

Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació

**EFFECTOS DE LA TURBULENCIA ATMOSFÉRICA  
EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.**

Aniceto Belmonte Molina

Director: Adolfo Comerón Tejero

Tesis doctoral presentada en la Universitat Politècnica de Catalunya.

Febrero de 1995

## CAPITULO 5

# ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE UN SISTEMA RECEPTOR MULTIAPERTURA EN UN ENLACE ATMOSFÉRICO

### 5.1 Introducción

En un sistema óptico receptor ideal, una lente de diámetro  $D$  y distancia focal  $f$  recoge y focaliza la señal luminosa sobre un fotodetector de diámetro  $D_{det}$  que produce, por fotoabsorción, una señal eléctrica proporcional a la potencia incidente sobre su región activa.

En un sistema de recepción real, junto a la señal eléctrica de interés hemos de considerar procesos adicionales que limitan las prestaciones del sistema: ruidos 'shot' de diversos orígenes (el asociado a la fotocorriente producida por la propia señal, el de la fotocorriente inducida por la radiación de fondo, el de la corriente de oscuridad), ruido de origen térmico en la electrónica de procesado de la señal, etc.

En un sistema de comunicaciones ópticas atmosférico existen además las limitaciones impuestas por el comportamiento del canal y, en particular, las debidas a las fluctuaciones de potencia en el detector cuyo origen se encuentra en las perturbaciones del frente de onda introducido por la turbulencia atmosférica.

Este capítulo se centra en el estudio de las características estadísticas de la señal de interés que llega al receptor, para poder tener en cuenta su influencia en las prestaciones de un enlace de comunicaciones.

La turbulencia atmosférica a lo largo de un trayecto de propagación provoca fluctuaciones aleatorias en la amplitud y la fase de la onda transmitida. (Aquí no consideramos los efectos de polvo, niebla, nubes o cualquier otro agente atmosférico capaz de producir difusión o absorción y cuyo efecto más importante en la propagación es causar un decrecimiento neto de la potencia que incide sobre el detector.) La degradación consecuente de la señal recibida modificará de forma sustancial las prestaciones del sistema receptor presentado anteriormente. Por un lado, el centelleo se traduce en desvanecimientos de la señal recibida, con márgenes dinámicos de hasta

varias decenas de dB, que pueden imposibilitar la realización del enlace. Además, las fluctuaciones del ángulo de llegada (fase) limitan la capacidad de la óptica receptora de focalizar la señal sobre el área activa del detector. En este capítulo vamos a estudiar la relación entre estos efectos de propagación y el funcionamiento del sistema de recepción.

La forma más sencilla de reducir la magnitud de estas fluctuaciones es usar una apertura receptora que sea grande con respecto a las escalas espaciales características del campo recibido. De este modo, la apertura receptora realiza un promediado espacial y, consecuentemente, reduce el efecto de la turbulencia. Sin embargo, hay condiciones bajo las cuales este promediado no es tan eficiente como desearíamos. En efecto, bajo condiciones de baja turbulencia integrada sobre el trayecto,  $\sigma_1^2 < 1$ , la amplitud del campo está fuertemente correlada en un plano transversal a la dirección de propagación sobre distancias del orden de  $\sqrt{\lambda L}$  (típicamente, para radiaciones en el infrarrojo cercano y varios kilómetros de propagación, de varios centímetros). Bajo condiciones de alta turbulencia, la correlación transversal espacial es, por el contrario, muy diferente. El campo está altamente correlado solamente sobre distancias muy pequeñas (del orden de milímetros) y presenta una cola de correlación residual que pueden alcanzar tamaños de en torno a un metro (Véanse los resultados presentados en el capítulo 4 al respecto.) Mientras que las escalas pequeñas son promediadas de forma efectiva por las aperturas receptoras, no ocurrirá lo propio con las escalas grandes a menos que utilizemos aperturas con diámetros muy elevados (mayores que las longitud de las colas de correlación). Lo mismo ocurrirá con las fluctuaciones de fase (ángulo de llegada) las cuales poseen longitudes de correlación del orden de la escala externa de la turbulencia  $L_o$ .

Esta discusión cualitativa nos conduce a la idea de que varias aperturas pequeñas separadas una distancia tal que las señales recogidas por cada una de ellas estén incorreladas, podrían realizar un mejor promediado espacial que una única apertura receptora de igual área total. Consideremos, por tanto, la posibilidad de que el receptor posea más de una apertura y, en función de su configuración espacial, estudiemos tanto las fluctuaciones de intensidad como de fase y establezcamos la estadística de la potencia recibida. Esto nos permitirá discernir las condiciones bajo las cuales tal sistema es preferible a una única apertura receptora.

## 5.2 Pérdidas asociadas a las fluctuaciones de potencia en la señal recibida.

Cuando la luz se propaga a través de la atmósfera, aquélla es aleatoriamente difundida por las irregularidades turbulentas del índice de refracción. A consecuencia de ello, a cierta distancia de la fuente, podemos observar una distribución de intensidad con características espaciales y temporales aleatorias. Un receptor con una apertura muy pequeña recogerá una potencia cuya estadística puede asimilarse a la presentada por la intensidad de la onda propagada. Sin embargo, si la apertura es mayor que la escala espacial de las fluctuaciones de intensidad, el receptor promediará fluctuaciones sobre la apertura y la potencia recogida presentará, por tanto, una estadística diferente a la correspondiente cantidad obtenida con una apertura puntual.

Así, si pretendemos caracterizar las variaciones aleatorias en la señal recibida, una de las limitaciones más rigurosa a las prestaciones de cualquier sistema receptor, hemos de comenzar por relacionar los principales parámetros estadísticos de la potencia recogida por nuestra apertura con aquellos otros conocidos teóricamente para la intensidad en un punto del frente de onda propagado. Examinemos el caso más general, en el que el sistema receptor está constituido por  $N$  aperturas idénticas.

### 5.2.1 Función de covarianza para las fluctuaciones de potencia: factor de promediado para un sistema multiapertura.

Supongamos que nuestro sistema óptico está formado por una única apertura de diámetro  $D$ , a la cual caracterizaremos mediante la llamada función de apertura:

$$W(\mathbf{p}, D) = \begin{cases} 1 & , |\mathbf{p}| \leq D/2 \\ 0 & , |\mathbf{p}| > D/2 \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{p}$  es un vector que barre toda su superficie.

La potencia  $P$  recibida por esta apertura viene dada por

$$P = \int_{\mathcal{S}} W(\mathbf{p}-\mathbf{r}) I(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (5.2)$$

con  $\mathbf{r}$  el vector de posición de la apertura, e  $I(\mathbf{p})$  la irradiancia sobre el plano de la misma debida a alguna fuente de interés.

La función de covarianza para las fluctuaciones de potencia se define como

$$C_{PI}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle (P(\mathbf{r}_1) - \langle P(\mathbf{r}_1) \rangle) (P(\mathbf{r}_2) - \langle P(\mathbf{r}_2) \rangle) \rangle \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  determinan la posición de cada una de las aperturas para las que se

calcula la covarianza (véase la figura 5-1). Sustituyendo la potencia P por su expresión (5.2) y aplicando el cambio de variables  $R_i = p_i - r_i$ , resulta

$$C_{PI}(r_1, r_2) = \left\langle \left( \int_{s_1} W(R_1) I(R_1 + r_1) dR_1 - \left\langle \int_{s_1} W(R_1) I(R_1 + r_1) dR_1 \right\rangle \right) \left( \int_{s_2} W(R_2) I(R_2 + r_2) dR_2 - \left\langle \int_{s_2} W(R_2) I(R_2 + r_2) dR_2 \right\rangle \right) \right\rangle \quad (5.4)$$

Si intercambiamos el orden de la integración y el promediado

$$C_{PI}(r_1, r_2) = \int_{s_1} \int_{s_2} W(R_1) W(R_2) \left\langle [I(R_1 + r_1) - \langle I(R_1 + r_1) \rangle] [I(R_2 + r_2) - \langle I(R_2 + r_2) \rangle] \right\rangle dR_1 dR_2 \quad (5.5)$$

y reconocemos  $\langle I(r) \rangle$  igual a la intensidad media  $I_0$ , la covarianza de la potencia se reduce a

$$C_{PI}(r_1, r_2) = \int_{s_1} \int_{s_2} W(R_1) W(R_2) \left\langle [I(R_1 + r_1) - I_0] [I(R_2 + r_2) - I_0] \right\rangle dR_1 dR_2 \quad (5.6)$$

Aquí,  $\langle [I(R_1 + r_1) - I_0] [I(R_2 + r_2) - I_0] \rangle$  es la definición de la función de covarianza de la intensidad. Suponiendo isotropía en el comportamiento de la atmósfera,  $C_I(R_1 + r_1, R_2 + r_2) = C_I(R_1 - R_2 + r_1 - r_2)$ . Así, llamando  $\rho = r_1 - r_2$

$$C_{PI}(\rho) = \int_{s_1} \int_{s_2} W(R_1) W(R_2) C_I(R_1 - R_2 + r_1 - r_2) dR_1 dR_2 \quad (5.7)$$

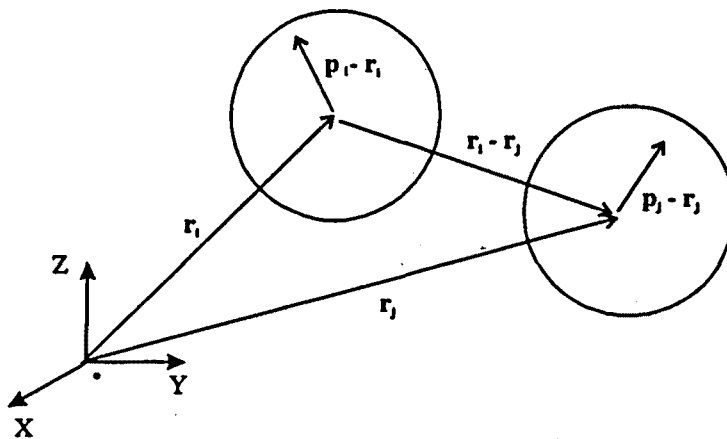


Fig. 5-1. Función de covarianza para las fluctuaciones de potencia: geometría del problema.  $r_i$  son los vectores de posición para las aperturas y  $p_i$  son los vectores que barren sus superficies

Mediante el cambio de variables de integración de  $R_1, R_2$  a  $\rho_1, \rho_2$ , donde

$$\begin{aligned}\rho_1 &= R_1 - R_2 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2)\end{aligned}\quad (5.8)$$

obtenemos

$$C_{PI}(\rho) = \int d\rho_1 \left[ \int d\rho_2 W(\rho_2 + 1/2\rho_1) W(\rho_2 - 1/2\rho_1) \right] C_I(\rho_1 + \rho) \quad (5.9)$$

Observando que la integral sobre la variable  $\rho_2$

$$\begin{aligned}K_1(\rho, D) &= \int d\rho_2 W(\rho_2 + 1/2\rho_1, D) W(\rho_2 - 1/2\rho_1, D) = \\ &= \begin{cases} \frac{D^2}{2} \left\{ \cos^{-1}(\rho_1/D) - (\rho_1/D) [1 - (\rho_1/D)^2]^{1/2} \right\} & , \rho_1 \leq D \\ 0 & , \rho_1 > D \end{cases}\end{aligned}\quad (5.10)$$

es la autocorrelación de la función de apertura o función de transferencia óptica del sistema (FTO) podemos reescribir (5.9) como

$$C_{PI}(\rho) = \int d\rho_1 K_1(\rho_1, D) C_I(\rho_1 + \rho) \quad (5.11)$$

Este resultado nos indica que la covarianza de las fluctuaciones de potencia  $C_{PI}$  se calcula como la correlación entre la función de transferencia óptica de la apertura receptora y la covarianza de intensidad de la onda que incide sobre ella. Si representamos mediante  $\Phi_I(\mathbf{K})$  y  $H_1(\mathbf{K})$  a las transformadas de Fourier de las funciones  $C_I(\rho)$  y  $K_1(\rho, D)$ , respectivamente,

$$\begin{aligned}\Phi_I(\mathbf{K}) &= \mathcal{F} \{ C_I(\rho) \} \\ H_1(\mathbf{K}) &= \mathcal{F} \{ K_1(\rho) \}\end{aligned}\quad (5.12)$$

el teorema de la correlación

$$\mathcal{F} \left\{ \int d\rho_1 K_1(\rho_1, D) C_I(\rho_1 + \rho) \right\} = H_1^*(\mathbf{K}) \Phi_I(\mathbf{K}) \quad (5.13)$$

nos permite considerar a la apertura como un filtro espacial pasa bajos que actúa sobre la función de covarianza de la intensidad. La figura 5-2 muestra el consecuente ensanchamiento de la función de covarianza para la potencia.

A partir del resultado anterior, es fácil estimar la varianza de las fluctuaciones de la potencia recibida (centelleo):

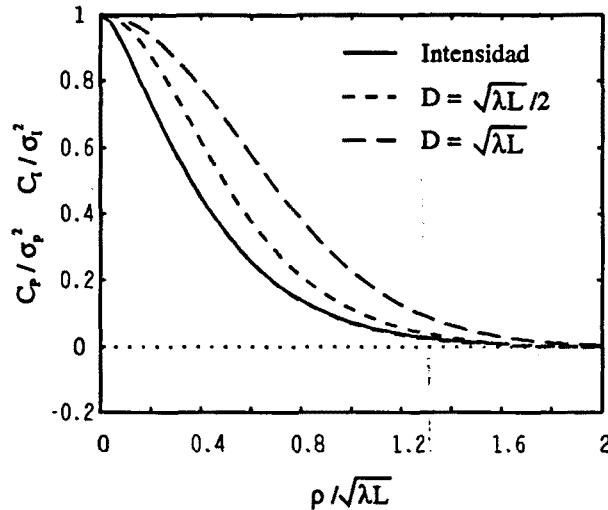


Fig. 5-2. Función de covarianza de la potencia recogida por aperturas con diferentes diámetros. Se compara con la correspondiente covarianza de intensidad calculada para una onda esférica.

$$\sigma_{PI}^2 = C_{PI}(0) = \int K_1(\rho) C_f(\rho) d\rho \quad (5.14)$$

Observemos que  $K_1(\rho)$  y  $C_f(\rho)$  son funciones isotrópicas de  $\rho$ , con lo cual obtenemos

$$\sigma_{PI}^2 = 2\pi \int_0^D \rho d\rho K_1(\rho, D) C_f(\rho) \quad (5.15)$$

expresión ya deducida por Fried (1967) siguiendo un desarrollo de Tatarskii (1961) diferente al que hemos presentado. La ventaja de esta formulación estriba en la facilidad con que el resultado puede ser generalizado a los sistemas multiapertura que nos serán de interés en los desarrollos posteriores. Veámoslo.

a) Función de covarianza de potencia para un sistema multiapertura.

Supongamos nuestro sistema de óptico formado por  $N$  aperturas idénticas de diámetro  $D$ . La función de transmisión para esta apertura múltiple será la suma de las funciones de apertura correspondientes a cada una de las  $N$  subaperturas:

$$W_N(\rho) = \sum_{i=1}^N W(\rho - r_i, D) \quad (5.16)$$

donde  $r_i$  es el vector de posición de la apertura  $i$ -ésima y  $W(\rho, D)$  está dada por la

ecuación (5.1). Si definimos la función de transferencia óptica  $K_N$  para el sistema multiapertura como la autocorrelación de la función de apertura  $W_N$ ,

$$K_N(\rho) = \int d\rho_2 W_N(\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_1) W_N(\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_1) \quad (5.17)$$

al sustituir  $W_N$  por el sumatorio (5.16), obtenemos  $K_N$  como función de la FTO para una sola apertura:

$$K_N(\rho) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_1(\rho + r_i - r_j) \quad (5.18)$$

Así, si consideramos la potencia instantánea recogida por el sistema, suma de las potencias recogidas por cada una de las N aperturas idénticas,

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} W(\rho_i - r_i, D) I(\rho_i) d\rho_i = \\ &= \int_S W_N(\rho) I(\rho) d\rho \end{aligned} \quad (5.19)$$

la función de covarianza para las fluctuaciones de esta potencia puede ser calculada sustituyendo  $K_1$  por la función de transferencia  $K_N$  para el sistema multiapertura:

$$C_{PN}(\rho) = \int d\rho_1 K_N(\rho_1) C_I(\rho_1 + \rho) \quad (5.20)$$

Reemplazando  $K_N$  por su expresión (5.18), resulta:

$$\begin{aligned} C_{PN}(\rho) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int K_1(\rho_1 + r_i - r_j) C_I(\rho_1 + \rho) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{P_i}(\rho + r_j - r_i) \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde  $C_{P_i}$  es la covarianza de potencia para una única apertura (5.11). Como anteriormente, el centelleo de la potencia recibida puede calcularse particularizando la expresión anterior para  $\rho = 0$ :

$$\sigma_{PN}^2 = C_{PN}(0) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{P_i}(r_j - r_i) \quad (5.22)$$

Esta expresión puede utilizarse para calcular la varianza de la potencia recogida por un sistema receptor de N aperturas idénticas, dadas las posiciones relativas de éstas y conocida la función de covarianza de intensidad  $C_I$ . Para  $N=1$ ,  $\sigma_{PN}^2$  reduce a la igualdad (5.15).



b) Factor de promediado para un sistema multiapertura.

Para evaluar el efecto de usar una o varias aperturas en la reducción de la varianza de la señal recibida, suele definirse el llamado factor de promediado  $G$

$$G = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{PI}(\tau_j - \tau_i)}{C_I(0) \left( N \frac{\pi}{4} D^2 \right)^2} \quad (5.23)$$

o relación entre la varianza de la potencia recibida y aquella que se obtendría con una apertura infinitesimalmente pequeña (varianza de intensidad  $C_I(0)$ ). Por cuestiones de normalización, hemos dividido por el cuadrado de la potencia media recibida por el sistema multiapertura,  $(N\pi/4D^2)^2$ .

Las figuras 5-3, 5-4 y 5-5 presentan, como aplicación de los resultados previos, la evolución de  $G$  función de parámetros significativos, tales como el número de aperturas y la distancia entre ellas. Algunas conclusiones surgen inmediatamente al observar las figuras: al incrementar el número de aperturas  $N$  (figura 5-3), se hace más efectivo el promediado de las fluctuaciones de potencia; cuando  $N$  aumenta, observamos que  $G$  tiende a cero como  $1/N$ . Igualmente, podemos ver que un incremento de la separación entre aperturas (figuras 5-4 y 5-5) causa un incremento del efecto de promediado como consecuencia de la mayor descorrelación de las potencias

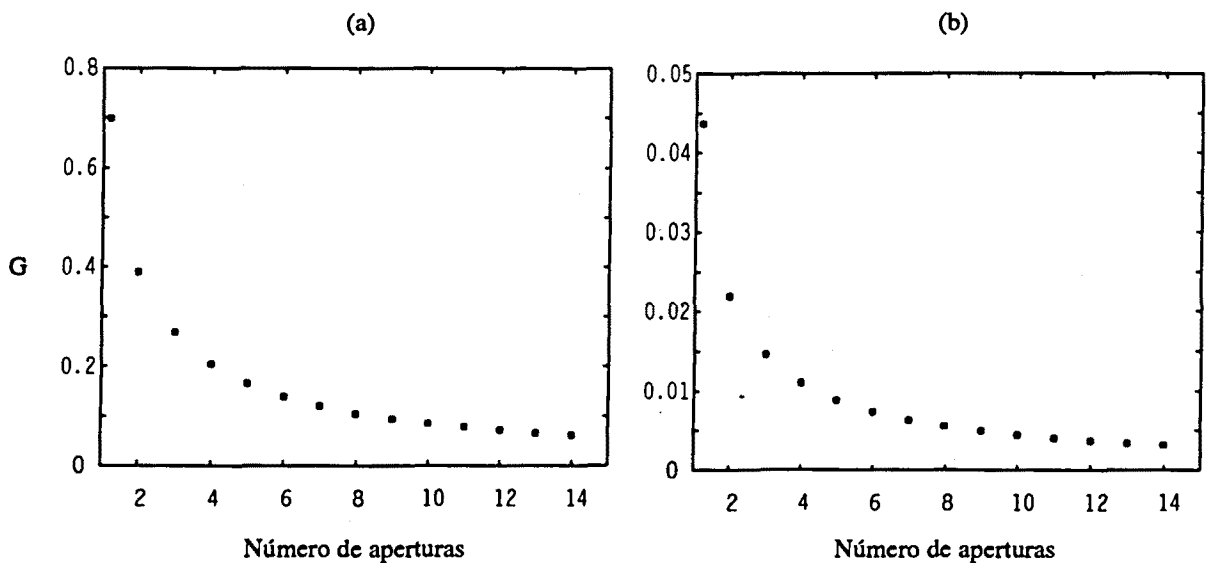


Fig. 5-3. Factor de promediado función del número de subaperturas para un trayecto caracterizado por la covarianza de intensidad  $C_I$  mostrada en la figura 5-2. Se consideran dos casos: a) Diámetro de las aperturas,  $D = \sqrt{\lambda L} / 2$  y distancia entre aperturas  $l = \sqrt{\lambda L}$ ; b)  $D = \sqrt{\lambda L}$  y  $l = 2\sqrt{\lambda L}$ .

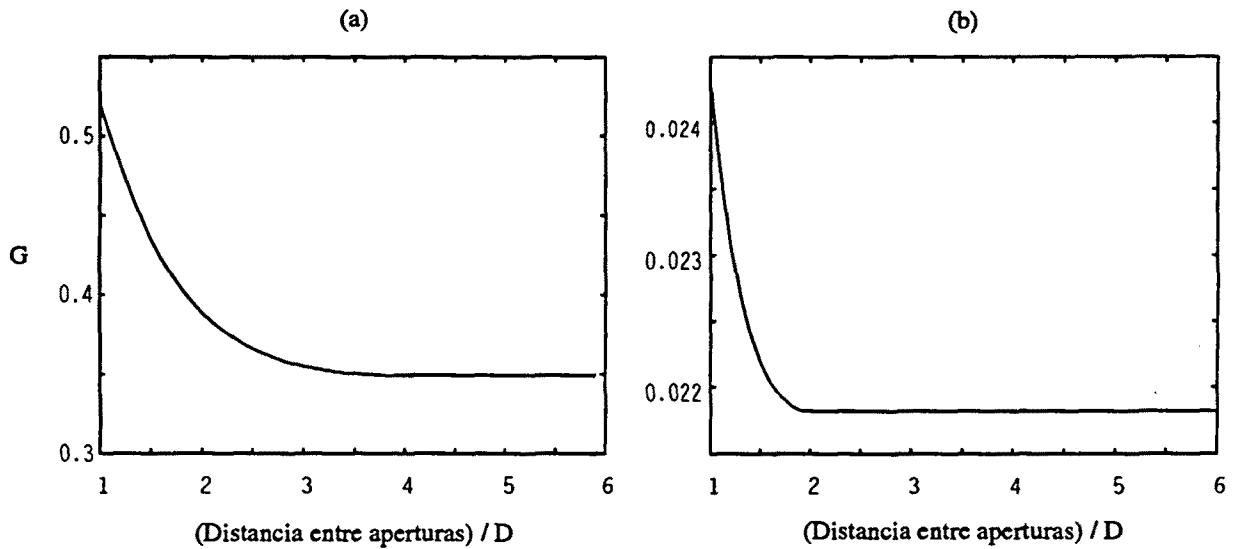


Fig. 5-4. Factor de promediado función de la separación entre dos aperturas. a)  $D = \sqrt{\lambda L} / 2$  ;  
b)  $D = \sqrt{\lambda L}$  .

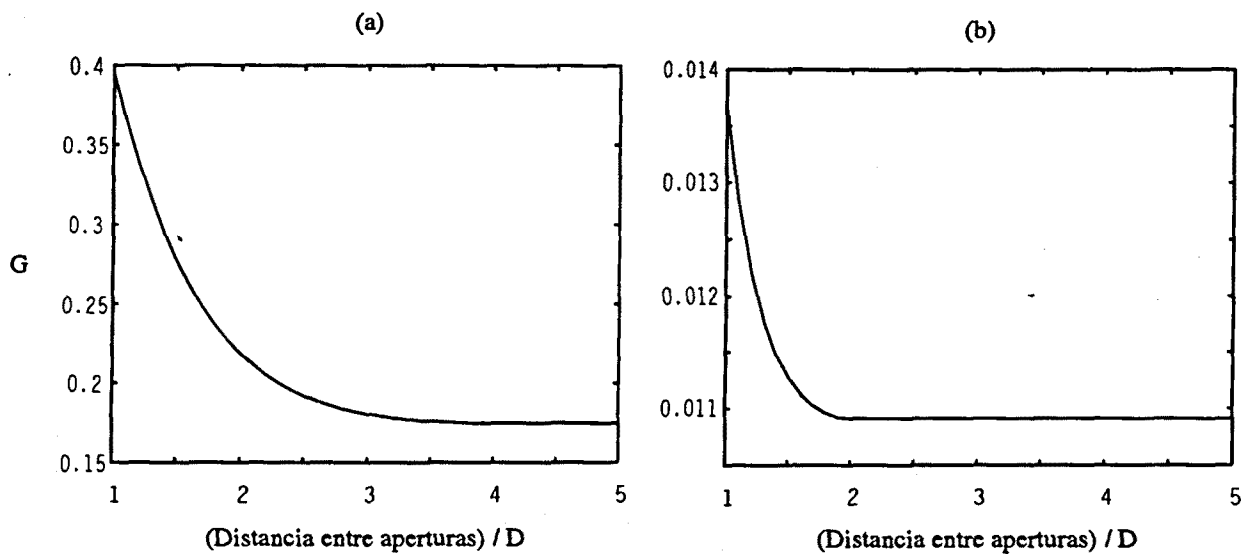


Fig. 5-5. Factor de promediado para un agrupamiento de cuatro aperturas situadas en los vértices de un cuadrado función de la distancia entre subaperturas. a)  $D = \sqrt{\lambda L} / 2$  ; b)  $D = \sqrt{\lambda L}$  .

recogidas por cada apertura. Además, cuando la separación es mayor que la longitud de correlación espacial de las fluctuaciones de intensidad, un posterior incremento de aquella no causa ningún decrecimiento del factor de promediado, el cual tiende a una constante igual al factor de promediado para una única apertura dividido por el número de aperturas del receptor (compárese la figura 5-3 para  $N=1$  con las colas de las figuras 5-4 y 5-5).

### 5.2.2 Estadística de las fluctuaciones de potencia.

La estadística del centelleo de intensidad de una onda propagada a través de la atmósfera fue estudiada en el capítulo anterior. Tras el estudio experimental presentado en el capítulo 4, la distribución de probabilidad log-normal perturbada parecía ser adecuada para describir el centelleo bajo cualesquiera condiciones de propagación. Sin embargo, tal como estamos viendo, en la mayoría de las situaciones prácticas se usan detectores con apertura finita en lugar de receptores puntuales y, por tanto, es importante para el análisis de los sistemas conocer la estadística del centelleo promediado por la apertura.

Sabiendo que la potencia es la integral de la intensidad sobre la apertura, podemos tratar de generalizar el resultado obtenido para ésta: supongamos la apertura dividida en un número  $n$  de celdas con dimensiones  $\Delta \rho_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) del orden de la longitud de la longitud de correlación de las fluctuaciones de intensidad (Consortini y Ronchi, 1977; Consortini et al, 1977). Si  $I(\rho)$  es la distribución espacial de intensidad (puntual) sobre la apertura, entonces la potencia recogida por ésta puede escribirse como

$$P = \int_S I(\rho) d\rho = \sum_{i=1}^N I(\rho_i) \Delta \rho_i \quad (5.24)$$

Así, para evaluar la distribución de probabilidad de  $P$  necesitaríamos conocer la función de distribución conjunta multidimensional de  $I(\rho)$  sobre las  $n$  celdas. Teniendo en cuenta la complejidad de la distribución log-normal perturbada, la realización de la integral multidimensional requerida es imposible. Por ello, ataquemos el problema desde posiciones más intuitivas.

En el modelo de propagación que nos conducía a la distribución log-normal perturbada, suponíamos que los efectos de dispersión con un ángulo grande, propios de trayectos largos y turbulencia intensa, no eran despreciables; esto se traducía en una modulación de la distribución log-normal, característica de propagación en baja turbulencia, a través de la distribución Rice-Nakagami. Ahora bien, también sabemos que las fluctuaciones de intensidad ocasionadas en régimen de fuerte turbulencia están caracterizadas por escalas espaciales pequeñas. Es de esperar, por tanto, que estas fluctuaciones de  $I$  se vean fuertemente promediadas por aperturas cuyos diámetros sean del orden de la longitud de Fresnel y, consecuentemente, que las fluctuaciones de potencia observadas a través de tales aperturas verifiquen una distribución log-normal.

$$P(P) = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi} \sigma_{\chi_P} P} \exp \left\{ - \frac{\left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{P}{\langle P \rangle} \right) + \sigma_{\chi_P}^2 \right]^2}{2 \sigma_{\chi_P}^2} \right\}, P \geq 0 \quad (5.25)$$

Aquí,  $P$  es la potencia instantánea,  $\langle P \rangle$  la potencia media y  $\chi_P$  la log-potencia

$$\chi_P = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{P}{\langle P \rangle} \right) \quad (5.26)$$

para la que se define una distribución normal

$$P(\chi_P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\chi_P}} \exp \left\{ - \frac{(\chi_P - \sigma_{\chi_P}^2)^2}{2 \sigma_{\chi_P}^2} \right\} \quad (5.27)$$

Para comprobar estas consideraciones, se midió la función de densidad de probabilidad (FDP) de la potencia recogida a través de una apertura de 70 mm de diámetro sobre el mismo escenario descrito en el capítulo 4, de tal forma que  $\sqrt{\lambda L} \sim 50 \text{ mm}$ . Se estimó la FDP a través de la construcción de un histograma de las potencias registradas, tal como hicimos con la intensidad de la onda que llegaba a receptores puntuales (capítulo 4). Los resultados típicos se muestran en la figura 5-6, donde la línea continua representa la FDP log-normal con la misma varianza de la potencia,  $\sigma_P^2$  de los datos. Observamos, tal como cabía esperar de los razonamientos anteriores, que la FDP log-normal describe correctamente la estadística de la irradiancia

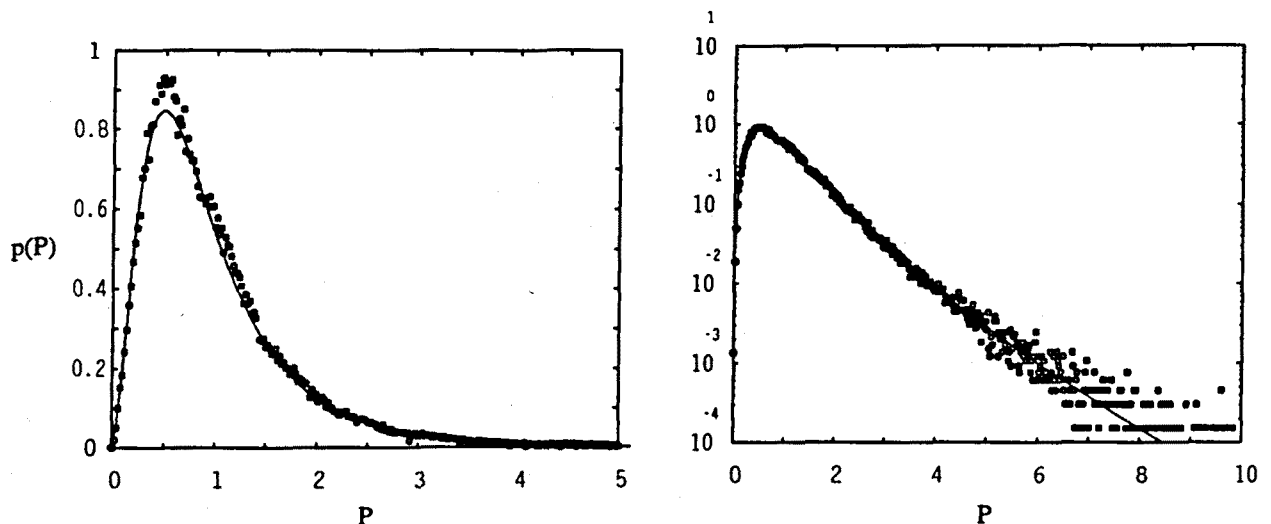


Fig. 5-6. Densidad de probabilidad de  $P/\langle P \rangle$ . La línea continua es una densidad de probabilidad log-normal con la misma varianza que los datos.

promediada por la apertura.

Este resultado es generalizable a la potencia recogida por un sistema de  $N$  aperturas,  $P = \sum_i P_i$ , con sólo aplicar la propiedad, demostrada por Banakat (1976), por la que la suma de un número de variables reales, cada una log-normalmente distribuida, tiene también una distribución log-normal.

### 5.2.3 Pérdidas inducidas por las fluctuaciones de la potencia recibida.

Conocida la función de densidad de probabilidad para las fluctuaciones de potencia es fácil estimar las probabilidades de pérdidas asociadas a estas fluctuaciones. Para ello, normalizemos en primer lugar la FDP (5.25) sustituyendo  $P$  por  $P/\langle P \rangle$  :

$$p(P) = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi} \sigma_{x_p} P} \exp \left\{ - \frac{\left( \frac{1}{2} \ln P + \sigma_{x_p}^2 \right)^2}{2 \sigma_{x_p}^2} \right\}, P \geq 0 \quad (5.28)$$

En este caso, las pérdidas  $L_p = 1 - P$  presentarán una densidad de probabilidad

$$P(L_p) = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi} \sigma_{x_p} (1-L_p)} \exp \left\{ - \frac{\left[ \frac{1}{2} \ln(1-L_p) + \sigma_{x_p}^2 \right]^2}{2 \sigma_{x_p}^2} \right\}, L_p \geq 0 \quad (5.29)$$

donde  $\sigma_{x_p}^2$  se relaciona con  $\sigma_p^2$  a través de (Fried, 1967)

$$\sigma_{x_p}^2 = \frac{1}{4} \ln(1 + \sigma_p^2) \quad (5.30)$$

Si calculamos el centelleo de la potencia recibida  $\sigma_p^2$  con la expresión general (5.22) para un sistema multiapertura

$$\sigma_p^2 = \sigma_{PN}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{PI}(r_j - r_i) \quad (5.31)$$

la ecuación (5.29) permite evaluar las pérdidas inducidas por las fluctuaciones de la potencia recibida para cualquier configuración de aperturas en el sistema receptor.

En las figuras 5-7, 5-6 y 5-9 se muestran las probabilidades de que las pérdidas inducidas por las fluctuaciones de potencia excedan el valor en abscisas para varias configuraciones del sistema receptor. Como era de esperar tras el análisis sobre el factor de promediado en un sistema multiapertura, hay una clara disminución de estas probabilidades al incrementar el número de aperturas y la separación entre ellas.

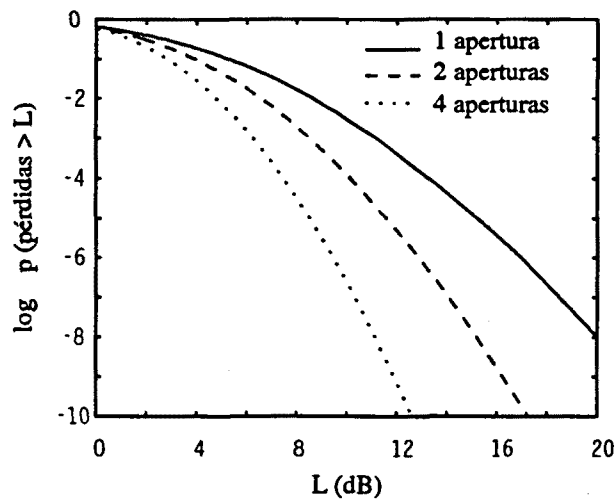


Fig. 5-7. Probabilidad de que las pérdidas inducidas por las fluctuaciones de potencia excedan el valor en abcisas como una función del número de aperturas en el sistema receptor. Se considera como diámetro de las aperturas  $D = \sqrt{\lambda L}/2$ , y distancia entre ellas  $l = \sqrt{\lambda L}$ .

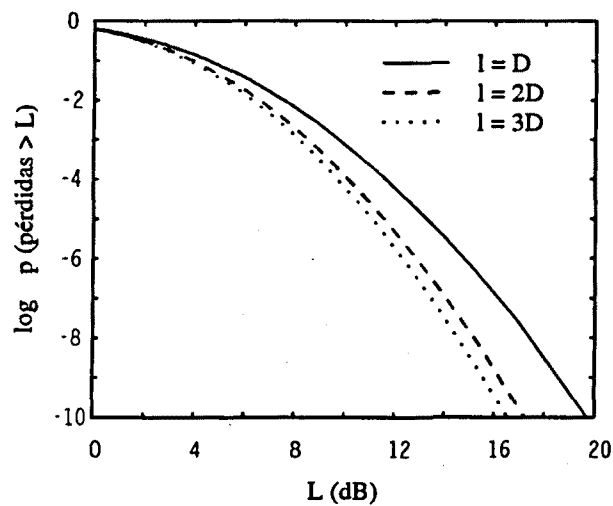


Fig. 5-8. Probabilidad de que las pérdidas inducidas por las fluctuaciones de potencia excedan el valor en abcisas como una función de la separación entre dos aperturas.  $D = \sqrt{\lambda L}$ .

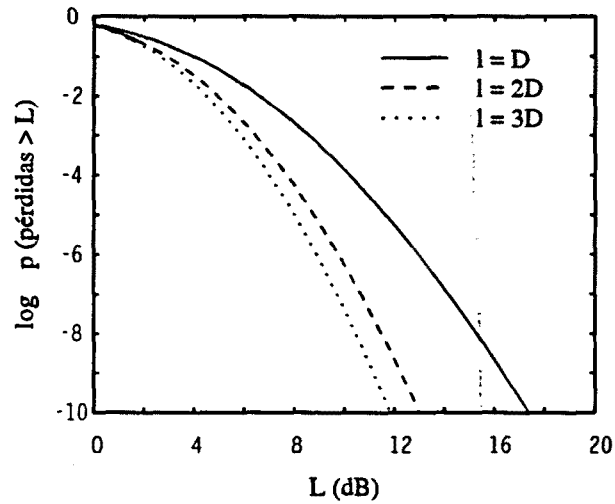


Fig. 5-9. Probabilidad de que las pérdidas inducidas por las fluctuaciones de potencia excedan el valor en abscisas como una función de la separación para un agrupamiento de cuatro aperturas de diámetro  $D = \sqrt{\lambda L}/2$  situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $l = \sqrt{\lambda L}$ .

### 5.3 Pérdidas asociadas al ángulo de llegada para un sistema multiapertura.

El efecto de la turbulencia atmosférica en la propagación de un haz láser ha sido reducido a una serie de perturbaciones en sus parámetros básicos. De esta forma, el análisis se aproxima mediante problemas que han encontrado solución en la teoría de propagación de ondas en un medio turbulento.

En este contexto, discutamos las variaciones de potencia recogida por un sistema receptor debido a las fluctuaciones del ángulo de llegada: el frente de onda distorsionado que llega hasta el plano de recepción define un ángulo de inclinación aleatorio y, por ello, una aparente variación de la posición del transmisor. Esto produce un movimiento aleatorio de la mancha focal sobre el detector y, como consecuencia del desbordamiento de su área activa, variaciones en el nivel de potencia recibida. De hecho, la fluctuación del ángulo de llegada es, junto al centelleo, la causa principal de la existencia de desvanecimiento y, por tanto, del deterioro de las probabilidades de detección de nuestro sistema receptor.

Tras presentar un modelo muy sencillo para el estudio de las probabilidades de pérdidas asociadas a fluctuaciones del ángulo de llegada, generalizaremos sus planteamientos a sistemas multiaperturas. La imposibilidad de obtener fórmulas analíticas y la exigencia de tiempos de cálculo razonables nos conducirán a la utilización de técnicas espectrales de simulación sobre las fluctuaciones del ángulo de llegada similares a las consideradas en el estudio de la propagación (capítulo 3). Finalmente, tras identificar a los frentes de onda degradados por la turbulencia como superficies fractales, podremos simular mediante algoritmos no sólo más eficientes que las técnicas espectrales desde un punto de vista computacional, sino además más realistas que consideran la simulación de todo el frente de ondas aleatorio.

#### 5.3.1 Estadística de las pérdidas asociadas a las fluctuaciones del ángulo de llegada para una única apertura.

Exposito (1967) consideró el problema de las fluctuaciones de potencia asociadas al movimiento del haz como un todo sobre el plano de recepción, consecuencia tanto de ruido mecánico en el emisor, como de turbulencia atmosférica cerca de éste. Aunque el problema que estamos tratando es físicamente diferente, las consideraciones que se desarrollaron pueden ayudarnos a establecer un modelo que dé cuenta de los decaimientos de potencia ocasionados por el ángulo de llegada aleatorio.

La función de ensanchamiento de punto es la distribución de irradiancia en el plano focal de nuestro sistema colector cuando en la entrada de éste tenemos una onda plana. Si esta apertura está definida por una lente de diámetro  $D$  y focal  $f$ , entonces la función de ensanchamiento define en el plano focal una densidad de potencia descrita



por la función de Airy:

$$I(x,y) = \frac{\pi D^2}{\lambda^2 f^2} \left[ \frac{J_1 \left( \frac{\pi D (x^2+y^2)^{1/2}}{\lambda f} \right)}{\left( \frac{\pi D (x^2+y^2)^{1/2}}{\lambda f} \right)} \right]^2 \quad (5.32)$$

con  $(x,y)$  las coordenadas sobre el plano focal. En presencia de turbulencia, el frente de onda que recibimos muestra perturbaciones que la diferencian de la onda plana de referencia, de tal forma que la función de ensanchamiento deja de estar definida por (5.32). El carácter aleatorio de la deformación de la mancha focal imposibilita dar una nueva expresión para la mancha focal en presencia de turbulencia. Se puede intentar aproximarla por una distribución gaussiana (Menéndez-Valdés, 1994):

$$I(x,y) = \frac{1}{2\pi r_s^2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2+y^2}{r_s^2} \right) \right] \quad (5.33)$$

donde  $r_s$  es el radio de la distribución de intensidad gaussiana medido a  $1/\sqrt{e}$ . Obsérvese (figura 5-10) que la aproximación a la función de ensanchamiento básicamente ha consistido en un suavizado de las oscilaciones que la función de Airy presenta para valores elevados de  $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$ .

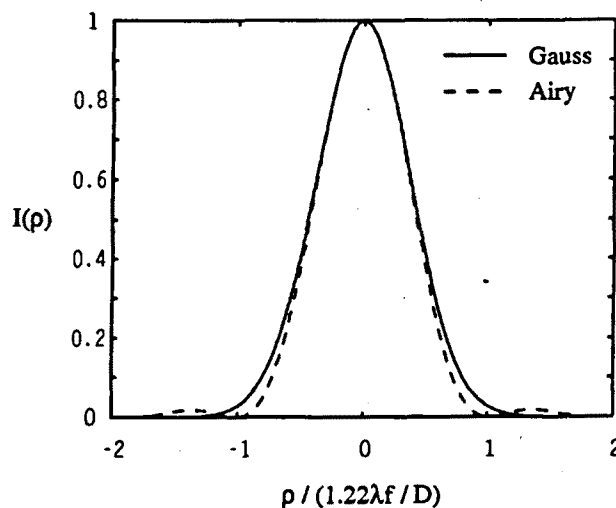


Fig. 5-10. Función de ensanchamiento de punto en el vacío (Airy) y aproximación en presencia de turbulencia (Gauss).

Las expresiones anteriores suponían que el frente de onda llegaba sin inclinación alguna respecto a la apertura y, por tanto, la mancha focal se situaba en su posición ideal en el centro del plano focal. Si  $x_\alpha = f \alpha_x$ ,  $y_\alpha = f \alpha_y$  son los desplazamientos aleatorios del centro de la mancha focal asociados a las fluctuaciones del ángulo de llegada  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  (figura 5-11), la densidad de potencia en el plano focal (5.33) se verá modificada como sigue:

$$I(x, y, x_\alpha, y_\alpha) = (2\pi r_s)^{-1} \exp\left[-\frac{(x-x_\alpha)^2 + (y-y_\alpha)^2}{2r_s^2}\right] \quad (5.34)$$

De este modo, podemos calcular la pérdida de potencia  $L$  (en dB) asociada al desbordamiento que la función de ensanchamiento hace del área activa del detector situado en el plano focal como

$$L = -10 \log \left[ \iint_{x^2 + y^2 > R_D^2} I(x, y, x_\alpha, y_\alpha) \right] = -10 \log \left[ Q \left( \frac{\rho_\alpha}{r_s}, \frac{R_D}{r_s} \right) \right] \quad (5.35)$$

donde  $R_D$  es el radio del detector utilizado y  $\rho_\alpha = (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{1/2}$  la distancia entre el centro del colector y el centro de la mancha gaussiana. Sustituyendo (5.34) en la integral anterior, es fácil encontrar la expresión que describe la función  $Q$  o de Marcum:

$$Q(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta t \exp\left(-\frac{t^2 + \alpha^2}{2}\right) I_0(\alpha t) dt \quad (5.36)$$

siendo  $I_0$  la función de Bessel modificada de primera especie y orden cero.

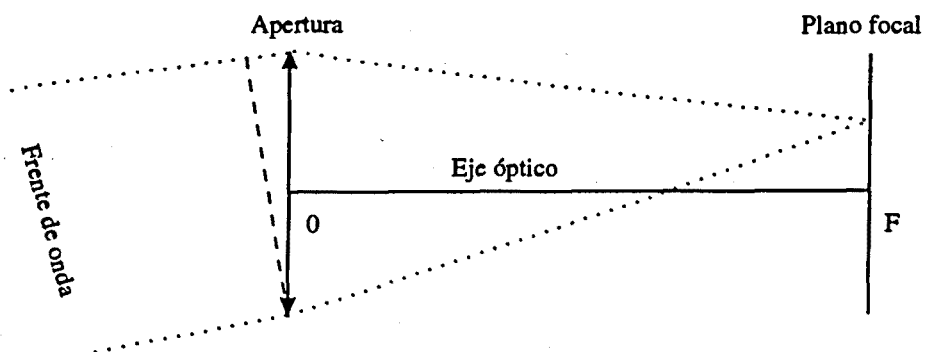


Fig. 5-11. Desplazamientos de la función de ensanchamiento de punto asociados a las fluctuaciones del ángulo de llegada.

Si asumimos que  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  son variables gaussianas con igual varianza  $\sigma_\alpha$ , tal como mostramos experimentalmente (capítulo 4), los desplazamientos ortogonales  $x_\alpha$ ,  $y_\alpha$  de la mancha focal también lo serán y, consecuentemente,  $\rho_\alpha$  vendrá definida por una distribución Rayleigh

$$p_{\rho_\alpha} = \frac{2\rho_\alpha}{\sigma_\rho^2} \exp\left(-\frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\rho^2}\right) \quad (5.37)$$

con  $\sigma_\rho^2 = 2f^2\sigma_\alpha^2$ .  $r_s^2$  y  $\sigma_\alpha^2$  no son independientes sino que están relacionadas a través del diámetro de coherencia  $r_0$  por medio de la expresión (Fried, 1965)

$$r_s^2 + f^2\sigma_\alpha^2 = 8\left(\frac{f}{kr_0}\right)^2 \quad (5.38)$$

donde, como ya se dijo,  $f$  es la longitud focal del sistema óptico receptor y  $k$  es el número de onda de la radiación. Aquí también se ha considerado a la función de ensanchamiento de punto de larga exposición como una distribución de intensidad gaussiana que posee la misma potencia y la misma definición de Strehl que una mancha focal de Airy producida por una apertura de diámetro  $r_0$ . Además, y como vimos en el capítulo anterior,  $\sigma_\alpha^2$  también está dada como una función de  $r_0$ :

$$\sigma_\alpha^2 = 6.88 \frac{1}{k^2 r_0^{5/3} D^{1/3}} \quad (5.39)$$

donde  $D$  es el diámetro de la apertura receptora. La expresión (5.37) suena que el diámetro de esta apertura es substancialmente mayor que  $r_0$ , lo cual, sabiendo que para longitudes de onda en el infrarrojo cercano y el visible en trayectos de algunos kilómetros es típicamente del orden de varios centímetros, parece ser una buena hipótesis.

A partir de aquí es fácil obtener la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria de pérdidas  $L = L(\rho_\alpha)$  conocida aquella de la variable  $\rho_\alpha$

$$P_L = p_{\rho_\alpha}(\rho_\alpha = f(L)) \left| \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial L} \right| \quad (5.40)$$

resultando:

$$p_L = \frac{2r_s^2}{\sigma_p^2 R_D} \exp\left(\frac{R_D^2}{2R_s^2}\right) \frac{\rho_\alpha \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{1}{2r_s^2}\right) \rho_\alpha^2\right]}{I_1\left(\rho_\alpha \frac{R_D}{r_s^2}\right)} \quad (5.41)$$

con  $\rho_\alpha = f(L)$  a través de la función de Marcum  $Q$  (5.36). Aunque la función  $Q$  no puede ser invertida para obtener una expresión analítica de  $p_L$  función de  $L$ , esta distribución es evaluable numéricamente.

### 5.3.2 Estadística de las pérdidas asociadas a las fluctuaciones del ángulo de llegada para un sistema multiapertura.

Consideremos la situación más compleja en la que el sistema receptor está formado por  $N$  lentes idénticas con un elemento colector de potencia en el foco de cada una de ellas. Sobre cada uno de estos elementos colectores tendremos una distribución de irradiancia gaussiana con un desplazamiento aleatorio de su posición función del ángulo de llegada en la entrada de la lente correspondiente. Si expresamos en decibelios (dB) las pérdidas  $L_i$  asociadas a cada una de las  $N$  aperturas colectoras ( $i=1,\dots,N$ ), la pérdida total puede calcularse como la suma

$$L_T = \sum_{i=1}^N L_i \quad (5.42)$$

#### a) Aperturas independientes.

Si suponemos que la pérdida por desbordamiento  $L_i$  en cada uno de los detectores es independiente de las pérdidas  $L_j$ , ( $j \neq i$ ) en el resto de ellos, la densidad de probabilidad de pérdidas totales  $P_{L_T}$  es fácilmente calculable en función de los resultados obtenidos para una única apertura. En efecto, si  $L_T$  es la suma de  $N$  variables aleatorias independientes, la función de densidad de probabilidad  $P_{L_T}$  puede expresarse como (Goodman, 1985)

$$P_{L_T}(L_T) = \int_{-\infty}^{\infty} dL_N \dots \int_{-\infty}^{\infty} dL_2 P_{L_1 \dots L_N} \left( L_T - \sum_{i=2}^N L_i, L_2, \dots, L_N \right) \quad (5.43)$$

donde  $P_{L_1 \dots L_N}$  es la función de densidad de probabilidad conjunta para las  $N$  variables  $L_i$  ( $i=1,\dots,N$ ). Al suponerlas variables independientes, podemos separar  $P_{L_1 \dots L_N}$ :

$$\begin{aligned}
 P_{L_T} &= \int_{-\infty}^{\infty} dL_N \dots \int_{-\infty}^{\infty} dL_2 P_{L_1}(L_T - \sum_{i=2}^N L_i) P_{L_2}(L_2) \dots P_{L_N}(L_N) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dL_N \dots \int_{-\infty}^{\infty} dL_2 P_{L_1}(L_T - \sum_{i=3}^N L_i - L_2) P_{L_2}(L_2) \dots P_{L_N}(L_N)
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Observando que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dL_2 P_{L_1}(L_T - \sum_{i=3}^N L_i - L_2) P_{L_2}(L_2) \tag{5.45}$$

es una convolución de  $P_{L_1}$  con  $P_{L_2}$  evaluada en  $(L_T - \sum_{i=3}^N L_i)$ , escribamos de forma más compacta:

$$\begin{aligned}
 P_{L_T}(L_T) &= \int_{-\infty}^{\infty} dL_N \dots \int_{-\infty}^{\infty} dL_4 \int_{-\infty}^{\infty} dL_3 (P_{L_1} * P_{L_2})(L_T - \sum_{i=4}^N L_i - L_3) P_{L_3}(L_3) \dots P_{L_N}(L_N) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dL_N \dots \int_{-\infty}^{\infty} dL_4 (P_{L_1} * P_{L_2} * P_{L_3})(L_T - \sum_{i=4}^N L_i) P_{L_4}(L_4) \dots P_{L_N}(L_N)
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Si iteramos el proceso, resulta

$$P_{L_T} = P_{L_1} * P_{L_2} * \dots * P_{L_N} \tag{5.47}$$

De este modo, calcular la densidad de probabilidad para las pérdidas totales cuando las aperturas pueden considerarse independientes se reduce a convolucionar las densidades correspondientes a cada una de las  $L_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Cada una de las  $P_{L_i}$  se calcula mediante la expresión (5.39) obtenida para una única apertura receptora.

La función de distribución de las pérdidas totales (probabilidad de que las pérdidas  $L_T$  se excedan) se halla integrando (5.47)

$$F_{L_T}(L_T) = \int_{L_T}^{\infty} P_{L_T}(L) dL \tag{5.48}$$

La figura 5-12 muestra la función de distribución de pérdidas totales para varios conjuntos de aperturas idénticas de 10 cm de apertura, un campo de visión de  $10^{-4}$  rad (que puede corresponder, por ejemplo, a un elemento colector sobre el plano focal de radio 100  $\mu m$  y 1 m de longitud focal), y condiciones de turbulencia correspondientes a un diámetro de coherencia  $r_0$  típico de 2 cm. Como era de esperar, cuando el número de aperturas aumenta, las probabilidades decrecen.

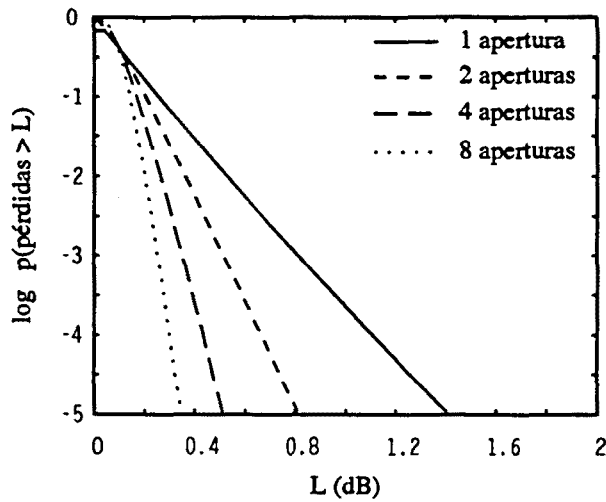


Fig. 5-12. Probabilidad de que las pérdidas debidas a fluctuaciones del ángulo de llegada para varios números de aperturas con pérdidas independientes excedan el valor en abscisas (diámetro de apertura: 10 cm; campo de visión:  $10^{-4}$  rad;  $r_0 = 2$  cm ).

**b) Aperturas correladas.**

Cuando hablamos de aperturas independientes estamos suponiendo la incorrelación de las fluctuaciones del ángulo de llegada vistas por cada una de ellas y, por tanto, del movimiento de las correspondientes manchas focales. Sin embargo, se trata de una suposición simplificada, que sólo se cumplirá si las aperturas están muy separadas. Si denotamos como  $(\alpha_x, \alpha_y)$  a las componentes del ángulo de llegada visto por la apertura i-ésima en el sistema de N aperturas, tenemos que definir una densidad de probabilidad gaussiana conjunta para cada uno de los vectores  $\alpha_x = (\alpha_{x1}, \dots, \alpha_{xN})$  y  $\alpha_y = (\alpha_{y1}, \dots, \alpha_{yN})$  :

$$P_\alpha(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |B_\alpha|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha' B_\alpha^{-1} \alpha)\right\} \quad (5.49)$$

Aquí,  $|B_\alpha|$  es el determinante y  $B_\alpha^{-1}$  la inversa de la matriz de covarianza de las fluctuaciones del ángulo de llegada. Al suponer a las variables  $\alpha_{xi}, \alpha_{yi}$  ( $i=1, \dots, N$ ) gaussianas con media cero y varianza  $\sigma_{\alpha x}^2 = \sigma_{\alpha y}^2 = \sigma_\alpha^2$ , tendremos, tanto para  $\alpha_x$  como  $\alpha_y$

$$B_{\alpha_y} = \langle \alpha_i \alpha_j \rangle \quad (5.50)$$

Ahora, la densidad de probabilidad para las pérdidas totales  $L_T = \sum_{i=1}^N L_i$  inducidas por las fluctuaciones del ángulo de llegada

$$P_{L_T}(L_T) = \int_{-\infty}^{\infty} dL_N \dots \int_{-\infty}^{\infty} dL_2 P_{L_1 \dots L_N}(L_T - \sum_{i=2}^N L_i, L_2, \dots, L_N) \quad (5.51)$$

no puede separarse como función de las distribuciones para cada una de las aperturas:

hemos determinado que los ángulos de llegada vistos por las  $N$  aperturas del sistema deben definirse a través de una función de densidad conjunta  $P_{L_1 \dots L_N}$  no separable

$$P_{L_1 \dots L_N} \neq P_{L_1}(L_1) P_{L_2}(L_2) \dots P_{L_N}(L_N) \quad (5.52)$$

Obsérvese que (5.48) será separable sólo cuando las distribuciones conjuntas  $P_{\alpha_x}(\alpha_x)$ ,  $P_{\alpha_y}(\alpha_y)$  lo sean a su vez y, a la vista de (5.46), para ello es necesario que  $B_\alpha$  sea una matriz diagonal:

$$B_{\alpha_{ij}} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} \sigma^2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.53)$$

En este caso, recuperamos el caso ya visto de aperturas independientes.

En el caso de  $N$  aperturas (pérdidas) correladas, determinar la densidad de probabilidad  $P_{L_T}$  pasa por el cálculo en un espacio  $(N-1)$ -dimensional de la integral dada por la ecuación (5.48), donde los puntos de la región de integración serán aquéllos tales que las pérdidas totales  $\sum_i L_i$  no excedan el valor  $L_T$ . La imposibilidad de definir analíticamente los límites de esta integral, obliga a resolverla numéricamente. Sin embargo, es difícil evaluar integrales multidimensionales en dominios complejos con tiempos de computación razonables.

### 5.3.3 Pérdidas asociadas a las fluctuaciones del ángulo de llegada en un sistema multiapertura: simulación de las fluctuaciones del ángulo de llegada.

Al tratar de encontrar una expresión para las probabilidades de pérdidas asociadas a las fluctuaciones del ángulo de llegada en un sistema multiapertura, la correlación de las fluctuaciones del ángulo de llegada sobre las diferentes aperturas del sistema nos conduce a expresiones intratables aún numéricamente. Esquivemos, pues, el problema de encontrar directamente las funciones de probabilidad: manteniendo el modelo anterior, donde la distribución de irradianza en el plano focal de la lente está caracterizado por un perfil gaussiano cuyo centro  $(f\alpha_x, f\alpha_y)$  describe un movimiento aleatorio gaussiano, para describir las pérdidas bajo estudio, simulemos las fluctuaciones del ángulo de llegada que ve cada una de las  $N$  aperturas del sistema; tras convertir estas fluctuaciones del ángulo de llegada en pérdidas de potencia a través de la integral de Marcum  $Q$  (5.36), iteramos este proceso el número de veces suficiente para establecer una estadística de pérdidas 'medida' sobre las simulaciones.

La técnica de simulación utilizada es la descrita en el capítulo 3: filtrar ruido blanco gaussiano para obtener una superficie aleatoria con la estadística deseada. En este caso, necesitamos conocer la estadística de las fluctuaciones del ángulo de llegada que pretendemos simular. Sabiendo que las variables aleatorias  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  son gaussianas de media cero, la especificación de la función de covarianza  $B_\alpha$  de las fluctuaciones del ángulo de llegada es suficiente para conocer su estadística (capítulo 4):

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha}(\rho) &= \frac{1}{2k^2 D^2} [ D_s(\rho+D) + D_s(\rho-D) - 2D_s(\rho) ] = \\
 &= \frac{6.88}{2k^2 D^2 r_0^{5/3}} [(\rho+D)^{5/3} + (\rho-D)^{5/3} - 2\rho^{5/3}]
 \end{aligned}
 \tag{5.54}$$

Los pasos a seguir ya habían sido descritos anteriormente con más detalle:

1.- Mediante una transformación de Fourier discreta bidimensional de la correlación  $B_{\alpha}(\rho)$ , discretizamos el espectro de potencia de las fluctuaciones del ángulo de llegada  $\Phi_{\alpha}(K)$  sobre una malla de  $M \times M$  puntos con espaciado  $\Delta K$  en el espacio transformado.

2.- Generamos una superficie de  $M \times M$  números complejos pseudoaleatorios  $A_{nm} + jB_{nm}$ , con  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  variables aleatorias gaussianas de media cero y varianza unidad.

3.- Multiplicamos  $\sqrt{\Phi_{\alpha}(n\Delta K, m\Delta K)}$  por el agrupamiento de números aleatorios  $A_{nm} + jB_{nm}$ .

4.- Una transformación inversa de Fourier del producto anterior nos conduce al campo aleatorio de ángulos de llegada deseado  $\alpha_1 + j\alpha_2$ . Este método produce dos pantallas de ángulo independientes por cada transformación, cada una con la estadística deseada. Nosotros las aprovechamos para asignar una de ellas a las fluctuaciones a lo largo del eje X,  $\alpha_x \equiv \alpha_1$  y la otra para aquellas sobre el eje Y,  $\alpha_y \equiv \alpha_2$ . De este modo, tenemos caracterizado completamente nuestro problema de simulación. La figura 5-13 muestra una pantalla generada mediante esta técnica.

Una vez obtenida la simulación del ángulo de llegada, el procedimiento para obtener las pérdidas de potencia asociadas es sencillo. Podemos resumirlo en tres pasos:

1.- Definimos la posición de la apertura colectora sobre la malla de ángulos de llegada. Esta posición nos determina los valores  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  que está viendo la apertura. Si estamos considerando un sistema múltiple, de cada pantalla elegimos los ángulos de llegada correspondientes a las posiciones de las aperturas del agrupamiento.



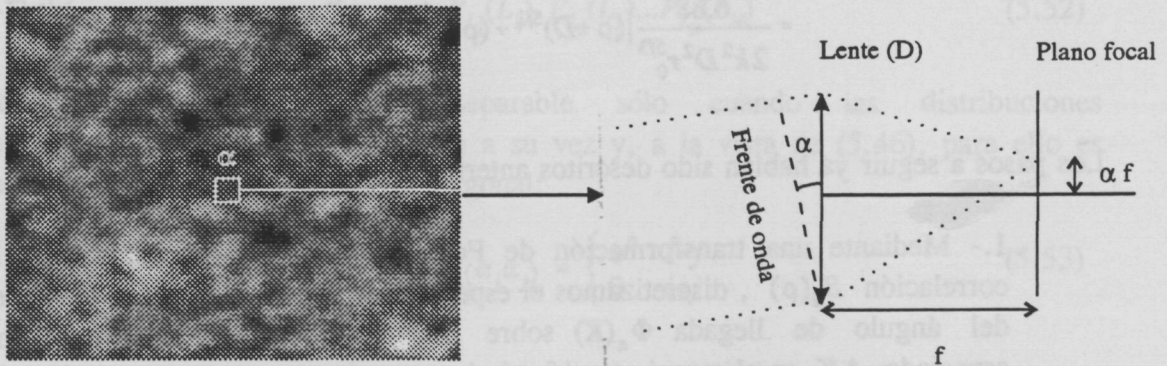


Fig. 5-13. Realización de una pantalla de ángulo de llegada.

2.- Suponiendo un detector con radio  $R_D$  y en la hipótesis de que la mancha focal tiene un perfil gaussiano con ancho  $2r_s$  a  $1/e^2$  calculamos las pérdidas inducidas por el ángulo de llegada simulado a través de la integral de Marcum  $Q$  (5.36) (el proceso puede agilizarse si se tabula esta integral).

3.- La iteración del proceso de simulación de ángulos y conversión en pérdidas de potencia, nos permite 'medir' la función de probabilidad acumulada para  $L$ . El método converge rápidamente y es razonablemente eficiente desde un punto de vista computacional.

La distribución de probabilidad generada por esta técnica en el caso de una única apertura de 10 cm de diámetro y condiciones de turbulencia correspondientes a  $r_0 = 2 \text{ cm}$  se muestra en la figura 5-14. Para validar la bondad de las simulaciones, la curva se compara con la calculada usando el método analítico descrito anteriormente. La concordancia de los resultados valida el método de simulación.

Si colocamos más de una apertura sobre la pantalla de ángulos de llegada simulados, podremos calcular la estadística de las pérdidas para un sistema multiapertura cuando los ángulos percibidos por las diferentes subaperturas están correladas conforme a (5.54). La figura 5-15 presenta el resultado de aplicar esta técnica a un sistema de 4 aperturas de 10 cm de diámetro, un campo de visión de  $10^{-4}$  rad y unas condiciones de turbulencia correspondientes a un diámetro de coherencia  $r_0$  de 2 cm, cuando las aperturas están situadas en los vértices de un cuadrado de lado 30 cm. El resultado se compara con la distribución de probabilidad para las pérdidas totales bajo la asunción de que la separación entre aperturas es lo suficientemente grande como para tener ángulos de llegada independientes. Es el único sistema multiapertura que puede ser

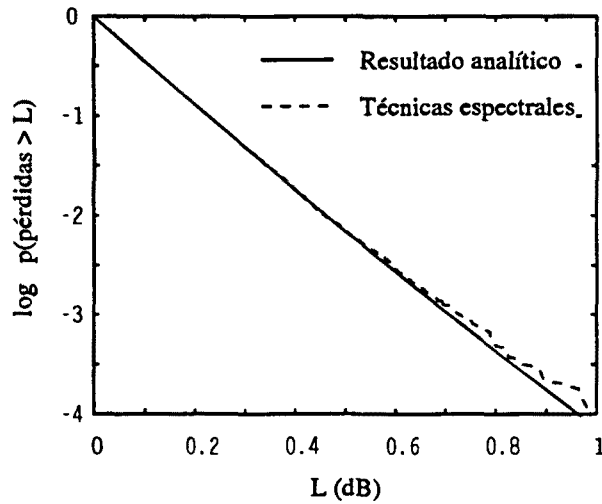


Fig. 5-14. Probabilidad de que las pérdidas debidas a fluctuaciones del ángulo de llegada excedan el valor en abscisas para una única apertura receptora. Los resultados simulados usando técnicas espectrales se comparan con aquellos obtenidos mediante expresiones analíticas.

estudiado a través de métodos analíticos. Puede observarse que, tal como era de esperar, la existencia de una correlación entre los ángulos de llegada vistos por las aperturas produce un aumento de las probabilidades de que unas pérdidas dadas sean sobrepasadas.

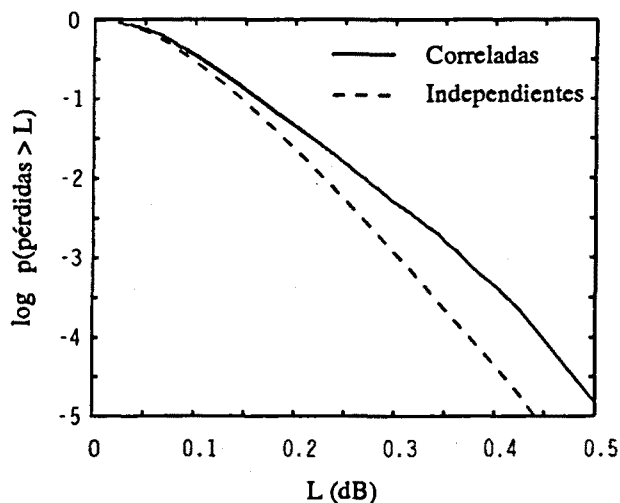


Fig. 5-15. Probabilidad de que las pérdidas debidas a fluctuaciones del ángulo de llegada excedan el valor en abscisas para un agrupamiento de cuatro aperturas. Los resultados simulados utilizando técnicas espectrales se comparan con aquellos para cuatro aperturas independientes calculados mediante expresiones analíticas.

### 5.3.4 Pérdidas de potencia asociadas a la degradación del frente de onda por la turbulencia atmosférica: simulación como una superficie fractal.

En la base de todos los resultados presentados hasta el momento está un sencillo modelo que describe la función de ensanchamiento de punto como una distribución de intensidad gaussiana con un movimiento de su centroide reflejo de las fluctuaciones del ángulo de llegada sobre la lente colectora. De todos modos, aunque el ángulo de llegada visto por la apertura es importante al describir las pérdidas de potencia por desbordamiento del elemento colector, los efectos introducidos por la atmósfera sobre el frente de onda no consisten simplemente en ello.

La deformación del frente de onda impedía definir la función de ensanchamiento de punto mediante un perfil de Airy por lo que la aproximábamos a través de una distribución de potencia gaussiana. Sin embargo, esta suposición se basa únicamente en consideraciones simplificadoras sobre el problema y carece de confirmación experimental. Por ello, cuestionemos el modelo utilizado hasta ahora y abordemos el problema desde una posición más general: tratemos no sólo de simular uno de los parámetros del frente de ondas, su ángulo de llegada, sino todo él. Al simular el frente de onda distorsionado seremos capaces de establecer el grado de validez del modelo anterior y las condiciones bajo las cuales es aplicable.

En tanto que la función de estructura de fase  $D_s(\rho)$  representa toda la estadística de las fluctuaciones de fase (capítulo 4),

$$D_s(\rho) = 6.88 \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{5/3} \quad (5.55)$$

de ella debería ser posible obtener información sobre la deformación del frente de onda y, con ella, conocer los efectos inducidos en el funcionamiento del sistema óptico. Veamos, tras identificar a los frentes de onda deformados con superficies fractales, una técnica de simulación que utiliza estas consideraciones.

#### a) Naturaleza fractal de los frentes de onda.

La función de estructura se relaciona con el espectro de Wiener de las fluctuaciones de fase  $\Phi_s(K)$  a través de la ecuación (3.30)

$$D_s(K) = 2 \int_0^\infty \Phi_s(K) [1 - e^{-jK\rho}] dK \quad (5.56)$$

Usando la expresión (5.55) para la función de estructura de fase, podemos encontrar que el espectro  $\Phi_s$  depende de  $K$  únicamente a través de una potencia (Noll, 1976):

$$\Phi_s(K) = 0.023 r_0^{-5/3} K^{-11/3} \quad (5.57)$$

Conocido el espectro de potencia de las fluctuaciones de fase, podríamos estar tentados a simular el frente de la onda propagada a través de la turbulencia atmosférica mediante las técnicas espectrales de análisis descritas anteriormente (problemas de propagación y ángulos de llegada): la salida de un generador de números pseudoaleatorios puede asimilarse, a todos los efectos prácticos, a un ruido blanco con una densidad espectral constante; al filtrar este ruido con la función de transferencia adecuada  $\Phi_s^{1/2}(K)$ , se produce una salida cuya densidad espectral es proporcional a  $|\Phi_s(K)|$ . Sin embargo, la modelización del espectro de potencia con una simple función  $K^{-11/3}$  presenta el problema fundamental de una singularidad cuando  $K \rightarrow 0$ : debido a que el espectro es muy estrecho en el origen, vamos a encontrar dificultades para obtener una función de transferencia numérica  $\Phi_s^{1/2}(K)$  que filtre adecuadamente las bajas frecuencias del ruido blanco base de las simulaciones.

Ahora bien, veamos cómo la misma ley potencial  $K^{-11/3}$  para  $\Phi_s$ , que nos impide utilizar los métodos espectrales de simulación, nos permite identificar a los frentes de onda degradados por la turbulencia atmosférica como superficies con una geometría fractal de Mandelbrot (1987). El modelo matemático más comúnmente usado para describir fractales aleatorios es una extensión del clásico movimiento browniano (Voss, 1989): lo definimos como un proceso estocástico  $V$ , función de una variable  $\rho$ , caracterizado por una función de estructura  $D_V$  proporcional al incremento de la variable

$$\langle [V(\rho'+\rho) - V(\rho')]^2 \rangle \propto \rho^{2H} \quad (5.58)$$

Aquí,  $H$  relaciona el cambio en  $V$ ,  $V(\rho'+\rho) - V(\rho')$ , con la diferencia  $\rho$  mediante una simple ley de escalado, y está comprendido entre 0 y 1. Para  $H=0.5$ , el proceso se convierte en el clásico movimiento browniano  $\langle [V(\rho'+\rho) - V(\rho')]^2 \rangle \propto \rho$ . La función de estructura nos permite encontrar para el espectro de potencia del proceso  $V$  la siguiente relación (Peitgen y Saupe, 1987):

$$\Phi_V(K) \propto K^{-(2H+E)} \quad (5.59)$$

donde  $E$  es la dimensión topológica de la superficie generalizada: para el movimiento browniano (curva),  $E=1$ ; para una superficie, como nuestro frente de onda,  $E=2$ ; etc.

Como se sabe, una de las propiedades fundamentales de un proceso browniano es que posee invarianza bajo cambios de escala. Se habla entonces de similitud en su estadística y se identifica a ésta como la propiedad fundamental de la curva fractal definida por el proceso. De igual forma, como consecuencia de la definición (5.58) las superficies generalizadas son fractales en una forma autoafín, es decir, la estadística es

similar para todas las escalas de longitud, pero la variable dependiente  $V$  está escalada de forma diferente para cada coordenada espacial. Esta similitud estadística, cualidad esencial de los fractales, puede cuantificarse mediante una dimensión fractal  $F$ , coincidente con el concepto propio de la geometría euclídea  $E$  pero sin la necesidad de ser un entero. La diferencia entre los dos,  $F-E$ , describe la 'rugosidad' de la superficie fractal y es fácilmente calculable función del parámetro  $H$  (Vos, 1989)

$$F-E = 1-H \quad (5.60)$$

Recordando las relaciones que habíamos establecido para los frentes de onda degradados por la atmósfera,

$$D_S(\rho) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \quad (5.61)$$

$$\Phi_S(K) = 0.023 r_0^{-5/3} K^{-11/3}$$

vemos que estamos ante un movimiento browniano generalizado, con un parámetro de escalado  $H=5/6$  y una dimensión fractal  $F=13/6$ , definido para la fase  $S$ . Obsérvese que al identificar los frentes de onda con superficies fractales, lo único que hacemos es resaltar el hecho de que el perfil de la función de estructura es independiente de factores de escala  $\alpha$ :

$$D_S(\alpha\rho) = \alpha^{5/3} D_S(\rho) \quad (5.62)$$

y, consecuentemente, la invarianza de la fase por ella definida. Así, cuando el factor de escala es eliminado, la apariencia de una pequeña porción de nuestro frente de onda parece similar (no idéntico) al frente completo (figura 5-16).

Hay que remarcar la diferencia entre este comportamiento y aquél que caracteriza un proceso estocástico convencional. En este último la apariencia del frente de fase no puede ser independiente de la escala: al observar una porción de la onda menor que la longitud de correlación deberíamos notar un suavizado del proceso; por el contrario, si la zona considerada fuese mucho mayor que la longitud de correlación perderíamos todos los detalles y no aparecería una estructura en el frente.

#### b) Simulación de los frentes de onda.

La existencia de una singularidad en el espectro de potencia  $\Phi_S(K)$  para  $K=0$  impide utilizar las técnicas espectrales de simulación sobre los frentes de onda. Sin embargo, la función de estructura  $D_S(\rho) = 6.88 (r/r_0)^{5/3}$  siempre está definida correctamente y, en principio, ésta podría utilizarse para modelar nuestra fase. Esta idea

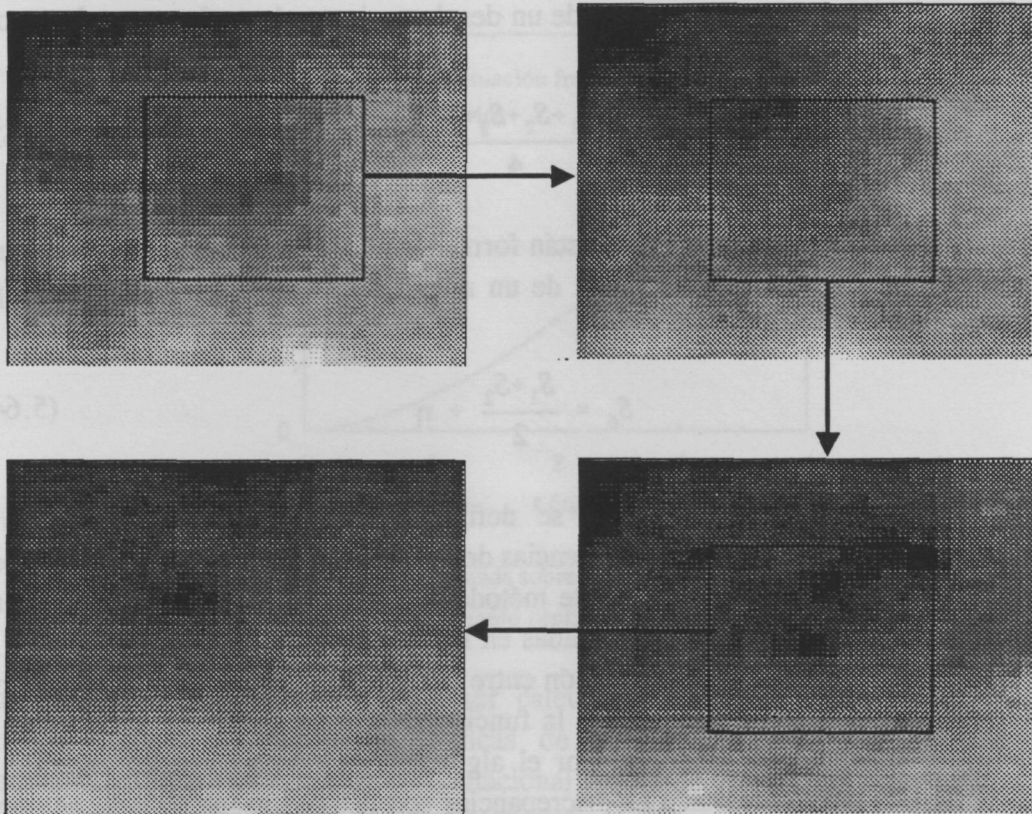


Fig. 5-16. Secuencia de elevación de un frente de onda estadísticamente autoafín. Cuando la superficie es amplificada, una pequeña porción parece similar a porciones mucho mayores.

ha sido aplicada en el desarrollo de algoritmos capaces de generar superficies fractales, tales como nuestro frente de onda (Fournier et al, 1982). Aunque nacidas como técnicas de modelado gráfico mediante ordenador de objetos irregulares, estos algoritmos nos permiten simular nuestras fases de una forma realista y eficaz desde un punto de vista computacional.

Uno de los más sugerentes para la definición de fractales sobre una malla de puntos es el llamado algoritmo del desplazamiento aleatorio del punto central (Peitgen y Sauce, 1988; Lane et al, 1992). Partiendo de una primera aproximación burda a la superficie fractal y la posterior construcción refinada de subsecuentes regiones más y más pequeñas, esta técnica recursiva permite obtener mallas de puntos con la estadística deseada.

En primer lugar se determinan los valores de la fase en las cuatro esquinas de la malla de cálculo mediante números aleatorios de varianza tal que estas cuatro fases  $S_i$  ( $i=1,\dots,4$ ) se interrelacionen a través de la función de estructura característica del proceso. A continuación, la fase en un nuevo punto  $S_g$  se halla como promediado de los cuatro puntos anteriores y la suma de un desplazamiento aleatorio  $\epsilon$ , tal como se

proceso. A continuación, la fase en un nuevo punto  $S_5$  se halla como promediado de los cuatro puntos anteriores y la suma de un desplazamiento aleatorio  $\epsilon$ , tal como se muestra en la figura 5-17,

$$S_5 = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} + \epsilon \quad (5.63)$$

Los puntos calculados posteriormente están formados por la interpolación de los puntos de las esquinas dos a dos y la adición de un nuevo desplazamiento aleatorio  $\eta$ ; por ejemplo,

$$S_6 = \frac{S_1 + S_2}{2} + \eta \quad (5.64)$$

Los desplazamientos aleatorios  $\epsilon$ ,  $\eta$  se definen a partir de variables aleatorias gaussianas con varianza tal que las diferencias de fase verifiquen la ecuación (5.61) para la estructura de fase  $D_y$ . Al repetir este método de interpolación más desplazamiento obtenemos el número de muestras deseadas en la malla.

La figura 5-18 es una comparación entre la función de estructura de fase teórica (5.61) para nuestros frentes de onda y la función de estructura promediada sobre un conjunto de realizaciones generadas por el algoritmo de desplazamiento central. La aproximación es muy correcta. Las discrepancias son debidas a que cuando entramos a detallar porciones más pequeñas de la pantalla sólo la mitad de los puntos son determinados con más precisión; los puntos iniciales a cada secuencia no se ven modificados. De hecho, esto es incorrecto pues cuando la resolución de la pantalla

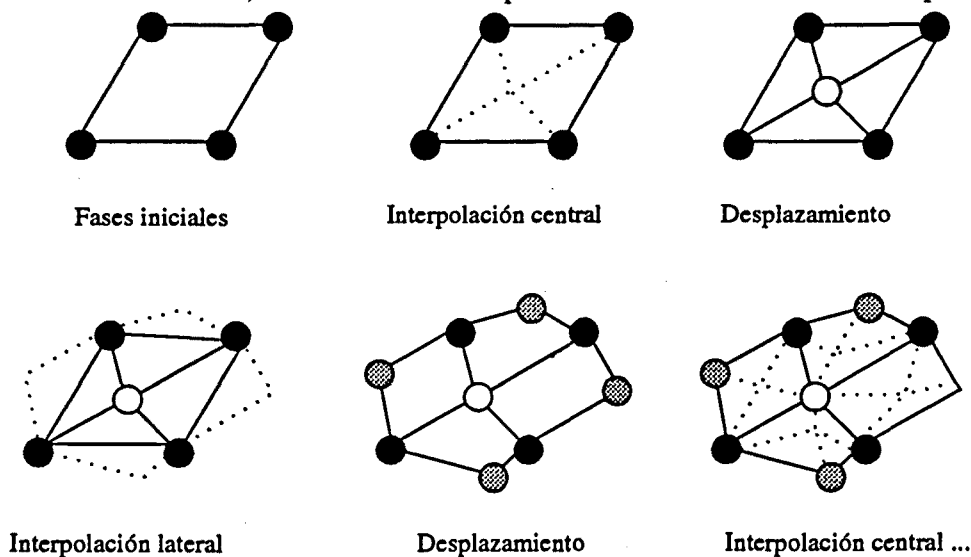


Fig. 5-17. Algoritmo del desplazamiento del punto central: secuencia de construcción de la pantalla de fase mediante un proceso de interpolación y desplazamiento.

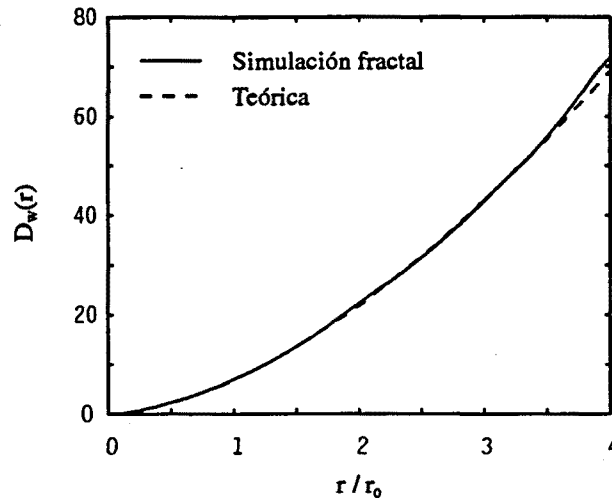


Fig. 5-18. Función de estructura de fase promediada sobre un conjunto de realizaciones del frente de onda generadas por el algoritmo de desplazamiento central. Se compara con la ley 5/3 esperada.

aumenta, todos los puntos deberían ser calculados con una mayor precisión. Sin embargo, aunque existan otras técnicas de simulación fractal que evitan este inconveniente, el encarecimiento computacional requerido y la insignificante mejora en la calidad de nuestros cálculos hacen innecesario abandonar la sencillez del algoritmo de desplazamiento central.

### c) Simulación de la función de ensanchamiento de punto.

Cuando una porción del frente de onda propagado a través de la atmósfera es focalizado por un sistema óptico, las degradaciones generadas por la turbulencia provocan deformaciones de la función de ensanchamiento de punto. Una vez tenemos simulado el frente de onda, la respuesta del sistema óptico receptor puede ser calculada fácilmente.

Dada la distribución de fases  $S(x,y)$  que caracteriza nuestro frente de onda, la amplitud compleja sobre una apertura de diámetro  $D$  puede escribirse como

$$E(x,y) = W(x,y) e^{-j S(x,y)} \quad (5.65)$$

donde

$$W(x,y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2+y^2} \leq D/2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (5.66)$$

es lo que habíamos llamado función de apertura. Sabemos que la amplitud compleja del



campo en un punto  $(x,y)$  del plano focal de una lente de focal  $f$  es proporcional a la transformada de Fourier de la amplitud compleja sobre la apertura de la lente y evaluada para las frecuencias espaciales si exceptuamos un factor de fase cuadrático que se pierde al calcular la distribución de intensidades que caracteriza la función de ensanchamiento de punto  $I(x,y)$ . Así,

$$I(x,y) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| P\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \right|^2 \quad (5.67)$$

con

$$P(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x', y') e^{-j s(x', y')} e^{-j 2\pi (v_x x' + v_y y')} dx' dy' \quad (5.68)$$

En la figura 5-19 se muestran las distintas funciones de ensanchamiento de punto instantáneas típicas para diferentes frentes de onda generados mediante el algoritmo de desplazamiento central. En ellas se pueden observar las deformaciones previstas: distribución de intensidad diferente a la de Airy y desplazamiento de su centroide.

#### d) Pérdidas de potencia asociadas al desbordamiento del elemento colector.

Sabemos simular los frentes de onda distorsionados por la atmósfera y la respuesta que ocasionan en un sistema óptico. A tenor de ello, veamos cuál es el procedimiento a seguir para obtener la estadística de las pérdidas de potencia inducidas por la degradación de la función de ensanchamiento de punto. Podemos resumirlo en unos pocos puntos:

1.- Definido el frente de onda mediante una malla de puntos, situamos sobre ella las  $N$  aperturas colectoras de nuestro sistema mediante sus vectores de posición  $(x_j, y_j)$ ,  $j=1, \dots, N$ . Mediante las funciones de apertura podemos establecer la amplitud compleja que ve cada una de ellas.

2.- Calculamos la función de ensanchamiento de punto para la apertura  $j$ -ésima del sistema .

$$I_j(x,y) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| P_j\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \right|^2 \quad (5.69)$$

3.- Extraemos la información de las pérdidas de potencia por desbordamiento a través de la integral de la función de ensanchamiento de punto  $I_j(x,y)$  sobre el área  $\pi R_D^2$  del elemento colector en el plano focal:

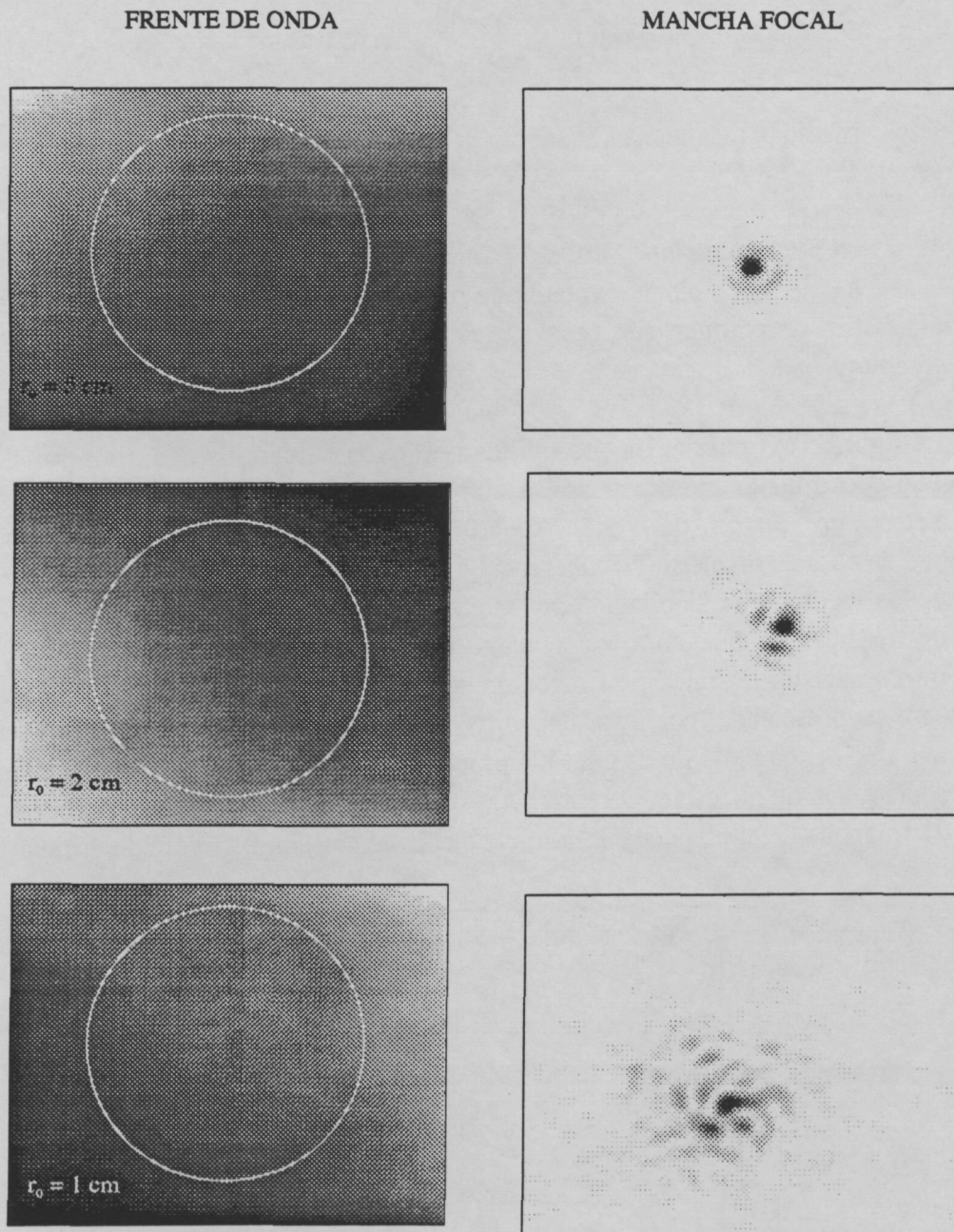


Fig. 5-19. Realizaciones de frentes de onda generados por el algoritmo de desplazamiento central y funciones de ensanchamiento de punto asociadas.

$$L_j = -10 \log \left( 1 - \iint_{x^2+y^2 \leq R_D^2} I_j(x,y) dx dy \right) \quad (5.70)$$

Las pérdidas inducidas sobre el sistema multiapertura completo serán  $L = \sum_j L_j$ .

4.- La repetición de este proceso (simulación de frentes de onda, función de ensanchamiento de punto y cálculo de pérdidas inducidas) permite establecer la estadística de pérdidas por desbordamiento de las áreas colectoras del sistema receptor.

La figura 5-20 muestra la probabilidad de que una pérdida dada sea excedida cuando el procedimiento anterior se aplica sobre una única apertura receptora de 10 cm de diámetro, un campo de visión de  $10^{-4}$  rad y condiciones de turbulencia correspondientes a un diámetro de coherencia de 2 cm. Al comparar los resultados con los obtenidos mediante la simulación por técnicas espectrales de las fluctuaciones del ángulo de llegada que mueven a una función de ensanchamiento de punto gaussiana, observamos serias discrepancias. La razón de las diferencias estriba en el hecho de que la simulación presentada conlleva de forma implícita una atmósfera con fuerte turbulencia ( $r_0$  pequeño). En este caso la asunción de una función de ensanchamiento de punto gaussiana no puede ser correcta: la distorsión del frente de onda es ahora muy grande y la mancha focal no puede describirse mediante una simple figura de difracción

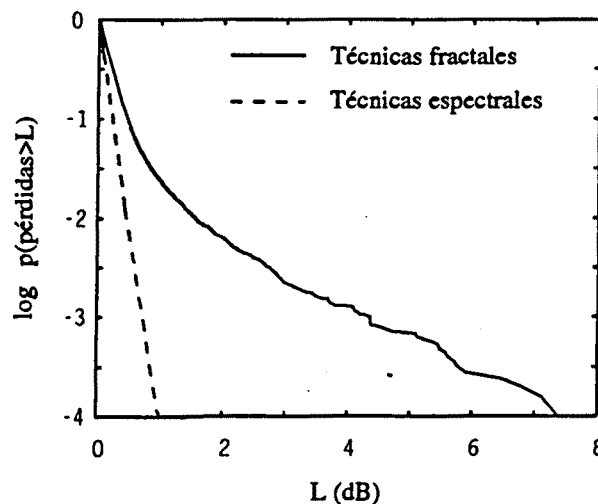


Fig. 5-20. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abscisas para una única apertura receptora. El resultado de las técnicas fractales se compara con el de las técnicas espectrales. Condiciones de fuerte turbulencia ( $r_0 = 2 \text{ cm}$ ).

con un diámetro fijado. En realidad, la función de ensanchamiento está constituida por un número de manchas superpuestas que imposibilitan identificarla con una mancha de Airy o su aproximación por una distribución gaussiana. En la figura 5-21 volvemos a comparar los resultados obtenidos mediante ambas técnicas de simulación, pero utilizamos un diámetro de coherencia mayor ( $r_0 = 5 \text{ cm}$ ) correspondiente a condiciones de turbulencia más débil: las discrepancias son aparentemente menores. En la figura 5-22 también comparamos las probabilidades de pérdidas excedidas para un sistema de cuatro aperturas situadas en los vértices de un cuadrado de lado 30 cm cuando el diámetro de coherencia es 2 cm, tal como se consideró en la figura 5-15: como antes, las diferencias son lo suficientemente notables como para cuestionar el modelo gaussiano de la función de ensanchamiento de punto.

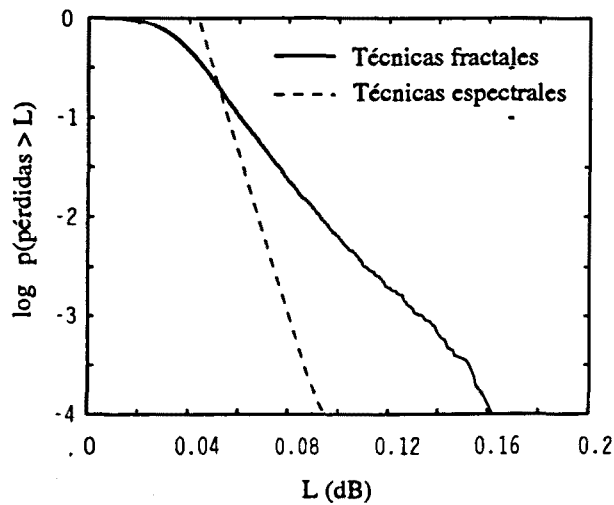


Fig. 5-21. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abscisas para una única apertura receptora. El resultado de las técnicas fractales se compara con el de las técnicas espectrales. Condiciones de débil turbulencia ( $r_0 = 5 \text{ cm}$ ) .

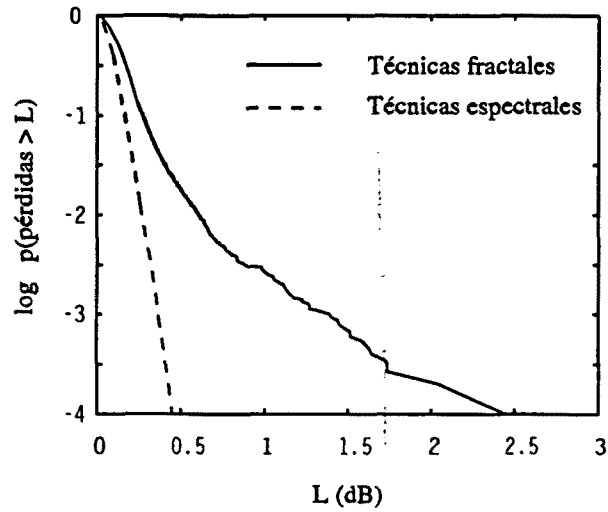


Fig. 5-22. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abscisas para un sistema de cuatro aperturas situadas en los vértices de un cuadrado de 30 cm de lado. El resultado de las técnicas fractales se compara con el de las técnicas espectrales ( $r_0 = 2 \text{ cm}$ ).

## 5.4 Funcionamiento de un sistema de multiapertura.

Hemos estudiado las fluctuaciones de intensidad y de ángulo de llegada, principales efectos de la propagación atmosférica, en función de la distribución espacial del sistema receptor multiapertura. En lo que sigue, aunaremos los resultados obtenidos bajo una única estadística para las pérdidas totales de potencia, combinación de ambos efectos, y estableceremos las razones por las que el sistema multiapertura puede hacerse preferible a una única apertura receptora.

### 5.4.1 Función de densidad de probabilidad para las pérdidas totales ocasionadas conjuntamente por el centelleo de la potencia recibida y las fluctuaciones del ángulo de llegada.

En los resultados presentados hasta el momento, hemos considerado la distorsión del frente de onda con la asunción implícita de que la intensidad es uniforme y, de igual forma, hemos estudiado las fluctuaciones de potencia sin considerar para nada el deterioro del frente de fase. Sin embargo, en general no tenemos razones para suponer válidas estas consideraciones, es decir, el que las fluctuaciones de ángulo de llegada y de potencia, o equivalentemente, de log-amplitud  $\chi_p$ , son procesos aleatorios independientes, pues ambas fluctuaciones son causadas por las mismas fluctuaciones del índice de refracción. Aun así, mostremos que la hipótesis es correcta (Goodman, 1985): hemos visto que las estadísticas de log-amplitud para la potencia y de ángulo de llegada son variables aleatorias gaussianas, de tal forma que  $[\chi_p(\rho_1) + \chi_p(\rho_2)]$  y  $[\alpha(\rho_1) - \alpha(\rho_2)]$  también lo son. Consideremos el promediado

$$\begin{aligned} & \langle [\chi_p(\rho_1) + \chi_p(\rho_2)] [\alpha(\rho_1) - \alpha(\rho_2)] \rangle = \\ & = \langle \chi_p(\rho_1) \alpha(\rho_1) \rangle - \langle \chi_p(\rho_1) \alpha(\rho_2) \rangle + \langle \chi_p(\rho_2) \alpha(\rho_1) \rangle - \langle \chi_p(\rho_2) \alpha(\rho_2) \rangle \end{aligned} \quad (5.71)$$

Si las fluctuaciones del índice de refracción  $n$  obedecen una estadística homogénea,  $\chi_p$  y  $\alpha$  serán conjuntamente homogéneas, con lo cual

$$\langle \chi_p(\rho_1) \alpha(\rho_1) \rangle = \langle \chi_p(\rho_2) \alpha(\rho_2) \rangle \quad (5.72)$$

Además, si  $n$  obedece una estadística isotrópica,  $\chi_p$  y  $\alpha$  serán también conjuntamente isotrópicas y en tal caso

$$\langle \chi_p(\rho_1) \alpha(\rho_2) \rangle = \langle \chi_p(\rho_2) \alpha(\rho_1) \rangle \quad (5.73)$$

De este modo, (5.71) queda

$$\langle [\chi_p(\rho_1) + \chi_p(\rho_2)] [\alpha(\rho_1) - \alpha(\rho_2)] \rangle = 0 \quad (5.74)$$

lo que nos muestra que las variables  $[\chi_p(\rho_1) + \chi_p(\rho_2)]$  y  $[\alpha(\rho_1) - \alpha(\rho_2)]$  están incorreladas. Consecuentemente, al tratarse de procesos gaussianas, son variables independientes y, con ellas, tal como queríamos ver, las de interés  $\chi_p$  y  $\alpha$ .

Así, si podemos suponer la independencia de los desvanecimientos de señal asociados a las fluctuaciones de potencia  $L_p$  de los debidos a las fluctuaciones del ángulo de llegada  $L_\alpha$ , es posible calcular la estadística de las pérdidas totales (en decibelios)  $L = L_p + L_\alpha$  a través de una sencilla convolución: siendo  $p_{L_p}(L_p)$  y  $p_{L_\alpha}(L_\alpha)$  las funciones de densidad de probabilidad de pérdidas ocasionadas por fluctuaciones de potencia y ángulo de llegada, respectivamente, la densidad de probabilidad para las pérdidas totales,  $p_L(L)$  se expresa como:

$$p_L(L) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{L_p}(L_p) P_{L_\alpha}(L-L_p) dL_p = P_{L_p} * P_{L_\alpha} \quad (5.75)$$

Aquí,  $P_{L_p}$  se calcula mediante la ecuación (5.29), y  $P_{L_\alpha}$  se obtiene por el procedimiento de simulación fractal discutido en la sección anterior.

#### 5.4.2 Funcionamiento comparado de un sistema receptor múltiple frente a una única apertura receptora.

Las probabilidades de pérdidas presentadas a continuación pretenden comparar el funcionamiento práctico de sistemas receptores multiapertura con las características propias de detección de una única apertura. Para ello, se consideran trayectos bajo condiciones de propagación tanto de débil como de fuerte turbulencia, y diferentes configuraciones espaciales en recepción. En todos nuestros cálculos hemos supuesto que sobre nuestras aperturas incide una onda plana. La tabla 5.1 y la figura 5-23 muestran los parámetros estadísticos que van a caracterizar los trayectos de propagación considerados, en débil y fuerte turbulencia: funciones de correlación y varianza de las fluctuaciones de intensidad, longitud de coherencia y varianza de las fluctuaciones del ángulo de llegada.

Tabla 5-I. Parámetros de la propagación.

Condiciones de propagación	$\sigma_I^2$	$r_0$ (cm)
Débil turbulencia	0.1	5
Fuerte turbulencia	100	2

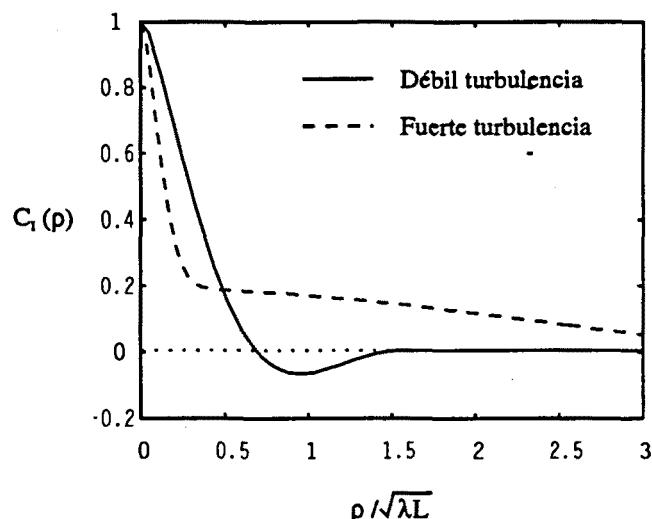


Fig. 5-23. Funciones de correlación de las fluctuaciones de intensidad bajo condiciones de débil y fuerte turbulencia. La separación  $\rho$  está normalizada a la longitud de Fresnel  $\sqrt{\lambda L}$ .

Las figuras 5-24 y 5-25 presentan, para débil turbulencia, la comparación entre un agrupamiento de 4 aperturas de diámetro  $\sqrt{\lambda L}/2$ , situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{\lambda L}$ , y una única apertura receptora, por un lado con cuatro veces el área total del agrupamiento (figura 5-24) y por otro con área igual a esta cantidad (figura 5-25). En todos los casos, el campo de visión es de  $10^{-4}$ . Para propagaciones bajo débil turbulencia, donde no aparecen escalas grandes de correlación de intensidad, la apertura mayor presenta mejor comportamiento que el agrupamiento, tal como era de esperar por su mayor área colectora. Sin embargo, cuando el área de la apertura es idéntica a la total del sistema múltiple, las probabilidades de que ciertas pérdidas sean excedidas son mayores que para el agrupamiento. La razón hay que buscarla en el hecho de que el agrupamiento permite mejorar las probabilidades de pérdidas asociadas tanto a las fluctuaciones del ángulo de llegada como de intensidad.

Si consideramos condiciones de alta turbulencia, es evidente, en cualquier caso, que el agrupamiento también constituye un sistema más eficiente (figuras 5-26 y 5-27, con iguales configuraciones espaciales que las figuras 5-24 y 5-25, respectivamente): Obsérvese que con sólo una cuarta parte del área, el agrupamiento tiene una estadística de pérdidas comparable

Así pues, si sólo tenemos en cuenta efectos de promediado y dejamos de lado otras consideraciones sobre la complejidad del sistema o de puntería de todos los elementos, debemos concluir que el sistema multiapertura representa una opción preferible a la única apertura receptora.



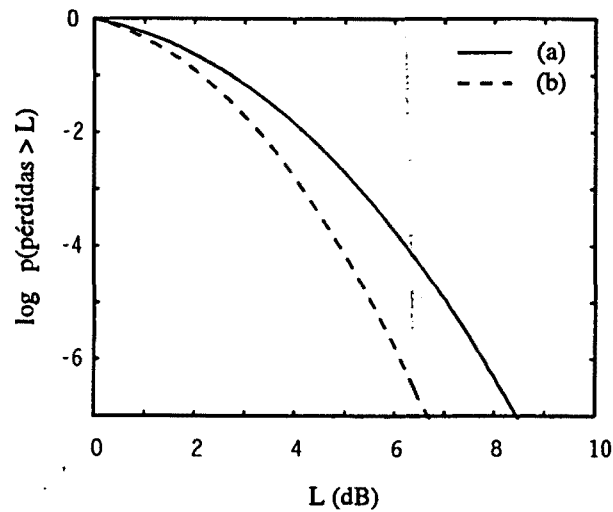


Fig. 5-24. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abscisas. Débil turbulencia. a) Agrupamiento de cuatro aperturas de diámetro  $\sqrt{\lambda L}/2$  situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{\lambda L}$  ; b) apertura con cuatro veces el área del agrupamiento.

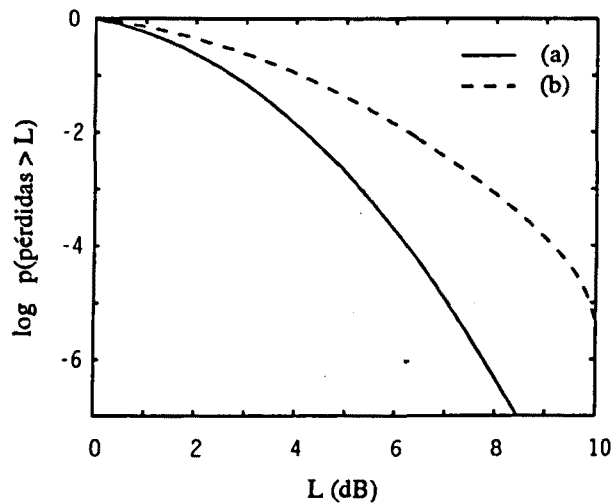


Fig. 5-25. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abscisas. Débil turbulencia. a) Agrupamiento de cuatro aperturas de diámetro  $\sqrt{\lambda L}/2$  situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{\lambda L}$  ; b) apertura con un área equivalente a la del agrupamiento.

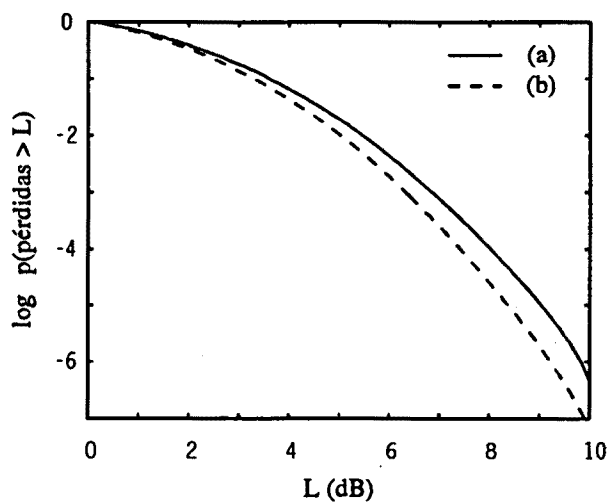


Fig. 5-26. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abcisas. Fuerte turbulencia. a) Agrupamiento de cuatro aperturas de diámetro  $\sqrt{\lambda L}/2$  situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{\lambda L}$  ; b) apertura con cuatro veces el área del agrupamiento.

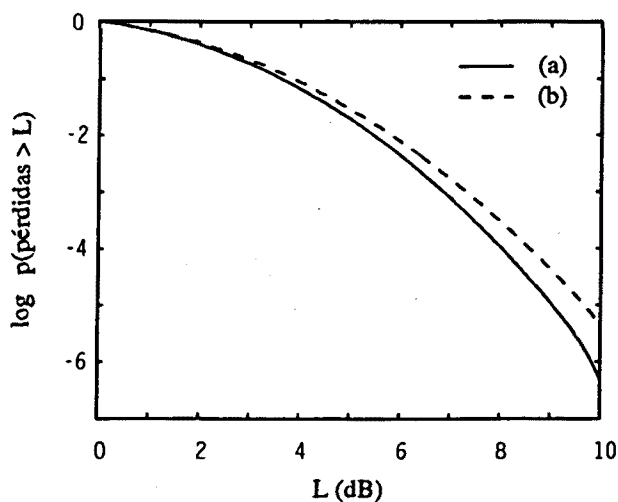


Fig. 5-27. Probabilidad de que las pérdidas excedan el valor en abcisas. Fuerte turbulencia. a) Agrupamiento de cuatro aperturas de diámetro  $\sqrt{\lambda L}/2$  situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{\lambda L}$  ; b) apertura con un área equivalente a la del agrupamiento.



## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES

La teoría de la propagación de ondas a través de un medio como la atmósfera, con fluctuaciones aleatorias del índice de refracción, fue desarrollada a partir de la década de los sesenta por un gran número de investigadores pertenecientes a diversas disciplinas. Se ha realizado una revisión crítica de las diferentes soluciones al problema y una homogeneización de la notación que nos ha permitido establecer las ventajas y las condiciones de aplicación de cada una de ellas.

La simulación numérica de la propagación ha sido presentada como una herramienta básica tanto para la validación de resultados analíticos, como para obtener resultados novedosos. Pese a que el algoritmo de simulación es bien conocido, se han tenido que superar los problemas de orden práctico que plantea su fijación en un código y que hacen difícil encontrar en la bibliografía referencias que muestren resultados obtenidos mediante estas técnicas.

El centelleo y las fluctuaciones del ángulo de llegada, fenómenos ocasionados por la propagación de la onda en la atmósfera turbulenta, se han estudiado mediante experimentos controlados. Guiados por la experiencia adquirida durante los experimentos Canarios, se realizaron medidas estadísticas sobre un haz láser perturbado por la turbulencia atmosférica que nos permitieron establecer el grado de bondad de las predicciones teóricas. Se ha recogido la información suficiente para asegurar que las fluctuaciones de intensidad están caracterizadas, en cualquier régimen de turbulencia, por una estadística log-normal perturbada. De igual modo, las medidas de las fluctuaciones del ángulo de llegada no dejan lugar a dudas sobre su comportamiento gaussiano.

En cualquier sistema de comunicaciones ópticas atmosféricas, el centelleo y las fluctuaciones del ángulo de llegada degradan la señal recibida y modifican de forma sustancial las prestaciones del receptor. Las pérdidas en que se traducen los desvanecimientos asociados al centelleo han sido analizadas para el caso general de un sistema receptor constituido por  $N$  aperturas idénticas. Para ello, se han desarrollado

expresiones analíticas que generalizaban los resultados ya clásicos para una única apertura receptora.

Las probabilidades de pérdidas producidas por la limitación de la capacidad de la óptica receptora de focalizar la señal sobre el área activa del detector que ocasionan las fluctuaciones del ángulo de llegada han sido calculadas de dos formas. En la primera de ellas se supone una mancha focal gaussiana y se simulan numéricamente los ángulos de llegada gaussianos mediante técnicas espectrales. El segundo método desarrollado tiene en cuenta toda la complejidad del frente de onda distorsionado y utiliza técnicas de simulación fractal mucho más realistas. La comparación de ambos métodos para un sistema receptor formado por una única apertura muestra que la hipótesis de una mancha focal instantánea gaussiana conduce a una infravaloración de que un cierto nivel de pérdidas sea excedido. Las técnicas desarrolladas han sido generalizadas para posibilitar el análisis de sistemas multiapertura.

La suposición de que las pérdidas asociadas al centelleo son independientes de las debidas a la distorsión de la mancha focal ha permitido calcular la distribución total de pérdidas en dB convolucionando las funciones de densidad de probabilidad asociadas a cada una de las pérdidas anteriores.

Los resultados experimentales obtenidos, consistentes con las predicciones teóricas estudiadas, han validado las técnicas de medida y procesado utilizadas. Éstas, junto a las técnicas de evaluación numérica y simulación desarrolladas, pueden ser aplicadas a la predicción del comportamiento de cualquier sistema óptico de comunicaciones atmosféricas.

## REFERENCIAS

Andrews L.C., and Phillips R.L., "I-K distribution as a universal propagation model of laser beams in atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.*, 2, 160-163 (1985).

Andrews L.C., and Phillips R.L., "Mathematical genesis of the I-K distribution for random optical fields," *J. Opt. Soc. Am.*, 3, 1912-1918 (1986).

Andrews L.C., Phillips R.L., and Shivamoggi B.K., "Relations of the parameters of the I-K distribution for irradiance fluctuations to physical parameters of the turbulence," *Appl. Optics*, 27, 2150-2157 (1988).

Barakat R., *J. Opt. Soc. Am.*, 66, 211- (1976).

Barletti R., Ceppatelli G., Monoder E., Paterno L., and Righini A., "Radiosonde site testing campaign at Tenerife (1973)," Joint Organisation for Solar Observations, JOSO SIT 21 (1974).

Barlow R.J., "Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences," John Wiley & Sons, Chichester (1989).

Ben-Yosef N., "is it possible to measure the scintillation probability density function?," *SPIE*, 926, 21-30 (1988).

Ben-Yosef N., and Goldner E., "Sample size influence on optical scintillation analysis. 1: Analytical treatment of the higher-order irradiance moments," *Appl. Optics*, 27, 2167-2171 (1988).

Ben-Yosef N., and Goldner E., "Sample size influence on optical scintillation analysis. 1: Simulation approach of the higher-order irradiance moments," *Appl. Optics*, 27, 2172-2177 (1988).

Bendat J.S., Piersol A.G., "Random Data - Analysis and Measurements Procedures," John Wiley & Sons, New York (1989).

Beran M.J., and Ho T.L., "Propagation of the fourth-order coherence function in a random medium (a non perturbative formulation)," *J. Opt. Soc. Am.*, 59, 1134-1138 (1969).

Brown W.P., "Validity of the Rytov approximation in optical propagation calculations," *J. Opt. Soc. Am.*, 56, 1045-1052 (1966).

Chernov L.A., "Wave Propagation in a Random Medium," McGraw-Hill, New York (1960).

Churnside J.H. and Clifford S.F., "Log-normal Rician probability density function of optical scintillations in the turbulent atmosphere," *J. Opt. Soc. Am.*, 4, 1923-1930 (1987).

Churnside J.H., Hill R.J., Conforti G., and Consortini A., "Aperture size and bandwidth requirements for measuring strong scintillation in the atmosphere," *Appl. Optics*, 28, 4126-4132 (1989).

Churnside J.H., "A spectrum of refractive turbulence in the turbulence atmosphere," *J. Mod. Opt.*, 37, 13-16 (1990).

Churnside J. H., "Aperture averaging of optical scintillations in the turbulent atmosphere," *Appl. Optics*, 30, 1982-1994 (1991).

Clifford S.F., Ochs G.R., and Lawrence R.S., "Saturation of optical scintillation by strong turbulence," *J. Opt. Soc. Am.*, 64, 148-154 (1974).

Clifford S.F., and Hill S.F., "Relation between irradiance and log-amplitude variance for optical scintillation described by the K distribution," *J. Opt. Soc. Am.*, 71, 112-114 (1981).

Codona J.L., Creamer D.B., Flatté S.M., Frhlich R.G., and Henyey F.S., "Solution for the fourth moment of waves propagating in random media," *Radio Science*, 21, 929-948 (1986).

Comerón A., Bará J., Belmonte A., Ruiz D. and Czichy R., "Inter-islands optical link tests," *IEEE Photonics Technology Letters*, 2, 380-381 (1990).

Comerón A., Belmonte A., Bará J. and Rubio J.A., "Technical Assistance for use of experimental data in optical ground station trade-off," Final Report to ESA purchase order No. 114918 (1993).

Consortini A., and Ronchi L., "Probability distribution of the sum of N complex random variables," *J. Opt. Soc. Am.*, 67, 181-185 (1977).

Consortini A., Pasqualetti F., and Ronchi L., "Statistical properties of the sum of partially correlated complex variables," *Optica Acta*, 24, 931-937 (1977).

Consortini A., and Conforti G., "Detector saturation effect on higher-order moments of intensity fluctuations in atmospheric laser propagation measurement," *J. Opt. Soc. Am. A*, 1, 1075-1077 (1984).

Consortini A., Briccolani E., and Conforti G., "Strong-scintillation-statistics deterioration due to detector saturation," *J. Opt. Soc. Am. A*, 3, 101-107 (1986).

Cramer H., "Mathematical Methods of Statistics," Princeton University Press (1946).

De Wolf D.A., "Strong irradiance fluctuations in turbulent air: plane waves," *J. Opt. Soc. Am.*, 63, 171-179 (1973).

Esposito R., "Power scintillations due to the wandering of the laser beam," *Proc. IEEE*, 8, 1533-1534 (1967).

Fante R.L., "Mutual coherence function and frequency spectrum of a laser beam propagating through atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.*, 64, 592-598 (1974).

Fante R.L., "Electromagnetic beam propagation in turbulent media," *Proc. IEEE*, 63, 1669-1692 (1975).

Fante R.L., "Electric field spectrum and intensity covariance of a wave in a random medium," *Radio Science*, 10, 77-85 (1975).

Fante R.L., "Some new results on propagation of electromagnetic waves in strongly turbulent media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-23, 382-385 (1975).

Fante R.L., "Electromagnetic beam propagation in turbulent media: an update," *Proc. IEEE*, 68, 1424-1443 (1980).

Fante R.L., "Inner-scale size effects on the scintillation of light in the turbulent atmosphere," *J. Opt. Soc. Am.* 73, 277-281 (1983).

Fleck J.A., Morris J.R., and Feit M.D., "Time dependent propagation of high energy of laser beams through the atmosphere," *Appl. Phys.*, 10, 129-160 (1976).

Fleck J.A., Morris J.R., and Feit M.D., "Time dependent propagation of high energy of laser beams through the atmosphere: II," *Appl. Phys.*, 14, 99-115 (1977).



Fournier A., Fusell D., and Carpenter L., "Computer Rendering of stochastic models," *Communications ACM*, 25, 371-384 (1982).

Frehlich R.G., "Intensity covariance of a point source in random medium with a Kolmogorov spectrum and a inner scale of turbulence," *J. Opt. Soc. Am.*, A4, 360-366 (1987).

Fried D.L., "Statistics of a geometric representation of wavefront distortion," *J. Opt. Soc. Am.*, 55, 1427-1435 (1965).

Fried D.L., "Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures," *J. Opt. Soc. Am.*, 56, 1372-1379 (1966).

Fried D.L., "Scintillation of a ground-to-space laser illumination," *J. Opt. Soc. Am.*, 57, 980-983 (1967).

Fried D.L., "Optical Heterodyne detection of an atmospherically distorted wavefront," *Proc. IEEE*, 55, 57-67 (1967).

Fried D.L., "Aperture averaging of scintillation," *J. Opt. Soc. Am.*, 57, 169-175 (1967).

Fried D.L., "Statistics of laser beam fade induced by pointing jitter," *Appl. Optics*, 12, 422-423 (1973).

Furutsu K., "Statistical theory of wave propagation in a random medium and the irradiance distribution function," *J. Opt. Soc. Am.*, 62, 240-254 (1972).

Goodman J.W., "Statistical Optics," John Wiley & Sons, Inc., New York (1985).

Gracheva M.E., Gurvich A.S., Kashakanov S.S., and Pokasov V.V., "Similarity relations and their experimental verification for strong intensity fluctuations of laser radiation," in *Laser Beam Propagation in the Atmosphere* (edited by Strohbehn J.W.), Springer-Verlag, New York (1978).

Hill R.J., "Theory of saturation of optical scintillation by strong turbulence: plane-wave variance and covariance and spherical-wave covariance," *J. Opt. Soc. Am.*, 72, 212-222 (1982).

Hill R.J., "Review of optical scintillation methods of measuring the refractive-index spectrum, inner-scale and surfaces fluxes," *Waves Random Media*, 2, 179-201 (1992).

Hill R.J., and Clifford S.F., "Modified spectrum of atmospheric temperature fluctuations and its application to optical propagation," *J. Opt. Soc. Am.* 68, 892-899 (1978).

Hill R.J., Clifford S.F., Theory of saturation of optical scintillation by strong turbulence for arbitrary refractive-index spectra, "*J. Opt. Soc. Am.*, 71, 675-686 (1981).

Hufnagel R., and Stanley N.R., "Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media," *J. Opt. Soc. Am.*, 54, 52-61 (1964).

Hufnagel R.E., "Propagation through atmospheric turbulence," in *The Infrared Handbook*, Office of Naval Research Department of the Navy, Arlington, VA, 6 (1978).

Ishimaru A., "Wave Propagation and Scattering in Random Media," Academic Press (1978).

Kaimal J.C., Wyngaard J.C., haugen D.A., Cote O.R., and Izumi Y., "Turbulent structure in the convective boundary layer," *J. Atm. Sci.*, 33, 2152-2169 (1976).

Karp S., Gagliardi R.M., Moran S.E., and Stotts L.B., "Optical Channels," Plenum Press, New York (1988).

Lawrence R.S. and Strohbehn J.W., "A survey of clear-air propagation effects relevant to optical communications," *Proc. IEEE*, 58, 1523-1545 (1970).

Kolmogorov A., "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers," *Academy of Sciences of USSR, New York*, 30, 301- (1941)

Kolmogorov A., in "Turbulence, Classic Papers on Statistical Theory," Friedlander S.K. and Topper L., eds., Interscience, New York, 161- (1961).

Lane R.G., Glindemann A. and Dainty J.C., "Simulation of a Kolmogorov phase screen," *Waves in Random Media*, 2, 209-224 (1992).

Lumley J.L., Panofsky H.A., "The Structure of Atmospheric Turbulence," John Wiley & Sons, New York (1965).

Lutomirski R.F., and Yura H.T., "Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium," *Appl. Optics*, 10, 1652-1658 (1971).





M M M  
1 M M M  
M M M

T S