

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS

TESI DOCTORAL

TITOL: ANALISI DE DISCONTINUITATS FINLINE

DIRECTORS:

ADOLF COMERON TEJERO

LLUIS PRADELL I CARA

AUTOR:

ANTONI BARLABE I DALMAU


Barcelona, Setembre de 1995

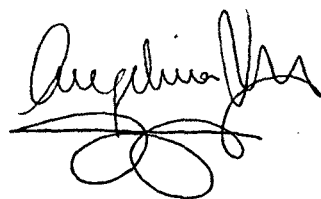
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ADMINISTRACIÓ D'ASSUMPTES ACADÈMICS

Aquesta Tesi ha estat entre lletres
a la pàgina 79 amb el número 719

Barcelona, 2-4-96

L'ENCARREGAT DEL REGISTRE.

 **UPC**
UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



Capítol 1. Introducció i objectius

La modelització i simulació per ordinador d'estructures, processos i sistemes d'aplicació a la ciència, tecnologia i, especialment, a l'enginyeria, ha tingut un desenvolupament notabilíssim els darrers anys degut, per una banda, a l'escalada de costos en el desenvolupament de nous prototipus cada cop més complexos i sofisticats, i per altra banda, a la rapidíssima evolució dels ordinadors digitals cap a una potència de càlcul i un preu impensables fa uns anys.

Avui dia es tendeix a reduir, i fins i tot a eliminar, la tècnica de "prova i error" tant en la fase de realització de prototipus com en la de fabricació en sèrie. Es més, molts productes d'enginyeria actuals no s'haurien pogut assolir sense l'ajut d'eines d'anàlisi i disseny assistit per ordinador, especialment aquells com ara els circuits integrats monolítics de microones, per als que l'ajust empíric a posteriori és completament inviable.

La modelització i simulació amb ordinador és una tècnica en auge que va evolucionant cada dia vers aconseguir models i tècniques d'anàlisi més acurats i fiables.

En el cas de problemes electromagnètics, especialment electrodinàmics i d'aplicació a la tecnologia de microones en particular i a l'enginyeria de telecomunicació en general, tenim la sort de disposar d'uns models excel·lents: les equacions de Maxwell. El problema aquí rau en la dificultat d'aplicar-les a l'anàlisi de determinats casos pràctics d'interès considerable. Això ha comportat el desenvolupament de nombrosos mètodes, analítics i numèrics, per resoldre-les sota determinades condicions.

Els mètodes analítics només són aplicables a casos d'estructures força idealitzades. Per a la gran majoria de problemes d'interès no hi ha més remei que fer servir mètodes numèrics implementats sobre potents ordinadors.

Un mètode numèric és una tècnica matemàtica que converteix unes magnituds contínues -el camp elèctric i magnètic modelat per les equacions de Maxwell en el nostre cas- en un conjunt discret tractable per eines de càlcul numèric programades en un ordinador. Aquest procés es pot dur a terme de moltes maneres diferents, donant lloc a una gran varietat de mètodes numèrics.

A grans trets, la solució de les equacions de Maxwell per mitjà d'algun mètode numèric comporta, normalment, les següents fases:

-1. Convertir un sistema d'equacions en derivades parcials en les que el camp elèctric i magnètic estan acoblats (equacions de Maxwell), en una formulació equivalent però més senzilla de tractar: equacions d'ona o equacions integrals dels camps.

-2. Intentar simplificar al màxim el problema, considerant, per exemple, variacions temporals del tipus $e^{j\omega t}$, medis lineals, isotròpics, conductors perfectes, etc.

-3. Formular l'equació a resoldre en termes de camps, potencials o funcions de Green.

-4. Un cop aquí podem seguir diferents camins:

-4a. Discretitzar l'operador.

-4b. Aproximar la funció buscada per una sèrie de funcions base conegudes.

-4c. Aplicar transformacions que ens canviïn el domini matemàtic

-5. Resoldre el sistema matricial obtingut.

Per a cada formulació del problema es poden realitzar varies coses de les esmentades al punt 5 i de moltes maneres diferents. S'explica així la gran varietat de mètodes numèrics que han aparegut (la majoria recentment).

Una primera classificació la podriem fer considerant si el que es pretén analitzar és un problema obert (típic d'antenes i difracció) o tancat (propi d'estructures de microones). Si bé molts mètodes poden tractar ambdós tipus de problemes, ens cenyirem als, teòricament, més idonis per a analitzar estructures tancades. Aquests els podem dividir en tres grans grups:

1.- Mètodes basats en una discretització de l'espai, com:

a.- El mètode de les diferències finites.

b.- El mètode de les línies.

c.- El mètode de la matriu de línies de transmissió.

d.- El mètode dels elements finits.

e.- El mètode dels elements de contorn.

2.- Mètodes basats en desenvolupaments modals o expansions de funcions ortogonals, com:

a.- El mètode dels moments.

b.- El mètode de l'adaptació modal.

c.- El mètode de la matriu S generalitzada.

d.- El mètode de la ressonància transversal generalitzat.

3.- Mètodes basats en l'estimació de la funció de Green:

a.- El mètode del domini espectral.

b.- El mètode de l'equació integral.

c.- El mètode del circuit planar.

Els noms dels mètodes esmentats són els més usuals i per als que normalment són referenciats a la bibliografia [1-6].

La classificació anterior, que pot resultar certament arbitrària, s'ha fet considerant la principal virtut o l'objectiu perseguit per cada mètode.

Alguns mètodes es fan servir com a tècniques auxiliars en altres. Així, per exemple, el mètode de la matriu S generalitzada i el de la ressonància transversal generalitzat utilitzen la tècnica de l'adaptació modal; el del domini espectral i de l'equació integral fan servir el mètode dels moments.

Hi ha altres mètodes, com ara la combinació del domini espectral i de l'adaptació modal, que no han aconseguit nom propi [7].

Possiblement la primera idea que ve a la ment a l'hora de resoldre numèricament una equació diferencial és discretitzar l'operador (mètode de les diferències finites) i la segona aproximar la funció a obtenir amb una sèrie de funcions conegudes, com ara una sèrie de Fourier (mètodes dels moments i de l'adaptació modal). En un afany màxim de simplificació podríem considerar aquests tres mètodes com els primigenis de tots els demés.

L'objectiu de la present tesi és el de disposar de mecanismes de càlcul per analitzar, de la forma més precisa possible, discontinuïtats finline i estructures planars en general utilitzant el mínim de recursos informàtics.

No és necessari recalcar aquí l'importància, actual i futura, de les estructures planars com les línies finline, microstrip, coplanar o slotline per a la realització de filtres, acobladors i altres dispositius presents en sistemes i circuits integrats monolítics de microones i ones mil·limètriques [8-39]. La pròpia natura d'aquests fa molt difícil, sinó impossible, els ajustos empírics, cosa que provoca que siguin necessàries eines de càlcul molt acurades per al seu disseny. Es en aquesta línia en la que s'enmarca aquesta tesi.

Vista la gran quantitat de mètodes numèrics existents a l'actualitat, s'imposa primer una elecció del mètode més idoni per desenvolupar-lo a continuació vers a aconseguir l'objectiu fixat.

Al considerar els diferents mètodes apropiats per al càlcul de discontinuïtats finline en particular i d'estructures planars en general, hem de tenir en compte diferents possibilitats:

Es pot observar que com més general sigui el mètode (menys restriccions té en quant al nombre i tipus d'estructures que pot analitzar), més recursos d'ordinador ens faran falta (memòria i temps de procés) i normalment serà fàcil obtenir un algorisme programable.

Si el mètode és poc general (només serveix per a unes estructures molt concretes) seran necessaris pocs recursos informàtics (poca memòria i poc temps de CPU) però necessitarà una gran quantitat de preprocessament (manipulacions matemàtiques per a obtenir un algorisme programable).

Atenent a la classificació de mètodes donada anteriorment, els basats en una discretització de l'espai acostumen a pertànyer al primer tipus (mètodes generals, molts recursos d'ordinador, poc preprocessament); els basats en una estimació de la funció de Green són del segon tipus (mètodes específics, pocs recursos d'ordinador, molt preprocessament); els basats en expansions de funcions ortogonals pertànyen a una categoria intermèdia.

S'ha d'esmentar també el fet que el descobridor o promotor d'un determinat mètode numèric moltes vegades intenta aplicar-lo a problemes diferents d'aquells per als que fou

pensat en un principi. D'aquesta manera es revaloritza el mètode augmentant la seva generalitat, però pot induir a una elecció incorrecta del mètode més apropiat per a resoldre un determinat problema.

L'elecció del mètode més apropiat no és una qüestió trivial si es preten assolir l'objectiu fixat. Així, donats els decepcionants resultats obtinguts amb el mètode escollit originàriament i la manca d'experiència prèvia al departament sobre mètodes "full-wave" per a l'anàlisi d'estructures planars, el primer pas és comparar diferents mètodes aplicats a les estructures en estudi. Per poder elegir el més idoni amb les màximes garanties d'èxit és necessari implementar-los sobre els ordinadors de que disposem. Així es poden apreciar les seves particularitats, subtileses, mancances i qualitats, detalls difícilment obtenibles a partir de la bibliografia publicada.

Aquesta memòria s'estructura en dues parts. A la primera (capítol 2) es desenvolupen i s'implementen els mètodes següents:

- De les línies.
- Dels elements finits.
- De la matriu de línies de transmissió.
- De la matriu S generalitzada.
- De la ressonància transversal generalitzat.
- Del domini espectral.
- Del circuit planar.

es presenten les realitzacions i els resultats obtinguts que serveixen per comparar-los i escollir el de la ressonància transversal generalitzat com al més idoni per a l'anàlisi de discontinuïtats finline i altres estructures planars.

L'ordre amb el qual es presenten no és cronològic, sinò que fa referència a la classificació de mètodes donada anteriorment.

La segona part (capítol 3) desenvolupa el mètode de la ressonància transversal generalitzat, es troben les condicions per a minimitzar l'inconvenient que presenta (fenòmen de la convergència relativa) i es presenten els resultats obtinguts a l'analitzar diverses discontinuïtats.

Degut a les necessitats dels programes de recerca del departament, moltes de les dades experimentals que serveixen per validar el mètode fan referència a les mesures efectuades amb tècniques de calibració sofisticades [32,40,41] sobre guies coplanars amb substrate d'alúmina i amplades de les metal·litzacions de 50 μm a 40 GHz.

Capítol 2. Desenvolupament de mètodes numèrics per a l'anàlisi d'estructures planars.

2.1. El mètode de les línies

2.1.1. Implementació

El mètode de les línies ("Method of Lines" -MOL-), si bé és un mètode matemàtic antic per a la resolució d'equacions diferencials, la seva aplicació a l'anàlisi d'estructures planars de microones és recent. Per aquesta aplicació va ser desenvolupat per Pregla, Schulz, Worm, Diestel i Schmückle [42-59].

Es basa en discretitzar l'operador derivada (bescanviant-lo per diferències finites) però, i aquesta és la principal diferència i virtut respecte a altres mètodes basats en un mallat de l'espai, només en la direcció o direccions per a les que sigui absolutament necessari. En l'altra o altres direccions es troba una solució exacta analítica. Així s'aconsegueix reduir d'una forma molt considerable el nombre de punts de discretització respecte al que haurien de fer servir altres mètodes basats en un mallat de l'espai, com ara el mètode de les diferències finites o dels elements finits.

Els detalls del desenvolupament del mètode de les línies per a l'anàlisi d'estructures planars es donen a l'apèndix A. Aquí farem una breu descripció.

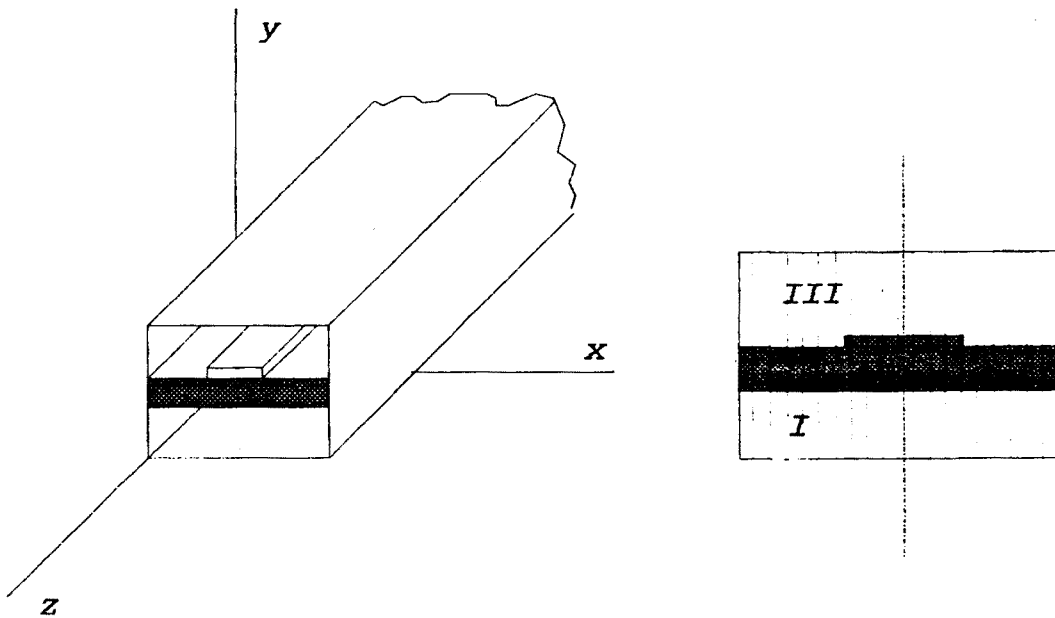


Fig 2.1.1

Per a una estructura planar multicapa com la de la figura 2.1.1. en règim permanent sinusoidal (variacions temporals del tipus $e^{j\omega t}$) i assumint propagació en la direcció z de la forma $e^{-jk_z z}$ es compleix l'equació de Helmholtz per a les components axials de camp elèctric i magnètic en cada capa.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = L\psi = 0 \quad \psi = e_z \text{ o } h_z \quad (2.1.1)$$

Canviant les derivades respecte a x per diferències finites, de la primitiva equació de Helmholtz, s'obté la següent equació per a cada valor discret -segons x - de les components axials dels camps:

$$\frac{d^2}{dy^2} \vec{\psi} + [(k^2 - k_z^2)[I] - h^{-2}[P]] \vec{\psi} = \vec{0} \quad \text{en què: } \vec{\psi} = \begin{cases} \vec{E}_z \\ \vec{H}_z \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$e_z \rightarrow \begin{bmatrix} e_{z_0} \\ e_{z_1} \\ e_{z_2} \\ \vdots \\ e_{z_{N-1}} \end{bmatrix} = \vec{E}_z \quad ; \quad e_{z_i} = f(y) \quad \quad h_z \rightarrow \begin{bmatrix} h_{z_0} \\ h_{z_1} \\ h_{z_2} \\ \vdots \\ h_{z_{N-1}} \end{bmatrix} = \vec{H}_z \quad ; \quad h_{z_i} = f(y)$$

La matriu $[P]$ té l'informació de les condicions de contorn a les parets laterals. La seva natura tridiagonal provoca l'acoblament de tres components de ψ . Això provoca

que una solució directa no sigui possible. Ara bé, com que és una matriu real i simètrica es pot diagonalitzar: podem obtenir una matriu de transformació [T] tal que:

$$[T]^{-1}[P][T]=[\lambda^2] \quad (2.1.3)$$

$[\lambda^2]$ és una matriu diagonal formada pels autovalors obtinguts de resoldre

$$\text{Det}\{([P]-\lambda[I])\bar{T}\}=0 \quad (2.1.4)$$

en què \bar{T} és un autovector que constitueix una columna de la matriu [T]. [I] és la matriu identitat. A més a més podem escollir [T] de manera que sigui una matriu ortogonal:

$$[T]^{-1}=[T]^t \quad (2.1.5)$$

Les components axials dels camps en el domini transformat s'obtinran de:

$$\bar{\psi} = [T]\bar{\psi} \quad ; \quad \bar{\psi} = [T]^t \bar{\psi} \quad (2.1.6)$$

llavors l'equació 2.1.2 quedarà:

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dy^2} + k^2 - k_z^2 \right) [I] - h^{-2} [\lambda^2] \right\} \bar{\psi} = \bar{0} \quad (2.1.7)$$

La solució general per a la i-èsima component de 2.1.7 serà:

$$\bar{\psi}_i = A_i \cosh(k_{y_i} y) + B_i \sinh(k_{y_i} y) \quad (2.1.8)$$

amb:

$$k_{y_i}^2 = k_0^2 (\bar{\lambda}_i^2 - \varepsilon_r + \varepsilon_{re}) \quad ; \quad \varepsilon_{re} = \frac{k_z^2}{k_0^2} \quad ; \quad \bar{\lambda}_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{(k_0^2 h^2)} \quad (2.1.9)$$

Amb els valors de $\bar{\psi}$ i la seva derivada respecte a y particularitzats als "interfaces" entre les capes s'obtenen els valors de les constants d'integració.

A partir dels camps axials, utilitzant les fórmules de l'annexe A s'obtenen les altres components dels camps.

Després de nombroses manipulacions algebraiques amb matrius de submatrius diagonals s'obtenen relacions entre els camps en el domini transformat als diferents "interfaces" i entre el camp magnètic i elèctric en un mateix "interface", que serveixen per a fer complir les condicions de continuïtat a les superfícies de separació de les diferents capes de l'estructura.

Finalment es fa complir en el domini espacial original les condicions de camp elèctric tangencial nul sobre les tires metàl·liques de l'estructura i de densitats de corrent nul·les als "slots" -zones a la superfície de separació de dues capes delimitades per tires metàl·liques o per aquestes i les parets de la guia que envolta a tota l'estructura-

S'obté finalment una equació matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{12}]^t & [Z_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ j\vec{J}_{xm} \\ \vec{0} \\ \vec{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}_{xs} \\ \vec{0} \\ -j\vec{E}_{zs} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

Les submatrius $[\bar{Z}_{ij}]$ contenen la informació referent a les condicions de contorn que imposa l'estructura concreta, les seves dimensions, les matrius de transformació, les solucions de l'equació diferencial 2.1.7 i són funció de la constant de propagació. El seu tamany està íntimament relacionat amb el nombre de línies de discretització utilitzat.

Tenint en compte que en l'expressió anterior les multiplicacions amb subvectors nuls són supèrflues, es pot reescriure el sistema i dividir-lo en dues parts:

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}^n] & [Z_{12}^n] \\ [Z_{12}^n]^t & [Z_{22}^n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{J}_{xm} \\ \vec{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}^m] & [Z_{12}^m] \\ [Z_{21}^m] & [Z_{22}^m] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{J}_{xm} \\ \vec{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}_{xs} \\ -j\vec{E}_{zs} \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

Les submatrius $[Z_{ij}^m]$ són funció de la constant de propagació (concretament de la constant de propagació normalitzada ϵ_{re}). Variant ϵ_{re} fins que el determinant del sistema homogeni sigui nul, obtindrem la constant de propagació normalitzada de l'estructura. Això ho realitza una subrutina de càlcul de zeros basada en el mètode de Müller [60], doncs és necessari tractar amb nombres complexos.

Les densitats de corrent s'obtenen trobant l'autovector associat a l'autovalor nul del sistema 2.1.11. A partir d'aquestes, amb el sistema 2.1.12 es pot obtenir el camp elèctric als slots.

Amb les densitats de corrent podem trobar el corrent total que circula per una tira metàl·lica i amb el camp elèctric als slots podem obtenir el voltatge entre dues tires metàl·liques. Això ens servirà per calcular la impedància característica de les diferents estructures, definides per relacions potència-tensió o potència-corrent segons el cas.

Els programes desenvolupats permeten analitzar les estructures següents:

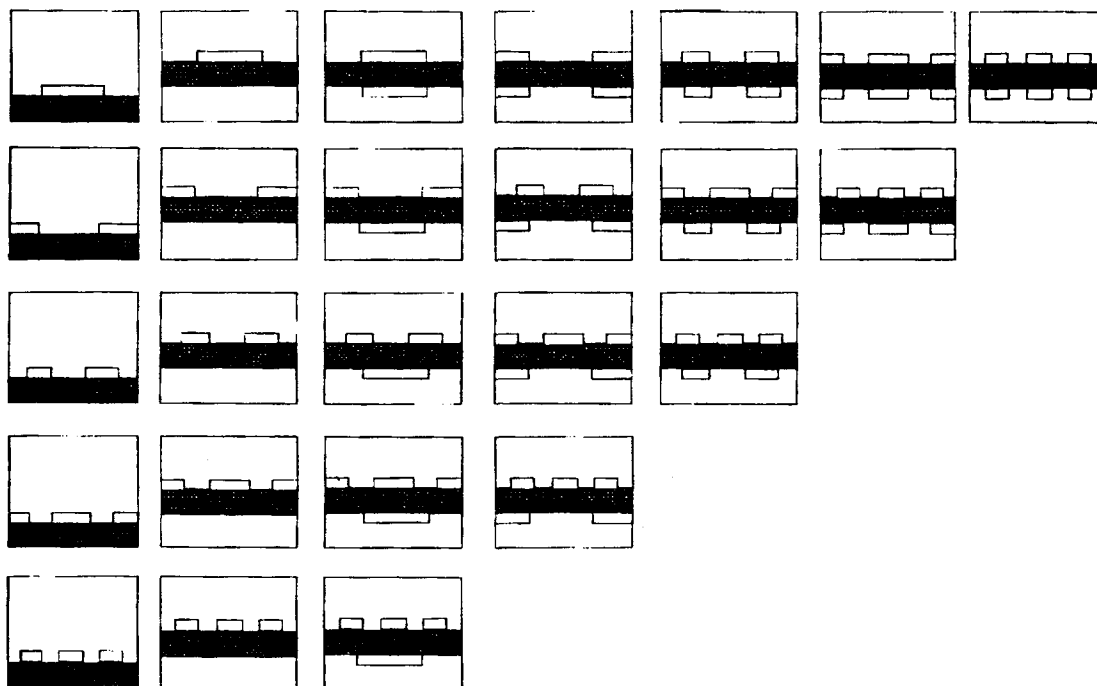


Fig 2.1.2

Fixem-nos que es tracten estructures simètriques per poder reduir el nombre de línies de discretització.

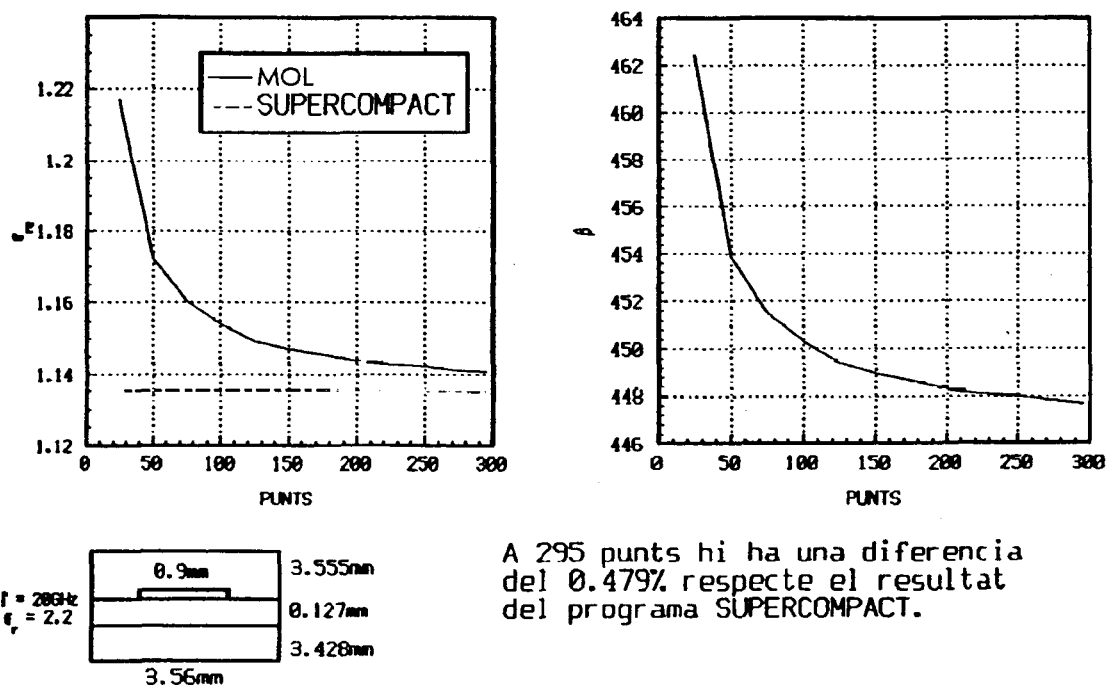
Els programes en FORTRAN standard s'han fet córrer sobre un ordinador VAX 6000-410, CRAY X-MP i CONVEX 2400.

2.1.2 Resultats i comentari

A continuació presentem una sèrie de resultats que ens serviran per comentar el mètode.

En la gràfica 2.1.3 es pot observar una de les característiques més notables del mètode: la convergència assintòtica al valor correcte a l'augmentar el nombre de línies de discretització

CALCUL EN EL VAX:



CONVERGENCIA DE ϵ_{re} PER UNA GUIA TIPUS MICROSTRIP:

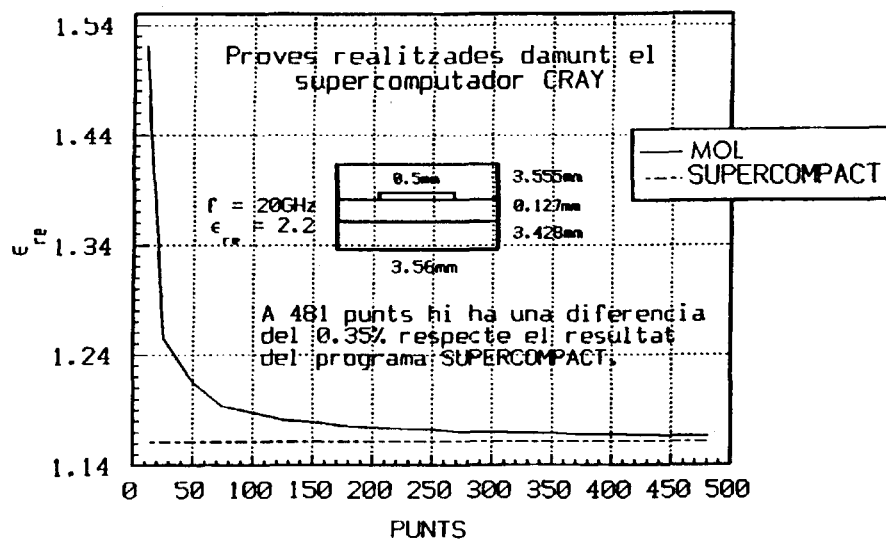


Fig 2.1.3

Els resultats obtinguts per a una línia microstrip aïllada es comparen amb el proporcionat pel programa comercial SUPERCOMPACT. Aquesta gràfica també posa de manifest que per aconseguir un error molt petit són necessàries moltes línies de discretització (unes 300 línies per a un error del 0,5% per aquesta estructura, i recordem que es tracta d'una estructura simètrica i per tant, només es considera la meitat). Això origina que el temps de càlcul sigui molt elevat. En la figura 2.1.4 es mostra el temps de CPU típic en funció del nombre de línies

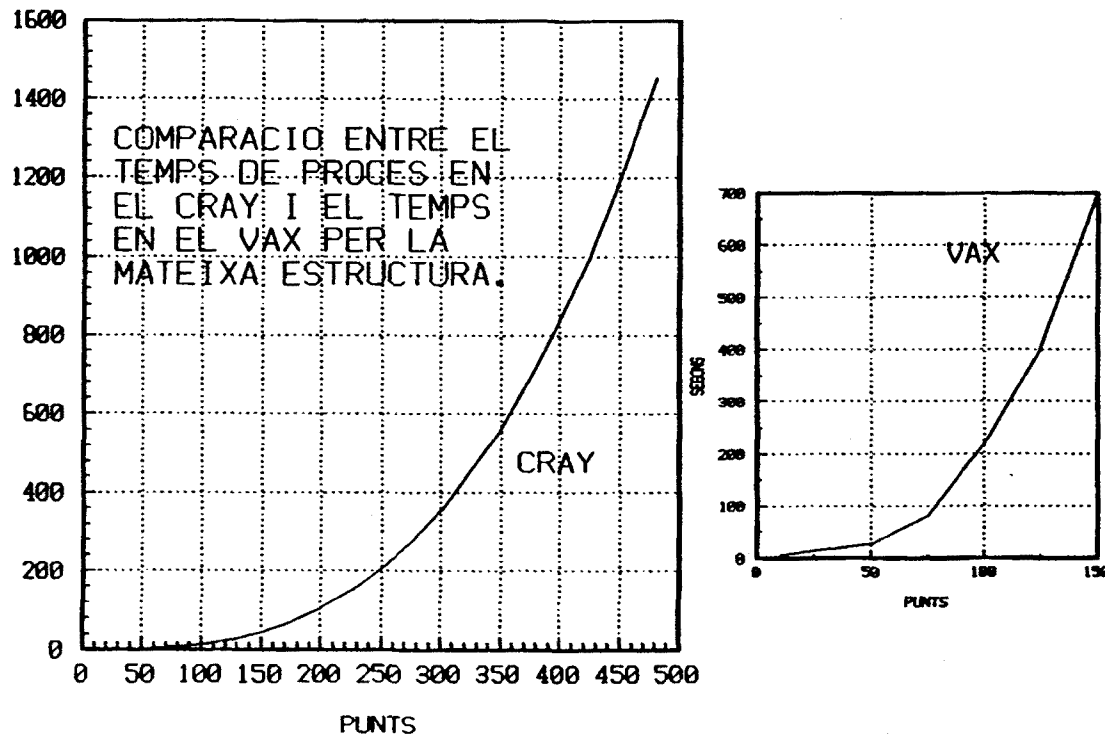


Fig 2.1.4

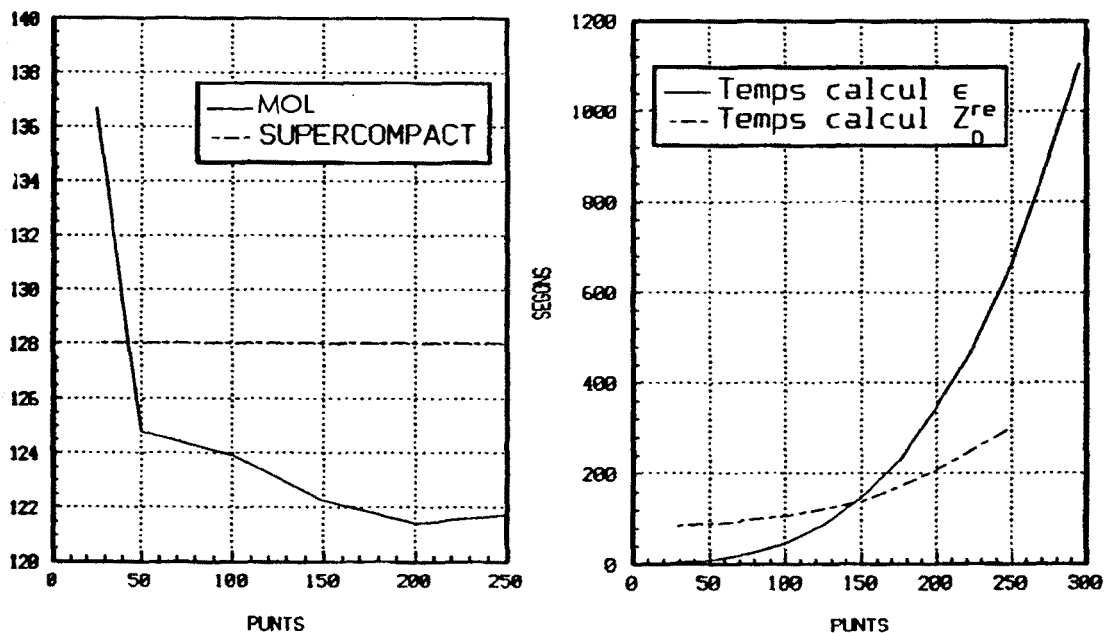
Fixem-nos que per a les 300 línies del cas anterior són necessaris uns 5 minuts de CPU en un superordinador CRAY. -en un VAX, si es pogués, faria falta, com a mínim 20 vegades més de temps de CPU-.

El temps de procés és un dels grans inconvenients del mètode de les línies. Aquest temps creix proporcionalment a N^3 , essent N el nombre de línies de discretització, i es degut principalment a l'operació de pas del domini transformat a l'espacial:

$$\begin{bmatrix} [T_h] & [0] \\ [0] & [T_e] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{Z}_{11}] & [\bar{Z}_{12}] \\ [\bar{Z}_{12}]' & [\bar{Z}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_h]' & [0] \\ [0] & [T_e]' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{J}_{xM} \\ \vec{J}_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}_{xM} \\ -j\vec{E}_{zM} \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

que no podem defugir.

Si bé, a costa d'augmentar el nombre de línies, es pot aconseguir un valor de constant de propagació força acurat, els valors obtinguts de impedància característica no ho són tant:



A 250 punts hi ha una diferència del 4.92% respecte el resultat del programa SUPERCOMPACT.

Fig 2.1.5

Fixem-nos que, per al mateix nombre de punts, la diferència relativa entre el resultat obtingut pel mètode de les línies respecte al que proporciona el programa SUPERCOMPACT és unes deu vegades superior que per al cas de la constant de propagació i no s'aprecia la convergència asimptòtica al valor correcte. Això és degut fonamentalment a que la matriu del sistema 2.1.11 de la qual s'han de trobar els autovectors i triar l'associat a l'autovalor 0 (o el més pròxim a zero) està mal condicionada en general (el "grau de mal condicionament" depèn del tipus d'estructura i de les seves dimensions).

Si la constant de propagació tendeix asimptòticament al valor correcte a l'augmentar el nombre de línies i per reduir dràsticament el temps de càlcul, ens podem plantejar realitzar extrapolacions, es a dir, realitzar dos o tres càlculs amb un nombre reduït de punts i extrapolar els resultats a l'infinit:

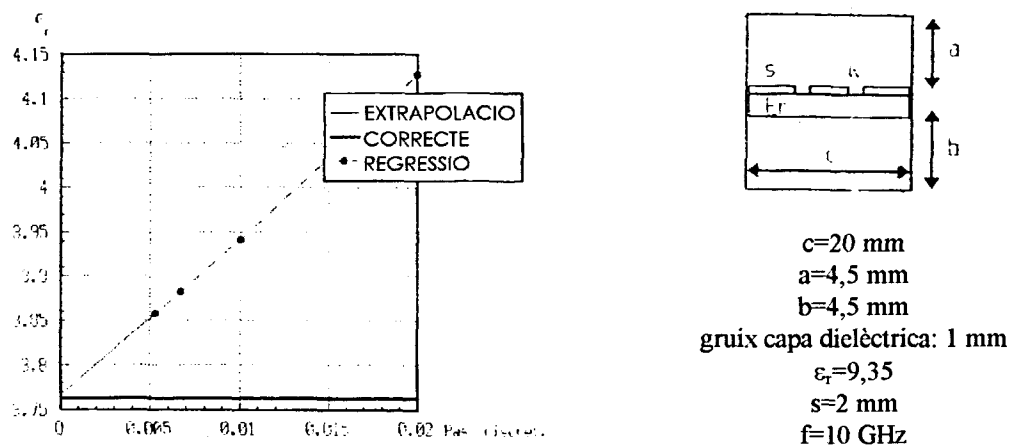


Fig 2.1.6

Però a la pràctica s'ha d'anar amb compte i pot ser no sempre possible. En la gràfica següent, si agaféssim per a l'extrapolació els resultats corresponents, per exemple, a 80 i 90 punts, el resultat obtingut seria completament fals.

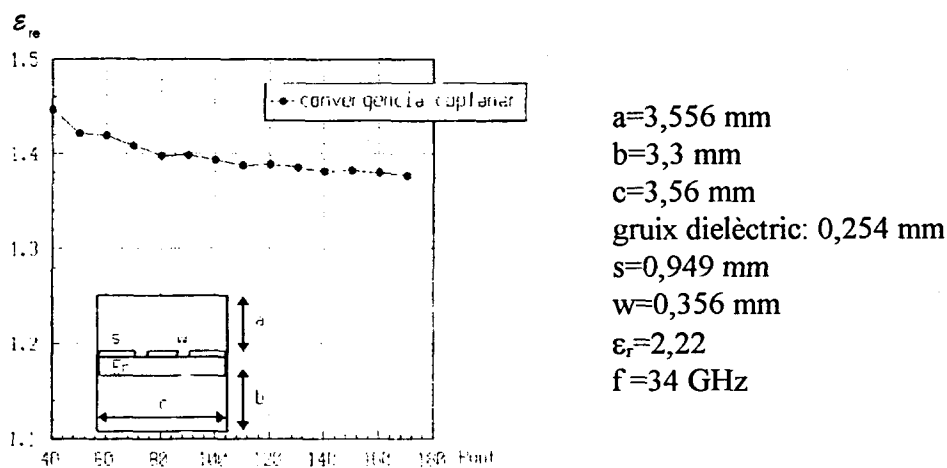


Fig 2.1.7

En aquesta gràfica, els punts en els que no és monòtona decreixent es deuen a errors en el posicionament de les línies de discretització en les discontinuïtats metal·lització-slot:

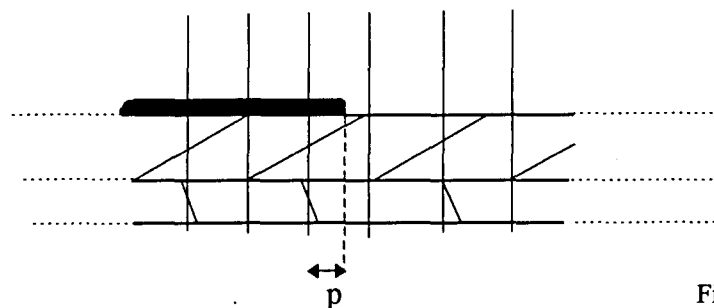


Fig 2.1.8

Aquest error és intrínsec del mètode. Es degut a la mateixa discretització, la qual no permet tenir la seguretat de que els punts de discretització cobreixin perfectament la metal·lització o el "slot". En general el pas de metal·lització a slot es produirà entre dues línies de discretització, provocant que es consideri la metal·lització o el slot més gran o més petit del que en realitat són. Segons Pregla i Schultz [43,53] la distància òptima entre l'última línia de discretització continguda en la metal·lització i el final d'aquesta (p) és d'un 25% del pas de discretització. En la gràfica següent s'especifica el paràmetre p en la forma de tant per un. Els resultats presents a la gràfica coincideixen perfectament amb la bibliografia [43].

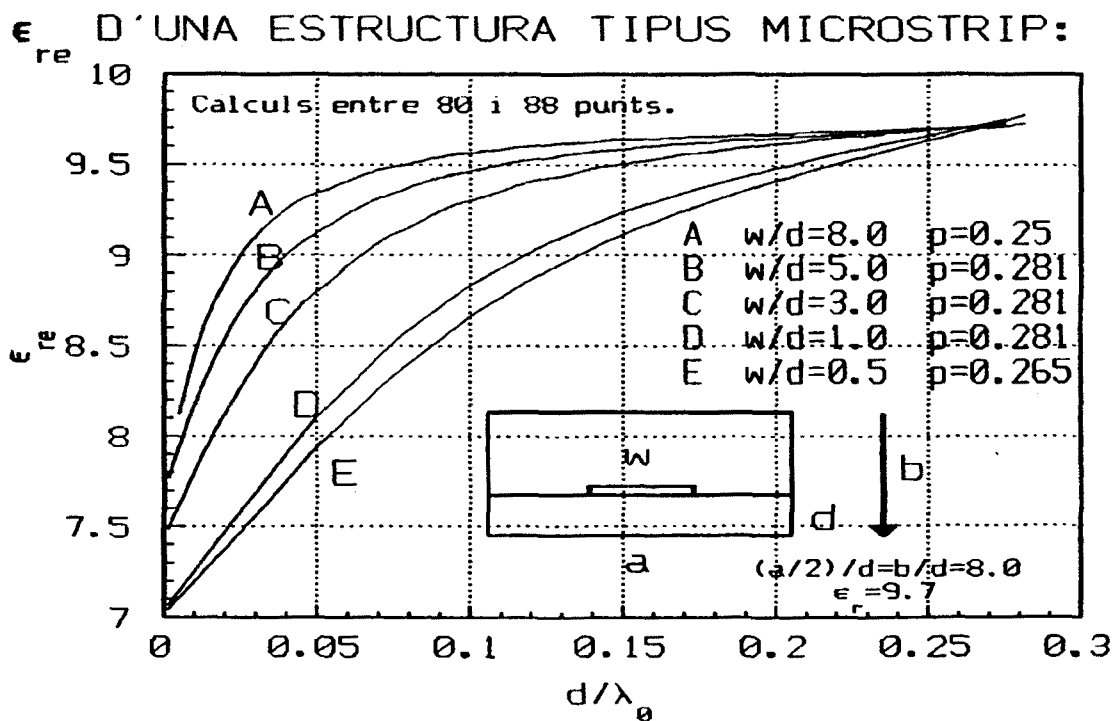


Fig 2.1.9

L'error de posicionament de les línies de discretització en les transicions metal·lització-slot es reduirà si, per a un mateix nombre de punts de discretització, s'augmenta l'amplada de la metal·lització respecte a l'amplada total de la guia (l'error relatiu comés en la transició és menor en percentatge). Depèn, per tant, del tipus d'estructura i de les dimensions relatives de les diferents parts de que consti. De totes maneres, per un gran nombre de línies de discretització aquest error és poc rellevant.

Per a una certa estructura, el nombre mínim de línies a utilitzar depèn de les dimensions relatives de les metal·litzacions i slots. A les gràfiques següents es posa de manifest aquest fet:

F

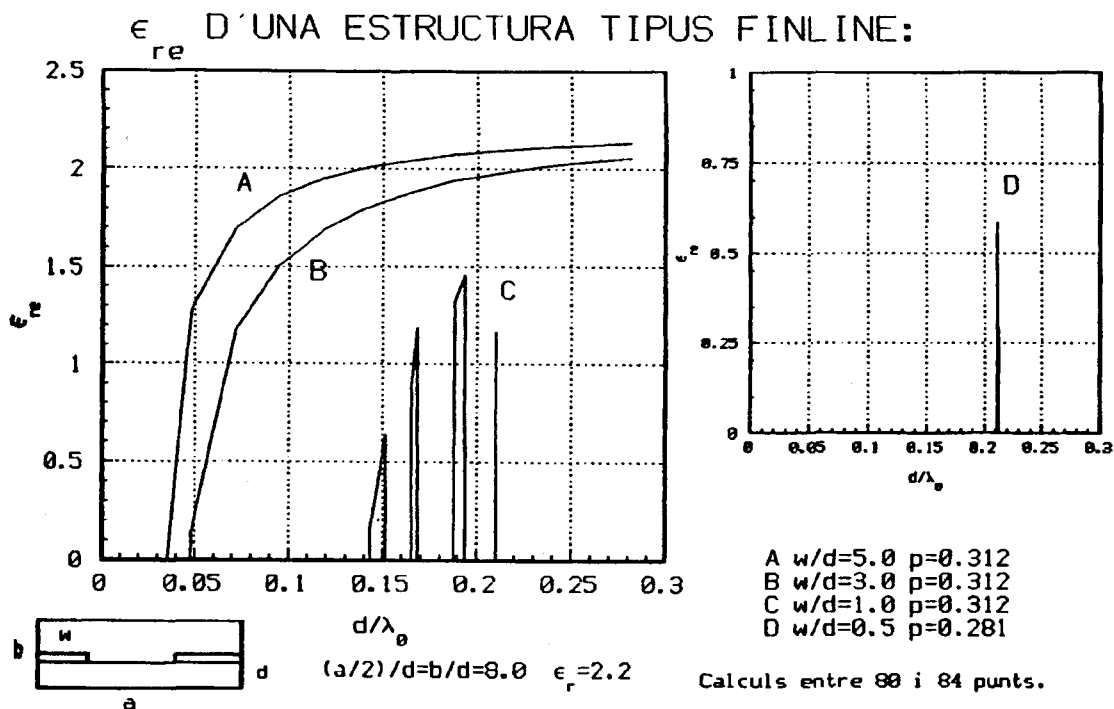


Fig 2.1.10

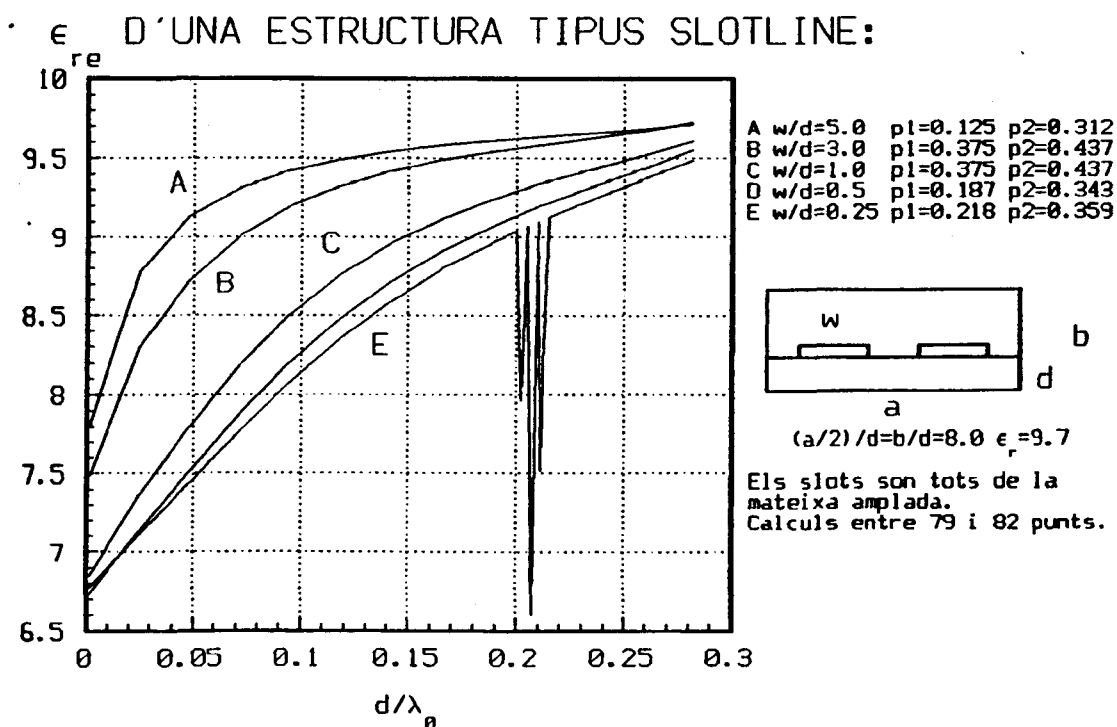


Fig 2.1.11

Noti's que quan l'amplada de les metal·litzacions és molt petita apareixen resultats incorrectes (inclòs amb un p proper a l'òptim). Aixó és degut a que quan l'amplada de la metal·lització és molt petita, sobre ella hi ha poques línies de discretització, insuficients per a una bona representació discreta de l'estructura. A més a més, en les transicions metal·lització-slot apareixen valors singulars de corrents a la metal·lització i de camp al

slot, provocant que les línies de discretització properes a aquestes discontinuïtats siguin molt importants a l'hora d'obtenir resultats acurats. La solució d'aquest problema és augmentar el nombre de línies de discretització, però malauradament les limitacions informàtiques acoten el nombre màxim de línies que es poden fer servir: a part del temps de càlcul, a l'augmentar el nombre de línies augmentaran els errors numèrics de càlcul i el tamany de les matrius utilitzades (per a 150 línies, per exemple, haurem de treballar amb matrius de nombres complexes amb doble precisió -quadruple precisió en el CRAY- de dimensió 300×300 que ocupa uns 1,5 Mbytes cada una). Això ens limita a unes 250 línies en el VAX i a unes 500 en el CRAY.

Els problemes esmentats al paràgraf anterior es podrien solucionar si en lloc de fer servir una discretització amb un pas h constant com fins ara, fèssim servir una discretització no uniforme:

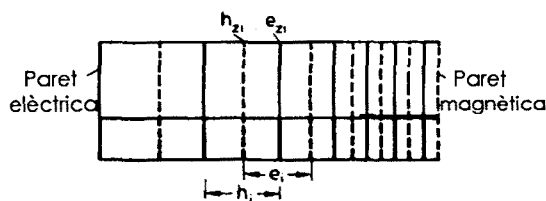


Fig 2.1.12

(Els detalls analítics d'aquest tipus de discretització es mostren a l'anexe A)

En les gràfiques següents es poden comparar resultats obtinguts amb discretització uniforme i no uniforme:

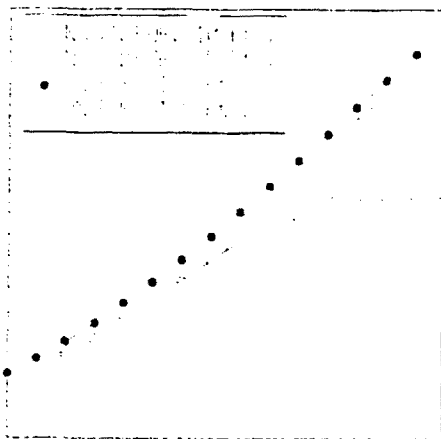


Fig 2.1.13

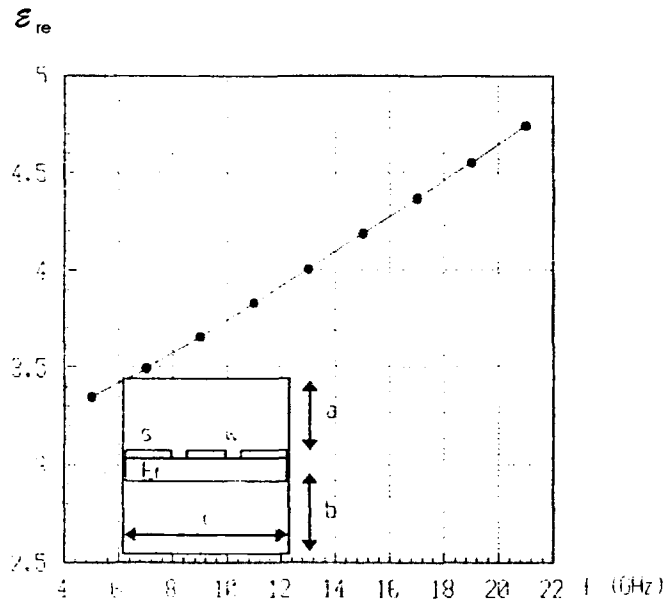


Fig 2.1.14

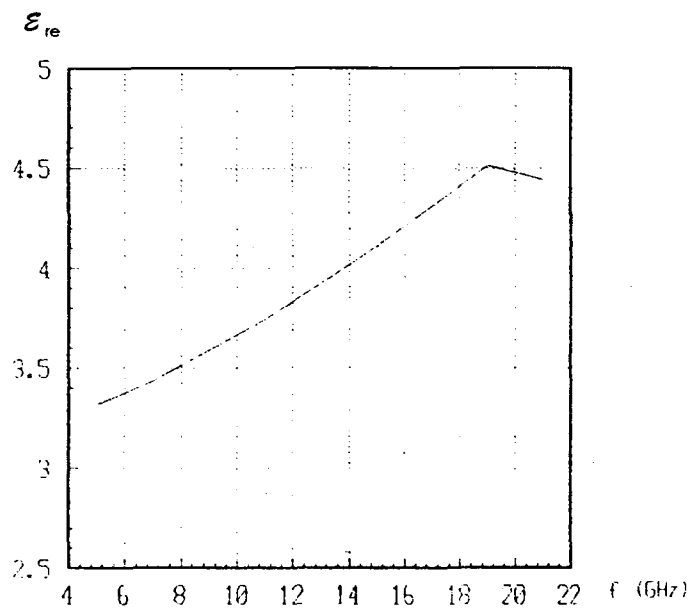


Fig 2.1.15

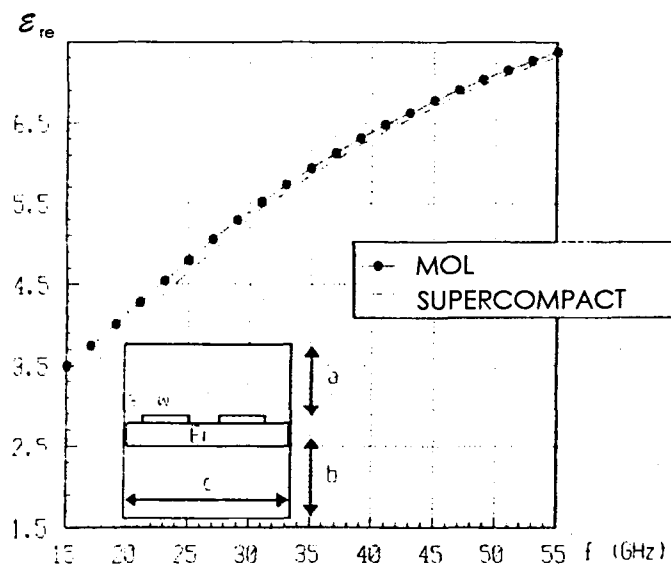


Fig 2.1.16

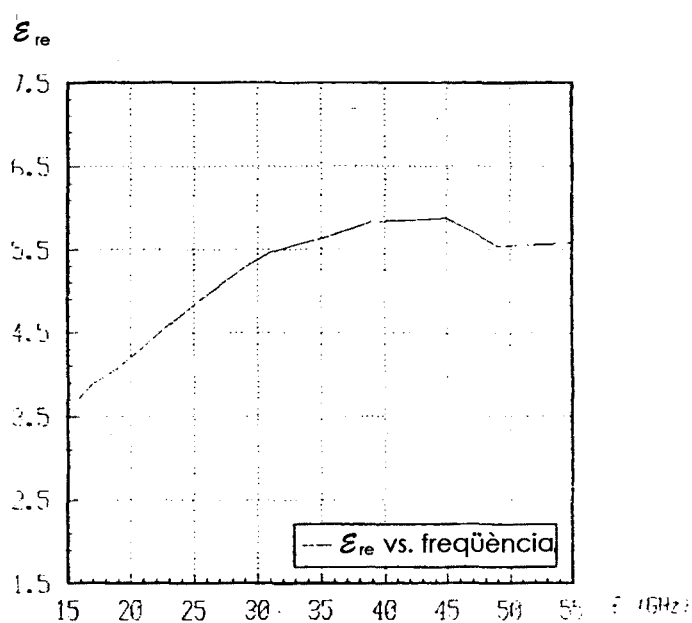


Fig 2.1.17

La figura 2.1.13 correspon a l'estructura analitzada a la referència [54].

Es pot observar que, si bé la discretització no uniforme necessita molts menys punts de discretització, els resultats obtinguts no són prou acurats. Això és degut a que pel cas de discretització uniforme els autovalors de la matriu diagonal $[\lambda^2]$ (equació 2.1.3) s'obtenen a partir de fórmules analítiques tancades (vegi's anexe A), però per a discretització no uniforme els autovalors i autovectors associats s'han de calcular numèricament. Per al seu càlcul s'han fet servir subrutines de la llibreria NAG [61]. Els errors en el càlcul dels autovalors s'amplifiquen en les expressions següents:

$$[\alpha] = \text{diag} \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \sinh k_{y_i} d \right)^{-1} ; [\gamma] = \text{diag} \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \tanh k_{y_i} d \right)^{-1} \quad (2.1.14)$$

$$[\tau_h] = \text{diag}(\cosh k_{y_h} d) ; [\tau_e] = \text{diag}(\cosh k_{y_e} d)$$

$$k_{y_i}^2 = k_0^2 (\bar{\lambda}_i^2 - \epsilon_r + \epsilon_{re}) ; \epsilon_{re} = \frac{k_z^2}{k_0^2} ; \bar{\lambda}_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{(k_0^2 h^2)} \quad (2.1.16)$$

En què d és el gruix d'una capa i h el pas de discretització nominal. Fixem-nos que formen part de l'argument d'expressions del tipus sinus i cosinus hiperbòlics.

Si bé aquest problema, com el que comentarem a continuació, també és present en el cas de la discretització uniforme, com es pot comprovar a les gràfiques 2.1.13 - 2.1.17, és molt més important en el cas de discretització no uniforme.

En les gràfiques següents es representa el valor del determinant del sistema homogeni en funció de ϵ_{re} per a una estructura tipus microstrip suspès dins de guia d'ones rectangular i discretització no uniforme (El nombre de punts assenyalat fa esment del nombre de línies de discretització que cauen sobre la metal·lització).

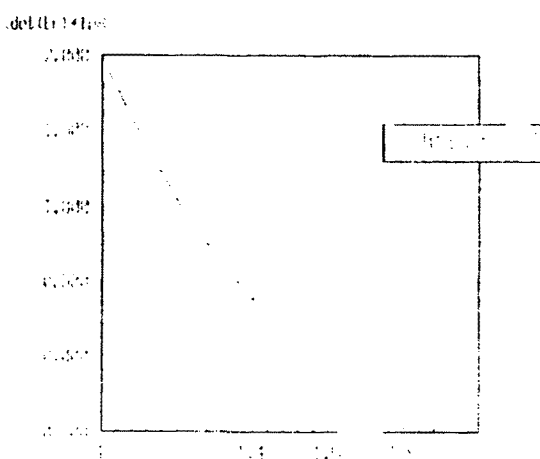


Fig 2.1.18

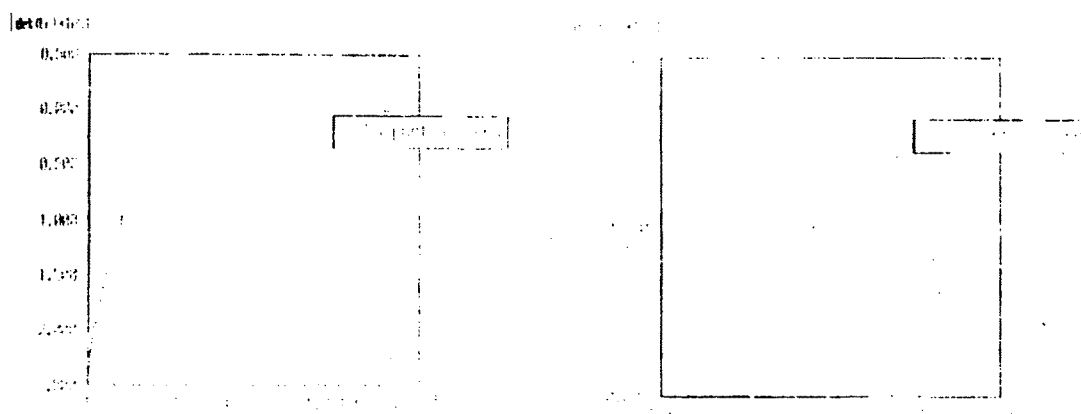


Fig 2.1.19

Fig 2.1.20

Hom pot observar que a totes les gràfiques existeix un pas per zero molt proper a 1,6, però a mesura que augmenta el nombre de punts s'aprecia una arriçada en el pas per zero, apareixent nous passos per zero. Això provoca que, segons les dades de partida, la subrutina de búsqueda de zeros doni resultats erronis encara que propers al valor correcte. Aquest problema és de difícil solució en general. S'hauria d'estudiar cada cas en concret. S'ha comprovat les estructures analitzades a la referència [54], posant-se de manifest que la discretització no uniforme funciona correctament per a casos de dimensions molt particulars i introduint a la subrutina de búsqueda de zeros valors inicials molt propers al zero buscat.

En referència a les expressions 2.1.14 - 2.1.16 podem veure que segons els valors que adoptin k_{yi} i d aquests poden provocar overflows i/o underflows. Aquests es poden corregir arrodonint els resultats. Això aniria bé si sempre s'estés treballant amb valors molt alts o molt petits, però desgraciadament hem de treballar amb valors molt dispars, cosa que també fa impossible normalitzar-los. Aquest és el motiu fonamental pel qual es fa servir doble precisió (quadruple precisió en el CRAY): treballar amb variables amb el més alt marge dinàmic possible. Per a moltes estructures, l'aparició d'overflows i underflows és el que en realitat limita el nombre màxim de línies de discretització. Aquest problema es podria intentar solucionar desenvolupant programes específics per a cada estructura, en els que es tingués molta cura en l'ordre i la forma de fer els càlculs per minimitzar els efectes d'overflows, underflows i redondeig.

També com a conseqüència de les expressions 2.1.14 - 2.1.16 podem dir que com més gran sigui el cocient amplada de la guia - altura de la capa més gruixuda, més gran és el nombre de punts que es pot fer servir sense risc d'overflows i més precisió obtindrem. El mètode funcionarà molt millor per a estructures més amples (direcció x) que altes (direcció y).

Per disminuir els problemes esmentats al paràgraf anterior es va forçar el mètode, augmentant el nombre de capes (de característiques idèntiques). Així s'han d'analitzar capes més fines respecte a l'amplada total de la guia, apareixent nombres de valors menys dispersos que possibiliten augmentar el nombre de línies de discretització sense risc d'overflows i errors de redondeig. Però a l'augmentar el nombre de capes també augmenta el nombre d'operacions perdent-se per aquest motiu el que havíem guanyat "enganyant" al programa.

El mètode de les línies aplicat a l'anàlisi d'estructures planars de microones i ones mil·limètriques té virtuts com ara la convergència asimptòtica de ϵ_r al valor correcte a mesura que augmenta el nombre de línies de discretització o la versatilitat que es tradueix en el gran nombre d'estructures que és possible analitzar i en l'extensió als casos de consideració dels gruixos de les metal·litzacions, dielèctrics inhomogenis i amb pèrdues, discontinuïtats i extensió a problemes oberts amb l'inclusió de parets absorbents [56,57].

Les desventatges provenen de problemes informàtics: temps de procés, memòria utilitzada, overflows, underflows i errors de redondeig i truncament que es manifesten en resultats poc acurats o erronis segons quin sigui el nombre de línies de discretització utilitzat, el tipus de discretització, la forma de l'estructura analitzada i les dimensions relatives que les diferents parts d'aquesta tinguin.

Per a l'anàlisi de discontinuïtats planars s'ha de discretitzar respecte a x i respecte a z. Les matrius resultants - si es volen obtenir resultats satisfactoris - tenen dimensions enormes, fent absolutament necessari l'utilització de superordinadors i programes específics per a cada estructura en els que es tingui molta cura en l'ordre i la manera de fer les operacions aritmètiques i algebraïques per tal d'evitar overflows. Això va en contra de les premises que ens havíem fixat en aquesta Tesi: aconseguir un mètode numèric que fes servir el mínim possible de recursos d'ordinador.

2.2. El mètode dels elements finits.

2..2.1. Implementació

El mètode dels elements finits (Finite Element Method -FEM-) va ser formulat als anys 40 [62] aplicant-se a partir de la dècada següent a càlculs aeronàutics i d'estructures en general [63]. Fins a finals dels seixanta no es va començar a aplicar a problemes electromagnètics[64]. La seva versatilitat per adaptar-se a geometries molt complicades i la seva generalitat ha fet possible implementar programes d'ordinador de propòsit general que, amb molt poques modificacions, són aplicables a disciplines molt distintes. També ha originat que la bibliografia existent sobre el mètode, especialment en el referent a enginyeria civil i aeronàutica, sigui molt abundant.

En la seva forma habitual [65-70], el mètode dels elements finits parteix d'una formulació integral del problema de contorn, concretament d'una expressió variacional en la forma d'un funcional que s'ha de minimitzar. L'espai es subdivideix en petites regions o elements de forma arbitrària per a les que la funció que s'intenta trobar es pot assumir que varia molt poc i així s'aproxima per un polinomi. Aplicant el mètode de Rayleigh-Ritz [71] o de Galerkin [72] el problema de minimització del funcional es converteix en un sistema d'equacions lineals. La seva solució ens donarà una aproximació de la funció buscada (potencial o components dels camps) en tota l'estructura.

Mentres que en altres mètodes utilitzats per a resoldre equacions integrals com ara el mètode dels moments [71] (o el de Galerkin o de Rayleigh-Ritz) la funció buscada s'aproxima per un conjunt de funcions base definides en tot el domini (tota la regió del problema), i aquestes funcions han de poder representar aproximadament la funció buscada i complir les condicions de contorn (cosa que pot provocar que siguin molt complicades o fins i tot que no es puguin obtenir si es tracta d'una regió amb forma força arbitrària), en el mètode dels elements finits la funció buscada s'aproxima per un conjunt de funcions base definides en els subdominis (elements) en els que s'ha dividit el domini (tota la regió del problema), possibilitant que aquestes puguin ser molt senzilles.

Un avantatge del mètode dels elements finits és la possibilitat d'incloure algunes condicions de contorn dins el mateix funcional, fent innecessari que s'hagin d'imposar.

Evidentment la solució obtinguda pel mètode serà més acurada com més elements fem servir per subdividir l'espai. Això provoca el principal inconvenient del mètode: el temps de càlcul i la quantitat de memòria necessaris.

També s'han observat l'aparició de respostes o solucions espúries: solucions proporcionades pel mètode sense sentit físic [3,4,67,70]. Si bé s'han presentat diverses condicions i formulacions que semblen solventar aquest problema [73,74], no sembla que aquest inconvenient s'hagi erradicat completament.

El mètode que s'ha implementat i que describim breument a continuació s'ha enfocat a apreciar les possibilitats del mètode en l'anàlisi de problemes electromagnètics del tipus d'autovalors i autovectors en estructures inhomogènies.

L'anàlisi amb el mètode dels elements finits d'un problema concret suposa els següents passos:

- Discretització de la regió del problema en un nombre finit de subregions o elements.
- Obtenció de les equacions que governen un cert element.
- Reagrupament de tots els elements.
- Resoldre el sistema d'equacions obtingut.

* Discretització de la regió:

Si bé els elements amb els que es divideix la regió poden tenir qualsevol forma, el més usual és utilitzar triangles en un problema bidimensional i tetraedres en un problema de tres dimensions, donat que són les figures geomètriques més senzilles i les que millor es poden adaptar a qualsevol forma que tingui la regió a dividir

En el procés de discretització es fan servir les següents regles:

- Tot element s'unirà a un altre pels vèrtex o nusos i no pels costats.
- Cap element contindrà dos medis diferents.
- Es procurarà, en el cas bidimensional, que els elements triangulars siguin el més pareguts possible a triangles equilàters. (L'error del mètode dels elements finits és inversament proporcional al sinus del menor angle interior d'un element, [70]).

En la figura següent es mostra un exemple de discretització. S'ha discretitzat la secció transversal d'una guia d'ones rectangular inhomogènia amb 8 elements triangulars que proporcionen 9 nodes:

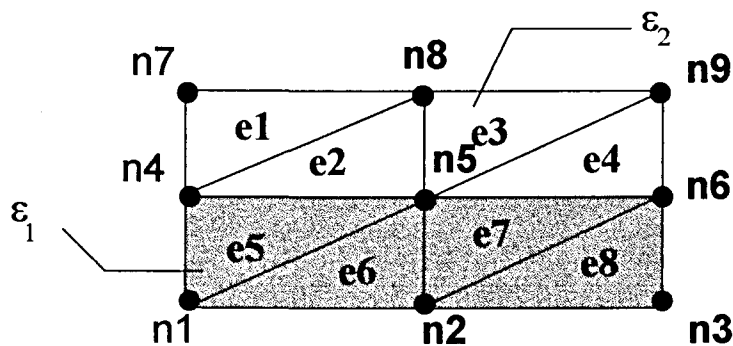


Fig 2.2.1

* Funcions que governen els elements:

En un element bidimensional com el de la figura:

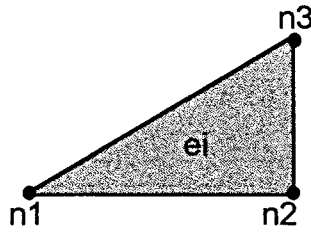


Fig 2.2.2

podem aproximar la component axial (segons z) del camp elèctric o del camp magnètic $\Psi_z(x,y)$ com:

$$\Psi_z(x,y)=(a+bx+cy) \quad (2.2.1)$$

així en cada un dels nodes de l'element tenim:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1z}^e \\ \Psi_{2z}^e \\ \Psi_{3z}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

A partir del coneixement de Ψ_z en cada node podem obtenir el valor dels coeficients a,b i c:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_{1z}^e \\ \Psi_{2z}^e \\ \Psi_{3z}^e \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

i també el camp a l'interior del triangle:

$$\Psi_z^e = [1 \quad x \quad y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{1z}^e \\ \Psi_{2z}^e \\ \Psi_{3z}^e \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

en què A és l'àrea de l'element:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (2.2.5)$$

Ho podem expressar d'una forma més compacta:

$$\Psi_z^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x,y) \Psi_{iz}^e \quad (2.2.6)$$

en què:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Per a resoldre un problema electromagnètic hem de trobar la solució de les equacions de Maxwell o bé d'alguna equació que es derivi d'elles com l'equació d'ona amb les pertinents condicions de contorn. En el mètode dels elements finits, en lloc de resoldre una equació en derivades parcials es minimitza el funcional del principi variacional associat. Així, per exemple, una guia d'ones buida està caracteritzada per l'equació de Helmholtz homogènia (equació d'ona en règim permanent sinusoidal):

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (2.2.8)$$

Resoldre aquesta equació és equivalent a minimitzar el següent funcional [68]:

$$F(\Psi) = \frac{1}{2} \iint_S [|\nabla \Psi|^2 + k^2 \Psi^2] dS \quad (2.2.9)$$

amb les condicions de contorn adients.

Aquest funcional s'aplica a cada un dels elements i es minimitza. El domini d'aplicació S és l'àrea de cada triangle o de l'element de superfície considerat. Fent-ho per al nostre exemple s'obté: (aplicant-ho a l'equació 2.2.9)

$$F(\Psi^e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Psi_{iz}^e \Psi_{jz}^e \int_S \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS - \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Psi_{iz}^e \Psi_{jz}^e \int_S \alpha_i \alpha_j dS \quad (2.2.10)$$

que ho podem expressar com:

$$F(\Psi^e) = \frac{1}{2} [\Psi^e]^T [G^e] [\Psi^e] - \frac{k^2}{2} [\Psi^e]^T [B^e] [\Psi^e] \quad (2.2.11)$$

essent els elements de la matriu $[G^e]$:

$$G_{ij}^e = \int_S \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS \quad (2.2.12)$$

i els de la matriu $[B^e]$:

$$B_{ij}^e = \int_S \alpha_i \alpha_j dS \quad (2.2.13)$$

El càlcul d'aquestes integrals és immediat. Així, per exemple:

$$G_{11}^e = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2]$$

$$G_{23}^e = \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)] \quad (2.2.14)$$

$$B_{ij}^e = \begin{cases} \frac{A}{12} & i \neq j \\ \frac{A}{6} & i = j \end{cases} \quad (2.2.15)$$

* Reagrupament de tots els elements:

L'equació 2.2.11 constitueix un sistema matricial local a nivell d'element. A nivell global, considerant tots els nodes i elements, tenim:

$$F(\Psi) = \sum_{e=1}^N F(\Psi^e) \quad (2.2.16)$$

o, d'una forma explícita:

$$F(\Psi) = \frac{1}{2} [\Psi]^T [G] [\Psi] - \frac{k^2}{2} [\Psi]^T [B] [\Psi] \quad (2.2.17)$$

Les matrius globals $[G]$ i $[B]$ es construeixen a partir de les locals $[G^e]$ i $[B^e]$. Cada node té una doble numeració: una local de 1 a 3 en el sentit contrari de les agulles del rellotge, de baix a dalt i d'esquerra a dreta (figura 2.2.2) i una de global (figura 2.2.1). Aquestes numeracions són arbitràries, però segons com es facin poden facilitar en gran mesura el càlcul del sistema d'equacions final.

Les matrius globals $[G]$ i $[B]$ enmagatzemen les relacions existents entre tots els nodes. En referència a les figures 2.2.1 i 2.2.2, els elements de les matrius globals es troben de la forma següent:

G_{n_1, n_1} guarda les aportacions dels elements que contenen el node global n_1 , és a dir, els elements e_5 i e_6 . Atenent a la numeració de nodes locals, aquest serà el node 1 tant per a l'element e_5 com per al e_6 . Així:

$$G_{n_1, n_1} = G_{11}^{e=5} + G_{11}^{e=6} \quad (2.2.18)$$

G_{n_1, n_2} guarda les aportacions dels elements que contenen els nodes globals n_1 i n_2 simultàniament. L'únic element que conté ambdós nodes globals és el e_6 per als que els hi correspon una numeració local de 1 i 2 respectivament:

$$G_{n_1, n_2} = G_{12}^{e=6} \quad (2.2.19)$$

Analogament s'obtenen els altres elements de [G]:

$$G_{n_5 n_5} = G_{22}^{e=2} + G_{11}^{e=3} + G_{11}^{e=4} + G_{22}^{e=5} + G_{33}^{e=6} + G_{33}^{e=7}$$

$$G_{n_1 n_8} = 0 \quad (2.2.20)$$

...

i també els de [B]:

$$B_{n_5 n_8} = B_{23}^{e=2} + B_{32}^{e=3} \quad (2.2.21)$$

...

Ara hem de minimitzar l'equació 2.2.17. Això es pot fer molt més fàcilment si reorganitzem les matrius de la forma següent:

$$F(\Psi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\Psi_L] & [\Psi_F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [G_{LL}] & [G_{LF}] \\ [G_{FL}] & [G_{FF}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_L] \\ [\Psi_F] \end{bmatrix} - \frac{k^2}{2} \begin{bmatrix} [\Psi_L] & [\Psi_F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{LL}] & [B_{LF}] \\ [B_{FL}] & [B_{FF}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_L] \\ [\Psi_F] \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

S'han col·locat primer els nodes lliures, és a dir, aquells que no estan subjectes a les condicions de contorn. Els subíndex L i F signifiquen lliure i fixe respectivament.

Aplicant el criteri de minimització:

$$\frac{\mathcal{F}(\Psi)}{\partial \Psi_L} = 0 \quad (2.2.19)$$

s'obté:

$$\begin{bmatrix} [G_{LL}] & [G_{LF}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_L] \\ [\Psi_F] \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} [B_{LL}] & [B_{LF}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_L] \\ [\Psi_F] \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.20)$$

L'equació 2.2.9 implícitament satisfà la condició de contorn de Neumann. Per satisfer la condició de Dirichlet hem de fixar el valor de ψ a zero (o a un valor fixe per a la condició inhomogènia de Dirichlet) en els nodes del contorn. Això en el sistema 2.2.20 es tradueix en fixar un nombre molt alt (per exemple 10^{40}) en els elements corresponents a nodes fixes de la diagonal principal de les matrius [G] i [B] o bé a anular els elements de la fila de cada node fixe excepte el de la diagonal principal que es fixa a 1 tant a la matriu [G] com a la [B]. [70]. El segon procediment trenca la simetria de les matrius, cosa que es pot evitar en el cas de condició homogènia de Dirichlet fixant a zero els elements de la columna del node fixe excepte el de la diagonal principal. Això equival a eliminar les files i columnes corresponents a nodes fixes i poder treballar amb les submatrius corresponents a nodes lliures, aconseguint-se reduir l'ordre del sistema d'equacions a evaluar. Degut a això i encara que el procediment explicat en primer lloc és immediat i fàcil d'aplicar, s'ha fet servir el segon procediment. Així obtenim:

$$[G_{LL}][\Psi_L] - k^2[B_{LL}][\Psi_L] = 0 \quad (2.2.21)$$

Fixem-nos que si multipliquem per $[B_{LL}]^{-1}$ s'obté:

$$[B_{LL}]^{-1}[G_{LL}][\Psi_L] - k^2[B_{LL}]^{-1}[B_{LL}][\Psi_L] = 0 \quad (2.2.22)$$

que no és més que el clàssic problema d'autovalors:

$$[A][\Psi_L] = k^2[\Psi_L] \quad (2.2.23)$$

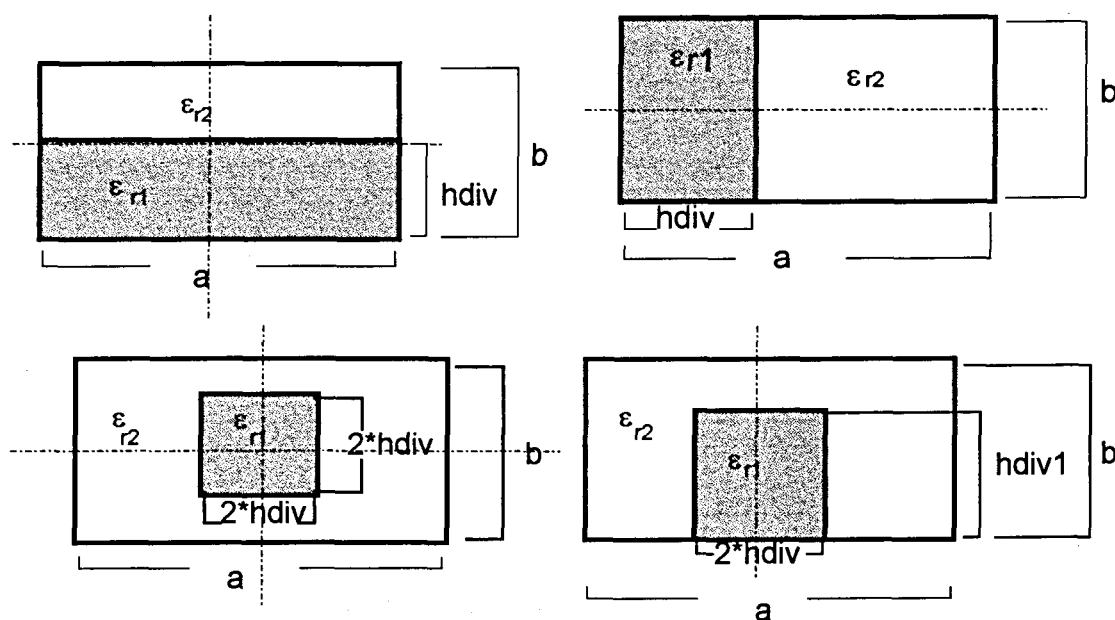
amb:

$$[A] = [B_{LL}]^{-1}[G_{LL}] \quad (2.2.24)$$

* Resolució del sistema d'equacions:

El sistema d'equacions 2.2.21 s'ha resolt utilitzant subrutines provades de la llibreria matemàtica NAG [61].

Els programes implementats analitzen, a part de guies homogènies, les següents guies inhomogènies:



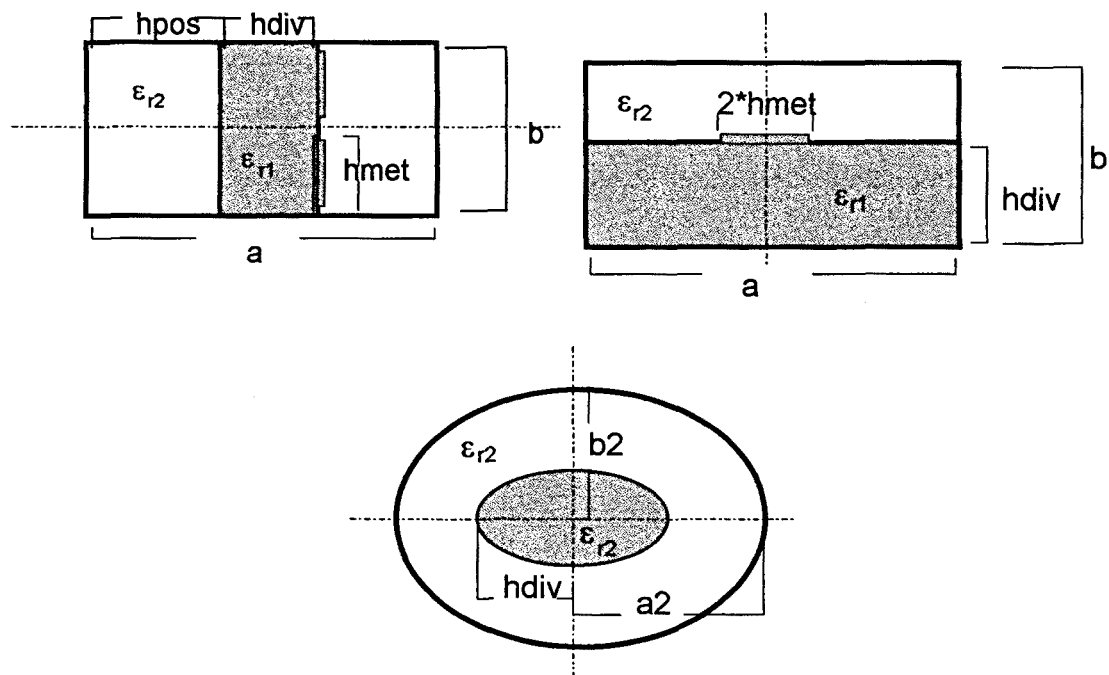


Fig 2.2.3

La subdivisió amb elements finits s'ha dut a terme de la forma següent:

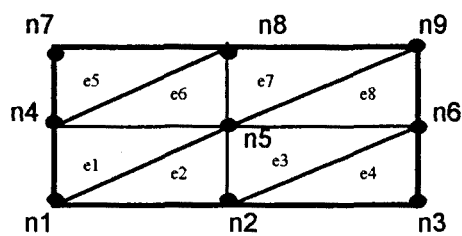


Fig 2.2.4

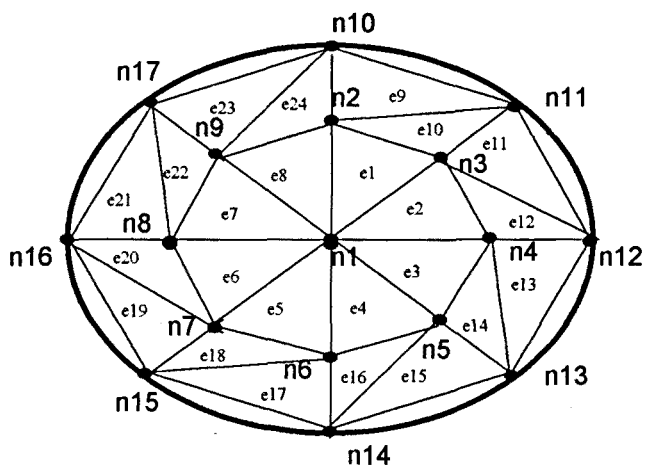


Fig 2.2.5

En el cas rectangular es numera de dalt a baix i d'esquerra a dreta. En el cas elíptic es fan servir coordenades polars i es comença a numerar des del centre procedint en espiral. L'engraellat és automàtic en funció del nombre d'elements finits desitjat.

El funcional a minimitzar per a l'anàlisi de les guies dielèctriques anteriors és: [70]

$$F = \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{k_t^2} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - k_t^2 \varepsilon E_z^2 - k_t^2 \mu H_z^2 \right] dS \quad (2.2.25)$$

en què:

$$k_t^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 \quad (2.2.26)$$

La discretització i minimització d'aquesta equació ens porta finalment a:

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C'] & [A'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_z] \\ [H_z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B] & [0] \\ [0] & [B'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_z] \\ [H_z] \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

en què les submatrius es construeixen a partir de les corresponents per a cada element i que venen donades per:

$$A_{ij}^e = \int_S \frac{\varepsilon}{k_t^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dS \quad (2.2.28)$$

$$A_{ij}^{re} = \int_S \frac{\mu}{k_t^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dS \quad (2.2.29)$$

$$B_{ij}^e = \int_S \varepsilon \alpha_i \alpha_j dS \quad (2.2.30)$$

$$B_{ij}^{re} = \int_S \mu \alpha_i \alpha_j dS \quad (2.2.31)$$

$$C_{ij}^e = \frac{k_z}{\omega} \int_S \frac{1}{k_t^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dS \quad (2.2.32)$$

$$C_{ij}^{re} = \frac{k_z}{\omega} \int_S \frac{1}{k_t^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dS \quad (2.2.33)$$

Les submatrius [A] i [B] governen el camp elèctric; les submatrius [A'] i [B'] el camp magnètic, i les submatrius [C] i [C'] l'acoblament entre camps. [C'] és la transposta de [C].

S'ha implementat també la possibilitat de considerar simetries en la forma de parets magnètiques horitzontals, verticals o ambdues. Amb això s'augmenta notablement la precisió dels càlculs i es disminueix el temps d'execució en l'anàlisi dels modes que presenten aquests tipus de simetries. En aquest cas però, a més de considerar les condicions de Dirichlet per al camp elèctric també s'han de forçar per al camp magnètic en les parets magnètiques. (Les condicions de Neumann estan implícites en el funcional).

2.2.2 Resultats i comentari

En la taula següent es presenta el càlcul de la freqüència de tall en la forma normalitzada k_c/a per al mode fonamental d'una guia rectangular buida amb dimensions $a=2b$:

Nombre de nodes	Nombre d'elements	Temps de càlcul (s)	k_c/a	% d'error
9	8	5	3.440	9.49
16	18	24	3.285	4.40
25	32	88	3.224	2.51

Taula 2.2.1

La solució exacta és $k_c \cdot a = \pi$. Es pot observar com a l'augmentar el nombre d'elements els resultats obtinguts són cada cop millors i també l'augment extraordinari del temps de càlcul a l'augmentar el nombre d'elements.

En la taula següent es mostren els resultats obtinguts per al mateix problema considerant parets de simetria:

Nombre de nodes	Nombre d'elements	Temps de càlcul (s)	$k_c \cdot a$	% d'error
9	8	4	3.210	2.17
16	18	20	3.175	1.06
25	32	80	3.161	0.62

Taula 2.2.2

L'aplicació d'una paret de simetria es tradueix en analitzar només mitja estructura amb el mateix nombre d'elements que abans s'utilitzava per analitzar-la tota. La disminució de l'error comès és considerable.

En les gràfiques següents es mostren les corbes de dispersió per a la mateixa guia homogènia ($\delta = k_z/k_0$):

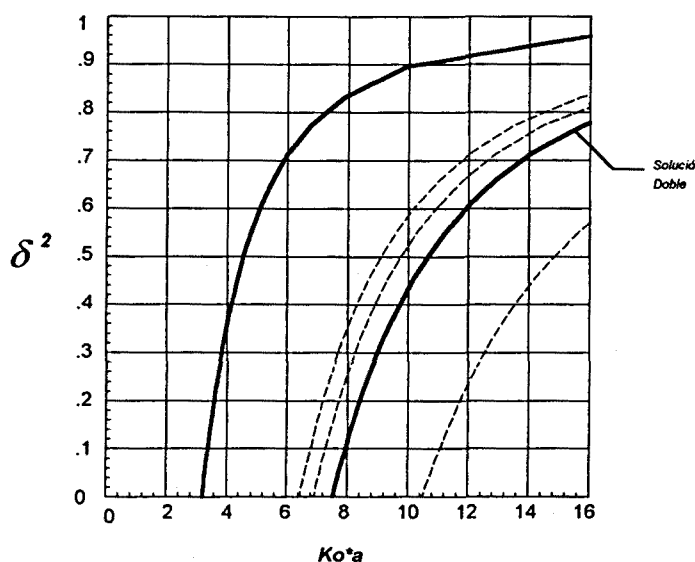


Fig 2.2.6

En aquesta gràfica, obtinguda sense aplicar simetries, començant per l'esquerra, la primera corba correspon al mode fonamental TE_{10} , a continuació i donat que $a = 2b$ hauriem de trobar una solució doble corresponent als modes TE_{01} i TE_{20} però el programa proporciona dos solucions diferents (línies discontinues) encara que molt properes. A continuació tenim una solució doble corresponent als modes TE_{11} i TM_{11} . L'última corba també hauria de representar una solució doble corresponent als modes TE_{21} i TM_{21} , però igual que abans el programa no ho proporciona.

En la gràfica següent es repeteix l'anàlisi considerant simetries

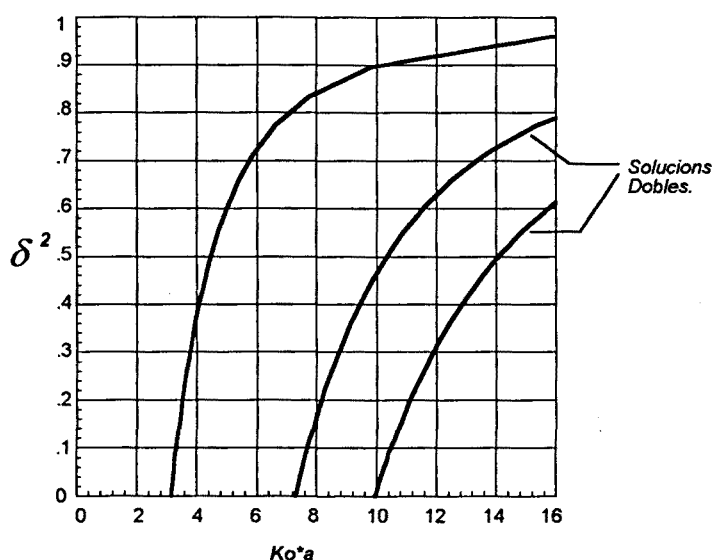


Fig 2.2.7

S'observa que ara ens manquen solucions: les corresponents als modes que no compleixen la condició de simetria imposada (paret magnètica paral·lela al costat menor de la guia situada en $a/2$), però sí apareixen les solucions dobles com a tals.

Si bé és difícil d'apreciar en les gràfiques anteriors, les solucions per als modes superiors són cada cop menys acurades. Això es pot comprovar en la taula següent en la que es presenten les diferents freqüències de tall dels diferents modes

$Kc \cdot a$ Teòric	$Kc \cdot a$ sense simetria	$Kc \cdot a$ amb simetria	% error sense simetria	% error amb simetria
3.1416 (TE_{10})	3.221	3.161	2.54	0.63
6.2832 (TE_{01})	6.443	—	2.54	—
6.2832 (TE_{20})	6.901	—	9.83	—
7.0248 (TE_{11})	7.533	7.310	7.23	4.05
7.0248 (TM_{11})	7.561	7.310	7.63	4.05
9.4247 (TE_{21})	10.491	9.995	11.31	6.04
9.4247 (TM_{21})	no calculat	9.995		6.04

Es pot observar que com més superior és el mode (més alta és la seva freqüència de tall) més gran és l'error comés, i que aquest és pitjor en el cas de no considerar simetries. Aquest comportament es deu a dos motius: primer que com més alt sigui el mode més variacions presenta la forma dels camps, cosa que fa necessari utilitzar un nombre d'elements més gran per poder aproximar-lo acuradament i segon la pròpia subrutina de càlcul d'autovalors i autovectors, aquest es calculen iterativament i els errors produïts en el càlcul dels més baixos s'acumulen a l'avaluació dels superiors. Amés a més i encara que la matriu tractada és simètrica, en alguns casos pot estar mal condicionada. Tenim així afegits els problemes propis de la discretització de l'espai i els inherents a l'evaluació numèrica dels autovalors i autovectors.

Els problemes s'accentuen quan s'analitza una estructura com la guia circular per a la que la discretització de l'espai s'aproxima pitjor a la forma de l'estructura com es pot observar en la taula següent en la que es presenten alguns resultats provinents de l'anàlisi d'una guia circular amb un nombre d'elements semblant a l'utilitzat en la guia rectangular (uns 40). Aquí s'ha utilitzat simetria de quadrant, és a dir situant dues parets magnètiques dirigides segons x i segons y que s'extenen des del centre de la guia fins a la paret metàl·lica. Es tracta d'una guia circular de radi a homogènia plena d'un dielèctric amb $\epsilon_r=4$ obtinguda com a cas particular d'una guia elíptica.

Kc*a Teòric	Kc*a sense simetries	Kc*a amb simetries	% error sense simetries	% error amb simetries
0.920 (TE ₁₁)	.9861	—	7.18	—
1.202 (TM ₀₁)	1.305	1.229	8.57	2.24
1.527 (TE ₂₁)	1.6898	1.582	10.66	3.60
1.916 (TE ₀₁)	2.123	—	10.8	—
1.916 (TM ₁₁)	2.123	—	10.8	—

Taula 2.2.4

A l'analitzar una guia "ridge-guide" (obtinguda com a cas particular de una finline sense dielèctric), considerant un gruix nul de les metal·litzacions amb un engrallat com el de la figura (per cada rectangle de la graella tenim dos elements triangulars no dibuixats)

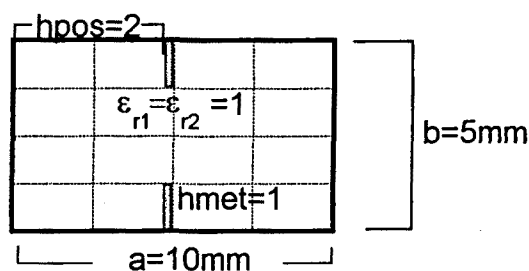


Fig 2.2.8

els resultats obtinguts són idèntics als d'una guia rectangular buida de les mateixes dimensions. Per apreciar l'efecte de les metal·litzacions interiors s'ha de recórrer a un engraellat molt més fi ($h_{met} > 5$) i donat que la forma d'engraellar implementada és uniforme, el temps necessari de CPU és molt gran. Per aquest cas seria molt convenient fer servir un engraellat no uniforme.

A continuació es presenten els resultats obtinguts a l'analitzar una guia rectangular inhomogènia com la de la figura següent amb $a=2b$, $\epsilon_r=4$, $h_{div}=b/2$

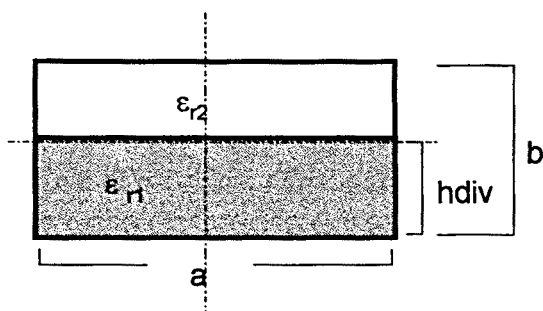


Fig 2.2.9

Els resultats obtinguts es mostren a la gràfica següent:

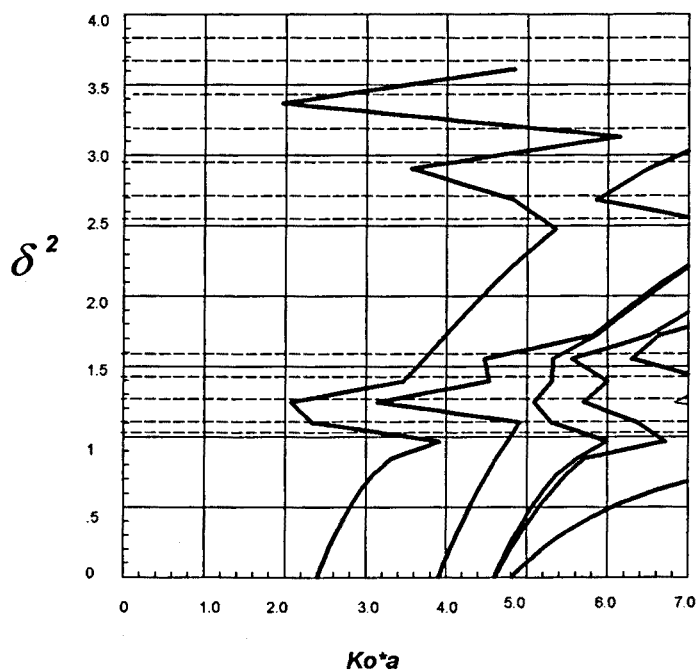


Fig 2.2.10

Els resultats fins a $\delta=1$ són correctes. En $\delta=1$ el sistema 2.2.27 es fa indeterminat degut a que apareixen singularitats en les matrius d'agrupament $[A]$, $[A']$ i $[C]$. El programa té en compte aquest cas i obvia el càlcul per aquest valor de δ . Però això no

explica els resultats totalment erronis que s'obtenen per $\delta=1,5$ ó $\delta=2,5$ per exemple. Si s'estudia acuradament el comportament de la matriu construïda amb les submatrius $[A]$, $[A']$ i $[C]$, es pot observar que per alguns valors de δ la matriu és definida positiva, per a alguns altres és definida negativa i per a certs valors ni una cosa ni l'altra. Quan això últim succeeix els autovalors obtinguts són erronis i no es corresponen a cap solució física. S'anomena una solució espúria.

S'han realitzat (i es continuen fent) nombrosos estudis sobre el fenomen de les solucions espúries en el mètode dels elements finits [73,74]. Segons Corr i Davies [75] el nombre de modes espuris és igual al nombre d'incògnites associades als nodes situats a "l'interface" entre dos dielèctrics. Això fa pensar que el problema provingui de la manera com es fan complir les condicions de contorn en aquest "interface". Si bé el funcional utilitzat incorpora les condicions de contorn de Neumann, al discretitzar-lo i aproximar-lo, aquestes condicions es compliran també d'una forma aproximada. Per altra banda s'ha comprovat que les solucions subministrades pel mètode dels elements finits poden no satisfer la condició de la divergència del camp elèctric ni de la divergència del camp magnètic. Aquests, per satisfer l'equació d'ona i poder construir un funcional han de poder ser diferenciables dos vegades. En el mètode dels elements finits les funcions amb les que s'aproximen o interpolen els camps són diferenciables una sola vegada, amb el qual $(\nabla \times \vec{E})/\mu$ i $(\nabla \times \vec{H})/\varepsilon$ no són funcions contínues, cosa que ens impedeix comprovar la condició de la divergència (ref Jin). Per fer-la complir es poden utilitzar diferents tècniques [70]: funcions d'aproximació que tinguin derivades contínues, les quals són més complicades i més difícils d'utilitzar en el mètode dels elements finits; calcular el camp elèctric amb l'expressió $j\omega\varepsilon \vec{E} = \nabla \times \vec{H} - \vec{J}$ a partir del magnètic obtingut amb el mètode dels elements finits (o viceversa fent servir la llei de Farady en forma diferencial), obtenint resultats menys acurats degut a les operacions de derivació involucrades; afegir un terme de penalització en el funcional a minimitzar de manera de forçar la condició de la divergència, el qual fa augmentar l'error comés.

A més a més si en l'estructura a analitzar apareixen punts en els que els camps siguin singulars, i encara que es recorri a un engraellat molt fi, l'aproximació d'aquests camps amb les funcions d'aproximació habituals és molt grollera, obtenint-se resultats molt poc acurats. Es pot recórrer a "arrodonir" artificialment les zones productores de camps singulars o bé a intentar trobar funcions d'interpolació que tinguin en compte la natura singular dels camps, coses que no sempre poden ser possibles i que, sens dubte augmenten la complexitat de programació, el temps d'execució -ja de per sí força elevat- i redueixen la generalitat del mètode.

En alguns casos l'aparició de solucions espúries és salvable. Així agafant els resultats de la figura 2.2.10 i eliminant "a mà" "els punts que no segueixen l'evolució natural de les solucions" obtenim:

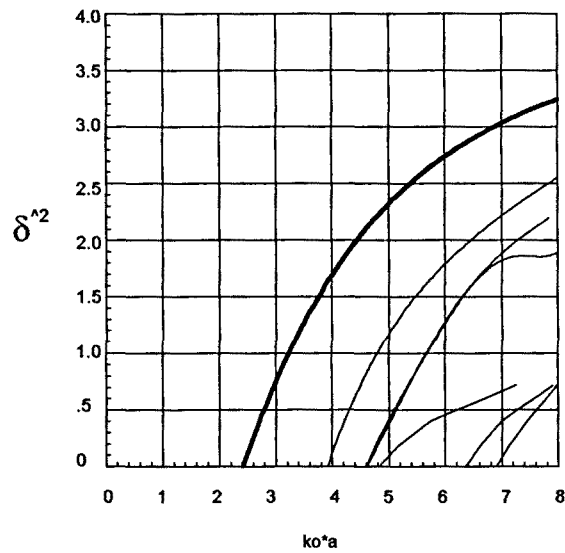


Fig 2.2.11

El mètode dels elements finits és un bon mètode per al càlcul d'estructures aeronàutiques i, en electromagnetisme pot donar bons resultats especialment en problemes que presentin una geometria força complicada. L'anàlisi d'estructures com ara la finline, que suposen la solució d'un problema d'autovalors i autovectors en guies d'ona inhomogènies i en les que hi ha zones de camp singular, imposa les pitjors condicions de funcionament per al mètode dels elements finits, cosa que fa poc aconsellable la seva utilització en aquestes situacions.

2.3. El mètode de la matriu de línies de transmissió

2.3.1. Implementació

El mètode de la matriu de línies de transmissió (Transmission Line Matrix Method - TLM-) va ser proposat per Johns l'any 1971 [76] i desenvolupat pel mateix Johns i per Ahktarзад [77-84]. Ultimament ha guanyat una notable difusió degut principalment als treballs de Hoefler [85-89].

Si bé la formulació que resulta d'aplicar l'algorisme és molt semblant a l'obtinguda pel mètode de les diferències finites en el domini temporal [90-91], les bases de partida són completament diferents: mentres que el mètode de les diferències finites es basa en una discretització de l'operador derivada en una equació diferencial, el mètode de la matriu de transmissió modela la propagació d'una ona electromagnètica a l'interior d'una estructura de microones. Com l'anterior és un mètode molt versàtil en quant a la quantitat de problemes diferents que pot tractar, però també com l'anterior els recursos d'ordinador necessaris són molt considerables.

Hom pot trobar molt bones explicacions del mètode en articles [85], capítols de llibres [86,92] i inclòs en llibres dedicats exclusivament al mètode [93]. A continuació en farem una descripció molt breu.

El mètode de la matriu de línies de transmissió es basa en modelar les components dels camps en una certa estructura pels voltatges i els corrents en línies de transmissió. Com és sabut aquests es troben a partir de la solució de l'equació d'ona en una dimensió i els camps es trobaran resolvent una equació d'ona en 3 dimensions. Si dividim l'espai del problema en qüestió en una xarxa bi o tridimensional segons la natura del problema i unim els nusos d'aquesta amb línies de transmissió, podem trobar una equivalència entre les tensions i corrents a les línies i les components dels camps, simulant l'evolució del front d'ona que es propaga per l'estructura amb la propagació de les tensions i els corrents en les línies de transmissió que uneixen els nodes de la xarxa.

En la figura següent s'esquematitza la propagació d'un impuls de tensió originat en un cert node d'una xarxa (bidimensional per claredat de dibuix).

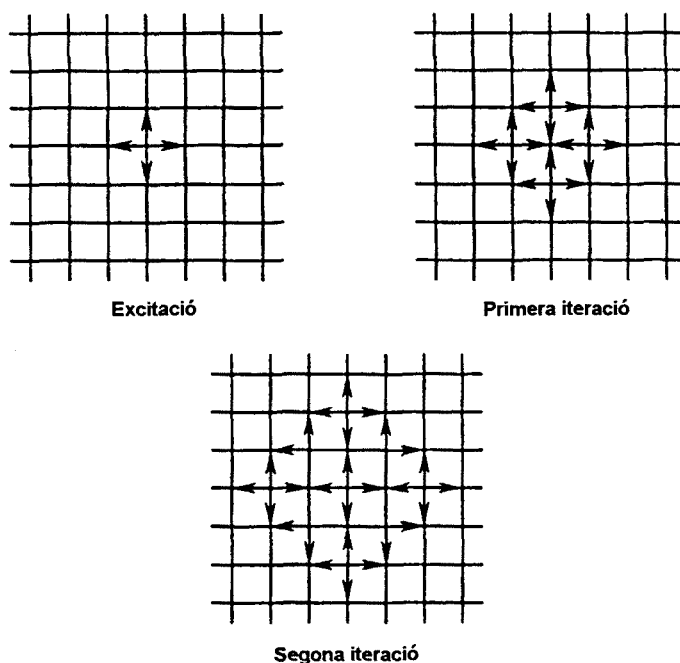


Fig 2.3.1

Al cap d'un cert interval temporal, l'impuls arriba, a través de les línies de transmissió que els uneixen, als nodes contigus. En aquesta part es reflectirà i part es propagarà a altres nodes. Tenim, de fet, una discretització del principi de Huyghens.

Les línies es poden connectar en sèrie o en paral·lel. Tenim així dues possibilitats de modelació per al cas bidimensional. En el cas de tres dimensions la modelació es duu a terme interconnectant com indica la figura línies en sèrie i en paral·lel

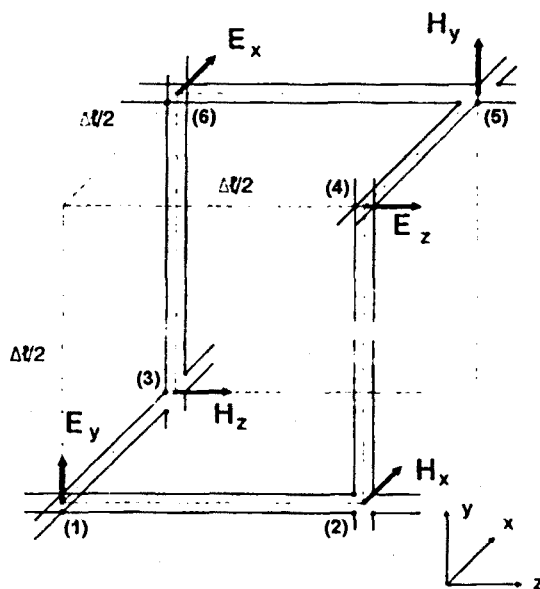


Fig 2.3.2

Es considera una separació infinitesimal entre els nodes ($\Delta l/2 \rightarrow 0$). Fixant-nos primer en els nodes 1,2 i 3 i fent que la tensió a les línies representi E_y i que els corrents a les línies modelin H_x i H_z , aplicant teoria de línies i la llei de Kirchoff del corrent al node paral·lel 1, s'obté:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2.3.1)$$

en què s'ha modelat la permitivitat ε per la capacitat per unitat de longitud de les línies.

Analogament en els nodes sèrie 2 i 3:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.3.3)$$

en què la permeabilitat μ s'ha modelat amb l'inductància per unitat de longitud de les línies.

Igualment, per als nodes 4,5 i 6 s'obté:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.3.6)$$

Aquestes expressions no són més que les equacions de Maxwell desenvolupades en coordenades cartesianes. Es poden combinar i obtenir l'equació d'ona tridimensional per al camp magnètic i per al camp elèctric en coordenades cartesianes.

Queda comprovat, doncs, que amb un engraellat infinitament estret es compleixen perfectament les equacions de Maxwell, essent en aquest cas el model exacte. Ara bé, en l'evaluació numèrica hem de considerar certs valors no nuls de Δl . Es pot pensar que si bé la simulació serà tant millor com més petit sigui Δl , per no tenir que necessitar temps de càlcul enormes, si estudiem estructures en les que els camps no varien molt bruscament, podrem obtenir bons resultats amb Δl relativament grans. Si ens fixem en la figura següent, en la que s'esquematitza la propagació d'un impuls per una xarxa bidimensional, si per anar del node A al node B es tarda Δt , per anar al node C s'hauria de tardar $\sqrt{2} \Delta t$, i en canvi, com es pot observar a la figura el mètode considera que per arribar-hi es necessita $2 \Delta t$

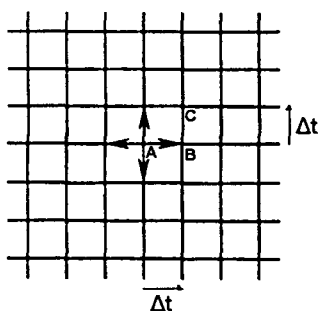


Fig 2.3.3

A més a més, analitzant amb una mica de detall la propagació d'un front d'ona pla per una xarxa tridimensional s'observa que la velocitat de propagació en les línies de transmissió no coincideix amb la velocitat de propagació del front d'ona, i el que és pitjor, té un comportament dispersiu més o menys acusat segons quina sigui la relació entre Δl i la longitud d'ona del senyal ($\Delta l/\lambda$) [86]. La dispersió és nula si el front d'ona es propaga diagonalment a la xarxa i és màxima si es propaga en les direccions de l'engraellat. Per aquest cas és:

$$\frac{\beta}{\beta_n} = \frac{\pi \Delta l / \lambda}{\sin^{-1}[2 \sin(\pi \Delta l / \lambda)]} \quad (2.3.7)$$

en què β és la constant de fase de les línies de transmissió i β_n la constant de fase de l'ona que es propaga per la xarxa. Per valors molt petits de $\Delta l/\lambda$, la relació anterior tendeix a $1/2$, cosa a tenir en compte al tractar els resultats d'un anàlisi amb aquest mètode.

En el mètode de la matriu de línies de transmissió els materials es modelen afegint "stubs" als nodes de la xarxa. Així, per modelar un material isotròpic amb permitivitat relativa ϵ_r i permeabilitat relativa μ_r , s'afegeix a cada node paral·lel un stub en circuit obert de longitud $\Delta l/2$ i d'admitància característica normalitzada $\bar{Y}_0 = 4(\epsilon_r - 1)$ en paral·lel, i a cada node sèrie s'afegeix un stub en curtcircuit de longitud $\Delta l/2$ i d'impedància característica normalitzada $\bar{Z}_0 = 4(\mu_r - 1)$ en sèrie. Les pèrdues es modelen amb un stub infinitament llarg connectat en paral·lel als nodes paral·lels i d'admitància característica normalitzada $\bar{Y}_0 = \sigma \Delta l \sqrt{L/C}$ (L és la inductància per unitat de longitud, C la capacitat per unitat de longitud i σ la conductivitat del medi). De forma semblant es modelen materials anisotròpics. S'ha de tenir en compte, però, que el mètode no pot fer servir línies de transmissió amb impedància característica complexa, i per tant només es poden tractar els casos amb baixes pèrdues, i que a l'igual que la constant de fase β (les característiques dispersives de la qual també es veuen afectades per les pèrdues), la constant d'atenuació α també sofreix un fenomen de dispersió i la corresponent a les línies és diferent de la de l'estructura sota estudi. En la figura següent s'esquematitza un node TLM tridimensional genèric que inclou el que acabem d'esmentar.

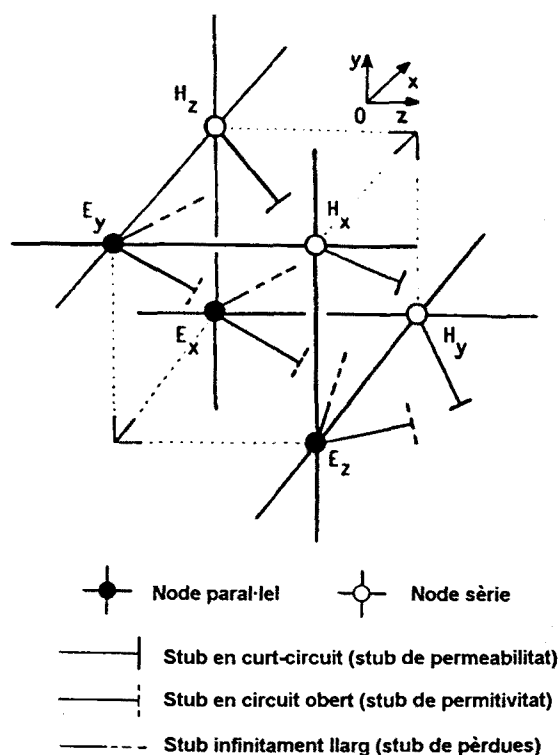


Fig 2.3.4

Les parets elèctriques es poden modelar de dues maneres. La primera consisteix en curtcircuitar els nodes paral·lels, afegint-hi stubs d'admitància característica infinita (molt gran a la pràctica). La segona consisteix en considerar la paret a mig camí entre dos nodes i forçar la condició del coeficient de reflexió igual a -1 . Així si a l'instant t_0 la tensió en el node és V_0 , a l'instant $t_0 + \Delta t$ la tensió es fixa a $-V_0$. Si bé la primera opció és més fàcil de programar, s'ha implementat la segona perquè proporciona resultats més acurats [86].

Les parets magnètiques es modelen de forma dual a les elèctriques: posant circuits oberts als nodes sèrie per mitjà de stubs d'impedància característica infinita (molt gran a la pràctica) o bé considerant la paret magnètica al bell mig de dos nodes i forçant la condició de coeficient de reflexió igual a 1 . S'ha implementat la segona opció pels motius esmentats al paràgraf anterior.

Les parets amb pèrdues es modelen en el domini freqüencial per una impedància superficial complexa, la qual donaria lloc a un coeficient de reflexió també complex. En el domini temporal això suposaria que el senyal incident es distorsionés i el mètode de la matriu de línies de transmissió no pot considerar la distorsió soferta pels impulsos incidents. Així aquestes parets només es podran modelar si la part imaginària de la impedància superficial és despreciable en front de la part real. La modelació és anàloga als casos anteriors: la paret es situa entre dos nodes; amb la resistència superficial es calcula el coeficient de reflexió i en els nodes situats immediatament abans de la paret, la tensió a l'instant $t_0 + \Delta t$ és la que hi havia en t_0 multiplicada pel coeficient de reflexió.

S'ha assumit que la resistència superficial és independent de la freqüència. De no ser així el problema és molt més complicat i el tractarem a continuació al comentar el cas de parets absorbents.

Les parets absorbents són força més problemàtiques que les anteriors. Per al cas d'una ona T.E.M., les parets absorbents es tracten en el mètode de la matriu de transmissió tridimensional introduint un coeficient de reflexió igual a zero (en el cas bidimensional és més complicat i s'ha d'introduir un coeficient de reflexió no nul i igual a $-0,17157$ [87]). La cosa es complica al tractar estructures dispersives que no suporten ones T.E.M.. En aquestes estructures les impedàncies de les parets absorbents depenen de la freqüència, cosa que no es pot modelar en el domini temporal amb el mètode de la matriu de línies de transmissió introduint un coeficient de reflexió real.

El problema es pot tractar de diferents maneres.

- Si pensem com es mesura el paràmetre S_{11} d'un quadripol en guia d'ones rectangular, per exemple, (mesurem el coeficient de reflexió al port 1 estant el port 2 adaptat), el port 2 s'adapta amb un "absorber" en guia d'ones situat a certa distància del quadripol. Aquest absorber està format per una piràmide de base quadrada de material amb pèrdues (material absorbent):

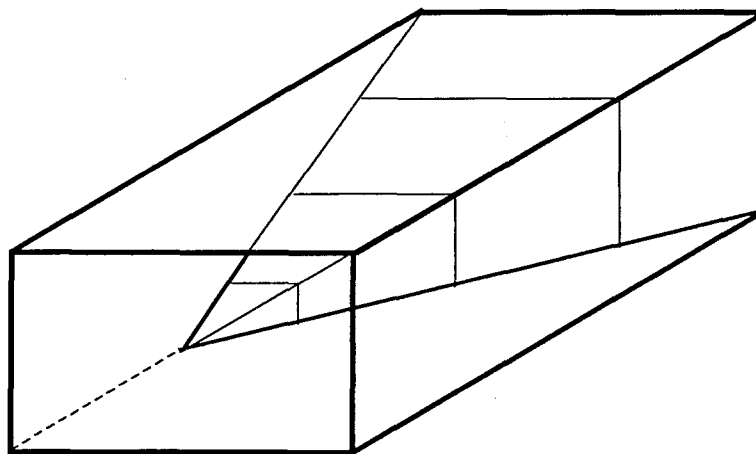


Fig 2.3.5

Aquesta estructura es pot analitzar perfectament. Al'afegir-la a continuació de l'estructura de la qual volem conèixer els seus paràmetres S i analitzar tot el conjunt, el temps de càlcul per a una discretització que doni uns resultats acceptables és molt gran.

-Es pot analitzar l'estructura anterior considerant tots els nodes situats a la seva entrada com nodes d'excitació i de resposta. El resultat obtingut es fa servir per a construir la matriu de Johns de l'estructura [88], la qual és una discretització en temps i espai de la funció de Green del problema. La resposta temporal a una certa excitació de les estructures que analitzem afegint-hi aquest absorber (tenint en compte que l'engraellat espacial ha de coincidir) la obtindrem amb una convolució discreta. L'únic inconvenient està en que el temps necessari per a l'obtenció de la matriu de Johns és monstruosament gran.

En lloc de l'absorber, també es pot trobar la matriu de Johns d'una secció de guia rectangular el suficientment llarga per garantir que en el nombre d'iteracions considerat, els impulsos provinents de la reflexió al final d'aquesta secció de guia tinguin una amplitud despreciable.

-Sota les condicions esmentades al paràgraf anterior, es pot forçar un coeficient de reflexió nul al final de la secció de guia. Els resultats no seran tant acurats però el temps de càlcul és inferior. (Aquesta ha sigut la solució implementada).

-Es poden millorar las característiques de l'última solució apuntada considerant condicions de final de guia d'ordre superior [94]. Referint-nos a la figura:

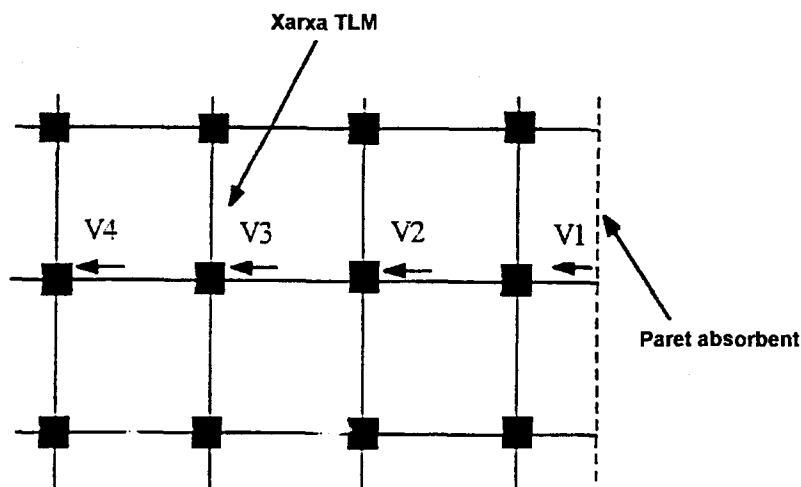


Fig 2.3.6

L'impuls reflectit per la paret absorbent (V1) es pot expressar com una funció lineal dels corresponents impulsos als nodes interiors (V2, V3, V4, ..., VN) de manera que l'ona passi a través de la paret absorbent amb reflexió mínima. N és l'ordre de la condició de paret absorbent. V1 és una extrapolació de V2, V3, ..., VN en temps i espai discret. L'inconvenient d'aquesta implementació és que per a condicions d'ordre elevat apareixen problemes d'estabilitat en les solucions [94].

La xarxa s'excita injectant un impuls en un determinat node i s'observa l'evolució dels impulsos que arriben al node de sortida. Aquesta resposta impulsional tindrà la forma d'un tren d'impulsos en el domini temporal:

$$f(t) = \sum_{n=0}^N A_n \delta(t - n \Delta t) \quad (2.3.8)$$

en què A_n és l'amplitud de la tensió en un node paral·lel o l'amplitud del corrent en un node sèrie a l'instant $n \cdot \Delta t$, N és el nombre total d'iteracions (longitud de la seqüència temporal) i δ és la funció delta de Kroneker.

La resposta en el domini freqüencial s'obté realitzant una transformada discreta de Fourier:

$$\operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)\right\} = \sum_{k=0}^K A_k \cos\left(\frac{2\pi k \Delta l}{\lambda}\right) \quad (2.3.9)$$

$$\operatorname{Im}\left\{F\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)\right\} = \sum_{k=0}^K A_k \sin\left(\frac{2\pi k \Delta l}{\lambda}\right)$$

en què $F(\Delta l/\lambda)$ és la resposta freqüencial, A_k és l'amplitud de l'impuls al node de sortida a l'instant $t=k\cdot\Delta l/\lambda$. Per expressar-ho en funció de la freqüència hem de tenir en compte que quan $\Delta l/\lambda \rightarrow 0$ la velocitat de propagació d'un front d'ona en la xarxa TLM-3D és la meitat de la real:

$$\frac{\Delta l}{\lambda_{\text{TLM}}} = \frac{\Delta l}{\lambda_{\text{real}}/2} \quad \lambda_{\text{real}} = \frac{c}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} \quad (2.3.10)$$

Per a estructures homogènies en les que el front d'ona es propagui predominantment en la direcció axial com ara guies d'ona es pot corregir l'efecte dispersiu de la xarxa TLM:

$$\frac{\Delta l}{\lambda}\Big|_{\text{corregit}} = \frac{\Delta l}{\lambda}\Big|_{\text{calculat}} \cdot K_v \quad K_v = \frac{\frac{\beta}{\beta_n}\Big|_{\Delta l \rightarrow 0}}{\frac{\beta}{\beta_n}} = \frac{\sin^{-1}\left[2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \sin\left(\pi\frac{\Delta l}{\lambda}\right)\right]}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\left(\pi\frac{\Delta l}{\lambda}\right)} \quad (2.3.11)$$

per altres estructures com ara guies inhomogènies per reduir els problemes que presenta el caràcter dispersiu de la propagació en la xarxa (anomenat error de velocitat) no tenim cap més remei que fer $\Delta l/\lambda \ll 1$ amb el qual el temps de càlcul pot ser enorme. Aquest temps de càlcul es pot reduir si es fa servir l'anomenat node tridimensional condensat [96], però l'utilització d'aquest provoca, a l'igual que en el mètode dels elements finits, l'aparició de solucions espúries [97].

2.3.2 Resultats i comentari

En la figura següent apareix un resultat típic d'una simulació amb el mètode de la matriu de línies de transmissió

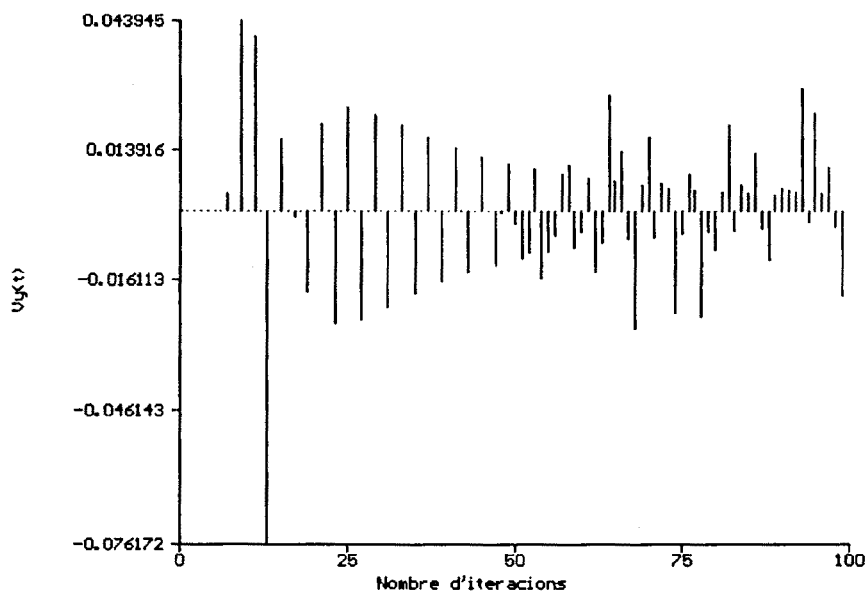


Fig 2.3.7

Apareix una seqüència de mostres de tensió que representa en aquest cas la component E_y en funció del temps en un cert node de la xarxa, havent injectat en un altre node proper un impuls d'amplitud unitària.

Normalment hom està més acostumat a interpretar resultats en el domini freqüencial. Efectuant una transformada discreta de Fourier a la seqüència de mostres temporals s'obté:

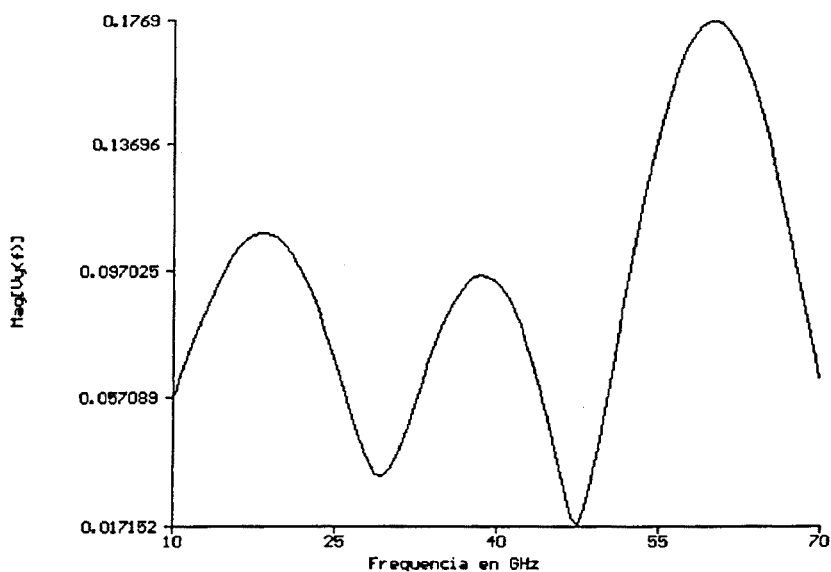


Fig 2.3.8

Evidentment si es vol que la resposta freqüencial s'assembli més a un espectre de ratlles, s'han de considerar moltes més mostres de la resposta temporal (fenòmen de Gibbs) i es pot considerar l'utilització de finestres. Així, amb 1000 mostres en el domini temporal (1000 iteracions) obtenim:

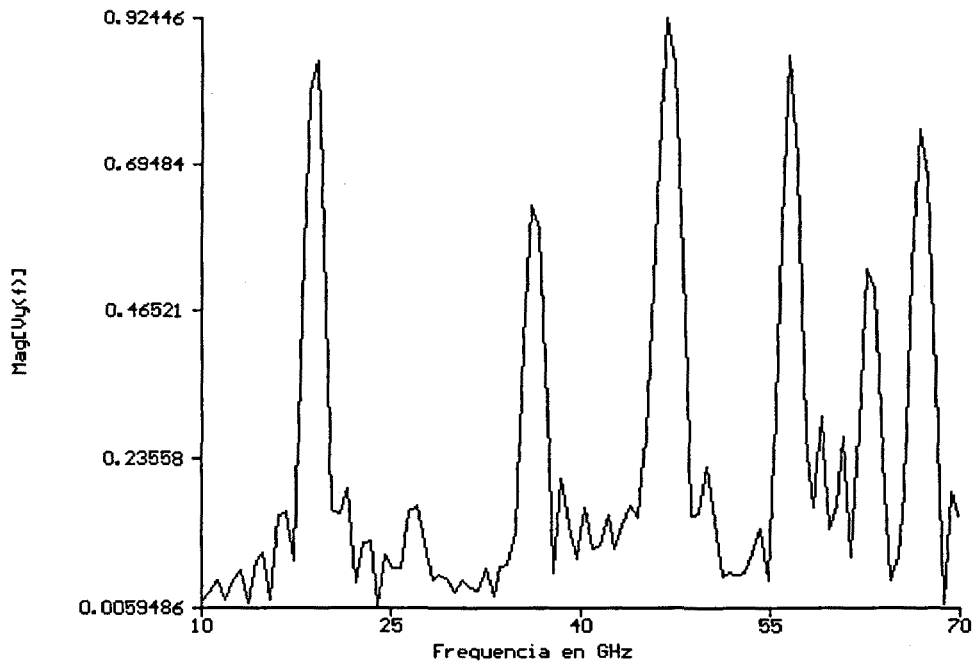


Fig 2.3.9

i amb 2000 iteracions:

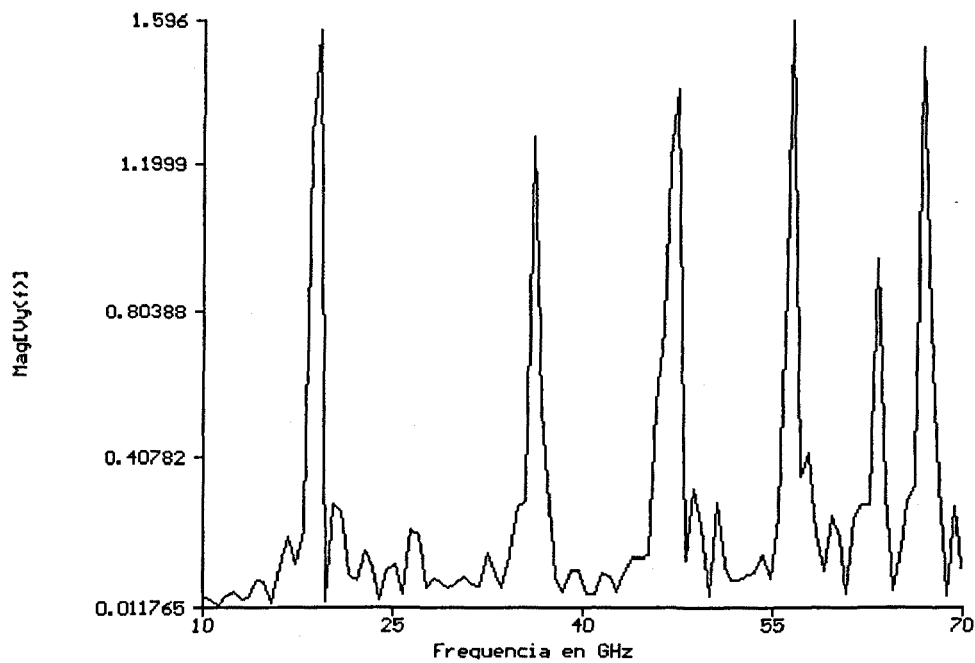


Fig 2.3.10

Els resultats obtinguts amb el mètode de la matriu de línies de transmissió depèn d'on situem els punts d'entrada i de sortida. Així, per a la mateixa estructura de la que s'han obtingut les gràfiques anteriors, si canviem les posicions del punt d'excitació i del de sortida obtenim:

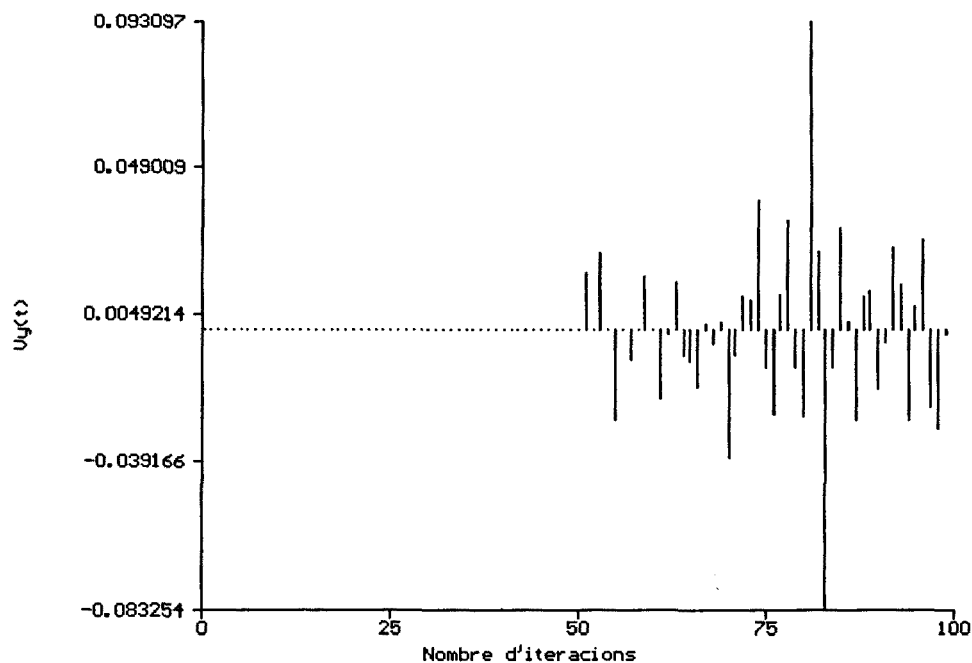


Fig 2.3.11

en aquesta última gràfica, a part del retard degut a haver allunyat més el punt d'excitació del de sortida, es pot apreciar com la forma de la seqüència resultant és diferent de la de la figura . Això ho podem apreciar potser millor en la resposta freqüencial (2000 iteracions):

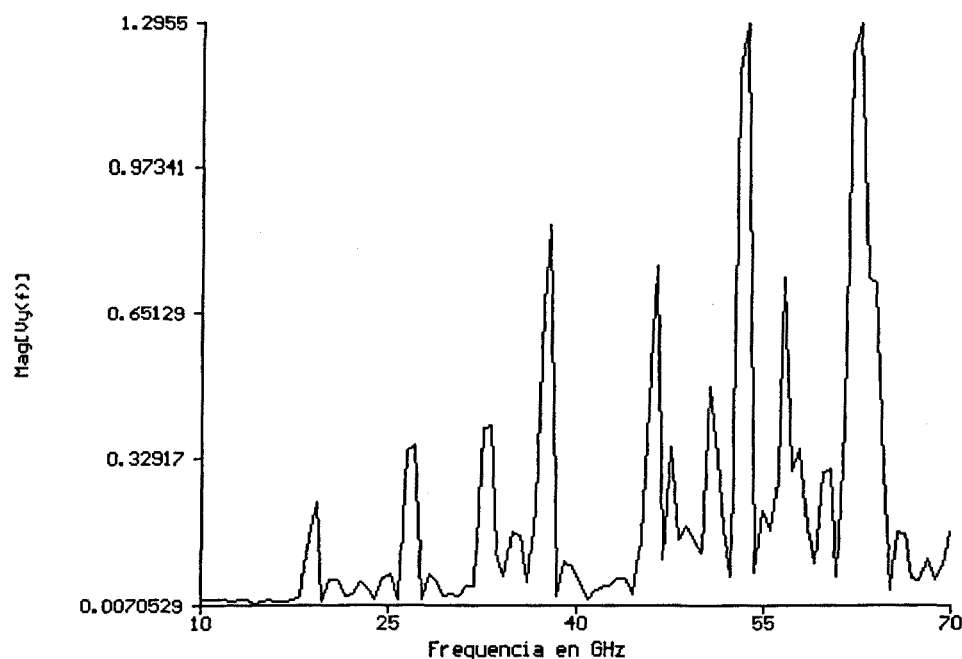


Fig 2.3.12

Es pot observar com hi ha "ratlles" espectrals que conserven la seva posició freqüencial -però no la seva amplitud-, n'hi ha que no aparèixen i n'hi ha de noves. Això és així perquè estem evaluant components de camp en punts concrets de l'estructura sota estudi. Seria anàleg al que obtindriem al laboratori si introduïssim una petita sonda dins un guia d'ones, per exemple. Segons a on la possessim, la mesura enfatitzaria uns modes o uns altres.

Es pot obtenir la resposta en tots els nodes d'un cert pla, i a partir d'aquí reconstruir aproximadament la forma de les components de camp. En el domini temporal, per cada Δt es veuria com avançava el front d'ona i la forma que té.

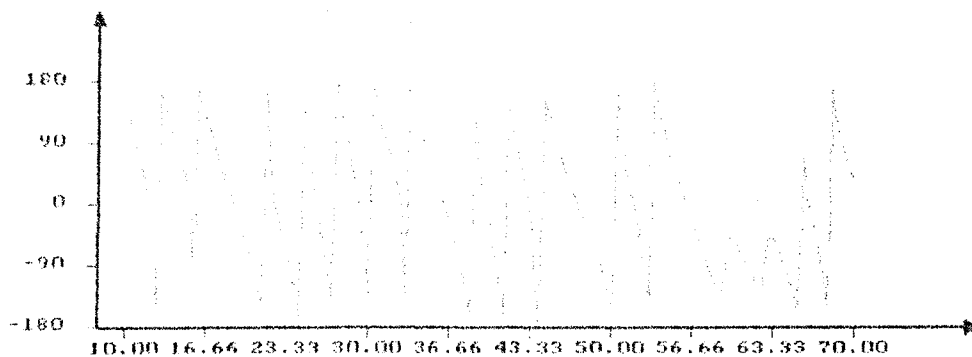
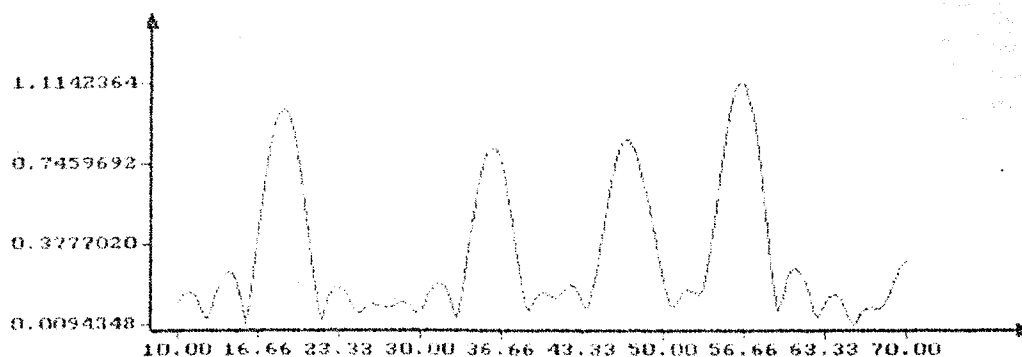
El mètode permet la visualització dels camps en el domini temporal excitats per una font puntual. L'obtenció de paràmetres usuals en enginyeria de microones com ara la constant de fase d'una guia d'ones o els paràmetres S d'una discontinuïtat són més problemàtics.'

Per a l'obtenció de la constant de fase d'una guia ho podem fer de la forma següent: convertim la guia en una cavitat ressonant afegint-hi parets metàl·liques. A partir de la seva dimensió axial i de les freqüències de ressonància per als diferents modes que apareixen a la transformada de Fourier de la seva resposta impulsional podem obtenir la constant de fase desitjada. Per evitar que la posició dels nodes d'excitació i de sortida ens amagui alguna ressonància, serà convenient repetir l'anàlisi variant la posició d'aquests. En les figures següents es presenten els resultats obtinguts a l'anàlitzar una cavitat rectangular buida de 10 mm d'amplada, 5 mm d'alçada i 14 mm de profunditat, situant els nodes d'excitació i resposta aproximadament en el centre. $\Delta l=0,25$ mm, el qual suposa una xarxa de $40 \times 20 \times 56$ nodes tridimensionals.

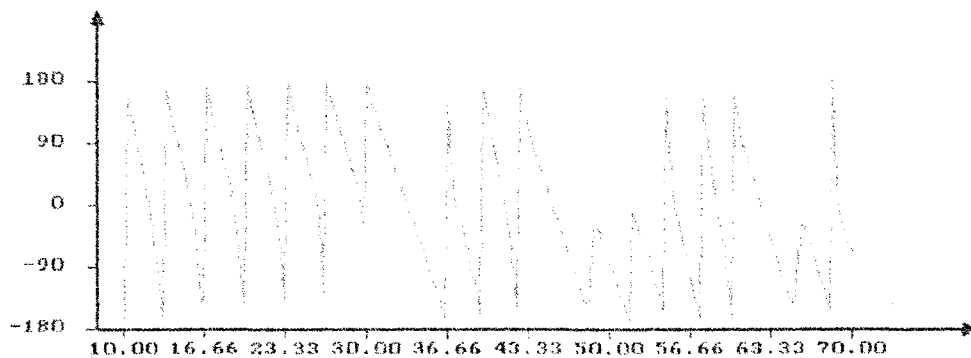
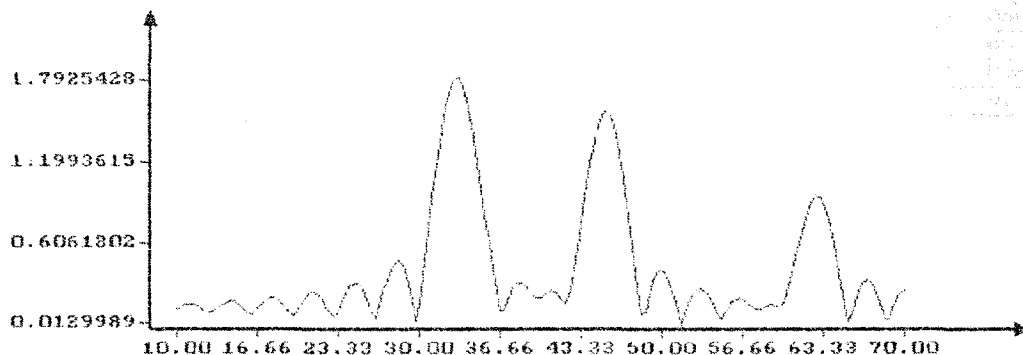
```

COORD Z : 20      Nodulo      : 9.85466254767519E-0001
COORD Y : 10      Fase         : 8°
COORD X : 32      Frecuencia   : 1.87000000000116E+0001
                  Valor de D : 1.10256989988711E-0002

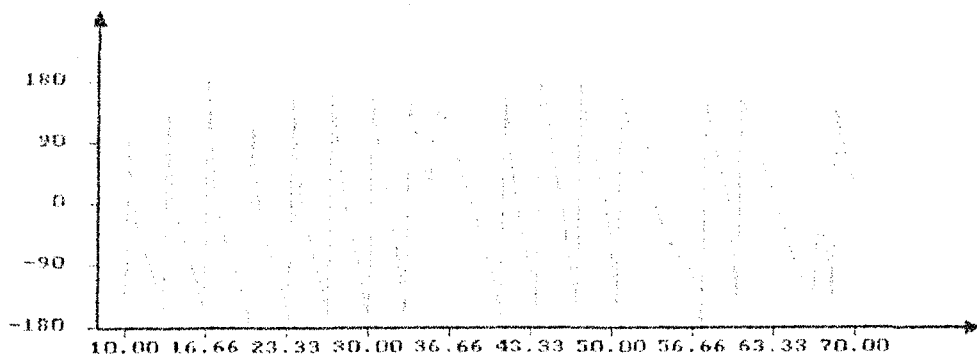
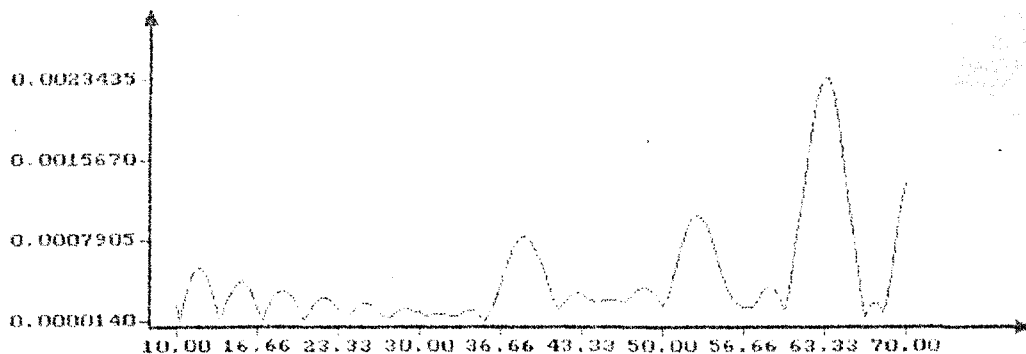
```



COOR Z : 20 Módulo : 1.79254277303849E+0000
 COOR Y : 10 Fase : 123
 COOR X : 32 Frecuencia : 3.3099999999767E+0001
 Valor de D : 1.95412201115630E-0002



COOR Z : 20 Módulo : 2.34345798496818E-0003
 COOR Y : 10 Fase : 99
 COOR X : 32 Frecuencia : 6.3400000000233E+0001
 Valor de D : 3.7622511232594E-0002



Els "pics" en les gràfiques anteriors ens donen les freqüències de ressonància de la cavitat per als modes compatibles amb la component de camp especificada.

En les gràfiques següents es pot observar l'efecte d'una xarxa menys fina. La primera gràfica presenta l'anàlisi de la cavitat amb $\Delta l=0,25$ mm (xarxa de $40 \times 20 \times 56$); la segona amb $\Delta l=0,5$ mm (xarxa de $20 \times 10 \times 28$) i la tercera amb $\Delta l=1$ mm (xarxa de $10 \times 5 \times 14$). La simulació s'ha fet amb 500 iteracions.

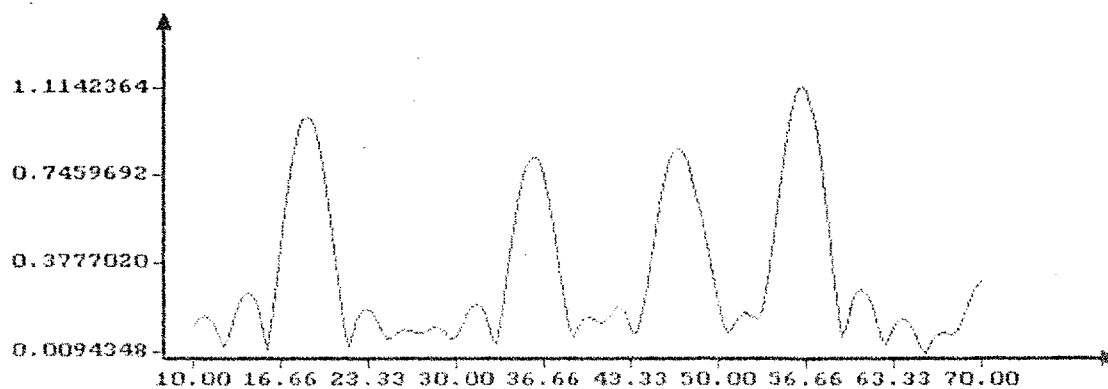


Fig 2.3.16

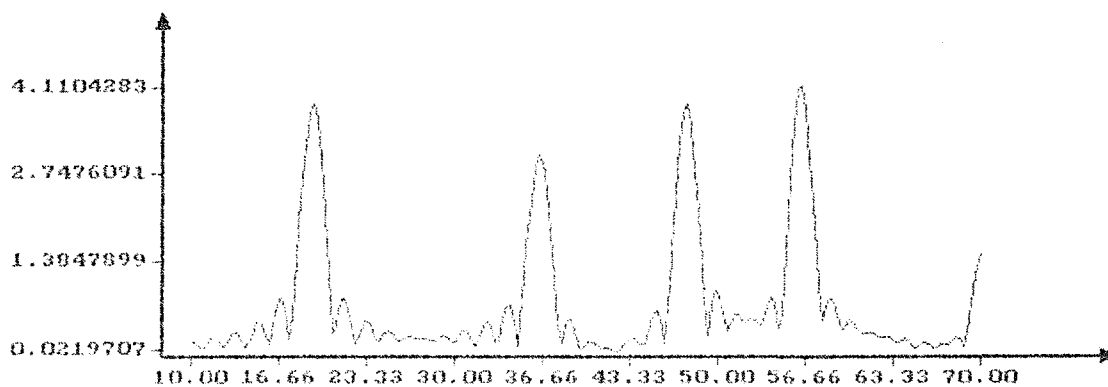


Fig 2.3.17

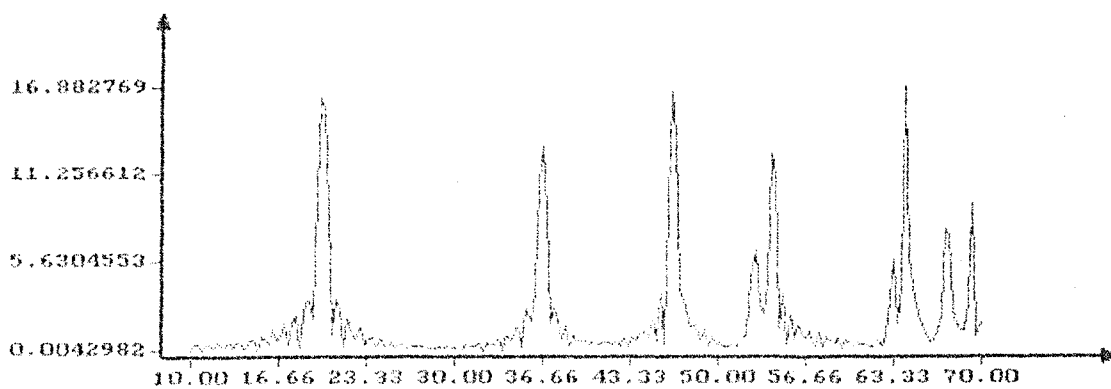


Fig 2.3.18

Es pot observar un doble fet: primer, i que pot semblar a primera vista paradoxal, és que per a xarxes menys denses la resposta freqüencial s'assembla més a un espectre ideal de ratlles. Recordem que aquest l'obtidriem teòricament si considerèssim un nombre infinit de mostres temporals. Al tallar la sèrie temporal a un nombre finit apareix el fenomen de Gibbs que fa que en lloc de tenir ratlles espectrals ens apareguin funcions del tipus sinc ($\sin x / x$). Un senyal estarà millor caracteritzat en freqüència (més estretes seran les ratlles espectrals) com més gran sigui la seva duració temporal (principi d'incertesa de la transformada de Fourier). Així en el cas d'una xarxa poc densa $\Delta l/\lambda$ serà més gran que una xarxa molt densa i per tant $\Delta t = \Delta l/c$ també ho serà. Com a resultat, si el nombre d'iteracions és el mateix, el senyal que es propaga per la xarxa menys densa tindrà una duració més gran i, en conseqüència el seu espectre presentarà una forma més semblant a ratlles. Des d'un punt de vista físic intuïtiu ja es pot pensar que com més estreta sigui la xarxa i més gran per tant el nombre de nusos, ens farà falta moltes més iteracions (esglaons temporals) per garantir que l'impuls que s'excita té temps a arribar a les parets i reflectir-se.

Així en una simulació amb el mètode de les línies de transmissió, per reduir els errors no basta en fer més fina la xarxa, s'ha d'augmentar en consonància el nombre d'iteracions.

En segon lloc, i com s'aprecia millor en la taula que presentem a continuació, com més gruixuda es la xarxa i més alta la freqüència, més gran és l'error comés. De fet es pot apreciar en la última gràfica anterior, que en el marge de freqüències més alt (a prop de 70 GHz) apareixen "pics" que no s'aprecien a les gràfiques anteriors. Això és així perquè en aquest marge i per aquest cas ja no es compleix que $\Delta l/\lambda \ll 1$ i l'error de velocitat (efecte dispersiu de la xarxa TLM) ens fa aparèixer pics corresponents a freqüències de ressonància de modes que en realitat la tenen per sobre de 70 GHz. Hi ha un correment dels "pics" de ressonància més acusat com més alta sigui la freqüència.

Mode	fr teòrica (GHz)	fr per $\Delta l=0,25\text{mm}$	fr per $\Delta l=0,5 \text{ mm}$	fr per $\Delta l=1 \text{ mm}$
TE ₁₀₁	18,43	18,7	19,3	19,9
TE ₀₁₁	31,8	33,1	34,6	37,3
TE ₂₀₁	31,8			
TM ₁₁₀	33,54	27,1	27,4	27,7
TE ₁₁₁	35,2	36,1	36,4	36,7 ó 47,2
TM ₁₁₁	35,2	32,5 ó 38,8	33,1 ó 39,4	34,0 ó 37,3
TM ₂₁₀	42,43	45,7	46,6	46,6 ó 41,5
TE ₂₁₁	43,76	46,9 ó 45,4	47,8 ó 46,6	54,1 ó 59,2
TM ₂₁₁	43,76	52,9	61,6 ó 54,4	49,9 ó 47,2
TE ₀₂₁	60,95	62,8	62,8	64,3 ó 61,0
TM ₁₂₀	61,85	62,2	63,7	57,1 ó 62,8
TE ₁₂₁	62,77	56,5	56,5 ó 64,9	67,3 ó 65,2
TM ₁₂₁	62,77	63,4	68,8	59,2 ó 67,6

Taula 2.3.1

Per omplir aquesta taula s'han de considerar totes les components de camp elèctric i de camp magnètic. Els "pics" a l'espectre de cadascuna d'elles ens donarà les freqüències de ressonància de modes la distribució de camps dels quals sigui compatible amb la component de camp considerada. Degut a això, -i especialment allà on el mètode és

menys acurat: graella gruixuda i alta freqüència-, aparèixen possibles solucions diferents per a un mateix mode segons quina component de camp considerem. S'afegeix el problema d'interpretació dels resultats, especialment si s'analitza una estructura de la que desconeixem la distribució de camps.

El mètode s'ha implementat sobre un ordinador PC-486 sota el sistema operatiu DOS per aprofitar les característiques gràfiques i d'edició d'aquest tipus d'ordinadors. Així es poden introduir d'una forma molt senzilla estructures tridimensionals complexes:

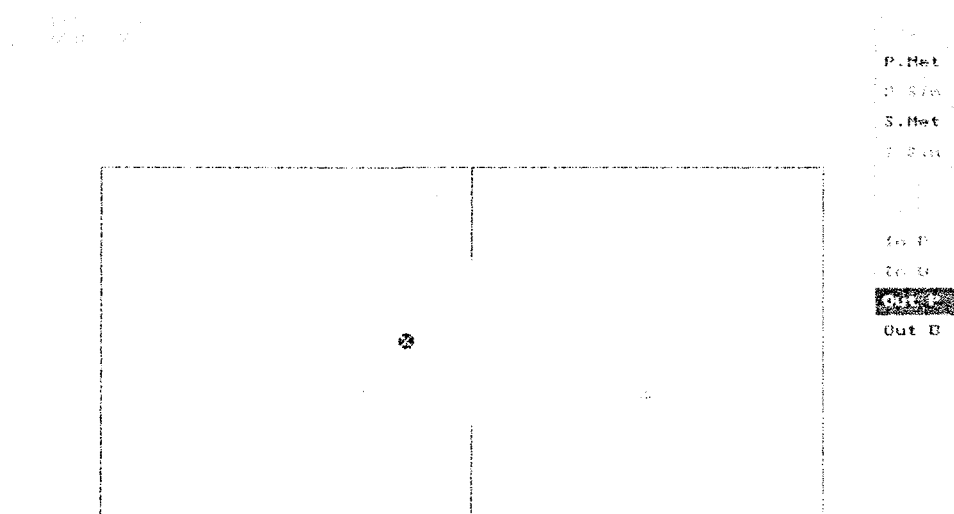
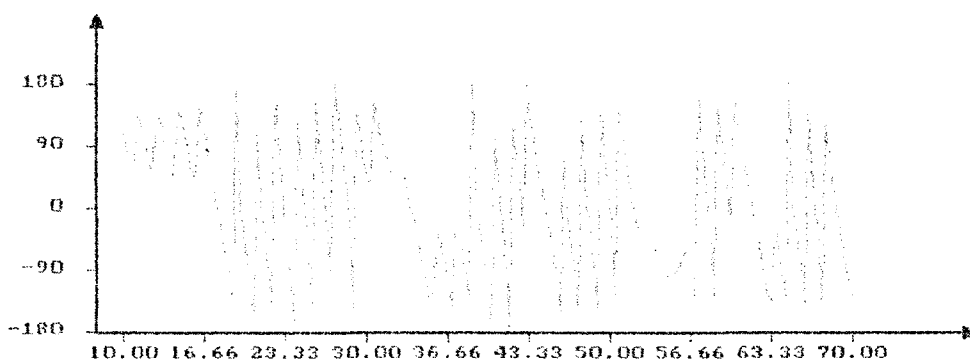
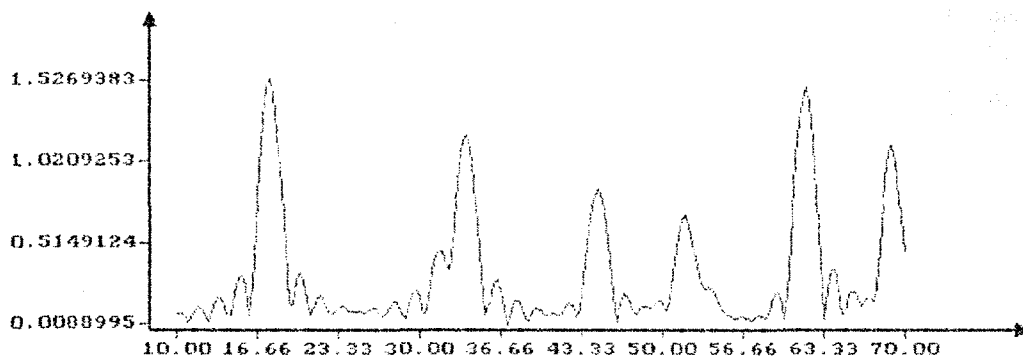


Fig 2.3.19

com es pot suposar, l'inconvenient prové de les limitacions inherents del sistema operatiu (memòria central utilitzable). Així per analitzar una cavitat finline de 10x5x14 mm amb els fins centrats de 1,25 mm d'amplada i un dielèctric de 0,25 mm de gruix i permitivitat 2,2 el temps de càlcul amb $\Delta l=0,25$ mm i 1000 iteracions és de 2 hores i 9 minuts. S'hi ha d'afegir 1,5 minuts per a realitzar la transformada discreta de Fourier. El resultat obtingut es presenta a continuació

COOR Z : 17 Módulo : 1.52693825128603E+0000
 COOR Y : 10 Fase : -32
 COOR X : 32 Frecuencia : 1.7799999999884E+0001
 Valor de D : 1.04944557248530E-0002



COOR Z : 17 Módulo : 1.58622275849302E-0003
 COOR Y : 10 Fase : 339
 COOR X : 32 Frecuencia : 2.65000000000000E+0001
 Valor de D : 1.96341439277696E-0002

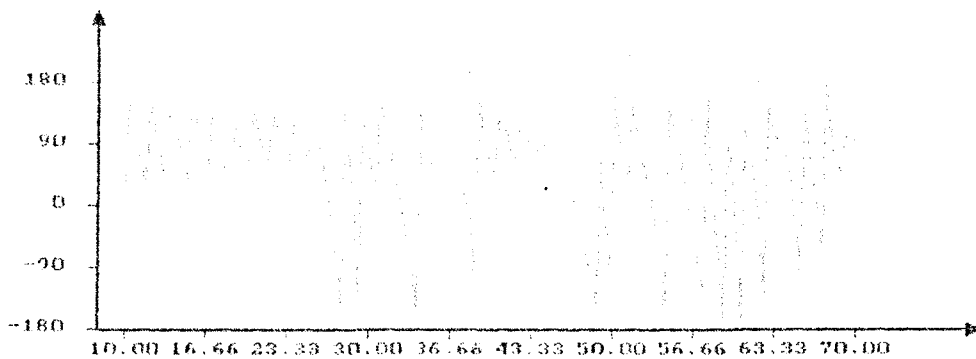
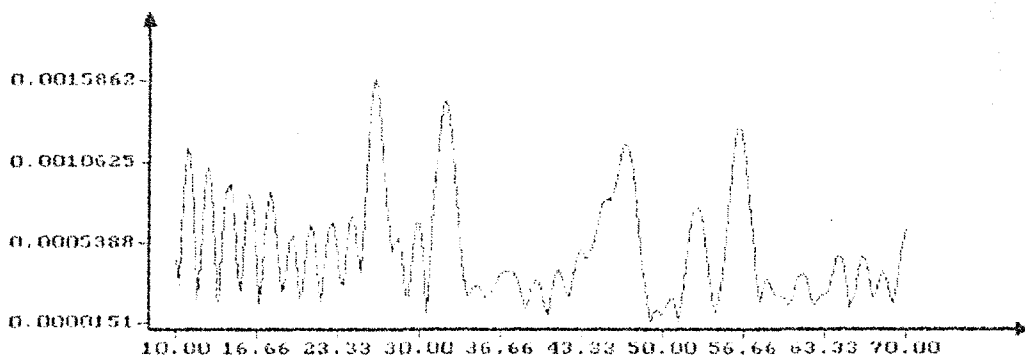


Fig 2.3.20

A partir de la freqüència de ressonància més baixa i tenint en compte que $\lambda_g/2=14$ mm s'obté una constant de fase per al mode fonamental de 224 rad//m . Amb el mètode del domini espectral s'obté $\beta=274$ rad/m el qual suposa una diferència d'un 18 % .

No cal dir que per a un anàlisi més acurat i per a analitzar discontinuïtats s'ha de transferir el codi a un ordinador molt més potent.

El mètode de la matriu de línies de transmissió tridimensional acostuma a ser atractiu per als enginyers de microones degut a la seva filosofia: modela la propagació d'ones electromagnètiques (sentit físic) amb línies de transmissió (tècnica de microones), i de fet tècniques de mesura de microones són extrapolables a les tècniques d'anàlisi del mètode. Té però l'inconvenient (que per alguna aplicació pot ser un avantatge) de presentar els resultats de forma "massa física": dóna les mostres temporals de les components dels camps en punts concrets de l'espai quan aquests han sigut excitats en algun altre lloc per un impuls. Això fa que l'interpretació dels resultats obtinguts pugui ser difícil en certes ocasions, i que l'obtenció de paràmetres adequats per a les tècniques usuals d'anàlisi i disseny de circuits de microones, com ara els paràmetres S, s'hagin d'obtenir de forma indirecta i amb un esforç computacional considerable.

Es un mètode molt versàtil per la quantitat d'estructures diferents que pot analitzar i fàcil de programar. Com tots els mètodes que realitzen una discretització de l'espai necessita un temps de càlcul i una quantitat de memòria molt grans per a obtenir resultats satisfactoris (el temps de càlcul es considerablement superior al necessari per a realitzar un anàlisi amb el mètode de les línies o dels elements finits). A part d'aquest important inconvenient, hem de tenir en compte l'error de velocitat i el fenomen de Gibbs a l'efectuar una transformada discreta de Fourier a una seqüència de mostres de longitud finita.

2.4. El mètode de la matriu S generalitzada i de l'adaptació modal.

2.4.1. Implementació

El mètode de la matriu S generalitzada ("Generalized Scattering Matrix Method" - GSM-) va ser introduït l'any 1964 per J.R. Pace [98] per a l'estudi d'un esglaó en pla E en una guia de plaques paral·leles a partir de l'anàlisi d'una estructura auxiliar consistent en una bifurcació de guies de plaques paral·leles. Durant molts anys no ens consta que s'hagués fet servir fins que més recentment es va utilitzar juntament amb la tècnica de l'adaptació modal per a l'anàlisi d'estructures de filtres en pla E en guia d'ones [13,99]. És un bon mètode per a l'anàlisi de diferents tipus de discontinuïtats en guia d'ones [100,101] però de difícil aplicació a discontinuïtats finline. S'ha implementat per a familiaritzar-se amb la tècnica d'adaptació modal i per a poder dissenyar filtres en pla E en guia d'ones, dels quals es tenen resultats experimentals.

El mètode de la matriu S generalitzada es basa en ampliar la tècnica dels paràmetres de "Scattering" o paràmetres S habitual dels anàlisis de circuits de microones a línies de transmissió multimode [102].

Considerem el problema auxiliar plantejat per Pace [98] del qual posteriorment Mittra i Lee van obtenir una solució analítica [103], consistent en la bifurcació d'una guia de plaques paral·leles com indica la figura:

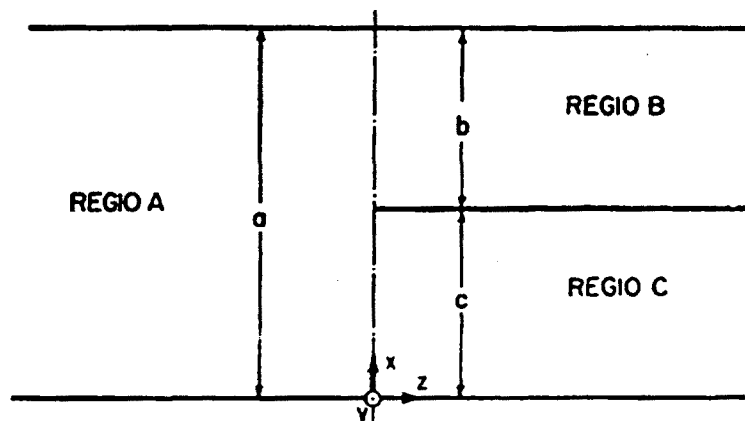


Fig 2.4.1

Malgrat que la guia corresponent a la regió A s'hagi excitat de manera que per ella només s'hi propaga un mode, la discontinuïtat en $z=0$ provoca que per a complir-se les

condicions de contorn que imposa, els camps a l'entorn d'aquesta s'han d'expressar per un nombre infinit de modes. Això es pot modelar de la forma següent:

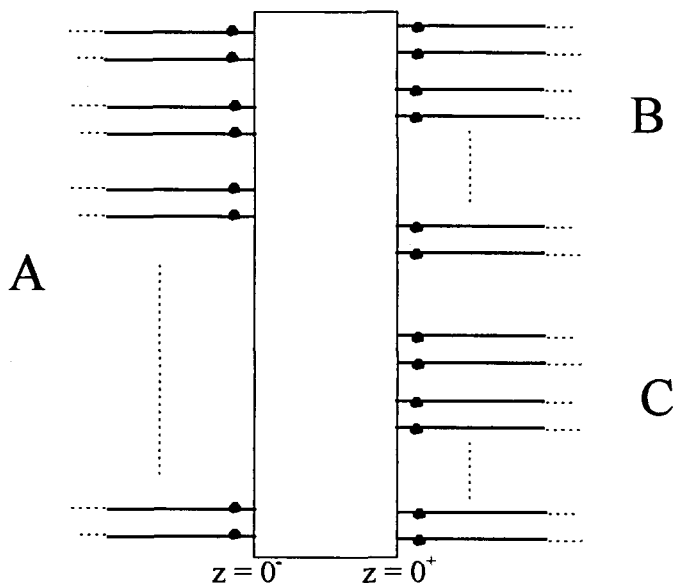


Fig 2.4.2

en què cada línia de transmissió representa a un mode: la impedància característica és l'impedància d'ona del mode corresponent i la constant de propagació és la pròpia del mode que representa. La caixa representa la discontinuïtat i és l'encarregada d'acoblar els diferents modes. Tenim tantes línies com modes, és a dir, infinites línies per a la regió A, infinites línies per a la regió B i també infinites línies per a la regió C.

La discontinuïtat està modelada per un multiport lineal atacat per línies de transmissió ideals. El podem caracteritzar amb una matriu S de dimensió infinita.

Per donar més sentit físic i apropar-nos més a la tècnica habitual dels paràmetres S en circuits de microones, en lloc de considerar una matriu S de dimensions infinites, a cada regió del problema li assignem un número de port del 1 a N i considerem una matriu S de dimensions $N \times N$ però en la que cada paràmetre S és una matriu de dimensions infinites. Així en l'exemple anterior, assignant els números de port 1, 2 i 3 respectivament a les regions A, B i C, tindrem una matriu S de dimensions 3×3 en la que cada element és una submatriu de dimensions infinites:

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & [S_{13}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & [S_{23}] \\ [S_{31}] & [S_{32}] & [S_{33}] \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

Denotarem per $S_{ij}(m,n)$ l'element que ocupa la fila m -èsima i la columna n -èsima de la submatriu $[S_{ij}]$. $S_{11}(m,n)$ ens dona l'amplitud complexa del m -èsim mode reflectit cap a la regió A (port 1) quan de la regió A (port 1) incideix el n -èsim mode; $S_{21}(p,q)$ ens dona l'amplitud complexa del p -èsim mode transmès cap a la regió B (port 2) quan de la regió A (port 1) incideix el q -èsim mode; etc. (els modes reflectits i transmesos no tenen per què propagar-se, poden atenuar-se).

Si compliquem una mica el problema exemple, introduint una zona plena de dielèctric que actua com a càrrega en una de les dues guies en les que s'ha bifurcat la guia original

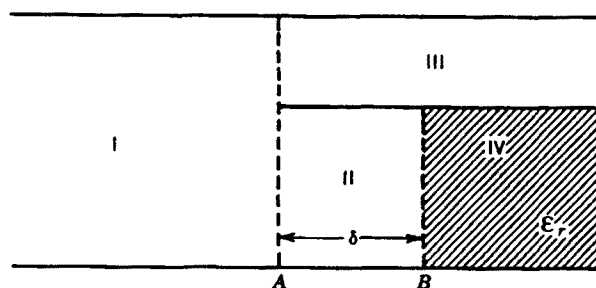


Fig 2.4.3

tindrem una nova discontinuïtat, per lo que la matriu S generalitzada tindrà 4 ports, i un fenomen de reflexió múltiple entre la discontinuïtat A i la B. Les amplituds dels modes transmesos a la regió IV s'obtenen com un sumatori infinit de productes de submatrius $[S_{ij}]$ amb el vector que proporciona les amplituds dels camps incidents des de la regió I. Pace [98] va demostrar la convergència d'aquesta sèrie. Això ens permet truncar les submatrius $[S_{ij}]$ a dimensions finites per a la seva evaluació numèrica i fer servir la matriu S generalitzada per tractar discontinuïtats en cascada. (Pace ho va demostrar per al problema de la figura 2.4.3; per altres tipus de discontinuïtats la convergència s'assumeix). Això és necessari si per a calcular els elements de la matriu S generalitzada es fan servir tècniques analítiques com les que va fer servir Pace ("function theoretic", càlcul de residus o Wiener-Hopf [103,105]). Si utilitzem el mètode de l'adaptació modal ("mode-matching") [106-108] el problema de la convergència és el propi d'aquest: les expansions modals amb les que es representen cada zona de l'estructura són convergents, però l'anàlisi global pot convergir a una solució incorrecta (fenòmen de la convergència relativa) [109-110]. A més a més l'utilització de tècniques analítiques queda restringida a uns pocs problemes, essent la de l'adaptació modal molt més versàtil.

Inicialment es va implementar el mètode de la matriu S generalitzada per a l'anàlisi de l'estructura de la figura 2.4.4 considerant els elements de la matriu calculats amb una tècnica de càlcul de residus [13] obtenint-se resultats decepcionants. La posterior adopció del mètode d'adaptació modal va millorar molt considerablement els resultats.

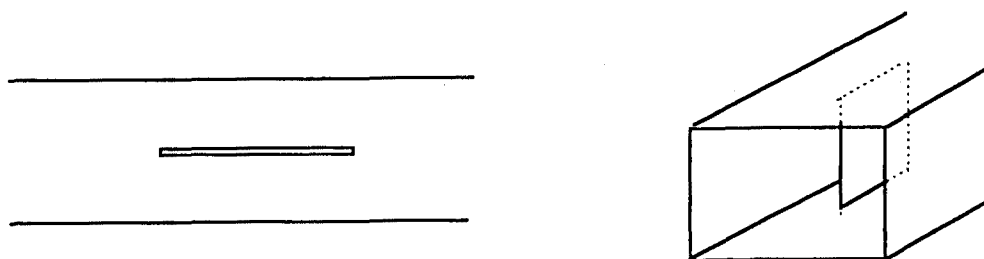


Fig 2.4.4

El mètode de la matriu S generalitzada és molt útil per analitzar discontinuïtats en cascada com les que apareixen, per exemple, en el filtres constituïts per tires metàl·liques inductives en pla E:

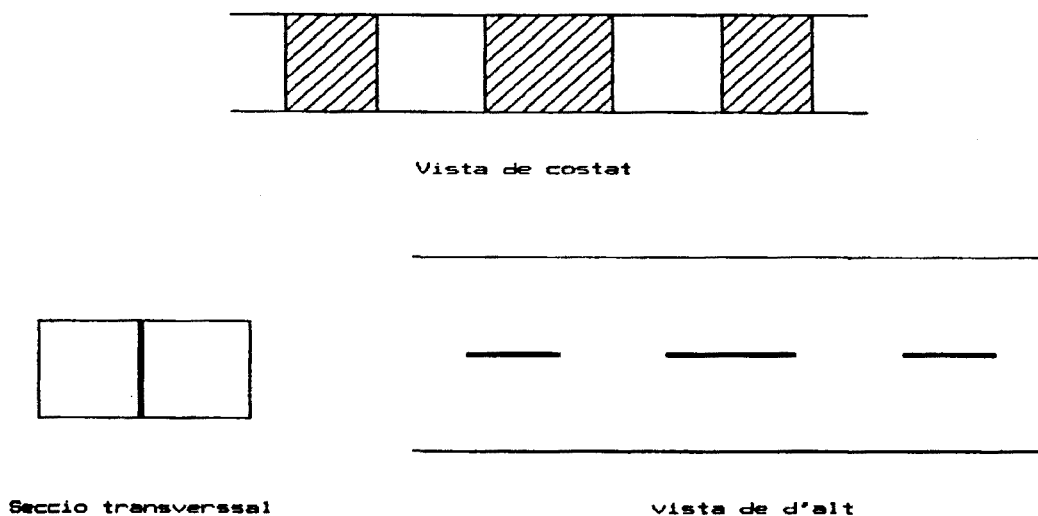


Fig 2.4.5

Si considerem una sola tira metàl·lica, a partir de l'anàlisi del problema de la bifurcació en guia (fig 2.4.1) coneixem les matrius S generalitzades en les unions A i B (fig 2.4.6). Les regions II i III formen guies rectangulars de longitud d . Considerant guies de longitud $d/2$, aquestes es poden caracteritzar per matrius de transmissió $[T_n]$ de dimensió infinita. (Aquestes són matrius diagonals, els elements de les quals són: $T_{n,ii} = e^{-\gamma_n d/2}$ amb γ_n , la constant de propagació del mode i -èsim en la regió n). Les matrius S generalitzades de les discontinuïtats i les matrius de transmissió es poden combinar i obtenir la matriu S generalitzada total de la tira metàl·lica:

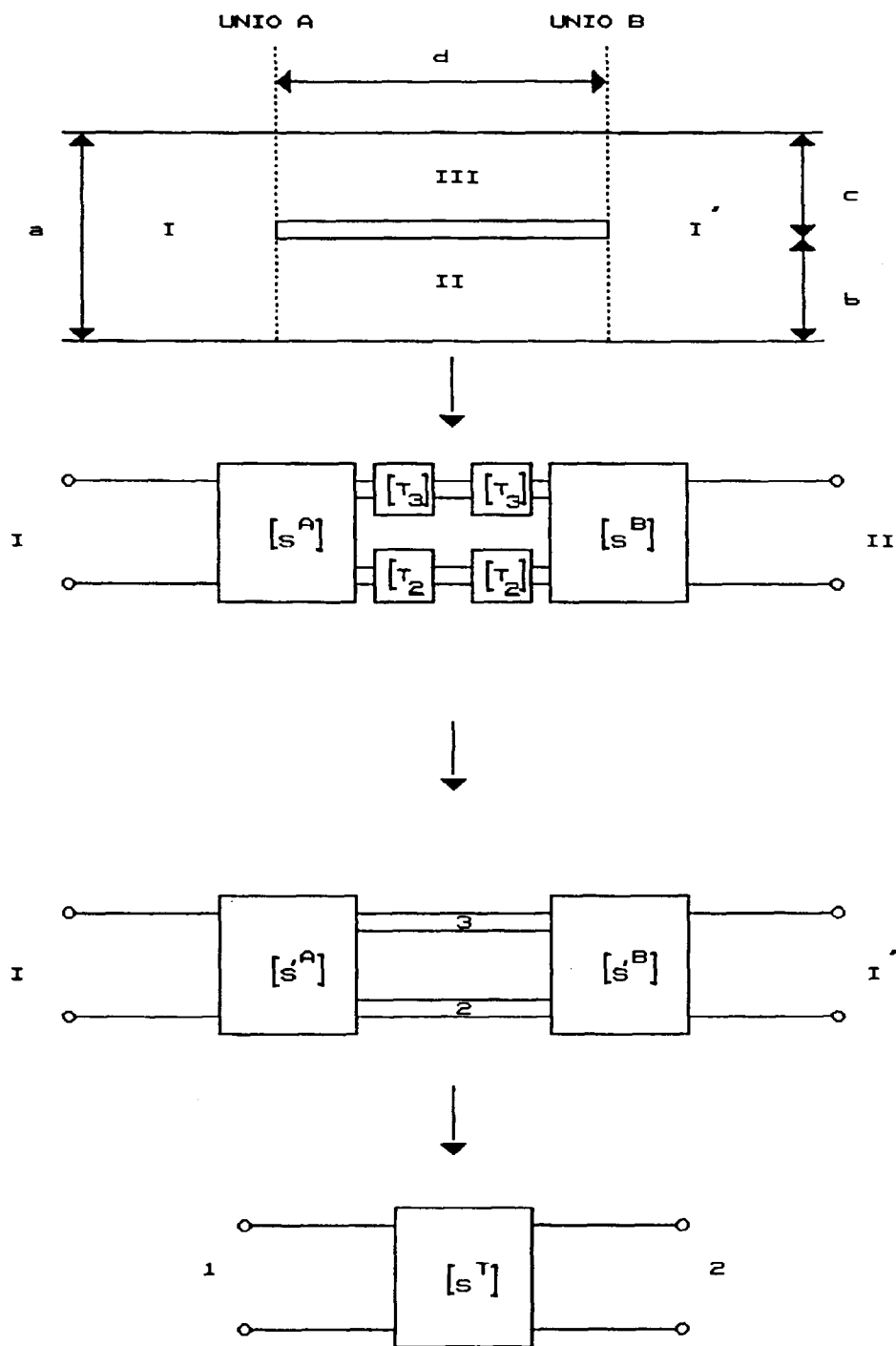


Fig 2.4.6

Fent servir la mateixa tècnica s'obté la matriu S generalitzada de tot el filtre:

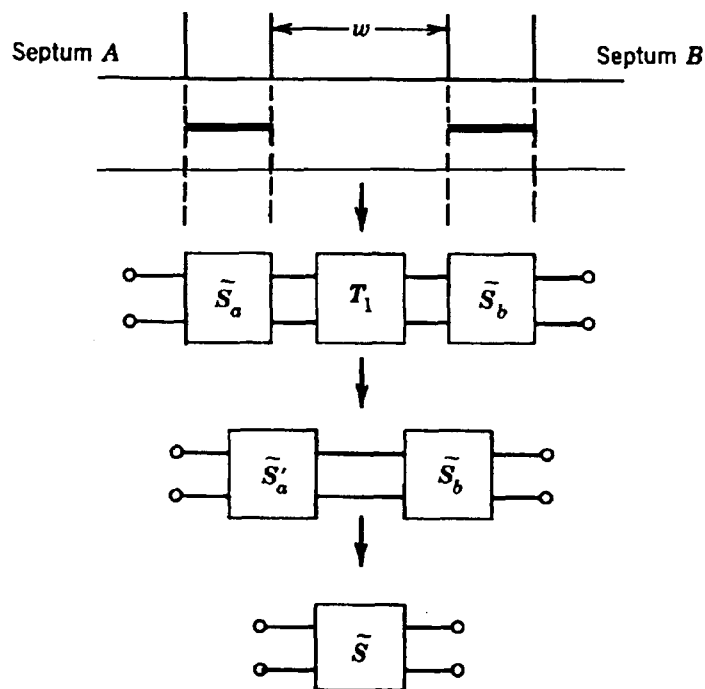


Fig 2.4.7

* Càlcul de la matriu S generalitzada d'una bifurcació en pla E d'una guia rectangular amb el mètode de l'adaptació modal:

Considerem la bifurcació de la figura en que es representa vista des de dalt:

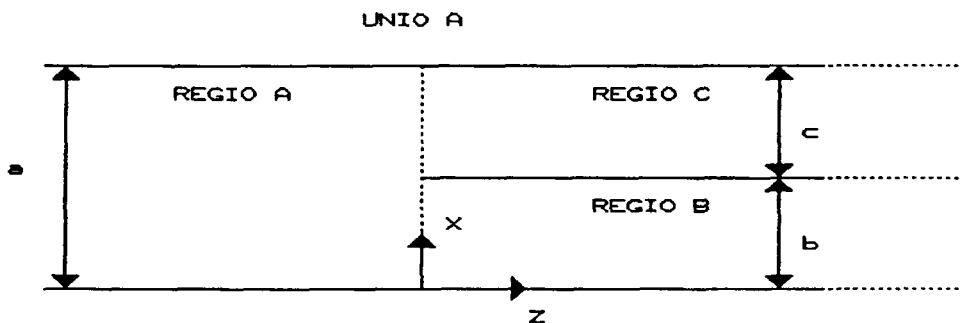


Fig 2.4.8

Cada regió constitueix una guia rectangular, per a les quals podem expressar els camps en la forma d'expansions modals. Considerem que en la guia corresponent a la regió A s'ha excitat el mode fonamental TE_{10} . Amb aquesta excitació i donada la geometria del problema, els únics modes possibles a les diferents regions són del tipus TE_{n0} . Si bé el nombre de modes en cada zona és infinit, per a l'evaluació numèrica hem de considerar un nombre finit de modes. Així les components tangencials del camp elèctric i magnètic en les diferents zones és:

Per a la regió A ($z < 0$) considerant M modes:

$$E_y = \sum_{n=1}^M [A_n^+ \phi_{an}(x) e^{-\gamma_{an}z} + A_n^- \phi_{an}(x) e^{\gamma_{an}z}] \quad (2.4.2)$$

$$H_x = \sum_{n=1}^M [A_n^+ Y_{an} \phi_{an}(x) e^{-\gamma_{an}z} - A_n^- Y_{an} \phi_{an}(x) e^{\gamma_{an}z}] \quad (2.4.3)$$

Per a la regió B ($z > 0, 0 < x < b$) considerant K modes:

$$E_y = \sum_{n=1}^K [B_n^+ \phi_{bn}(x) e^{-\gamma_{bn}z} + B_n^- \phi_{bn}(x) e^{\gamma_{bn}z}] \quad (2.4.4)$$

$$H_x = \sum_{n=1}^K [B_n^+ Y_{bn} \phi_{bn}(x) e^{-\gamma_{bn}z} - B_n^- Y_{bn} \phi_{bn}(x) e^{\gamma_{bn}z}] \quad (2.4.5)$$

Per a la regió C ($z > 0, b < x < a$) considerant L modes:

$$E_y = \sum_{n=1}^L [C_n^+ \phi_{cn}(x) e^{-\gamma_{cn}z} + C_n^- \phi_{cn}(x) e^{\gamma_{cn}z}] \quad (2.4.6)$$

$$H_x = \sum_{n=1}^L [C_n^+ Y_{cn} \phi_{cn}(x) e^{-\gamma_{cn}z} - C_n^- Y_{cn} \phi_{cn}(x) e^{\gamma_{cn}z}] \quad (2.4.7)$$

Φ_{an} , Φ_{bn} i Φ_{cn} són les funcions modals per a les regions A, B i C respectivament; γ_{an} , γ_{bn} i γ_{cn} les constants de propagació dels modes en les respectives regions; Y_{an} , Y_{bn} i Y_{cn} les admitàncies d'ona per a cada mode de la regió respectiva:

$$\phi_{qn} = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin[K_{qn} x] \quad (2.4.8)$$

$$\gamma_{qn} = \sqrt{K_n^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0} \quad \text{amb } q = a, b, c \quad (2.4.9)$$

$$K_{qn} = \frac{n\pi}{q} \quad (2.4.10)$$

$$Y_{qn} = \frac{\gamma_{qn}}{j\omega\mu_0} \quad (2.4.11)$$

ϵ_0 i μ_0 són, respectivament, la permitivitat i la permeabilitat del buit.

Els coeficients $A_n^{(\cdot)}$, $B_n^{(\cdot)}$ i $C_n^{(\cdot)}$ que ens donen les amplituds dels modes s'han de determinar. Per això fem servir la propietat d'ortonormalitat de les funcions modals:

$$\int \phi_{im}(x) \phi_{in}(x) dx = \delta_{mn} \quad i=a, b, c \quad (2.4.12)$$

on δ_{mn} és la delta de Kronecker (val 1 si $m=n$ i 0 en cas contrari).

Aplicant la condició de continuïtat de les components tangencials de camp elèctric en $z=0$ s'obté:

per $0 < x < b$:

$$\sum_{n=1}^M (A_n^+ + A_n^-) \phi_{an}(x) = \sum_{n=1}^K (B_n^+ + B_n^-) \phi_{bn}(x) \quad (2.4.13)$$

per $b < x < a$:

$$\sum_{n=1}^M (A_n^+ + A_n^-) \phi_{an}(x) = \sum_{n=1}^L (C_n^+ + C_n^-) \phi_{cn}(x) \quad (2.4.14)$$

analogament per al camp magnètic:

per $0 < x < b$:

$$\sum_{n=1}^M (A_n^+ - A_n^-) Y_{an} \phi_{an}(x) = \sum_{n=1}^K (B_n^+ - B_n^-) Y_{bn} \phi_{bn}(x) \quad (2.4.15)$$

per $b < x < a$:

$$\sum_{n=1}^M (A_n^+ - A_n^-) Y_{an} \phi_{an}(x) = \sum_{n=1}^L (C_n^+ - C_n^-) Y_{cn} \phi_{cn}(x) \quad (2.4.16)$$

Multiplicant ambdós costats de les equacions 2.4.13 - 2.4.16 per $\phi_{am}(x)$ i integrant respecte a x des de 0 fins a a , tenint en compte la propietat d'ortonormalitat de les funcions modals, s'obté:

$$A_m^+ + A_m^- = \sum_{n=1}^K H_{mn} (B_n^+ + B_n^-) + \sum_{n=1}^L \bar{H}_{mn} (C_n^+ + C_n^-) \quad (2.4.17)$$

$$Y_{am} (A_m^+ - A_m^-) = \sum_{n=1}^K Y_{bn} H_{mn} (B_n^+ - B_n^-) + \sum_{n=1}^L Y_{cn} \bar{H}_{mn} (C_n^+ - C_n^-) \quad (2.4.18)$$

$$m=1, 2, \dots, M$$

en què:

$$H_{mn} = \int_0^b \phi_{am}(x) \phi_{bn}(x) dx \quad \bar{H}_{mn} = \int_b^a \phi_{am}(x) \phi_{cn}(x) dx \quad (2.4.19)$$

Multiplicant les mateixes equacions per $\phi_{bm}(x)$ i integrant entre 0 i b :

$$\sum_{n=1}^M H_{nm} (A_n^+ + A_n^-) B_m^+ + B_m^- \quad (2.4.20)$$

$$\sum_{n=1}^M H_{nm} Y_{an} (A_n^+ - A_n^-) = Y_{bm} (B_m^+ - B_m^-) \quad (2.4.21)$$

$$m=1, 2, \dots, K$$

Multiplicant per $\phi_{cm}(x)$ i integrant entre b i a:

$$\sum_{n=1}^M \bar{H}_{nm} (A_n^+ + A_n^-) = C_m^+ + C_m^- \quad (2.4.22)$$

$$\sum_{n=1}^M \bar{H}_{nm} Y_{an} (A_n^+ - A_n^-) = Y_{cm} (C_m^+ - C_m^-) \quad (2.4.23)$$

$$m=1, 2, \dots, L$$

Les equacions anteriors les podem posar en forma matricial:

$$\bar{a}^+ + \bar{a}^- = [H] (\bar{b}^+ + \bar{b}^-) + [\bar{H}] (\bar{c}^+ + \bar{c}^-) \quad (2.4.24)$$

$$\bar{a}^+ - \bar{a}^- = [Z_a] [H] [Y_b] (\bar{b}^+ - \bar{b}^-) + [Z_a] [\bar{H}] [Y_c] (\bar{c}^+ - \bar{c}^-) \quad (2.4.25)$$

$$[H]' (\bar{a}^+ + \bar{a}^-) = \bar{b}^+ + \bar{b}^- \quad (2.4.26)$$

$$[Z_b] [H]' (\bar{a}^+ - \bar{a}^-) = \bar{b}^+ - \bar{b}^- \quad (2.4.27)$$

$$[\bar{H}]' (\bar{a}^+ + \bar{a}^-) = \bar{c}^+ + \bar{c}^- \quad (2.4.28)$$

$$[Z_c] [\bar{H}]' (\bar{a}^+ - \bar{a}^-) = \bar{c}^+ - \bar{c}^- \quad (2.4.29)$$

en què:

$$\bar{a}^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ \\ A_2^+ \\ \vdots \\ A_M^+ \end{bmatrix} \quad \bar{a}^- = \begin{bmatrix} A_1^- \\ A_2^- \\ \vdots \\ A_M^- \end{bmatrix} \quad \bar{b}^+ = \begin{bmatrix} B_1^+ \\ B_2^+ \\ \vdots \\ B_K^+ \end{bmatrix} \quad \bar{b}^- = \begin{bmatrix} B_1^- \\ B_2^- \\ \vdots \\ B_K^- \end{bmatrix} \quad \bar{c}^+ = \begin{bmatrix} C_1^+ \\ C_2^+ \\ \vdots \\ C_L^+ \end{bmatrix} \quad \bar{c}^- = \begin{bmatrix} C_1^- \\ C_2^- \\ \vdots \\ C_L^- \end{bmatrix} \quad (2.4.30)$$

són els vectors que engloben les amplituds modals. $[H]$ és una matriu de dimensió $M \times K$ i $[\bar{H}]$ una matriu de dimensió $M \times L$. Contenen els productes escalars realitzats amb les funcions modals. Els seus elements venen donats per:

$$H_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{(-1)^n K_{am} \sin(K_{am}b)}{(K_{am}^2 - K_{bn}^2)} \quad \bar{H}_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ac}} \frac{(-1)^n K_{am} \sin(K_{am}b)}{(K_{am}^2 - K_{cn}^2)} \quad (2.4.31)$$

Les matrius $[Z_q]$ són matrius diagonals que contenen les impedàncies d'ona de cada mode en la regió q : $[Z_q] = [Y_q]^{-1}$

Amb les expressions anteriors podem calcular la matriu S generalitzada:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}^- \\ \bar{b}^+ \\ \bar{c}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & [S_{13}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & [S_{23}] \\ [S_{31}] & [S_{32}] & [S_{33}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}^+ \\ \bar{b}^- \\ \bar{c}^- \end{bmatrix} \quad (2.4.32)$$

En teoria, considerant un nombre infinit de modes en cada regió, les expressions obtingudes per al càlcul de $[S_{ij}]$ són independents de les pertinents manipulacions algebraiques realitzades sobre les equacions 2.4.25 - 2.4.29. Però al considerar un nombre finit de modes en cada regió, les expressions per al càlcul de $[S_{ij}]$ depenen de l'ordre i la natura de les manipulacions algebraiques realitzades sobre les equacions 2.4.25 - 2.4.29. És més, el considerar un nombre finit de modes origina que certes matrius de les equacions 2.4.25 - 2.4.29, en principi no siguin quadrades, amb el conseqüent problema a l'hora d'invertir-les.

Fixant la relació $M=K+L$ en què M és el nombre de modes a la regió A, K el nombre de modes a la regió B i L el nombre de modes a la regió C, s'obtenen matrius quadrades invertibles i es poden calcular les submatrius $[S_{ij}]$ de vuit maneres diferents [107]. Segons quina formulació es faci servir, la convergència serà més o menys ràpida i es pot donar el fenomen de convergència relativa (convergència cap a solucions incorrectes).

Considerem ara el cas d'una bifurcació en pla E de guies rectangulars però tenint en compte el gruix de la paret que separa les guies bifurcades: (això ens servirà per poder considerar el gruix de les tires metàl·liques inductives que formen els filtres en pla E de la figura 2.4.5)

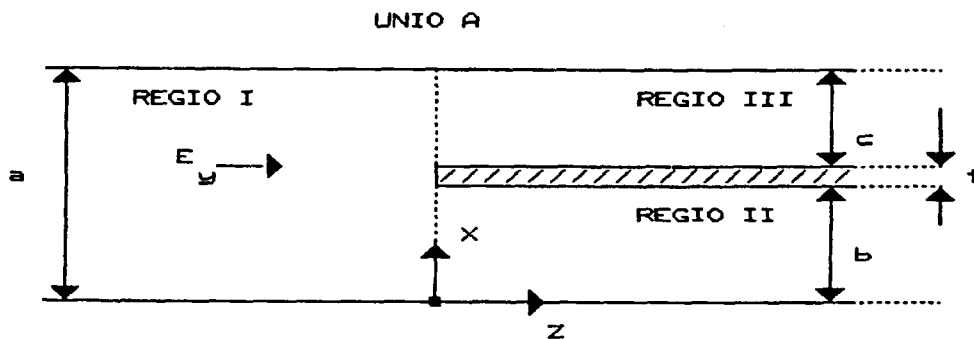


Fig 2.4.9

per analitzar aquest problema farem servir l'estructura auxiliar següent:

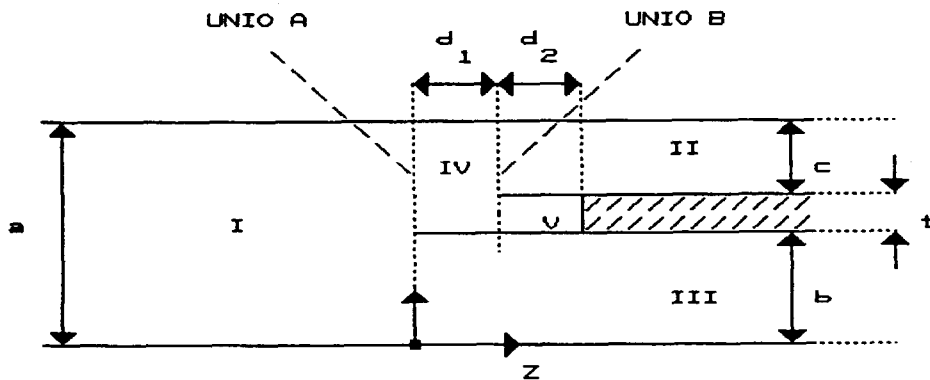


Fig 2.4.10

En aquesta estructura tenim dues bifurcacions (unió A unió B) en $z=0$ i en $z=d_1$ que ja hem estudiat. L'estructura auxiliar coincidirà amb la que volem analitzar quan $d_1 \rightarrow 0$ i $d_2 \rightarrow 0$. En la figura següent s'esquematitza el procés per a obtenir la matriu S generalitzada total de l'estructura auxiliar:

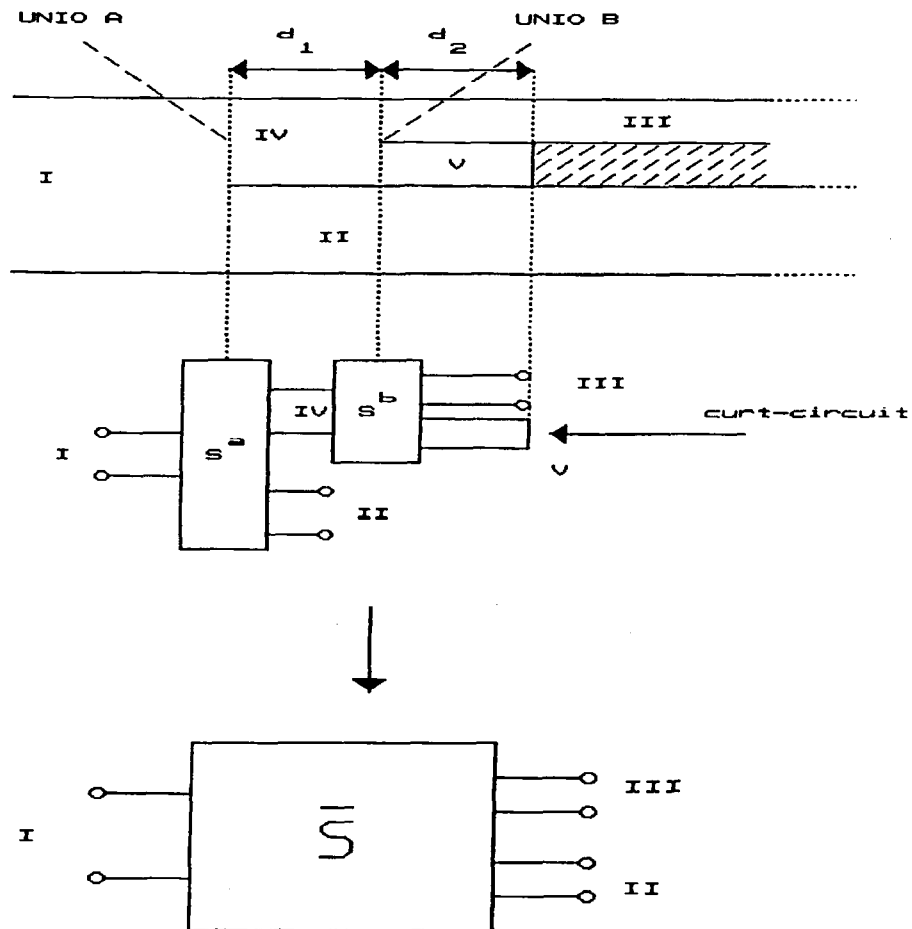


Fig 2.4.11

Considerem els següents vectors d'amplituts modals:

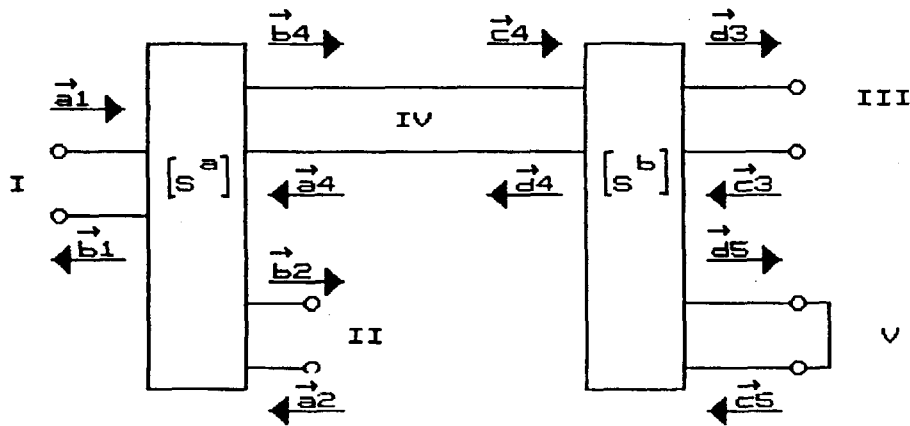


Fig 2.4.12

les submatrius $[S_{ij}]$ de la matriu S generalitzada ens relacionen els vectors d'amplituts modals:

$$\begin{aligned}
 \vec{b}_1 &= [s_{11}^a] \vec{a}_1 + [s_{12}^a] \vec{a}_2 + [s_{14}^a] \vec{a}_4 \\
 \vec{b}_2 &= [s_{21}^a] \vec{a}_1 + [s_{22}^a] \vec{a}_2 + [s_{24}^a] \vec{a}_4 \\
 \vec{b}_4 &= [s_{41}^a] \vec{a}_1 + [s_{42}^a] \vec{a}_2 + [s_{44}^a] \vec{a}_4 \\
 \vec{d}_3 &= [s_{33}^b] \vec{c}_3 + [s_{34}^b] \vec{c}_4 + [s_{35}^b] \vec{c}_5 \\
 \vec{d}_4 &= [s_{43}^b] \vec{c}_3 + [s_{44}^b] \vec{c}_4 + [s_{45}^b] \vec{c}_5 \\
 \vec{d}_5 &= [s_{53}^b] \vec{c}_3 + [s_{54}^b] \vec{c}_4 + [s_{55}^b] \vec{c}_5
 \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

Si $d_1 \rightarrow 0$ podem establir la següent relació:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_4 &= \vec{d}_4 \\
 \vec{b}_4 &= \vec{c}_4
 \end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Si $d_2 \rightarrow 0$:

$$\vec{c}_3 = -\vec{d}_5 \tag{2.4.33}$$

La matriu S generalitzada total de la bifurcació amb guaix s'obté de:

$$\begin{aligned}
 \vec{b}_1 &= [S_{11}] \vec{a}_1 + [S_{12}] \vec{a}_2 + [S_{13}] \vec{c}_3 \\
 \vec{b}_2 &= [S_{21}] \vec{a}_1 + [S_{22}] \vec{a}_2 + [S_{23}] \vec{c}_3 \\
 \vec{d}_3 &= [S_{31}] \vec{a}_1 + [S_{32}] \vec{a}_2 + [S_{33}] \vec{c}_3
 \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

Igual que per al càlcul dels paràmetres S convencionals:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= [S_{11}] \vec{a}_1 \Big|_{\substack{\vec{a}_2=0 \\ \vec{c}_3=0}} \\ \vec{d}_3 &= [S_{32}] \vec{a}_2 \Big|_{\substack{\vec{a}_1=0 \\ \vec{c}_3=0}} \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

etc.

substituint aquestes expressions en i operant s'obté les submatrius $[S_{ij}]$ de la matriu S generalitzada total en funció de les submatrius $[S_{ij}^a]$ i $[S_{ij}^b]$ corresponents a les bifurcacions en $z=0$ i $z=d_1$ que són conegudes.

Si la bifurcació està centrada, es poden simplificar els càlculs i disminuir el temps d'execució a l'ordinador considerant la simetria en la forma d'una paret magnètica:

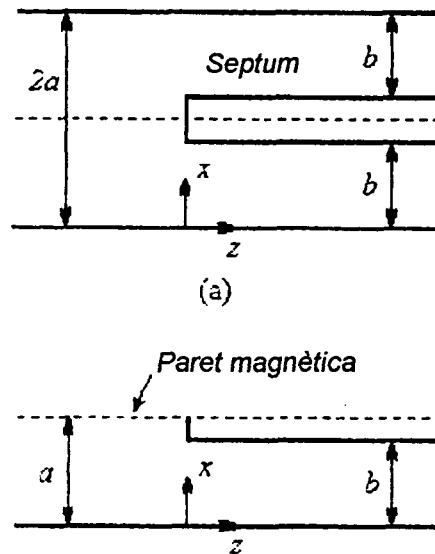


Fig 2.4.13

aquest cas s'estudia amb l'estructura auxiliar de la figura 2.4.14 fent tendir δ a zero:

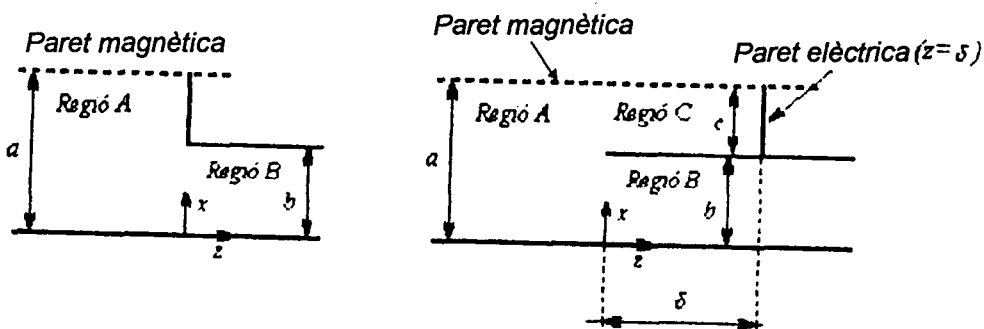


Fig 2.4.14

l'inclusió de la paret magnètica provoca que només es puguin considerar els modes els camps transversals dels qual satisfaguin la condició que imposa la paret (modes d'ordre senar en aquest cas). En aquest problema les funcions modals són:

$$\phi_{an}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}(x-a)\right) \quad \phi_{bn}(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \quad \phi_{cn}(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2c}(x-c)\right)$$

(2.4.36)

* Extensió al cas d'una guia parcialment plena de dielèctric.

Sigui la següent estructura:

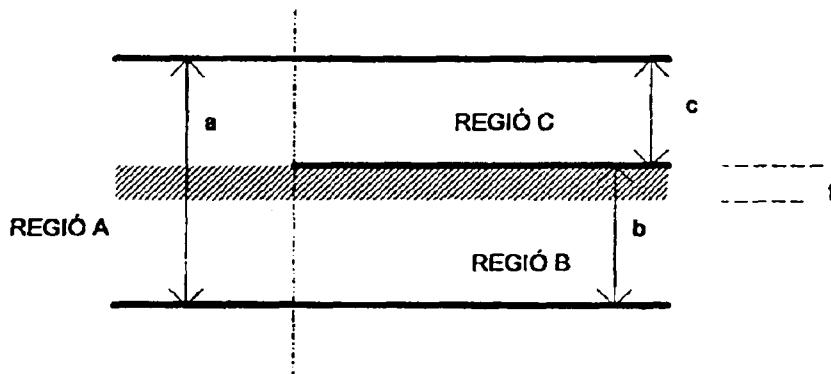


Fig 2.4.15

Aquesta estructura la podríem analitzar aplicant el mètode d'adaptació modal a les diferents regions homogènies de que consta, però ho hem fet amb un procediment que suposa menys càlculs numèrics: l'analitzarem considerant que en la regió A tenim una guia rectangular inhomogènia amb el dielèctric centrat; en la regió B una guia rectangular inhomogènia amb el dielèctric a un costat i en la regió C una guia rectangular homogènia.

Per a una estructura simètrica com la de la figura:

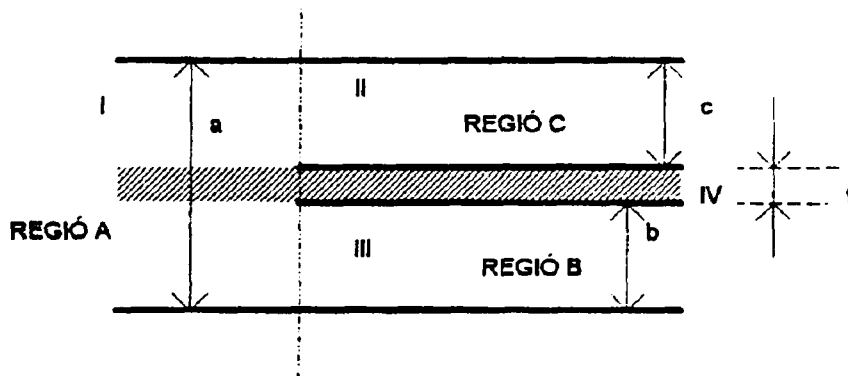


Fig 2.4.16

tenint en compte la simetria, situem una paret magnètica centrada i dirigida segons z i analitzem l'estructura equivalent següent:

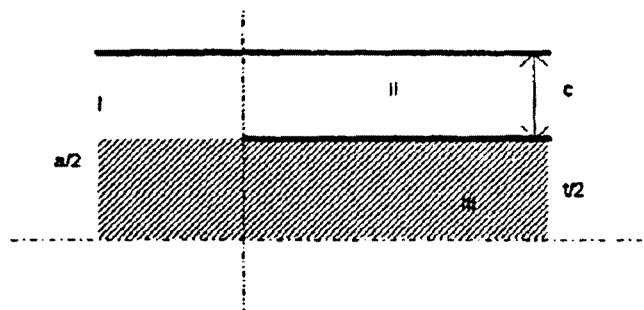


Fig 2.4.17

En la regió I tenim una guia d'ones inhomogènia amb el dielèctric a un costat; en les regions II i III tenim guies d'ona homogènies. El fet de tenir parets magnètiques suposarà considerar només els modes per als que les components tangencials dels camps compleixen la condició de paret magnètica imposada.

En totes les estructures anteriors tenim guies parcialment plenes de dielèctric. Es poden analitzar considerant modes híbrids o millor per la tècnica de la ressonància transversal convencional [111].

Per a una guia amb el dielèctric a un costat:

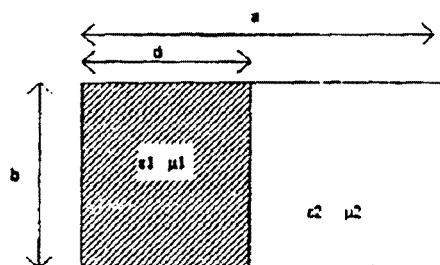


Fig 2.4.18

segons R.F. Harrington [112] es verifica les següents relacions de separació:

$$\begin{aligned} k_{x1}^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2 &= k_1^2 = \omega^2 \cdot \epsilon_1 \cdot \mu_1 \\ k_{x2}^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2 &= k_2^2 = \omega^2 \cdot \epsilon_2 \cdot \mu_2 \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

en què \$k_{xi}\$ són els números d'ona o constants de fase en la direcció x per a la regió i; \$k_z\$ és el número d'ona o constant de propagació segons la direcció z i és el que ens interessa.

Per a la freqüència de tall del mode fonamental es compleix:

$$\begin{aligned} k_{x1}^2 &= k_{1c}^2 = \omega_c^2 \epsilon_1 \mu_1 \\ k_{x2}^2 &= k_{2c}^2 = \omega_c^2 \epsilon_2 \mu_2 \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

\$k_{x1}\$ i \$k_{x2}\$ estan relacionats per la següent relació transcendental [112]:

$$\frac{k_{x1}}{\mu_1} \cot(k_{x1} \cdot d) = -\frac{k_{x2}}{\mu_2} \cot[k_{x2}(a-d)] \quad (2.4.39)$$

que, tenint en compte les relacions podem posar com:

$$\frac{1}{\eta_1} \cot(k_{1c} \cdot d) = -\frac{1}{\eta_2} \cot(k_{1c} \cdot (a-d)) \quad (2.4.40)$$

k_{1c} tindrà un valor comprès entre el d'una guia homogènia plena d'un material amb ϵ_1 i μ_1 i el corresponent a la mateixa guia plena d'un material amb ϵ_2 i μ_2 (en el nostre cas, estarà comprès entre el corresponent al d'una guia buida i la d'una completament plena de dielèctric). Això ens serveix per acotar les possibles solucions i donar un bon valor de partida a la subrutina de càlcul de zeros utilitzada per a l'avaluació de l'equació 2.4.40. Un cop calculat k_{1c} , amb les expressions 2.4.38 es troba k_{x1} i k_{x2} i, amb l'equació 2.4.37 obtenim k_z .

El cas de dielèctric centrat:

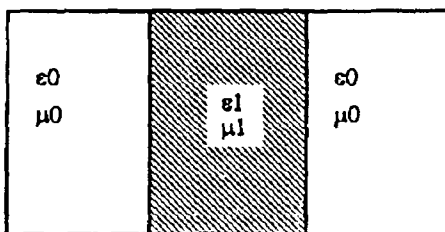


Fig 2.4.19

es diferencia de l'anterior únicament en l'expressió que relaciona k_{x1} i k_{x2} . En lloc de fer servir l'expressió 2.4.40 hem de fer servir la següent [113]:

$$\frac{k_{x0}}{\mu_0} \cot\left(k_{x0} \cdot \left(\frac{a-d}{2}\right)\right) = \frac{k_{x1}}{\mu_1} \tan\left[k_{x1} \left(\frac{d}{2}\right)\right] \quad (2.4.41)$$

Per acabar el problema hem de calcular els productes escalars 2.4.19. Podem trobar una solució aproximada en el cas que el gruix del dielèctric i la seva permitivitat són petites: assumint que la distribució de camps no serà molt diferent del cas d'absència de dielèctric (mètode perturbacional) i fent servir les expressions 2.4.31 obtingudes per al cas d'absència de dielèctric, o bé a partir de les expressions dels camps per als modes híbrids [112] calculem els productes escalars necessaris. Si ho fem així s'obté:

$$H_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot k_{ax0m} \cdot \sin(k_{ax0m} \cdot (b-t))}{(k_{ax0m}^2 - k_{bx0m}^2)} + \sqrt{\frac{2}{ab}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot k_{ax1m} \cdot \sin(k_{ax1m} \cdot (t))}{(k_{ax1m}^2 - k_{bx1m}^2)}$$

$$\bar{H}_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ac}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot k_{ax0m} \cdot \sin(k_{ax0m} \cdot (a-b))}{(k_{ax0m}^2 - k_{cxm}^2)} \quad (2.4.42)$$

per al cas de la figura 2.4.15 i:

$$H_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot k_{ax0m} \cdot \sin(k_{ax0m} \cdot (b))}{(k_{ax0m}^2 - k_{bxm}^2)} \quad \bar{H}_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ac}} \cdot \frac{(-1)^n \cdot k_{ax0m} \cdot \sin(k_{ax0m} \cdot (a-b))}{(k_{ax0m}^2 - k_{cxm}^2)} \quad (2.4.43)$$

per al cas de la figura 2.4.17.

2.4.2 Resultats i comentari

En els següents gràfics es mostra el comportament numèric de cada formulació [107] utilitzada per al càlcul dels elements de la matriu S generalitzada per a una bifurcació en guia (fig 2.4.8) en funció de M (dimensió de la matriu dels modes en la regió A) i de la relació entre el nombre de modes considerat en les regions B i C (K i L). Es compleix que $M=K+L$. Es donen per diferents relacions b/c (fig 2.4.8). El paràmetre considerat per a efectuar la comparació és el $S_{11}(1,1)$, que és l'amplitud complexa del primer mode en la regió A generat a la discontinuïtat, quan sobre ella incideix el mode d'amplitud unitària TE_{10} provinent de la regió A.

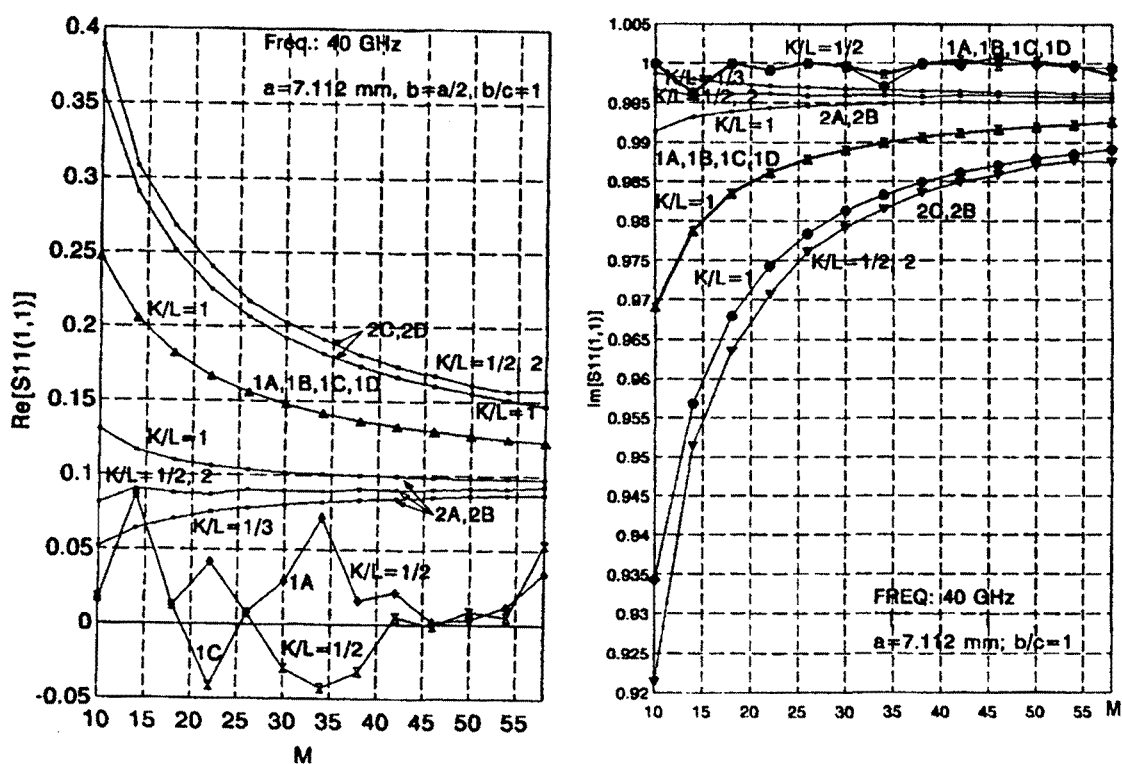


Fig 2.4.20

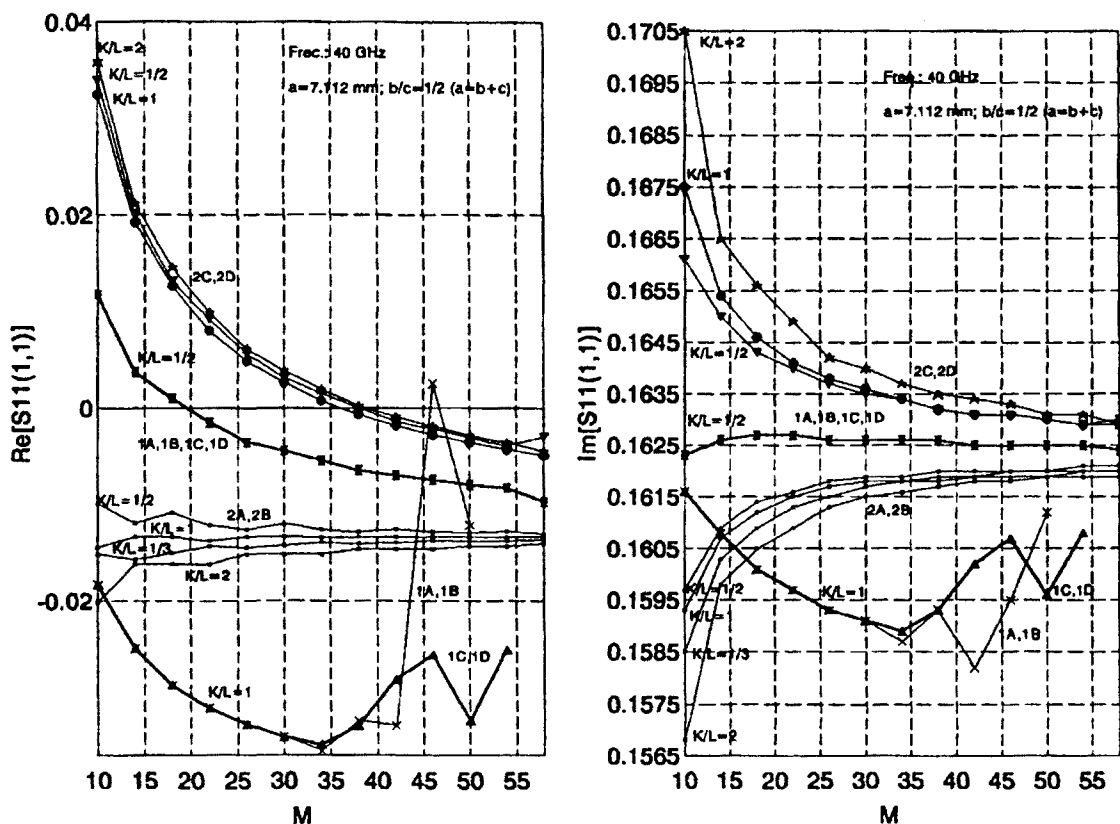


Fig 2.4.21

Es pot observar que el comportament numèric de les formulacions 1A, 1B, 1C i 1D per a una certa relació entre b i c , depèn en gran mesura de la relació existent entre K i L , de forma que aquestes formulacions convergeixen cap a la solució quan es compleix la relació $K/L=b/c$. Es pot comprovar també que aquestes quatre formulacions són numèricament equivalents quan es compleix la relació $K/L=b/c$.

Amb les formulacions 2A, 2B, 2C i 2D s'observa convergència cap a la solució amb qualsevol relació entre K/L i b/c , encara que segons quina sigui aquesta relació el comportament numèric no és el mateix. Es pot observar també que la formulació 2A dona els mateixos resultats que la 2B i que la formulació 2C dona els mateixos resultats que la formulació 2D. Com s'ha comentat anteriorment, encara que convergeixen no presenten el mateix comportament, doncs segons quina sigui la relació entre K/L i b/c la "velocitat" de convergència és notablement diferent. En aquest aspecte les formulacions 2A i 2B són les que més ràpidament convergeixen per a qualsevol relació b/c i són les que s'han implementat.

En les següents gràfiques es presenten els elements de la primera columna de la submatriu $[S_{11}]$: $S_{11}(i,1)$ que representa les amplituds dels modes TE_{n0} creats a la discontinuïtat i reflectits cap a la regió A quan des d'aquesta incideix el mode TE_{10} amb amplitud unitària. (Noti's l'absència de modes parells degut a la simetria del problema). ($b/c=1$, $f=32$ GHz, guia WR-28, absència de dielèctric).

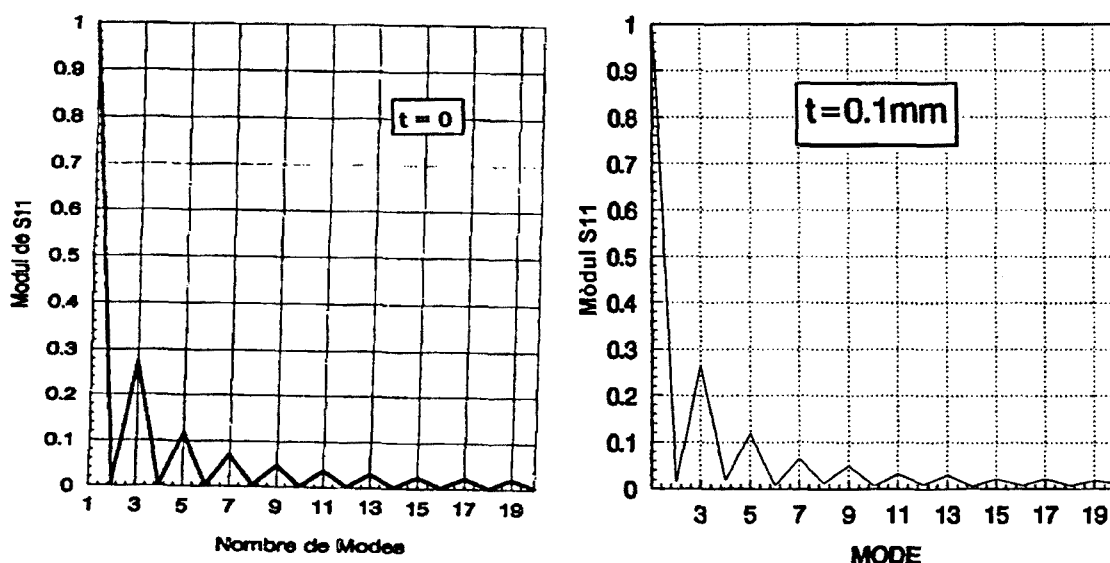


Fig 2.4.22

Per a més de 40 modes les amplituds d'aquests són normalment despreciables. Això ens dona una pauta per a limitar el tamany de les submatrius que formen la matriu S generalitzada de la discontinuïtat.

En les taules següents es presenten els resultats obtinguts de l'anàlisi d'algunes tires metàl·liques inductives en pla E dins de guia d'ones calculades amb el mètode de la matriu S generalitzada comparades amb els resultats experimentals (fig 2.4.4). (Les mesures es van realitzar amb un analitzador de xarxes vectorial HP8408 amb calibració OSL en guia d'ones) [20]

STRIP 2.65mm NR-90 t=0.2mm			STRIP 2.65mm NR-90 t=0.2mm (cont.)		
FREQÜÈNCIA (GHz)	PERDUES DE RETORN (dB)		FREQÜÈNCIA (GHz)	PERDUES DE RETORN (dB)	
	TEORIC	MESURA		TEORIC	MESURA
10	1.99556	1.8	11.5	3.12207	3.0
10.05	2.03043	1.8	11.55	3.16264	3.1
10.1	2.06548	2.0	11.6	3.20343	3.1
10.15	2.10071	1.8	11.65	3.24442	3.0
10.2	2.13612	1.8	11.7	3.28563	3.1
10.25	2.1717	1.9	11.75	3.32704	3.2
10.3	2.20747	2.0	11.8	3.36868	3.3
10.35	2.24341	2.2	11.85	3.41053	3.4
10.4	2.27954	2.1	11.9	3.45261	3.3
10.45	2.31584	2.0	11.95	3.4949	3.4
10.5	2.35233	2.1	12	3.53742	3.4
10.55	2.38901	2.1	12.05	3.58017	3.5
10.6	2.42587	2.3	12.1	3.62314	3.5
10.65	2.46291	2.3	12.15	3.66634	3.5
10.7	2.50014	2.3	12.2	3.70978	3.6
10.75	2.53756	2.2	12.25	3.75346	3.6
10.8	2.57517	2.3	12.3	3.79737	3.6
10.85	2.61296	2.4	12.35	3.84153	3.7
10.9	2.65095	2.4	12.4	3.88593	3.7
10.95	2.68913	2.5	12.45	3.93058	3.9
11	2.7275	2.5	12.5	3.97549	3.8
11.05	2.76606	2.6	12.55	4.02066	3.8
11.1	2.80482	2.7	12.6	4.06609	3.9
11.15	2.84378	2.6	12.65	4.11179	4.0
11.2	2.88293	2.7	12.7	4.15778	4.0
11.25	2.92228	2.8	12.75	4.20406	4.0
11.3	2.96183	2.9	12.8	4.25065	4.1
11.35	3.00159	2.9	12.85	4.29757	4.2
11.4	3.04154	2.9	12.9	4.34487	4.2
11.45	3.0817	2.9	12.95	4.39259	4.3

STRIP 1.40mm			STRIP 3.40mm		
WR-75 t=0.2mm			WR-75 t=0.2mm (cont.)		
FREQÜÈNCIA (GHz)	PERDUES DE RETORN (dB)		FREQÜÈNCIA (GHz)	PERDUES DE RETORN (dB)	
	TEORIC	MESURA		TEORIC	MESURA
10	0.458871	0.4	12.5	1.31973	1.3
10.1	0.485728	0.8	12.6	1.36372	1.4
10.2	0.513131	0.5	12.7	1.40857	1.4
10.3	0.54109	0.8	12.8	1.4543	1.4
10.4	0.569616	1.0	12.9	1.50091	1.3
10.5	0.598719	0.7	13	1.54844	1.3
10.6	0.628409	0.9	13.1	1.5969	1.2
10.7	0.658698	0.7	13.2	1.64629	1.2
10.8	0.689596	0.6	13.3	1.69665	1.2
10.9	0.721114	0.5	13.4	1.74799	1.4
11	0.753263	0.4	13.5	1.80032	1.4
11.1	0.786057	0.5	13.6	1.85367	1.5
11.2	0.819505	0.5	13.7	1.90805	1.6
11.3	0.85362	0.7	13.8	1.96349	1.6
11.4	0.888415	0.6	13.9	2.02	1.8
11.5	0.923902	0.7	14	2.07761	1.7
11.6	0.960093	0.9	14.1	2.13634	1.7
11.7	0.997002	0.9	14.2	2.1962	1.6
11.8	1.03464	1.0	14.3	2.25722	1.7
11.9	1.07302	1.0	14.4	2.31943	1.8
12	1.11217	1.1	14.5	2.38285	1.9
12.1	1.15208	1.2	14.6	2.4475	2.0
12.2	1.19278	1.2	14.7	2.5134	2.2
12.3	1.23428	1.2	14.8	2.5806	2.3
12.4	1.27659	1.3	14.9	2.64912	2.4

Taula 2.4.2

Es pot comprovar la bona correspondència entre els resultats calculats i els mesurats.

En la figura següent es presenta el paràmetre $S_{11}(1,1)$ en funció de la freqüència per al cas de bifurcació amb dielèctric (fig 2.4.15) (guia WR-28, guix del dielèctric 0,254 mm)

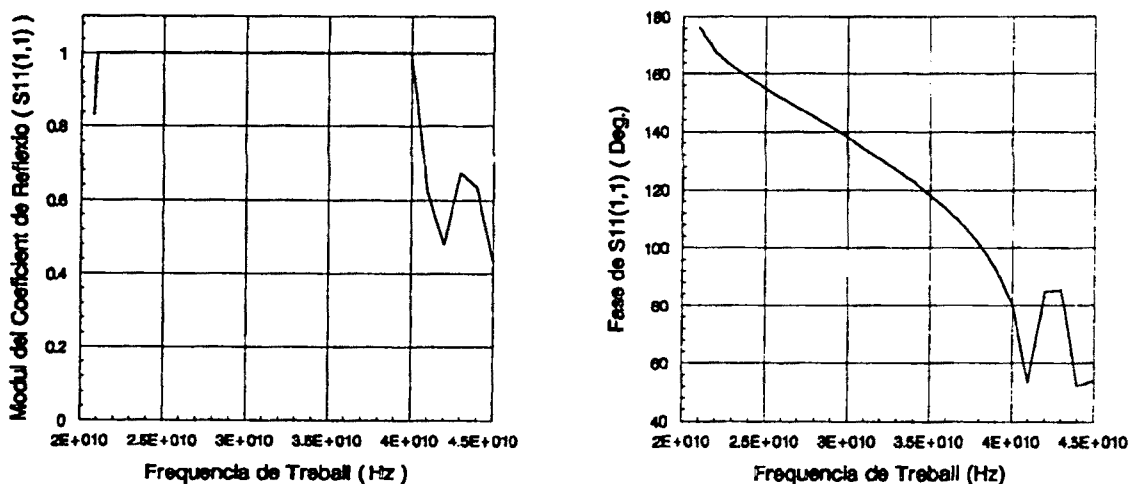


Fig 2.4.23

també per al cas simètric (fig 2.4.16):

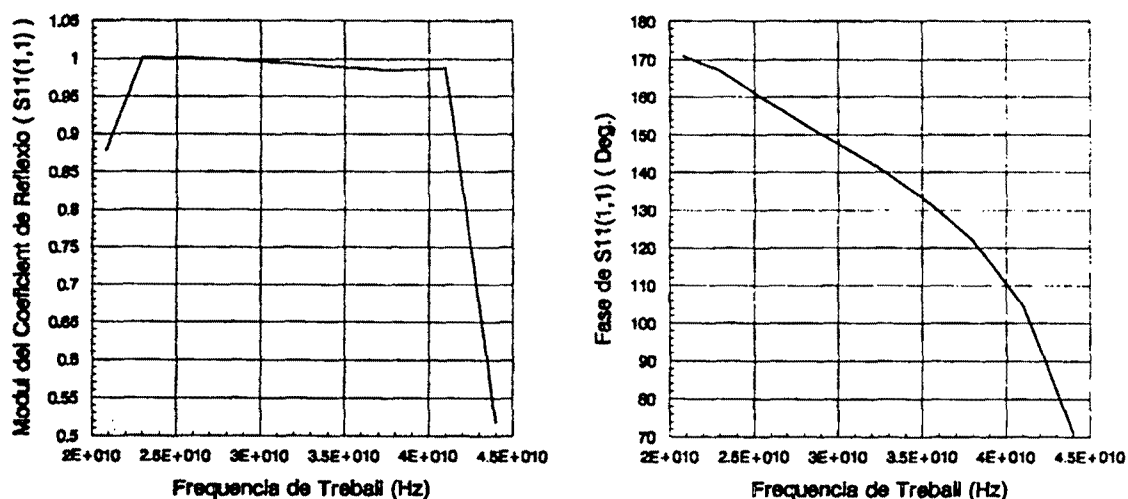


Fig 2.4.24

En aquests casos malhauradament no s'ha pogut contrastar amb dades experimentals.

En la gràfica següent es compara un filtre en pla E format amb quatre tires metàl·liques amb les dades experimentals [20]

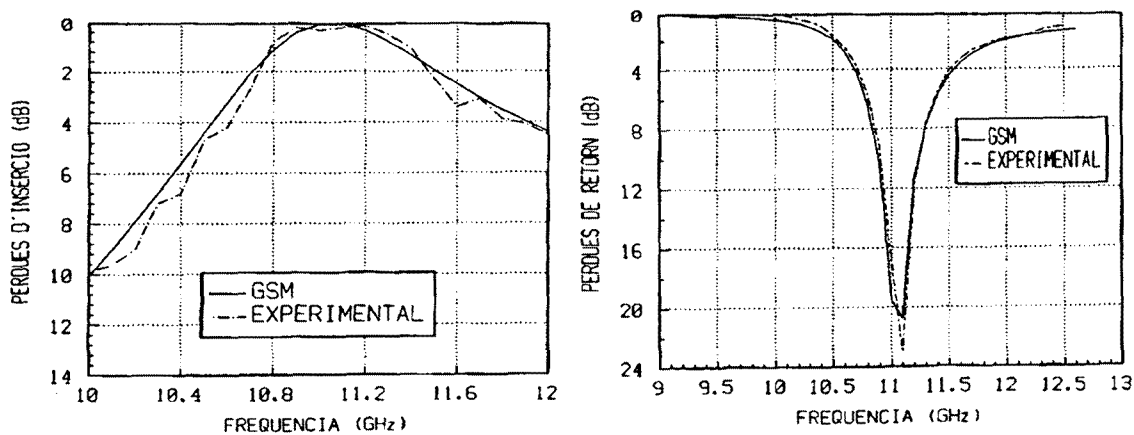


Fig 2.4.25

Es pot comprovar una bona correspondència entre els valors calculats i els mesurats. Ara bé, si fem servir el mateix nombre de modes per a analitzar un filtre més estret, els resultats no són tan bons:

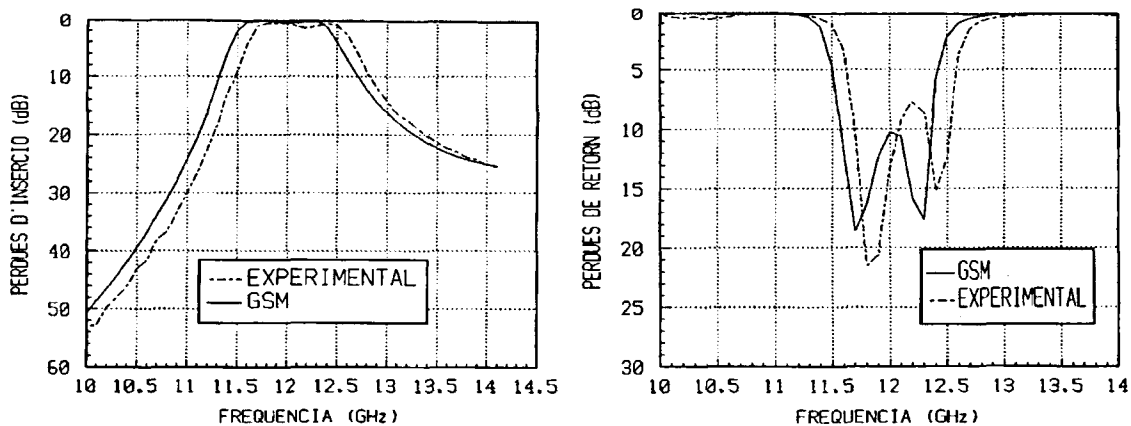


Fig 2.4.26

per aquest cas hem de fer servir un nombre molt més gran de modes per a tenir uns resultats més fiables. Això es pot veure en la gràfica següent, a on s'aprecia que a l'augmentar el nombre de modes considerat el filtre es va desplaçant:

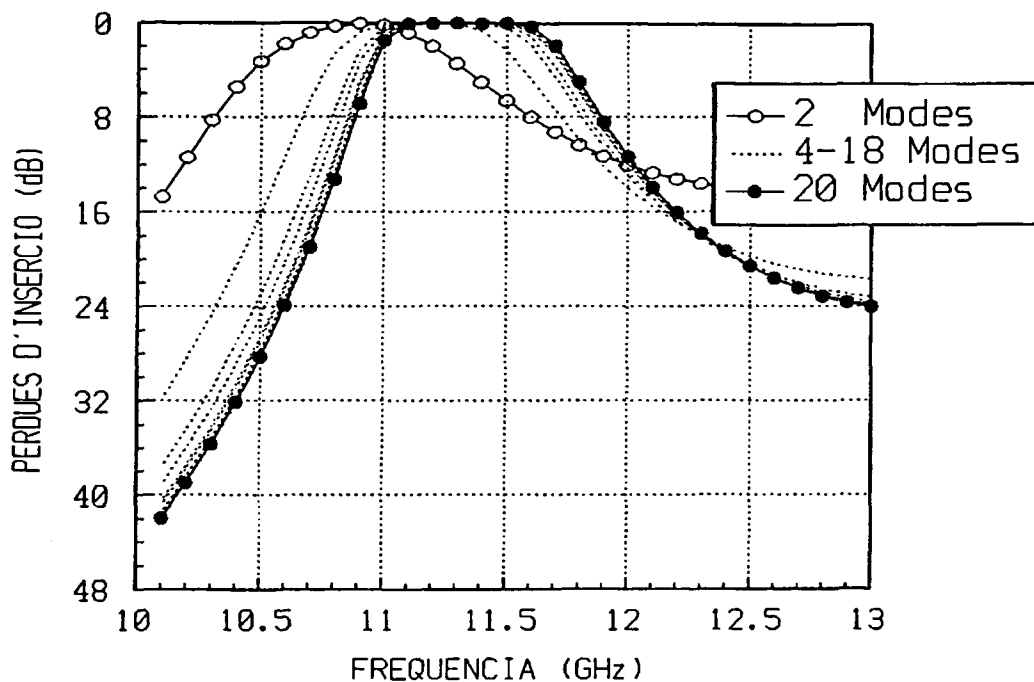


Fig 2.4.27

També s'ha de tenir en compte que al considerar el gruix de les metal·litzacions el nombre i complexitat dels càlculs augmenta, fent necessari en aquest cas treballar amb aritmètica de més precisió i considerar més modes. En la figura següent es mostra que el gruix de les metal·litzacions té un efecte semblant al de l'increment del nombre de modes vist anteriorment:

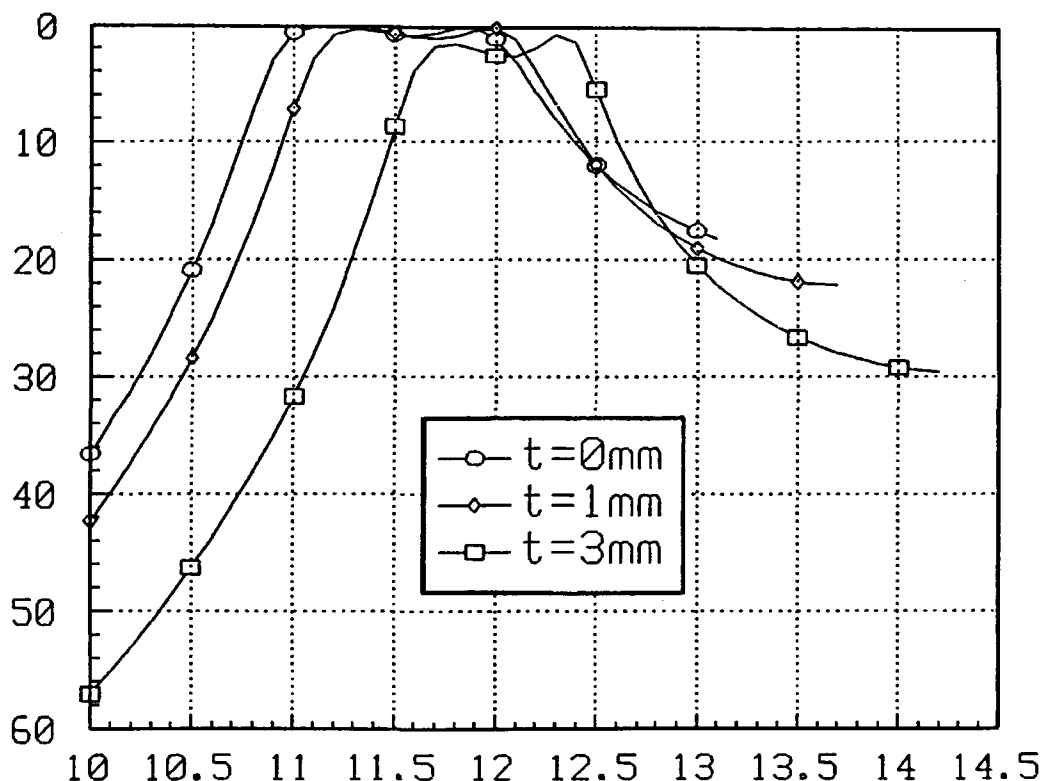


Fig 2.4.28

El temps d'execució depèn fonamentalment del nombre de modes utilitzat: augmenta linealment amb el nombre de modes. El càlcul de la matriu S generalitzada per a una bifurcació, per exemple, és de 5,2 s si es fan servir 20 modes i de 11,0 s si s'en fan servir 40 sobre una workstation HP9000-730. El càlcul d'un filtre és, evidentment molt superior: un filtre amb tres ressonadors i 20 freqüències de càlcul pot suposar uns 7 minuts de CPU en un ordinador VAX 6000-410.

El mètode de la matriu S generalitzada juntament amb el d'adaptació modal és un bon mètode per a l'anàlisi de molts tipus de discontinuitats transversals en guia d'ones, tant des del punt de vista de la qualitat dels resultats obtinguts com de la facilitat d'implementació i temps d'execució. L'inconvenient fonamental és el fenomen de la convergència relativa. Si bé en els casos estudiats i amb les formulacions utilitzades l'esmentat fenomen no es manifesta d'una forma important, en altres casos ens pot proporcionar molts problemes.

2.5. El mètode de la ressonància transversal generalitzat.

2.5.1. Implementació

El mètode de la ressonància transversal generalitzat ("Generalized Transverse Resonance Technique" -GTR-) és una ampliació de la tècnica analítica clàssica de la ressonància transversal [111]. Es fa servir quan l'estructura, en la que l'energia es propaga en el sentit longitudinal, és més fàcil d'analitzar des del punt de vista transversal que longitudinalment.

Provee del desenvolupament de tècniques experimentals per a la caracterització de línies i de discontinuïtats com la de Weissfloch (també anomenada de Feenberg, mètode de la tangent o del desplaçament nodal) [114,115] i de mètodes d'anàlisi aproximats com el de Cohn [116,117], el qual es basa en el mètode de la ressonància transversal clàssic: es situen plans elèctrics o magnètics perpendicularment a l'eix de la guia separats una certa distància, formant així una cavitat ressonant, a l'interior de la qual hi ha la línia o discontinuïtat que volem analitzar. Els plans introduïts formen les parets laterals d'una nova guia en el sentit transversal, la qual es modela amb línies de transmissió i elements concentrats que simulen les discontinuïtats. De la condició de ressonància es troba la constant de propagació. En la figura següent s'esquematitza la modelització per al cas d'una guia "ridge-guide":

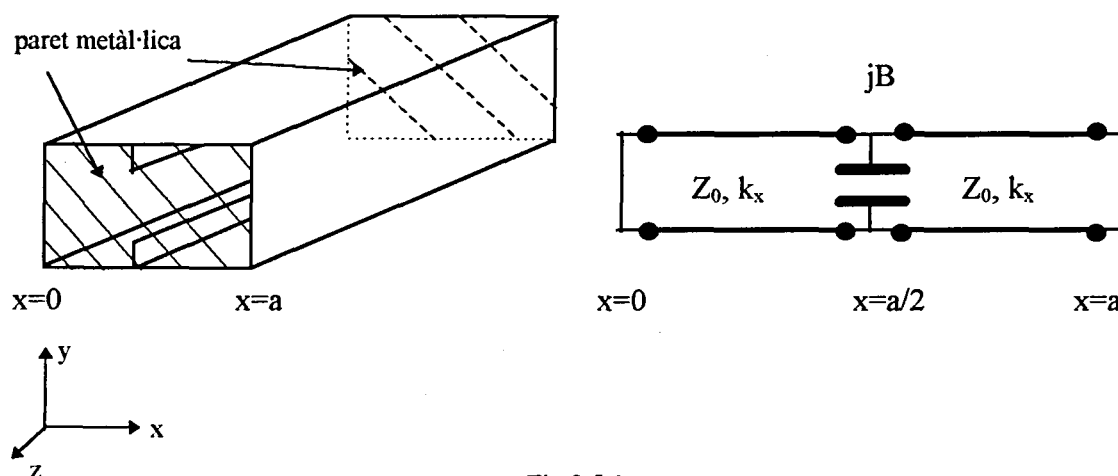


Fig 2.5.1

Transversalment, la discontinuïtat és del tipus diafragma que es pot modelar amb una capacitat [118]. Evidentment aquesta tècnica estarà limitada per la validesa dels models amb paràmetres concentrats i per la suposició de modes únics a una certa distància de les discontinuïtats (inferior a $a/2$).

Si la tècnica anterior es generalitza a infinits modes transversals i longitudinals resulta el mètode de la ressonància transversal generalitzat. De fet és una adaptació modal ("mode-matching") en el sentit transversal [119]. Així s'han analitzat diverses estructures [120-122]. Al fer servir la tècnica de l'adaptació modal podem tenir els problemes inherents a aquesta, en particular, el fenomen de la convergència relativa [103].

Hom pot trobar bones explicacions del mètode en els treballs de Sorrentino[123,124]. Aquí en farem una breu descripció, desenvolupant els aspectes que ens interessin.

Sigui una estructura finline com la de la figura:

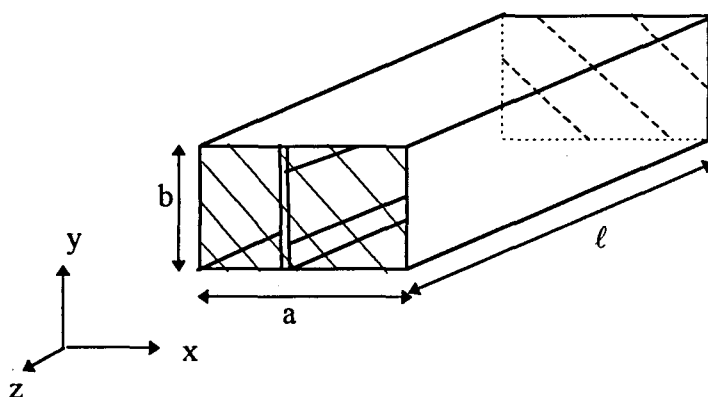


Fig 2.5.2

A l'introduir les parets metàl·liques laterals, en el sentit transversal tenim una guia rectangular de dimensions $\ell \times b$. En $x=a/2$ ens trobem els "fins" que considerarem de gruix nul. El dielèctric estarà comprès entre $x=a/2-s$ i $x=a/2$. Podem establir el següent model transversal:

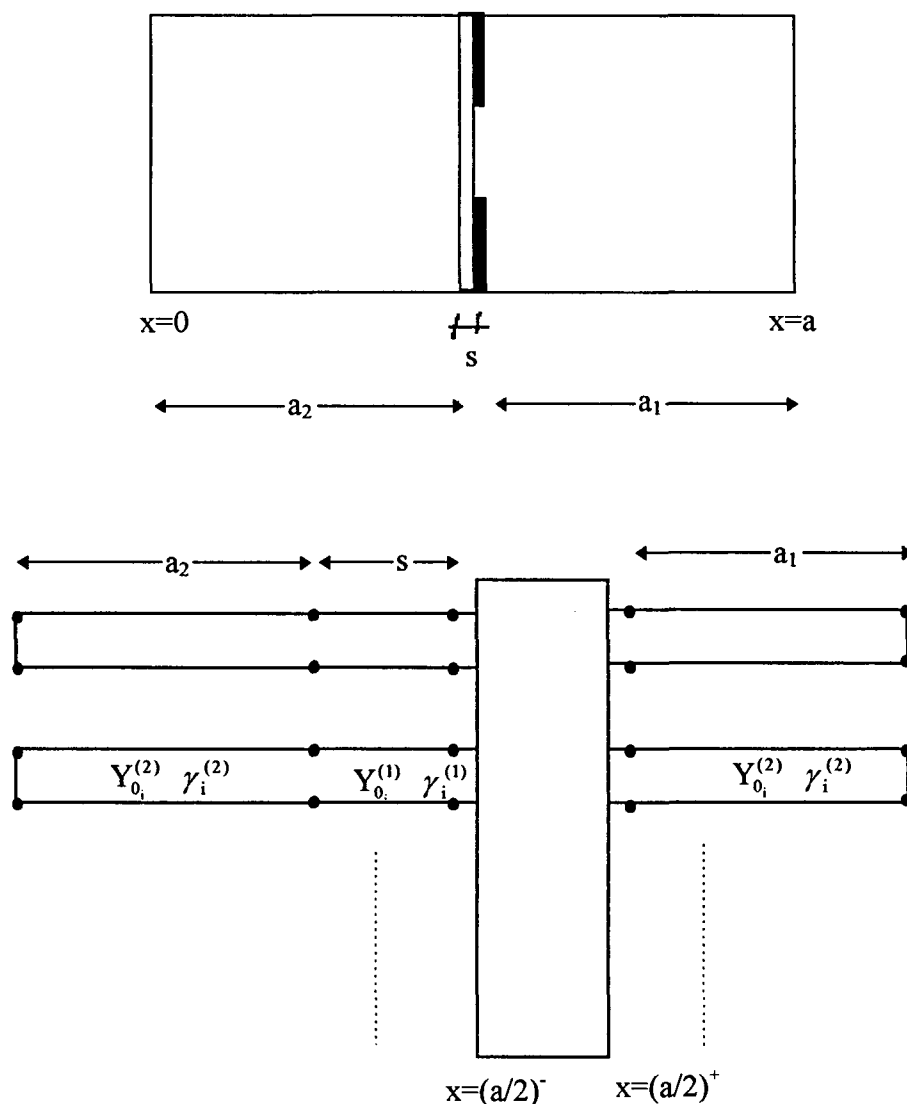


Fig 2.5.3

Al tractar la guia transversalment, i encara que sigui inhomogènia, es pot considerar com la successió en cascada de guies rectangulars homogènies i de diafragmes. La solució dels camps en cada secció homogènia es pot expressar com la superposició de infinits modes TE i TM. En aquest cas serien modes transversals a la direcció x : TE^x i TM^x . Aquest conjunt (en teoria infinit) de modes es modelen amb línies de transmissió en les que $Y_{0_i}^{(j)}$ és l'admitància d'ona modal per al mode i -èsim (TE o TM) en la zona j , i $\gamma_i^{(j)}$ és la constant de propagació del mode i -èsim (TE o TM) en la zona j . La "caixa negra" de la figura representa l'acoblament entre els diferents modes degut a la discontinuïtat que provoquen els "fins".

Es ben sabut que la solució dels camps en una guia rectangular homogènia es pot expressar per un conjunt de modes transversals elèctrics i transversals magnètics segons z o segons x o segons y : TE^z i TM^z o TE^x i TM^x o TE^y i TM^y [125]. En el nostre cas hauriem de fer servir els TE^x i TM^x , però no hi ha cap inconvenient en fer una rotació d'eixos i considerar, per exemple, la direcció transversal com la direcció z , utilitzant llavors els modes TE^z i TM^z . L'elecció d'un determinat conjunt de modes pot ser

convenient en alguns casos per simplificar els càlculs o la programació. En el cas que ens ocupa no hi ha cap avantatge significatiu pel fet de triar-ne un o altre.

Les admitàncies d'entrada de les línies es calculen aplicant la teoria clàssica de línies de transmissió:

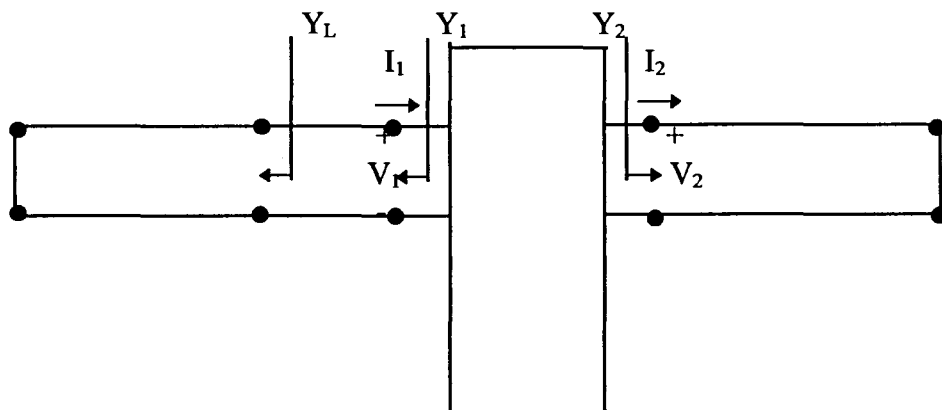


Fig 2.5.4

V_i i I_i són les tensions i corrents modals respectivament. Segons Marcuvitz [118] i Harrington [112], assumint com a direcció de propagació, per exemple la x , les components transversals dels camps a la direcció de propagació es poden expressar com:

$$\begin{aligned}\vec{E}_t(x, y, z) &= \sum_{m, n} V_{mn}^{TE}(x) \vec{e}_{mn}^{TE}(y, z) + \sum_{m, n} V_{mn}^{TM}(x) \vec{e}_{mn}^{TM}(y, z) \\ \vec{H}_t(x, y, z) &= \sum_{m, n} I_{mn}^{TE}(x) \vec{h}_{mn}^{TE}(y, z) + \sum_{m, n} I_{mn}^{TM}(x) \vec{h}_{mn}^{TM}(y, z)\end{aligned}\quad (2.5.1)$$

en aquestes expressions s'ha posat de forma explícita la dependència amb els enters m i n dels modes i s'han diferenciat les tensions i corrents modals segons fan referència a modes TE o a TM. \vec{e} i \vec{h} són els vectors modals. Són ortonormals:

$$\begin{aligned}\text{Modes TE: } \iint \vec{e}_i^{TE} \cdot \vec{e}_j^{TE} ds &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \\ \text{Modes TM: } \iint \vec{e}_i^{TM} \cdot \vec{e}_j^{TM} ds &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \\ \text{Modes TE - TM: } \iint \vec{e}_i^{TE} \cdot \vec{e}_j^{TM} ds &= 0 \quad \forall i, j \\ &(\text{el mateix per als vectors } \vec{h})\end{aligned}\quad (2.5.2)$$

s'obtenen a partir de potencials, els quals són la solució de l'equació de Helmholtz homogènia amb les condicions de contorn adjents.

Per a modes TE:

$$\Psi_{mn} = P_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{l} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (2.5.3)$$

$$\vec{e}_{mn}^{\text{TE}} = \nabla_t \Psi_{mn} \times \hat{x} \quad \nabla_t = \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Per a modes TM:

$$\Phi_{mn} = P'_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{l} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (2.5.4)$$

$$\vec{e}_{mn}^{\text{TM}} = -\nabla_t \Phi_{mn}$$

per ambdós casos és $\vec{h} = \vec{e} \times \hat{x}$ i:

$$P_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2lb}{(mb)^2 + (nl)^2}} & m = 0 \quad \text{ó} \quad n = 0 \quad (\text{no pot ser } m = n = 0) \\ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{lb}{(mb)^2 + (nl)^2}} & m \neq 0 \quad \text{i} \quad n \neq 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (2.5.5)$$

$$P'_{mn} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{lb}{(mb)^2 + (nl)^2}} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.6)$$

Tornant a la figura 2.5.4 i aplicant teoria de línies de transmissió s'obté :

$$Y_2 = Y_0^{(2)} \cot \text{gh}(\gamma^{(2)} a_1) \quad (2.5.7)$$

$$Y_L = Y_0^{(2)} \cot \text{gh}(\gamma^{(2)} a_2) \quad (2.5.8)$$

$$Y_1 = Y_0^{(1)} \frac{Y_L \cosh(\gamma^{(1)} s) + Y_0^{(1)} \sinh(\gamma^{(1)} s)}{Y_0^{(1)} \cosh(\gamma^{(1)} s) + Y_L \sinh(\gamma^{(1)} s)} \quad (2.5.9)$$

essent:

$$\begin{aligned} k_c^2 &= \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ (k^{(1)})^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \\ (k^{(2)})^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

$$\gamma^{(1)} = \sqrt{k_c^2 - (k^{(1)})^2} \quad \gamma^{(2)} = \sqrt{k_c^2 - (k^{(2)})^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{TE: } Y_0^{(i)} &\rightarrow Y_{0_e}^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)}}{j\omega\mu_0} \quad i = 1,2 \\
 \text{TM: } Y_0^{(i)} &\rightarrow \begin{cases} Y_{0_m}^{(1)} = \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{\gamma^{(1)}} \\ Y_{0_m}^{(2)} = \frac{j\omega\epsilon_0}{\gamma^{(2)}} \end{cases} \quad (2.5.11)
 \end{aligned}$$

Tenint en compte que γ és real pur o bé imaginari pur, ens podem estalviar treballar amb nombres complexos (a la programació) considerant les diverses combinacions de γ real i imaginari.

En la línia de la figura 2.5.4 es compleix:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= Y_2 V_2 \\
 I_1 &= -Y_1 V_1 \quad (2.5.12)
 \end{aligned}$$

generalitzant-ho a totes les línies que modelen els modes:

$$\begin{aligned}
 [I_2] &= [Y_2] [V_2] \\
 [I_1] &= -[Y_1] [V_1] \quad (2.5.13)
 \end{aligned}$$

són matrius de dimensió infinita que haurem de truncar a un nombre finit per a la seva evaluació numèrica. Les matrius de les tensions i corrents modals no són més que vectors columna. Les matrius d'admitàncies són matrius diagonals.

Anem ara a aplicar les condicions de contorn. Primer simplificarem una mica la notació:

$$\tilde{E}_t(x, y, z) = \sum_{m,n} V_{mn}^{TE}(x) \tilde{e}_{mn}^{TE}(y, z) + \sum_{m,n} V_{mn}^{TM}(x) \tilde{e}_{mn}^{TM}(y, z) \rightarrow \tilde{E}_t = \sum V^e \tilde{e}^e + \sum V^m \tilde{e}^m \quad (2.5.14)$$

En el pla dels "fins":

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_t(x = (a_2 + s)^+) &= \tilde{E}_{t_1} = \sum V_1^e \tilde{e}^e + \sum V_1^m \tilde{e}^m \\
 \tilde{E}_t(x = (a_2 + s)^-) &= \tilde{E}_{t_2} = \sum V_2^e \tilde{e}^e + \sum V_2^m \tilde{e}^m \quad (2.5.15)
 \end{aligned}$$

L'estructura imposa que:

$$\tilde{E}_{t_1} = \tilde{E}_{t_2} = \begin{cases} \tilde{E}_0 & \text{en } S_a \\ \tilde{0} & \text{en } S_c \end{cases} \quad (2.5.16)$$

en què S_a és la superfície de l'obertura que formen els dos "fins" i les parets a $z=0$ i $z=\ell$. S_c és la superfície complementària a l'anterior. \tilde{E}_0 és el camp a l'obertura rectangular. Es

pot expressar com un sumatori infinit de funcions ortogonals. En aquest cas, donat que tenim una obertura rectangular, agafem com a funcions ortogonals per a representar el camp elèctric a l'obertura el conjunt de modes TE i TM d'una guia rectangular de les mateixes dimensions:

$$\vec{E}_0 = \sum_{p,q} U_{pq}^{TE}(x=x_0) \vec{e}'_{pq}{}^{TE}(y,z) + \sum_{p,q} U_{pq}^{TM}(x=x_0) \vec{e}'_{pq}{}^{TM}(y,z) \quad (2.5.17)$$

en què $x=x_0=a_1+s$ és el pla de l'obertura. Simplificant la notació:

$$\vec{E}_0 = \sum U^e \vec{e}_0^e + \sum U^m \vec{e}_0^m \quad (2.5.18)$$

Aplicant la condició de contorn:

$$\sum V_1^e \vec{e}^e + \sum V_1^m \vec{e}^m = \begin{cases} \sum U^e \vec{e}_0^e + \sum U^m \vec{e}_0^m & \text{en } S_a \\ \vec{0} & \text{en } S_c \end{cases} \quad (2.5.19)$$

Multiplicant per \vec{e}^e i integrant, tenint en compte l'ortogonalitat dels modes:

$$V_1^e = \iint_{S_a} \sum_{p,q} U^e \vec{e}_0^e \vec{e}^e ds + \iint_{S_a} \sum_{p,q} U^m \vec{e}_0^m \vec{e}^e ds \quad (2.5.20)$$

Analogament, multiplicant per \vec{e}^m i integrant:

$$V_1^m = \iint_{S_a} \sum_{p,q} U^e \vec{e}_0^e \vec{e}^m ds + \iint_{S_a} \sum_{p,q} U^m \vec{e}_0^m \vec{e}^m ds \quad (2.5.21)$$

Essent $\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2}$ en $x=x_0$:

$$\begin{aligned} V_1^e &= V_2^e = V^e = \sum_{p,q} U^e g^I + \sum_{p,q} U^m g^{II} \\ V_1^m &= V_2^m = V^m = \sum_{p,q} U^e g^{III} + \sum_{p,q} U^m g^{IV} \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

en què:

$$\begin{aligned} g^I &= \iint_{S_a} \vec{e}^e \vec{e}_0^e ds \\ g^{II} &= \iint_{S_a} \vec{e}^e \vec{e}_0^m ds \\ g^{III} &= \iint_{S_a} \vec{e}^m \vec{e}_0^e ds \\ g^{IV} &= \iint_{S_a} \vec{e}^m \vec{e}_0^m ds \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Ho podem escriure en forma matricial:

$$[V] = [G] [U] \quad (2.5.24)$$

Aquestes matrius tenen la forma següent:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ V_{mn}^e \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{mn}^m \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & g_{mnpq}^I & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & g_{mnpq}^{III} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & g_{mnpq}^{IV} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & g_{mnpq}^{II} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & g_{mnpq}^{IV} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ U_{pq}^e \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{pq}^m \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.5.25)$$

La matriu $[G]$ que engloba els productes escalars g^i no és, en general, una matriu quadrada.

Procedim ara amb les condicions de contorn per al camp magnètic

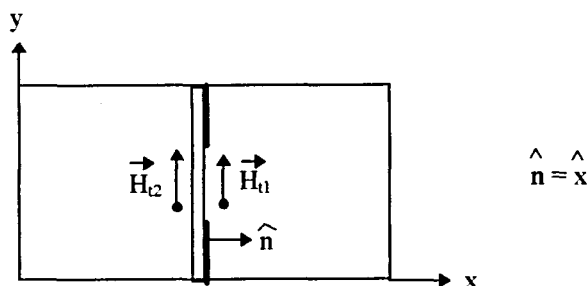


Fig 2.5.5

$$\hat{x} \times (\vec{H}_{t_1} - \vec{H}_{t_2}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{en } S_a \\ \vec{J}_0 & \text{en } S_c \end{cases} \quad (2.5.26)$$

\vec{J}_0 és la densitat superficial de corrent en les metal·litzacions ("fins"). Amb notació simplificada és:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{t_1} &= \sum I_1^e \vec{h}^e + \sum I_1^m \vec{h}^m \\ \vec{H}_{t_2} &= \sum I_2^e \vec{h}^e + \sum I_2^m \vec{h}^m \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

tenint en compte que $\vec{h} = -\hat{x} \times \vec{e}$, a partir de les expressions anteriors s'obté:

$$\hat{x} \times (\vec{H}_{t_1} - \vec{H}_{t_2}) = \sum \vec{e}^e (I_1^e - I_2^e) + \sum \vec{e}^m (I_1^m - I_2^m) = \vec{0} \quad (2.5.28)$$

Multiplicant per \vec{e}_0^e i integrant en l'obertura:

$$\sum g^I (I_1^e - I_2^e) + \sum g^{III} (I_1^m - I_2^m) = 0 \quad (2.5.29)$$

Multipliant per \vec{e}_0^m i integrant:

$$\sum g^{II} (I_1^e - I_2^e) + \sum g^{IV} (I_1^m - I_2^m) = 0 \quad (2.5.30)$$

Ho podem posar en forma matricial:

$$[G]^t [I_1 - I_2] = \vec{0} \quad (2.5.31)$$

Tenint en compte que:

$$\begin{aligned} [I_1] &= -[Y_1][V_1] \\ [I_2] &= [Y_2][V_2] \\ [V_1] &= [V_2] = [V] = [G][U] \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

obtenim finalment la relació:

$$\{[G]^t ([Y_1] + [Y_2])[G]\} [U] = \vec{0} \quad (2.5.33)$$

que ens permet trobar la condició de ressonància:

$$\text{Det}\{[G]^t ([Y_1] + [Y_2])[G]\} = 0 \quad (2.5.34)$$

Els termes de la matriu quadrada $[H] = [G]^t ([Y_1] + [Y_2])[G]$ són funció de la freqüència angular ω i de la longitud de la cavitat l . Podem fixar, per exemple, la freqüència i anar variant la longitud de forma adequada fins a aconseguir que el determinant de la matriu sigui nul. Per a aquesta longitud trobada es verifica que $l = n \lambda_g / 2$; $n=1,2,\dots$. Cuidant les dades introduïdes a la subrutina de càlcul de zeros utilitzada podem trobar la primera ressonància ($n=1$) i d'aquí la constant de fase $\beta = 2\pi/\lambda_g = \pi/l$.

La matriu $[H]$ és real i simètrica, cosa que facilita enormement el càlcul d'autovalors i autovectors necessari per a l'evaluació dels camps a partir de l'expressió 2.5.33. El tamany de la matriu $[H]$ el dona el nombre de modes utilitzat per a evaluar el camp a l'obertura, i aquest és molt més petit que el necessari per a representar els camps a la resta de l'estructura.

Els elements de la matriu $[G]$ es calculen analíticament. De les expressions 2.5.3 i 2.5.4, s'obté:

$$\begin{aligned} \vec{e}^e &= -P_{mn} [-C \cos Dz \sin Cy \hat{z} + D \sin Dz \cos Cy \hat{y}] \\ \vec{e}^m &= -P'_{mn} [D \cos Dz \sin Cy \hat{z} + C \sin Dz \cos Cy \hat{y}] \\ \vec{e}_0^e &= -P_{pq} [-A \cos Bz \sin Ay' \hat{z} + B \sin Bz \cos Ay' \hat{y}] \\ \vec{e}_0^m &= -P'_{pq} [B \cos Bz \sin Ay' \hat{z} + A \sin Bz \cos Ay' \hat{y}] \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

en què:

$$A = \frac{q\pi}{w} \quad B = \frac{p\pi}{l} \quad C = \frac{n\pi}{b} \quad D = \frac{m\pi}{l} \quad y' = y - b_1 \quad (2.5.36)$$

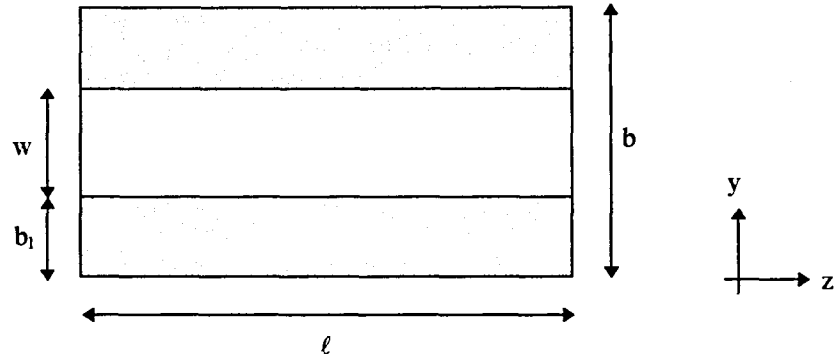


Fig 2.5.6

P_{pq} i P'_{pq} s'obtenen amb les expressions 2.5.3 i 2.5.4 canviant m per p, n per q i b per w. Així:

$$\begin{aligned} g^I &= \iint_{S_s} \tilde{e}^e \tilde{e}_0^e ds = \\ &= \int_0^l \int_{b_1}^{b_1+w} P_{mn} P_{pq} [CA \cos Dz \cos Bz \sin Cy \sin Ay' + DB \sin Dz \sin Bz \cos Cy \cos Ay'] dy dz = \\ &= P_{mn} P_{pq} \{CA \alpha Q + DB \delta T\} \end{aligned} \quad (2.5.37)$$

en què:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & D \neq B \neq 0 \\ \frac{\ell}{2} & D = B \neq 0 \\ \ell & D = B = 0 \end{cases} \quad (2.5.38) \quad \delta = \begin{cases} 0 & D \neq B \neq 0 \\ \frac{\ell}{2} & D = B \neq 0 \\ 0 & D = B = 0 \end{cases} \quad (2.5.39)$$

$$Q = \begin{cases} \frac{A}{C^2 - A^2} [(-1)^q \sin[C(b_1 + w)] - \sin[Cb_1]] & C \neq A \neq 0 \\ \frac{w}{2} \cos[Ab_1] & C = A \neq 0 \\ 0 & C = A = 0 \end{cases} \quad (2.5.40)$$

$$T = \begin{cases} \frac{C}{C^2 - A^2} [(-1)^q \sin[C(b_1 + w)] - \sin(Cb_1)] & A \neq C \neq 0 \\ \frac{w}{2} \cos[Ab_1] & A = C \neq 0 \\ w & A = C = 0 \end{cases} \quad (2.5.41)$$

Analogament:

$$g^{II} = P_{mn} P'_{pq} \{-CB \alpha Q + DA \delta T\} \quad (2.5.42)$$

$$g^{III} = P'_{mn} P_{pq} \{-AD \alpha Q + CB \delta T\} \quad (2.5.43)$$

$$g^{IV} = P'_{mn} P'_{pq} \{DB \alpha Q + CA \delta T\} \quad (2.5.44)$$

L'equació 2.5.33 forma un sistema indirecte d'autovalors i autovectors. Els coeficients U de l'expansió modal del camp elèctric en l'obertura s'obtenen calculant l'autovector associat a l'autovalor nul del sistema esmentat. A partir d'aquí, amb les expressions 2.5.35 obtenim el camp a l'obertura, i amb l'expressió 2.5.32 les tensions modals V que ens donen el camp en el pla de les metal·litzacions. A partir d'aquí podem obtenir els camps a tot l'espai aplicant l'equació 2.5.14 en la que $V(x)$ s'obté amb la teoria de línies de transmissió.

En referència a la figura 2.5.4, fent servir la teoria de línies s'obté:

Per $0 \leq x \leq a_2$:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{V_0(1 + \rho_A)}{(e^{\gamma^{(1)}s} + \rho_A e^{-\gamma^{(1)}s}) \sinh \gamma^{(2)}a_2} \sinh \gamma^{(2)}x \\ I(x) &= \frac{V_0(1 + \rho_A) Y_0^{(2)}}{(e^{\gamma^{(1)}s} + \rho_A e^{-\gamma^{(1)}s}) \sinh \gamma^{(2)}a_2} \cosh \gamma^{(2)}x \end{aligned} \quad (2.5.45)$$

Per $a_2 \leq x \leq a_2 + s$:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{V_0(e^{\gamma^{(1)}(x-a_2)} + \rho_A e^{-\gamma^{(1)}(x-a_2)})}{e^{\gamma^{(1)}s} + \rho_A e^{-\gamma^{(1)}s}} \\ I(x) &= \frac{V_0(e^{\gamma^{(1)}(x-a_2)} - \rho_A e^{-\gamma^{(1)}(x-a_2)}) Y_0^{(1)}}{e^{\gamma^{(1)}s} + \rho_A e^{-\gamma^{(1)}s}} \end{aligned} \quad (2.5.46)$$

Per $a_2 + s \leq x \leq a$:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \frac{-V_0}{\sinh \gamma^{(2)} a_1} \sinh [\gamma^{(2)}(x - a)] \\
 I(x) &= \frac{V_0 Y_0^{(2)}}{\sinh \gamma^{(2)} a_1} \cosh [\gamma^{(2)}(x - a)]
 \end{aligned}
 \tag{2.5.47}$$

V_0 és la tensió modal d'un cert mode (TE o TM) en el pla $x=x_0$ obtingut amb l'expressió 2.5.32. S'ha de tenir en compte si l'admitància modal $Y_0^{(i)}$ fa referència a un mode TE o TM. El coeficient de reflexió ρ_A que apareix a les expressions anteriors ve donat per:

$$\rho_A = \frac{Z_L - Z_0^{(1)}}{Z_L + Z_0^{(1)}} \quad ; \quad Z_L = Z_0^{(1)} \operatorname{tgh}(\gamma^{(1)} a_2) \quad ; \quad Z_0^{(1)} = \frac{1}{Y_0^{(1)}}
 \tag{2.5.48}$$

S'ha analitzat el cas de gruix nul de les metal·litzacions. Si considerem un gruix no nul d'aquestes, el mètode d'anàlisi és el mateix. La diferència rau en que ara el model amb infinites línies de transmissió és un xic més complicat:

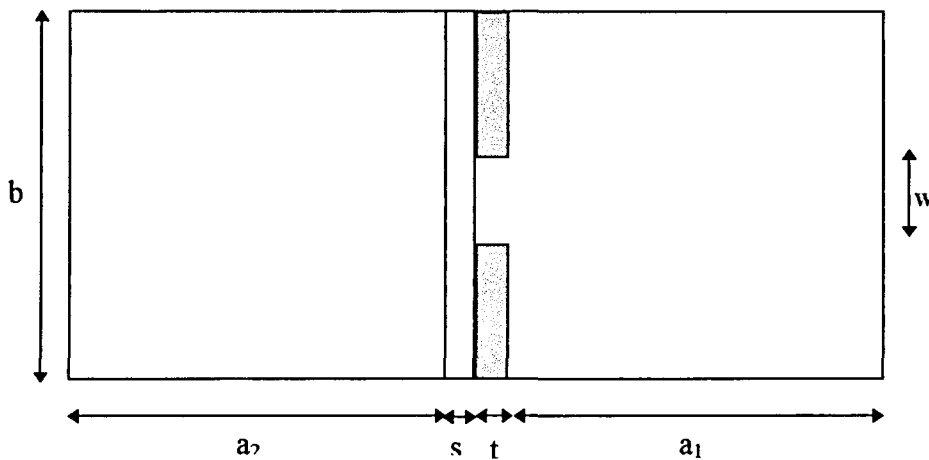
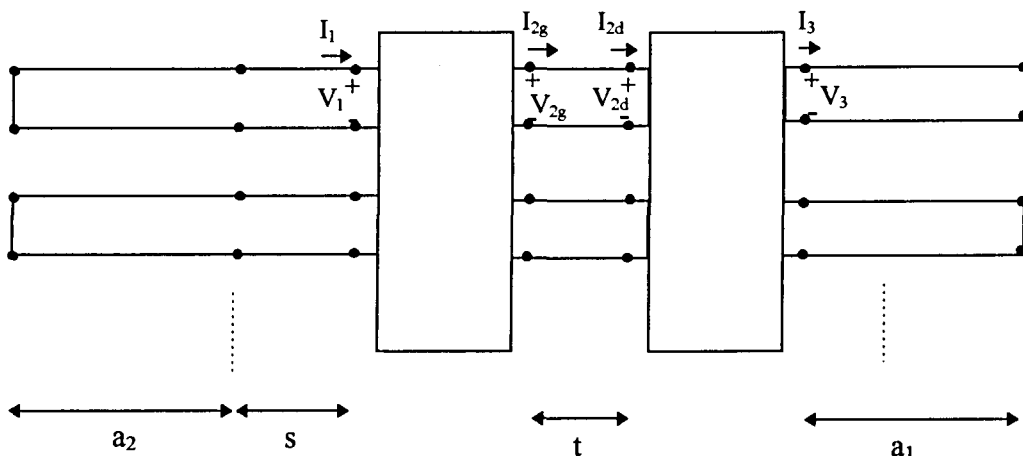


Fig 2.5.7

El gruix de la metal·lització es tradueix des del punt de vista transversal en una guia rectangular d'alçada w i longitud t . Tindrem ara dues discontinuïtats idèntiques corresponents a la transició entre una guia d'alçada b i una altra d'alçada w :



Al ser les dues discontinuitats idèntiques tenen la mateixa matriu $[G]$. Així:

$$\begin{aligned} [V_1] &= [G][V_{2g}] & [I_{2g}] &= [G]^t [I_1] & [I_1] &= -[Y_1][V_1] \\ [V_3] &= [G][V_{2d}] & [I_{2d}] &= [G]^t [I_3] & [I_3] &= [Y_2][V_3] \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

d'on podem trobar la relació entre les tensions i corrents modals en la guia d'alçada w :

$$\begin{aligned} [I_{2g}] &= -[G]^t [Y_1][G][V_{2g}] \\ [I_{2d}] &= [G]^t [Y_3][G][V_{2d}] \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

La relació entre les tensions i corrents modals als extrems de la guia d'alçada w la podem obtenir amb la matriu ABCD d'un tros de línia de longitud t [126]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma_i^{(3)} t & Z_{0i} \sinh \gamma_i^{(3)} t \\ Y_{0i} \sinh \gamma_i^{(3)} t & \cosh \gamma_i^{(3)} t \end{bmatrix} \quad (2.5.51)$$

amb els sentits dels corrents de la figura 2.5.8 tenim:

$$\begin{bmatrix} V_{2g} \\ I_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2d} \\ I_{2d} \end{bmatrix} \quad (2.5.52)$$

Les expresions anteriors vàlides per a una línia les podem generalitzar a un nombre (en teoria infinit) de línies que representen els modes. Operant s'obté:

$$\left\{ [C] + [D][G]^t [Y_3][G] + [G]^t [Y_1][G] \left([D] + [B][G]^t [Y_3][G] \right) \right\} [V_{2d}] = \vec{0} \quad (2.5.53)$$

en què:

$$\begin{aligned} [B] &= \text{diag}\{Z_{0i} \sinh \gamma_i^{(3)} t\} \\ [C] &= \text{diag}\{Y_{0i} \sinh \gamma_i^{(3)} t\} \\ [D] &= \text{diag}\{\cosh \gamma_i^{(3)} t\} \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

Igual que per al cas de gruix nul, variant apropiadament ω o l fins que es compleixi:

$$\text{Det}\left\{ [C] + [D][G]^t [Y_3][G] + [G]^t [Y_1][G] \left([D] + [B][G]^t [Y_3][G] \right) \right\} = 0 \quad (2.5.55)$$

obtindrem la constant de fase de l'estructura.

* Càlcul de l'impedància característica.

En línies de transmissió que no suporten ones T.E.M l'impedància característica d'aquestes s'acostuma a donar per les relacions entre potència i tensió o bé entre potència i corrent. En el cas d'una estructura finline el més habitual és fer servir la relació entre la potència transportada per la guia i la tensió existent entre les metal·litzacions ("fins").

La potència transportada per la guia es troba integrant sobre una superfície normal a la direcció de propagació el vector de Poynting complexe:

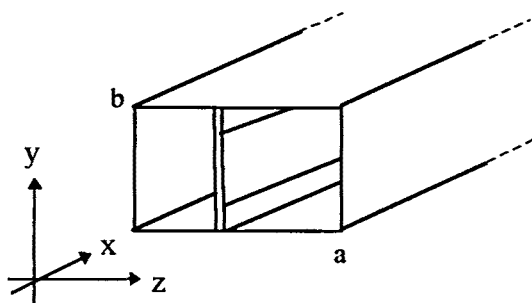


Fig 2.5.9

$$\text{Pot} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \iint_s (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\vec{s} \right\} \quad (2.5.56)$$

Segons el sistema de coordenades de la figura 2.5.9, la direcció de propagació del senyal és la x, per tant $d\vec{s} = ds \hat{x}$. Considerant la guia infinitament llarga i per la que s'hi propaga una única ona progressiva (en el sentit de x creixent) amb camps \vec{E}^+ i \vec{H}^+ :

$$\text{Pot} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_0^b \int_0^a \left(E_y^+ (H_z^+)^* - E_z^+ (H_y^+)^* \right) dz dy \right\} \quad (2.5.57)$$

L'anàlisi per ressonància transversal generalitzat ens proporciona les components de camp E_x , E_y , H_x i H_y . Per poder trobar la potència ens manquen les components E_z i H_z . Aquestes s'obtenen amb les següents expressions que donen les components axials en funció de les transversals per modes TE i TM [118]:

$$\begin{aligned} j \frac{k}{\eta} E_z &= \nabla_t (\vec{H}_t \times \hat{z}) = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & k &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} \\ j k \eta H_z &= \nabla_t (\hat{z} \times \vec{E}_t) = -\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} & \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.5.58)$$

Així, les components de camp necessàries per al càlcul de la potència són:

$$E_y = -\sum \sin Dx \cos Cy [V^e(z)P_{mn}D + V^m(z)P'_{mn}C] \quad (2.5.59)$$

$$E_z = -j\frac{\eta}{k} \sum I^m(z)P'_{mn} \sin Dx \sin Cy (D^2 + C^2) \quad (2.5.60)$$

$$H_y = \sum \cos Dx \sin Cy [I^e(z)P_{mn}C - I^m(z)P'_{mn}D] \quad (2.5.61)$$

$$H_z = -\frac{j}{k\eta} \sum V^e(z)P_{mn} \cos Dx \cos Cy (C^2 + D^2) \quad (2.5.62)$$

Les funcions $V(z)$ i $I(z)$ s'obtenen amb les expressions 2.5.45 - 2.5.47 canviant x per z .

A l'introduir dues parets metal·liques perpendiculars a l'eix de la guia, el mètode de la ressonància transversal generalitzat ens proporciona els camps en forma d'ona estacionària pura segons la direcció de l'eix de la guia (x en aquest cas). Així:

$$\begin{aligned} E_y &= -2jE_y^+ \sin\beta_x x & \beta_x &= D|_{m=1} \\ H_z &= 2H_z^+ \cos\beta_x x & (D &= m\pi/\ell \ ; \ \ell = \lambda_g/2) \end{aligned} \quad (2.5.63)$$

Després de càlculs llargs i pesats s'arriba a:

Per $n = 0$: ($m=1$)

$$\text{Pot} = \frac{\beta_x^2}{4\pi\omega\mu} (T_1J_1 + T_2J_2 + T_3J_3) \quad (2.5.64)$$

Per $n \geq 1$: ($m=1$)

$$\begin{aligned} \text{Pot} &= \frac{\beta_x}{4\omega} \sum \left\{ \frac{\beta_x}{\pi} \left[\frac{1}{\mu_0} (T_1J_1 + T_2J_2 + T_3J_3) - \frac{1}{\epsilon_0} \left(T_1'J_1' + \frac{T_2'J_2'}{\epsilon_r} + T_3'J_3' \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{b} \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_0} (T_aJ_a + T_bJ_b + T_cJ_c) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(T_a'J_a' + \frac{T_b'J_b'}{\epsilon_r} + T_c'J_c' \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.5.65)$$

en què:

$$T_1 = \left| \frac{V_{0c} \left(1 + \frac{1}{\rho_c}\right) e^{-\gamma^{(1)} a_2}}{\left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_c} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}\right) \left(e^{-\gamma^{(2)} a_2} - e^{\gamma^{(2)} a_2}\right)} \right|^2$$

$$T_2 = \left| \frac{V_{0c}}{e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_c} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}} \right|^2$$

$$T_3 = \left| \frac{V_{0c}}{e^{-\gamma^{(2)}(a_2+s)} - e^{-2\gamma^{(2)} a} e^{\gamma^{(2)}(a_2+s)}} \right|^2$$

$$T'_1 = \left| \frac{V_{0m} \left(1 + \frac{1}{\rho_m}\right) e^{-\gamma^{(1)} a_2}}{Z_{0m}^{(2)} \left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_m} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}\right) \left(e^{-\gamma^{(2)} a_2} - e^{\gamma^{(2)} a_2}\right)} \right|^2$$

$$T'_2 = \left| \frac{V_{0m}}{Z_{0m}^{(1)} \left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_m} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}\right)} \right|^2$$

$$T'_3 = \left| \frac{V_{0m}}{Z_{0m}^{(2)} \left(e^{-\gamma^{(2)}(a_2+s)} - e^{-2\gamma^{(2)} a} e^{\gamma^{(2)}(a_2+s)}\right)} \right|^2$$

$$T_a = \left(\frac{V_{0c} \left(1 + \frac{1}{\rho_c}\right) e^{-\gamma^{(1)} a_2}}{\left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_c} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}\right) \left(e^{-\gamma^{(2)} a_2} - e^{\gamma^{(2)} a_2}\right)} \right)^* \left(\frac{V_{0m} \left(1 + \frac{1}{\rho_m}\right) e^{-\gamma^{(1)} a_2}}{\left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_m} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}\right) \left(e^{-\gamma^{(2)} a_2} - e^{\gamma^{(2)} a_2}\right)} \right)$$

$$T_b = \left(\frac{V_{0c}}{e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_c} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}} \right)^* \left(\frac{V_{0m}}{e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_m} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)}} \right)$$

$$T_c = \frac{V_{0c}^* V_{0m}}{\left| e^{-\gamma^{(2)}(a_2+s)} - e^{-2\gamma^{(2)} a} e^{\gamma^{(2)}(a_2+s)} \right|^2}$$

$$T'_a = \left(\frac{V_{0_e} \left(1 + \frac{1}{\rho_e}\right) e^{-\gamma^{(1)} a_2}}{Z_{0_e}^{(2)} \left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_e} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)} \right) \left(e^{-\gamma^{(2)} a_2} - e^{\gamma^{(2)} a_2} \right)} \right)^* \left(\frac{V_{0_m} \left(1 + \frac{1}{\rho_m}\right) e^{-\gamma^{(1)} a_2}}{Z_{0_m}^{(2)} \left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_m} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)} \right) \left(e^{-\gamma^{(2)} a_2} - e^{\gamma^{(2)} a_2} \right)} \right)$$

$$T'_b = \left(\frac{V_{0_e}}{Z_{0_e}^{(1)} \left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_e} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)} \right)} \right)^* \left(\frac{V_{0_m}}{Z_{0_m}^{(1)} \left(e^{-\gamma^{(1)}(a_2+s)} + \frac{1}{\rho_m} e^{-\gamma^{(1)}(a_2-s)} \right)} \right)$$

$$T'_c = \left(\frac{V_{0_e}}{Z_{0_e}^{(2)} \left(e^{-\gamma^{(2)}(a_2+s)} - e^{-2\gamma^{(2)} a_2} e^{\gamma^{(2)}(a_2+s)} \right)} \right)^* \left(\frac{V_{0_m}}{Z_{0_m}^{(2)} \left(e^{-\gamma^{(2)}(a_2+s)} - e^{-2\gamma^{(2)} a_2} e^{\gamma^{(2)}(a_2+s)} \right)} \right)$$

$$J_1 = \begin{cases} \frac{\sinh(2\alpha^{(2)} a_2)}{\alpha^{(2)}} - 2a_2 & \gamma^{(2)} = \alpha^{(2)} \\ 2a_2 - \frac{\sin(2\beta^{(2)} a_2)}{\beta^{(2)}} & \gamma^{(2)} = j\beta^{(2)} \end{cases}$$

$$J_2 = \begin{cases} 2a_e s + \frac{1}{2\alpha^{(1)}} \left[e^{-2\alpha^{(1)} a_2} - |r_e|^2 e^{2\alpha^{(1)} a_2} - e^{-2\alpha^{(1)}(a_2+s)} + |r_e|^2 e^{2\alpha^{(1)}(a_2+s)} \right] & \gamma^{(1)} = \alpha^{(1)} \\ (1 + |t_e|^2) s + \frac{1}{\beta^{(1)}} \left[-d_e \cos(2\beta^{(1)} a_2) + d_e \cos(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) - c_e \sin(2\beta^{(1)} a_2) + c_e \sin(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) \right] & \gamma^{(1)} = j\beta^{(1)} \end{cases}$$

$$J_3 = \begin{cases} -2a_1 e^{-2\alpha^{(2)} a_1} + \frac{e^{-2\alpha^{(2)}(a_2+s)} (1 - e^{-4\alpha^{(2)} a_1})}{2\alpha^{(2)}} & \gamma^{(2)} = \alpha^{(2)} \\ 2a_1 - \frac{\sin(2\beta^{(2)} a_1)}{\beta^{(2)}} & \gamma^{(2)} = j\beta^{(2)} \end{cases}$$

$$J_b = \begin{cases} (r_e^* + r_m) s + \frac{1}{2\alpha^{(1)}} \left[e^{-2\alpha^{(1)} a_2} - r_e^* r_m e^{2\alpha^{(1)} a_2} - e^{-2\alpha^{(1)}(a_2+s)} + r_e^* r_m e^{2\alpha^{(1)}(a_2+s)} \right] & \gamma^{(1)} = \alpha^{(1)} \\ (1 + t_e^* t_m) s + \frac{j(t_e^* - t_m)}{2\beta^{(1)}} \left[\cos(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) - \cos(2\beta^{(1)} a_2) \right] + \frac{(t_e^* + t_m)}{2\beta^{(1)}} \left[\sin(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) - \sin(2\beta^{(1)} a_2) \right] & \gamma^{(1)} = j\beta^{(1)} \end{cases}$$

$$J'_1 = \begin{cases} 2a_2 + \frac{\sinh(2\alpha^{(2)} a_2)}{\alpha^{(2)}} & \gamma^{(2)} = \alpha^{(2)} \\ 2a_2 + \frac{\sin(2\beta^{(2)} a_2)}{\beta^{(2)}} & \gamma^{(2)} = j\beta^{(2)} \end{cases}$$

$$J'_2 = \begin{cases} 2a'_m s + \frac{1}{2\alpha^{(1)}} \left[e^{-2\alpha^{(1)}a_2} - |r'_m|^2 e^{2\alpha^{(1)}a_2} - e^{-2\alpha^{(1)}(a_2+s)} + |r'_m|^2 e^{2\alpha^{(1)}(a_2+s)} \right] & \gamma^{(1)} = \alpha^{(1)} \\ (1 + |t'_m|^2) s + \frac{1}{\beta^{(1)}} \left[-d'_m \cos(2\beta^{(1)}a_2) + d'_m \cos(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) - c'_m \sin(2\beta^{(1)}a_2) + c'_m \sin(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) \right] & \gamma^{(1)} = j\beta^{(1)} \end{cases}$$

$$J'_3 = \begin{cases} 2a_1 e^{-2\alpha^{(2)}a_1} + \frac{e^{-2\alpha^{(2)}(a_2+s)} (1 - e^{-4\alpha^{(2)}a_1})}{2\alpha^{(2)}} & \gamma^{(2)} = \alpha^{(2)} \\ 2a_1 + \frac{\sin(2\beta^{(2)}a_1)}{\beta^{(2)}} & \gamma^{(2)} = j\beta^{(2)} \end{cases}$$

$$J'_b = \begin{cases} (r'_e + r'_m) s + \frac{1}{2\alpha^{(1)}} \left[e^{-2\alpha^{(1)}a_2} - r'_e r'_m e^{2\alpha^{(1)}a_2} - e^{-2\alpha^{(1)}(a_2+s)} + r'_e r'_m e^{2\alpha^{(1)}(a_2+s)} \right] & \gamma^{(1)} = \alpha^{(1)} \\ (1 + t'_e t'_m) s + \frac{j(t'_e - t'_m)}{2\beta^{(1)}} \left[\cos(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) - \cos(2\beta^{(1)}a_2) \right] + \frac{(t'_e + t'_m)}{2\beta^{(1)}} \left[\sin(2\beta^{(1)}(a_2 + s)) - \sin(2\beta^{(1)}a_2) \right] & \gamma^{(1)} = j\beta^{(1)} \end{cases}$$

amb:

$$Z_{L_\ell} = Z_{0_\ell}^{(2)} \operatorname{tgh}(\gamma^{(2)}a_2) \quad \rho_\ell = \frac{Z_{L_\ell} - Z_{0_\ell}^{(1)}}{Z_{L_\ell} + Z_{0_\ell}^{(1)}} \quad \ell = e, m$$

$$r_\ell = a_\ell + j b_\ell = \frac{e^{-2\alpha^{(1)}a_2}}{\rho_\ell} \quad t_\ell = c_\ell + j d_\ell = \frac{e^{-2j\beta^{(1)}a_2}}{\rho_\ell} \quad \ell = e, m$$

$$r'_\ell = a'_\ell + j b'_\ell = -r_\ell \quad t'_\ell = c'_\ell + j d'_\ell = -t_\ell$$

V_{0_ℓ} són les tensions modals calculades en el pla de les metal·litzacions.

La tensió entre els "fins" es calcula integrant la component E_y en l'obertura:

$$\phi_{\text{slot}} = \int_{b_1}^{b_1+w} E_y^+ dy = \begin{cases} j w \sqrt{\frac{\beta_x}{2\pi b}} V_{0_e} & n = 0 \\ j \sqrt{\frac{b\beta_x}{\pi^3}} \sum \frac{V_{0_e} \beta_x b + V_{0_m} n\pi}{n\sqrt{\beta_x^2 b^2 + n^2 \pi^2}} \left[\sin\left(\frac{n\pi(b_1 + w)}{b}\right) - \sin\left(\frac{n\pi b_1}{b}\right) \right] & n \geq 1 \end{cases}$$

(2.5.66)

S'ha d'anar amb cura a l'hora de programar les expressions anteriors que contenen funcions exponencials d'argument real o funcions sinus o cosinus hiperbòlics. Podem tenir problemes de "overflows" o, si més no, la precisió dels resultats obtinguts es pot reduir considerablement. Així, per exemple, en lloc de programar l'expressió

$$\frac{1}{|\sinh(\alpha^{(2)}a_2)|^2} \left(\frac{a_2}{2} - \frac{\sinh(2\alpha^{(2)}a_2)}{4\alpha^{(2)}} \right)$$

quan $\alpha^{(2)}a_2$ sigui més gran de 18 podem fer servir aquesta altra expressió:

$$\frac{a_2}{2 \sinh^2(\alpha^{(2)}a_2)} - \frac{1}{2\alpha^{(2)} \left[\cot \operatorname{gh}(2\alpha^{(2)}a_2) - \frac{1}{\sinh(2\alpha^{(2)}a_2)} \right]}$$

De totes maneres s'ha de tenir en compte com tracta aquestes expressions el compilador utilitzat, essent a vegades millor no fer servir expressions equivalents.

2.5.2. Resultats i comentari

A continuació es presenten una sèrie de resultats obtinguts amb el mètode de la ressonància transversal generalitzat a l'analitzar estructures finline en guia WR-28 ($a=7,112$ mm ; $b=3,556$ mm).

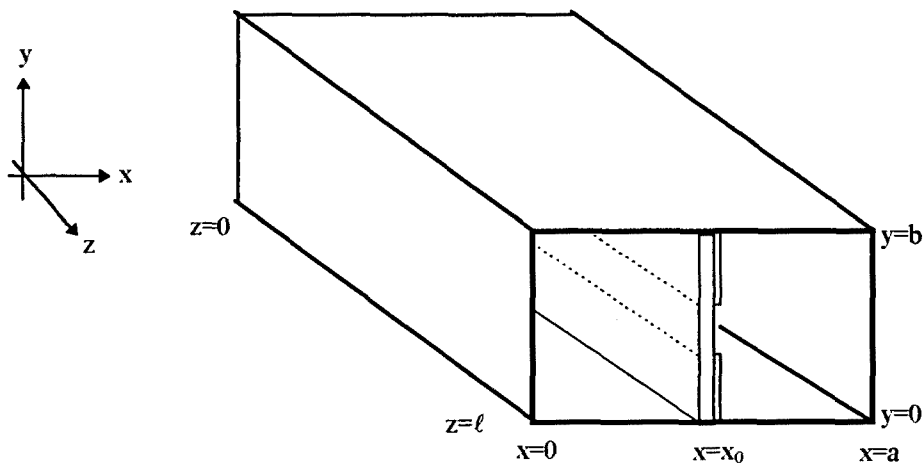


Fig 2.5.10

Les figures següents mostren la constant de fase en funció de l'índex màxim dels modes utilitzats per a representar el camp en la zona corresponent transversalment a una guia rectangular ($\ell \times b$). (Degut a la natura del problema es fan servir modes amb una única variació segons l'eix del finline: TE_{1n} i TM_{1n} ; el nombre total de modes utilitzat és dues vegades l'índex màxim més 1).

β en funció del nombre de modes

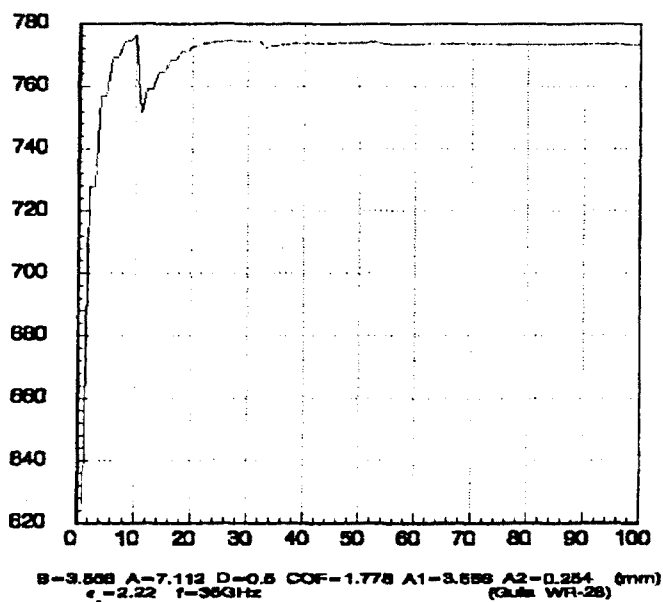


Fig 2.5.11

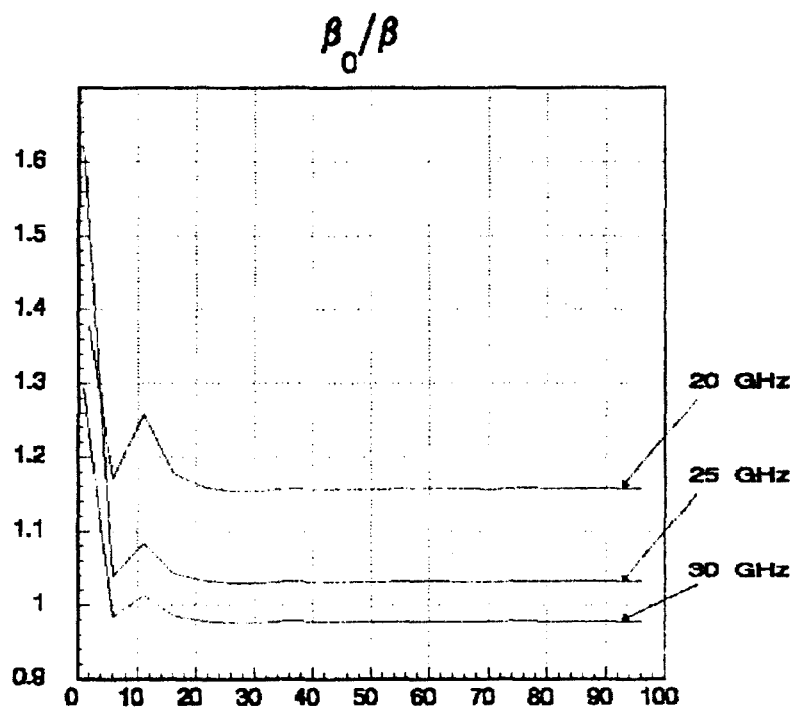


Fig 2.5.12

Com es pot observar, amb menys de 80 modes a la guia (índex 40) s'obtenen molt bons resultats: el mètode de la ressonància transversal generalitzat proporciona una $\beta=773,4$ rad/s i el mètode del domini espectral, per a la mateixa estructura i freqüència, proporciona $\beta=773,1$ rad/s.

En la gràfica següent es presenta el diagrama de dispersió de la mateixa línia finline però considerant un gruix de metal·lització de 0,05 mm

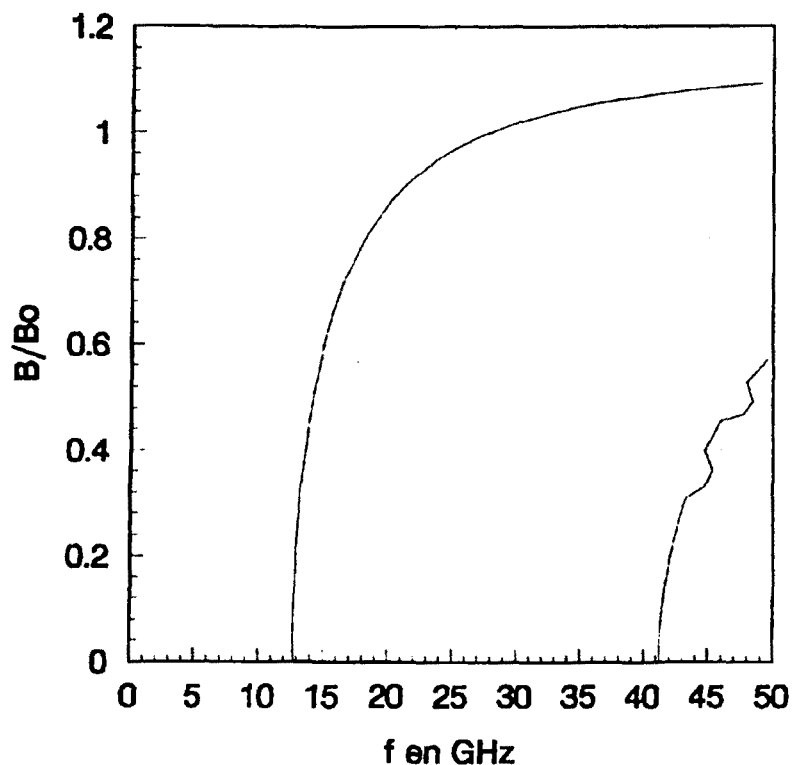


Fig 2.5.13

Les petites irregularitats en la corba del segon mode són degudes a problemes de precisió numèrica en la subrutina de càlcul de zeros utilitzada. Per minimitzar el temps de càlcul, s'ha fet servir la mateixa precisió per al càlcul del primer mode i del segon i es fa necessari augmentar la precisió quan es calcula el segon.

Els resultats obtinguts són indistingibles dels que s'obtenen considerant gruix nul de les metal·litzacions.

Les gràfiques següents presenten estudis dels efectes de variar paràmetres com ara la posició dels "fins" o l'amplada de l'obertura.

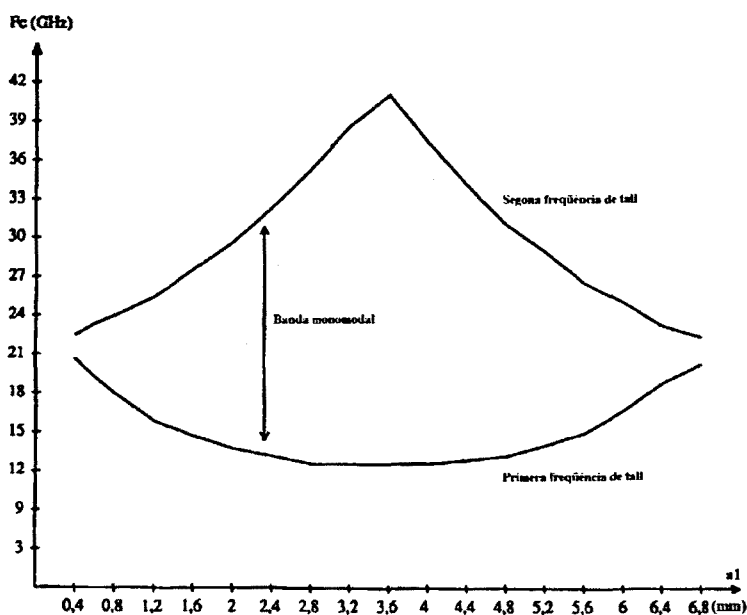


Fig 2.5.14

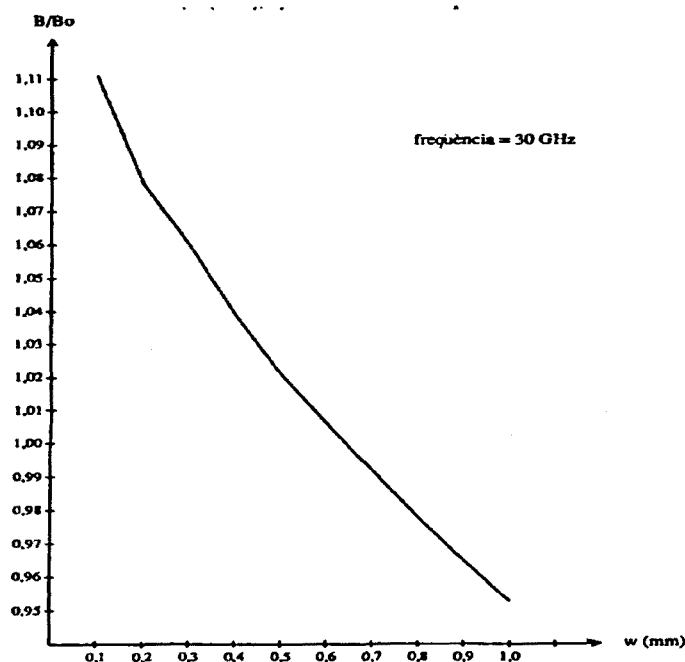


Fig 2.5.15

El nombre de modes utilitzat per expressar el camp a l'obertura és diferent de l'utilitzat per representar els camps a la guia. De fet el primer és molt més petit que el segon.

Segons Mitra i Lee [103], per complir la condició de cantell a l'analitzar el problema de la bifurcació d'una guia rectangular amb el mètode de l'adaptació modal, s'ha de considerar la relació entre el nombre de modes utilitzats per representar els camps a cada zona de l'estructura igual a la relació d'alçades. Aquesta condició va ser comprovada per Shih i Gray [127] en l'anàlisi de discontinuïtats en esglaó en guies rectangulars. Extrapolant aquests resultats al nostre cas, hauria de ser $R = N/Q = b/w$, en què N és el nombre de modes a la guia, Q el nombre de modes a l'obertura, b l'alçada de la guia i w l'alçada de l'obertura. Segons Hoffmann [128] i Sorrentino [123], però, s'obté una convergència millor i més ràpida considerant $R = 1,5 (N/Q) = 1,5 (b/w)$ en el cas de metal·litzacions de gruix nul. (Donat que N i Q són enters, l'expressió anterior s'ha d'entendre com la relació N/Q més propera a b/w).

La relació entre el nombre de modes esmentada s'ha fet servir per a obtenir les gràfiques anteriors. En el cas considerat, si fem servir 81 modes per a la zona de la guia ($N=81$), per a l'obertura només en necessitem 7. La matriu de la qual haurem de calcular el determinant, buscar per a quin ℓ aquest és nul i trobar els autovalors i autovectors és de 7×7 . Quan w sigui molt petit, la matriu que haurem de manipular també serà molt petita, amb els conseqüents avantatges de precisió de càlcul i temps d'execució. Quan w sigui gran, no caldrà fer servir tants modes a la guia ($N \ll 81$) i la matriu a tractar tampoc serà excessivament gran.

La gràfica següent posa de manifest la convergència de les solucions per a diferents relacions modals R :

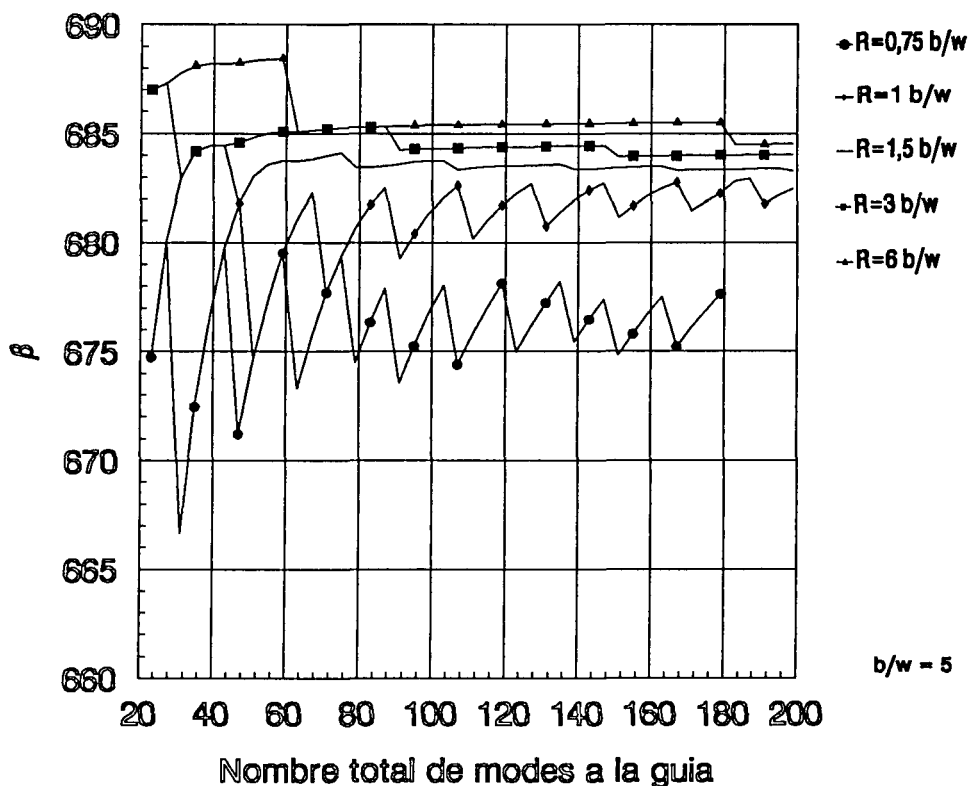


Fig 2.5.16

Es pot observar que s'obté el millor resultat amb $R=1,5$. Segons quina relació R fem servir els resultats tendeixen a valors lleugerament diferents. Aquest és l'anomenat fenomen de la convergència relativa i és el principal inconvenient del mètode.

En les gràfiques següents es presenta la component E_y en el pla dels "fins" obtingudes a partir de [V] (tensions modals a la zona de la guia)

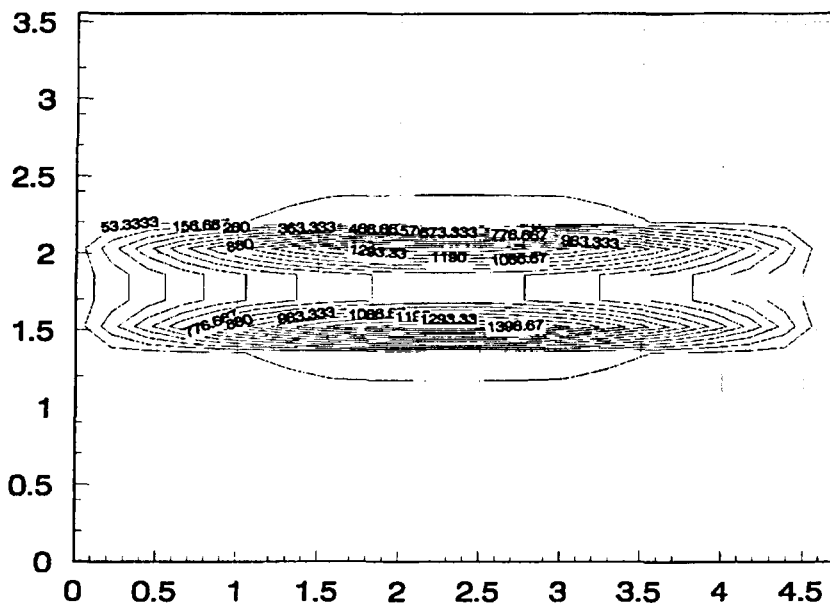
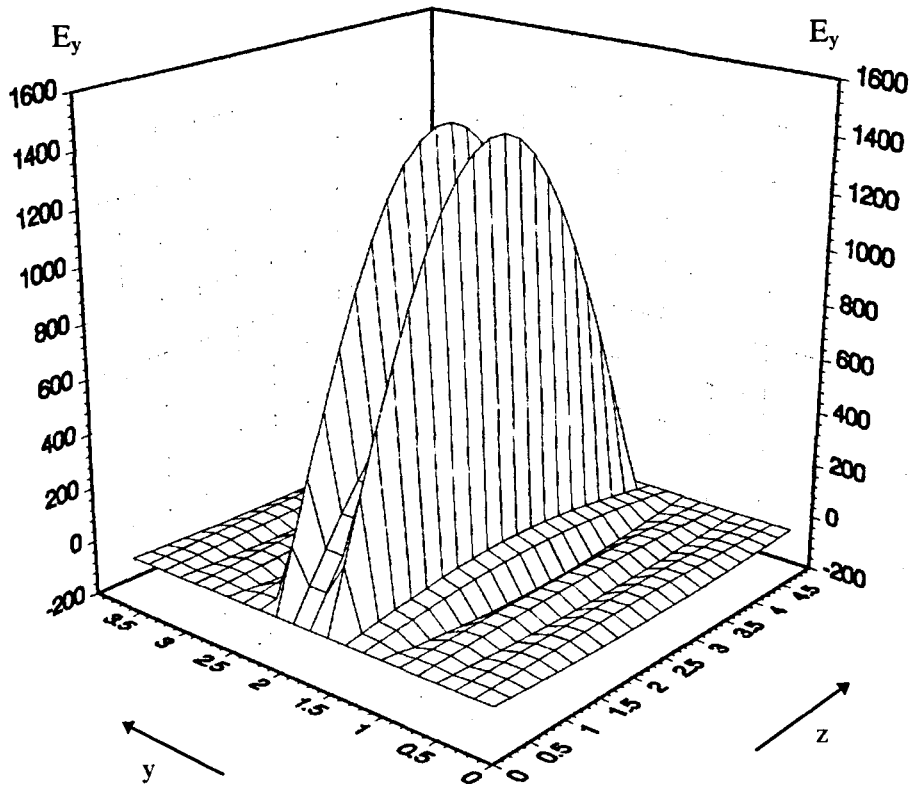


Fig 2.5.17

Es pot observar la satisfacció de la condició de camp elèctric tangencial nul sobre les metal·litzacions, la variació sinusoidal segons l'eix del finline i la concentració de camp en els cantells de les metal·litzacions.

La figura següent presenta la mateixa component de camp E_y però calculada ara a partir de $[U]$ (tensions modals a l'obertura)

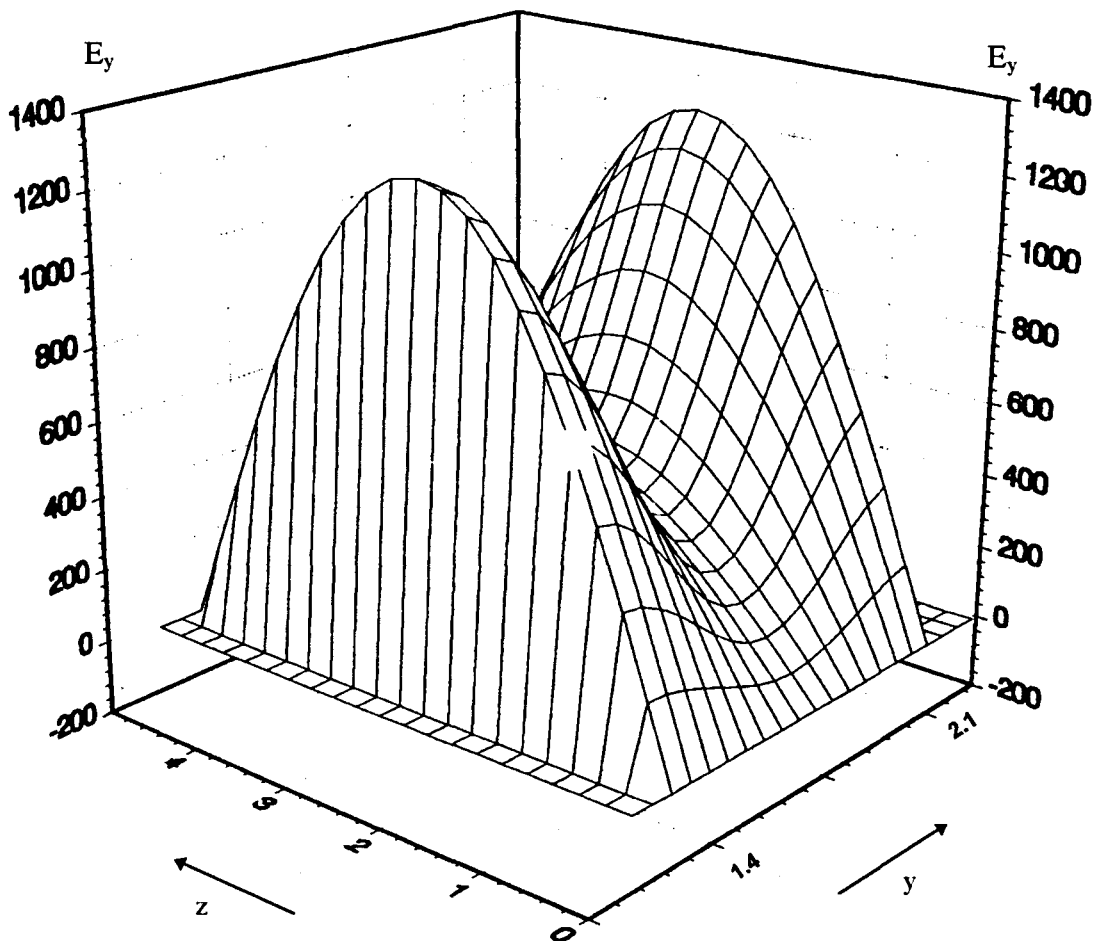


Fig 2.5.18

Si bé no es pot apreciar bé a la figura, l'amplitud de la component de camp es correspon amb la de la figura 2.5.17, comprovant-se la condició de continuïtat de camp a l'obertura.

En les gràfiques següents es poden apreciar la forma de les restants components de camp elèctric en el pla dels "fins":

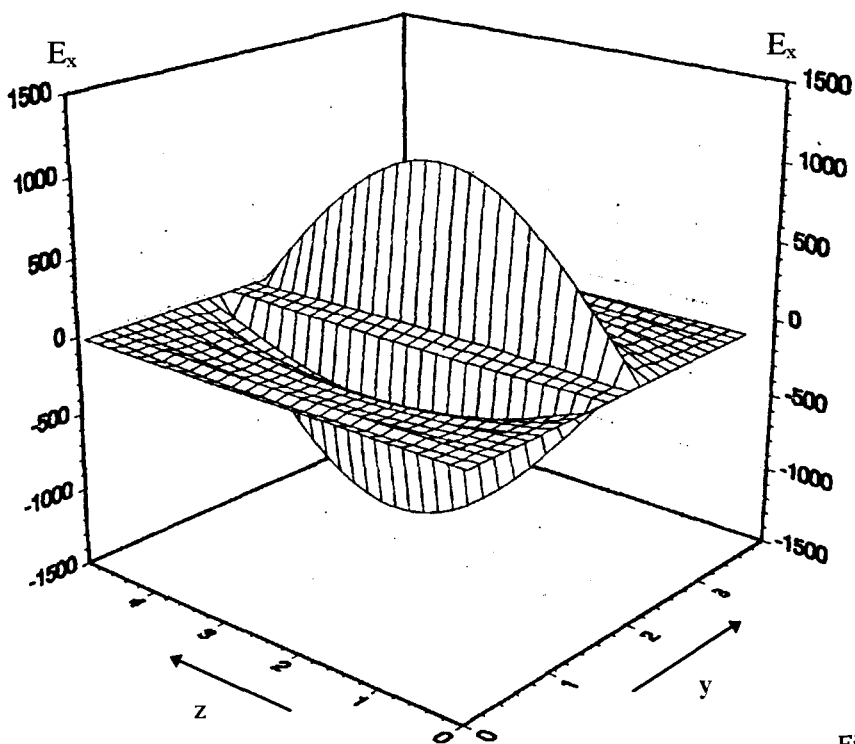


Fig 2.5.19

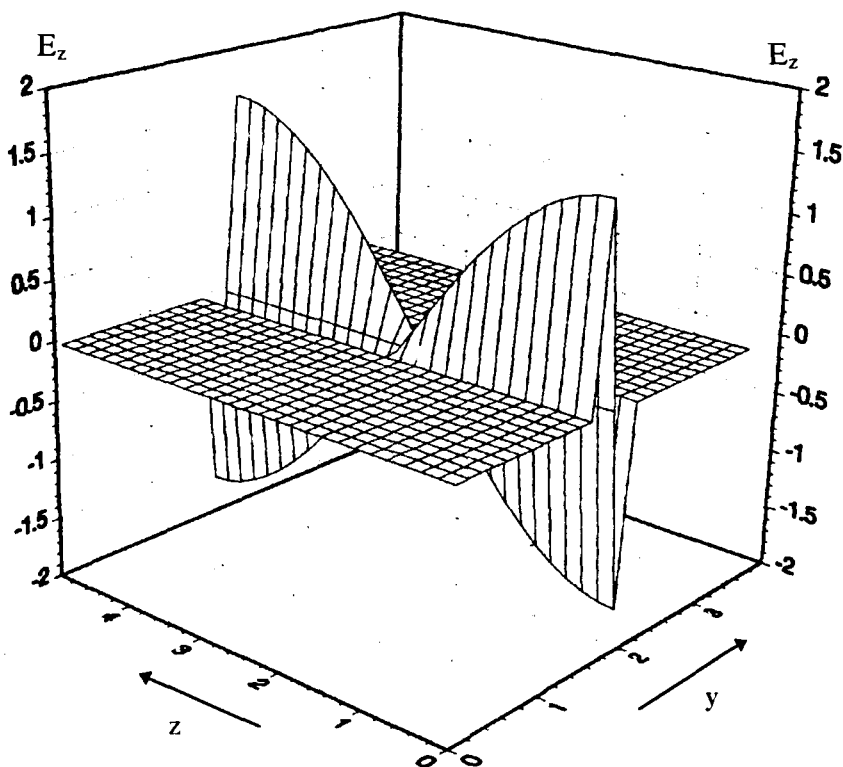


Fig 2.5.20

Per últim es presenta la component E_y en un pla perpendicular a la finline. La primera corba és el resultat de considerar 51 modes a la guia i 9 modes a l'obertura. La segona s'ha construït amb 199 modes a la guia i 29 modes a l'obertura.

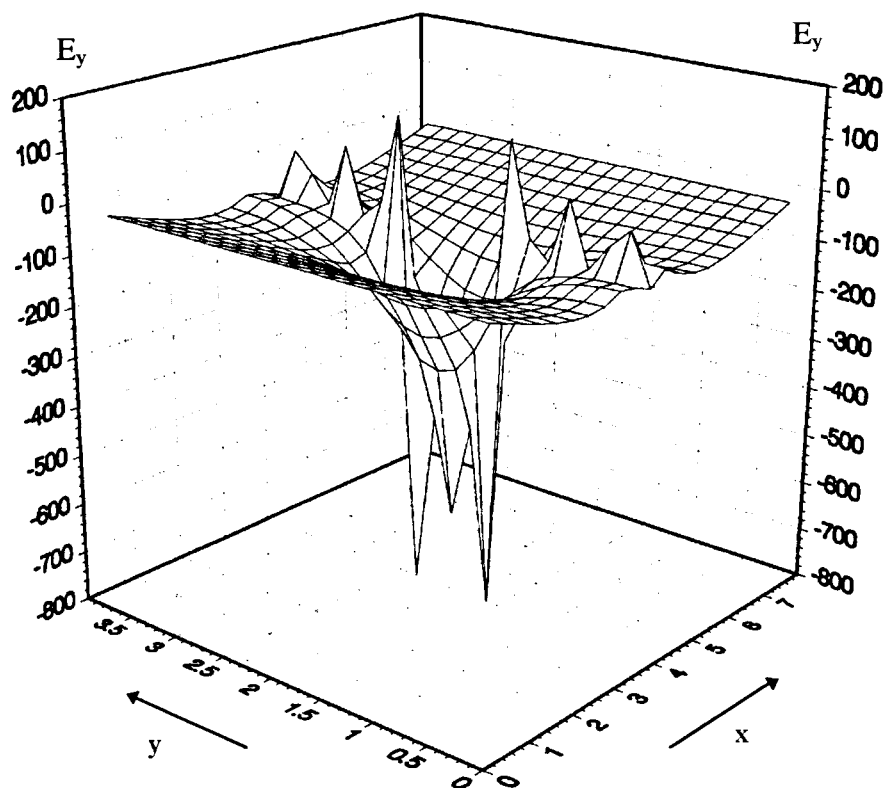


Fig 2.5.21

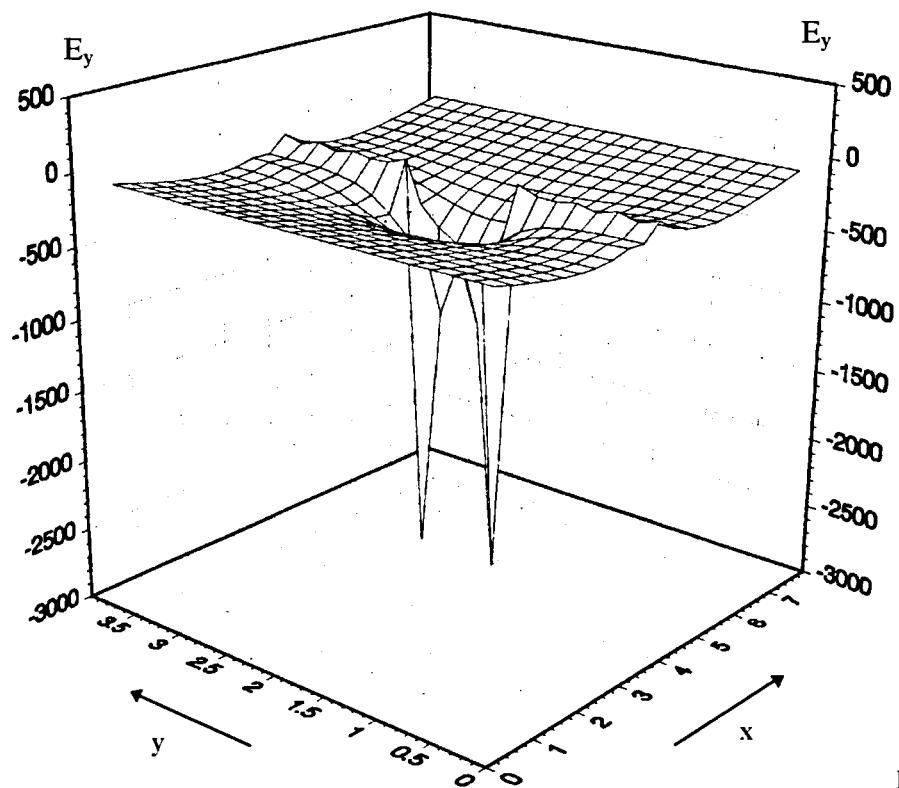


Fig 2.5.22

Es pot observar com es "suavitza" a l'augmentar el nombre de modes, desapareixent "pics" de manera d'aconseguir que E_y sigui nul en el lloc on es troben les metal·litzacions ($a/2 = 3,556$ mm). Observi's també el caràcter singular de E_y just en el cantell de les metal·litzacions. Es pot observar potser millor en la gràfica següent, en la que es representa el perfil de E_y en funció de y en $a/2$:

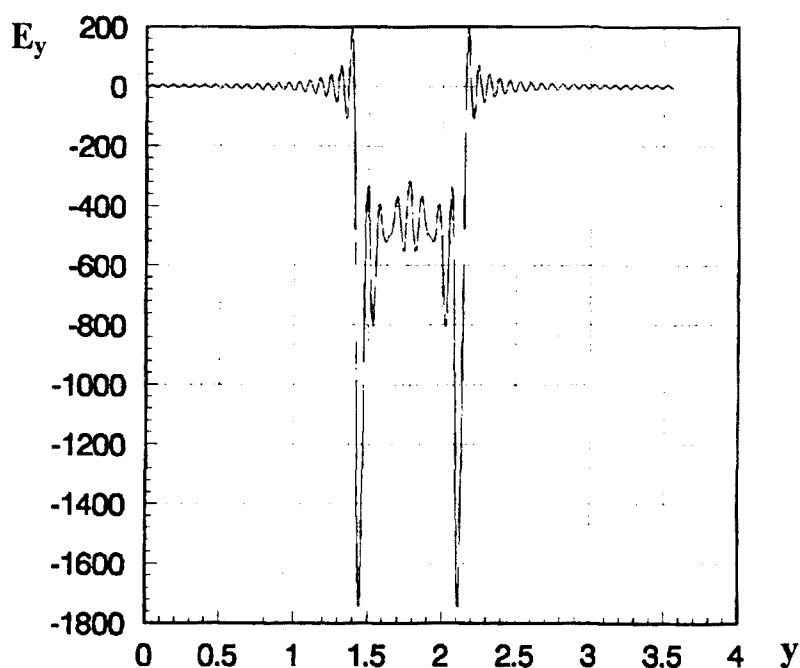


Fig 2.5.23

El temps d'execució depèn fonamentalment del nombre de modes utilitzat per a representar el camp a l'obertura. La figura següent mostra el temps de càlcul necessari en un ordinador VAX 6000-410 per al cas poc favorable des del punt de vista de temps d'execució de $b/w = 2$.

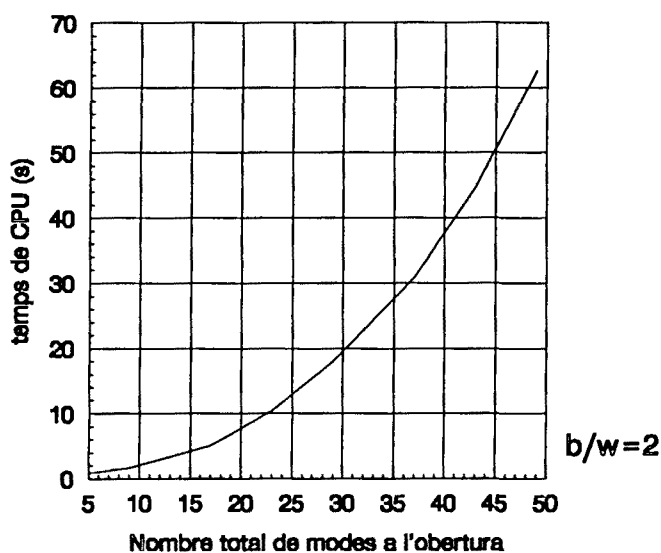


Fig 2.5.24

El nombre total de modes en la guia és, en aquest cas, d'aproximadament el triple. S'obtenen resultats força acurats amb una vintena de modes, el qual suposa un temps d'uns 10 segons. Si la relació b/w és més gran (obertura més petita), el temps de càlcul necessari és molt menor. Per relacions b/w més petites (properes a 1), es pot realitzar un anàlisi equivalent de ressonància transversal generalitzat considerant els corrents a les metal·litzacions en lloc del camp a l'obertura [123]. S'obté així una matriu més petita, i per tant un temps d'execució menor. De totes maneres, el desenvolupament del camp a l'obertura en funcions base en lloc del corrents a les metal·litzacions tampoc origina un temps d'execució excessiu en aquest cas.

El mètode de la ressonància transversal generalitzat es presenta com un bon mètode, tant pel que fa a temps d'execució com de precisió del resultats obtinguts, en l'anàlisi d'estructures planars en guia d'ones rectangular. No necessita recursos d'ordinador excessius -de fet s'ha implementat sobre un ordinador PC amb resultats força satisfactoris-, i com veurem al capítol permet analitzar discontinuïtats en estructures planars en guia d'ones rectangular sense gran dificultat.

No és, de bon tros, un mètode tan general com els basats en una discretització de l'espai i, igual que per al mètode del domini espectral, és necessari desenvolupar una part d'algorisme específic per a cada estructura a analitzar -concretament el càlcul dels productes escalars necessaris per a construir la matriu $[G]$ -.

El principal inconvenient que presenta és una herència de la tècnica d'adaptació modal que utilitza: el fenomen de la convergència relativa.

2.6. El mètode del domini espectral

2.6.1. Implementació

Es conegut que, a partir de la distribució de corrent elèctric en una antena dipol (obtinguda amb el mètode dels moments, per exemple) o dels corrents magnètics (o camps) en una obertura, amb una transformada de Fourier es poden obtenir els camps radiats.

També la solució d'un cert problema d'electromagnetisme es pot obtenir amb una convolució espacial de la funció de Green del problema. Una transformada de Fourier converteix convolucions en el domini espacial a simples multiplicacions en el domini espectral.

En molts problemes es pot expressar la solució dels camps en la forma d'espectre d'ones planes.

En el dit anteriorment es fonamenta el mètode del domini espectral (Spectral Domain Approach -SDA-). En general consisteix en el següent: coneguda l'equació integral del camp elèctric o l'equació integral del camp magnètic del problema, se l'hi aplica una transformada de Fourier i es resol el sistema resultant en el domini espectral amb l'ajut del mètode de Galerkin.

L'aplicació del mètode a estructures planars es deu a Yamashita, Mittra i Itoh [129-133]. Els detalls del desenvolupament es poden trobar a la referència 131. Aquí en donarem una breu descripció.

Considerem una estructura planar multicapa tipus microstrip com la de la figura

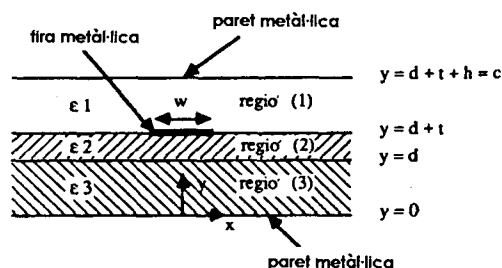


Fig 2.6.1

en principi de dimensions infinites segons x . En cada capa dielèctrica els camps es poden posar en termes de components transversals elèctriques respecte a y (TE^y) i transversals magnètiques respecte a y (TM^y), les quals es poden obtenir a partir d'un potencial escalar elèctric ψ^e i d'un potencial escalar magnètic ψ^h segons les expressions següents [134]:

$$E_{x_i} = \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \frac{\partial^2 \psi_i^o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_i^h}{\partial z}$$

$$E_{y_i} = \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_i^2 \right) \psi_i^o$$

$$E_{z_i} = \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \frac{\partial^2 \psi_i^o}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi_i^h}{\partial x}$$

(2.6.1)

$$H_{x_i} = -\frac{\partial \psi_i^o}{\partial z} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi_i^h}{\partial x \partial y}$$

$$H_{y_i} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_i^2 \right) \psi_i^h$$

$$H_{z_i} = \frac{\partial}{\partial x} \psi_i^o + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \psi_i^h$$

en què $i=1,2,3$ correspon a les regions 1,2 i 3 respectivament. Es considera variacions temporals del tipus $e^{j\omega t}$ i s'assumeix una dependència dels camps en z de la forma $e^{-j\beta z}$.

Els potencials escalars satisfan l'equació de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k_i^2) \psi_i^o = 0$$

(2.6.2)

$$(\nabla^2 + k_i^2) \psi_i^h = 0$$

amb:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_{r_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_{r_3}$$

(2.6.3)

$$k_1^2 = k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad k_2^2 = k_0^2 \epsilon_{r_2}, \quad k_3^2 = k_0^2 \epsilon_{r_3}$$

Definint la transformada de Fourier com:

$$\Phi_i^{o,h}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i^{o,h}(x, y) e^{j\alpha x} dx \quad (2.6.4)$$

podem establir les següents relacions entre les transformades de Fourier de les components dels camps i les transformades de Fourier dels potencials escalars:

$$\vec{E}_{x_i}(\alpha, y) = -\frac{\alpha}{\omega \epsilon_1} \frac{\partial \Psi_i^o(\alpha, y)}{\partial y} - j\beta \Psi_i^h(\alpha, y)$$

$$\vec{E}_{y_i}(\alpha, y) = \frac{1}{j\omega \epsilon_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_i^2 \right) \Psi_i^o(\alpha, y)$$

$$\vec{E}_{z_i}(\alpha, y) = -\frac{\beta}{\omega \epsilon_1} \frac{\partial \Psi_i^o(\alpha, y)}{\partial y} + j\alpha \Psi_i^h(\alpha, y)$$

(2.6.5)

$$\vec{H}_{x_i}(\alpha, y) = j\beta \Psi_i^o(\alpha, y) - \frac{\alpha}{\omega \mu_0} \frac{\partial \Psi_i^h(\alpha, y)}{\partial y}$$

$$\vec{H}_{y_i}(\alpha, y) = \frac{1}{j\omega \mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_i^2 \right) \Psi_i^h(\alpha, y)$$

$$\vec{H}_{z_i}(\alpha, y) = -j\alpha \Psi_i^o(\alpha, y) - \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{\partial \Psi_i^h(\alpha, y)}{\partial y}$$

La transformada de Fourier de l'equació de Helmholtz per als potencials és:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_i^2 \right) \Psi_i^{o,h} = 0 \quad (2.6.6)$$

$$\gamma_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_i^2 \quad (2.6.7)$$

γ_i juga el paper de la constant de propagació en el domini espectral per a la capa i . La solució de les equacions diferencials amb l'imposició de les condicions de contorn de les parets metal·liques en $y=0$ i en $y=c$ és:

$$\Psi_1^o = A^o \cosh \gamma_1 (c-y)$$

$$\Psi_1^h = A^h \sinh \gamma_1 (c-y)$$

$$\Psi_2^o = B^o \sinh \gamma_2 (y-d) + C^o \cosh \gamma_2 (y-d)$$

$$\Psi_2^h = B^h \cosh \gamma_2 (y-d) + C^h \sinh \gamma_2 (y-d)$$

(2.6.8)

$$\Psi_3^o = D^o \cosh \gamma_3 y$$

$$\Psi_3^h = D^h \cosh \gamma_3 y$$

substituint a les expressions 2.6.5 podem obtenir els camps en el domini transformat, quedant-nos en funció dels coeficients A^o, \dots, D^h . Aquests coeficients s'eliminen fent complir les condicions de continuïtat en els interfaces entre les diferents capes de l'estructura en el domini espectral:

En $y=d+t$:

$$\tilde{E}_{x1}(\alpha, d+t) = \tilde{E}_{x2}(\alpha, d+t) = \tilde{E}_x(\alpha)$$

$$\tilde{E}_{x2}(\alpha, d+t) = \tilde{E}_{x3}(\alpha, d+t) = \tilde{E}_x(\alpha)$$

$$\tilde{H}_{x2}(\alpha, d+t) - \tilde{H}_{x1}(\alpha, d+t) = \tilde{J}_x(\alpha)$$

$$\tilde{H}_{x2}(\alpha, d+t) - \tilde{H}_{x1}(\alpha, d+t) = -\tilde{J}_x(\alpha)$$

(2.6.9)

En $y=d$:

$$\tilde{E}_{x2}(\alpha, d) = \tilde{E}_{x3}(\alpha, d)$$

$$\tilde{E}_{x2}(\alpha, d) = \tilde{E}_{x3}(\alpha, d)$$

$$\tilde{H}_{x3}(\alpha, d) - \tilde{H}_{x2}(\alpha, d) = 0$$

$$\tilde{H}_{x3}(\alpha, d) - \tilde{H}_{x2}(\alpha, d) = 0$$

(2.6.10)

en què $\tilde{J}_z(\alpha)$ i $\tilde{J}_x(\alpha)$ són les transformades de Fourier de les components respectives de densitat de corrent a la tira metàl·lica en $y=d+t$.

Aplicant les condicions de contorn anteriors a les expressions dels camps i, després de nombroses manipulacions algebraïques, s'obté el següent sistema:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{zz} & \tilde{Z}_{zx} \\ \tilde{Z}_{xz} & \tilde{Z}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} \quad (2.6.11)$$

en què:

$$\tilde{Z}_{zz} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\beta^2 \tilde{Z}_o + \alpha^2 \tilde{Z}_h]$$

$$\tilde{Z}_{zx} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [\tilde{Z}_o - \tilde{Z}_h]$$

$$\tilde{Z}_{xz} = \tilde{Z}_{zx}$$

$$\tilde{Z}_{xx} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha^2 \tilde{Z}_o + \beta^2 \tilde{Z}_h] \quad (2.6.12)$$

$$\tilde{Z}_o = \frac{\gamma_{y2} Ct_3 + \gamma_{y3} Ct_2}{Ct_2 Ct_3 + Ct_1 Ct_3 \gamma_{y2} / \gamma_{y1} + Ct_1 Ct_2 \gamma_{y3} / \gamma_{y1} + \gamma_{y3} / \gamma_{y2}}$$

$$\tilde{Z}_h = \frac{\gamma_{z2} Ct_2 + \gamma_{z3} Ct_3}{\gamma_{z1} \gamma_{z2} Ct_1 Ct_2 + \gamma_{z1} \gamma_{z3} Ct_1 Ct_3 + \gamma_{z2} \gamma_{z3} Ct_2 Ct_3 + \gamma_{z2}^2}$$

$$Ct_1 = \coth \gamma_1 h \quad Ct_2 = \coth \gamma_2 t \quad Ct_3 = \coth \gamma_3 d$$

Fixem-nos que el sistema en el domini espacial s'expressaria en la forma de convolucions:

$$\begin{aligned} E_z(x) &= \int [Z_{zz}(x-x') J_z(x') + Z_{zx}(x-x') J_x(x')] dx' \\ E_x(x) &= \int [Z_{xz}(x-x') J_z(x') + Z_{xx}(x-x') J_x(x')] dx' \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

La matriu de $\tilde{Z}_()$ de l'equació 2.6.13 serà, per tant, la funció diàdica de Green en el domini espectral.

El sistema 2.6.11 es resol amb el mètode de Galerkin, expandint-se les components de la densitat de corrent en el domini espectral amb funcions base ortogonals conegudes:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z(\alpha) &= \sum c_m \tilde{J}_{zm}(\alpha) & m=1, \dots, N \\ \tilde{J}_x(\alpha) &= \sum d_m \tilde{J}_{xm}(\alpha) & m=1, \dots, M \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

i obtenint-se el següent sistema homogeni:

$$\sum_{n=1}^N P_{kn} c_n + \sum_{n=1}^M Q_{kn} d_n = 0, \quad k=1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{n=1}^N R_{ln} c_n + \sum_{n=1}^M S_{ln} d_n = 0, \quad l=1, 2, \dots, M$$
(2.6.15)

en què:

$$P_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{zk}(\alpha) \tilde{Z}_{zz}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{zn}(\alpha) d\alpha$$

$$Q_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{zk}(\alpha) \tilde{Z}_{zx}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{zn}(\alpha) d\alpha$$

$$R_{ln} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{xl}(\alpha) \tilde{Z}_{zz}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{zn}(\alpha) d\alpha$$

$$S_{ln} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{xl}(\alpha) \tilde{Z}_{zx}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{zn}(\alpha) d\alpha$$
(2.6.16)

Els termes de la matriu del sistema homogeni depenen de la constant de propagació β . Variant β fins que el determinant d'aquesta matriu sigui nul obtindrem la constant de propagació. Evaluant llavors els coeficients c_m i d_m obtindrem la densitat de corrent en el domini transformat, i d'aquesta els camps a les diferents parts de l'estructura en el domini espectral. Aquests serviran per calcular la potència en la direcció z a partir del vector de Poynting (evaluat en el domini espectral gràcies al teorema de Parseval) el qual ens permetrà obtenir l'impedància característica segons la definició potència-tensió o potència -corrent.

L'exactitud del mètode i el temps de càlcul necessari per a obtenir resultats satisfactoris depèn fonamentalment dels tipus de funcions base que es facin servir a l'aplicar el mètode de Galerkin en el domini espectral. Per a una estructura microstrip, les densitats de corrent a les tires metàl·liques -en el domini espacial- es poden representar per:

Trens de pulsos rectangulars:

$$J_{zn}(x) = \begin{cases} 1, & (m-1)\Delta x < x < m\Delta x \\ 0, & \text{cas contrari} \end{cases} \quad \Delta x = w / 2M$$

$$J_{xm}(x) = \begin{cases} 1, & (m-1)\Delta x' < x < m\Delta x' \\ -1, & -m\Delta x' < x < -(m-1)\Delta x' \\ 0, & \text{cas contrari} \end{cases} \quad \Delta x' = w / 2N$$
(2.6.17)

Polinomis de Legendre per a $J_{zm}(x)$ i funcions trigonomètriques per a $J_{xm}(x)$:

$$J_{zm}(x) = P_{2(m-1)}\left(\frac{2x}{w}\right), \quad 0 < |x| < \frac{w}{2} \quad (2.6.18)$$

$$J_{xm}(x) = \sin\left[(m-1)\pi\left(\frac{2x}{w}\right)\right]$$

Funcions trigonomètriques modificades per a que tinguin en compte l'efecte de cantell:

$$J_{zm} = \frac{\cos[2(m-1)\pi x/w]}{\sqrt{1-(2x/w)^2}}, \quad m=1, 2, \dots \quad (2.6.19)$$

$$J_{xm}(x) = \frac{\sin[2m\pi x/w]}{\sqrt{1-(2x/w)^2}}, \quad m=1, 2, \dots$$

Aquestes últimes expressions, a l'incloure l'efecte de cantell, donen una aproximació molt acurada de les densitats de corrent que existeixen realment a les tires metàl·liques, fent necessari utilitzar molt poques funcions base per a obtenir resultats força acurats. De fet s'ha comprovat que, per al cas de microstrip, amb $M=N=1$ els resultats obtinguts són excel·lents, permetent resoldre el sistema 2.6.19 "a ma" i programar directament la solució. Per facilitar la programació i el càlcul de la impedància característica, s'han normalitzat de manera que la integral de $J_z(x)$ sobre la tira metàl·lica valgui la unitat i que en l'expressió de la transformada de Fourier de $J_x(x)$ no apareguin constants multiplicatives:

$$J_{z1}(x) = \frac{2}{w\pi} \frac{1}{\sqrt{1-(2x/w)^2}} \quad (2.6.20)$$

$$J_{x1}(x) = \frac{4j}{\pi w} \frac{\sin(2\pi/x)}{\sqrt{1-(2x/w)^2}}$$

Tenint en compte les propietats de les funcions de Bessel [135] les transformades de Fourier de les expressions anteriors són:

$$\tilde{J}_{z1}(\alpha) = J_0(|w\alpha/2|) \quad (2.6.21)$$

$$\tilde{J}_{x1}(\alpha) = J_0\left(|\frac{w\alpha}{2} + \pi|\right) - J_0\left(|\frac{w\alpha}{2} - \pi|\right)$$

Per a estructures com ara la guia coplanar, en les que l'amplada de les metal·litzacions és molt més gran que l'amplada dels slots, s'obtenen solucions acurades amb menys temps de càlcul a l'haver de resoldre sistemes d'equacions més petits si, en lloc d'aplicar el mètode de Galerkin a les densitats de corrent de les metal·litzacions, s'aplica als camps dels slots: de l'equació

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{xx} & \tilde{Z}_{xz} \\ \tilde{Z}_{zx} & \tilde{Z}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{bmatrix} \quad (2.6.11)$$

podem obtenir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{xx} & \tilde{Y}_{xz} \\ \tilde{Y}_{zx} & \tilde{Y}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (2.6.22)$$

en què:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{xx} & \tilde{Y}_{xz} \\ \tilde{Y}_{zx} & \tilde{Y}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{xx} & \tilde{Z}_{xz} \\ \tilde{Z}_{zx} & \tilde{Z}_{zz} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\tilde{Y}_{xx} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha^2}{\tilde{Z}_o} + \frac{\beta^2}{\tilde{Z}_h} \right) \quad (2.6.23)$$

$$\tilde{Y}_{zx} = \tilde{Y}_{xz} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{1}{\tilde{Z}_o} - \frac{1}{\tilde{Z}_h} \right)$$

$$\tilde{Y}_{zz} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\beta^2}{\tilde{Z}_o} + \frac{\alpha^2}{\tilde{Z}_h} \right)$$

Les funcions base, juntament amb les seves transformades de Fourier, utilitzades per a les diferents estructures analitzades són:

Finline centrat:

$$E_{x1}(x) = \frac{2}{w\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - (2x/w)^2}}$$

$$E_{z1}(x) = \frac{4j}{\pi w} \frac{\sin(2\pi x/w)}{\sqrt{1 - (2x/w)^2}} \quad (2.6.24)$$

$$\tilde{E}_{x1}(\alpha) = J_0(|w\alpha/2|)$$

$$\tilde{E}_{z1}(\alpha) = [J_0(|w\alpha/2 + \pi|) - J_0(|w\alpha/2 - \pi|)]$$

Finline descentrat:

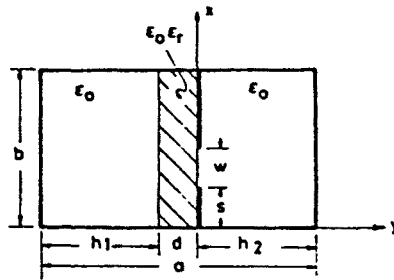


Fig 2.6.2

$$E_{xm}(x) = \frac{\cos\left[m\pi\left(\frac{x-s}{w}\right)\right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{2(x-s)}{w} - 1\right]^2}} ; \quad s \leq x \leq s+w$$

$$E_{zm}(x) = \frac{\sin\left[m\pi\left(\frac{x-s}{w}\right)\right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{2(x-s)}{w} - 1\right]^2}} ; \quad s \leq x \leq s+w$$

(2.6.25)

$$\tilde{E}_{x1}(\alpha) = \operatorname{Re}\left\{e^{j\alpha\left(s + \frac{w}{2}\right)} J_0\left[\frac{1}{2}(\alpha w)\right]\right\}$$

$$\tilde{E}_{z1}(\alpha) = \operatorname{Im}\left\{e^{j\alpha\left(s + \frac{w}{2}\right)} \left[J_0\left[\frac{1}{2}(\alpha w + \pi)\right] + J_0\left[\frac{1}{2}(\alpha w - \pi)\right]\right]\right\}$$

Guia coplanar:

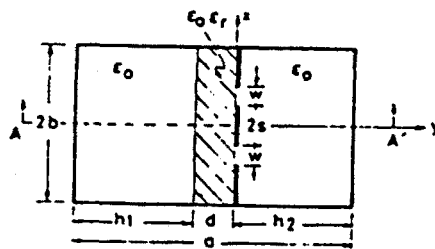


Fig 2.6.3

Mode senar:

Tenint en compte l'eix de simetria AA' de la figura anterior i considerant-lo una paret elèctrica, per a aquest mode de funcionament, la guia coplanar equival a una finline amb el slot descentrat. Per al seu anàlisi es fan servir les mateixes expressions que per al finline descentrat, tenint en compte però les noves dimensions.

Mode parell:

$$\vec{E}_{x1}(\alpha) = \text{Im} \left(e^{j\alpha(s + \frac{w}{2})} J_0 \left[\frac{1}{2} (\alpha w) \right] \right) \quad (2.6.26)$$

$$\vec{E}_{x1}(\alpha) = \text{Re} \left(e^{j\alpha(s + \frac{w}{2})} \left\{ J_0 \left[\frac{1}{2} (\alpha w + \pi) \right] + J_0 \left[\frac{1}{2} (\alpha w - \pi) \right] \right\} \right)$$

* Formulació de la matriu de inmitàncies (Inmittance Approach)

Es tracta d'un mètode degut a T.Itoh [136] per mitjà del qual es pot arribar a l'expressió 2.6.11 - 2.6.12 sense tenir que fer llargs desenvolupaments matemàtics a partir dels camps. Es basa en la interpretació de la transformada de Fourier com un espectre d'ones planes que permet establir un model amb línies de transmissió de l'estructura sota estudi:

Assumint propagació en la direcció z en la forma $e^{-j\beta z}$, la transformada inversa de Fourier dels camps és:

$$\Phi(x, y) e^{-j\beta z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\alpha, y) e^{-j(\alpha x + \beta z)} d\alpha \quad (2.6.27)$$

en què:

$$\tilde{\Phi}(\alpha, y) = \begin{cases} \tilde{E}_y(\alpha, y) \\ \tilde{H}_y(\alpha, y) \end{cases} ; \quad \Phi(x, y) = \begin{cases} E_y(x, y) \\ H_y(x, y) \end{cases} \quad (2.6.28)$$

A partir d'aquesta expressió podem dir que les components segons y dels camps es poden considerar com la superposició d'ones planes inhomogènies que es propaguen en una direcció continguda en el pla xz formant un angle θ amb l'eix z:

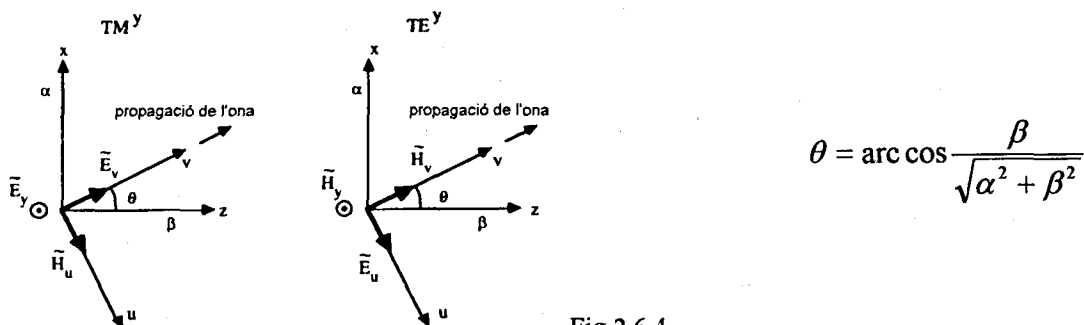


Fig 2.6.4

Fem a continuació un canvi de sistema de coordenades (rotació d'eixos) segons:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{2.6.30}$$

Les ones en la direcció v es descomposen en TM^y ($\tilde{E}_y, \tilde{E}_v, \tilde{H}_u$) i en TE^y ($\tilde{H}_y, \tilde{E}_u, \tilde{H}_v$). Considerant que els camps TM són creats per la densitat de corrent \tilde{J}_v i que els TE són creats per \tilde{J}_u , llavors, en referència a la figura exemple:

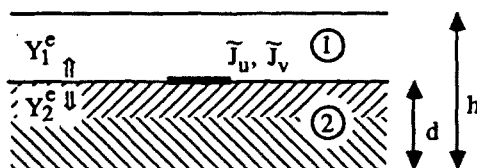


Fig 2.6.5

podem establir les relacions per al cas TM:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{u1} - \tilde{H}_{u2} &= \tilde{J}_v & -\frac{\tilde{H}_{u1}}{\tilde{E}_{v1}} &= Y_1^o & \frac{\tilde{H}_{u2}}{\tilde{E}_{v2}} &= Y_2^o \\ \tilde{E}_v &= -\tilde{Z}_o \tilde{J}_v & \tilde{E}_{v1} &= \tilde{E}_{v2} = \tilde{E}_v \end{aligned}$$

$$\tilde{Z}_o = \frac{1}{Y_1^o + Y_2^o}$$

$$Y_i^e = -\frac{\tilde{H}_u}{\tilde{E}_v} = \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_{r1}}{\gamma_1} \tag{2.6.31}$$

$$Y_i^h = \frac{\tilde{H}_v}{\tilde{E}_u} = \frac{\gamma_1}{j\omega\mu_0}$$

Y_i^e són les admittàncies d'ona per als modes TM. Tot això ens permet establir el següent model amb línies de transmissió per a les ones TM^y de l'estructura exemple:

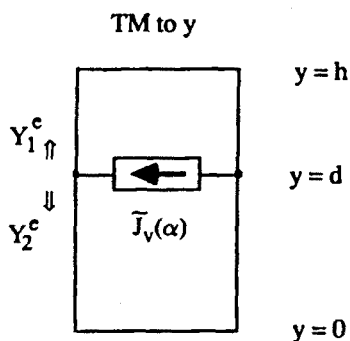


Fig 2.6.6

Analogament per al cas TE:

$$\begin{aligned}\vec{E}_u &= -\tilde{Z}_h \vec{J}_u & \vec{E}_{u1} &= \vec{E}_{u2} = \vec{E}_u \\ \tilde{Z}_h &= \frac{1}{Y_1^h + Y_2^h}\end{aligned}\quad (2.6.32)$$

Y_i^h són les admittàncies d'ona per als modes TE. El model amb línies de transmissió és:

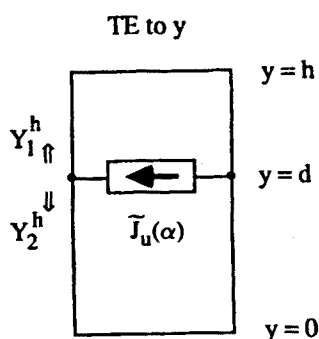


Fig 2.6.7

Tenint en compte

$$\begin{aligned}u &= z \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - x \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ v &= z \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + x \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\end{aligned}\quad (2.6.32)$$

podem posar

$$\begin{aligned}\vec{E}_u &= \vec{E}_x \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \vec{E}_z \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \vec{E}_v &= \vec{E}_x \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \vec{E}_z \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \vec{J}_u &= \vec{J}_x \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \vec{J}_z \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \vec{J}_v &= \vec{J}_x \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \vec{J}_z \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\end{aligned}\quad (2.6.33)$$

operant:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{yy} & \tilde{Z}_{yx} \\ \tilde{Z}_{xy} & \tilde{Z}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Z}_{yy} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta^2 \tilde{Z}_o + \alpha^2 \tilde{Z}_h)$$

$$\tilde{Z}_{xy} = \tilde{Z}_{yx} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (\tilde{Z}_o - \tilde{Z}_h)$$

$$\tilde{Z}_{xx} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha^2 \tilde{Z}_o + \beta^2 \tilde{Z}_h)$$

(2.6.34)

S'obté el mateix resultat que amb el mètode general descrit anteriorment, però no ens ha calgut desenvolupar els camps. Per a una estructura multicapa com la de la figura:

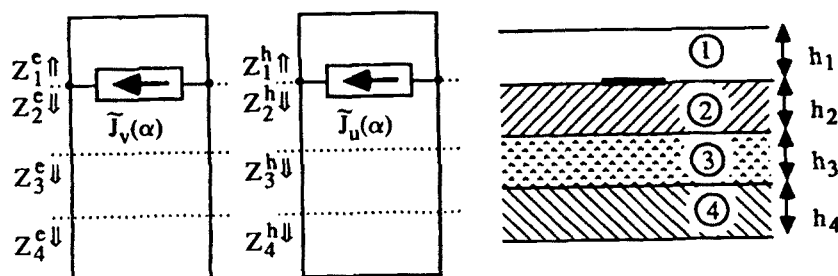


Fig 2.6.8

les diferents impedàncies s'obtenen per les fórmules pròpies de teoria de línies de transmissió:

$$Z_{en} = Z_{o1} \frac{Z_L \coth \gamma_1 h_1 + Z_{o1}}{Z_{o1} \coth \gamma_1 h_1 + Z_L} \quad (2.6.35)$$

Per al càlcul de la impedància característica és necessari trobar el vector de Poynting, el qual significa conèixer E_x , E_y , H_x , H_y o bé les seves transformades de Fourier. El procediment, llarg i pesat, es pot trobar a la referència [131].

* Cas d'estructures tancades

Amb aquest mètode es pretenen analitzar estructures tancades com ara la finline. Per a simplificar la programació, altres estructures com la microstrip -obertes-, es simulen tancant-les dins de guies d'ona rectangulars de dimensions considerables, obtenint-se resultats tan acurats com si es consideressin obertes.

El tancar l'estructura de la figura 2.6.8 per exemple, amb dues parets metàl·liques segons y situades a $x=-L$ i a $x=L$, provoca, per les propietats de les parets elèctriques, que les funcions que representen els camps segons x siguin periòdiques amb període $2L$.

si les considerem definides entre $-\infty$ i ∞ per poder aplicar la transformada de Fourier. En el domini de Fourier, una funció periòdica té un espectre discret. Cada ratlla espectral ve donada per:

$$\tilde{\Phi}(\alpha) = \int_{-L}^L \Phi(x) e^{j\alpha x} dx \quad ; \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad (2.6.36)$$

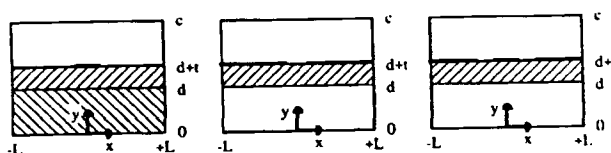


Fig 2.6.9

Aquesta expressió, a part de l'interval d'integració, es diferencia de la 2.6.4 en que ara α és una variable discreta. Fixem-nos que no hem diferenciat el $\tilde{\Phi}(\alpha)$ donat per aquesta expressió del que dona l'expressió 2.6.4. Això és així perquè en el desenvolupament anterior són aplicables indistintament l'expressió 2.6.4 o l'expressió 2.6.36. La primera la farem servir per a un problema obert i la segona és la que hem utilitzat al tractar estructures tancades. En la bibliografia [131] fan referència a l'expressió 2.6.36 com una transformada discreta de Fourier. Per no induir a confusió, atenent a la formulació típica del processat del senyal en Telecomunicació, nosaltres ens referim a l'expressió 2.6.36 com els coeficients de la sèrie de Fourier d'una funció periòdica. La transformada discreta de Fourier en la seva definició habitual [137] discretitza α i també x , convertint-se la integral en un sumatori.

L'adopció de la formulació 2.6.36 té també una sèrie d'avantages de càlcul i programació accesoris. Primer, que totes les integrals respecte a α (com les que apareixen a les expressions 2.6.16) es converteixen en sumatoris. Segon, permet evitar els pols de les funcions diàdiques de Green. Aquests són els zeros del denominador de les expressions 2.6.12 o 2.6.23 en els quals apareix el terme β (constant de fase) que volem determinar, impossibilitant el coneixement a priori de la posició dels pols. Per al cas de dielèctrics sense pèrdues hauriem de canviar el camí d'integració en l'evaluació dels termes del sistema 2.6.11 o 2.6.22 en la forma següent:

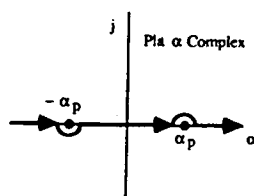


Fig 2.6.10

La cosa es complicaria molt més si admetem pèrdues al dielèctric, llavors els pols no estarien situats sobre l'eix real i el camí d'integració seria més complicat, havent de recórrer, per exemple, a tècniques pròpies del mètode analític de Wiener-Hopf o de càlcul dels residus [103] difícilment programables.

Si α és discreta serà molt més difícil que coincideixi en un pol. Si tot i així en troba algun podem, per al cas d'estructures obertes simulades, augmentar o disminuir lleugerament el valor de L per variar el pas de discretització ($\alpha=n\pi/L$). Per al cas d'estructures tancades en les que L és fixe, si a la freqüència de càlcul es troba un pol (reconegut pel programa a partir dels valors extrems obtinguts), es repeteixen els càlculs en un interval de freqüències a l'entorn de la de treball i s'interpolen els resultats.

El nucli de les integrals del sistema 2.6.15 tendeix a zero quan $|\alpha|\rightarrow\infty$, doncs en ells apareix el producte de dues densitats de corrent en el domini espectral que venen donades per funcions de Bessel de primera espècie i ordre zero, les quals tendeixen a zero quan $\alpha\rightarrow\infty$, multiplicades per una $\tilde{Z}_0(\alpha, \beta)$ que tendeix a zero o a un valor constant quan $\alpha\rightarrow\infty$.

Al discretitzar α les integrals 2.6.16 del sistema 2.6.15 es converteixen en sumatoris entre $-\infty$ i ∞ .

Per l'esmentat en el paràgraf anterior, les sèries resultants que es sumen són convergents. Aixó permet tenir una molt bona aproximació del resultat correcte al truncar el sumatori a un nombre finit de termes quan el nombre d'aquests és gran, cosa que s'ha de fer per a la seva evaluació numèrica.

2.6.2. Resultats i comentaris

Els programes desenvolupats permeten calcular la constant de fase β , la impedància característica Z_0 i la constant d'atenuació α_n (pèrdues només als dielèctrics) de les següents estructures: microstrip, stripline, finline amb el slot centrat i descentrat i guia coplanar (mode parell i mode senar), permetent fins a quatre capes de dielèctic.

En les gràfiques següents es pot constatar la bona correspondència entre els resultats obtinguts i els presentats a la bibliografia:

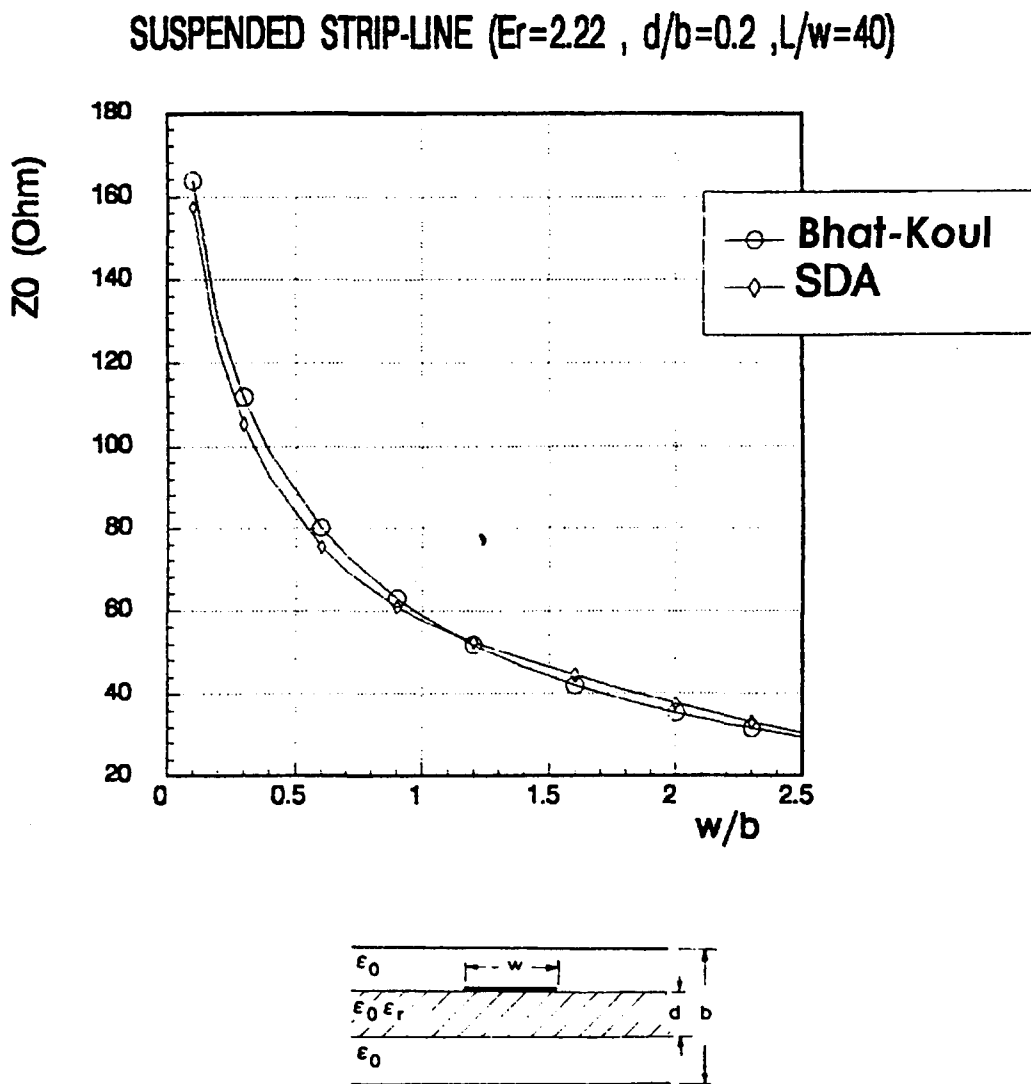


Fig 2.6.11

SUSPENDED STRIP-LINE ($\epsilon_r=2.22$, $d/b=0.2$, $L/w=40$)

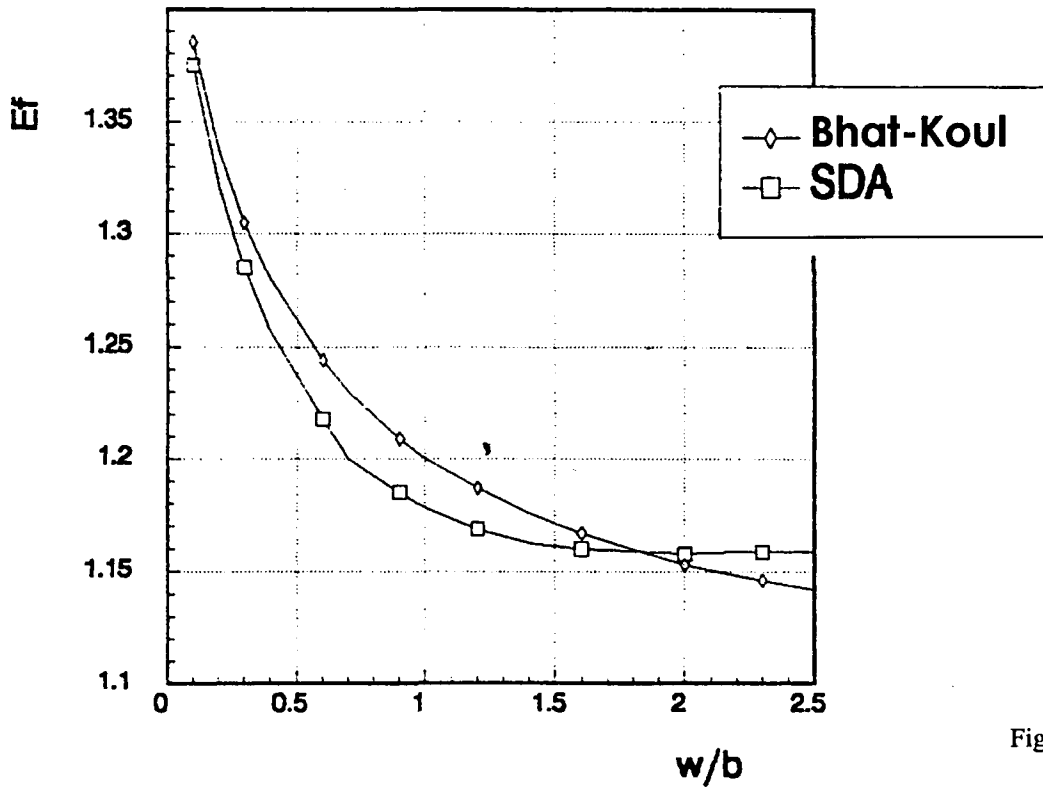


Fig 2.6.12

FINLINE ($\epsilon_r=2.17$, $\text{GUIA}=\text{WR}(28)$, $h=0.254\text{mm}$, $f=25\text{GHz}$)

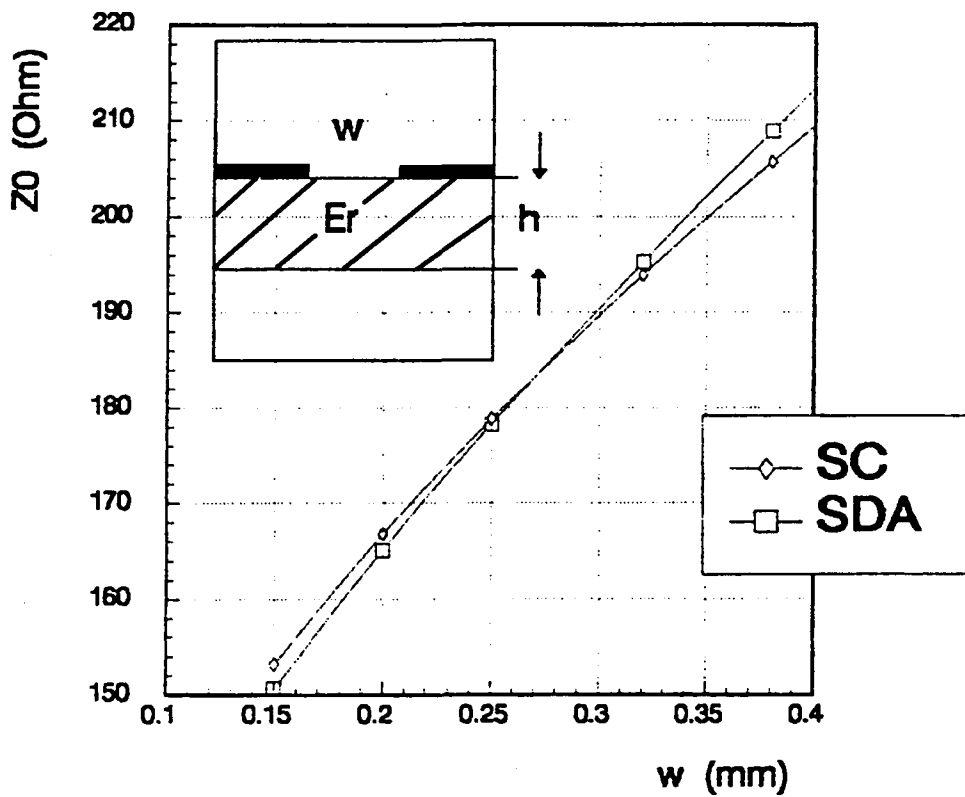


Fig 2.6.13

FINLINE ($\epsilon_r=2.17$, GUIA=WR(28), $h=0.254\text{mm}$, $f=25\text{GHz}$)

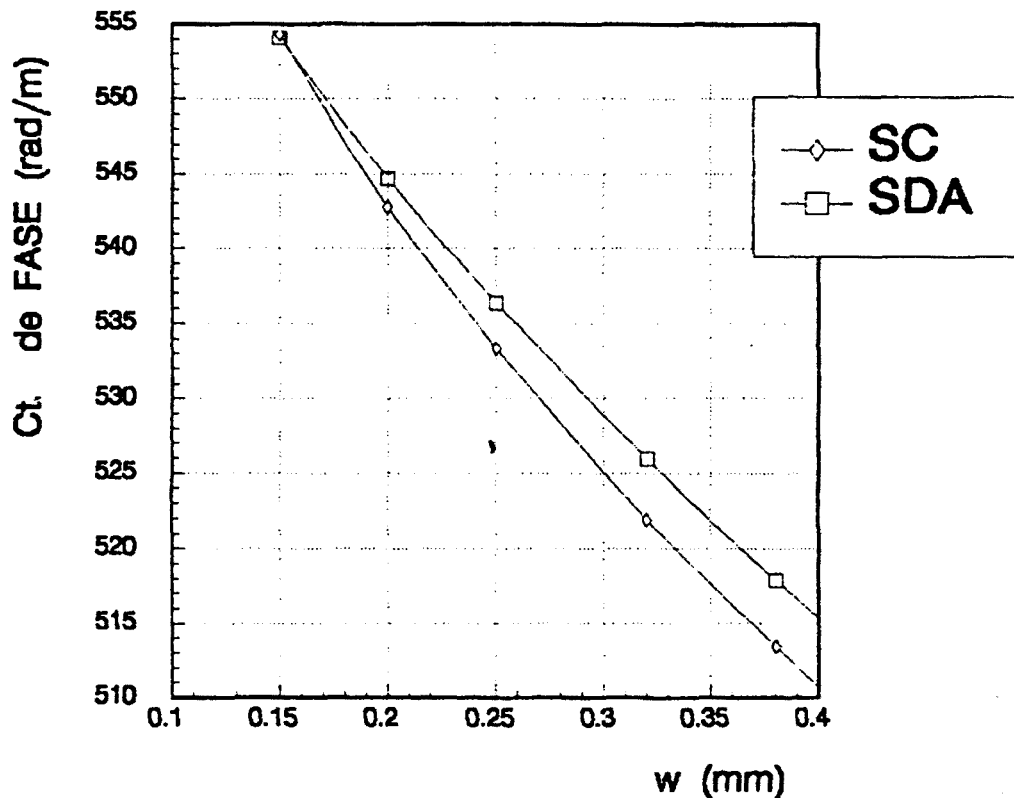


Fig 2.6.14

Les primeres gràfiques mostren els resultats d'una estructura oberta com la "suspended stripline" comparades amb els valors donats per B. Bhat i S.K. Koul [138] obtinguts amb expressions aproximades. Les corresponents a finlines es comparen amb els resultats obtinguts amb el programa comercial SUPERCOMPACT, que si bé desconexim quines expressions fa servir, sí que podem dir que són fórmules tancades aproximades. El cas de finline també s'ha comprovat amb els resultats proporcionats per la implementació del mètode aproximat de Cohn [139], constatant-se la bona correlació entre els resultats proporcionats per ambdós mètodes.

En totes aquestes gràfiques es pot observar una millor correspondència entre els resultats obtinguts i els proporcionats per la bibliografia en el cas de la impedància característica. En el procediment de càlcul SDA primer s'ha d'obtenir la constant de fase, i en funció del resultat obtingut es cacula la impedància característica, per tant els errors comesos en el pas previ de càlcul de β s'acumularan en el càlcul de Z_0 . Les petites discrepàncies entre els resultats de constant de fase proporcionats pel mètode SDA respecte als proporcionats per la bibliografia provenen d'aquests últims. Els mètodes aproximats utilitzats realitzen anàlisis quasi-TEM, els quals donen una bona aproximació de Z_0 però difícilment poden aproximar d'una manera fidel les característiques dispersives de les estructures inhomogènies presentades.

En les gràfiques següents es posa de manifest la importància de l'elecció de les funcions base apropiades:

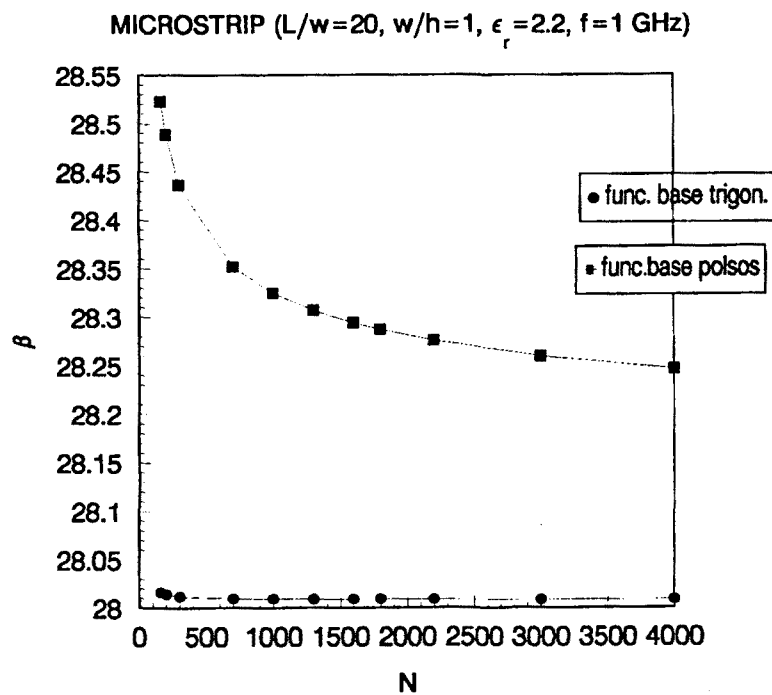


Fig 2.6.15

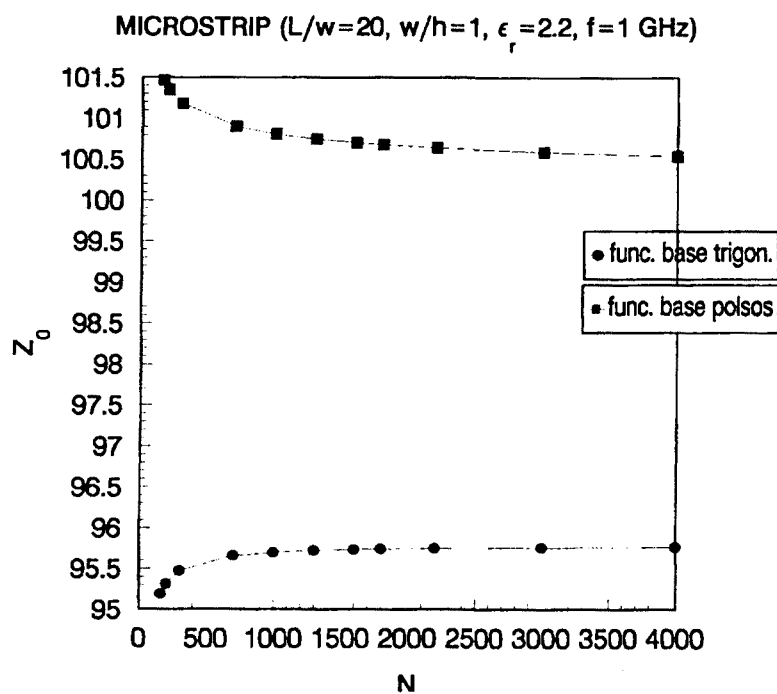


Fig 2.6.16

En aquestes gràfiques i les següents N és el nombre de valors discrets de α utilitzats per a l'avaluació de les integrals (sèries) del sistema 2.6.15. S'ha considerat una única funció per a representar $\tilde{J}_x(\alpha)$ i també una única funció per a la representació de $\tilde{J}_z(\alpha)$ en els dos casos. Les expressions per al cas trigonomètric venen donades per 2.6.19. Per al cas de polsos venen donades per: (Transformades de Fourier de l'expressió 2.6.17)

$$\tilde{J}_{z1}(\alpha) = \frac{\sin(w\alpha/2)}{w\alpha/2} \quad ; \quad \tilde{J}_{x1}(\alpha) = \frac{\cos(w\alpha/2) - 1}{\alpha} \quad (2.6.37)$$

que es corresponen al domini espacial amb:

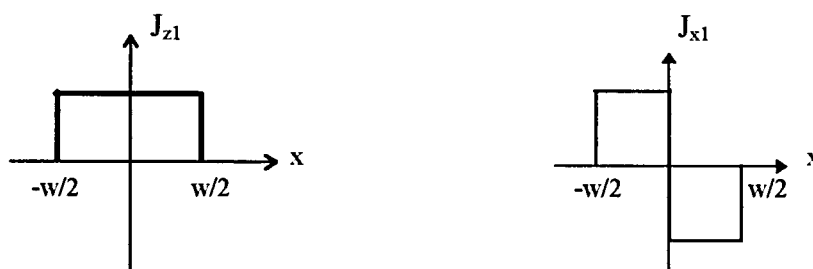


Fig 2.6.17

El primer que es pot observar és que inclòs amb una aproximació tant crua de les densitats de corrent, els resultats obtinguts, especialment en el que fa referència a β , són força acurats. Ara bé, el nombre de punts de discretització de α necessari per a que convergeixi cap al valor final és molt més elevat: mentre que per al cas de funcions trigonomètriques amb 500 punts en tenim ben bé prou, per al cas dels polsos són necessaris de l'ordre de 3000 punts.

Es pot notar també que la diferència més gran es dona en el cas de Z_0 per l'esmentat a l'apartat anterior: el càlcul de β és previ al de Z_0 i els errors s'acumulen.

Pot semblar que el fet de tendir a valors diferents és un manifest del problema de la convergència relativa que presenten els mètodes basats en desenvolupaments de funcions ortogonals. Això no és així en aquest cas degut a que els desenvolupaments en funcions ortogonals s'ha reduït a un únic terme. Per posar de manifest el possible problema de la convergència relativa s'hauria de desenvolupar els corrents amb un nombre elevat de termes, cosa que complicaria la resolució del sistema 2.6.15 afegint-s'hi els problemes numèrics de càlcul d'autovalors i autovectors. També, i com veurem més endavant, el fet d'augmentar el nombre de termes de les expansions amb funcions ortogonals, augmenta el tamany de la matriu el determinant de la qual s'ha de forçar a zero, amb els conseqüents problemes per a la subrutina de búsqueda de zeros.

Per evitar els problemes esmentats en el paràgraf anterior i aconseguir al mateix temps una precisió elevada, es redueixen al mínim les expansions amb funcions ortogonals de les densitats de corrent (o dels camps als slots segons l'estructura), i es força a que les funcions base s'assemblin el màxim possible a la distribució coneguda o suposada de les corrents a les tires metàl·liques (o dels camps als slots). Així amb expansions d'un únic terme com les utilitzades podem evaluar acuradament les característiques de les línies planars en el mode fonamental. L'evaluació de modes superiors suposa recórrer a expansions amb més termes i enfrontar-nos als problemes descrits anteriorment.

En el cas de guia coplanar, quan l'amplada de la metal·lització central w i dels slots s és molt petita, apareixen, a freqüències concretes de càlcul, resultats totalment erronis. Això és degut a que la funció de la que evaluem els seus zeros els presenta molt propers (semblant al que succeeix en el mètode de les línies amb discretització no uniforme).

Segons quin siguin els valors d'inici subministrats a la subrutina de càlcul de zeros, aquesta ens pot proporcionar un determinat zero que pot no correspondre a una solució física.

Després de nombroses proves, per aquesta estructura es fa calcular un gran nombre de zeros. Veient la tendència dels resultats per dimensions o freqüències properes a la que dona problemes, normalment es pot detectar fàcilment la solució correcta. Aquest és un inconvenient a tenir en compte en aquest mètode.

A les gràfiques següents s'aprecia la millor virtut del mètode: la seva rapidesa.

MICROSTRIP ($\epsilon_r=2.22$, $h=3\text{mm}$, $f=1\text{GHz}$)

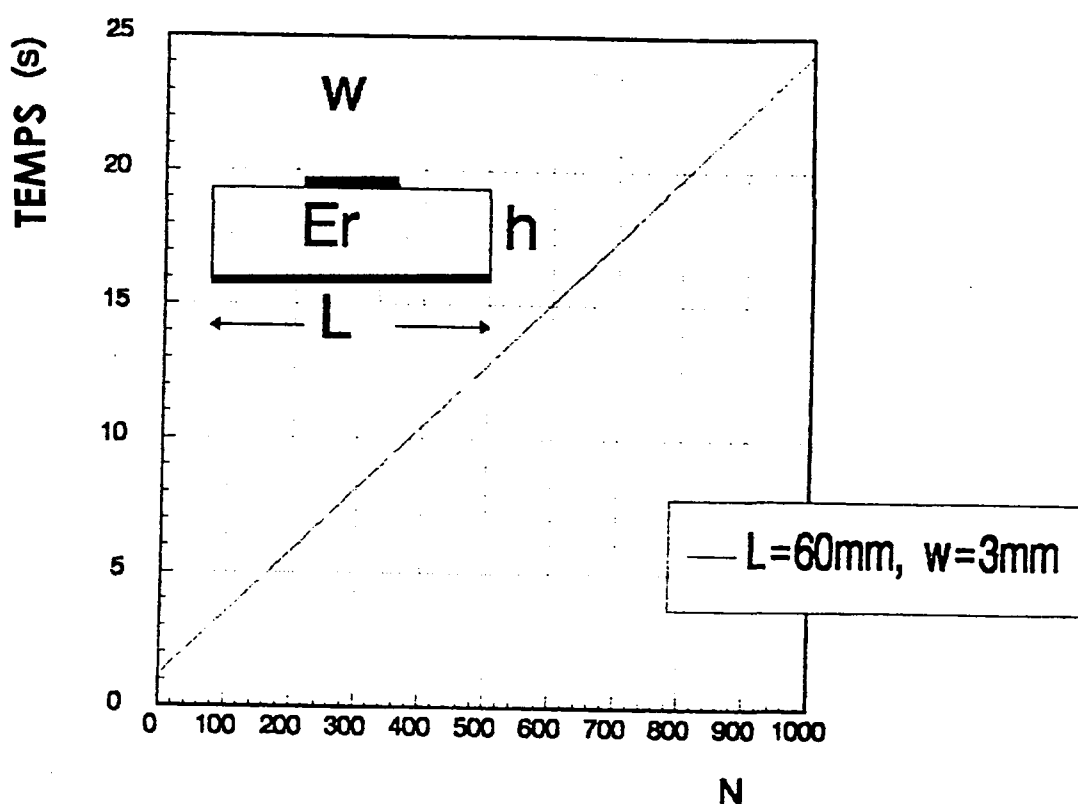


Fig 2.6.18

FINLINE (GUIA=WR(42), $\epsilon_r=2.2$, $h_1=5.335\text{mm}$, $h_2=0.25\text{mm}$)

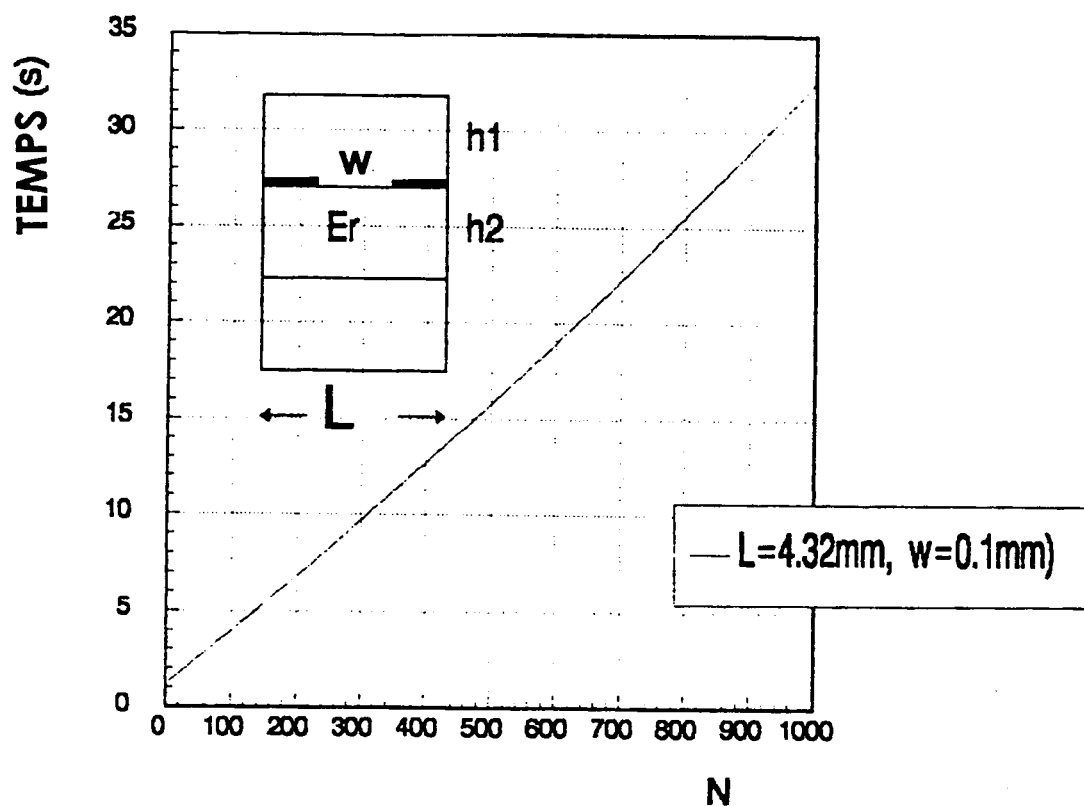


Fig 2.6.19

Tenint en compte, com s'aprecia a les gràfiques següents, que, per la majoria dels casos, amb uns 200 punts en tenim prou, el temps de càlcul és d'uns 5 segons sobre un ordinador VAX 6000-410. Noti's també la variació lineal del temps de càlcul amb el nombre de punts.

MICROSTRIP (Er=2.2)

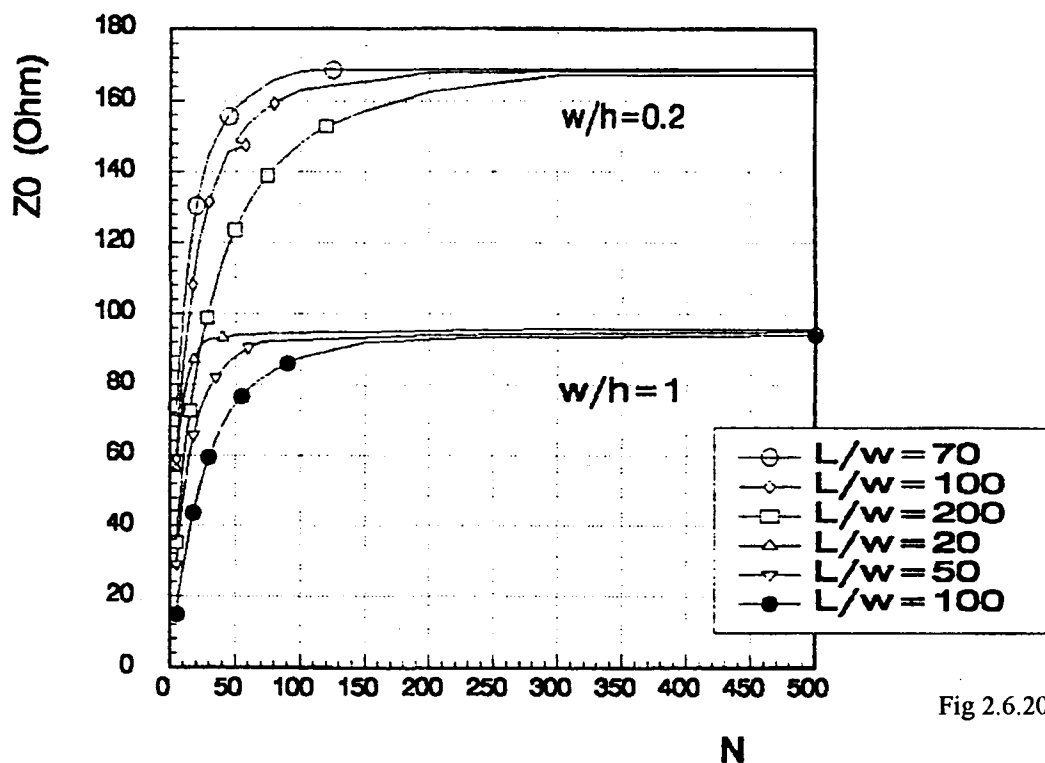


Fig 2.6.20

MICROSTRIP (Er=3.8)

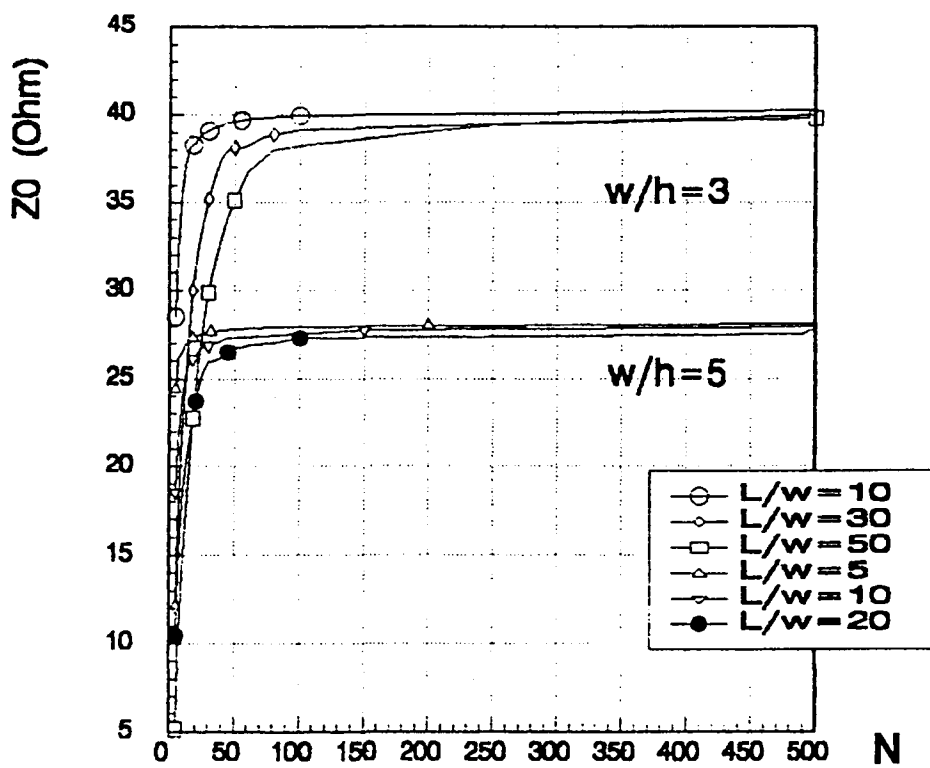


Fig 2.6.21

En aquestes gràfiques s'aprecia que per a simular una estructura oberta n'hi ha prou en agafar una guia amb una relació $L/w > 20$ i una separació fins a la paret superior més gran que deu vegades el gruix de la capa dielèctrica.

Finalment en les gràfiques següents es posa de manifest que el no tenir en compte el gruix de la metal·lització només pot provocar errors importants en el cas que l'amplada de la tira metàl·lica sigui molt petita (es compara amb fórmules aproximades de la ref. [138])

MICROSTRIP ($w=0.2\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $L=30\text{mm}$, $h_1=100\text{mm}$)

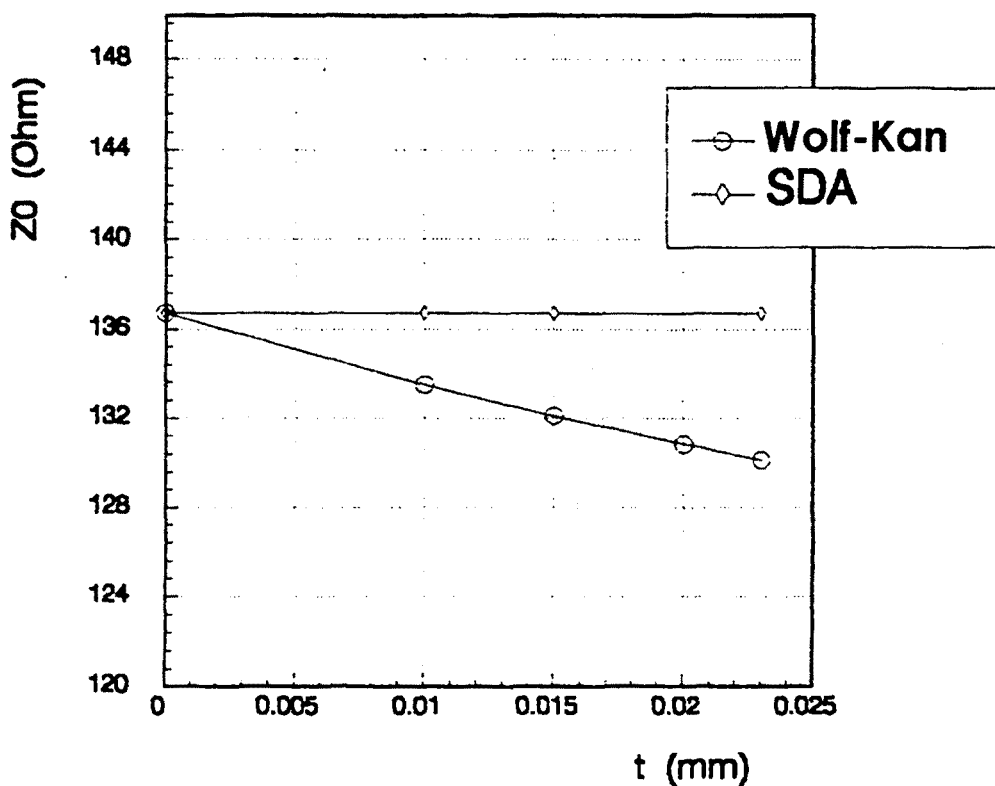


Fig 2.6.22

MICROSTRIP ($w=1\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $L=50\text{mm}$)

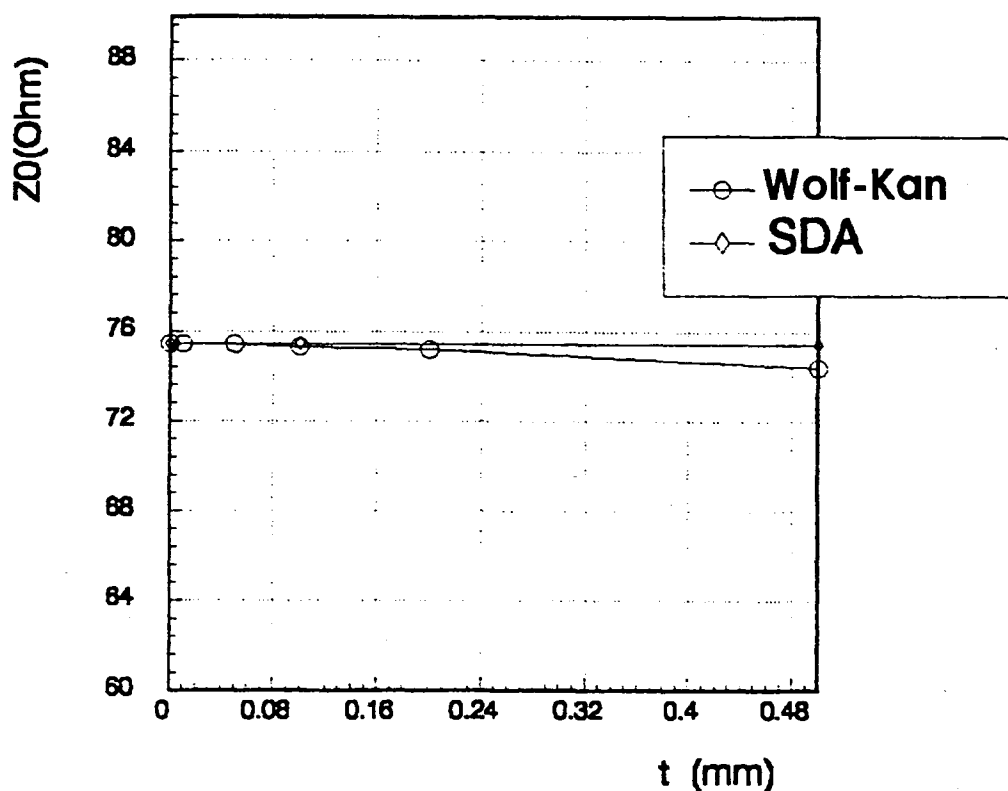


Fig 2.6.23

El temps de càlcul, degut a la bona elecció de les funcions base a l'aplicar la tècnica de Galerkin, és possiblement la millor virtut d'aquest mètode; però l'obtenció de les expressions programables suposa una gran quantitat de manipulacions algebraiques no difícils però sí molt pesades ("preprocessament"). De totes maneres aquestes manipulacions es poden alleugerir amb la tècnica de la 'Inmittance Approach', especialment per a obtenir les expressions que permeten obtenir la constant de propagació.

S'ha de tenir present els possibles valors erronis subministrats per la subrutina de càlcul de zeros a l'analitzar certes estructures amb determinades dimensions. També poden aparèixer pols de la funció diàdica de Green en el domini espectral, però aquests són fàcilment detectables.

2.7. Mètode del circuit planar

2.7.1. Implementació

Un circuit planar es defineix com aquell circuit elèctric que té dues dimensions de tamany comparables a la longitud d'ona i la tercera dimensió és de tamany despreciable respecte a la longitud d'ona. Va ser introduït per Okoshi i Miyoshi [140] per a l'anàlisi d'estructures planars utilitzades en circuits integrats de microones. ("Planar Circuit Approach" -PCA-)

La breu descripció que donem a continuació segueix la nomenclatura de Sorrentino i de K.C. Gupta i M.D. Abouzahra [141,142].

En la figura 2.7.1 es presenta esquemàticament un circuit planar general.

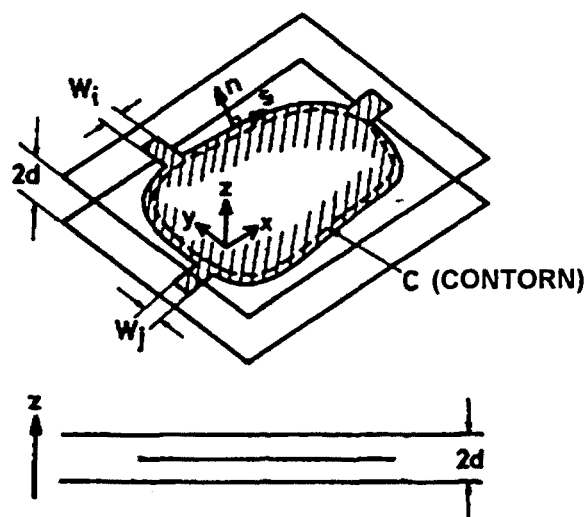


Fig 2.7.1

Tenim dues parets metàl·liques perfectes (a dalt i a baix). El circuit planar està rodejat lateralment (excepte en un nombre finit d'apertures o ports) per una paret magnètica (també pot ser una paret elèctrica o de impedància). Aquestes parets ens confinen els camps a l'estructura, fixant les corresponents condicions de contorn.

L'excitació dels camps electromagnètics a dins de l'estructura es realitza, bé a través d'apertures a la perifèria (paret lateral) acoblant el circuit planar al circuit extern ("edge-feeding"), o bé per mitjà d'un corrent intern dirigit perpendicularment respecte al circuit planar, subministrat per una sonda o pel conductor central d'un cable coaxial. El primer cas és el més habitual, si bé com veurem més endavant, les dues maneres possibles d'alimentació són equivalents.

Considerant el circuit planar situat en el pla xy , el gruix està dirigit segons z , i aquest és molt més petit que la longitud d'ona, cosa que ens permet assumir que els camps són uniformes segons z . Així podem establir:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad H_z = E_x = E_y = 0 \quad (2.7.1)$$

Si el material dielèctric comprès entre les dues parets metàl·liques és homogeni i isotropic i està lliure de fonts electromagnètiques, els camps al seu interior (assumint variacions temporals del tipus $e^{j\omega t}$) es podran obtenir a partir de l'equació de Helmholtz bidimensional:

$$(\nabla_t^2 + k^2)E_z = 0 \quad (2.7.2)$$

en què:

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad ; \quad k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.7.3)$$

Amb les equacions de Maxwell (lleis de Faraday en forma diferencial) obtenim el camp magnètic:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \\ \vec{E} &= E_z(x,y)\hat{z} \end{aligned} \right\} \vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{y} \right) \quad (2.7.4)$$

Condicions de contorn:

Si la paret lateral del circuit planar és una paret magnètica: $\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0$ (\hat{n} és un vector unitari normal a la paret lateral i en el sentit "sortint" d'aquesta)

Si la paret lateral fós una paret elèctrica: $E_z=0$

Si la paret lateral fós una paret d'impedància Z_w : $Z_w=E_z/H_s$. H_s és la component de camp magnètic tangencial a la paret lateral.

A partir de E_z podem definir un voltatge: $v=-E_z/d$. d és la separació entre els dos conductors del circuit planar.

La densitat de corrent superficial en una cinta conductora s'obté de:

$$\vec{J} = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \quad (2.7.5)$$

en què \hat{n} és un vector unitari normal a la cinta i \vec{H}_1 i \vec{H}_2 els camps magnètics a ambdós costats de la cinta.

Si tenim una estructura tipus stripline:

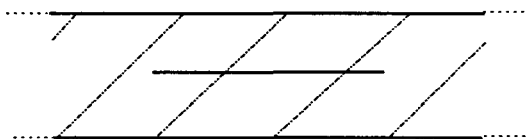


Fig 2.7.2

La densitat de corrent superficial a la tira conductora central és:

$$\vec{J} = -2\hat{n} \times \vec{H}_2 \quad (2.7.6)$$

doncs en aquest cas és $\vec{H}_1 = -\vec{H}_2$. Substituint en aquesta expressió la 2.7.4:

$$\vec{J} = \frac{2}{j\omega\mu} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{y} \right) \quad (2.7.7)$$

Per a un circuit tipus microstrip, el conductor superior de la figura 2.7.1 no hi és. Si no tenim en compte l'efecte de cantell dels camps en la cinta conductora, no tenim camp magnètic en la part superior de la cinta conductora, i l'expressió per a la densitat de corrent és la mateixa que la trobada per al cas stripline però prescindint del factor 2:

$$\vec{J} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{y} \right) \quad (2.7.8)$$

Per a punts en la paret lateral podem reescriure l'expressió anterior posant-la en funció de les components normals i tangencials a la paret lateral:

$$\vec{J} = \frac{p}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial s} \hat{s} + \frac{\partial E_z}{\partial n} \hat{n} \right) \quad (2.7.9)$$

$p=1$ per a microstrip i $p=2$ per a stripline.

Usualment la línia que alimenta el circuit planar es connecta en un port de la perifèria. Llavors el corrent d'excitació flueix normalment a la perifèria del circuit planar. A partir de l'expressió anterior, integrant la component normal de la densitat de corrent sobre l'amplada W del port, obtenim aquest corrent d'excitació:

$$i = -\frac{p}{j\omega\mu} \int_w \frac{\partial E_z}{\partial n} ds \quad (2.7.10)$$

El signe negatiu és degut a que el corrent flueix en sentit contrari a \hat{n} . Tenint en compte la definició de la tensió, podem posar:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_t^2 + k^2)v &= 0 \\
 \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 \quad (\text{paret magnètica}) \\
 i &= \frac{p}{j\omega\mu d} \int_w \frac{\partial v}{\partial n} ds
 \end{aligned}
 \tag{2.7.11}$$

Si el circuit planar s'excita amb una densitat de corrent J_z (dirigida segons z) situada a l'interior de la perifèria, llavors s'obté una equació de Helmholtz inhomogènia per al voltatge:

$$(\nabla_t^2 + k^2)v = -j\omega\mu d J_z \tag{2.7.12}$$

sotmesa a la condició de contorn homogènia: $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ (paret magnètica)

Si el circuit s'excita per un port situat a la paret lateral del circuit planar, el voltage compliria l'equació de Helmholtz homogènia però sotmesa a una condició de contorn inhomogènia:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \begin{cases} -j\omega\mu d \vec{J} \cdot \hat{n} & \text{en } W_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{ports}) \\ 0 & \text{en qualsevol altre lloc de la paret lateral} \end{cases}$$

Es pot considerar en aquest cas que el circuit planar està excitat per una densitat de corrent fictícia dirigida segons z i situada en el port adient donada per:

$$\vec{J} = \frac{p}{j\omega\mu d} \frac{\partial v}{\partial n} \hat{z} \tag{2.7.13}$$

i considerar la condició de contorn de paret magnètica homogènia a tota la perifèria. Així el dos casos d'excitació els podem tractar de la mateixa manera.

La solució de l'equació inhomogènia de Helmholtz 2.7.12 la podem obtenir a l'aplicar una font de corrent dirigida segons z puntual i situada en el circuit planar en $r=r_0$. Per tant és solució de:

$$(\nabla_t^2 + k^2)G(r|r_0) = -j\omega\mu d \delta(r - r_0) \tag{2.7.14}$$

amb la condició de contorn a la perifèria: $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$

El voltage en qualsevol punt del circuit planar és:

$$v(x, y) = \iint_D G(x, y | x_0, y_0) J_z(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \tag{2.7.15}$$

$J_z(x_0, y_0)$ és la densitat de corrent (fictícia) injectada al circuit i D representa la regió bidimensional que ocupa el circuit planar.

Si el corrent només s'injecta en els ports situats a la perifèria:

$$v(s) = \sum_j \int_{W_j} G(s|s_0) J(s_0) ds_0 \quad (2.7.16)$$

en què $J(s_0)$ és el corrent fictici dirigit segons z , s i s_0 són distàncies al llarg de la perifèria. El sumatori engloba tots els ports a la perifèria amb amplitudes respectives W_j .

El corrent que entra pel port j -èsim el podem expressar en funció de la densitat de corrent fictícia:

$$i_j = p \int_{W_j} J(s_0) ds_0 \quad (2.7.17)$$

Si assumim que la densitat de corrent és uniforme en tota l'amplada de cada port:

$$J(s_0)|_{\text{port } j} = \frac{i_j}{pW_j} \quad (2.7.18)$$

podem expressar el voltatge com:

$$v(s) = \sum_j \frac{i_j}{pW_j} \int_{W_j} G(s|s_0) ds_0 \quad (2.7.19)$$

promitjant el voltatge en cada port:

$$v_i = \frac{1}{W_i} \int_{W_i} v(s) ds \quad (2.7.20)$$

substituint $v(s)$ i dividint els dos termes de l'expressió resultant per i_j obtenim:

$$\frac{v_i}{i_j} = z_{ij} = \frac{1}{pW_i W_j} \int_{W_i} \int_{W_j} G(s|s_0) ds_0 ds \quad (2.7.21)$$

z_{ij} són els termes de la matriu d'impedància del circuit planar. A partir d'ella podem obtenir la matriu d'admitàncies o la de paràmetres S . El circuit estarà analitzat tan bon cop coneguem la funció de Green i aquesta es coneix per a problemes amb geometries senzilles. Per a aquests casos la funció de Green s'expandeix amb autofuncions [142]:

$$G(r|r_0) = \sum_m A_m \Psi_m(r) \quad (2.7.22)$$

Les funcions Ψ_n satisfan:

$$\nabla_i^2 \Psi_n + k_n^2 \Psi_n = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0 \quad \text{en la regió corresponent a perifèria del circuit planar}$$

a més a més són ortonormals:

$$\iint_D \Psi_n \Psi_m^* dx dy = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

La regió d'integració D es correspon amb l'extensió del circuit planar. El símbol $*$ denota complexe-conjugat.

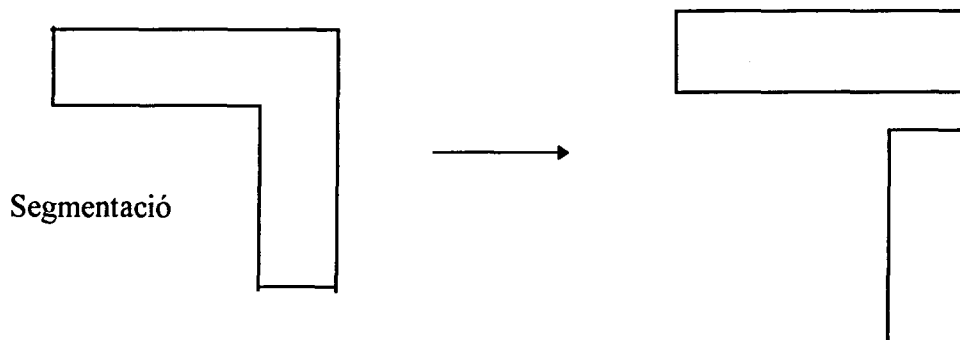
Substituint l'expansió 2.7.22 en l'expressió 2.7.19, aplicant l'ortogonalitat de les funcions de l'expansió (multiplicant ambdós costats de l'expressió resultant per $\Psi_n^*(r)$ i integrant en la regió D) s'obté el valor de les constants A_n de manera que:

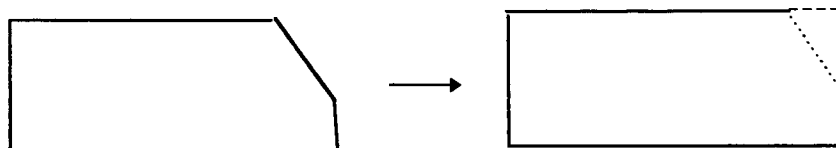
$$G(r|r_0) = j\omega\mu d \sum_n \frac{\Psi_n(r)\Psi_n^*(r_0)}{k_n^2 - k^2} \quad (2.7.23)$$

Podem evaluar la funció de Green en els casos en que les autofuncions siguin conegudes. Adaptant les expansions modals de les guies rectangulars i circulars i de les cavitats ressonants s'obté la funció de Green per als casos de circuits planars en forma de rectangle, triangle, cercle, sector circular i sector anular que es poden trobar a la bibliografia [142].

Si el circuit planar té una forma totalment arbitrària, la funció de Green no és coneguda en principi i hem de recórrer a altres tècniques d'anàlisi. Okoshi i Miyoshi [140], per resoldre aquest problema varen introduir una tècnica que posteriorment ha evolucionat i ha donat lloc al mètode dels elements de contorn. Es basa en considerar la solució de l'equació de Helmholtz per al voltage en coordenades cilíndriques en la forma d'ones progressives (solució de Weber) en dos dimensions i aplicar la segona identitat de Green. Tenint en compte els punts singulars que resulten i les propietats asimptòtiques de les funcions de Hankel, s'obté finalment una equació integral sobre el contorn del circuit planar. Aquesta es resol dividint el contorn en petits elements lineals en els quals es considera que els camps són uniformes.

Però no és necessari aplicar aquesta tècnica per a resoldre un circuit planar amb forma arbitrària mercès als anomenats mètodes de segmentació i desegmentació [143,144]. El mètode de segmentació consisteix en dividir un circuit planar de forma arbitrària en trocets petits que tinguin una forma regular de la que es conegui la funció de Green com ara rectangles o triangles. S'analitzen aquests trocets independentment i a continuació es construeix la matriu d'impedància de tot el conjunt. El mètode de desegmentació és el complementari de l'anterior. Si en el mètode de segmentació el circuit total el considerem com la "suma" de diferents troços, en el mètode de desegmentació considerem el circuit total com la "resta" de diferents troços:





Desegmentació

Fig 2.7.3

Per aplicar el mètode de segmentació, sempre ho podrem reduir a la unió de dos circuits planars (Si tinguèssim més de dues parts, podem "ajuntar-ne" dues i el resultat d'aquesta unió l'ajuntariem amb una altra part i així successivament). Siguin dos troços A i B. (figura 2.7.4). Els ports p_a i p_b es correspondrien amb els únics de l'estructura total que es preten analitzar per segmentació. Els troços A i B els interconnectem amb una sèrie de ports q_1, q_2, \dots, q_N i r_1, r_2, \dots, r_N :

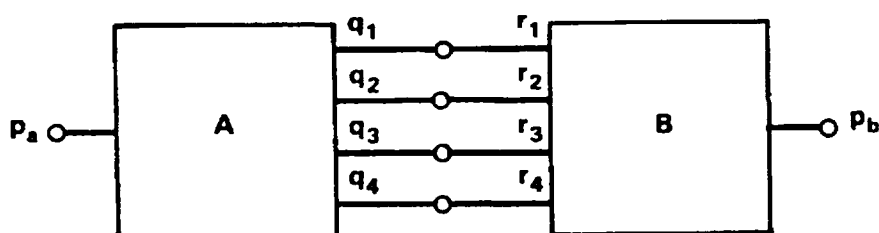


Fig 2.7.4

Amb aquesta interconnexió es verifica la següent relació entre els voltatges i els corrents en els ports d'interconnexió: $v_q = v_r$ i $i_q = -i_r$. Les matrius d'impedància dels troços A i B són:

$$[Z_A] = \begin{pmatrix} Z_{p_a p_a} & Z_{p_a q_1} & Z_{p_a q_2} & \dots & Z_{p_a q_N} \\ Z_{q_1 p_a} & Z_{q_1 q_1} & Z_{q_1 q_2} & \dots & Z_{q_1 q_N} \\ Z_{q_2 p_a} & Z_{q_2 q_1} & Z_{q_2 q_2} & \dots & Z_{q_2 q_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q_N p_a} & Z_{q_N q_1} & Z_{q_N q_2} & \dots & Z_{q_N q_N} \end{pmatrix} \quad (2.7.24)$$

que podem posar en forma de submatrius de dimensions apropiades com:

$$[Z_A] = \begin{pmatrix} [Z_{p_a}] & [Z_{p_a q}] \\ [Z_{q p_a}] & [Z_{q q}] \end{pmatrix} \quad (2.7.25)$$

Analogament:

$$[Z_B] = \begin{pmatrix} [Z_{p_b}] & [Z_{p_b r}] \\ [Z_{r p_b}] & [Z_{r r}] \end{pmatrix} \quad (2.7.26)$$

essent:

$$[V_p] = \begin{pmatrix} v_{p_a} \\ v_{p_b} \end{pmatrix} \quad ; \quad [I_p] = \begin{pmatrix} i_{p_a} \\ i_{p_b} \end{pmatrix} \quad (2.7.27)$$

Operant s'arriba a:

$$[V_p] = [Z_{AB}] [I_p] \quad (2.7.28)$$

amb:

$$[Z_{AB}] = \begin{pmatrix} [Z_{p_a}] & [0] \\ [0] & [Z_{p_b}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [Z_{p_a q}] \\ -[Z_{p_b r}] \end{pmatrix} \left(([Z_{q q}] + [Z_{r r}])^{-1} (-[Z_{q p_a}] [Z_{r p_b}] \right) \quad (2.7.29)$$

De forma semblant es procedeix per al cas de desegmentació. El circuit de la figura (α) el podem considerar com un triangle (γ) "menys" un sector circular (β):

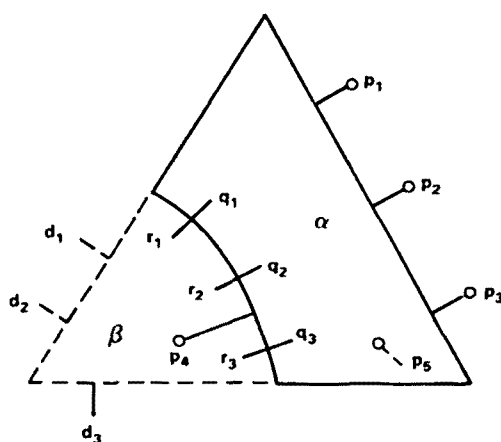


Fig 2.7.5

Les matrius dels troços β i γ les podem posar com:

$$[Z_\beta] = \begin{pmatrix} [Z_{r r}] & [Z_{r d}] \\ [Z_{d r}] & [Z_{d d \beta}] \end{pmatrix} \quad ; \quad [Z_\gamma] = \begin{pmatrix} [Z_{p p \gamma}] & [Z_{p d}] \\ [Z_{d p}] & [Z_{d d \gamma}] \end{pmatrix} \quad (2.7.30)$$

operant:

$$[Z_\alpha] = [Z_{p p \gamma}] - [Z_{p d}] \left([Z_{d d \gamma}] - [Z_{d d \beta}] \right)^{-1} [Z_{d p}] \quad (2.7.31)$$

Hem de manifestar aquí un petit inconvenient que afecta especialment al mètode de desegmentació i provee del càlcul dels elements de la matriu impedància d'un troç de circuit quan els ports es troben a l'interior d'aquest.

Per al cas de ports situats a la perifèria, els elements z_{ij} es troben a partir de l'expressió 2.7.21 i per al cas d'estructures molt senzilles com per exemple un rectangle, les integrals involucrades es poden calcular analíticament i es poden trobar a la bibliografia [142]. Per al cas de ports situats a l'interior del circuit hem de partir de l'expressió 2.7.19 en lloc de la 2.7.21. La primera és una integral de superfície mentre que la segona és de línia, per lo que en general serà més difícil de calcular, tenint que fer-ho moltes vegades numèricament.

Si bé s'han efectuat moltes aproximacions, si s'analitza un circuit stripline, els resultats obtinguts són força acurats, no tant si s'analitza un circuit microstrip. Això bé fonamentalment d'haver despreciat l'efecte dels camps als cantells ("fringing fields"), el qual provoca que els camps en un microstrip no siguin purament TEM i apareixi dispersió. Aquest problema s'ha solventat modelant la dispersió en un microstrip i introduint aquest model en el circuit planar.

Una estructura microstrip com la de la figura 2.7.6:

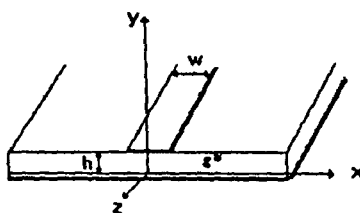


Fig 2.7.6

es pot considerar que suporta ones TEM si es canvia la constant dielèctrica i l'amplada de la cinta conductora per una ϵ_{eff} (constant dielèctrica o permitivitat efectiva) i una w_{eff} (amplada efectiva de la cinta conductora) donades per expressions que tenen en compte la freqüència de funcionament.

Al llarg del temps han anat apareixent expressions cada cop més precises per al càlcul de ϵ_{eff} i w_{eff} [145-152]. S'ha implementat una de les més recents deguda a Kobayashi [153]:

$$\epsilon_{\text{eff}}^*(f) = \epsilon^* - \frac{\epsilon^* - \epsilon_{\text{eff}}^*(0)}{1 + (f/f_{50})^m} \quad (2.7.32)$$

essent:

$$f_{50} = \frac{f_{K, TM_0}}{0.75 + (0.75 - \frac{0.332}{\epsilon^* 1.73}) \frac{w}{h}}$$

$$f_{K, TM_0} = \frac{c \tan^{-1} \left\{ \epsilon^* \sqrt{\frac{\epsilon_{eff}^*(0) - 1}{\epsilon^* - \epsilon_{eff}^*(0)}} \right\}}{2\pi h \sqrt{\epsilon^* - \epsilon_{eff}^*(0)}}$$

$$m = m_0 m_c \quad (\leq 2.32) \quad (2.7.33)$$

$$m_0 = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{w/h}} + 0.32 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{w/h}} \right)^3$$

$$m_c = \begin{cases} 1 + \frac{1.4}{1 + \frac{w}{h}} \left\{ 0.15 - 0.23 \exp\left(\frac{-0.45f}{f_{50}} \right) \right\} & (w/h \leq 0.7) \\ 1 & (w/h \geq 0.7) \end{cases}$$

(l'asterisc * denota constant dielèctrica relativa). Ens fa falta el valor de la permitivitat efectiva a freqüència zero $\epsilon_{eff}^*(0)$ que s'obté de:

$$\epsilon_{eff}^*(0) = 1 + q_w (\epsilon^* - 1) \quad (2.7.34)$$

q_w s'obté de la forma següent: Donat w , h i ϵ^* del nostre circuit microstrip, calculem la relació w/h (que anomenem wh) i calculem $q_w(wh, \epsilon^*)$ per $\epsilon^*=1,01$; $\epsilon^*=2,0$; $\epsilon^*=8,0$ amb l'expressió següent:

$$q_w(wh, \epsilon^*) = \begin{cases} 1 - \{1 - q_w(wh_i, \epsilon^*)\} \exp[b_1 \log_{10}(wh/wh_i) + b_2 \{\log_{10}(wh/wh_i)\}^2], & wh_i \leq wh \\ 0.5 - \{0.5 - q_w(wh_i, \epsilon^*)\} \exp[d_1 \log_{10}(wh/wh_i) + d_2 \{\log_{10}(wh/wh_i)\}^2 + d_3 \{\log_{10}(wh/wh_i)\}^3 + d_4 \{\log_{10}(wh/wh_i)\}^4] & wh_i \geq wh \end{cases} \quad (2.7.35)$$

tenint en compte els següents valors tabulats:

ϵ^*	wh_i	$q_w(wh_i, \epsilon^*)$
1.01	4.1	0.774848
2.00	4.2	0.767128
8.00	4.4	0.761774

Taula 2.7.1

ϵ^*	b_1	b_2	d_1	d_2	d_3	d_4
1.01	-0.9914970	-0.3383140	0.8129886	-0.2530581	-0.2495215	-0.04892659
2.00	-0.9999744	-0.3375214	0.8727037	-0.2856383	-0.2803518	-0.05496000
8.00	-1.012575	-0.3487503	0.9281990	-0.3367463	-0.3189153	-0.06147304

Taula 2.7.2

els tres valors obtinguts de $q_w(wh, \epsilon^*)$ ens serveixen per calcular les constants a_0, a_1 i a_2 de l'expressió:

$$q_w(wh, \epsilon^*) = a_0 + a_1\left(1 - \frac{1}{\epsilon^*}\right) + a_2\left(1 - \frac{1}{\epsilon^*}\right)^2 \quad (2.7.36)$$

amb aquesta mateixa expressió, un cop calculades les constants trobem $q_w(wh, \epsilon^*)$ per a la ϵ^* desitjada, i d'aquí amb l'expressió la $\epsilon_{\text{eff}}^*(0)$.

Amb la ϵ_{eff}^* podem calcular la w_{eff} per a diferents tipus de circuits:

Circuit rectangular [153]:

$$w_{\text{eff}}(f) = w + \frac{w_{\text{eff}}(0) - w}{1 + (f/f_p)^2} \quad (2.7.37)$$

amb:

$$f_p = \frac{c}{2w_{\text{eff}}(0)\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}^*(0)}} \quad (2.7.38)$$

$w_{\text{eff}}(0)$ s'obté de:

$$Z_0(f) = \frac{h\eta_0}{W_{\text{eff}}(f)\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}^*(f)}} \quad (2.7.39)$$

per trobar $Z_0(0)$ fem servir:

$$Z_0(f) = \frac{337h}{\sqrt{\epsilon^*w[1 + 1.735\epsilon^{*-0.724}(w/h)^{-0.836}]}} \quad (2.7.40)$$

en la que h i w està en mil·lèsimes de polzada.

Circuit triangular [154]:

$$A_{\text{eff}} = A + \frac{1}{3} h \quad (2.7.41)$$

Circuit circular [155]:

$$r_{\text{eff}} = r \sqrt{1 + \frac{2h}{\pi r} \left[\ln\left(\frac{\pi r}{2h}\right) + 1.7726 \right]} \quad (2.7.42)$$

r_{eff} és el radi efectiu

Circuit anular [156]:

Per a un circuit anular en el que el radi intern és a i el radi extern és b tenim:

$$b_{\text{eff}} = b + \frac{3}{4} h \quad a_{\text{eff}} = a - \frac{3}{4} h \quad (2.7.43)$$

Per al cas microstrip tampoc es té en compte l'efecte de radiació. El modelar aquest efecte d'una forma aproximada [157] o amb el model de cavitat d'una antena [158] suposa una complicació molt gran en el càlcul que no paga la pena normalment donat que el mètode del circuit planar ja parteix d'unes severes aproximacions. Com veurem a l'apartat de resultats, el no considerar l'efecte de radiació no és un problema molt important de cara a la qualitat dels resultats obtinguts.

2.7.2 Resultats i comentari

En les gràfiques següents es posa de manifest l'efecte de no considerar les pèrdues per radiació a l'analitzar un circuit microstrip rectangular:

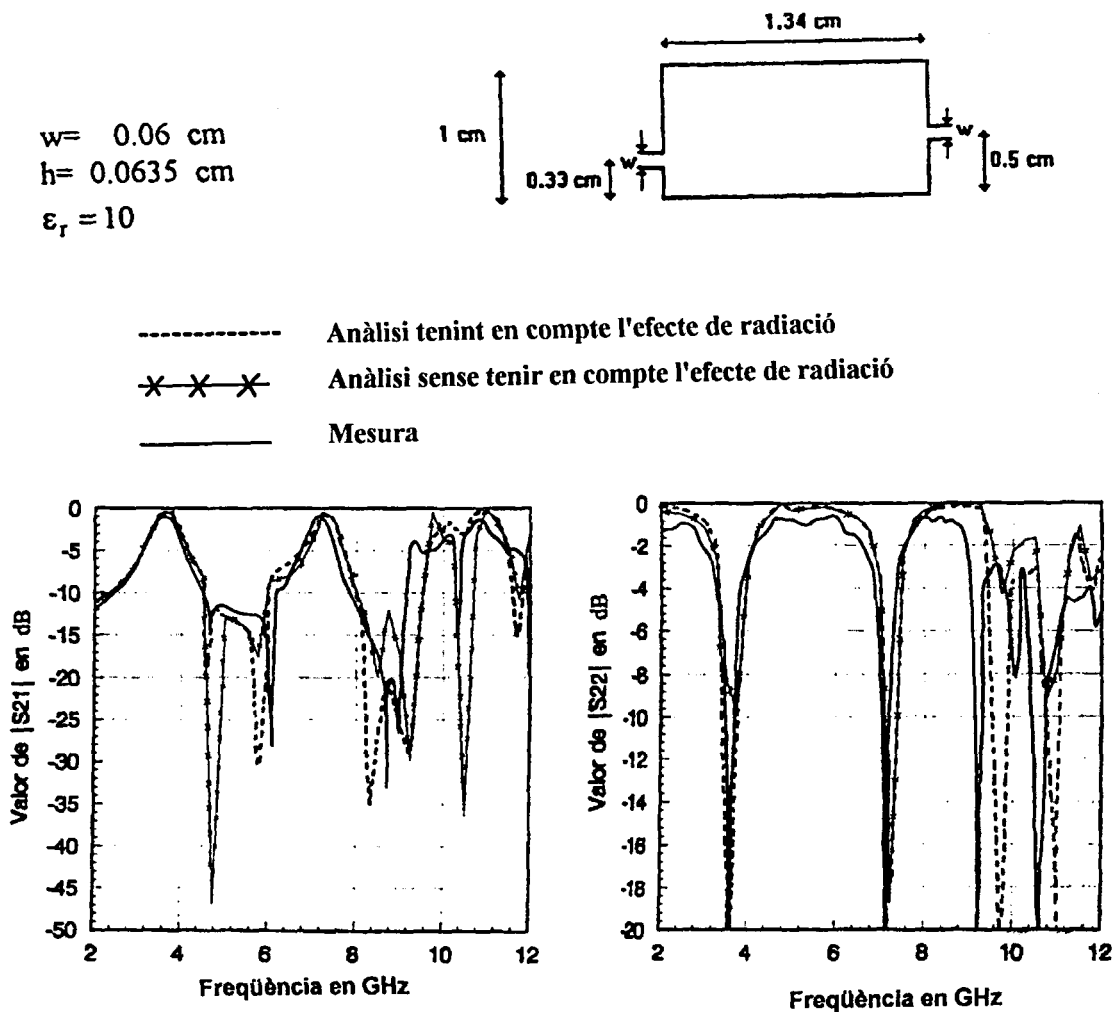
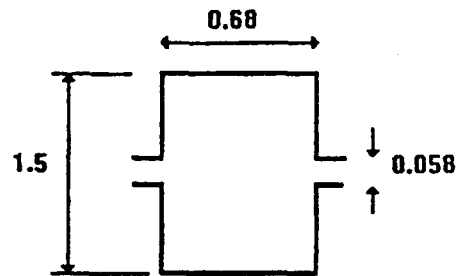


Fig 2.7.7

Els resultats presentats pel mètode del circuit planar implementat es comparen amb dades experimentals i amb les d'un anàlisi aproximat degut a Sorrentino [157]. Com es pot observar la no consideració dels efectes de radiació provoca "suavitzar" més les gràfiques, fent-se menys evidents els pics d'absorció per radiació, però el mètode preveu perfectament a quines freqüències poden tenir lloc. Tampoc el mètode aproximat de Sorrentino dona uns resultats molt millors.

En les gràfiques següents es posa de manifest l'importància de tenir en compte els efectes de dispersió dels circuits microstrip (en els circuits següents és $\epsilon_r=10$, $d=0,0635$ cm, impedància de referència: 50Ω . Les sèries que evaluen les funcions de Green es trunquen quan la diferència entre un valor obtingut i el següent és inferior a un 0,1%. Els càlculs s'han dut a terme sobre una workstation HP 9000-735 després d'haver introduït les dades en un editor de circuits planars especial realitzat sobre PC).

Circuit rectangular:



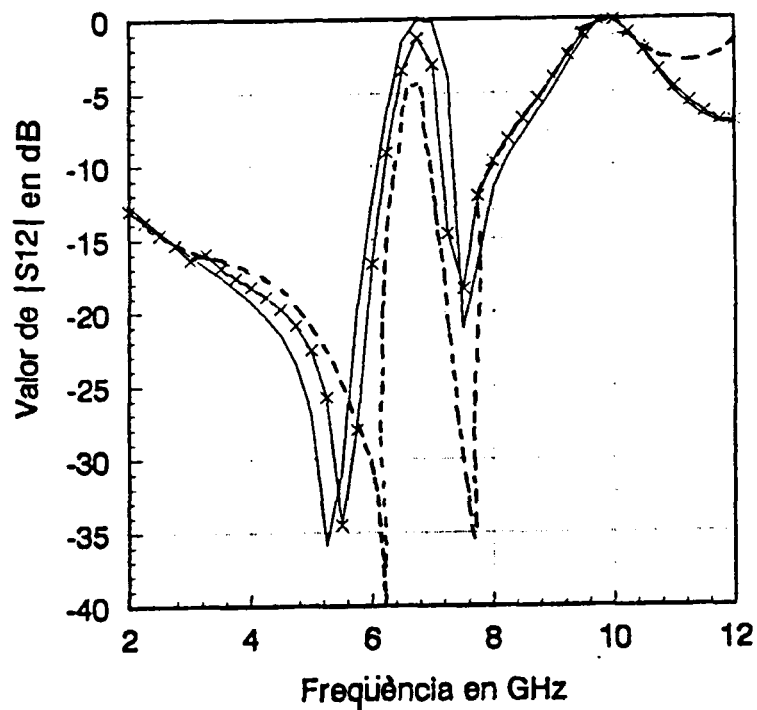
Unitats: cm

Resultats:

-x-x-x-x-x-x- amb dispersió

----- mesurat

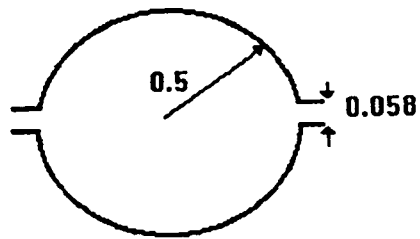
———— sense dispersió



Resultats experimentals segons D'Inzeo et al. [159]

Fig 2.7.8

Circuit circular:



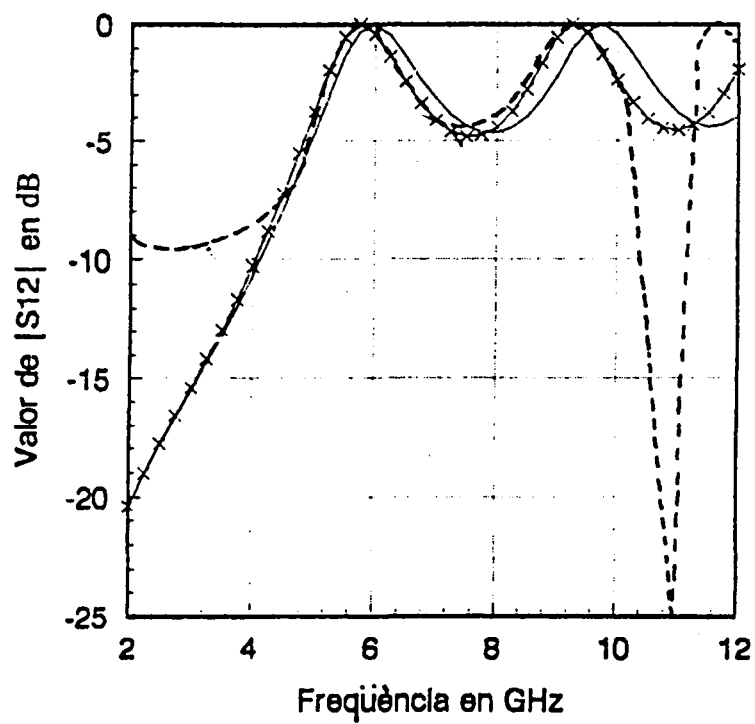
Unitats: cm

Resultats:

-x-x-x-x-x-x- amb dispersió

----- mesurat

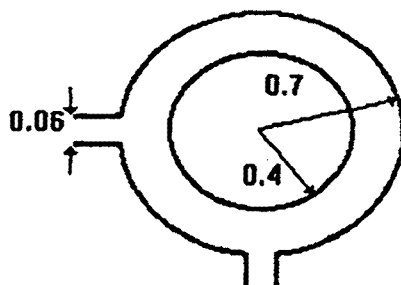
————— sense dispersió



Dades experimentals segons D'Inzeo et al. [159]

Fig 2.7.9

Circuit anular:

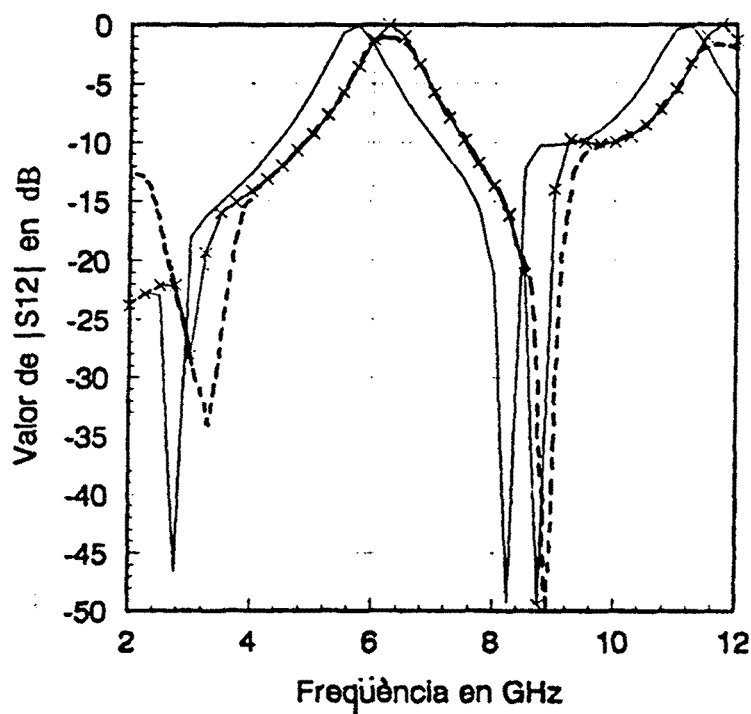


Unitats: cm

Resultats:

-x-x-x-x-x- amb dispersió
 ————— sense dispersió

----- mesurat



Dades experimentals segons D'Inzeo et al. [160]

Fig 2.7.10

Com es pot observar, si no es considera l'efecte dispersiu, hi ha un cert corrent entre els valors calculats i els mesurats. Tenint en compte l'efecte dispersiu, la correspondència entre els resultats calculats i els mesurats és molt bona. En el circuit rectangular hi ha un petit decalatge entre el valor previst i el mesurat a l'entorn de 6 GHz degut segurament als valors tant baixos que agafa $|S_{12}|$ en aquest interval. El pic a

l'entorn de 8 GHz calculat és menor que el mesurat al no tenir en compte els efectes de radiació, però el càlcul preveu perfectament a la freqüència que succeeix. El mateix podem dir per al pic a l'entorn de 11 GHz en la gràfica corresponent al circuit circular. En la gràfica del circuit anular és on millor s'aprecia l'efecte de tenir en compte la dispersió i es constata la molt bona correspondència amb els valors mesurats.

Per comprovar el mètode de segmentació s'han considerat circuits elementals que poden ser construïts per altres d'elementals com ara un quadrat format per dos triangles, un cercle format per dos sectors semicirculars o senzillament un rectangle format per dos rectangles més petits i s'ha comparat el resultat obtingut de l'anàlisi de l'estructura simple amb l'equivalent composta. En tots els casos es constata que com més gran sigui el nombre de ports d'interconnexió, millor és el resultat:

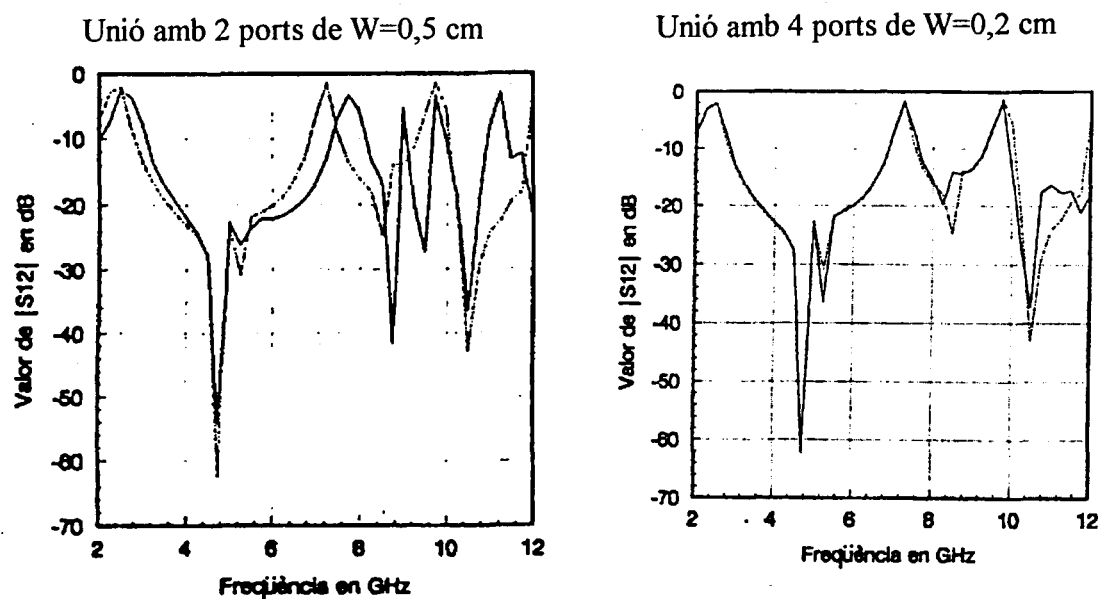
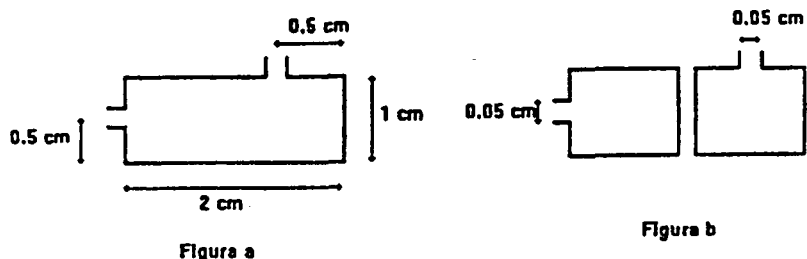


Fig 2.7.11

Com a regla general, s'obtenen bons resultats amb 4 o més ports d'interconnexió. No és convenient des d'un punt de vista computacional augmentar excessivament el nombre de ports d'interconnexió, doncs el temps de càlcul augmenta considerablement, i el que és pitjor, podem tenir problemes numèrics a l'hora d'invertir la matriu que apareix en l'expressió 2.7.29.

El temps de càlcul depèn del tipus de circuits elementals utilitzats i de la complexitat de les interconnexions. Serveixi com a referència que, sobre un VAX 6000-410, el temps de càlcul és de 4 minuts per a un circuit rectangular, 7 minuts per a un circuit circular i 23 minuts per a un circuit anular. El temps de càlcul de l'unió de dos circuits

semicirculars amb només dos ports d'interconnexió és de 2 minuts. Les extremes diferències en el temps de càlcul entre uns circuits i uns altres provenen de les expressions utilitzades per al càlcul de les matrius d'impedància a partir de les corresponents funcions de Green. Mentre que els circuits amb arestes rectes (rectangles i triangles) es calculen amb expressions relativament senzilles, per als circuits amb cantells circulars intervenen funcions de Bessel. En el circuit anular, per exemple, s'han de trobar els zeros d'una funció en la que intervenen les derivades de funcions de Bessel de primera i segona espècie [141].

El mètode del circuit planar és un mètode aproximat: considera variacions nul·les dels camps en una determinada direcció; considera distribucions de corrent uniformes en els ports d'accés; desprecia els efectes dels camps en els cantells de les cintes conductores (i el gruix d'aquestes) en el cas de circuits microstrip i a l'hora d'evaluar els elements de les matrius d'impedància podem tenir problemes a l'integrar les funcions de Green i aquestes, donades en forma de sumatoris infinits de funcions ortonormals s'han d'aproximar truncant els sumatoris a un valor finit. Algunes d'aquestes fonts d'error es poden corregir o minimitzar: introduint un model que tingui en compte la dispersió dels circuits microstrip, subdividint els ports d'accés en subports més estrets per als que sigui vàlida l'aproximació de corrent uniforme, truncant les sèries que ens donen les funcions de Green a un nombre el suficientment elevat... però la primera aproximació, la més forta i la que, en definitiva caracteritza al mètode (variacions nul·les dels camps segons una certa direcció) l'hem de tenir sempre present.

Malgrat ser un mètode aproximat, els resultats obtinguts per a circuits stripline i microstrip són força acurats i si més no, poden donar una molt bona idea del comportament real d'un circuit, el qual pot ser molt difícil sinò impossible d'analitzar amb un altre mètode.

Amb l'ajut de les tècniques de segmentació i desegmentació, el converteixen en un mètode molt versàtil per a l'anàlisi de circuits basats en línies stripline i microstrip i el podem utilitzar conjuntament amb programes comercials per a l'anàlisi i disseny de circuits de microones (per exemple, analitzant les parts més crítiques o de les que els programes comercials no disposin de models acurats amb el mètode del circuit planar i introduint la matriu S obtinguda com a dada d'entrada del programa comercial).

Prova de la versatilitat del mètode és que s'ha aplicat per a l'anàlisi i el disseny de discontinuitats, filtres, híbrids a 3 dB i divissors de potència microstrip, i inclòs per a certes discontinuitats en guia d'ones.

En les estructures planars en les que no es pot assumir variació nula dels camps en la direcció perpendicular del circuit planar com ara les estructures planars dins de guia d'ones com un finline, no es aplicable el mètode del circuit planar.

2.8. Elecció del mètode més idoni

Després de l'implementació dels mètodes numèrics estudiats és necessari escollir el més apropiat per assolir els objectius fixats en aquesta tesi: analitzar discontinuïtats finline i estructures planars d'una forma força acurada i utilitzant el mínim de recursos informàtics.

Primer resumim a les taules següents les principals característiques dels mètodes desenvolupats:

Mètode	Tipus	Generalitat	Preprocessament	Recursos d'ordinador necessaris
de les línies	1	4	4	5
dels elements finits	1	4	2	5
de la matriu de línies de transmissió	1	5	1	5
de la matriu S generalitzada	2	3	3	3
de la ressonància transversal gener.	2	3	3	2
del domini espectral	3	1	5	1
del circuit planar	3	2	3	3

Taula 2.8.1

Els mètodes de tipus 1 són els basats en una discretització de l'espai; els del tipus 2 en una expansió de funcions ortogonals; i els del tipus 3 estimen la funció de Green.

La generalitat del mètode fa referència a la quantitat d'estructures diferents que pot analitzar (1: molt específic -poc general-, 5: molt general).

El preprocessament consisteix en la quantitat de manipulacions matemàtiques que s'han de fer fins a obtenir un algorisme programable (1: molt poc preprocessament, 5: molt preprocessament).

Els recursos d'ordinador necessaris es refereixen a la quantitat de memòria central necessària i al temps de CPU (1: pocs recursos, 5: molts recursos).

Les puntuacions atorgades són indicatives i es basen en les implementacions realitzades i els resultats obtinguts.

Es pot observar que, en general, hi ha una relació inversa entre la generalitat del mètode i la seva eficiència computacional.

En la taula següent es presenten, de forma resumida, les principals avantatges i inconvenients de cada mètode:

Mètode	Avantages	Inconvenients
de les línies	Convergència asimptòtica al valor correcte en el cas de discretització uniforme. Capaç d'analitzar estructures multicapa complexes.	Preprocessament i especialment la necessitat de recursos d'ordinador enormes. Errors numèrics per a certes dimensions de les estructures. Errors numèrics agreujats i convergència no segura per al cas de discretització no uniforme.
dels elements finits	Gran versatilitat. Parteix d'una expressió variacional, el qual és un punt a favor de la convergència.	Respostes espúries a l'analitzar problemes d'autovalors i autovectors corresponents a estructures inhomogènies. Necessitat de grans recursos d'ordinador.
de la matriu de línies de transmissió	Molt general. Pot tenir en compte moltes formes i paràmetres (pèrdues, anisotropies, etc.). Domini temporal	Grans recursos d'ordinador. Errors inherents. Postprocessament de l'informació obtinguda per a poder interpretar els resultats. Possibilitat de respostes espúries si es fan servir nodes tridimensionals condensats.
de la matriu S generalitzada	Especialment útil per a l'anàlisi de certs tipus de discontinuïtats transversals en guia d'ones i per a estructures més complexes com ara filtres construïdes amb les discontinuïtats anteriors.	Fenòmen de la convergència relativa
de la ressonància transversal generalitzat	Capaç d'analitzar discontinuïtats complexes en pla E en guia d'ones inhomogènia	Fenòmen de la convergència relativa
del domini espectral	Recursos d'ordinador necessaris mínims. Capaç d'analitzar problemes oberts.	Preprocessament important. Necessitat de conèixer l'equació integral del problema. En principi, no apte per a discontinuïtats.
del circuit planar	Capaç d'analitzar certes estructures planars (microstrip) de forma totalment arbitrària	Mètode aproximat. Necessitat de models correctors per a tenir en compte efectes com la dispersió.

Taula 2.8.2

El mètode elegit per a analitzar discontinuïtats finline és el de la ressonància transversal generalitzat pels motius següents:

- Pot analitzar discontinuïtats. (Amb això es descarta el del domini espectral)

- Pot analitzar discontinuïtats finline. (Amb això és descarta el del circuit planar i el dels elements finits, al ser una línia finline una estructura inhomogènia).
- Pot analitzar discontinuïtats finline amb pocs recursos d'ordinador (amb això queden descartats el mètode de les línies i de la matriu de línies de transmissió).
- Pot analitzar a més a més estructures uniformes. (Amb això es descarta el mètode de la matriu S generalitzada i també pel fet que per a analitzar estructures inhomogènies com una finline pot ser necessari fer servir modes complexos en el mètode de la matriu S generalitzada [161]).

Capítol 3. Anàlisi de discontinuïtats amb el mètode de la ressonància transversal generalitzat.

3.1. Cas d'un monoport.

Considerem que tenim un monoport en guia d'ones rectangular com per exemple un finline en curt-circuit:

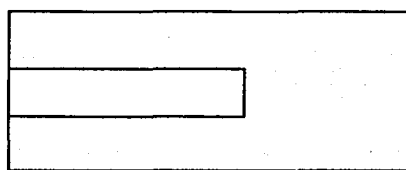


Fig 3.1.1

per analitzar-lo amb el mètode de la ressonància transversal generalitzat, construïm una cavitat ressonant:

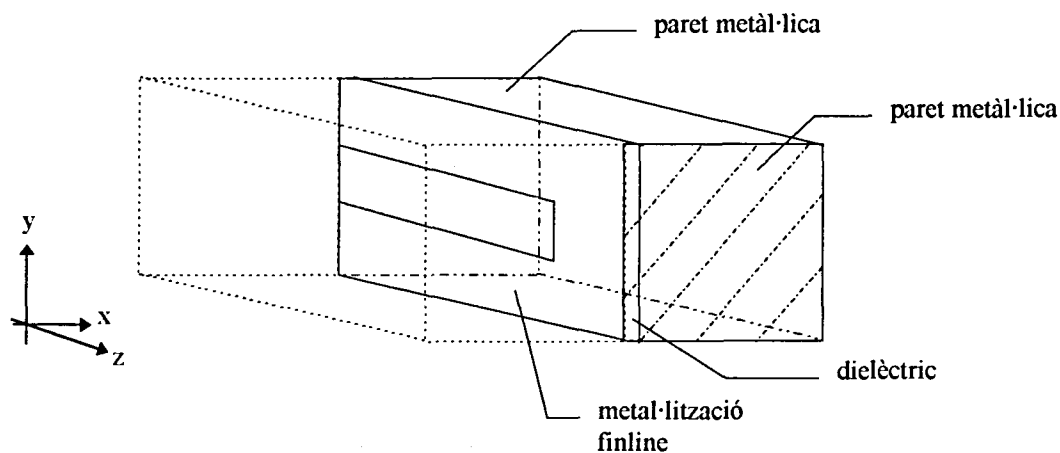


Fig 3.1.2

L'equivalent amb línies de transmissió ideals d'aquesta estructura és:

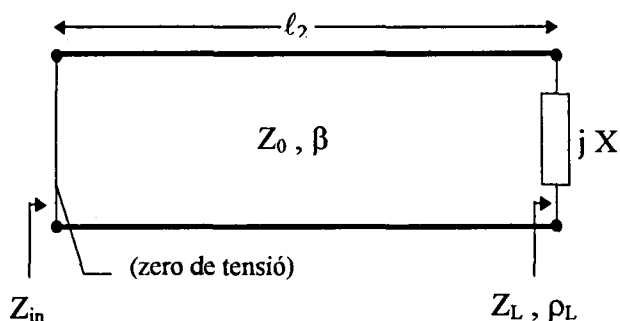


Fig 3.1.3

Segons la teoria de línies de transmissió:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta \ell_2 + j Z_0 \sin \beta \ell_2}{Z_0 \cos \beta \ell_2 + j Z_L \sin \beta \ell_2} \quad (3.1.1)$$

essent en aquest cas $Z_{in} = 0$, operant s'arriba a la condició de ressonància:

$$\bar{X} + \operatorname{tg} \beta \ell_2 = 0 \quad (3.1.2)$$

en què $\bar{X} = X/Z_0$ és la reactància normalitzada del curt-circuit finline, β la constant de fase de la línia finline calculada prèviament amb el mètode de la ressonància transversal generalitzat (capítol) o amb un altre mètode, i ℓ_2 la longitud de la cavitat ressonant que hem construït i que hem de calcular. A partir d'aquí trobem el coeficient de reflexió ρ_L que ens caracteritza la discontinuïtat:

$$\rho_L = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} \Rightarrow \begin{cases} |\rho_L| = 1 \\ \operatorname{Arg}[\rho_L] = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{X}}{-1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{X}}{1}\right) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Per poder despreciar els possibles efectes sobre la discontinuïtat a caracteritzar de la paret metàl·lica més propera a aquesta que hem introduït per convertir l'estructura en una cavitat ressonant, s'ha de separar aquesta paret de la discontinuïtat una distància ℓ_1 :

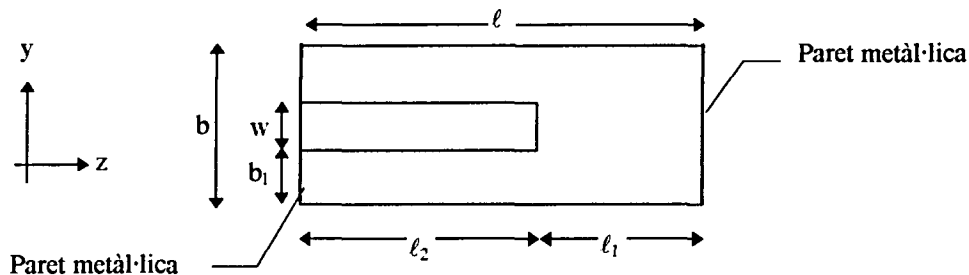


Fig 3.1.4

Fixat ℓ_1 , (normalment amb $\ell_1 \geq \lambda_g/2$ és suficient), el mètode ens proporciona ℓ , d'on podem obtenir ℓ_2 i d'aquí ρ_L .

3.2. Cas d'un biport:

Segui una discontinuïtat finline genèrica com l'esquematitzada a la figura següent:

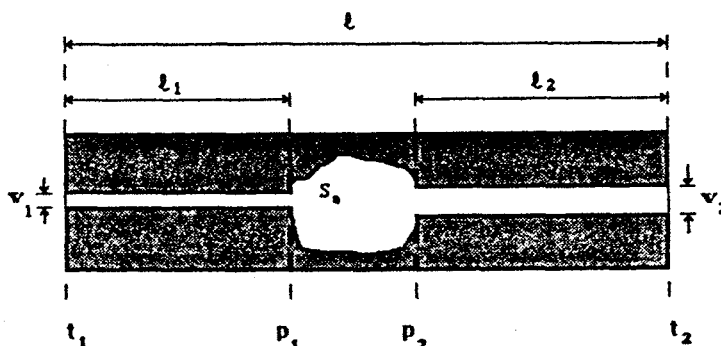


Fig 3.2.1

que podem modelar com:

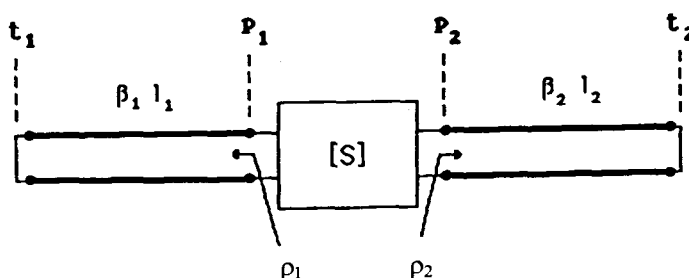


Fig 3.2.2

aplicant la teoria clàssica de paràmetres S:

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} & ; & [b] = [S][a] \\
 \rho_2 = -e^{2j\beta_2 l_2} = \frac{a_2}{b_2} \\
 \rho_1 = -e^{2j\beta_1 l_1} = \frac{a_1}{b_1}
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} ; [a] = [\rho][b] \rightarrow [a] = [\rho][S][a] \quad (3.2.1)$$

operant:

$$[S] - [\rho]^{-1} = \vec{0} \Rightarrow \text{Det}\{[S] - [\rho]^{-1}\} = 0 \Rightarrow (S_{11} - 1/\rho_1)(S_{22} - 1/\rho_2) - S_{12}S_{21} = 0 \quad (3.2.2)$$

Fixant una longitud, per exemple ℓ_1 , el mètode de la ressonància transversal generalitzat ens proporciona l'altra: ℓ_2 , i amb les constants de fase de les línies finline calculades previament, obtenim els coeficients de reflexió ρ_1 i ρ_2 . Si repetim el càlcul per a quatre longituds ℓ_1 diferents obtindrem quatre conjunts de valors de coeficients de reflexió: ρ_{1a} i ρ_{2a} ; ρ_{1b} i ρ_{2b} ; ρ_{1c} i ρ_{2c} ; ρ_{1d} i ρ_{2d} . Aquests valors substituïts a l'equació 3.2.2 ens permeten formar un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites (S_{11} , S_{12} , S_{21} i S_{22}). Resolvent-lo tenim els paràmetres S de la discontinuïtat buscats. Si l'estructura és recíproca llavors és $S_{12}=S_{21}$ i només necessitem tres avaluacions per a construir un sistema de tres equacions i tres incògnites.

S'ha de recordar que si la cavitat és ressonant per una longitud ℓ , també ho és per $\ell+n\lambda/2$ ($n=1,2,\dots$). Això s'ha de tenir en compte a l'hora d'introduir les longituds ℓ_1 i d'interpretar els resultats.