

Universitat Politècnica de Catalunya
Dep. Teoria del Senyal i Comunicacions
E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APLICACIONES BIOMÉDICAS:
PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO ELECTROMAGNÉTICOS**

Jordi J. Mallorquí Franquet
Director: Antoni Broquetas Ibars

Tesi Doctoral presentada a la
Universitat Politècnica de Catalunya
per a l'obtenció del títol de Doctor
Enginyer de Telecomunicació.

Barcelona, Febrer 1995.

6.5.6 Reconstrucción de medidas reales

Finalmente se presentan algunos resultados aplicando el algoritmo de reconstrucción a medidas reales. Se han comparado las reconstrucciones con resolución de $0.1 \lambda_0$ y $0.3 \lambda_0$ en el problema inverso siendo las diferencias prácticamente inapreciables. La reconstrucción a partir de medidas reales se encuentra limitada por la calidad de los datos disponibles, lamentablemente la S/N de las medidas reales es inferior a los 20 dB y únicamente se han podido reconstruir con éxito brazos y maquetas sencillas.

Se presentan dos reconstrucciones de antebrazos humanos. El primero, Fig. 6.32, es de una persona delgada y se pueden reconstruir los huesos con bastante calidad. Como información "a priori" se ha suministrado al algoritmo el contorno hallado mediante Born {4.3.4} y una estimación de la permitividad del músculo. Se observa en la Fig. 6.31 que a partir de la quinta iteración ya no se mejora el error en el campo dispersado medido y el contraste reconstruido, al intentar ajustarse al ruido y a los errores de medida, empieza a diverger de la solución correcta. La malla tiene 57×57 celdas.

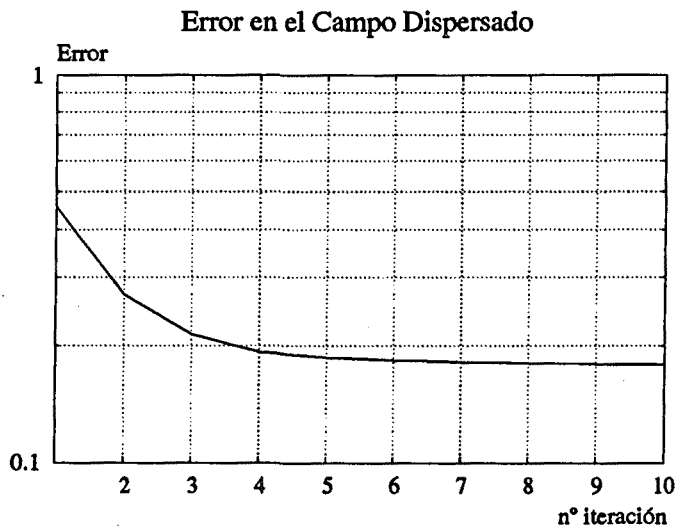


Fig. 6.31 Evolución del error en el campo dispersado en la reconstrucción de bragreg.

El segundo antebrazo corresponde a una persona de mayor complejión, por lo tanto los huesos están más rodeados de músculo que atenúa su contribución a los campos dispersados. Por ello la imagen final se resiente de la limitación en los datos de entrada, Fig. 6.33. La Fig. 6.34 muestra la evolución del error en el campo dispersado, una vez más alrededor de la quinta iteración se detiene su reducción. La malla es de nuevo de 57×57 celdas.

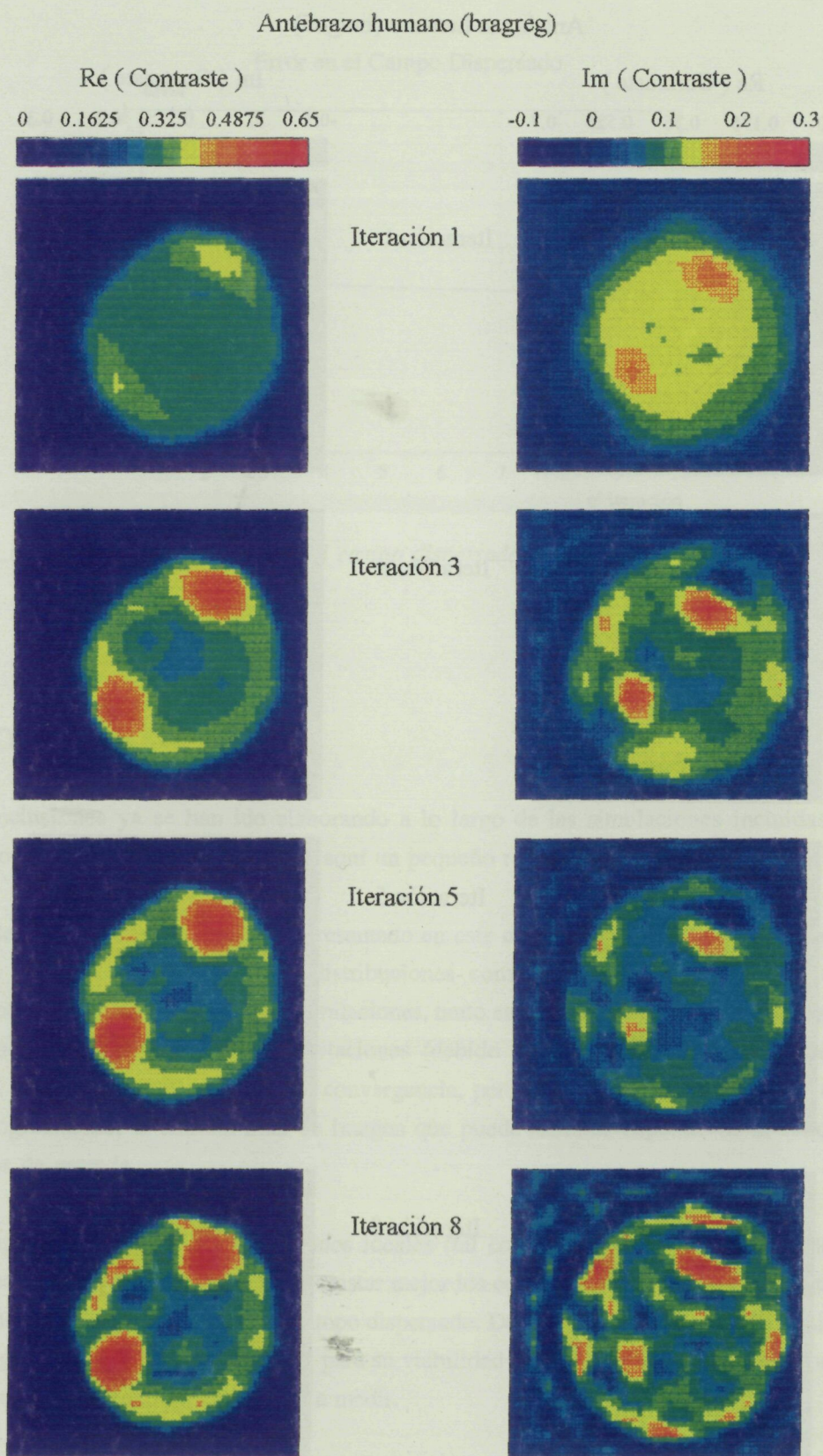


Fig. 6.32 Reconstrucción de un antebrazo humano a partir de medidas reales (bragreg).

Antebrazo humano (brago5)

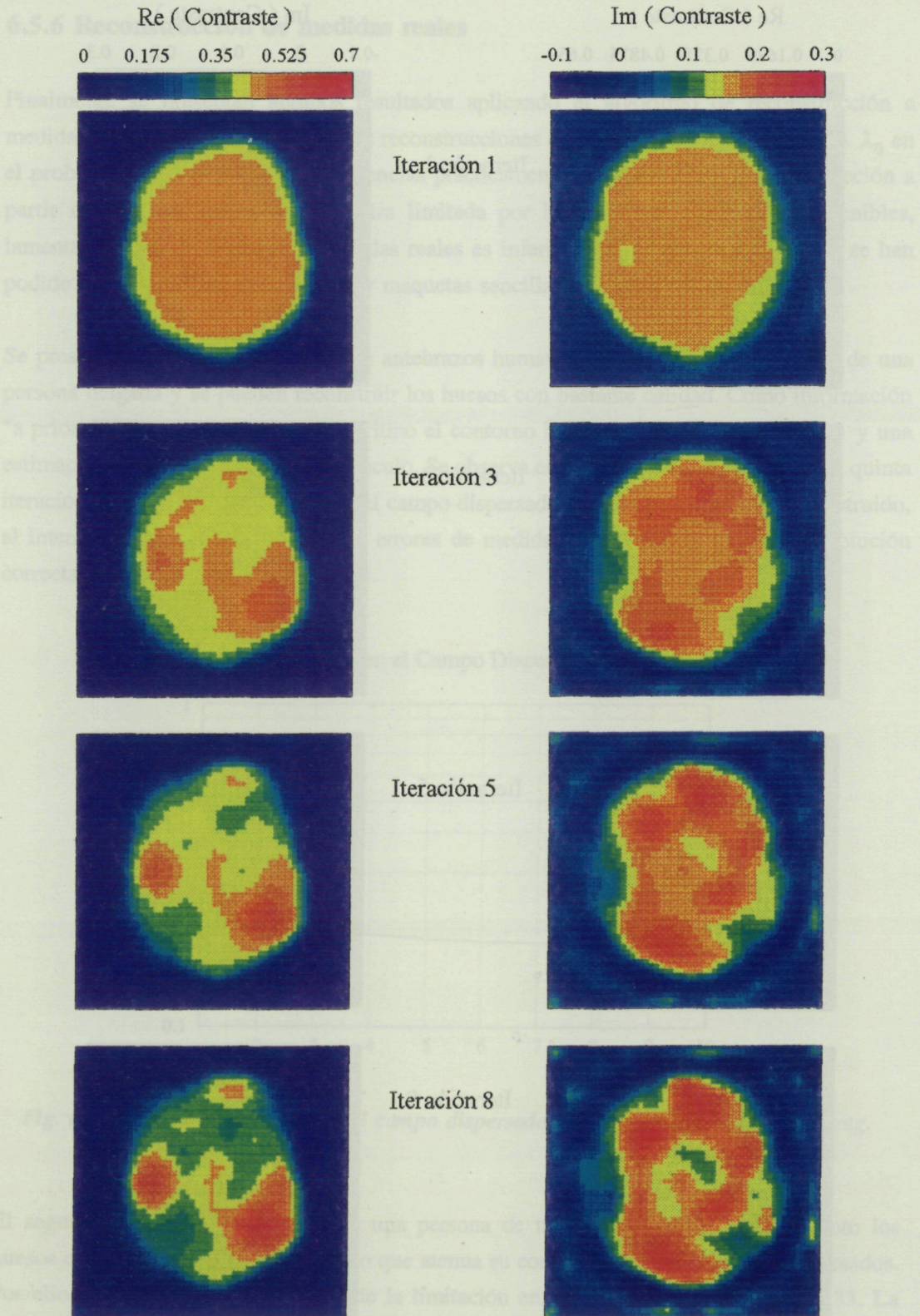


Fig. 6.33 Reconstrucción de un antebrazo humano a partir de medidas reales (brago5).

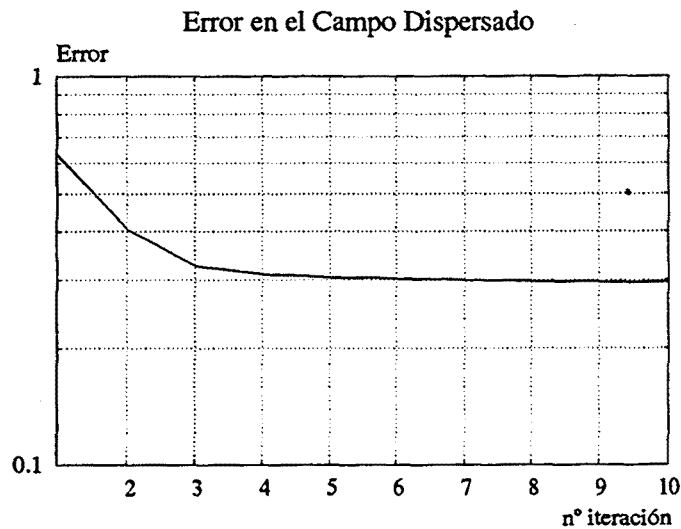


Fig. 6.34 Evolución del error en el campo dispersado en la reconstrucción de brago5.

6.6 CONCLUSIONES

Las conclusiones ya se han ido elaborando a lo largo de las simulaciones incluidas en el apartado de resultados, exponiéndose aquí un pequeño resumen.

Se ha demostrado que el algoritmo presentado en este capítulo, además de proporcionar las mejores imágenes cuantitativas de distribuciones complejas de permitividad en cuerpos biológicos, es bastante robusto a las limitaciones, tanto en cantidad como calidad, de los datos de entrada. Cuando existen esas limitaciones (debido al ruido, reducción del número de antenas, etc.) el algoritmo detiene su convergencia, pero siempre llega a reconstruir alguna cosa. Lógicamente, la calidad final de imagen que puede alcanzar depende de la calidad de los datos de entrada.

Aun disponiendo de campos dispersados ideales (tal como sucede en las simulaciones), la adaptación del medio externo permite ajustar mejor los contrastes de los tejidos más internos, y con una cota menor de error en el campo dispersado. De cara al futuro diseño de un sistema de tomografía, puede ser fundamental, para su viabilidad y buen funcionamiento, disponer de un medio externo adaptado al cuerpo a medir.

También se ha observado que asegurando el cumplimiento del criterio de Nyquist en el muestreo de los campos dispersados, se dispone de suficientes datos para resolver sin

problemas los sistemas de ecuaciones involucrados en el problema inverso, a pesar de estar muy subdimensionados.

En todos los casos tratados era indispensable suministrar información "a priori" al algoritmo, en caso contrario, éste no alcanza la convergencia. Afortunadamente esa información puede obtenerse de forma muy sencilla mediante el algoritmo de Born. Siempre que se intente reconstruir cuerpos inhomogéneos y eléctricamente grandes, la información "a priori" será indispensable para asegurar la convergencia del algoritmo.

De cara a una posible aplicación, y en función del nivel de calidad de imagen buscado, pueden determinarse las especificaciones a cumplir por un sistema de tomografía de microondas.

Únicamente se han presentado resultados de imágenes absolutas, pero el buen comportamiento del algoritmo para el "peor caso" hace prever que con las imágenes diferenciales los resultados podrían ser igual de buenos o incluso mejores.

CONCLUSIONES

Las imágenes reconstruidas a partir de simulaciones y medidas reales permiten confirmar que se han alcanzado los objetivos marcados para esta tesis. Se ha logrado reconstruir cuerpos biológicos de alto contraste y eléctricamente grandes (hasta seis longitudes de onda), consiguiendo unas imágenes cuantitativas de gran calidad. De los tres métodos desarrollados, el algoritmo basado en el método de la pseudoinversa ha permitido obtener las mejores imágenes. Para cuerpos de tamaño moderado (en torno a las tres longitudes de onda), el algoritmo de optimización iterativa también proporciona imágenes cuantitativas de calidad.

El algoritmo de la pseudoinversa se ha revelado como muy eficiente, robusto y relativamente poco sensible a los errores y limitaciones de los datos de entrada. Las distintas pruebas con modelos numéricos, variando los distintos parámetros de la simulación (número de antenas emisoras y/o receptoras, medio externo, inclusión de ruido, etc.), han permitido caracterizar el algoritmo y determinar las especificaciones óptimas: medio externo adaptado, número de antenas cercano al proporcionado por el criterio de Nyquist aplicado al muestreo angular de los campos dispersados, y número de antenas receptoras por vista del orden de 3/4 de las emisoras. Al mismo tiempo, y en función del nivel de calidad final de la imagen, es fácil determinar la mínima S/N necesaria para un buen funcionamiento del sistema. Mediante el cambio de resolución en el problema inverso, puede optimizarse el tiempo de cálculo en

aquellos casos donde no se desea una gran resolución en la imagen final, o simplemente la calidad de los datos no la permite. La reconstrucción de secciones reales de antebrazos humanos, obteniendo valores de contraste muy próximos a los reales, ha sido uno de los grandes éxitos en este apartado por su novedad.

Se ha puesto de manifiesto la importancia de proporcionar a los algoritmos de orden superior información "a priori" para asegurar la convergencia y aumentar su velocidad. Para ello, se ha desarrollado un método que permite obtener el contorno del cuerpo a partir de las imágenes proporcionadas por el algoritmo de primer orden de recubrimiento espectral. La información inicial del contorno puede ampliarse con el algoritmo de optimización iterativa, que permite de forma rápida determinar la permitividad media que mejor se ajusta a los campos dispersados. Mediante un proceso de automatización e integración de los tres algoritmos inversos, la reconstrucción de un cuerpo a partir de los campos dispersados podría ser totalmente transparente al usuario de la aplicación.

A lo largo de la tesis se han puesto a punto los algoritmos mediante el estudio de imágenes absolutas, en principio las más difíciles de obtener. Si se extendiera el estudio a imágenes diferenciales, el comportamiento de los algoritmos debería ser excelente. A la vista de alguna prueba preliminar, con el algoritmo de la pseudoinversa y a igual dimensión del problema, los tiempos de cálculo son mucho menores en la obtención de imágenes diferenciales. Queda como línea futura de investigación determinar el comportamiento del algoritmo en imágenes diferenciales.

Aunque únicamente se ha tratado el caso biológico, pueden buscarse aplicaciones de los algoritmos en la industria, donde hay un futuro prometedor. La monitorización y medida no invasiva de procesos industriales, orientada al control de calidad de materiales dieléctricos, pueden ser abordadas por la tomografía de microondas. Estas aplicaciones, al tener en general los cuerpos menos pérdidas, ser mucho mayor la información "a priori" disponible, y no existir limitación en los niveles de potencia utilizables, podrían permitir un mejor comportamiento de los algoritmos, relajando las especificaciones de diseño de los tomógrafos.

Una limitación de los algoritmos de orden superior reside en que los tiempos de computación son largos, incluso con máquinas potentes, imposibilitando de momento su utilización en sistemas de tiempo real. En el caso biológico, una limitación extra viene dada por el gran margen dinámico y relación S/N que ha de tener un sistema de medida. Esto es debido, fundamentalmente, al elevado contraste y a las pérdidas que presentan los tejidos biológicos. En algunos casos, puede ser físicamente imposible construir un sistema con las características requeridas. En aplicaciones industriales, con menos pérdidas y mejor adaptación, las especificaciones de un equipo pueden ser más realistas.

Las herramientas desarrolladas para el estudio del problema directo han demostrado su buen comportamiento, tanto por comparación con las soluciones analíticas de cuerpos canónicos, como su utilización en el desarrollo de los métodos inversos. Los algoritmos desarrollados también pueden ser de gran utilidad en otras aplicaciones biomédicas distintas a la tomografía de microondas. Es necesario resaltar el gran futuro que puede tener el método RATMA en aplicaciones de hipertermia. Una vez modelizado un cuerpo, resuelto el problema directo y obtenida la solución multivista (la mayor carga computacional del algoritmo), es muy rápido calcular las distribuciones de potencia para distintas ondas incidentes. Incluso podría plantearse un proceso de optimización que calculara de forma automática los pesos en los aplicadores, para conseguir maximizar la distribución de potencia en una zona determinada del cuerpo. La extensión del método al caso tridimensional, aunque de gran complejidad matemática, sería de gran interés para simular un caso más realista que supere las limitaciones del modelo bidimensional. Otras aplicaciones podrían ser cualquier estudio de distribución de potencias, campos o corrientes, en cuerpos dieléctricos (biológicos o no) para múltiples direcciones de incidencia.

A

MÉTODOS DE DIRECCIÓN CONJUGADA

A.1 MÉTODO DE LAS DIRECCIONES CONJUGADAS

Existen en la literatura muchas formas de desarrollar el algoritmo del gradiente conjugado para resolver un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, puede desarrollarse como minimización de un funcional [Hestenes '80] o como una expansión ortogonal de la solución del sistema de ecuaciones [Ney '85]. Ambas ideas pueden combinarse de tal manera que cada funcional se asocia con una expansión ortogonal específica. Con este planteamiento, el gradiente conjugado se limita a generar esa serie de funciones ortogonales y a la búsqueda de los coeficientes más adecuados para representar la solución deseada [PIER 5 '90].

Partiendo de un sistema de ecuaciones representado en forma matricial

$$\bar{A} \cdot x = b \quad (\text{A.1})$$

donde \bar{A} es una matriz $N \times N$, x el vector incógnita de dimensión N y b el término independiente, ambos de dimensión N .

También es necesario definir el producto interno, para toda la demostración se utiliza el producto escalar euclidiano

$$\langle x, y \rangle = y^* \cdot x \quad (\text{A.2})$$

que lleva asociado la norma

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

donde $*$ indica traspuesta conjugada.

La mayoría de los métodos iterativos para solucionar (A.1) intentan estimar la solución a partir de su estimación anterior, x_{n-1} , y de una dirección en el espacio N -dimensional, p_n , ponderada por un coeficiente escalar que indica cuanto nos movemos en esa dirección, α_n .

$$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_n \quad (\text{A.4})$$

Lo que diferencia a los distintos métodos es la forma de calcular las direcciones y coeficientes de actualización. En este caso se escoge el parámetro α_n de forma que minimice el funcional error

$$E_n(x_n) = \|\bar{A} \cdot x_n - b\|^2 \quad (\text{A.5})$$

Puede demostrarse derivando el funcional y buscando el mínimo que el coeficiente que lo minimiza es

$$\alpha_n = \frac{-\langle r_{n-1}, \bar{A} p_n \rangle}{\|\bar{A} p_n\|^2} \quad (\text{A.6})$$

donde se ha definido el vector error residual como

$$r_n = \bar{A} \cdot x_n - b \quad (\text{A.7})$$

Si se considera una solución de la estimación de la forma

$$x_n = x_{n-1} + \alpha_n (p_n + \beta_n q_n) \quad (\text{A.8})$$

donde las direcciones p_n y q_n son fijas, y los coeficientes α_n y β_n se obtienen de forma que minimicen simultáneamente el funcional error. Realizando la minimización, puede obtenerse que

$$\alpha_n = \frac{-\langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot (p_n + \beta_n q_n) \rangle}{\|\bar{A} \cdot p_n\|^2} \quad (\text{A.9})$$

y

$$\beta_n = \frac{\langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot q_n \rangle \|\bar{A} \cdot p_n\|^2 - \langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot p_n \rangle \langle \bar{A} \cdot p_n, \bar{A} \cdot q_n \rangle}{\langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot p_n \rangle \|\bar{A} \cdot q_n\|^2 - \langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot q_n \rangle \langle \bar{A} \cdot q_n, \bar{A} \cdot p_n \rangle} \quad (\text{A.10})$$

Suponiendo que p_n y q_n son vectores de dirección arbitrarios, pero q_n ha sido previamente utilizado durante el proceso iterativo, de forma que

$$x_{n-1} = x_{n-2} + \alpha_{n-1} q_n \quad (\text{A.11})$$

donde α_{n-1} fue hallado previamente para minimizar el funcional error

$$\alpha_{n-1} = \frac{-\langle r_{n-2}, \bar{A} \cdot q_n \rangle}{\|\bar{A} \cdot q_n\|^2} \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, debe cumplirse que

$$\langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot q_n \rangle = \langle r_{n-2} + \alpha_{n-1} \bar{A} \cdot q_n, \bar{A} \cdot q_n \rangle = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\beta_n = \frac{-\langle \bar{A} \cdot p_n, \bar{A} \cdot q_n \rangle}{\|\bar{A} \cdot q_n\|^2} \quad (\text{A.14})$$

y

$$\langle \bar{A} \cdot q_n, \bar{A} \cdot (p_n + \beta_n q_n) \rangle = 0 \quad (\text{A.15})$$

Por eso el proceso de seleccionar las direcciones y coeficientes que minimizan el funcional error se optimiza cuando los vectores satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\langle \bar{A} \cdot p_i, \bar{A} \cdot p_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (\text{A.16})$$

Si se escoge un conjunto de vectores para las direcciones, el proceso de minimización del funcional (A.5) ajustará sus coeficientes de forma que se vaya generando una secuencia que satisfaga (A.16). Los vectores que cumplen esa condición son mutuamente conjugados respecto al operador $\bar{A}^a \cdot \bar{A}$, donde \bar{A}^a es el adjunto respecto al producto interno

$$\langle \bar{A}^a \cdot x, y \rangle = \langle x, \bar{A} \cdot y \rangle \quad (\text{A.17})$$

Por lo tanto, y por la elección del producto escalar euclidiano, la matriz \bar{A}^a es la traspuesta conjugada de \bar{A} , es decir $\bar{A}^a = \bar{A}^*$.

Si se considera que el conjunto de vectores satisface la condición de ortogonalidad y al mismo tiempo que la matriz \bar{A} es no singular, esos vectores son linealmente independientes y forman una base del espacio N-dimensional. La solución, entonces, puede expresarse como combinación lineal de esos vectores

$$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N \quad (\text{A.18})$$

donde el primer vector, x_0 , es la estimación inicial de la solución. Debido al cumplimiento de la condición de ortogonalidad, cada uno de los coeficientes puede hallarse de forma independiente utilizando

$$\alpha_n = \frac{-\langle r_0, \bar{A} \cdot p_n \rangle}{\|\bar{A} \cdot p_n\|^2} \quad (\text{A.19})$$

De las relaciones anteriores puede deducirse que el vector error también puede obtenerse a partir de los vectores error anteriores

$$r_n = r_0 + \alpha_1 \bar{A} \cdot p_1 + \alpha_2 \bar{A} \cdot p_2 + \dots + \alpha_n \bar{A} \cdot p_n \quad (\text{A.20})$$

Por lo tanto, pueden hallarse las siguientes relaciones recursivas

$$r_n = r_{n-1} + \alpha_n \bar{A} \cdot p_n \quad (\text{A.21})$$

$$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_n \quad (\text{A.22})$$

También puede demostrarse, a partir de las propiedades de ortogonalidad enunciadas, que

$$\|r_n\|^2 = \|r_{n-1}\|^2 - |\alpha_n|^2 \|\bar{A} \cdot p_n\|^2 \quad (\text{A.23})$$

De (A.16), (A.19) y (A.20) puede deducirse

$$\langle r_n, \bar{A} \cdot p_m \rangle = \begin{cases} \langle r_0, \bar{A} \cdot p_m \rangle & n < m \\ 0 & n \geq m \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

y por lo tanto, las dos formas para hallar α_n de (A.5) y (A.19) son idénticas.

Es interesante conocer la calidad de la estimación de la solución del sistema de ecuaciones. El vector error de la estimación n -ésima se define como

$$e_n = x - x_n$$

Como no puede conocerse ese error, al desconocerse la solución exacta, la calidad de la aproximación se mide utilizando el módulo normalizado del residuo

$$N_n = \frac{\|r_n\|}{\|b\|} = \frac{\|\bar{A} \cdot x_n - b\|}{\|b\|} \quad (\text{A.26})$$

El error también suele darse utilizando la norma al cuadrado.

Esta forma de definir el error proporciona una estimación indirecta de la bondad del vector solución obtenido en una iteración. Mediante el número de condicionamiento de la matriz, $k(A)$ {6.4.3.1}, puede obtenerse una relación entre ambos errores

$$\frac{\|e_n\|}{\|e_0\|} \leq k(A) \frac{\|r_n\|}{\|r_0\|} \quad (\text{A.27})$$

Como es sabido, el número de condicionamiento de una matriz es siempre superior a la unidad; por lo tanto, con matrices mal condicionadas, donde ese número es muy grande, la estimación del error mediante la norma del residuo puede proporcionar una pobre indicación

de la precisión de la solución encontrada: valores bajos de N_n tendrían asociados errores altos en la solución. A pesar de ello, el método del gradiente conjugado es mucho más robusto que otros métodos de resolución de matrices en sistemas mal condicionados, simplemente en casos de mal condicionamiento se ralentiza su convergencia y es necesario definir una cota de error más restrictiva como criterio de parada. También, como puede deducirse de (A.23), el error va decreciendo monótonicamente por lo que el método propuesto parece correcto.

A.2 MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

El método de las direcciones conjugadas no especifica como construir la sucesión de vectores dirección con los que se va construyendo el vector solución. El método del gradiente conjugado ya proporciona las herramientas necesarias para la generación de las direcciones. El proceso se inicia con la elección de

$$p_1 = -\bar{A}^* \cdot r_0 \quad (\text{A.28})$$

que proporciona la dirección del gradiente del funcional E_n en $x = x_0$, el cambio de signo indica la dirección de mayor pendiente negativa desde el punto de partida.

De forma recursiva, las sucesivas direcciones se van obteniendo utilizando

$$p_{n+1} = -\bar{A}^* \cdot r_n + \beta_n p_n \quad (\text{A.29})$$

de forma que el coeficiente β_n cumpla

$$\langle \bar{A}^* \cdot \bar{A} \cdot p_n, p_{n+1} \rangle = 0 \quad (\text{A.30})$$

y de esta forma generar una serie de vectores dirección ortogonales entre sí, y por lo tanto mutuamente conjugados. Antes de encontrar la expresión de β_n es necesario demostrar algunas relaciones de ortogonalidad.

Partiendo de (A.29) puede escribirse

$$\langle p_{n+1}, \bar{A}^* \cdot r_m \rangle = -\langle \bar{A}^* \cdot r_n, \bar{A}^* \cdot r_m \rangle + \beta_n \langle p_n, \bar{A}^* \cdot r_m \rangle \quad (\text{A.31})$$

De la ecuación (A.24) se obtiene que el primer y último productos internos de (A.31) son cero si $m > n$, por lo que puede deducirse

$$\langle \bar{A}^* \cdot r_n, \bar{A}^* \cdot r_m \rangle = 0 \quad m \neq n \quad (\text{A.32})$$

Las ecuaciones (A.24) y (A.29) pueden combinarse para obtener

$$\langle \bar{A}^* \cdot r_n, p_{n+1} \rangle = -\langle \bar{A}^* \cdot r_n, \bar{A}^* \cdot r_n \rangle = -\|\bar{A}^* \cdot r_n\|^2 \quad (\text{A.33})$$

y, por lo tanto, la expresión (A.5) puede reescribirse como

$$\alpha_n = \frac{\|\bar{A}^* \cdot r_{n-1}\|^2}{\|\bar{A}^* \cdot p_n\|^2} \quad (\text{A.34})$$

De (A.21) se halla

$$\bar{A}^* \cdot r_n = \bar{A}^* \cdot r_{n-1} + \alpha_n \bar{A}^* \cdot \bar{A} \cdot p_n \quad (\text{A.35})$$

Debido a la ortogonalidad enunciada en (A.32), si se define un producto interno entre $\bar{A}^* \cdot r_m$ y (A.35), puede obtenerse

$$\langle \bar{A}^* \cdot \bar{A} \cdot p_n, \bar{A}^* \cdot r_m \rangle = \begin{cases} \frac{\|\bar{A}^* \cdot r_n\|^2}{\alpha_n} & m = n \\ -\frac{\|\bar{A}^* \cdot r_m\|^2}{\alpha_n} & m = n-1 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Utilizando (A.36) con $m = n$, puede encontrarse el valor de β_n mediante (A.29) y (A.30)

$$\beta_n = \frac{\|\bar{A}^* \cdot r_n\|^2}{\|\bar{A}^* \cdot r_{n-1}\|^2} \quad (\text{A.37})$$

Puede demostrarse por inducción que este valor de β_n garantiza la ortogonalidad entre los sucesivos vectores dirección aunque la condición de ortogonalidad (A.16) no se fuerce de forma explícita [PIER 5 '90].

El método original del gradiente conjugado debido a Hestenes [Hestenes '80] era válido únicamente para matrices hermíticas y definidas positivas. Para aplicar ese algoritmo a sistemas de ecuaciones arbitrarios se ha multiplicado el sistema de ecuaciones por la matriz traspuesta conjugada, de forma que se ha transformado el sistema en uno que es hermítico y definido positivo. La ventaja del método aquí presentado es su validez para cualquier sistema de ecuaciones, tanto sobredimensionado como subdimensionado, y al mismo tiempo su mayor robustez a los problemas de mal condicionamiento.

Se pueden deducir otras versiones del método simplemente eligiendo otro tipo de funcionales error o definiendo otro tipo de producto interno.

Finalmente el algoritmo que se ha utilizado para resolver sistemas de ecuaciones es el siguiente:

Inicio: estimación inicial x_0

$$r_0 = \bar{A} \cdot x_0 - b \quad (\text{A.38})$$

$$p_1 = -\bar{A}^* \cdot r_0 \quad (\text{A.39})$$

Iteraciones:

$$\alpha_n = \frac{-\langle r_{n-1}, \bar{A} \cdot p_n \rangle}{\|\bar{A} \cdot p_n\|^2} = \frac{\|\bar{A}^* \cdot r_{n-1}\|^2}{\|\bar{A} \cdot p_n\|^2} \quad (\text{A.40})$$

$$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_n \quad (\text{A.41})$$

$$r_n = \bar{A} \cdot x_n - b = r_{n-1} + \alpha_n \bar{A} \cdot p_n \quad (\text{A.42})$$

$$\beta_n = \frac{\|\bar{A}^* \cdot r_n\|^2}{\|\bar{A}^* \cdot r_{n-1}\|^2} \quad (\text{A.43})$$

$$p_{n+1} = -\bar{A}^* \cdot r_n + \beta_n p_n \quad (\text{A.44})$$

A.2.1 Convergencia del método

Como la solución del sistema de ecuaciones se obtiene expandiéndola en una serie de vectores mutuamente ortogonales, se necesitarán N iteraciones, siendo N el orden de la matriz y despreciando los errores de precisión aritmética, para alcanzar la solución. Además la convergencia del método es monotónica. También puede demostrarse [PIER 5 '90] que la solución depende del número de autovectores independientes de la matriz $\bar{A}^* \cdot \bar{A}$, con lo que el número de iteraciones necesario depende de este valor. En la práctica se considera correcta, o suficientemente aceptable, una solución que esté asociada a un residual suficientemente bajo. Para la mayoría de problemas, a no ser que se presenten casos de pésimo condicionamiento, el residual será una cantidad fija relacionada con la precisión requerida. En la mayoría de los casos el número de iteraciones será mucho menor al número de autovalores. En casos de extremo mal condicionamiento el residual necesario para tener una cota de error aceptable en la solución ha de ser muy pequeño. Al mismo tiempo, y debido al mal condicionamiento, la convergencia del gradiente conjugado se ralentiza mucho con lo que el número de iteraciones necesario aumenta de forma espectacular. Para casos de mal condicionamiento, el gradiente conjugado se vuelve muy ineficiente en tiempo de cálculo.

A.3 MINIMIZACIÓN O MAXIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El problema de minimización de funciones, o maximización simplemente definiendo la misma función de forma distinta, ha sido ampliamente estudiado en la literatura aunque en general los métodos obtenidos pueden presentar algunos problemas [Numerical '89]. El principal de ellos es como asegurar que, después de todo el proceso, el mínimo conseguido es realmente un mínimo global y no un mínimo local de la función. No existe ningún método, al menos conocido por el autor, que garantice encontrar un mínimo global. En general, una forma de mejorar los resultados consiste en ejecutar la misma rutina de minimización diversas veces desde puntos iniciales distintos y comprobar si el resultado final es siempre el mismo, o, en caso contrario, quedarse con el mínimo de entre los mínimos encontrados.

En este apartado, ligado con el anterior, se presenta un método basado en el conocimiento del gradiente de la función para conseguir la minimización de la función multidimensional. En [Numerical '89] puede encontrarse un amplio estudio de minimización de funciones tanto unidimensionales como multidimensionales. En general, los métodos multidimensionales utilizan durante el procedimiento iterativo herramientas de optimización unidimensional. Aquí

no se pretende explicar los algoritmos, sino su filosofía, por lo que no se entra en los detalles de programación de los métodos.

Si se dispone de la función multidimensional real, $f(x)$, y se pretende minimizar su valor a lo largo de una determinada dirección, u , puede demostrarse que en la posición del mínimo el gradiente de la función es ortogonal a esa dirección, ya que en caso contrario la derivada de la función en esa dirección debería ser distinta de cero, y, por lo tanto, ya no sería un mínimo.

La función puede aproximarse alrededor de un punto, P que se toma como origen del sistema de coordenadas x , mediante su desarrollo en serie de Taylor

$$f(x) = f(P) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \dots \quad (\text{A.45})$$

$$\approx c - bx + \frac{1}{2} xAx$$

donde

$$c \equiv f(P) \quad b \equiv -\nabla f|_P \quad [A]_{ij} \equiv \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_P \quad (\text{A.46})$$

La matriz \bar{A} se conoce como la matriz hesiana de la función en el punto P .

Mediante la aproximación de la función por su desarrollo de Taylor, (A.45), puede obtenerse que el gradiente de la función en P vale

$$\nabla f = \bar{A} \cdot x - b \quad (\text{A.47})$$

Si se intenta encontrar el mínimo de la función desde el punto P en una determinada dirección u , hay que hallar el punto que anule el gradiente particularizado en esa dirección

$$x = \lambda u \quad \nabla f = \lambda \bar{A} \cdot u - b = 0 \quad (\text{A.48})$$

Si una vez hallado se decide encontrar un nuevo mínimo en otra dirección, v , es necesario asegurar que esa nueva dirección mejora la minimización anterior, y no la empeora. Para ello la nueva dirección debe ser ortogonal al gradiente.

De forma parecida a como se expuso el método del gradiente conjugado, si se genera un conjunto de N direcciones linealmente independientes y mutuamente conjugadas, siendo N la dimensión del problema, después de N optimizaciones lineales se encuentra el mínimo de la función si ésta es una forma cuadrática, como en (A.45). En el caso más general en el que la función no sea exactamente una forma cuadrática no se encontrará exactamente en el mínimo, pero repitiendo ciclos de N minimizaciones lineales si se irá convergiendo cuadráticamente a él.

La forma más sencilla de encontrar las sucesivas direcciones de optimización lineal consiste en utilizar el método del descenso de mayor pendiente (steepest descent). En cada iteración se encuentra el nuevo punto minimizando en la dirección que marca el gradiente de la función en el punto anterior. La problemática del método en cuanto a la eficiencia en la convergencia en función de la distribución de autovalores de la matriz A ya fue presentada en {5.3.2-3} Una mejora consiste en utilizar la información de las direcciones anteriores para actualizar la nueva, de modo que esta última sea conjugada a todas las anteriores.

Los dos métodos de gradiente conjugado más utilizados son los de Fletcher-Reeves y el de Polack-Ribiere. Ambos son muy parecidos y equivalentes para funciones cuadráticas, aunque su comportamiento es algo distinto para un caso más general.

A la matriz \bar{A} , matriz hesiana de la función en un punto, se le generan dos secuencias de vectores partiendo de dos vectores arbitrarios iguales, $h_0 = g_0$, tales que

$$g_{n+1} = g_n - \lambda_n \bar{A} h_n \quad h_{n+1} = g_{n+1} + \gamma_n h_n \quad (\text{A.49})$$

donde los escalares λ_n y γ_n se escogen de manera que se cumpla

$$\begin{aligned} \langle g_{n+1}, g_n \rangle = 0 & \rightarrow \lambda_n = \frac{\langle g_n, g_n \rangle}{\langle g_n, \bar{A} h_n \rangle} \\ \langle h_{n+1}, \bar{A} h_n \rangle = 0 & \rightarrow \gamma_n = - \frac{\langle g_{n+1}, \bar{A} h_n \rangle}{\langle h_n, \bar{A} h_n \rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

de esta forma la serie de vectores g_n son ortogonales entre si, y los vectores h_n son conjugados entre si. Estas afirmaciones pueden demostrarse por inducción. También puede demostrarse que las siguientes ecuaciones para los escalares también son ciertas

$$\gamma_n = \frac{\langle g_{n+1}, g_{n+1} \rangle}{\langle g_n, g_n \rangle} = \frac{\langle g_{n+1}, (g_{n+1} - g_n) \rangle}{\langle g_n, g_n \rangle} \quad (\text{A.51})$$

$$\lambda_n = \frac{\langle g_n, h_n \rangle}{\langle h_n, \bar{A} \cdot h_n \rangle}$$

Con todas estas ecuaciones parece sencilla la construcción de la serie de direcciones que permitan llegar al mínimo de la función, pero en general no se podrá conocer la matriz \bar{A} . Si se supone que se tiene una función $f(x)$ que cumple (A.45) de la que se conoce el valor del gradiente en un punto $g_n = -\nabla f(P_n)$ y una secuencia de vectores como en (A.49). Desde ese punto, P_n , se minimiza el valor de la función en una determinada dirección, h_n , encontrando un nuevo punto P_{n+1} . Una vez allí se actualiza $g_{n+1} = -\nabla f(P_{n+1})$, y este nuevo vector es el mismo que se obtendría utilizando (A.50). La demostración es simple, partiendo de la ecuación del gradiente

$$g_n = -\bar{A} \cdot P_n - b \quad (\text{A.52})$$

y de la del nuevo punto

$$g_{n+1} = -\bar{A} \cdot (P_n + \lambda h_n) - b = g_n - \lambda \bar{A} \cdot h_n \quad (\text{A.53})$$

donde λ nos lleva a la posición del mínimo en esa dirección, pero allí el gradiente es ortogonal a la dirección de minimización, por lo que

$$\langle h_n, \nabla f(P_{n+1}) \rangle = -\langle h_n, g_{n+1} \rangle = 0 \quad (\text{A.54})$$

y de (A.53) es fácil obtener

$$\langle h_n, g_{n+1} \rangle = 0 = \langle h_n, g_n \rangle - \lambda \langle h_n, \bar{A} \cdot h_n \rangle \rightarrow \lambda = \frac{\langle h_n, g_n \rangle}{\langle h_n, \bar{A} \cdot h_n \rangle} \quad (\text{A.55})$$

que es exactamente la condición (A.51).

Por lo tanto puede realizarse el proceso de minimización de la función sin el conocimiento de su hesiano, únicamente con la información del gradiente en cualquier punto y de un proceso de minimización lineal.

El método de Fletcher-Reeves utiliza la primera expresión de γ_n de (A.51), posteriormente Polack-Ribiere propusieron la segunda. Ambas son equivalentes cuando la función sea perfectamente cuadrática, cosa que casi nunca sucede en la práctica. Para el caso más general, cuando se llega al mínimo de la supuesta función cuadrática es necesario reinicializar el algoritmo para mejorar ese mínimo, al parecer el método de Polack-Ribiere es más eficiente con funciones no cuadráticas [Numerical '89]. Toda la demostración del método se ha realizado para funciones de números reales, pero su extensión a complejos es sencilla [Kleinman '91].

A.4 DEDUCCIÓN DE LAS DERIVADAS DEL FUNCIONAL DEL MÉTODO HÍBRIDO

Para la minimización del funcional F_n mediante el Método del Gradiente Conjugado **Multidimensional** era necesario conocer sus derivadas parciales respecto cada una de las variables de optimización α_n y β_n . Estas variables complejas se tratan de forma independiente en sus partes real e imaginaria, de forma que el proceso de minimización se implementa como optimización de una función de cuatro variables

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_R + j\alpha_I \\ \beta &= \beta_R + j\beta_I\end{aligned}\tag{A.56}$$

Recordando que el funcional a minimizar responde a la siguiente expresión

$$F_n = F_n^D + F_n^S = \frac{\sum_{i=1}^{NAE} \|E_i^{inc} - E_{i,n} + G(C_n)E_{i,n}\|_D^2}{\sum_{i=1}^{NAE} \|E_i^{inc}\|_D^2} + \frac{\sum_{i=1}^{NAE} \|E_i^{med} - K(C_n)E_{i,n}\|_S^2}{\sum_{i=1}^{NAE} \|E_i^{med}\|_S^2}\tag{A.57}$$

donde

$$\begin{aligned}E_{i,n} &= E_{i,n-1} + \alpha_n v_{i,n} & C_n &= C_{n-1} + \beta_n d_n \\ r_{i,n} &= E_i^{inc} - E_{i,n} + G(C_n)E_{i,n} & p_{i,n} &= E_i^{med} - K(C_n)E_{i,n}\end{aligned}\tag{A.58}$$

y los errores en ambos dominios pueden encontrarse de forma recursiva como

$$r_{i,n} = r_{i,n-1} - \alpha_n v_{i,n} + \alpha_n G(C_{n-1}) v_{i,n} + \beta_n G(d_n) E_{i,n} + \alpha_n \beta_n G(d_n) v_{i,n} \quad (\text{A.59})$$

para el error en el campo incidente en el dominio del objeto, y

$$\rho_{i,n} = \rho_{i,n-1} - \beta_n K(d_n) E_{i,n} - \alpha_n K(C_{n-1}) v_{i,n} - \alpha_n \beta_n K(d_n) v_{i,n} \quad (\text{A.60})$$

para el error en el campo dispersado en el dominio de las antenas receptoras.

Como el módulo al cuadrado de un vector complejo se define como el producto escalar de él por su traspuesto conjugado, puede obtenerse, aplicando las reglas de derivación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_R} \langle r_{i,n}, r_{i,n} \rangle &= r_{i,n}^* [-v_{i,n} + G(C_{n-1}) v_{i,n} + \beta_n G(d_n) v_{i,n}] + \\ &+ [-v_{i,n} + G(C_{n-1}) v_{i,n} + \beta_n G(d_n) v_{i,n}]^* \cdot r_{i,n} = \\ &= 2\mathbf{R}[r_{i,n}^* \cdot (-v_{i,n} + G(C_{n-1}) v_{i,n} + \beta_n G(d_n) v_{i,n})] \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_I} \langle r_{i,n}, r_{i,n} \rangle &= r_{i,n}^* [-jv_{i,n} + jG(C_{n-1}) v_{i,n} + j\beta_n G(d_n) v_{i,n}] + \\ &+ [-jv_{i,n} + jG(C_{n-1}) v_{i,n} + j\beta_n G(d_n) v_{i,n}]^* \cdot r_{i,n} = \\ &= -2\mathbf{I}[r_{i,n}^* \cdot (-v_{i,n} + G(C_{n-1}) v_{i,n} + \beta_n G(d_n) v_{i,n})] \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_R} \langle r_{i,n}, r_{i,n} \rangle &= r_{i,n}^* [G(d_n) E_{i,n-1} + \alpha_n G(d_n) v_{i,n}] + \\ &+ [G(d_n) E_{i,n-1} + \alpha_n G(d_n) v_{i,n}]^* \cdot r_{i,n} = \\ &= 2\mathbf{R}[r_{i,n}^* \cdot (G(d_n) E_{i,n-1} + \alpha_n G(d_n) v_{i,n})] \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_I} \langle r_{i,n}, r_{i,n} \rangle &= r_{i,n}^* [jG(d_n) E_{i,n-1} + j\alpha_n G(d_n) v_{i,n-1}] + \\ &+ [jG(d_n) E_{i,n-1} + j\alpha_n G(d_n) v_{i,n-1}]^* \cdot r_{i,n} = \\ &= -2\mathbf{I}[r_{i,n}^* \cdot (G(d_n) E_{i,n-1} + \alpha_n G(d_n) v_{i,n})] \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

de la misma manera pueden calcularse las derivadas para el error en el campo dispersado

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_R} \langle \rho_{i,n}, \rho_{i,n} \rangle = -2\mathcal{R}[\rho_{i,n}^* \cdot (K(C_n)v_{i,n} + \beta_n K(d_n)v_{i,n})] \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_I} \langle \rho_{i,n}, \rho_{i,n} \rangle = 2\mathcal{I}[\rho_{i,n}^* \cdot (K(C_n)v_{i,n} + \beta_n K(d_n)v_{i,n})] \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_R} \langle \rho_{i,n}, \rho_{i,n} \rangle = -2\mathcal{R}[\rho_{i,n}^* \cdot (K(d_n)E_{i,n-1} + \alpha_n K(d_n)v_{i,n})] \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_I} \langle \rho_{i,n}, \rho_{i,n} \rangle = 2\mathcal{I}[\rho_{i,n}^* \cdot (K(d_n)E_{i,n-1} + \alpha_n K(d_n)v_{i,n})] \quad (\text{A.68})$$

Estas expresiones son las utilizadas por el algoritmo para minimizar el funcional F_n y encontrar el mejor valor de las cuatro variables de (A.56).

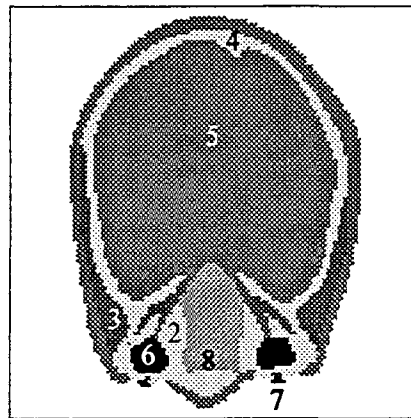
B

MODELOS NUMÉRICOS

B.1 INTRODUCCIÓN

En este apéndice se presentan los modelos numéricos que se han utilizado a lo largo de la tesis. Junto a la sección del cuerpo discretizada también se incluyen los valores de permitividad obtenidos de las referencias citadas en {2.3.3}. Hay que recordar que los valores de permitividad siempre son aproximados al existir variaciones en función de la referencia consultada, el sistema de medida o el estado del tejido en el momento de medirlo. A pesar de ello, los errores no son demasiado importantes y no afectan a las conclusiones deducidas de las simulaciones con los distintos algoritmos inversos.

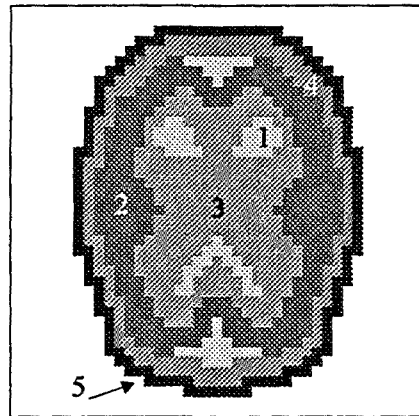
B.2 CRÁNEO - I



- 1) Piel
- 2) Grasa
- 3) Músculo
- 4) Hueso
- 5) Cerebro
- 6) Humor
- 7) Cristalino
- 8) Cartilago

M. Externo = 1.0 -j 0.0 (Aire)		f = 1.89 GHz
Medio	Tejido	Permitividad
1	Piel	44.5 - j 9.6
2	Grasa	6.4 - j 1.1
3	Músculo	50.5 - j 12.4
4	Hueso	6.4 - j 1.1
5	Cerebro	48.0 - j 11.9
6	Humor acuoso	80.0 - j 18.1
7	Cristalino	50.5 - j 12.4
8	Cartílago	25.0 - j 5.7
Malla 113x113, resolución 0.1 λ_{\min}		

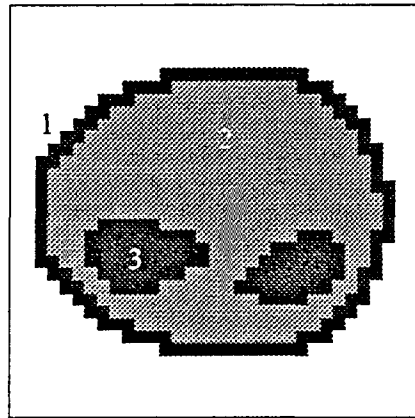
B.3 CRÁNEO - II



- 1) Líquido cefalorraquídeo
- 2) Materia gris
- 3) Materia blanca
- 4) Hueso
- 5) Piel

M. Externo = $74.0 - j 2.2$ (Agua)		$f = 700$ MHz	
Medio	Tejido	Permitividad	Contraste
1	Piel	$50.0 - j 18.0$	$0.32 + j 0.22$
2	Hueso	$8.5 - j 0.85$	$0.88 + j 0.01$
3	Materia gris	$54.0 - j 28.5$	$0.26 + j 0.36$
4	Materia blanca	$40.0 - j 13.5$	$0.45 + j 0.17$
5	Líquido cefalorraquídeo	$62.0 - j 30.2$	$0.15 + j 0.38$
Malla 41×41 , resolución $0.1 \lambda_{\min}$ (agua)			

B.4 ANTEBRAZO - I

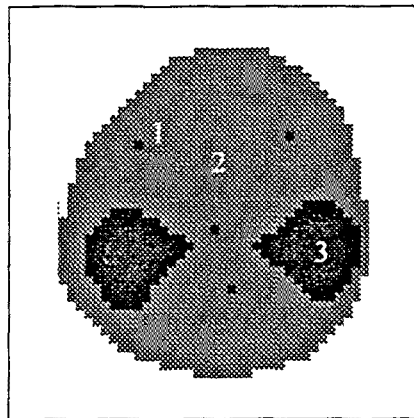


- 1) Piel
- 2) Músculo
- 3) Hueso

M. Externo = 78.0 - j 3.6 (Agua)		f = 1.0 GHz	
Medio	Tejido	Permitividad	Contraste
1	Piel	44.5 - j 18.2	0.42 + j 0.21
2	Músculo	50.5 - j 23.4	0.34 + j 0.27
3	Hueso	6.4 - j 2.2	0.92 + j 0.02

Malla 33x33, resolución 0.1 λ_{\min} (agua)

B.5 ANTEBRAZO - II

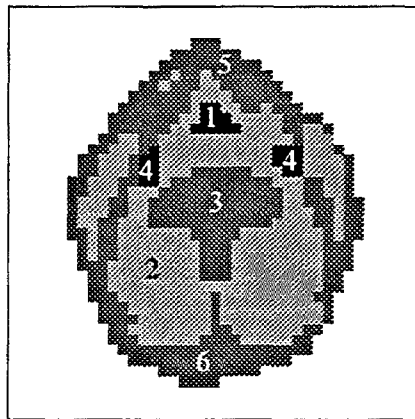


- 1) Arterias y venas
- 2) Músculo
- 3) Hueso

M. Externo = $78.0 - j 3.6$ (Agua)		$f = 1.0$ GHz	
Medio	Tejido	Permitividad	Contraste
1	Arterias/venas	$63.0 - j 20.0$	$0.18 + j 0.22$
2	Músculo	$50.5 - j 23.4$	$0.34 + j 0.27$
3	Hueso	$6.4 - j 2.2$	$0.92 + j 0.02$

Malla 45x45, resolución $0.0625 \lambda_{\min}$ (agua)

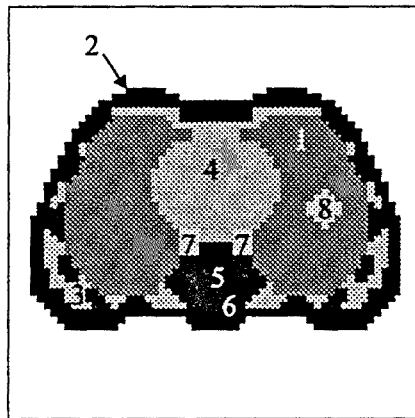
B.6 CUELLO



- 1) Tráquea
- 2) Músculo
- 3) Hueso
- 4) Arterias/Venas
- 5) Cartilago
- 6) Tejido adiposo

M. Externo = 78.0 - j 3.6 (Agua)		f = 1.0 GHz	
Medio	Tejido	Permitividad	Contraste
1	Tráquea	1.0 - j 0.0	0.99 - j 0.00
2	Músculo	50.5 - j 23.4	0.34 + j 0.27
3	Hueso	6.4 - j 2.2	0.92 + j 0.02
4	Arterias/Venas	63.0 - j 20.0	0.18 + j 0.22
5	Cartilago	25.0 - j 10.8	0.67 + j 0.12
6	Tejido Adiposo	28.2 - j 13.5	0.63 + j 0.16
Malla 39x39, resolución 0.1 λ_{min} (agua)			

B.7 TÓRAX



- 1) Pulmón
- 2) Tejido adiposo
- 3) Músculo
- 4) Músculo cardíaco
- 5) Médula ósea
- 6) Hueso
- 7) Arterias/venas
- 8) Tumor

M. Externo = 75.0 - j 1.12 (Agua)		f = 434.0 MHz	
Medio	Tejido	Permitividad	Contraste
1	Pulmón	36.0 + j 25.0	0.51 + j 0.32
2	Tejido Adiposo	5.5 - j 3.3	0.93 + j 0.04
3	Músculo	53.0 - 41.4	0.28 + j 0.54
4	Músculo cardíaco	56.0 - j 38.5	0.24 + j 0.50
5	Médula	5.5 - j 1.2	0.93 + j 0.01
6	Hueso	8.5 - j 1.4	0.89 + j 0.02
7	Arterias/Venas	63.0 - j 49.7	0.15 + j 0.65
8	Tumor	60.0 - j 30.0	0.19 + j 0.39
Malla 65x65, resolución 0.08 λ_{min} (agua)			

REFERENCIAS

[Abramowitz '72] M. Abramowitz, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publication Inc., 1972.

[Albella '84] L.M. Albella, J.M. Martínez, "Física de Dieléctricos", Ed. Marcombo, 1984.

[Almirall '91] H. Almirall, A. Broquetas et al., "Active Microwave Computed Brain Tomography: the Response to a Challenge", Journal of Neuroscience Methods, No. 36, pp. 239-251, 1991.

[ANSI '82] American National Standards Institute ANSI C95.1-1982, "Safety Levels with Respect to Human Exposure to Radiofrequency Electromagnetic Fields, 300 KHz to 100 GHz", printed by the IEEE. 1982.

[Athey '82] T.W. Athey, M.A. Stuchly, "Measurement of Radio Frequency Permittivity of Biological Tissues with an Open-Ended Coaxial Line: Part I", IEEE Trans. on MTT, Vol. 30, No. 1, pp. 82-86, January 1982.

[Balanis '89] C.A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley & Sons, 1989.

- [Berg '84] P.M. van den Berg, "Iterative Computational Techniques in Scattering Based Upon the Integral Square Error Criterion", *IEEE Trans. on AP*, Vol. 32, No. 10, pp. 1063-1071, October 1984.
- [Bolomey '90] J.C. Bolomey, M. S. Hawley, "Noninvasive Control of Hyperthermia", Cap.2 of *Methods of Hyperthermia Control*, pp. 35-111, Ed. M. Gautherie, Springer-Verlag, 1990.
- [Borup '85] D.T. Borup, D.M. Sullivan, et al., "Comparison of the FFT Conjugate Gradient Method and the Finite-Difference Time-Domain Method for the 2D Absorption Problem", *IEEE Trans. on MTT*, Vol. 35, No. 4, pp. 383-395, April 1985.
- [Brady '81] M.M. Brady, S.A. Symons et al., "Dielectric Behaviour of Selected Animal Tissues in Vitro at Frequencies from 2 to 4 GHz", *IEEE Trans. on BME*, Vol. 28, No. 3, pp. 305-307, March 1981.
- [Broquetas '89a] A. Broquetas, "Tomografía de Microondas en Geometría Cilíndrica para Aplicaciones Biomédicas", Tesis Doctoral, UPC, Mayo 1989.
- [Broquetas '89b] A. Broquetas, M.S. Hawley et al., "Active Microwave Computed Tomography Cylindrical Scanner for Biomedical Applications", *The Journal of Photographic Science*, Vol. 37, pp. 151-153, 1989.
- [Broquetas '91] A. Broquetas, J. Romeu et al., "Cylindrical Geometry: A Further Step in Active Microwave Tomography", *IEEE Trans. on MTT*, Vol. 39, No. 5, pp. 836-844, May 1991.
- [Broquetas '93] A. Broquetas, J.J. Mallorquí et al., "Active Microwave Sensing of Highly Contrasted Dielectric Bodies", *Journal of EM Waves and Appl.*, Vol. 7, No. 11, pp. 1439-1453, November 1993.
- [Burdette '83] E.C. Burdette, "Measurement of Electrical Properties of Tissue at Microwave Frequencies: A New Approach to Detection and Treatment of Abnormalities", *Non-Invasive Physiological Measurements*, Ed. P. Rolfe, Academic Press, Vol. 2, pp. 353-376, 1983.
- [Burdette '86] E.C. Burdette, P.G. Friederich, "In Situ Permittivity of Canine Brain: Regional Variations and Postmortem Changes", *IEEE Trans. on MTT*, Vol. 34, No. 1, pp. 38-50, January 1986.

[Bussey '75] H.E. Bussey, J.H. Richmond, "Scattering by a Lossy Dielectric Circular Cylindrical Multilayer, Numerical Values", IEEE Trans. on AP, Vol. 24, No. 9, pp. 723-725, September 1975

[Caorsi '94] S. Caorsi, G.L. Gragnani et al., "An Analysis of Some Regularization Methods for Inverse Scattering in the Spatial Domain", Proc. of the Journées Internationales de Nice sur les Antennes, pp. 225-228, November 1994.

[Cardama '93] A. Cardama, Ll. Jofre et al, "Antenas", Col.lecció Politext, Ed. UPC, 1993.

[Conway '86] J. Conway, A.P. Anderson, "Electromagnetic Techniques in Hyperthermia", Clin. Phys. Physiol. Meas., Vol. 7, No. 4, pp. 287-318, 1986.

[Cook '52] H.F. Cook, "A Comparison of the Dielectric Behaviour of Pure Water and Human Blood at Microwave Frequencies", Brit. Jour. Appl. Phys., Vol. 3, pp. 249-254, 1952.

[Chew '89] W.C. Chew, "An N^2 Algorithm for the Multiple Scattering Solution of N Scatterers", Microwave and Optical Tech. Letters, Vol. 2, No. 11, pp. 380-383, November 1989.

[Chew '90a] W.C. Chew, "Waves and Fields in Inhomogeneous Media", Van Nostrand Reinhold, 1990.

[Chew 90b] W.C. Chew, Y.M. Yang, "A Fast Algorithm Solution of a Scattering Problem Using a Recursive Aggregate t Matrix Method", Microwave and Optical Tech. Letters, Vol. 3, No. 4, pp. 164-169, May 1990.

[Chew '90c] W.C. Chew, Y. M. Yang, "Reconstruction of Two-Dimensional Permittivity Distribution Using the Distorted Born Iterative Method", IEEE Trans. on Medical Imaging, Vol. 9, No. 2, June 1990.

[Chew '92a] W.C. Chew, L. Gürel et al., "A Generalized Recursive Algorithm for Wave Scattering Solutions in Two Dimensions", IEEE Trans. on MTT., Vol. 40, No. 4, pp. 716-723, April 1992.

[Chew '92b] W.C. Chew, Y.M. Yang et al., "Recursive Algorithm for Wave-Scattering Solutions Using Windowed Addition Theorem", JEMWA, Vol. 6, No. 11, pp. 1537-1560, 1992.

[Flack '94] F.C. Flack, "Recent Advances in Medical Functional Imaging", Engineering Science and Educational Journal, pp. 213-222, October 1994.

[Geffrin '95] J.M. Geffrin, "Imagerie Microonde: Etude d'un Scanner a 434 MHz pour Applications Biomedicales", These de l'Universite de Paris XI, Janvier 1995.

[Golub '83] G.H. Golub, Ch.F. Van Loan, "Matrix Computations", Johns Hopkins Series in Mathematical Sciences 3, The Johns Hopkins University Press, 1983.

[Grant '57] E.H. Grant, "The Dielectric Properties of Methyl and Ethyl Alcohols in the Wavelength Range 3 cm-52 cm", Proc. Phys. Soc. LXX, pp. 934-944, 1957.

[Harrington '61] R.F. Harrington, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", McGraw-Hill Book Company, 1961.

[Harrington '93] R.F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods", Series on Electromagnetic Waves, IEEE Press 1993.

[Hawley '91] M.S. Hawley, A. Broquetas et al., "Microwave Imaging of Tissue Blood Content Changes", J. Biomed. Eng., Vol. 13, pp. 197-202, May 1991.

[Haykin '91] S. Haykin, "Adaptative Filter Theory", Prentice-Hall, 1991.

[Hestenes '80] M. Hestenes, "Conjugate Direction Methods in Optimization", Applications of Mathematics 12, Springer-Verlag, 1980.

[Hippel '54] Varios autores, "Dielectric Materials and Applications", Arthur von Hippel Editor, The MTT Press, 1954.

[Ishimaru '91] A. Ishimaru, "Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering", Ed. Prentice Hall, 1991.

[Iskander '78] M.F. Iskander, "Radiofrequency Radiation Dosimetry Handbook", Dept. of Electrical Eng. & Bioeng., University of Utah, pp. 58-61, 2nd Ed., May 1978.

[Joachimowicz '90] N. Joachimowicz, C. Pichot, "Comparison of Three Formulations for the 2D TE Scattering Problem", IEEE Trans. on MTT, Vol. 38, No. 2, pp. 178-185, February 1990.

[Joachimowicz '91] N. Joachimowicz, C. Pichot et al., "Inverse Scattering: An Iterative Method for Electromagnetic Imaging", IEEE Trans. on AP, Vol. 30, No. 11, pp. 1742-1752, November 1991.

[Jofre '90] Ll. Jofre, M.S. Hawley et al, "Medical Imaging with a Microwave Tomographic Scanner, IEEE Trans. on BME, Vol. 37, No. 3, pp. 303-312, March 1990.

[Kleinman '90a] R.E. Kleinman, P.M. van den Berg, "Nonlinearized Approach to Profile Inversion", International Journal of Imaging Systems and Technology, Vol. 2, pp. 119-126, 1990.

[Kleinman '90b] R.E. Kleinman, P.M. van den Berg, "Profile Inversion via Successive Over-Relaxation", Digital Image Synthesis and Inverse Optics, SPIE, Vol. 1351, pp. 129-139, July 1990.

[Kleinman '91] R.E. Kleinman, P.M. van den Berg, "A Hybrid Method for Two-Dimensional Problems in Tomography", Technical Report No. 91-2, Center for The Mathematics of Waves, University of Delaware, 1991.

[Kleinman '92] R.E. Kleinman, P.M. van den Berg, "An Extended Range Modified Gradient Technique for Profile Inversion", Proc. of the 1992 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, pp. 251-253, August 1992.

[Kleinman '93] R.E. Kleinman, P.M. van den Berg, "An Extended Range Modified Gradient Technique for Profile Inversion", Radio Science, Vol. 28, pp. 877-884, 1993.

[Lin '93] J.H. Lin, Y.M. Wang, W.C. Chew, J.J. Mallorquí et al. "Processing Microwave Experimental Data with the Distorted Born Iterative Method of Nonlinear Inverse Scattering", Proc. of the APS-URSI'93, July 1993.

[Llorens '94] V. Llorens, "Algorisme Iteratiu per a Tomografia Activa de Microones", P.F.C. de la ETSETB, UPC, Febrer 1994.

[Luenberger '89] D.G. Luenberger, "Programación Lineal y No Lineal", Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[Mallorquí '90] J.J. Mallorquí, "Termografia Activa de Microones en Cossos Biològics", P.F.C. de la ETSETB, UPC, 1990.

- [Mallorquí '92] J.J. Mallorquí, A. Broquetas, "Non-Invasive Active Thermometry with a Microwave Tomographic Scanner in Hyperthermia Treatments", *ACES Journal, Special Issue on Bioelectromagnetic Computations*, Vol. 7, No. 2, pp. 121-127, Winter 1992.
- [Mallorquí '93] J.J. Mallorquí, A. Broquetas et al., "Combined Inverse Reconstruction Algorithm for Highly Contrasted Biological Bodies in Microwave Tomography", *Proc. of PIERS 93*, July 1993.
- [Mallorquí '94a] J.J. Mallorquí, "Active Microwave Spectroscopy", *Functional Imaging*, Edited by the IEE, pp. 6.1-6.3, January 1994.
- [Mallorquí '94b] J.J. Mallorquí, V. Llorens, "Iterative Algorithm for Microwave Imaging Using the CGM-FFT and the Pseudoinverse Method", *Proc. of IEEE APS'94*, Vol. 3, pp. 1676-1678, June 1994.
- [Mallorquí '95a] J.J. Mallorquí, M. Rodríguez, "GRATMA Method for Biomedical Applications: Comparison with the CGM-FFT", pendiente de aceptación en el IEEE APS'95 a celebrar en California, 18-23 de Junio 1995.
- [Mallorquí '95b] J.J. Mallorquí, A. Broquetas, "Microwave Inverse Scattering: Biomedical and Industrial Applications", a presentar por invitación en PIERS'95 a celebrar en Seattle, 24-28 de Julio 1995.
- [Martín '90] J. Martín, "Tratamiento de Hipertermia Profunda en Cáncer y su Monitorización Mediante Microondas", P.F.C. de la ETSETB, UPC, 1990.
- [Martín '91] J. Martín, A. Broquetas et al., "Dynamic Active Microwave Tomography Applied to Hyperthermia Monitoring", *The Journal of Photographic Science*, Vol. 39, pp. 146-148, 1991.
- [Martin] A.V.J. Martin, "Propriétés Electriques Macroscopiques de Matériaux Biologiques", *Annales de Physique Biologique et Médicale*, Vol. 8, No. 2, pp.118-132.
- [Ney '85] M.M. Ney, "Method of Moments as Applied to Electromagnetic Problems", *IEEE Trans. on MTT*, Vol. 33, No. 10, pp. 972-980, October 1985.
- [Numerical '89] W.H. Press, B.P. Flannery et al., "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing", Cambridge Univeristy Press, 1989.

[Ortega '89] J. M. Ortega, "Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems", Frontiers of Computer Science, Plenum Press, 1989.

[PIER5 '90] T.K. Sarkar et al., "Application of Conjugate Gradient Method to Electromagnetics and Signal Analysis", Progress in Electromagnetic Research 5, Ed. Elsevier, 1990.

[Pous '94] R. Pous, J.J. Mallorquí et al., "The CGM and the FDTD for SAR Studies", Proc. of IEEE APS'94, Vol. 3, pp. 1881-1883, June 1994.

[Richmond '65] J.H. Richmond, "Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape", IEEE Trans. on AP, Vol. 23, No. 5, pp.334-341, May 1965.

[Rius '87a] J.M. Rius, "Algoritmos para Tomografía de Microondas con Geometría Cilíndrica", P.F.C. de la ETSETB, UPC, 1987.

[Rius '87b] J.M. Rius, M. Ferrando et al., "Microwave Tomography: an Algorithm for Cylindrical Geometries", Electronic Letters, Vol. 23, No. 11, pp. 564-565, May 1987.

[Rius '92] J.M. Rius, C. Pichot et al., "Planar and Cylindrical Active Microwave Temperature Imaging: Numerical Simulation", IEEE Trans. on Medical Imaging, Vol. 11, No. 4, pp. 457-469, December 1992.

[Sarkar '81a] T.K. Sarkar, K.R. Siarkiewicz et al., "Survey of Numerical Methods for Solution of Large Systems of Linear Equations for Electromagnetic Field Problems", IEEE Trans. on AP, Vol. 29, No. 6, pp. 847-856, November 1981.

[Sarkar '81b] T.K. Sarkar, D.D. Weiner, et al., "Some Mathematical Considerations in Dealing with the Inverse Problem", IEEE Trans. on AP, Vol. 29, No. 2, pp. 373-379, March 1981.

[Sarkar '82] T.K. Sarkar, S.M. Rao, "An Iterative Method for Solving Electrostatic Problems", IEEE Trans. on AP, Vol. 30, NO. 4, pp. 611-616, July 1982.

[Sarkar '85] T.K. Sarkar, E. Arvas, "On a Class of Finite Step Iterative Methods (Conjugate Directions) for the Solution of an Operator Equation Arising in Electromagnetics", IEEE Trans. on AP, Vol. 33, No. 10, pp. 1058-1066, October 1985.

[Schwan '57] H.P. Schwan, "Electrical Properties of Tissues and Cell Suspensions", Advances in Biological and Medical Physics, pp. 147-209, 1957.

[Schwan '77] H.P. Schwan, K.R. Foster, "Microwave Dielectric Properties of Tissue: Some Comments on the Rotation Mobility of Tissue Water", *Biophysical Journal*, Vol. 17, pp. 193-197, 1977.

[Schwan '80] H.P. Schwan, K.R. Foster, "RF-Field Interaction with Biological Systems: Electrical Properties and Biophysical Mechanisms", *Proc. of the IEEE*, Vol. 68, No. 1, pp. 104-113, January 1980.

[Slaney '85] M. Slaney, A.C. Kak, "Imaging with Diffraction Tomography", TR-EE 85-5, School of Electrical Eng., Purdue University, February 1985.

[Stogryn '71] A. Stogryn, "Equations for Calculating the Dielectric Constant of Saline Water", *IEEE Trans. on MTT*, pp. 733-736, August 1971.

[Stratton '41] J. A. Stratton, "Electromagnetic Theory", Mc Graw-Hill Book Company, 1941.

[Stuchly '80] M.A. Stuchly, S.S. Stuchly, "Dielectric Properties of Biological Substances-Tabulated", *Journal of Microwave Power*, No. 15, pp. 19-26, 1980.

[Surowiec '87] A.J. Surowiec, S.S. Stuchly et al., "Dielectric Polarization of Animal Lung at Radio Frequencies", *IEEE Trans. on BME*, Vol. 34, No. 1, pp. 62-67, January 1987.

[Surowiec '88] A.J. Surowiec, S. Stuchly et al., "Dielectric Properties of Breast Carcinoma and the Surrounding Tissues", *IEEE Trans. on BME*, Vol. 35, No. 4, pp. 257-262, April 1988.

[Tikhonov '87] A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, "Ill-Posed Problems in the Natural Sciences", *Mathematics and Mechanic Series*, Mir Publishers, 1987.

[Umashankar '93] K. Umashankar, A. Taflove, "Computational Electromagnetics", Artech House, 1993.

[Vall-llossera '94] M. Vall-llossera, "Aplicación del Modelado Geométrico a Problemas de Difracción Electromagnética", Tesis Doctoral, UPC, Marzo 1994.

[Vaquer '93a] M. Vaquer, J.J. Mallorquí, et al., "Bidimensional Scattering of TM and TE Polarized Waves by Dielectric Bodies Using the CG-FFT Method: Application to Mobile Communications Systems", *Proc. of the 23rd European Microwave Conference*, pp. 409-411, September 1993.

[Vaquer '93b] M. Vaquer, "Difracción de Cuerpos Dieléctricos y Metálicos Mediante el Método MM-FFT-CGM: Aplicaciones a Antenas de Comunicaciones Móviles", P.F.C. de la ETSETB, UPC, 1993.

[Vaquer '93c] M. Vaquer, J.J. Mallorquí, et al., "Interacción entre Antenas para Comunicaciones Móviles y el Cuerpo Humano: Estudio de Diagramas de Radiación 3-D y SAR", Actas del VIII Simposium Nacional de la URSI, pp. 664-668, Septiembre 1993.

[Veclib '91] "CONVEX Veclib User's Guide". CONVEX Press, August 1991.

[Wang '90] Y.M. Wang, W.C. Chew, "An Efficient Algorithm for Solution of a Scattering Problem", Microwave and Optical Tech. Letters, Vol. 3, No. 2, pp. 102-106, March 1990.

[Wang '91] Y.M. Wang, W.C. Chew, "Application of the Fast Recursive Algorithm to a Large Inhomogeneous Scatterer for TM Polarization", Microwave and Optical Tech. Letters, Vol. 4, No. 4, pp. 155-157, March 1991.

[Wang '92] Y.M. Wang, W.C. Chew, "Accelerating the Iterative Inverse Scattering Algorithms by Using the Fast Recursive T-Matrix Algorithm", Radio Science, Vol. 27, No. 2, pp. 109-116, March-April 1992.

[Zwamborn '91a] A.P.M. Zwamborn, "Scattering by Objects with Electric Contrast", Ph. D. Thesis, Delft University Press, 1991.

[Zwamborn '91b] A.P.M. Zwamborn, P.M. van den Berg, "A Weak Form of the Conjugate Gradient Method for Two-Dimensional TE Scattering", IEEE Trans. on MTT, Vol. 39, No. 6, pp. 953-960, June 1991.

[Zwamborn '92] A.P.M. Zwamborn, P.M. van den Berg, "The Three-Dimensional Weak Form of the Conjugate Gradient Method for Solving Scattering Problems", IEEE Trans. on MTT, Vol. 40, No. 9, pp. 1757-1766, September 1992.

