlo, "Continuation methods: Theory and applications", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol CAS-30, pp. 347-352, June 1983.
- [60] V. Rizzoli, C. Cecchetti, A. Lipparini and A. Neri, "User-oriented software package for the analysis and optimisation of nonlinear microwave circuits", *Proc. IEE*, vol. 133, Pt. H, pp. 385-391, October 1986.

- [61] V. Rizzoli, A. Lipparini and E. Marazzi, "A general-purpose program for nonlinear microwave circuit design", *IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.*, vol MTT-31, pp. 762-769, September 1983.
- [62] V. Rizzoli and A. Neri, "State of the art and present trends in nonlinear microwave CAD techniques", *IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-36, pp. 343-365, February 1988.
- [63] T. Sakurai, B. Lin and A. R. Newton, "Fast simulated diffusion: An optimization algorithm for multimimum problems and its application to MOSFET model parameter extraction", *IEEE, Trans. Computer Aided Design*, vol. CAD-11, pp. 228-234, February 1992.
- [64] A. M. Schneider, J. T. Kaneshige and F. D. Groutage, "Higher s to z mapping functions and their application in digitizing continuous-time filters", *Proc. IEEE*, vol. 79, pp. 1661-1674, November 1991.
- [65] S. Skelboe, "Computation of the periodic steady-state response of nonlinear circuits by extrapolation methods", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol CAS-27, pp. 161-175, March 1980.
- [66] D. A. Smith, W. F. Ford and A. Sidi, "Extrapolation methods for vector sequences", *SIAM Review*, vol. 29, pp. 199-233, June 1987,
- [67] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [68] P. W. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice*, New Jersey, Prentice Hall, 1988.
- [69] M. Urabe, "Periodic solutions of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda=0\sim 10$ ", *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-7, pp. 382-386, 1960.
- [70] A. Ushida, T. Adachi and L. O. Chua, "Steady-state analysis of nonlinear circuits based on hybrid methods", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol CAS-39, pp. 649-661, August 1992.

- [71] J. Vlach and K. Singhal, *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*, New York, Van Nostrand Reinhold, 1994.