Universitat Ramon Llull

TESIS DOCTORAL

Título *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*

Realizada por *Lídia Serrano Martínez*

en el Centro *IQS School of Management*

y en el Departamento *Estadística Aplicada*

Dirigida por *Dra. Marianna Bosch Casabò*
Dr. Josep Gascón Pérez

C. Claravall, 1-3
08022 Barcelona
Tel. 936 022 200
Fax 936 022 249
E-mail: urlsc@sec.url.es
www.url.es

A mi padre.

Acabo de finalizar un episodio de una larga y apasionante aventura. Todavía me quedan muchas etapas por recorrer, pero sin duda el momento de la finalización de este trabajo es muy especial y de forma irremediable «toca» hacer balance de todo lo que ha sucedido en estos años.

Finalizar la licenciatura de Matemáticas significaba para mí poderme enfrentar al anhelado reto de la docencia en la enseñanza secundaria. En mi horizonte no aparecía ni la universidad ni la investigación, pero sucedió que, en el mismo momento en que di mi primera clase en un instituto, lo hiciera simultáneamente en la universidad. Y así fue ininterrumpidamente durante diez años. Esta compaginación tan nivelada entre las dos instituciones (nunca hubo una que primara sobre la otra) me situó en una posición privilegiada de observación, que sin duda me ha permitido llevar a cabo un trabajo como el que presento aquí.

Mi primera experiencia docente en la universidad fue en la Escola Universitària d'Estudis Empresarials de la Universitat Autònoma de Barcelona, como profesora de prácticas de la asignatura de Matemáticas aplicadas a la Empresa en la Diplomatura de Empresariales. A partir del segundo año, pasé a impartir también las clases de teoría, las del curso virtual y las de los curso «cero». En todos los años que colaboré en *l'escola* sentí no solo reconocido mi trabajo y dedicación, sino que me sentí muy acogida por parte de todos: profesores, alumnos y personal de administración y servicios. Especialmente quiero destacar el papel que desempeñó la profesora Gloria Estapé en mi formación como docente universitaria sin olvidar que fue ella la primera persona que me animó a iniciarme en la investigación. A todos ellos mi más sincero agradecimiento.

En mi segundo año como docente, empecé a colaborar en FUNDEMI IQS, otra institución universitaria, perteneciente a la facultad de Economía del Instituto Químico de Sarrià (actual IQS School of Management) de la Universidad Ramon Llull, también como profesora de matemáticas en la diplomatura de Empresariales, al lado de Marianna Bosch. En esta institución, FUNDEMI IQS y en su sede principal, la Facultat d'Economia IQS, colaboré durante ocho cursos académicos, como profesora de las asignaturas de matemáticas, estadística, informática y curso «cero». Simultáneamente,

seguía ejerciendo como profesora de matemáticas en diferentes institutos de secundaria de la provincia de Barcelona, tanto en la ESO como en el bachillerato. Primero como profesora substituta, luego interina hasta que finalmente aprobé las oposiciones y pasé a formar parte del cuerpo de funcionarios de profesores de secundaria.

Durante el curso 2003/04 empecé a asistir a los seminarios de didáctica que realizaban en FUNDEMI IQS el grupo de didáctica de las matemáticas liderado por mi compañera Marianna Bosch y por Josep Gascón, quien había sido mi profesor de Didáctica de las Matemáticas en la licenciatura. En esos encuentros conocí primero a sus dos jovencísimas doctorandas, ahora ya "docToras", Berta Barquero y Noemí Ruiz, y más tarde al resto de compañeros del grupo Bahujama. Gracias a todos ellos: Josep, Marianna, Berta, Noemí, Javi, Luisa, Tomás, Alicia, Esther, Cecilio, Pilar, Eva y Pilar, por su acogida en todos los sentidos. Un verdadero equipo. Las nuevas incorporaciones al grupo, repartidas por todo el mundo, están contribuyendo a enriquecernos mucho más. A todos ellos mi admiración y agradecimiento.

A pesar que mis primeros contactos con la teoría antropológica me asustaron un poco, conseguí vencer la resistencia inicial y no dudé en iniciar esta aventura de la mano de Marianna y Josep. Por ellos dos siento una inmensa admiración por su dedicación, fuerza y compromiso. No solamente en el plano de la investigación, cuyos resultados hablan por sí solos, sino que a nivel humano son sencillamente mejores. De no ser así, estoy segura que nunca hubiese iniciado este *viaje*.

Y si hablo de admiración absoluta, hablo de Yves, que es el *culpable* de todo esto.

Finalmente, quiero agradecer a IQS School of Management por todas las facilidades ofrecidas para el desarrollo de esta investigación. En particular a los alumnos que han participado en todos los REI y cursos «cero» y por supuesto a la profesora Vanessa Serrano por su inestimable colaboración y predisposición durante todos estos años.

Aunque a nivel profesional me he sentido muy bien acompañada, un trabajo que se ha realizado durante tanto tiempo, no puede concebirse sin una estructura afectiva que lo sustente y de la que me siento tan afortunada. Es por ello que inicio una larga lista de agradecimientos *sentimentales* en la que espero no dejarme a nadie.

El primero, sin duda, es para mis padres por el amor que me han dado a lo largo de mi vida y cuyo ejemplo intento seguir. Sé que mi padre estaría orgulloso de saber que he acabado *la tesis* y aunque no pueda estar conmigo en la defensa, suyo va a ser mi primer pensamiento. A mi querida hermana Laura, por su admiración y pasión incondicional hacia mí. También agradecer al resto de mi familia, especialmente a Juan, Anita y Miriam, por su paciencia y cariño en todos estos años.

A mis amigos, repartidos en medio mundo, los cuales, sin entender muchas veces nada de lo que estaba haciendo (y que por terror matemático a que se lo explicara, no preguntaban mucho), me han apoyado y animado, dándome todo su cariño.

A Diego, mi compañero, por mostrarme que, a pesar de todas las dificultades, *aor sara givan sundhar he*.
Y por supuesto, a Guillem, lo más bello que me ha sucedido.

En un momento de oscuridad del sistema educativo actual, espero seguir con la misma fuerza, pasión y dedicación que lo he hecho hasta ahora, y continuar difundiendo el trabajo de la teoría antropológica de lo didáctico.

En las montañas del Garraf, 17 de diciembre de 2012.

Índice

INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DOCENTE INICIAL

Este trabajo parte de la problemática que plantea la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios relacionados con la economía y empresa y que podríamos formular inicialmente como la cuestión de qué matemáticas enseñar a los estudiantes de un primer curso de Matemáticas para la empresa y de cómo organizar esta enseñanza para hacerla lo más efectiva posible. Para abordar este enorme problema desde la investigación didáctica, tenemos que dar muchos «pasos atrás» y alejarnos de lo que podríamos denominar *problema docente* del profesor universitario (Gascón 1999) para centrarnos en aspectos parciales de esta problemática que, además, se formularán de una forma bastante alejada de su expresión inicial, en términos de procesos transpositivos, completitud de las organizaciones matemáticas, modelización matemática y ecología de los dispositivos de formación. Este será el enfoque que adoptaremos: el que propone la teoría antropológica de lo didáctico, un programa de investigación didáctica que surgió en los años 80 en manos del investigador francés Yves Chevallard y que en la actualidad agrupa una comunidad de más de un centenar de investigadores.

De todos modos, y aunque el origen circunstancial del problema de investigación que abordamos no tenga por qué influir en la manera de abordarlo ni en la calidad de los resultados obtenidos, este no dejará de traslucir durante toda la memoria y hemos creído conveniente comentarlo aquí. Al acabar mis estudios de licenciatura en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona en 1999, tuve la oportunidad de empezar a dar clases en la escuela universitaria de estudios empresariales de la misma universidad en calidad de profesora asociada. La cuestión primordial que no lograba entender era que, si las matemáticas supuestamente estaban en el currículum de primer curso con el objetivo de permitir entender el contenido de muchas de las demás materias, ¿por qué mayoritariamente los alumnos la abandonaban hasta el final convirtiéndose en «la última asignatura de la carrera»? Durante los diez cursos en los que di clases en esta escuela tuve la ocasión de conversar con muchos de estos alumnos y la mayoría confesaba que no había tenido problemas en ir aprobando el resto de las materias sin necesidad de conocimientos matemáticos. Este punto me era difícil de entender: ¿quién huía de las matemáticas, los alumnos o el resto de las materias? Mi relación con la Facultat d'Economia IQS (actual IQS School of Management) en la que también participé como docente de matemáticas me puso en contacto con el grupo de investigación en didáctica dirigido por Marianna Bosch de esta facultad y por Josep Gascón de la UAB que, desde el marco de la teoría antropológica de lo didáctico, ya habían iniciado investigaciones en una línea que se aproximaba al tipo de cuestiones que se me estaban planteando. Los trabajos de tesis de Cecilio Fonseca sobre las discontinuidades didácticas entre la Secundaria y la Universidad y de Berta Barquero sobre la enseñanza de la modelización matemática en primeros cursos universitarios de ciencias experimentales fueron el punto de arranque de mi trabajo.

Dado que esta investigación se enmarca dentro de la teoría antropológica de lo didáctico, se iniciará el primer capítulo explicando los elementos de dicha teoría que fundamentan nuestra investigación. A continuación se formulará el problema de investigación como un conjunto de cuatro grandes tipos de cuestiones problemáticas y de conjeturas asociadas. En el segundo capítulo se abordará el *statu quo* de la enseñanza de las matemáticas para las ciencias económicas y empresariales en la universidad española actual y en el bachillerato para las ciencias sociales. En el tercer capítulo, nos centraremos en la problemática que surge en el paso entre estas dos etapas educativas, para analizar un fenómeno relativamente reciente pero totalmente institucionalizado en las universidades españolas, los llamados «cursos cero de matemáticas» o «cursos propedéuticos» que se organizan en septiembre o principios de curso para mejorar la transición de los alumnos a los nuevos estudios universitarios. En este contexto, nuestro equipo de investigación se vio involucrado en el diseño y experimentación de uno de estos cursos, que lleva en funcionamiento cinco cursos académicos, y que servirá de base empírica para este apartado de la investigación. El problema de la enseñanza de las matemáticas en un primer curso universitario de Administración y Dirección de

Empresas se aborda plenamente en el cuarto capítulo de la memoria, con el diseño y la experimentación de un nuevo dispositivo didáctico para hacer vivir las matemáticas como herramienta de modelización: los llamados «recorridos de estudio e investigación». Estos recorridos se han venido experimentando de forma continuada a lo largo de seis cursos académicos y de forma totalmente integrada a la asignatura en la que se inscriben. Hemos podido así obtener unas condiciones excepcionales para el estudio de la *ecología* de la enseñanza de la modelización matemática en el nivel universitario, es decir, el estudio de las condiciones que favorecen y de las restricciones que impiden que las matemáticas se puedan enseñar de forma normalizada como herramienta de modelización en una institución docente.

CAPÍTULO 1. Marco teórico y formulación del problema de investigación

1. Marco teórico: la teoría antropológica de lo didáctico

El currículum escolar de las matemáticas, en todas las etapas educativas, ha evolucionado hacia lo que, en una conferencia reciente, el investigador francés en didáctica de las matemáticas Yves Chevallard (2012) ha designado como una forma de *monumentalismo epistemológico* en la que el conocimiento se presenta fragmentado en pequeños «pedazos» aislados que el estudiante debe conocer o por lo menos «haber visitado» y que, además, se espera que lo haga de forma «motivadora». Esta relación con el conocimiento, que invita a ser olvidado tan pronto como el alumno se ha examinado de la materia correspondiente, se sitúa en las antípodas de lo que sería un *enfoque funcional* de la construcción del conocimiento, basado en la necesidad de responder a cuestiones problemáticas que surgen en distintos ámbitos de la realidad. Una consecuencia de este *monumentalismo* es la pérdida de sentido, especialmente dentro del propio ámbito escolar, de los conocimientos matemáticos que se estudian. Estos aparecen inmotivados, como simples monumentos que hay que visitar pero sin una funcionalidad aparente, lo que conduce a la creencia de que las matemáticas no son útiles fuera de su ámbito disciplinar e incluso que son algo de lo que se puede prescindir casi por completo.

En el texto que redactó en ocasión de la recepción del premio Hans Freudenthal que la International Comission for Mathematical Instruction otorga bienalmente a un «major programme of research in mathematics education», Chevallard (2010a) describe este fenómeno en los términos siguientes:

> L’école organise la rencontre des générations montantes avec des *œuvres*, mathématiques et autres. Une des questions clés d’une refondation scolaire de nos sociétés est alors celle-ci : quel type de *rencontre* devons-nous chercher à promouvoir, et avec quelles *œuvres*? Un premier type de rencontre consiste en une *non-rencontre*, un *évitement*, voire une rencontre *interdite* pour tel ou tel « public » de l’école. Quel que soit le choix des œuvres, il nous faut nous interroger sur les œuvres que les futurs citoyens de tel ou tel « type » ne rencontreront pas, et sur les incidences personnelles et collectives de ces « ratages ». Un deuxième type de rencontre conduit à faire de l’élève le spectateur d’une œuvre qu’il est invité à contempler, à admirer, à décrire, voire à commenter, tout en lui restant durablement extérieur. Ce type de rencontre, qui fleurit en certaines disciplines et détermine au mieux un rapport mondain aux œuvres, est paradoxalement l’écho prolongé du statut dominé du sujet –ou du courtisan – d’Ancien Régime, que l’on autorise à apercevoir de loin une partie du patrimoine du Royaume afin qu’il loue ceux qui l’ont constitué, sans pour autant qu’il puisse y toucher ni à plus forte raison en user. Mais c’est un troisième type de rencontres qui est au cœur de l’enseignement actuel des mathématiques : celui de la « visite des œuvres », qui ressemble certes à une rencontre mondaine (dont il procède historiquement) mais qui, depuis belle lurette, n’en a plus le lustre. L’œuvre visitée et un tant soit peu manipulée par le visiteur est un en-soi, dont les raisons d’être sont occultées, oubliées même. À quoi servent les angles, les triangles, les parallélogrammes par exemple, en quoi s’agit-il d’œuvres précieuses car *utiles*? La réponse manque. C’est là ce que j’ai nommé la *monumentalisation* scolaire des œuvres (mathématiques ou autres). À ce crépuscule de l’enseignement s’oppose aujourd’hui un quatrième type de rencontre, qui est comme une aurore vers laquelle pointe la recherche en didactique : l’œuvre, vue comme pourvoyeuse d’outils, n’y est pas *d’abord* rencontrée pour elle-même mais pour ce qu’elle permet en termes de connaissance et d’action. L’étude mondaine, dépourvue de finalité, cède la place à une étude située, finalisée, qui jamais n’est dupe de son incomplétude. Nous arrivons ainsi sur le seuil de ce qu’on nomme, en TAD, la théorie (et la pratique) des AER [activités d’étude et de recherche] et des PER [parcours d’étude et de recherche], aujourd’hui en plein développement, contribution essentielle, à mes yeux, à la refondation nécessaire.

Nuestro trabajo de investigación se propone contribuir a esta «refundación necesaria» de la que habla Chevallard. Esta situación tiene obviamente importantes consecuencias en lo que podemos designar como el problema curricular de la enseñanza, es decir, el de la selección de los contenidos que se deben enseñar en la escuela. En la conferencia antes mencionada, Chevallard (2012) indica:

> The relation to knowledge and ignorance thus associated with the visiting of mathematical works has become increasingly unsuited to people's needs and wants, up to the point that there currently exists a widespread belief that mathematical knowledge is something one can almost altogether dispense with—whereas, in a not so remote past, mathematics could be regarded as the key to a vast number of individual as well as collective problems. In this respect, the chief flaw in the paradigm of visiting monuments, which relates to the undemocratic ethos in which this paradigm originated, has to do with the choice of «monuments» to visit at school. As we know, this choice is usually the combined result of a long-lasting tradition, on the one hand, and of irregularly spaced, hectic reforms, on the other. In no way, it seems, the decisions made go beyond what the people in charge of this choice-making think opportune, fit, or even «good» for the edification of the mounting generations. In no way, it seems, the choice of the monuments to be visited is made on an experimental basis or at least on a large and supposedly relevant experiential basis.

Veremos que, además, en la contribución que propondremos al problema didáctico del cambio de paradigma, el recurso a una «base experimental» para fundamentar las posibles propuestas de renovación pedagógica constituye para nosotros un aspecto irrenunciable. Esta visión de las cosas es la que propugna la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) impulsada por Y. Chevallard y que tomamos como marco teórico de nuestra investigación. A continuación introduciremos algunos de los aspectos más relevantes de este enfoque, limitándonos a aquellos que utilizaremos de forma explícita en la presentación de nuestro trabajo. En el anexo 1.1 se encuentra una pequeña introducción histórica de la TAD dentro de lo que se conoce como el enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas.

1.1. Noción de praxeología

Uno de los conceptos clave de la teoría antropológica de lo didáctico es la noción de «organización praxeológica» o «praxeología». Según indica Y. Chevallard (2006b):

> Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general. [...] ¿Qué es exactamente una praxeología? Podemos confiar en la etimología para guiarnos aquí. Uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: *praxis*, i.e. la parte práctica, por un lado, y el *logos*, por el otro. «*Logos*» es una palabra griega que, desde los tiempos presocráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano —particularmente sobre el cosmos. [...] [De acuerdo con] un principio fundamental de la TAD, no pueden existir acciones humanas sin ser, al menos parcialmente, «explicadas», hechas «inteligibles», «justificadas», «contabilizadas», en cualquier estilo de «razonamiento» que pueda abrazar dicha explicación o justificación. La *praxis*, por tanto, implica el *logos* que, a su vez, implica volver a la *praxis.* En efecto, toda *praxis* requiere un apoyo en el *logos* porque, a la larga, ningún quehacer humano permanece sin cuestionar. Por

> supuesto, una praxeología podría ser deficiente, por ejemplo porque su «praxis» se compone de una técnica ineficaz —«técnica» es aquí la palabra oficial para designar una «forma de hacer»— y su componente «logos» consta casi completamente de puro sinsentido —¡al menos desde el punto de vista del praxeólogo![1]

La noción de *praxeología* o de *organización praxeológica*, constituye así una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática sin atribuirle ninguna especificidad particular, es decir, considerándola como una actividad humana más. Como toda obra humana, una praxeología surge como una respuesta a un conjunto de cuestiones y a la vez como un medio para realizar, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas. Se pueden distinguir en toda praxeología matemática dos aspectos inseparables:

- El nivel de la práctica matemática o «*praxis*» (saber-hacer), que consta de un conjunto de *tareas* materializadas en diferentes *tipos de problemas* (T) y de un conjunto de *técnicas* (τ) o «maneras de hacer», más o menos sistemáticas y compartidas en la institución, que son útiles para llevar a cabo las tareas citadas. Es importante subrayar que las técnicas solo excepcionalmente tienen un carácter algorítmico.
- El discurso razonado sobre la práctica o «*logos*» (saber), en el que se sitúan, en un primer nivel, el discurso que describe, explica y justifica la técnica —que llamamos *tecnología* (θ)—, y en un segundo nivel, la fundamentación de la tecnología, que llamamos *teoría* (Θ) y que asume respecto de la tecnología el mismo papel descriptivo y justificativo que el de la tecnología respecto de la técnica.

El sistema formado por estos dos bloques (*praxis y logos*), o estos cuatro componentes (tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría), constituye lo que consideramos como la *unidad mínima de análisis* de las actividades humanas. Representamos simbólicamente una praxeología mediante estos cuatro componentes $P = [T, \tau, \theta, \Theta]$ y veremos más adelante cuál es su dinámica interna y qué estructuras de complejidad creciente se pueden establecer entre ellas.

Antes debemos añadir algunos comentarios. En primer lugar, cabe señalar que las praxeologías surgen como respuesta a *cuestiones problemáticas* que se plantean en un

[1] p. 23, la traducción es nuestra.

ámbito institucional dado y que acaban cristalizando en uno o más *tipos de tareas*, generados por el desarrollo de la actividad de estudio de las cuestiones iniciales. En general, podemos decir que si hay un tipo de tareas en una institución determinada es porque en esta institución existe una *técnica* que permite, no tan solo realizar estas tareas, sino generar muchas más tareas del mismo tipo. Ninguna técnica puede vivir con normalidad a largo plazo en una institución si no aparece en cierta forma como una manera de hacer a la vez correcta, comprensible y justificada por la comunidad. Por tanto, la existencia de una *técnica* presupone en su entorno un *discurso interpretativo y justificativo* que en el marco de la TAD es lo que se define como una *tecnología*. Esta, además de justificar una técnica y hacerla inteligible, tiene la importante función de aportar elementos para desarrollarla, con la finalidad de ampliar su alcance, superar sus limitaciones y hacer posible la producción de nuevas técnicas. También forman parte de la tecnología asociada a una técnica las proposiciones que describen su alcance, su relación con otras técnicas, las posibles generalizaciones y las causas de sus limitaciones. Esta tecnología asociada a una técnica es un discurso que también requiere una interpretación y justificación institucional. La *teoría* (asociada a una tecnología) es el discurso justificador de esta tecnología y constituye por decisión metodológica el último nivel de justificación de la actividad. En el caso de las praxeologías científicas, el nivel de la teoría acostumbra a explicitarse con el objetivo de no basar la validez de los resultados obtenidos en supuestos implícitos difíciles de controlar. En cambio, en el caso general de las praxeologías que gobiernan la vida de las instituciones, el nivel de la teoría acostumbra a permanecer implícito, formado por principios y verdades asumidas por el grupo, que solo suben a la superficie en caso de problemas o dificultades, cuando se cuestiona la razón de ser de un tipo de tareas o la manera de llevarla a cabo.

Esta breve descripción de las praxeologías ya pone de manifiesto que sus componentes, lejos de ser independientes, están fuertemente relacionados entre sí. Así, el desarrollo de las técnicas genera nuevos tipos de tareas y provoca nuevas necesidades explicativas y justificativas. Además, es importante señalar que estos cuatro tipos de componentes —tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías— son *doblemente relativos*. En primer lugar, son *relativos a la institución* de referencia considerada. Esto significa que lo que es considerado como un tipo de tarea (o técnica o tecnología o teoría) en una institución no tiene por qué serlo en otra institución. De hecho, dada una institución, solo tendrían que considerarse como tipos de tareas T aquellas para las cuales se dispone de algún tipo de técnica τ con un mínimo entorno tecnológico [θ, Θ], más o menos explícito (aunque este entorno sea del tipo «lo hacemos así porque siempre se ha hecho así»). Por simetría, se podría decir que las técnicas siempre dan respuesta a alguno de los tipos de tareas que se pueden plantear en una institución, aunque a veces puedan existir herramientas y maneras de hacer que respondan a cuestiones que ya no se plantean. En segundo lugar, las nociones de tipos de problemas, técnicas, tecnología y teoría son *relativas a la función* que hace cada uno de estos objetos en una actividad determinada. Esta es una de las propiedades interesantes de la noción de praxeología: el hecho de permitir distinguir las diferentes funciones que pueden tomar los objetos en las diferentes instituciones sociales y en las diferentes actividades institucionales.

1.2. Clases de praxeologías: estructuras de complejidad creciente

Para tener herramientas más precisas que analicen los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo una distinción entre diferentes tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes:

(a) Diremos que una praxeología es *puntual* (PP) en una institución si está generada por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tareas T*. En este caso, la PP queda definida a partir del bloque práctico-técnico [T/τ]. Para describir una PP, tendríamos que detallar con cierta precisión el tipo exacto de tareas que estamos considerando y las variaciones de la técnica que se le asocian en la institución de referencia. Incluso, sería preciso especificar en qué punto una determinada variación de una técnica concreta ya no puede ser considerada por la institución de referencia como la «misma» técnica y, por tanto, cuáles son las nuevas PP que aparecen y cuál es su relación con la PP inicial. También se tendrían que explicar los elementos tecnológicos que permitirían describir e interpretar esta actividad (aunque en la práctica queden implícitos) e, incluso, la teoría que constituye el horizonte en el que podría situarse.

(b) Diremos que una praxeología es *local* (PL) en una institución si se obtiene como resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales en torno a un discurso tecnológico común. Cada PL queda así caracterizada por una *tecnología* θ, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las PP que la componen. En general las PP se integran en una PL para poder dar respuestas satisfactorias a un conjunto de *cuestiones problemáticas* que no se pueden resolver completamente en ninguna de las PP de partida. Estas cuestiones problemáticas constituyen así la «razón de ser» de la PL. A lo largo del *proceso de estudio*, que es a la vez un proceso de (*re*)*construcción* de praxeologías, se va desarrollando un *discurso tecnológico* común que permite *describir, interpretar, justificar, explicar y relacionar* entre sí las antiguas técnicas, así como *producir* técnicas «nuevas». De hecho, en el paso de un conjunto de PP a una única PL, suele tomar protagonismo el discurso tecnológico θ que caracteriza la PL en cuestión. Paradójicamente, en determinadas instituciones se tiene que, a medida que las PP se integran para construir organizaciones más complejas, la relación entre las cuestiones iniciales y las respuestas tiende a invertirse, apareciendo las técnicas como meras derivaciones del discurso tecnológico, llegando incluso a desaparecer las cuestiones problemáticas que le dan a la PL sus «razones de ser» (Chevallard 1999).

Una característica muy marcada —en las instituciones escolares actuales— del discurso tecnológico θ asociado a una PL es la *preponderancia de la función justificativa* (que asegura que cada técnica sirve para lo que tiene que servir y da el resultado que tiene que dar) por *encima de la función explicativa* (que tendría que aclarar por qué la técnica es correcta, pertinente y eficaz). Este fenómeno tiene relación con el hecho que, en cada institución, para cualquier tipo de tareas, se tiende a privilegiar una única técnica que es considerada en esta institución como *la manera* evidente e incuestionable de resolver las tareas del tipo en cuestión. Esta técnica privilegiada por la institución, al ser incuestionable y no tener una técnica rival, puede llegar a asumir un carácter *autotecnológico*[2] dificultando así su desarrollo (porque se ignoran sus limitaciones) y su integración en praxeologías más amplias. Este es pues, un primer rasgo de la dificultad institucional para integrar varias PP en una PL.

(c) Diremos que una praxeología es *regional* (PR) en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una *teoría* común Θ, de diversas PL. La reconstrucción institucional de una teoría requiere elaborar un *lenguaje común* que permita describir, *interpretar*, *relacionar*, *justificar y producir* las diferentes tecnologías de las PL que integran la PR.

[2] Se trata de técnicas tan naturalizadas y transparentes, que no parecen necesitar ninguna justificación externa a ellas mismas, más allá del hecho que «funcionan».

Aunque las nociones de praxeología puntual, local y regional son generales y se pueden aplicar a cualquier actividad humana, las utilizaremos principalmente para el caso de las matemáticas, donde se convierten en un instrumento muy práctico para describir las organizaciones del saber que se encuentran en las distintas instituciones sociales y, más concretamente, en las escolares.

1.3. El proceso de estudio de una praxeología matemática: momentos del estudio y praxeologías didácticas

En las instituciones sociales aparecen constantemente cuestiones que requieren una respuesta por parte de los sujetos: un nuevo tipo de tareas, un cambio en las condiciones para realizar una tarea antigua, etc. Cuando no se conoce esta respuesta, es decir, cuando la institución no dispone de una técnica conocida para aportar alguna respuesta, aunque sea provisional, nos encontramos ante una *cuestión problemática*. Para que la respuesta que se busca sea estable, lo que se requiere no es una simple información, sino la elaboración, aunque sea muy incipiente, de una praxeología inicialmente puntual pero que pronto deberá desarrollarse hasta convertirse en local. La creación o reconstrucción de nuevas praxeologías como respuesta a las cuestiones problemáticas constituye un *proceso de estudio* y forma parte de la *dinámica praxeológica institucional*.

Consideraremos dos grandes casos para describir esta dinámica institucional. En primer lugar, el caso en el que se identifica a priori una praxeología local $\mathbb{P}$ que permite aportar respuesta a la cuestión problemática inicial. En este caso hablaremos de un *proceso de estudio finalizado*. El segundo caso corresponde a un proceso de estudio que parte de una cuestión problemática sin tener identificadas a priori las herramientas praxeológicas necesarias para aportar respuesta. Abordaremos este caso más adelante, en el apartado 1.8.

En el caso de los procesos de estudio finalizados donde, además, $\mathbb{P}$ es una praxeología matemática local, la consideración de diversos procesos de construcción permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos. Para describir estos procesos, se utiliza la noción de *momento didáctico* que se debe entender, no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de *dimensión de la actividad*. Chevallard (1999) postula así que el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por *seis momentos didácticos*, sin presuponer que la estructura del proceso sea lineal. Cada momento puede ser vivido con diversas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como se necesite a lo largo del proceso de estudio e incluso, es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que es importante destacar es que cada uno de los seis momentos o dimensiones del estudio tiene una función específica necesaria para llevar a cabo el proceso y que existe una *dinámica interna global* que se manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre los citados momentos. En otras palabras, lo que es importante no es el orden en que se realizan los diferentes momentos del proceso de estudio, sino la estructura interna de las relaciones que tienen que establecerse entre ellos.

Los seis momentos didácticos son: el momento del *primer encuentro*, el momento *exploratorio*, el momento del *trabajo de la técnica*, el momento *tecnológico-teórico*, el momento de la *institucionalización* y el momento de la *evaluación*. Podemos asociar esta estructura del proceso de estudio con los distintos componentes de la praxeología local $\mathbb{P}$ cuya construcción constituye el objetivo final del proceso de estudio:

M1 – *Momento del primer encuentro*

Este momento hace referencia a la primera vez que los estudiantes entran en contacto con algún componente de $\mathbb{P}$ o con alguna cuestión problemática Q a la que $\mathbb{P}$ puede aportar respuesta. Este primer momento se puede vivir varias veces a lo largo de todo el proceso de estudio. Su función principal es la de hacer «existir» los componentes de $\mathbb{P}$ para la comunidad de estudio y, en particular, aquellas cuestiones cuya respuesta requiere construir esta praxeología y le dan, por lo tanto, su razón de ser.

M2 – *Momento exploratorio*

Es el momento en el cual se explora la cuestión problemática Q, se inscribe dentro de un tipo de tarea T_Q y se elabora una técnica τ_Q relativa a esta. Se pueden diferenciar dos etapas: la primera que corresponde a la investigación de técnicas o mecanismos para poder solucionar las cuestiones problemáticas que se plantean y la segunda en la que se deben abordar los problemas concretos dentro de un tipo de tareas y utilizar efectivamente técnicas matemáticas para resolverlos. Se forma así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite *crear y poner en* *funcionamiento una técnica* relativa a los problemas de un mismo tipo, y esta técnica a la vez pasa a constituir un medio para resolver de manera cuasi rutinaria los problemas del mismo tipo. El proceso de reconstrucción de una praxeología local tiene que contener momentos exploratorios en los cuales la comunidad de estudio tenga la oportunidad de construir y empezar a utilizar una técnica inicial τ_0 potencialmente útil para realizar las tareas del tipo T_Q. Esta exploración tiene que permitir comparar las variaciones de τ_0 que aparecen al abordar las diferentes tareas del tipo T_Q.

M3 – *Momento del trabajo de la técnica*

Este momento viene a completar, en cierto sentido, el momento exploratorio. Se inicia *rutinizando* τ_0 hasta provocar un desarrollo progresivo de la técnica. Este desarrollo permite generar técnicas relativamente nuevas para la comunidad de estudio. El trabajo de la técnica tiene que continuar hasta que los estudiantes alcancen un *dominio robusto* del conjunto de las técnicas, lo que provocará la ampliación progresiva de T_Q a T_0 y la aparición de nuevos tipos de tareas. Observamos que esta actividad matemática conlleva un cierto grado de *creatividad* de nuevos objetos matemáticos. El *momento del trabajo de la técnica* es, por tanto, un momento muy importante del proceso de estudio. Cabe señalar que las instituciones didácticas actuales no disponen de ningún dispositivo «oficial» en el cual pueda vivir y desarrollarse esta dimensión de la actividad matemática (Chevallard, Bosch & Gascón 1997).

M4 – *Momento tecnológico-teórico*

Es el momento de la constitución de un entorno tecnológico-teórico relativo a las distintas técnicas τ_i que se construyen o aparecen durante el proceso de estudio. En la reconstrucción de una praxeología, tienen que aparecer nuevas cuestiones matemáticas relativas a las técnicas τ_i, cuestiones relativas a la interpretación, justificación, y alcance de las técnicas, así como de las relaciones que se establecen entre ellas (denominamos *cuestionamiento tecnológico* a este conjunto de cuestiones). La respuesta a estas cuestiones requerirá la realización de nuevas tareas matemáticas que también pasaran a integrarse en la praxeología en construcción. Es necesario utilizar un marco *tecnológico-teórico* que es el que permitirá construir (además de justificar, interpretar y relacionar) todas las técnicas necesarias. Es por esto que, estructuralmente, se dice que una praxeología local está caracterizada por una *tecnología* θ, que engloba a todas las praxeologías puntuales que la integran.

M5 – *Momento de la institucionalización*

Este momento tiene por objetivo precisar lo que es exactamente la praxeología elaborada, especificando los elementos que se han utilizado en la construcción y que finalmente han pasado a formar parte de la praxeología, dotándolos de un carácter oficial y diferenciándolos claramente de aquellos otros elementos que pueden haber aparecido como instrumentos útiles para la construcción pero no han sido integrados en la praxeología construida. Esta *institucionalización* no tiene que referirse únicamente a elementos praxeológicos aislados; la institucionalización de cualquier componente de $\mathbb{P}$ tiene que hacer referencia (más o menos explícita) a la praxeología en su conjunto, por lo que podríamos decir que el sujeto de la institucionalización es siempre, al menos virtualmente, una praxeología *local*.

M6 – *Momento de la evaluación*

Es el momento en el que se evalúa *la calidad de los componentes de la praxeología construida*: los tipos de tareas (¿están bien identificados?, ¿existen especímenes suficientemente variados de cada tipo?, ¿a qué cuestiones están asociados?,...); las técnicas (¿están suficientemente trabajadas?, ¿son fiables?, ¿son económicas?, ¿son las más pertinentes para realizar las tareas presentadas?....); y el discurso tecnológico (¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?, ¿permite variar las técnicas en la dirección adecuada para construir nuevas técnicas?....).

Es importante constatar hasta qué punto el modelo del proceso de construcción de las praxeologías en términos de momentos está relacionado con la estructura de las praxeologías *locales*. Podemos decir entonces que, en la medida en que los diferentes momentos del estudio se vivan y se integren de manera funcional, entonces lo que se construirá será una praxeología local más «completa» (Fonseca 2004).

1.4. «Completitud» de las praxeologías matemáticas locales

En este apartado veremos que las características de las componentes de una praxeología matemática local (PML) y, por lo tanto, su estructura resultante son fruto de la construcción de esta praxeología mediante un proceso en el que los momentos didácticos M1-M6 se integran de manera funcional. Este proceso, a la vez, utiliza los distintos componentes de la praxeología a medida que van siendo producidos como instrumentos imprescindibles de la actividad. Podemos entonces hablar del «grado de completitud» de una PML considerando los siguientes indicadores (Fonseca 2004):

PML1 – *Integración de los tipos de tareas y existencia de un cuestionamiento tecnológico.*

En una PML conviven necesariamente diferentes tipos de tareas problemáticas y técnicas que provienen de las diferentes praxeologías puntuales que la integran y que están articuladas por un discurso tecnológico común. Este discurso surge normalmente a partir de la necesidad de interpretar y justificar los sucesivos desarrollos de las técnicas de cada praxeología puntual y de la necesidad de relacionarlas entre sí. El grado de completitud de una PML depende entonces del *grado de integración de los diferentes tipos de tareas*. Entre ellos tienen que aparecer problemas asociados al *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas, es decir, cuestiones relativas a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a su comparación. Una PML será menos *completa* cuantos más tipos de *tareas aisladas* (realizables mediante técnicas que no están relacionadas con ningún elemento tecnológico) contenga.

PML2 – *Disponibilidad de criterios para elegir la técnica más adecuada.*

Una PML será más completa en la medida en que, dado un tipo concreto de tareas T_q de PML, *existan dos o más técnicas* (que pueden ser variaciones de una misma técnica) que permitan realizar algunas de las tareas concretas de este tipo. Este indicador de la completitud comporta que en una PML relativamente completa existan los *elementos tecnológicos que permiten decidir*, para cada tarea concreta, cual es la técnica más fiable y económica para llevarla a cabo.

PML3 – *Independencia de los objetos ostensivos que instrumentan las técnicas*.

La flexibilidad de las técnicas de una PML constituye otro indicador del grado de completitud y comporta, en particular, que estas no se identifiquen rígidamente con las notaciones, designaciones, gráficos u otros *objetos ostensivos* (Bosch 1994) que se utilizan para describirlas y para aplicarlas. Al contrario, la variabilidad y flexibilidad de las técnicas supone que se acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas e incluso de la tarea específica abordada dentro de un mismo tipo de tareas.

PML4 – *Existencia de tareas y de técnicas «inversas»*.

Otro indicador de la flexibilidad de las técnicas y, por tanto, del grado de completitud de la PML lo proporciona el hecho que, para cada tarea $t \in T_Q$ y cada técnica τ correspondiente, existe lo que llamaremos una *técnica inversa de* τ y que es una técnica (no necesariamente única) que permite realizar la tarea definida intercambiando algunos de los datos y las incógnitas de la t. Podemos llamar a esta última, *tarea inversa de t*, a pesar que no está definida unívocamente a partir de t.

PML5 – *Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas*.

En la medida que una PML sea más completa, se cumplirá que, para cada técnica τ de PML, existirán en PML cuestiones relativas a la *interpretación del funcionamiento* y *el resultado* de aplicar τ para realizar una tarea o un tipo de tareas de PML. Este aspecto de la completitud implica que en PML existen los elementos tecnológicos necesarios para realizar esta interpretación. De hecho, esta «interpretación» tendrá que hacerse en referencia a la PML en su conjunto, en términos de los componentes de la PML y, especialmente, usando la tecnología que la caracteriza.

PML6 – *Existencia de tareas matemáticas «abiertas»*.

Una PML será más completa en la medida que *existan tipos de tareas matemáticas «abiertas»*, es decir, tipos de tareas matemáticas en las cuales los datos y las incógnitas no están prefijadas completamente a priori. En un primer nivel, las tareas abiertas son aquellas en las cuales los datos son valores conocidos que se tratan como si fueran desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son necesariamente objetos matemáticos concretos, sino que también pueden ser relaciones que se establecen entre ciertos objetos en determinadas condiciones explicitadas en el enunciado de la tarea. Existe un segundo nivel de tareas abiertas en las cuales el estudiante tiene que decidir, ante una situación determinada, que datos tiene que utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes. En este segundo nivel se incluyen las tareas de *modelización matemática*.

PML7 – *Integración de elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica*.

Cada PML viene caracterizada por una *tecnología* θ. El grado de completitud de PML depende también del grado de integración interna de los elementos tecnológicos (componentes de θ) y de la incidencia efectiva de θ sobre la práctica matemática que se lleva a cabo con las tareas y las técnicas de PML. En particular, un indicador importante del grado de completitud de PML lo constituye la medida en que θ permite *construir técnicas nuevas* (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas de PML.

Debemos subrayar de nuevo, que la noción de «completitud» es relativa. No tiene sentido hablar de PML «*completas*» ni de PML «*incompletas*». Se trata de una cuestión de grado: existen PML más o menos «completas» que otras en función del grado en que sus componentes cumplan las condiciones descritas por los indicadores PML1 - PML7. Obviamente la relación «más completa que» definida en el conjunto de PML que viven en una institución no es una relación de orden total.

Dualmente, y dada la relación que hay entre los momentos del proceso de estudio de una praxeología matemática y sus componentes práctico-técnicos y tecnológico-teóricos, podemos decir también que el grado de completitud de una PML depende del grado en que, a lo largo del proceso de construcción de PML, se integran funcionalmente los momentos M1-M6.

1.5. Descripción de praxeologías didácticas «ideales» en términos de momentos

Desde el punto de vista de la teoría antropológica de lo didáctico se postula que *toda actividad humana puede ser descrita en términos de praxeologías*. El caso que la actividad considerada sea la actividad de estudio, no es una excepción. Esto nos conduce a considerar praxeologías de estudio o *praxeologías didácticas* (PD). De esta manera, todo proceso de estudio de las matemáticas, como proceso de construcción o reconstrucción de praxeologías matemáticas, consiste en la utilización de una determinada PD, con su componente práctico (formado por *tipos de tareas y técnicas didácticas*) y su componente teórico (formado por *tecnologías y teorías didácticas*). De la misma manera en que las praxeologías matemáticas son las unidades mínimas de análisis de las prácticas matemáticas, las praxeologías didácticas *son las unidades mínimas de análisis de los procesos didácticos*.

Los momentos del proceso de estudio proporcionan unos primeros elementos para describir las PD. Si consideramos como ejemplo prototípico de tarea didáctica la que consiste en «enseñar un determinado contenido matemático (o PML)», entonces las técnicas didácticas que permiten realizar esta tarea se podrán describir en términos de los dispositivos utilizados para hacer vivir y gestionar los diferentes momentos del estudio. Formarán parte de la tecnología y teoría didácticas asociadas los discursos explicativos y justificativos de estas técnicas.

Para poder caracterizar la praxeología didáctica de una institución escolar concreta relativa a una praxeología matemática, necesitamos un punto de vista previo que nos proporcione criterios sobre qué es lo que tenemos que mirar y con qué objetivos hemos de mirarlo. Para hacerlo, nos basaremos en primera instancia en la descripción dada por Gascón (2001) y Bosch & Gascón (2005) que proponen un «sistema de referencia» tridimensional al que asignaremos una función metodológica.

Imaginemos un hipotético espacio tridimensional donde cada uno de sus puntos representa una *praxeología didáctica ideal*[3] posible. Los ejes del sistema de referencia seleccionados vienen representados por tres de los momentos o dimensiones de la actividad matemática: el momento tecnológico-teórico (θ/Θ), el momento del trabajo de la técnica (T/τ) y el momento exploratorio (Ex). En cada uno de estos ejes se sitúan praxeología didácticas ideales que llamaremos *unidimensionales* porque se caracterizan por centrar el proceso de estudio en una única dimensión del proceso de estudio (la que corresponde al eje en cuestión) dándole a este una prioridad absoluta y olvidando, o

[3] El adjetivo «ideal» no indica ningún tipo de perfección, esencialidad ni valoración, tiene que ver exclusivamente con la función puramente lógica de modelo, que el «tipo ideal» cumple. Los tipos ideales están caracterizados teóricamente pero no son copias fotográficas de los hechos empíricos. Tienen una función metodológica puesto que sirven para compararlos o contrastarlos con la realidad empírica, históricamente existente (Weber 1922).

asignando un papel muy secundario a las restantes dimensiones. Aparecen así, respectivamente las praxeologías didácticas que denominamos ideales *teoricistas*, *tecnicistas* y *modernistas*. Cada uno de estos tipos de praxeologías didácticas ideales puede caracterizarse complementariamente por el tipo de contracto didáctico institucional que define y que puede resumirse haciendo referencia a la forma cómo se distribuyen las responsabilidades didácticas en un proceso de estudio.

Entre las praxeologías didácticas ideales que toman en consideración dos momentos o dimensiones de la actividad matemática citaremos: PD *clásicas*, PD *empiristas* y PD *constructivistas*. Las praxeologías didácticas *clásicas* combinan los momentos tecnológico-teórico y del trabajo de la técnica, y se caracterizan entre otras cosas por la *trivialización de la actividad de resolución de problemas* y por considerar que la enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico totalmente controlable por el profesor.

Las praxeologías didácticas *empiristas* pretenden integrar los momentos exploratorio y del trabajo de la técnica. Se caracterizan por la preminencia que otorgan a la resolución de problemas dentro del proceso didáctico global y por considerar que aprender matemáticas es un *proceso inductivo* y *autónomo* basado en la imitación y en la práctica.

Las praxeologías didácticas *constructivistas* toman simultáneamente en consideración los momentos tecnológico-teórico y exploratorio. Se caracterizan por contextualizar la actividad de resolución de problemas situándola en una actividad más amplia y por considerar que *el aprendizaje es un proceso activo de construcción de conocimientos* que se lleva a cabo siguiendo unas fases determinadas y que depende esencialmente de los conocimientos adquiridos con anterioridad.

Cada uno de estos tres tipos de praxeologías didácticas ideales bidimensionales: clásicas, empiristas y constructivistas, se sitúan en uno de los planos del sistema de referencia que hemos escogido en nuestro espacio de praxeologías didácticas ideales posibles (figura 1.1).

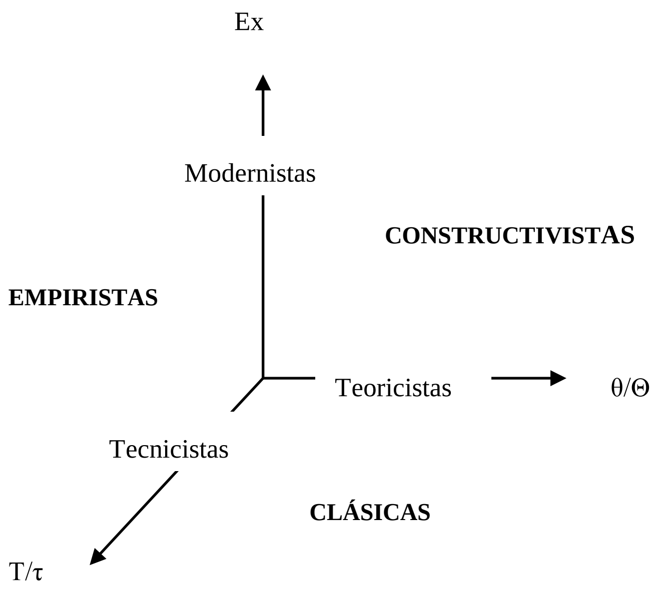


Figura 1.1. Espacio tridimensional de las praxeologías didácticas «ideales»

Cada uno de estos tipos de organizaciones didácticas se sustenta en un *modelo epistemológico general* de las matemáticas, es decir, en una forma particular y relativamente precisa de interpretar y describir la organización matemática escolar considerada como un todo. En concreto, las organizaciones didácticas clásicas se sustentan en el *euclideanismo*, las empiristas en los modelos epistemológicos *cuasi-empíricos* y las constructivistas en los modelos epistemológicos *constructivistas* (Gascón 2001).

1.6. Relaciones entre praxeologías matemáticas y didácticas: la noción de contrato didáctico y de los niveles de codeterminación

Para precisar mejor nuestro punto de partida y clarificar los presupuestos que asumimos inicialmente, explicitaremos a continuación una hipótesis básica del programa epistemológico en didáctica de las matemáticas en la que juega un papel importante la noción de «contrato didáctico». La noción de contrato didáctico[4], introducida por G. Brousseau en el marco de la teoría de situaciones didácticas, designa el conjunto de cláusulas implícitas que distribuyen las responsabilidades recíprocas entre los estudiantes y el profesor en relación al conocimiento matemático en juego. Las cláusulas del contrato didáctico tienen un *carácter institucional* (no dependen del

[4] La noción de «contracto didáctico» adquiere un sentido más preciso en el marco de la *teoría de las situaciones didácticas*. En Brousseau (1998) puede encontrarse una recopilación de los trabajos fundadores de esta teoría, publicados entre 1970 y 1990.

profesor y alumnos concretos considerados sino del tipo de centro de enseñanza, de sus costumbres y estilos docentes) y *marcadamente tácito* (el contrato siempre está presente, pero no se puede explicitar). Esto hace que dichas cláusulas sean difíciles de modificar e, incluso, de percibir, excepto en los casos en que precisamente hay ruptura de contrato, por ejemplo porque el profesor propone a los alumnos un tipo de tareas que ellos no pueden asumir o, a la inversa, porque los alumnos exigen del profesor un tipo de ayuda que él no les puede otorgar a menos de renunciar al proyecto de enseñanza que los unía. El contrato didáctico siempre está inmerso en un contrato más amplio, propio a la enseñanza de todas las disciplinas, llamado el *contrato pedagógico*, inmerso, a su vez, en un *contrato escolar* más amplio. Si bien es cierto que el contrato escolar cambia en el paso de Secundaria a la Universidad, lo que no es tan claro para los alumnos —ni tampoco siempre para los profesores— es en qué sentido queda afectado también el contrato pedagógico y, en último término, el propio contrato didáctico.

Las nociones de contrato didáctico (que afecta a una disciplina), pedagógico (que afecta a la enseñanza de las diferentes disciplinas) y escolar (que afecta a cualquier actividad de la escuela en general) marcan una primera jerarquía en el conjunto de condiciones y restricciones institucionales que afectan el diseño y la gestión de los procesos didácticos. Así, el hecho que haya una escuela, una enseñanza disciplinar y una enseñanza de las matemáticas puede ofrecer buenas *condiciones* para la realización de un proceso de estudio de ciertas praxeologías matemáticas. Pero al mismo tiempo dichas instituciones también establecen un conjunto de *restricciones* para llevar a cabo este estudio como, por ejemplo, una determinada organización escolar y pedagógica (división de los alumnos en grupos de edad, secuenciación del tiempo escolar, sistema general de evaluación, etc.), incluso didáctica (temario organizado en bloques de contenidos y temas, separación entre disciplinas, etc.) que pueden favorecer u obstaculizar determinados procesos de estudio.

El estudio de las condiciones de existencia y evolución de las praxeologías matemáticas y didácticas en las instituciones sociales muestra que, cuando el profesor y los alumnos se enfrentan a un saber que se tiene que enseñar y aprender, el proceso didáctico está muy determinado por un conjunto de condiciones y restricciones que no se pueden reducir a aquellas inmediatamente identificables dentro del aula (conocimiento previo de los alumnos y profesor, material didáctico disponible, etc.). Aunque estos aspectos sean muy importantes, Y. Chevallard propuso hace unos años considerar una escala de «niveles de codeterminación» (figura 1.2) para poder identificar aquellas condiciones que van más allá del espacio de la clase y del conocimiento o tema que se quiere estudiar (Chevallard 2001b, 2002b y 2004).

Civilización ⇄ Sociedad ⇄ Escuela ⇄ Pedagogía ⇄ Disciplina ⇄ Área ⇄ Sector ⇄ Tema ⇄ Cuestión

Figura 1.2.Escala de «niveles de codeterminación didáctica»

Los niveles de las *cuestiones*, *temas* y *sectores* corresponden respectivamente al de las praxeologías matemáticas *puntuales*, *locales* y *regionales* y, por tanto, no son categorías absolutas sino relativas a la institución de referencia (y a un momento histórico determinado). Más allá nos encontramos con amalgamas de praxeologías matemáticas regionales en torno a conjuntos de teorías hasta llegar a la disciplina matemática globalmente considerada.

En Bosch & Gascón (2007, p.397) encontramos citada una de las principales funciones de esta jerarquía de niveles en el análisis didáctico:

> ¿Por qué una nueva ampliación del objeto de estudio con la correspondiente complejidad del marco teórico? La respuesta es siempre la misma: para liberarse de las concepciones espontáneas del conocimiento matemático que, al analizar su objeto de estudio, los investigadores podrían asumir sin cuestionarlas previamente. Las praxeologías «puntuales», «locales», «regionales» y «globales» se corresponden con los niveles inferiores: los de la cuestión, el tema, el sector y el área. Quizá debido a su familiaridad con el «problema del profesor» («dado un contenido matemático para ser enseñado, ¿cuál es la mejor forma de hacerlo?»), a menudo los didactas asumen como incuestionable la delimitación de contenidos que ofrecen las instancias educativas o académicas. Hay que situarse en un nivel de generalidad superior para preguntarse, por ejemplo, y dada una organización curricular concreta, por qué están divididos los contenidos en estos bloques temáticos y no en otros, o cuáles son los criterios para determinar esta división y qué tipo de restricciones causa sobre la actividad concreta que pueden realizar profesores y estudiantes.

1.7. Modelos epistemológicos de referencia

De la misma manera que hemos propuesto un «sistema de referencia» para la observación y análisis de las praxeologías didácticas relativas a una praxeología matemática local, también se necesita un «modelo epistemológico de referencia» desde el cual poder observar, describir y analizar las praxeologías matemáticas involucradas en los diferentes procesos de estudio.

Tal como hemos dicho, la noción de praxeología proporciona, en este sentido, una herramienta eficaz para describir la actividad y el saber matemático que se desarrollan en estas instituciones. Esta emancipación epistemológica e institucional de la ciencia didáctica, y del propio didacta, requiere un primer «gesto» metodológico para el análisis didáctico que consiste en elaborar lo que llamamos un *modelo epistemológico de referencia* (en adelante MER) de las actividades matemáticas que se enseñan, estudian y aprenden en los procesos didácticos considerados. Como es evidente, la descripción del MER de una actividad matemática se realizará en términos de praxeologías. Como postula Tomás Sierra en su tesis doctoral (Sierra 2006):

> El MER puede expresarse en forma de sucesión de organizaciones matemáticas que corresponde a la elaboración de respuestas parciales a una cuestión problemática inicial. Cada organización matemática de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la organización anterior, delante de las limitaciones de esta por aportar respuestas a las cuestiones que se plantean.

Así pues, ante un problema que involucre un contenido matemático específico, el didacta tendrá que elaborar una descripción propia del saber matemático en juego. Este modelo tendría que tomar la forma de una arborescencia de praxeologías y de cuestiones problemáticas a las cuales estas praxeologías aportan una respuesta (parcial y progresiva). Es evidente que esta arborescencia de cuestiones y praxeologías no existe en el vacío sino que tienen que aparecer institucionalmente contextualizadas. De hecho, la descripción del MER tiene que completarse con la descripción de su reconstrucción institucional y esto requiere, en particular, que se especifiquen los medios de que se dispone o se tendría que disponer para elaborar las respuestas a las cuestiones.

El análisis de la transposición didáctica de las praxeologías en juego es una herramienta especialmente útil para construir los modelos epistemológicos de referencia que utilizan los didactas, ya que guía la mirada a través de las diferentes instituciones involucradas (y, en particular, de la comunidad productora del saber sabio, que es el principal proveedor de los ingredientes del MER) permite a la vez señalar las restricciones transpositivas a las que se ven sometidas las «praxeologías a enseñar» y las «praxeologías efectivamente enseñadas».

Ante cualquier problema didáctico relativo a un proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, aparecen cuestiones relativas a la interpretación de la matemática involucrada en el mismo. Por ejemplo: ¿qué es el álgebra elemental? ¿Para qué sirven los números negativos? ¿Qué es la modelización matemática? ¿Qué relación tiene la proporcionalidad con el álgebra elemental? ¿Qué papel juegan los números reales en la matemática escolar? ¿Qué cuestiones viene a resolver el cálculo diferencial en el Bachillerato? ¿Cómo son las matemáticas que se utilizan en economía?, etc. Las distintas instituciones que intervienen en los procesos didácticos proponen respuestas más o menos explícitas a estas cuestiones. Si desde la investigación se asume de forma no controlada alguna de estas respuestas propias de una institución particular, se corre el riesgo de no abordar con la suficiente objetividad los hechos empíricos que se observan. Por ello, desde la teoría antropológica de lo didáctico se propone elaborar modelos epistemológicos de referencia específicos de los distintos ámbitos matemáticos involucrados (Bosch & Gascón 2003). Esta explicitación del punto de vista epistemológico específico adoptado —que es siempre una asunción a priori en continuo cuestionamiento y evolución— determina, entre otras cosas:

- La *amplitud del ámbito matemático* en referencia a la cual se planteará el problema didáctico en cuestión.
- Los *fenómenos didácticos que serán «visibles»* para el investigador y l*os tipos de problemas de investigación* que se pueden plantear en relación con dicho ámbito de la actividad matemática.
- Las *explicaciones tentativas que se podrán proponer* y el tipo de soluciones (teóricas o prácticas) que se considerarán apropiadas.

En consecuencia, uno de los primeros gestos metodológicos que propone la TAD para abordar un problema didáctico es el de la *elaboración de un MER del contenido matemático involucrado en el problema*. Estos modelos epistemológicos que construye la didáctica de las matemáticas deben tomarse como *hipótesis de trabajo* y, como tales, son siempre provisionales y deben ser constantemente *contrastados* y *revisados*.

Aunque con otros nombres y de forma más o menos explícita, otros enfoques en didáctica utilizan constructos con una función análoga a la que desempeña el MER en la TAD. Así, por ejemplo, la teoría de las situaciones didácticas propone una descripción de los conocimientos matemáticos en términos de *situaciones fundamentales*

(Brousseau 1997); la teoría APOS (Dubinsky & McDonald 2002) propone basar la enseñanza en lo que se designa como la *descomposición genética de un concepto*; la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud 1990) considera una *tríada de situaciones, esquemas e invariantes operatorios* y *significados* para describir los conceptos; el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero & Font 2007) habla de *configuraciones epistémicas*; la teoría de la «Abstracción en Contexto» (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz 2001) de *acciones epistémicas* (modelo RBC+C), etc.

Cada uno de los problemas que trataremos en esta memoria partirá de un MER específico de los ámbitos de la actividad matemática involucrados. Dicho MER será elaborado tomando en consideración datos empíricos de todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica (la esfera sabia, la escuela, las instituciones «utilizadoras» de este contenido, las autoridades educativas que consideran necesario que este contenido se aprenda en la escuela, los profesores que deben enseñarlo, etc.) pero sin asumir acríticamente la forma de interpretar y describir dicho contenido en dichas instituciones, esto es, el modelo epistemológico dominante.

El MER no toma en consideración la idiosincrasia de las personas ni las condiciones particulares que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido matemático en cuestión. Tampoco incluye de forma explícita las actividades concretas que se deberán implementar para estudiar este contenido por parte de los alumnos, aunque sí delimita las cuestiones que dan una *razón de ser* a este contenido (en una institución determinada) y la manera cómo este se conforma y evoluciona para dar respuesta a distintos tipos de problemas. El MER es únicamente un «esqueleto matemático» que, como hemos dicho, toma la forma de una arborescencia de praxeologías matemáticas. Requerirá, por lo tanto, ser «encarnado» en actividades didácticas concretas que puedan realizar grupos de personas (alumnos y profesores) concretos bajo unas restricciones (temporales, materiales, etc.) particulares en el seno de una institución determinada.

1.8. Actividades y recorridos de estudio e investigación

Para responder al «problema del profesor», es decir*, cómo estudiar, construir o «poner en marcha»* en el aula una praxeología matemática local (PML) considerada, la teoría antropológica de lo didáctico propuso en un principio la noción de «actividad de estudio e investigación» (en adelante, AEI) como un nuevo tipo de «modelo didáctico».

El diseño de una AEI para una praxeología matemática local a enseñar, se inicia buscando una «situación del mundo» en la que aparezca una cuestión problemática cuya resolución permita o incluso requiera la reconstrucción de la PML en cuestión. Dado que las AEI se sitúan en el nivel local, no permiten superar el «autismo temático» del profesor que es, en realidad, un «autismo temático» del sistema de enseñanza de las matemáticas (Chevallard 2001b). Esto es debido a que muchas veces las cuestiones que constituyen la «razón de ser» de una PML se hallan no sólo *más allá del nivel local*, sino incluso más allá del nivel *regional, sectorial* y hasta *disciplinar*. Además, el paso de una AEI a otra AEI no puede estar «*motivado*» *funcionalmente* por la propia AEI. Por todo ello, aparece como evidente la *necesidad de un nuevo tipo de «modelo didáctico»* que, integrando las AEI, abarque globalmente el sistema de enseñanza.

Hasta ahora hemos considerado las praxeologías didácticas en sí mismas, sin tomar en consideración que siempre se inscriben en un proyecto educativo más amplio en el seno de una sociedad. En este sentido, se puede atribuir a cada AEI el objetivo de reconstruir una determinada PML previamente establecida por un programa de estudios concreto dentro de un determinado proyecto educativo. Por tanto, si nos restringimos al ámbito de una AEI, no es posible cuestionar el nivel superior de codeterminación didáctica —el nivel escolar— en el que los proyectos educativos se formulan en términos de saberes o conocimientos praxeológicos previamente determinados. Y, por lo mismo, nos obliga a distinguir el estudio *escolar* de las matemáticas de cualquier otro tipo de estudio —por ejemplo el que realiza el investigador— que no tenga predeterminado un tipo de praxeología matemática por reconstruir.

La noción de recorrido de estudio e investigación, en adelante REI, surge de la necesidad de fundamentar las praxeologías didácticas —tanto las «escolares» como las de cualquier otro tipo de institución— en una epistemología realmente *funcional*, en la que los saberes aparezcan como «máquinas» productoras de conocimientos útiles para la creación de respuestas a determinadas cuestiones auténticamente problemáticas.

Podemos pues ahora considerar un modelo más general de proyecto de estudio en el que el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de *saberes o de sistemas praxeológicos designados de antemano*, sino como un *conjunto de cuestiones* a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta $R^{\heartsuit}$. En este modelo, durante la actividad de estudio, se movilizarán todos aquellos recursos, medios, saberes y respuestas ya disponibles $R^{\Diamond}$ que sean necesario con tal de construir una «buena respuesta $R^{\heartsuit}$».

Si partimos de una cuestión generatriz Q cuyo estudio está encomendado a un grupo de estudiantes X y de directores de estudio Y, generamos un sistema didáctico que podemos designar como $S(X; Y; Q)$. Retomando el «esquema herbartiano»[5] introducido por Y. Chevallard (2008), se puede obtener un esquema más general que permite representar las distintas formas posibles que puede tomar un recorrido de estudio e investigación:

$$[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow \{ R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m \}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

donde $\{ R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m \}$ representa el conjunto de recursos que servirán para producir la respuesta final $R^{\heartsuit}$, entre los que se encuentran tanto praxeologías bien identificadas por la cultura en la que se mueven X e Y (las $R_i^{\Diamond}$) como objetos de cualquier otra naturaleza (los O_i) que actuarán como *medio* tanto para poner a prueba las distintas $R_i^{\Diamond}$ como para elaborar con ellos nuevos elementos de respuesta a Q.

De este modo, el «*medio didáctico*», M, está formado por dos conjuntos de elementos clave. Encontramos en primer lugar un conjunto de respuestas prestablecidas $R_i^{\Diamond}$ y, en cierto sentido, «etiquetadas», que constituyen respuestas previamente construidas a cuestiones próximas o análogas a Q y a las cuales se puede tener acceso. El medio M se compone además de otros objetos O_i (conocimientos previos, materiales empíricos, etc.) que no están organizadas ni etiquetadas como obras particulares pero que se necesitan como instrumentos para el trabajo de análisis y contraste de las $R_i^{\Diamond}$ y para la producción de la respuesta $R^{\heartsuit}$ (Chevallard 2010b).

[5] El término «herbartiano» (Chevallard 2007) remite al filósofo alemán Johann Friedrich Herbart (1776 - 1841).

El punto de partida de un REI es una cuestión generatriz Q «viva» para la comunidad de estudio y cuya respuesta no aparece directamente accesible. A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q evoluciona y da lugar a muchas nuevas «cuestiones derivadas»: Q_1, Q_2,…, Q_n cuya pertinencia debe ser constantemente revisada. El criterio esencial para decidir la pertinencia de las Q_i es precisamente su capacidad para proporcionar respuestas praxeológicas R_i que contribuyan a elaborar la respuesta final $R^\heartsuit$. Todo REI presenta una estructura necesariamente abierta e indeterminada al inicio, puesto que es el propio proceso de estudio el que va delimitando los posibles caminos a seguir. Es también habitual que, a lo largo del REI, la cuestión generatriz Q evolucione y se transforme en una o varias nuevas cuestiones, por ejemplo cuando el avance del estudio requiere un nuevo planteamiento o reformulación del problema inicial, lo que marca otro grado de apertura de los REI. Debido a su estructura arborescente, en un REI, la búsqueda de una respuesta «pasa» por la reconstrucción o consideración de respuestas parciales R_i y, por ello, va más allá de la reconstrucción de PML. En consecuencia, cuando el proceso de estudio requiere la movilización de respuestas prestablecidas $R_i^\lozenge$, la construcción de la respuesta final requiere el «paso» por diferentes AEI. En cierto sentido, esta característica de los REI responde a las limitaciones previamente destacadas de las AEI puesto que las integra al tiempo que completa sus *funciones epistemológicas*.

La gestión y el desarrollo institucional de los REI requieren enriquecer las praxeologías didácticas basadas en la gestión de los momentos didácticos con nuevos «gestos» del estudio que se recogen bajo el nombre de «dialécticas». Destacaremos aquí en primer lugar la *dialéctica de los medios y los media* que hace referencia, por un lado, a la necesidad de disponer, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales R_i, de algunas respuestas prestablecidas $R_i^\lozenge$ accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los *media*. Como las respuestas $R_i^\lozenge$ son construcciones que se han elaborado para dar respuesta a cuestiones diferentes a las que se pueden plantear durante el proceso de estudio, deben ser, en cierta manera, «deconstruidas» y «reconstruidas» en función de las propias necesidades. Para y por ello se van a necesitar instrumentos —los *medios*— que permitan contrastar empíricamente y poner a prueba la validez de estas respuestas, así como generar nuevas preguntas para relanzar el estudio. Esta dialéctica es un elemento clave de la reforma epistemológico-didáctica que está en la base de los REI.

2. Modelización matemática y recorridos de estudio e investigación

La teoría antropológica de lo didáctico define la modelización matemática como un *proceso de reconstrucción y articulación de praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes* (Bolea *et al.* 2001, Fonseca *et al.* 2004, García 2005, García *et al.* 2006, Barquero 2009, Ruiz-Munzón 2010). Este proceso parte de cuestiones problemáticas que una comunidad de estudio se plantea y que constituyen la «razón de ser» de las praxeologías matemáticas que es necesario (re)construir a modo de respuesta. En consecuencia, la modelización matemática así interpretada constituye un *instrumento de articulación de la actividad matemática escolar* y, dada la *recursividad* y *reflexividad* de este proceso se hace imprescindible considerar la *modelización intramatemática* (esto es, la modelización matemática de sistemas matemáticos) como uno de los casos particulares importantes.

Por ello, la TAD postula que toda actividad matemática funcional puede interpretarse y describirse en términos de modelización matemática y, en consecuencia, enfatiza la importancia de enseñar matemáticas como herramienta de modelización.

Chevallard (1989) introduce un esquema simplificado del proceso de modelización elemental en el cual esencialmente intervienen (a) un *sistema* matemático o extramatemático y (b) un *modelo* (matemático) de este sistema, de manera que el proceso de modelización queda descrito en las siguientes tres etapas:

1. Definición del sistema a estudiar, precisando aquellos «aspectos» a estudiar y simbolizándolos mediante un conjunto de variables.
2. Construcción del modelo y definición de las relaciones entre las variables definidas. El modelo del sistema a estudiar es el conjunto de estas relaciones.
3. «Trabajo matemático» con el modelo obtenido para producir conocimiento relativo al sistema.

De forma paralela, Gascón (2004) propuso un esquema de cuatro estadios, cuya sucesión temporal no sigue en principio ninguna linealidad:

- Primer estadio: se caracteriza por la *delimitación del sistema* —considerando que cualquier ámbito de la realidad puede ser un sistema modelizable matemáticamente—. Esta construcción del sistema comporta la elección de ciertos aspectos del sistema que se simbolizan u operativizan mediante variables, formas geométricas, etc.
- Segundo estadio: se describen algunas de las posibles *relaciones* entre las componentes del sistema. En este estadio, al disponer del lenguaje propio del modelo, se podrá formular con mayor precisión los problemas que se habían enunciado anteriormente con carácter provisional.
- Tercer estadio: incluye *trabajo técnico* dentro del modelo, *interpretación de este trabajo y de los resultados dentro del sistema*. En este estadio se decide sobre el interés, la fecundidad y la adecuación del modelo, en la medida en que este permita generar conocimiento relativo al sistema que no sea sencillo de producir sin el modelo.
- Cuarto estadio: se pueden enunciar problemas nuevos cuya resolución permitirá responder cuestiones que difícilmente se podían formular sin la elaboración y el trabajo en el modelo. *Los problemas se pueden independizar del sistema inicial* dando lugar a nuevas praxeologías matemáticas, nuevas cuestiones y nuevos modelos.

Esta descripción del proceso de modelización matemática en términos de etapas y estadios difiere, en ciertos aspectos importantes, de la interpretación tradicionalmente aceptada por la comunidad investigadora del ámbito de la modelización matemática, que establece una distinción entre *lo matemático* y la *realidad percibida*. A modo de ejemplo, mostramos uno de los «ciclos de modelización» con mayor aceptación, el que proponen Blum & Leiβ (2007):

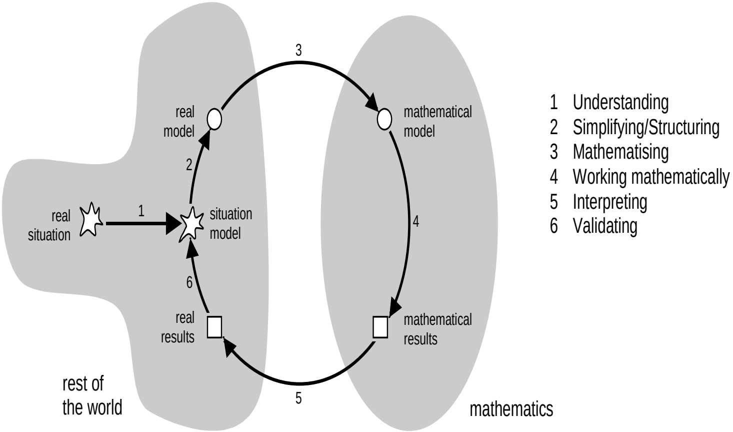


Figura 1.3. Representación de las fases en un proceso de modelización (Blum & Leiβ 2007).

En contraposición a los ciclos tradicionales, desde la TAD se propone por un lado, incluir la modelización intramatemática en la propia noción de «modelización» y, por otro, que la principal función del modelo no sea parecerse al sistema que modeliza, sino que aporte conocimientos sobre él, haciéndolo de la forma más eficaz y económica posible.

Un proceso de modelización no debe ser considerado un proceso «cerrado», en el sentido de que se parte de cuestiones que surgen en la realidad de un sistema extramatemático para el cual se crea un modelo matemático que permite aportar respuestas con las que finaliza el proceso. En este punto es importante remarcar que la problemática de la *adecuación* o *ajuste del modelo al sistema* supone debatir su validez y esta es una tarea que se sitúa en el corazón de la actividad de modelización. Esta problemática nos va a llevar a realizar diversas idas y venidas en el ciclo de modelización a la vez que la construcción, el estudio del ajuste y la comparación de sucesivos modelos y modelos de los modelos cada vez más complejos. En todo proceso de modelización aparecen diferentes modelos —cada vez más matematizados— y diferentes modelos sucesivos que son progresivamente construidos e integrados en los sistemas anteriores, generando nuevas cuestiones problemáticas que provocan la necesidad de seguir con el proceso de modelización.

Las diferentes idas y venidas entre el sistema a modelizar y el modelo de este sistema matematizan el sistema progresivamente lo que conduce a considerar *modelos de* *modelos* del sistema inicial (Serrano, Bosch & Gascón 2010). De esta forma se muestra que la modelización intramatemática es una etapa necesaria en cualquier proceso de modelización extramatemática, y también que, el proceso de modelización es un proceso continuo y progresivo cuyo motor se encuentra en el cuestionamiento constante de la adecuación del modelo al sistema y de su capacidad para dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van apareciendo a lo largo del proceso de estudio.

La ausencia de un debate sobre la adecuación del modelo al sistema que se propone modelizar y de una evaluación crítica del tipo de conocimientos que los sucesivos modelos permiten construir, convierte la enseñanza de la actividad de modelización en una enseñanza «monumentalista» de los principales modelos utilizados y de sus formas de utilización. Así, el proceso de escolarización de la modelización matemática ha acabado haciendo parecer «naturales» y no cuestionables la mayoría de los modelos que viven en las instituciones escolares.

Diferentes proyectos europeos[6] sobre la enseñanza de la modelización ponen en evidencia la existencia de obstáculos importantes para la difusión de dispositivos de enseñanza de la modelización matemática como actividad normalizada. Por ello se hace necesario determinar estos obstáculos y las condiciones requeridas para hacer posible dicha difusión, lo que nos conduce a plantear el *problema de la ecología de los REI*.

El análisis de la *epistemología espontánea del profesorado* que está fuertemente condicionada por el *modelo epistemológico dominante* en las instituciones docentes y el *modelo pedagógico dominante* sustentado en él, constituyen aspectos importantes del estudio de esta ecología (Barquero 2009). En particular, dicho análisis ecológico permite explicar el predominio del paradigma *monumentalista* en los sistemas de enseñanza actuales y las vías posibles para su evolución hacia el paradigma del *cuestionamiento del mundo* (Chevallard 2005b y 2010a).

Para introducir en el aula este proceso de matematización, la TAD propone utilizar los REI como dispositivo didáctico. Como ya hemos dicho, un REI viene generado por el estudio de una cuestión viva con fuerte poder generador, capaz de plantear un gran

[6] LEMA200609, COMPASS200911 y PRIMAS201013.

número de *cuestiones derivadas*. El estudio de dichas cuestiones conduce a la construcción de *respuestas provisionales* que delimitarán el mapa de los posibles recorridos y sus límites. Se generará así una cadena de cuestiones y respuestas que se desarrollan en una dialéctica compleja. Los REI recuperan así la relación genuina entre cuestiones y respuestas que está en el origen de la construcción de todo conocimiento científico y, en particular, de la actividad de modelización. De entre las características de los REI directamente relacionadas con la modelización matemática destacamos las siguientes (Barquero 2009):

- Permiten que la modelización matemática tenga un gran protagonismo a lo largo del proceso de estudio, explicitando y resaltando en cada paso su papel esencial como *herramienta de construcción de conocimientos*.
- Provocan una transformación notable de los objetivos y de los *dispositivos de evaluación* centrándolos en el proceso de modelización como totalidad más que en los productos finales resultantes de dicha actividad.
- Permiten explicitar, cristalizar, institucionalizar y evaluar el propio proceso de modelización, lo que posibilita que el proceso de estudio tenga una cierta continuidad en el tiempo y rompa con la atomización de las cuestiones matemáticas que se tratan, superando así el fenómeno de la *desarticulación de la matemática escolar*.
- Posibilitan el *cuestionamiento tecnológico* de los modelos que se van construyendo, que es el motor del proceso de estudio al provocar la necesidad de reestructurar, modificar, corregir e interpretar los modelos estudiados mediante la progresiva ampliación de las hipótesis sobre el sistema y la correlativa construcción de otros modelos más amplios y complejos.

Por todo ello, los REI se presentan como unos nuevos dispositivos didácticos, muy flexibles, que pueden ayudar a superar algunas de las *restricciones transpositivas* que dificultan enormemente y casi impiden la «vida» normalizada de la modelización matemática en los actuales sistemas de enseñanza.

3. Antecedentes del problema de investigación

3.1. Discontinuidades en el paso de Secundaria a la Universidad

La problemática inicial que dio origen al presente trabajo de investigación surge del problema abordado por Cecilio Fonseca (2004) sobre las *discontinuidades matemáticas y didácticas* en el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. A partir de un estudio empírico con una muestra de más de 500 estudiantes recién ingresados en la universidad, contrastado con un análisis detallado de las principales praxeologías matemáticas que aparecen en los libros de texto de secundaria, Fonseca pone en evidencia el carácter «relativamente incompleto» de dichas praxeologías. En particular, contrasta las conjeturas siguientes (Bosch, Fonseca & Gascón 2004, pp. 220-226):

> **Conjetura *S*:** En secundaria, el estudio de las praxeologías matemáticas se centra en el bloque técnico-práctico [T/τ], siendo muy poca la incidencia del otro bloque, el tecnológico-teórico [θ/Θ] sobre la actividad matemática que se realiza efectivamente. Esta separación funcional entre ambos bloques se pone de manifiesto, en particular, en la ausencia de todo tipo de *cuestionamiento tecnológico de los tipos de tareas y de las técnicas matemáticas*. Así, por ejemplo, no se cuestiona hasta a qué punto están justificadas las técnicas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporcionan estas técnicas, ni su alcance o dominio de validez, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada, su eficacia o economía, ni sus relaciones con otras técnicas, sus limitaciones ni las posibles modificaciones que podrían sufrir estas técnicas para aumentar su eficacia en la realización de ciertas tareas. En resumen, la actividad matemática que se lleva a cabo en secundaria es esencialmente *práctico-técnica* y raramente se consigue el *nivel tecnológico*. Como consecuencia, las praxeologías que se estudian en secundaria son *puntuales*, muy *rígidas y aisladas* (o *poco coordinadas* entre sí), lo que *dificulta*, e incluso *impide*, que se puedan reconstruir praxeologías relativamente completas.
>
> **Conjetura *S-U*:** El tránsito de Secundaria a Universidad es un momento especialmente delicado del proceso global de estudio de las matemáticas y, por tanto, constituye un aspecto importante y posiblemente prototípico del problema de *la articulación del currículum* de matemáticas. Hemos postulado que las praxeologías matemáticas que se estudien en secundaria son *puntuales*, muy *rígidas y aisladas*, lo que *dificulta* enormemente que se reconstruyan efectivamente PML relativamente completas. En la universidad, no obstante, se da por hecho que las PML que integran las PMR (propuestas para ser estudiadas en la universidad) cumplen en un grado relativamente alto las condiciones PML1–PML7. Este malentendido entre ambas instituciones perpetúa la ausencia institucional de los procesos de reconstrucción de PML relativamente completas y constituye un importante *obstáculo de origen didáctico* que provoca graves disfunciones en el principio del estudio de las matemáticas en la universidad. Este obstáculo es especialmente importante debido a que el tipo de actividad matemática que se requiere para reconstruir una PML es, tal como hemos

descrito anteriormente mediante las propiedades M1–M6, imprescindible para poner en marcha de manera integrada *todas las dimensiones o momentos de la actividad matemática*.

Precisamente en el paso de Secundaria a Universidad, en el momento del inicio de esta memoria se estaba consolidando en España un fenómeno que se había iniciado unos pocos años antes, coincidiendo con la llegada a la universidad de las generaciones de la reforma educativa de la LOGSE y que dio origen al problema abordado en el trabajo de investigación para optar al diploma de estudios avanzados (Serrano 2007). Este fenómeno —que sigue vigente en la mayoría de las universidades españolas— se materializa en la oferta de cursos —llamados «propedéuticos», «cero», «de nivelación», etc.— que la mayoría de universidades ofrecen a los nuevos estudiantes con el objetivo inicial de facilitar el tránsito entre las dos instituciones. Su evolución desde las primeras experimentaciones hasta la actualidad será tratado ampliamente en el capítulo tres de esta memoria, junto con la propuesta didáctica de un curso fundamentado en la TAD.

3.2. La ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria

La segunda gran línea de investigación en la que se inscribe esta memoria proviene de los trabajos de Berta Barquero (2009) y Barquero *et al.* (2010 y 2011) sobre las condiciones que facilitan y las restricciones que dificultan que las matemáticas puedan introducirse como herramienta de modelización en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. Utilizando los recorridos de estudio e investigación como dispositivo didáctico experimental, B. Barquero pone en evidencia dos fenómenos:

- El papel efectivo de los REI como dispositivo para hacer vivir la matemática como herramienta de modelización, articular y dar funcionalidad a los contenidos matemáticos de un primer curso universitario.
- Las dificultades que surgen de su puesta en funcionamiento en la universidad, es decir, las restricciones institucionales:
  - A nivel de la *sociedad*: la novedad del dispositivo y «choque» con el «aplicacionismo» imperante: no se cree que los estudiantes de primer curso puedan realizar un trabajo matemático productivo y novedoso.
  - A nivel *escolar*: la necesidad de un dispositivo específico fuera de las horas de clase «normales» pero evaluado dentro de la asignatura, con sesiones más largas, posibilidad de trabajo en grupo, disponibilidad de ordenadores, etc.

- A nivel *pedagógico* y *didáctico*: los cambios en el contrato didáctico: nuevas responsabilidades de los alumnos, pérdida por parte del profesor de algunas responsabilidades y asunción de otras, carácter abierto del recorrido.
- A nivel *didáctico*: la necesidad de articular el dispositivo con las clases de teoría y problemas, y el cambio que supone en estos antiguos dispositivos, que adquieren una nueva función al subordinarse al REI.
- A nivel *matemático*: la necesidad de infraestructuras matemáticas apropiadas para tener un soporte sobre el que lanzar el estudio.

Sin embargo, estas dificultades se atenúan progresivamente cuando el dispositivo se pone en marcha durante algunos cursos sucesivos.

4. Formulación del problema de investigación

En base a lo anterior y de una forma muy simplificada, podríamos decir que nuestro problema de investigación tiene un núcleo inicial centrado en el estudio de las *discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* en el caso de las ciencias económicas. Este estudio aborda el análisis de la respuesta institucional a este fenómeno (que se materializa en los denominados cursos «cero» o «propedéuticos»), proponiendo al mismo tiempo el diseño y experimentación de una respuesta alternativa basada en las propuestas formuladas en trabajos anteriores en el ámbito de la TAD y, en particular, en Fonseca (2004). Este primer núcleo de la problemática deberá desarrollarse ampliando el ámbito institucional en el que se sitúa, para abarcar plenamente las instituciones docentes (Secundaria y Universidad) entre las que se producen las discontinuidades citadas. Emergerá así un segundo núcleo de la problemática centrado en la enseñanza universitaria de las matemáticas para las ciencias económicas y empresariales, especialmente en el papel que juega en esta enseñanza la modelización matemática de sistemas económicos y empresariales. Para llevar a cabo este estudio tendremos muy en cuenta los resultados obtenidos en el ámbito de la TAD en relación a la dimensión *ecológica del problema de la modelización matemática* (Gascón 2011) y, muy especialmente, el trabajo de Berta Barquero (2009) sobre los *recorridos de estudio e investigación*.

Dado que la formulación de un problema de investigación didáctico requiere de cierto grado de precisión, describiremos a continuación de manera provisional las principales cuestiones que forman parte del citado problema. Dichas cuestiones irán acompañadas de la formulación de *conjeturas* que constituyen respuestas tentativas y provisionales a las cuestiones propuestas y que, en la medida de lo posible, se pretenden contrastar empíricamente a lo largo de la investigación.

El problema de las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad, unido a la respuesta institucional espontánea de las instituciones universitarias, constituye, como hemos dicho, el primer núcleo de nuestro problema de investigación. En relación a este primer núcleo, nos planteamos inicialmente las siguientes cuestiones y sub-cuestiones:

Q_1: *¿Cómo se puede describir e interpretar la respuesta institucional espontánea, que se materializa mediante los «cursos cero» de matemáticas, al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad?*

> **Q_{11}**: ¿Qué características tienen los dispositivos didácticos que han sido creados en las universidades españolas para facilitar el tránsito de los alumnos de Secundaria a la Universidad? ¿Cuál parece ser la fundamentación matemático-didáctica (más o menos explícita) de dichos dispositivos?
> **Q_{12}**: ¿En qué medida estos dispositivos parecen apropiados para paliar las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad?

Conjetura 1. *Efectos de los cursos propedéuticos tradicionales en la transición Secundaria-Universidad*.

C1.1. Los cursos propedéuticos (o «cursos cero») se fundamentan (implícitamente) en modelos didácticos que, a lo sumo, toman en consideración dos de los *momentos didácticos* o dimensiones del proceso de estudio que propone la TAD, y se sustentan en un modelo epistemológico de las matemáticas esencialmente «*conceptualista*» y «*acumulativo*» (esto es, un modelo que interpreta el conocimiento matemático como una red de conceptos que puede ampliarse mediante la acumulación de nuevos conceptos y nuevas relaciones entre ellos).
C1.2. De acuerdo con los resultados de Fonseca (2004), estos cursos no contribuyen a paliar las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la

Universidad sino que, al contrario, podrían incluso agravar el aislamiento y la desarticulación de las praxeologías matemáticas que se estudian en secundaria.

Q_2: *¿Qué características diferenciales, en relación a la respuesta institucional espontánea, pueden presentar los «cursos cero» si se fundamentan en la teoría antropológica de lo didáctico?*

> **Q_{21}**: En un curso propedéutico diseñado en base al modelo epistemológico-didáctico que propone la TAD: ¿Qué dispositivos didácticos deben instaurarse? ¿Cuáles son las praxeologías matemáticas que se proponen para ser estudiadas? ¿Cómo se relacionan entre sí a lo largo del proceso de estudio? ¿Qué papel juega la modelización matemática?
>
> **Q_{22}**: ¿En qué medida los «cursos cero» diseñados en base a los criterios que propone la teoría antropológica de lo didáctico permiten paliar las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad?

Conjetura 2. *Efectos de los cursos propedéuticos basados en la TAD en la transición Secundaria-Universidad.*

C2.1. Postulamos, también siguiendo a Fonseca (2004), que los cursos propedéuticos diseñados y gestionados con la fundamentación didáctica de la TAD modifican sustancialmente el tipo de actividad matemática mediante el uso sistemático de la modelización matemática, favorecen la articulación de ciertas praxeologías matemáticas tradicionalmente atomizadas y, en consecuencia, disminuyen o suavizan algunas de las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad.

C2.2. Estos efectos deberán ser descritos con más precisión en función del curso «cero» en cuestión pero, en cualquier caso, postulamos que su incidencia será siempre muy limitada en relación al enorme problema de las discontinuidades citadas. Los «cursos cero», situados en un «limbo» entre la Secundaria y la Universidad, constituyen en todos los casos una respuesta puntual al citado problema y, como tal, completamente insuficiente.

En el capítulo tres de esta memoria se abordarán las cuestiones correspondientes a este primer núcleo de nuestro problema de investigación.

Si lo que se pretende es incidir sobre los factores que están en la base de las citadas discontinuidades, esto es, si se aspira a posibilitar que los estudiantes (en el tránsito de la Secundaria a la Universidad y más allá) estudien y reconstruyan praxeologías matemáticas locales relativamente completas mediante un trabajo sistemático de modelización matemática, será preciso ampliar el ámbito institucional de la problemática para abordar el problema general del papel de la modelización matemática en las instituciones escolares involucradas.

Por motivos que explicaremos en su momento, y que están relacionados con la eficacia potencial y la viabilidad de una investigación de este tipo, hemos restringido el estudio del problema de la enseñanza de las matemáticas a los primeros cursos de los grados de Administración y Dirección de Empresas (ADE) y Economía en la universidad. Este constituye el *segundo núcleo* de nuestro problema de investigación dónde planteamos las siguientes cuestiones:

Q_3: *¿Qué papel juegan y cuál podrían jugar las matemáticas en los primeros cursos universitarios de Economía y Empresa?*

> **Q_{31}**: ¿Cuál es el modelo epistemológico dominante de las matemáticas en las instituciones escolares responsables de la enseñanza universitaria de las ciencias económicas? En particular, ¿cómo se interpreta y cómo se describe en dichas instituciones la relación de las matemáticas con la economía y la empresa?
>
> **Q_{32}**: ¿Qué matemáticas se enseñan en los primeros cursos universitarios de economía y empresa y qué relación tienen con las matemáticas que se enseñan en el bachillerato?
>
> **Q_{33}**: ¿Qué papel juega la *modelización matemática de sistemas económicos* en la forma de interpretar la relación entre las matemáticas y la economía y cómo se plasma en la enseñanza universitarias de las ciencias económicas y empresariales?

Conjetura 3. «*Aplicacionismo*» *en las instituciones responsables de la enseñanza de las ciencias económicas y empresariales.*

C3.1. Extrapolando los resultados obtenidos por Barquero (2009), podemos postular que las matemáticas se presentan en las instituciones escolares (tanto en el bachillerato de ciencias sociales como en la enseñanza universitaria) con lógicas intramatemáticas y sin ninguna interacción con la economía ni la empresa, es decir, sin considerarse como una herramienta de modelización de sistemas económicos y empresariales. En las instituciones escolares responsables de la enseñanza de las ciencias económicas se asigna a las matemáticas un papel secundario que permite, a lo sumo, precisar y cuantificar algunos aspectos de los fenómenos económicos cuyo núcleo esencial, se supone implícitamente, puede ser construido y estudiado sin hacer ningún uso de las matemáticas.

C3.2. De forma análoga a lo que ocurre en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales, postulamos que la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de economía y empresa siguen lo que podríamos considerar como una «organización estándar» con contenidos de cálculo diferencial en una y varias variables, y de álgebra lineal elemental. Estos contenidos se estructuran *siguiendo la lógica de la construcción teórica de los conceptos* otorgando un papel secundario al uso de las matemáticas en economía.

C3.3. En las instituciones escolares (tanto en el bachillerato de ciencias sociales como en la enseñanza universitaria), se considera que las matemáticas no son de ninguna manera *constitutivas del conocimiento económico* ni necesarias para la resolución de problemas empresariales. Las matemáticas, una vez construidas, *se aplican* a las ciencias económicas sin «contaminarse» por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática económica a cuyo estudio contribuyen. Se supone que las matemáticas y la economía tienen una existencia y un desarrollo independientes. *La actividad de modelización se entiende así como una mera «aplicación»* del conocimiento matemático previamente construido o, en los casos más extremos, como una simple «ejemplificación» del uso de las herramientas matemáticas a ciertos sistemas económicos que, en ocasiones, se construyen artificialmente para que se ajusten a la utilización de las herramientas matemáticas que se quieren aplicar.

Q_4: *¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan que el estudio universitario de las matemáticas en las instituciones responsables de la enseñanza de las ciencias económicas y empresariales se organice en torno a la modelización matemática de sistemas económicos?*

Q_{41}: ¿Existen dispositivos didácticos capaces de posibilitar la vida normal de la modelización matemática de sistemas económicos y empresariales en las instituciones universitarias correspondientes?

Q_{42}: ¿Qué *condiciones* se deberían instaurar para que fuese posible integrar la modelización matemática de forma normalizada en los actuales sistemas de enseñanza universitarios de ciencias económicas y empresariales? En particular, ¿qué *infraestructura didáctica* se requiere para que la modelización matemática ocupe el núcleo del proceso de estudio universitario de las matemáticas en ciencias económicas y empresariales?

Q_{43}: ¿Qué *restricciones* dificultan y hasta impiden la vida de la modelización matemática de sistemas económicos en la enseñanza universitaria? ¿En qué niveles de la escala de codeterminación didáctica se sitúan estas restricciones? ¿En cuáles de estos niveles se podría actuar para atenuar o superar estas restricciones? En particular, ¿cómo incide el modelo epistemológico dominante y la relación que este propugna entre las matemáticas y las ciencias económicas y empresariales en la forma de organizar la enseñanza de la modelización matemática en las instituciones docentes universitarias? ¿De qué manera el modelo pedagógico dominante puede dificultar la vida normalizada de la modelización matemática en las instituciones docentes en cuestión?

Este conjunto de cuestiones puede considerarse como una formulación genérica de la *dimensión ecológica* del problema didáctico de la modelización matemática en el caso de la enseñanza universitaria de las ciencias económicas y empresariales. Las cuestiones que forman parte de esta dimensión del problema constituyen la problemática en torno al *por qué* la *relación institucional a la modelización matemática* en la institución didáctica que estamos considerando es como es y qué condiciones se requerirían para modificarla en una dirección determinada dentro del universo de lo posible.

Uno de los principios básicos del estudio realizado por la TAD de esta problemática ecológica puede formularse diciendo que las características de las praxeologías matemáticas escolares y de la forma de organizar su estudio en una institución determinada no pueden cambiarse como consecuencia exclusiva de la *voluntad ni de la formación de los agentes de las instituciones* en cuestión, sean estos profesores, autores de cualquier tipo de materiales escolares o autoridades educativas. En particular, las condiciones que la TAD propugna para hacer viable la modelización matemática no pueden imponerse de manera puramente *voluntarista* (Barquero 2009).

Aparece así una problemática *ecológica* de la enseñanza de la modelización matemática, esto es, el estudio de las restricciones que dificultan y las condiciones que se requieren para la integración de la modelización matemática en nuestros sistemas de enseñanza. Para llevar a cabo este análisis de la *ecología de la modelización matemática en los sistemas didácticos* deben utilizarse diversos materiales empíricos como, por ejemplo, los manuales, los textos oficiales, las actividades escolares y las respuestas de alumnos y profesores a determinados cuestionarios. Esto requiere *ampliar el espacio institucional reservado tradicionalmente a la didáctica de las matemáticas*, el del diseño y análisis de actividades docentes en el aula.

A partir de la investigación llevada a cabo por Berta Barquero (2009) sobre la integración de los REI en un primer curso universitario de matemáticas para las ciencias experimentales, y teniendo en cuenta la proximidad entre los dos tipos de estudio así como la especificidad de la relación de las matemáticas para la economía y empresa, podemos avanzar las siguientes conjeturas:

Conjetura 4.1. *Función de los recorridos de estudio e investigación (REI) para integrar la modelización matemática en las instituciones universitarias de enseñanza de ciencias económicas y empresariales.*

Los REI resultan ser un dispositivo didáctico apropiado para facilitar la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa.

Conjetura 4.2. *Viabilidad de los recorridos de estudio e investigación (REI) en las instituciones universitarias de enseñanza de ciencias económicas y empresariales.*

C4.2.1. Para que los REI como dispositivo didáctico se puedan llevar a cabo de forma normalizada en los estudios universitarios y permitan la integración de la modelización matemática en dichos estudios, no deben organizarse de forma aislada respecto de las asignaturas o materiales que conforman los estudios. Cuando los REI constituyen el núcleo en torno al cual se organizan los contenidos y actividades de las materias o asignaturas, incluyendo el proceso de evaluación de las mismas, entonces su funcionamiento es más adecuado y su «rendimiento» en términos de integración de la modelización matemática es mayor.
C4.2.2. Los REI requieren la elaboración específica de nuevos desarrollos o reorganizaciones de los contenidos matemáticos enseñados en torno a cuestiones problemáticas suficientemente generativas, y el correspondiente mapa de «posibles recorridos» para orientar su gestión didáctica. En el ámbito de la economía y empresa, existen cuestiones generativas cuyo mapa de posibles respuestas recubre la práctica totalidad de los programas de matemáticas de un primer curso universitario.
C4.2.3. Para que los REI puedan ser viables como dispositivo didáctico normalizado, se requieren cambios importantes en los contratos didácticos y pedagógicos universitarios actuales. Es posible actualmente introducir nuevas técnicas didácticas que favorezcan estos cambios al facilitar que alumnos y profesores asuman nuevas responsabilidades en la gestión del proceso de estudio, así como nuevas formas de compartir estas responsabilidades.

Conjetura 4.3. *Restricciones que inciden sobre la ecología de la modelización matemática en las instituciones universitarias de enseñanza de ciencias económicas y empresariales.*

C4.3.1. Si nos situamos en el nivel de la *disciplina enseñada*, en este caso las matemáticas, la principal restricción a la implementación de los REI la constituye la *ausencia de una infraestructura* matemática apropiada y, en particular, la preponderancia de la organización conceptualista de la matemática enseñada, que pone más énfasis en las nociones y lógica interna de las matemáticas que en los problemas que estas permiten resolver.
C4.3.2. En el nivel de la *organización didáctica* universitaria tradicional, los modelos didácticos dominantes basados en el «teoricismo» y el «tecnicismo» dificultan situar las

cuestiones problemáticas generadoras de los REI en el núcleo del programa de estudios, especialmente aquellas que surgen en el ámbito de la economía y empresa.

C4.3.3. Otra restricción importante a este nivel es la *ausencia de dispositivos didácticos* tradicionales en los que se fomenten aspectos de la actividad matemática esenciales en los REI: trabajo en grupo, formulación de problemas, redacción de informes, presentación oral de resultados, búsqueda de información, contraste empírico de conjeturas, planificación del trabajo, resolución de problemas durante un periodo largo de tiempo (semanas o meses).

C4.3.4. En el nivel de la *organización pedagógica* universitaria, el paradigma de la «visita de las obras» (en contraposición al del «cuestionamiento del mundo») junto con la epistemología dominante del «aplicacionismo» refuerzan la estructura estándar de los programas como una secuencia de temas para estudiar y dificultan su evolución hacia un conjunto de cuestiones para responder.

5. Metodología de la investigación

Es bien sabido que la metodología de cualquier investigación está fuertemente condicionada por el marco teórico que se utiliza para seleccionar y analizar los hechos empíricos que se toman en consideración, para construir los problemas que se abordan y para formular las respuestas que el proceso de investigación permite obtener. Dado que el presente trabajo se inscribe en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), la metodología de investigación que a continuación detallaremos en relación a las cuatro líneas de cuestionamiento que conforman nuestro problema de investigación, si bien se encuentra enmarcada dentro del dominio más amplio de la investigación educativa, tiene unos rasgos particulares propios de un enfoque que, tras 30 años de existencia, ha ido construyendo y depurando sus propios instrumentos metodológicos.

En particular, la metodología de investigación que propone y utiliza una teoría científica descansa, en última instancia, en los postulados básicos o asunciones de dicha teoría. En el caso de la TAD, la metodología de investigación debe ser coherente, entre otras cosas, con la forma particular de interpretar las matemáticas (el *modelo epistemológico general* de las matemáticas) y la manera de considerar el proceso de estudio de las mismas (el *modelo didáctico general*) que propone dicha teoría de forma explícita, modelo que, como hemos visto, se formula en términos de *praxeologías* u *organizaciones matemáticas y didácticas* (Chevallard 1999, 2005b, 2007). Surgen dos consecuencias importantes en relación a la metodología de la investigación. La primera es la necesidad de construir *modelos epistemológicos de referencia* (MER) propios para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos concretos y, más allá del sistema escolar, interpretar los *procesos de transposición didáctica* para entender las transformaciones que sufren los contenidos que se enseñan. La segunda corresponde a la utilización del *esquema herbartiano* o los *recorridos de estudio e investigación* (REI) como modelo didáctico general para la descripción, análisis y desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estos principios generales son los que se han aplicado en este trabajo de investigación, considerando en cada caso diferentes tipos de materiales empíricos como punto de apoyo para el contraste de las conjeturas avanzadas.

Tanto en el caso del problema de los «cursos cero» fundamentados en la TAD, como en el de los REI para primer curso de matemáticas de administración y dirección de empresas, la metodología seguida se inscribe dentro de lo que se conoce en didáctica de las matemáticas como la *ingeniería didáctica* (Artigue 1990, Brousseau 1998, Margolinas *et al.* 2011) y, más específicamente, el *análisis clínico* de los recorridos de estudio e investigación diseñados y experimentados desde la investigación didáctica (Chevallard 2011). En esta fase, la metodología contiene las siguientes etapas sin presuponer que están ordenadas cronológicamente en sentido estricto:

(a) *Diseño matemático.* Análisis a priori basado en el MER contextualizado que se materializa en un mapa de posibles *cuestiones* y posibles *respuestas* (que toman la forma de organizaciones matemáticas) a estas cuestiones, generando nuevas cuestiones. Es lo que designamos como *esqueleto matemático del REI*.

(b) *Diseño didáctico*. Construcción de las posibles secuencias de enseñanza, concreción de los dispositivos de estudio (medios y respuestas disponibles, formulación de la cuestión inicial, organización de los grupos de estudiantes, reparto de roles) y previsión de *outputs* por parte del grupo de alumnos. Es lo que designamos como *organización didáctica a priori.*

(c) *Experimentación y observación clínica*. Desarrollo efectivo del REI en el aula, gestionado por un profesor y, siempre que sea posible, con la presencia de un investigador-observador. Trabajo cooperativo regular con el profesor para consensuar la toma de decisiones y la gestión de nuevos dispositivos de estudio, si es preciso.

(d) *Selección de información* a partir del diario de sesiones del observador, apuntes de los alumnos, material docente, grabación de las sesiones, cuestionario final a los alumnos, entrevista con los alumnos y entrevista con el profesor.

(e) *Análisis y evaluación*. Análisis de la información recogida y evaluación del proceso en términos de organizaciones matemáticas movilizadas, momentos didácticos vividos, rol efectivamente desarrollado por el profesor y los alumnos (*topogénesis*), dialéctica de los medios y los media disponibles (*mesogénesis*) y gestión temporal del proceso (*cronogénesis*). Asimismo se evaluará el propio diseño del REI y su gestión en el aula en base a la adecuación entre la *organización didáctica a priori* y los gestos de ayuda al estudio puestos en práctica por el profesor.

(f) *Desarrollo*. Revisión y optimización de la propuesta de REI de cara a nuevas experimentaciones. Entre los criterios de optimización pueden figurar propuestas de modificación del MER en el que se sustenta el REI. Es lo que designamos como *organización didáctica a posteriori*.

En general, el problema de la *ecología de un proceso didáctico* contiene las cuestiones que indagan cuáles son las condiciones que se requieren para que este proceso se organice y funcione de forma normalizada en una institución docente y las que se requerirían para modificarlo en una dirección determinada, así como las restricciones que dificultan o incluso impiden determinados cambios potenciales. Para estudiar este problema es preciso tomar en consideración las restricciones y las condiciones que emanan de los distintos *niveles de codeterminación didáctica* ligados a la organización matemática concreta involucrada en el proceso (Chevallard 2001a, 2002a, 2002b). En el caso particular que nos ocupa, el análisis ecológico de los REI se centrará en los grandes tipos de restricciones que operan principalmente en tres niveles de codeterminación didáctica: el de la *disciplina*, el de la *pedagogía* y el de la *escuela*. Los resultados parciales obtenidos hasta el momento (Barquero 2009) sacan a relucir aspectos de las organizaciones pedagógicas, escolares e incluso sociales que la investigación didáctica no suele cuestionar pero que se revelan como verdaderos obstáculos para el desarrollo de procesos de estudio funcionales.

La metodología que se ha de llevar a cabo para materializar este análisis ecológico en una institución determinada está muy ligada a lo que Chevallard (2011) designa como el *análisis clínico de lo didáctico.* Este análisis, basado en las técnicas cualitativas de la investigación educativa, pretende, por una parte, observar los hechos didácticos que se producen en los sistemas docentes existentes tanto durante su funcionamiento habitual (Schubauer-Leoni & Leutenegger 2002) como cuando se introducen cambios didácticos controlados, así como explicar la viabilidad de dichos cambios. Se trata de un problema muy nuevo en didáctica de las matemáticas para el que habrá que elaborar nuevas metodologías de estudio partiendo de los resultados previos ya obtenidos por Wozniak (2005), Barquero (2009) y Ruiz-Munzón (2010).

En lo que se refiere al ámbito empírico en el que nos basamos para formular los problemas y contrastar las conjeturas avanzadas, la tabla siguiente resume el material utilizado para cada una de las cuestiones abordadas:

CUESTIÓN	**MATERIAL EMPÍRICO**	**TIPO DE ANÁLISIS**
Q1. Cursos propedéuticos «espontáneos» en las universidades españolas	- Programas de los cursos - Material profesor - Material alumnos - Observación de clases	Análisis clínico de dos casos: - Escuela universitaria de Estudios Empresariales (UAB) - Facultad de Ciencias (UAB)
Q2. Cursos propedéuticos fundamentados en la TAD	- Material profesor - Material alumnos - Diario de sesiones - Cuestionario a alumnos	Ingeniería didáctica: diseño, experimentación, análisis, evaluación y desarrollo de cursos basados en un MER sobre la modelización funcional.
Q3. Enseñanza de las matemáticas en primeros cursos universitarios de economía y empresa	- Programas de los cursos - Libros de texto universitarios - Exámenes 1r curso carrera - Exámenes selectividad	Análisis transpositivo de los programas, libros de texto y exámenes de primer curso universitario de economía y empresa, y del bachillerato social.
Q4. Función y ecología de los REI	- Material profesor - Material alumnos - Diario de sesiones - Cuestionario a alumnos - Entrevistas a alumnos - Entrevista a la profesora	Diseño, experimentación, análisis, evaluación y desarrollo de REI implementados durante 6 cursos académicos consecutivos.

De forma global, podemos considerar que el trabajo de investigación que presentamos se basa fundamentalmente en un estudio de caso que corresponde a la respuesta que aporta al problema de la enseñanza universitaria de las matemáticas en ciencias económicas y empresariales IQS School of Management durante los cursos académicos 2006/07 hasta 2010/11. Se asumen por tanto las condiciones en las que se sitúa este centro de formación, algunas particulares debidas a las características propias del centro (su localización, el pertenecer a una universidad privada, el contar entre su equipo docente a investigadores en didáctica de las matemáticas, etc.), otras más generales propias de la enseñanza universitaria española actual (planes de estudio, normativas legales, etc.) y de la enseñanza universitaria en ciencias de la administración (epistemología dominante tanto de las matemáticas como de las ciencias económicas y empresariales, pedagogía universitaria tradicional, etc.). Una vez fijadas estas condiciones, la investigación explora los márgenes de libertad que ofrece para la experimentación de nuevas organizaciones didácticas que rompen con la enseñanza tradicional de las matemáticas en este nivel educativo y permiten analizar la potencialidad de los *recorridos de estudio e investigación* como dispositivos viables y apropiados para una enseñanza funcional de las matemáticas entendidas como una herramienta de modelización de situaciones económicas y empresariales, al tiempo que permite estudiar las restricciones que afectan a estos nuevos dispositivos y que conjeturamos poseen un alcance general.

Capítulo 2. La enseñanza de las matemáticas para las ciencias económicas y sociales en España

1. Las matemáticas en la economía

En este segundo capítulo analizaremos las matemáticas que se enseñan actualmente en un primer curso universitario de economía y empresa en las universidades españolas, con el objetivo de construir una base empírica para empezar a responder la cuestión Q_3:

Q_3: *¿Qué papel juegan y cuál podrían jugar las matemáticas en los primeros cursos universitarios de economía y empresa?*

Q_{31}: ¿Cuál es el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en las instituciones escolares responsables de la enseñanza universitaria de las ciencias económicas? En particular, ¿cómo se interpreta y cómo se describe en dichas instituciones la relación de las matemáticas con la economía y la empresa?

Q_{32}: ¿Qué matemáticas se enseñan en los primeros cursos universitarios de economía y empresa y qué relación tienen con las matemáticas que se enseñan en el bachillerato?

Q_{33}: ¿Qué papel juega la *modelización matemática de sistemas económicos* en la forma de interpretar la relación entre las matemáticas y la economía y cómo se plasma en la enseñanza universitarias de las ciencias económicas y empresariales?

Este análisis no puede obviar un gran número de interrogantes relativos a la función y pertinencia de la formación matemática de los futuros economistas o empresarios: ¿Qué contenidos matemáticos se consideran necesarios en los estudios de economía o ADE[7]? ¿Con qué criterios se realiza esta selección? Los contenidos seleccionados, ¿qué relación tienen con la economía? ¿Cómo se establece esta relación? Y quizás el más relevante: ¿Es necesario enseñar matemáticas en las carreras de economía?

Creemos también adecuado plantearnos si la formación matemática con la que los futuros economistas llegan a la universidad es la apropiada. Eso nos va a hacer ampliar nuestro estudio para incluir también el bachillerato, lo cual abrirá otros interrogantes, como por ejemplo, ¿el currículum de la asignatura *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*, es el adecuado para la formación de los futuros economistas?, ¿cómo se decide dicho currículum?, ¿están mejor preparados —matemáticamente— aquellos alumnos que acceden a los grados de economía cursando la asignatura de *Matemáticas* del bachillerato científico y tecnológico?, y si es así, ¿qué sentido tiene hacer una separación de modalidades en el bachillerato?

Para dar respuesta a tantos interrogantes, no podemos limitar nuestra mirada a la situación actual, sino que debemos retrotraernos hasta las primeras relaciones entre matemáticas y ciencias económicas e ir siguiendo los encuentros y desencuentros a través de su evolución histórica, ya que ello nos permitirá responder a alguno de los *interrogantes* que nos hemos planteado. Para ello, deberemos profundizar en aspectos matemáticos y, simultáneamente, en el ámbito económico.

1.1. Breve incursión en la historia de las matemáticas en la economía

Sin pretender hacer un estudio exhaustivo, nos parece relevante situar los orígenes de la presencia de las matemáticas en la economía con el objetivo de hacer un análisis transpositivo de dicho papel, ya que ello nos permitirá entender la situación académica actual. Para dar cuenta del porqué los alumnos deben conocer ciertas matemáticas y no

---

[7] En lo que sigue, consideraremos de forma indistinta el papel de las matemáticas en economía y en ADE. Aunque la economía y las ciencias de la administración sean evidentemente distintas, las consideraremos similares en su relación con las matemáticas.

otras, analizaremos qué matemáticas han ido conformando las bases de la teoría económica actual.

La obra de Adam Smith, *An inquiry into the nature of the wealth of nations* (traducida al castellano como *La riqueza de las naciones*), publicada en 1776, representa el primer gran trabajo de economía política clásica y liberal, e hizo elevar a la categoría de «padre de la economía» a este gran pensador escocés. Dicha obra es una síntesis original de un gran número de elementos preexistentes en el pensamiento económico anterior. Pero lo que la hace pionera es el hecho que en ella se aplicaban, por primera vez, los principios de investigación científica, en un intento de construir una ciencia autónoma sobre los hechos económicos. La formación inicial de Smith era en el ámbito de la filosofía —fue profesor de lógica en la Universidad de Glasgow—, pero con una gran admiración hacia las matemáticas.

Contemporáneamente, otros pensadores ayudaron a asentar las bases de esta ciencia económica incipiente, entre ellos, Thomas Malthus y David Ricardo, cuyos trabajos sobre economía también introducían componentes matemáticos. Pero tenemos que esperar casi un siglo para encontrar las primeras relaciones explícitas entre la economía y las matemáticas. Así, podríamos situar el origen de dicha relación en la obra del matemático francés Antoine Augustine Cournot, *Les Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, publicada en 1838. La ambición de dicho autor fue la de elaborar una ciencia social con la misma dignidad epistemológica, el mismo rigor y la misma certeza que las ciencias de la naturaleza tenían en ese momento (Artaud 1993). Su principal aportación fue la formulación de la Ley de la Demanda. El trabajo de Cournot inaugura lo que se llamará más tarde la *economía matemática*.

En 1874, León Walras publica *Éléments d'èconomie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale*, en la cual encontramos la primera formulación sistemática de la teoría matemática del equilibrio económico general, lo que permite a la economía acceder a un estatus auténticamente científico.

A partir de la segunda guerra mundial, la matematización de la economía se hizo más evidente, con la aparición de múltiples trabajos de los economistas más relevantes del siglo veinte, como por ejemplo *Value and Capital* de Hicks (1939), *Foundations of Economic Analysis* de Samuelson (1947), *The Pure Theory of the structure of functional* *relationships* de Leontief (1947), *Equilibrium points in n-person games* de Nash (1950), *Theory of Values* de Debreu (1959), todos ellos reconocidos con el premio Nobel en economía.

En la actualidad nadie cuestiona que las matemáticas constituyan el lenguaje de la teoría económica. Sin ir más lejos, una de las universidades más reconocidas y prestigiosas a nivel mundial en el campo de la economía —que cuenta en su historia con más de ochenta premios Nobel entre sus estudiantes y profesores—, la University of Chicago, pone como requisito para cursar estudios de doctorado en el área de *Management Science/Operations Management* haber cursado al menos dos años de matemáticas a nivel de primer ciclo universitario[8].

1.2. La situación actual y el movimiento «post-autista»

Si nos centramos en la economía contemporánea, no podemos encontrar ningún sector de dicha ciencia que no contenga un mínimo contenido matemático. Podemos incluso decir que, hasta cierto punto, en muchos sectores el saber económico se fabrica con matemáticas. Sin embargo, es importante observar que el papel de las matemáticas en la economía suscita desavenencias entre los propios economistas, no sólo dentro de la comunidad científica sino también en el mundo académico. Uno de los casos con más repercusión a nivel mediático tuvo lugar en Francia en el año 2000, dónde más de un millar de estudiantes de ciencias económicas de diversos centros universitarios de París hicieron público un manifiesto contra «la enseñanza de una economía imaginaria, demasiado despegada de la realidad», dando origen al autodenominado *Movimiento post-autista*, en contraposición al encierro teórico en el que se considera que viven los economistas convencionales y ortodoxos.

El manifiesto original, del cual presentamos la traducción realizada por el mismo *movimiento*[9], se articula en torno a cuatro puntos que se detallan a continuación:

[8] http://www.chicagobooth.edu/phd/docs/guidebook2011_12final.pdf

9 http://www.autisme-economie.org/article148.html

1) ¡Salgamos de los mundos imaginarios!

La mayor parte de nosotros ha escogido la formación económica con el fin de adquirir una comprensión profunda de los fenómenos económicos a los cuales el ciudadano de hoy en día se encuentra confrontado. Ahora bien, la enseñanza tal como es expuesta, es decir en la mayor parte de los casos, la teoría neoclásica o enfoques derivados no corresponde generalmente a esa espera. En efecto, si la teoría se separa de manera legítima en un primer momento de las contingencias, raramente efectúa el necesario regreso a los hechos: la parte empírica (historia de los hechos, funcionamiento de las instituciones, estudio de los comportamientos o de la estrategia de los actores,...) es casi inexistente. Por lo demás, ese desfase de la enseñanza en relación a las realidades concretas plantea necesariamente un problema de adaptación para los que desean ser útiles a los actores económicos y sociales.

2) ¡No al uso descontrolado de las matemáticas!

El uso instrumental de las matemáticas parece necesario. Pero el recurso a la formalización matemática, cuando ya no es un instrumento sino que se convierte en un fin en sí mismo, conduce a una verdadera esquizofrenia en relación al mundo real. En ese sentido, la formalización permite construir fácilmente ejercicios, «hacer trabajar» modelos en los cuales lo importante es encontrar «el buen» resultado (es decir el resultado lógico en relación con las hipótesis de partida) para poder entregar un buen examen. Esto facilita la calificación y la selección, con una cobertura de cientificidad, pero no responde jamás a las cuestiones que nos planteamos sobre los debates económicos contemporáneos.

3) ¡Por un pluralismo de enfoques en economía!

Muchas veces el curso magistral no deja lugar a la reflexión. Entre todos los enfoques presentes, generalmente se nos presenta solo uno, el cual debe supuestamente explicar todo según un procedimiento puramente axiomático, como si se tratara de LA verdad económica. Nosotros no aceptamos ese dogmatismo. Queremos un pluralismo de explicaciones, adaptado a la complejidad de los objetos y a la incertidumbre que domina la mayor parte de las grandes cuestiones en economía (desempleo, desigualdades, lugar de las finanzas, ventajas y desventajas del libre cambio, etc.)

4) Llamado a los profesores: ¡despiértense antes de que sea demasiado tarde!

Sabemos muy bien que nuestros profesores están ellos mismos sujetos a ciertas restricciones. Pedimos, sin embargo, el apoyo de todos los que comprenden nuestras reivindicaciones y que desean un cambio. Si este no se realiza rápidamente, es grande el riesgo de que los estudiantes que ya han iniciado un movimiento de retirada deserten masivamente de una formación que ya no es interesante, ya que se encuentra cortada de las realidades y de los debates del mundo contemporáneo.

Esta carta abierta fue lanzada a finales de mayo del 2000 y a principios de julio de ese mismo año más de medio millar de estudiantes de licenciatura y doctorado franceses la habían firmado, transcendiendo incluso a nivel europeo (Hamburgo, Florencia, Londres o Barcelona, entre otras ciudades).

Un grupo de profesores franceses secundaron el manifiesto de los estudiantes, y entre sus reflexiones, encontramos las siguientes[10]:

> […] Reconocer la existencia y el papel de los paradigmas no debe servir como justificación para elevar murallas entre unos y otros, incuestionables desde fuera. Las ideas se deben confrontar y discutir. Pero no se puede hacer sobre la base de una representación «natural» o inmediata. No podemos, ni debemos, evitar el uso de las herramientas estadísticas y econométricas. Pero la evaluación crítica de un modelo no debe abordarse desde una base exclusivamente cuantitativa. Toda ley económica o teorema debe ser siempre evaluada por su relevancia y validez en el contexto en el que se aplica, sin importar cuán rigurosa sea desde el punto de vista formal o elevado su ajuste estadístico. También se deben tener en cuenta las instituciones, la historia, las realidades ambientales y geopolíticas, las estrategias de los actores y de los grupos, las dimensiones sociológicas, incluyendo las relaciones de género, así como un mayor número de asuntos epistemológicos. Sin embargo, estas dimensiones de la economía son cruelmente omitidas en la educación de nuestros estudiantes.
>
> La situación se podría mejorar introduciendo cursos especializados. Pero no es tanto un problema de añadir nuevas asignaturas, sino de unir las diferentes áreas de conocimiento en un mismo programa educativo.
>
> […] El hecho de que en la mayoría de los casos la enseñanza que se oferta esté limitada a las tesis neoclásicas es cuestionable también desde el punto de vista ético. De esta manera los estudiantes tienden a mantener, no sólo la falsa creencia de que la teoría neoclásica es la única corriente científica, sino también que «ciencia» es sólo un problema de axiomas y/o de modelización formalizada.
>
> Junto con los estudiantes, denunciamos la unión *naive* y abusiva que habitualmente se hace entre ciencia y el uso de las matemáticas. El debate sobre el estatus científico de las matemáticas no puede estar limitado al uso de las matemáticas. De hecho, limitar el debate a esos términos implica diluir a las personas y, prácticamente, evita que se planten los problemas reales y los asuntos de gran importancia. Éstos incluyen cuestionar el objeto y la naturaleza de la modelización en sí misma y reconsiderar cómo la economía se puede redirigir hacia una exploración de la realidad y alejarse de su objetivo actual basado en la resolución de problemas imaginarios.
>
> Dos puntos fundamentales en la educación universitaria deberían ser la diversidad de la licenciatura y la formación crítica del estudiante. Pero bajo el régimen neoclásico ninguno de los dos es posible, y a menudo el segundo punto es rechazado explícitamente. La insistencia en el formalismo matemático implica que la mayoría de los fenómenos económicos se encuentren fuera de los límites tanto para la investigación como para el currículo en economía. La indefendibilidad de estas restricciones significa que la existencia de pensamiento crítico entre los estudiantes se considera una grave amenaza. En las sociedades libres como la nuestra, esto es inaceptable.

---

10 http://www.economiacritica.net/?page_id=39

La crítica sobre el uso desmesurado de las matemáticas que aparece en el documento elaborado por los estudiantes post-autistas podría parecer, en una primera lectura, pertinente. De hecho, si ninguna de las asignaturas que cursarán a lo largo de la carrera las incorporan, creemos que tienen razón en sus demandas. Coincidimos con dicho movimiento en que de nada sirve estudiar conceptos matemáticos avanzados si en ningún momento de sus estudios se hace aplicación económica alguna.

La principal laguna que encontramos en esta reivindicación consiste en la ausencia de una propuesta de cambio cualitativo en la relación entre las matemáticas y la ciencia económica. Después de criticar, con razón, el uso del formalismo matemático de forma descontrolada, echamos en falta una propuesta de lo que los estudiantes y, sobre todo los profesores, consideran como un «uso razonable» de las matemáticas en las ciencias económicas.

2. Las matemáticas en los estudios de ciencias económicas en España

Una vez analizada muy brevemente la evolución histórica de la relación entre matemáticas y economía, en este apartado nos centraremos en la relación de ambas a nivel universitario del caso particular español, empezando por los orígenes académicos de dichos estudios y recorriendo su evolución hasta la actualidad.

2.1. Los inicios

Desde finales del siglo diecinueve, muchas voces ilustres españolas defendían la implantación de estudios económicos a nivel universitario en España como ya se estaba realizando en muchos otros países. Pero no es hasta el año 1943 cuando se crea en la Universidad de Madrid[11] la primera Facultad de Ciencias Políticas y Económicas (Fuentes Quintana 1999).

Las asignaturas que conformaron este primer curso fueron cinco: *Matemáticas para economistas, Introducción a la economía, Instituciones de derecho privado, Introducción a la filosofía y Geografía económica*. No nos ha sido posible encontrar el programa de la asignatura de matemáticas de este primer curso, pero a través del fondo

[11] Actual Universidad Complutense de Madrid.

bibliotecario de la Universidad Complutense de Madrid hemos podido acceder al programa utilizado a partir del curso 48/49, que corresponde al índice del libro *Matemática para Economistas – Curso general de Matemáticas con aplicaciones a la Economía,* del catedrático de Matemática Financiera de la Universidad de Madrid, Ángel Vegas Pérez (1948).

En el índice encontramos veinte capítulos, que detallamos a continuación:

I. Introducción: Método matemático. Definiciones matemáticas. Teoremas. Demostración matemática.
II. Teoría de números y magnitudes: Magnitudes escalares. Números reales.
III. Magnitudes vectoriales: Vectores. Operaciones con vectores. Números complejos. Operaciones.
IV. Análisis combinatorio: Análisis combinatorio. Determinantes
V. Sistemas de ecuaciones lineales: Ecuaciones. Aplicaciones de los determinantes a los sistemas de ecuaciones lineales.
VI. Teoría de límites: límite de sucesiones de números reales.
VII. Sistemas de representación.
VIII. Teoría de funciones: Funciones de una variable. Funciones continuas.
IX. Cálculo diferencial: Derivaciones de funciones de una sola variable. Derivación logarítmica. Aplicaciones a la teoría económica.
X. Aplicación del cálculo diferencial a la variación de funciones – Máximos y Mínimos.
XI. Derivación sucesiva. Fórmulas de Mac-Laurin y Taylor.
XII. Teoría en series: series en general. Series de términos positivos. Criterios de convergencia. Series alternadas.
XIII. Series funcionales. Series de potencias. Desarrollo en serie.
XIV. Funciones racionales.
XV. Investigación de los ceros de una función racional entera de coeficientes reales.
XVI. Geometría analítica plana: Ecuaciones de la recta. Tangente a una curva.
XVII. Cónicas. Forma cuadrática ternaria.
XVIII. Construcción de una curva.
XIX. Cálculo integral: Conceptos fundamentales. Cálculo de las integrales de funciones racionales, irracionales y transcendentes de una variable.
XX. Aplicaciones a la teoría económica: Aplicaciones de las funciones a la teoría económica. Funciones econométricas.

Hasta el final del tercer capítulo se trata de un manual estrictamente matemático tratado —como afirma el mismo autor en el prólogo— con «el mayor rigor posible, convencido de que la aplicación de las matemáticas a la investigación económica exige un establecimiento claro de conceptos». En este capítulo encontramos la siguiente observación:

> La vida real nos presenta la necesidad de emplear las magnitudes concretas, de operar con cantidades que nos representan objetos o seres de diversos órdenes, y así surgen los números concretos representándonos longitudes, volúmenes, pesos, velocidades, capitales, intereses, etc., etc. La Mecánica, la Física en general, la Ciencia Económica, tienen necesidad de su utilización.

Tenemos que ir varios capítulos más adelante para encontrar la primera referencia concreta a las aplicaciones de las matemáticas en economía, concretamente el noveno. En él, dentro del apartado de aplicaciones de la derivada, el autor introduce los conceptos de *tanto instantáneo de capitalización*, de *grado de marginalidad* y de *elasticidad*, concluyendo con un apartado que llama *Aplicaciones a la economía. Elasticidad de la demanda*.

En otros capítulos encontramos algunas referencias económicas, por ejemplo, en el décimo el autor introduce *beneficio máximo en el monopolio*, *coste unitario mínimo*, *valor actual máximo* y *grado de utilidad marginal*, el doceavo concluye con el apartado *Aplicaciones a la economía: Rentas perpetuas* y el treceavo concluye con el apartado *Aplicaciones a la teoría de tantos equivalentes de capitalización*, en el *XVI* encontramos el apartado *Aplicaciones a la teoría económica* y en el *XVII* se explica el *Problema de Schneider*.

Pero donde realmente este libro marca la diferencia con un manual estrictamente matemático es en el último capítulo en el que figura un tratamiento matemático de las más importantes funciones económicas. Así por ejemplo, se introducen *funciones marginales* y *medios*, relación entre la *función marginal* y la *función media*, *funciones de indiferencia*, *razón marginal de sustitución*, *punto de equilibrio*, *curvas de Engel*, *curva de Edgeworth*, *función de producción*, *función de coste de producción*, *funciones de utilidad*, *funciones de oferta y demanda*, *funciones de ingreso*, *funciones de gasto*, *ecuaciones del mercado*, *monopolio bilateral*, *curva de la concentración*, *curva logística*, *la teoría de la ocupación* y *el «multiplicador»*, *expansión y contracción del crédito bancario* o, la *dinámica de inflación*.

Como veremos más detalladamente en el próximo apartado, la mayoría de los temas que aparecen en este programa han ido desapareciendo de los programas universitarios actuales, seguramente debido a que siempre se ha primado ofrecer las herramientas «por si luego se necesitan», en vez de explicar los grandes problemas económicos y ver con que herramientas se solucionan. Al situar las funciones económicas al final de los temas, como una mera aplicación, lógicamente es lo primero que se suprime.

2.2. La situación actual

Si bien en los diez primeros años desde su comienzo solo existía una facultad en toda España donde se pudieran cursar estudios de economía, con el paso de los años fue aumentando la demanda de dichos estudios, lo que permitió ir abriendo facultades en todo el territorio español hasta superar las setenta actuales, siendo uno de los ámbitos más demandados por los estudiantes de nuevo ingreso.

Los estudios de economía han sufrido varias reformas universitarias desde su inicio. Nosotros nos centraremos en la situación actual, en la cual el sistema universitario español se encuentra integrado en el nuevo Espacio Europeo de Educación Superior; más concretamente analizaremos la asignatura de matemáticas de primer curso de cualquiera de los grados en el ámbito de la economía (administración y dirección de empresas, economía, empresariales, contabilidad y finanzas, etc.). Para ello, hemos seleccionado una amplia muestra de universidades españolas[12] y hemos revisado los programas que aparecen publicados en las respectivas páginas web de las universidades, con la intención de valorar los contenidos, las competencias y la bibliografía recomendada. En el anexo 2.1 se indican las direcciones de cada uno de ellos.

2.2.1 Los programas oficiales

Si consideramos la asignatura de matemáticas globalmente —sin tener en cuenta las diferentes divisiones que sufre por pertenecer a cuatrimestres diferentes[13]—, hemos podido constatar a partir de los programas que, mayoritariamente, los contenidos de las asignaturas de matemáticas son muy parecidos a los de un curso estándar de cualquier carrera científica[14]. La norma general parece apuntar a la división de la materia en tres bloques temáticos. Uno corresponde al estudio de funciones reales en una variable real,

12 Alcalá de Henares, Alfonso X el Sabio, Almería, Autónoma de Barcelona, Autónoma de Madrid, Barcelona, Carlos III, Complutense de Madrid, Europea de Madrid, Girona, Granada, Huelva, Internacional de Cataluña, Lleida, Oberta de Cataluña, Pompeu Fabra, Rey Juan Carlos, Ramón Llull, Rovira i Virgili y UNED.
13 Hay grados que ofertan una única asignatura de matemáticas, otros que ofertan dos y otros, tres. En la mayoría de los caso, las matemáticas se imparten en el primer curso académico.
14 Este análisis se puede encontrar ampliamente detallado en la tesis doctoral de Berta Barquero (2009).

el segundo al estudio de funciones reales en varias variables reales y el tercero al álgebra matricial. A continuación mostramos los epígrafes o temas que se encuentran más frecuentemente en los programas analizados:

- Funciones reales en una variable real:
    - Conceptos básicos
    - Límites
    - Continuidad
    - Funciones elementales
    - Derivabilidad
    - Integración

- Funciones reales en varias variables reales
    - Conceptos básicos
    - Límites
    - Continuidad
    - Curvas de nivel
    - Diferenciabilidad
    - Aproximaciones

- Álgebra matricial
    - Vectores
    - Matrices
    - Formas cuadráticas
    - Sistemas de ecuaciones lineales
    - Diagonalización

La mayor parte de los programas de grado analizados muestra una escasa o inexistente referencia a las posibles cuestiones económicas. En algunos casos se limitan a añadir al final de cada tema un apartado de «aplicaciones económicas», en otros no hay referencia alguna, y sólo unos pocos utilizan terminología económica. A continuación mostramos en una tabla algunos de estos últimos casos[15].

15 Extraídos directamente de las respectivas páginas web (anexo 2.1)

<table>
<tr><th>Universidad</th><th>CONTENIDO</th></tr>
<tr><td>Lleida</td><td>Matemáticas Empresariales – ADE
Tema 3: Algunas funciones de la Economía
Las funciones de demanda y oferta
Equilibrio de un mercado
Las funciones de ingreso, coste y beneficio
Las funciones de coste medio
Tema 4: Variación de una función. Aplicaciones a la Economía
Aplicación a las funciones económicas (oferta, demanda, ingreso, coste, beneficio, etc.)
Marginalismo económico y elasticidad
Tema 9: El modelo Input-Output de Leontief
Descripción de una tabla input-output, la matriz tecnológica.
Análisis input-output. El modelo estático de Leontief.</td></tr>
<tr><td>Barcelona</td><td>Matemáticas Empresariales II – ADE
Tema 2: Funciones Homogéneas
2.3. Aplicaciones económicas de las funciones homogéneas: los rendimientos a escala</td></tr>
<tr><td>Girona</td><td>Matemáticas II – ADE
4.Funciones Homogéneas
4.4 Elasticidades parciales
4.5 Las funciones de producción de Cobb-Douglas. Elasticidad de rendimiento.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rovira i Virgili</td><td>Matemáticas I – ECO
Tema 4. Función real de variable real
4.2 Derivada y elasticidad de una función</td></tr>
<tr><td>Matemáticas I I– ADE, ECO y CyF
Tema 2. Funciones de varias variables
2.3 Elasticidad parcial</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rey Juan Carlos I</td><td>Métodos matemáticos para la economía I – ECO
Tema 7. Derivadas. Análisis del comportamiento.
7.5 Valoraciones en el comportamiento de las funciones económicas. Valores marginales. Elasticidades.</td></tr>
<tr><td>Métodos matemáticos para la economía II – ECO
Tema 5. Ecuaciones diferenciales. Análisis dinámicos continuos
5.4 Aplicaciones a los análisis económicos dinámicos continuos.</td></tr>
<tr><td>Alcalá</td><td>Matemáticas empresariales II – ADE, CyF
Tema 7 Optimización
Aplicaciones a modelos económicos</td></tr>
<tr><td>Almería</td><td>Matemáticas – ECO
Tema 4. Sistemas de ecuaciones
4.3 Sistemas de Leontief (Input-output)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Granada</td><td>Matemáticas – ADE, ECO y CyF
Tema 2. Conceptos básicos sobre funciones de una variable
2.3 Funciones en economía: oferta, demanda, ingresos, costes, beneficios, utilidad
Tema 7. Diagonalización de matrices por semejanza
7.3 Interpretaciones y aplicaciones económicas</td></tr>
<tr><td>Matemáticas para la economía I – ECO
Tema 1. Nociones básicas de funciones de varias variables
Funciones de varias variables destacadas en economía: función de utilidad, función cuadrática de costes, función de producción
Tema 3. Cálculo diferencial para funciones de varias variables. Optimización sin restricciones
Aplicaciones a las economías de rendimientos crecientes, decrecientes y constantes a escala. Aplicaciones a la maximización de funciones de beneficios y minimización de funciones de coste.
Tema 4. Cálculo integral para funciones de varias variables
Aplicaciones económicas: trayectoria temporal de un factor. Cálculo de la utilidad neta. Cálculo del excedente del consumidor.
Tema 5. Ecuaciones diferenciales ordinarias
Modelos económicos: modelos clásicos, modelos de inversión y gasto público.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ADE: Administración y dirección de empresas; ECO: Economía; CyF: Contabilidad y finanzas</td></tr>
</table>

Tabla 2.1. Referencias económicas extraídas de programas de la asignatura de matemáticas en grados de ámbito económico.

Como B. Barquero (2009) pone en evidencia en su tesis doctoral, la ideología imperante en la enseñanza de las matemáticas en las facultades de Ciencias Experimentales (CCEE) es la que podríamos denominar de «aplicación de conocimientos prestablecidos»: lo primero, y más importante, es aprender a manipular las herramientas matemáticas y los modelos matemáticos (fijados de antemano) básicos y después ya se verá cómo aplicarlos en cada ámbito particular de trabajo. Los modelos matemáticos se «fabrican» a partir de las nociones, propiedades y teoremas de cada tema y, una vez construidos, de forma completamente independiente de cualquier sistema potencialmente modelizable, se buscan las posibles aplicaciones de estos modelos que, por tanto, nunca pueden ser modificados (ni, aún menos, originados y construidos) por las necesidades internas y las posibles evoluciones o ampliaciones de los sistemas que se pretende estudiar.

Esta misma interpretación se puede extraer del análisis de los programas revisados. De hecho, sólo en una pequeña minoría de los programas encontramos alguna mención a las aplicaciones concretas de las matemáticas en la economía. Estos estudios están muy lejos de una enseñanza «mixta», término que Y. Chevallard utiliza en el sentido de «buscar el contacto con el mundo, no tener miedo a mezclarse» con otras disciplinas ni, aún menos, con la «realidad» que estas disciplinas se proponen estudiar. A lo sumo, este mestizaje aparece en algunas actividades prácticas, como por ejemplo en la asignatura de Matemáticas I de los grados en *administración y dirección de empresas*, en *economía*, en *contabilidad y finanzas* y en *empresa y tecnología*, de la Universidad Autónoma de Barcelona, donde encontramos por ejemplo:

> **Tema 3. Funciones de varias variables. Representación gráfica y curvas de nivel.**
> Caso práctico: Funciones de producción, funciones de utilidad y funciones de salario. Funciones Cobb-Douglas, lineales, Leontief y casi-lineales.
> **Tema 6: Teorema de la función implícita y teorema de la función inversa.**
> Caso práctico: Obtención de la pendiente de la curva de nivel de diversas funciones de interés en el ámbito de la economía y la empresa. Ejercicios de estática comparativa en diversos modelos económicos básicos.
> **Tema 7: Optimización sin restricciones.**
> Caso práctico: Determinación de extremos y estudio de la concavidad y convexidad de diversas funciones de interés en el ámbito de la economía y la empresa.
> **Tema 8: Optimización con restricciones de igualdad**
> Caso práctico: Resolución de diversos problemas de optimización en el entorno de la economía y la empresa.

O en la asignatura de Matemáticas II de los mismos grados y misma universidad:

> **Tema 2. El mundo de las funciones y la economía.**
> Actividad supervisada: Las funciones como modelo de situaciones económicas: algunos ejemplos.
> **Tema 7: Optimización en una variable real.**
> Actividad supervisada: Resolución de problemas de optimización en la economía y la empresa.
> **Tema 8: Teoría de la integral.**
> Actividad supervisada: la integración en el ámbito de la economía.

Durante las *III Jornadas universitarias de innovación docente en Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa* que tuvieron lugar en julio de 2011 en Barcelona, tuvimos la ocasión de conversar directamente con profesores responsables de las asignaturas de matemáticas en distintos grados de economía de diferentes universidades catalanas sobre sus prácticas docentes. En concreto sobre el funcionamiento de clases, destacaremos varios aspectos que tienen que ver principalmente con un cambio en la organización. El más relevante quizás, es el aumento de tiempo que dedican en clase a la resolución de ejercicios que previamente se les ha facilitado y su posterior resolución presencial o en plataformas digitales. Esta actividad se realiza en algunos casos de forma individual pero va en aumento el trabajo en grupo. Otro aspecto que observamos es la importancia del uso del «ejemplo» para introducir conceptos.

Dos de los principales problemas con los que los profesores de estos grados en economía comentan son, por un lado, el bajo nivel académico con el que en general los alumnos llegan a la universidad, incrementándose los casos de alumnos que acceden sin ni siquiera haber cursado la asignatura de matemáticas en el bachillerato. El otro problema es la aversión de la mayoría de los alumnos hacia las matemáticas, que las asocian con ejercicios mecánicos sin espacio a la creatividad y sin ninguna relación con la economía.

Finalmente, para concluir con el apartado dedicado a los programas de las asignaturas, hay que mencionar un nuevo sub-apartado dedicado a las «competencias» —generales y específicas— que se ha introducido recientemente como exigencia formal (más que funcional) para complementar la descripción de los programas.

En dicho apartado, no encontramos prácticamente ninguna mención a las matemáticas. Hay alguna excepción. En algunos programas se mencionan en el apartado de competencias específicas que la asignatura de matemáticas debería conducir por ejemplo a «comprender el lenguaje matemático y saber explicar diferentes conceptos básicos a través del mismo» o «afianzar los conocimientos matemáticos previos y avanzar en nuevos conceptos, métodos y técnicas de análisis, profundizando en el rigor, razonamiento e intuición». En relación con el ámbito de la economía y empresa, solo aparecen descripciones muy generales, como «aplicar los conceptos matemáticos estudiados al planteamiento y resolución de problemas económicos», entre otros.

Pero en general las matemáticas aparecen separadas de la economía. De hecho, esta misma visión aparece en el Libro Blanco de Economía (Aneca 2005)[16], donde las matemáticas figuran como un «conocimiento soporte (básico)» al lado de la estadística y las tecnologías de proceso de la información empresarial.

2.2.2 Los libros de texto o de consulta

Otro indicador que hemos querido analizar es la bibliografía recomendada en los programas revisados. A continuación mostramos los libros que más veces hemos encontrado citados en estos programas, ordenados por la frecuencia con la que han aparecido:

Sydsaeter, K. & Hammond, P.J. (1996). *Matemáticas para el Análisis Económico.*

Larson, R. E., Hostetler, R. P. & Edwards, B. H. (2006). *Cálculo Vol. 1 y 2*.

Chiang, A. C. & Wainwright, K. (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*.

Balbás, A.; Gil, J. A.& Gutiérrez, F. (1989). *Análisis matemático para la Economía I y II.*

Alegre, P. *et al*. (1990).*Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales I y II*.

Cámara, A.; Garrido, R.& Tolmos, P. (2002). *Problemas Resueltos de Matemáticas para Economía y Empresa*.

Gutiérrez Valdeón, S. & Franco, A. (1997). *Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa*.

Blanco, S.; García, P. & Pozo del, E. (2002). *Matemáticas Empresariales I. Vol. 1 y 2.*

Barbolla, R. et al. (2001). *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la Economía.*

Stewart, J.(2001). *Calculo de una variable* Vol. I.

Sanz, P. & Vázquez, F. J. (1995). *Cuestiones de cálculo*.

[16] http://www.aneca.es/var/media/150292/libroblanco_economia_def.pdf (*pág*. 104)

Como podemos observar, aparecen tanto libros dirigidos a las matemáticas aplicadas a la economía como libros exclusivamente matemáticos. Salvo el volumen de Chiang (2006), el resto de los libros mantiene una estructura basada en la lógica de la construcción de los conceptos matemáticos y no en la lógica de los grandes tipos de problemas económicos. A modo de ejemplo presentamos los índices de los dos libros más citados en las bibliografías de los programas:

1. Introducción.
2. Funciones de una variable: introducción.
3. Polinomios, potencias y exponenciales.
4. Cálculo diferencial de una variable.
5. Más sobre derivación.
6. Límites, continuidad y series.
7. Consecuencias de la continuidad y de la derivabilidad.
8. Funciones exponenciales y logarítmicas.
9. Optimización en una variable.
10. Integración.
11. Otros temas de integración.
12. Álgebra lineal: vectores y matrices.
13. Determinantes y matrices inversas.
14. Otros temas de álgebra lineal.
15. Funciones de varias variables.
16. Técnicas de estadística comparativa.
17. Optimización en varias variables.
18. Optimización restringida.
19. Programación lineal.
20. Ecuaciones en diferencias.
21. Ecuaciones diferenciales.

Tabla 2.2. Índice del libro: *Matemáticas para el Análisis Económico* de Sydsaeter & Hammond

1 Límites y sus propiedades
2 Derivación
3 Aplicaciones de la derivada
4 Integración
5 Funciones logarítmica, exponencial y otras funciones trascendentes
6 Ecuaciones diferenciales
7 Aplicaciones de la integral
8 Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias
9 Series infinitas
10 Cónicas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares
11 Vectores y la geometría del espacio
12 Funciones vectoriales
13 Funciones de varias variables
14 Integración múltiple
15 Análisis vectorial

Tabla 2.3. Índice del libro: *Cálculo Vol 1* de Larson & Hostetler

Como se puede observar ambos libros tienen índices similares a pesar que el primero está dirigido a las *matemáticas aplicadas a la economía* y el segundo es un manual matemático sin ninguna vinculación con otra disciplina. En un análisis detallado del primero observamos que ninguno de los conceptos matemáticos introducidos viene motivado por una cuestión económica. Es más, las aplicaciones económicas aparecen muchas veces como ejemplos mostrativos de lo que se acaba de explicar unas pocas líneas antes y en algún capítulo aparece como último apartado uno dedicado exclusivamente a «aplicaciones a la economía». Tal como se lee en el prólogo, «el propósito de este libro es ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades matemáticas que necesitan para leer los artículos de economía menos técnicos, al menos, y así ser capaces de desempeñar una labor de economistas o de analistas financieros en el mundo contemporáneo. […] A veces damos importancia a lo económico no solamente para motivar un tema matemático, sino para ayudar a tener una intuición matemática. […] Sin embargo, es posible estudiar este libro antes de embarcarse en estudios de economía propiamente dichos.»

En cambio, el libro de *Chiang*, que la mayoría de programas de los grados de economía analizados cita —aunque prácticamente ninguna facultad utiliza como referente— presenta una estructura muy original donde los grandes tipos de problemas económicos son los que rigen la organización de los contenidos matemáticos. A continuación mostramos el índice reducido (el completo se encuentra en el anexo 2.2):

1. La naturaleza de la economía matemática
2. Modelos económicos
3. Análisis del equilibrio en economía
4. Modelos lineales y álgebra lineal
5. Modelos lineales y álgebra matricial (continuación)
6. Estática comparativa y el concepto de derivada
7. Reglas de diferenciación y su uso en estática comparativa
8. Análisis estático comparativo de modelos con funciones generales
9. Optimización: Una variedad especial del análisis de equilibrio
10. Funciones exponenciales y logarítmicas
11. El caso de más de una variable de la elección
12. Optimización con restricciones de igualdad
13. Dinámica económica y cálculo integral
14. Tiempo continuo: Ecuaciones diferenciales de primer orden

15. Ecuaciones diferenciales de orden superior
16. Tiempo discreto: Ecuaciones en diferencias de primer orden
17. Ecuaciones en diferencias de orden superior
18. Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias simultáneas
19. Programación lineal
20. Programación lineal (continuación)
21. Programación no lineal

Tabla 2.4. Índice de *Métodos Fundamentales de Economía Matemática* de Chiang

El contenido de los tres libros es muy parecido, pero mientras en los dos primeros se presentan conceptos matemáticos y luego sus aplicaciones, el libro de *Chiang* muestra problemas económicos que se resuelven con herramientas matemáticas. A modo de ejemplo, mostraremos como se introduce en los tres libros citados un mismo concepto: la derivada.

4. Cálculo diferencial de una variable

Un tema importante de las disciplinas científicas, incluyendo la economía, es el estudio de la velocidad de variación de las cantidades con el tiempo. Para calcular la posición futura de un planeta, para predecir el crecimiento de la población de una especia biológica, o para dar una estimación de la demanda futura de un bien, necesitamos información sobre la tasa de variación.

El concepto matemático que se usa para describir la tasa de variación es el de derivada, que es el concepto central del análisis matemático. En este capítulo se define la derivada de una función y se dan algunas reglas sencillas para calcularla. En el capítulo siguiente se dan otras reglas que permiten calcular las derivadas de funciones más complicadas.
Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) descubrieron, independientemente, la mayoría de esas reglas. Esto inició el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

4.1 Pendientes de curvas

Aunque en economía nos interesa usualmente la derivada como tasa de variación, comenzaremos este capítulo con una motivación geométrica del concepto. […]

Tabla 2.5. Introducción de la derivada en *Matemáticas para el Análisis Económico* de Sydsaeter & Hammond

Capítulo 2 – Derivación

Sección 2.1 – La derivada y el problema de la recta tangente

Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
Usar la definición de límite para calcular la derivada de una función.
Comprobar la relación entre derivabilidad y continuidad.

El problema de la recta tangente

El cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.
El problema de la recta tangente (sección 1.1 y esta sección)
El problema de la velocidad y la aceleración (secciones 2.2 y 2.3)
El problema de los máximos y los mínimos (sección 3.1)
El problema del área (secciones 1.1 y 4.2)

Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al cálculo.

En la sección 1.1 se hizo una breve introducción al problema de la recta tangente. Aunque Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1692-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales, la primera solución general se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton respecto a este problema procedía de su interés por la refracción de la luz y la óptica.

¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto *P* es la recta perpendicular al radio que pasa por *P* como se muestra en la figura 2.1.

Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto *P* si toca a la curva en *P* sin atravesarla. Tal definición seria correcta para la primera curva de la figura 2.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto *P*, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2.2.
En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto *P* se reduce al de calcular su pendiente en ese punto. Aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante***que pasa por *P* y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 2.3. Si $(c,f(c))$ es el punto de tangencia y $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de *f*, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{(c+\Delta x)-c} \Rightarrow m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente incremental o diferencial**. El denominador Δx es el **cambio** (o incremento) **en *x*** y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x)$
La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener aproximaciones más y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto *P* de tangencia, como se muestra en la figura 2.4

Definición de la recta tangente con pendiente *m*
Si *f* está definida en un intervalo abierto que contiene a *c* y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = m$$

Entonces, la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente *m* es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(c, \mathrm{f}(c))$.
[…]

Se ha llegado a un punto crucial en el estudio del cálculo. El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la **derivación**.
Definición de la derivada de una función
La derivada de *f* en *x* viene dada por $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, *f'* es una función de *x*.

Tabla 2.6. Introducción de la derivada en *Cálculo Volumen 1* de Larson & Hostetler

Cap. 6 – Estática comparativa y el concepto de derivada

6.1. La naturaleza de la estática comparativa

La estática comparativa, como su propio nombre sugiere, trata de la comparación de los diferentes estados de equilibrio que están asociados con diferentes conjuntos de valores de los parámetros y de las variables exógenas. Con tal motivo, siempre se empieza asumiendo un estado de equilibrio inicial dado. Por ejemplo, en el modelo de mercado aislado, tal equilibrio estaría representado por un precio determinado P y su correspondiente cantidad Q. Análogamente, en el modelo sencillo de renta nacional (3.23), el equilibrio inicial estaría especificado por una determinada Y y su correspondiente C. Ahora bien, si introducimos un cambio que desequilibre el modelo – mediante una variación en el valor de algún parámetro o de alguna variable exógena –, por supuesto el equilibrio inicial se vendrá abajo. Como resultado, las distintas variables endógenas deberán experimentar ciertos ajustes. Si se supone que puede definirse y alcanzarse un nuevo estado de equilibrio relacionado con los nuevos valores de los datos, la cuestión que se plantea en el análisis estático-comparativo es: ¿Cómo compararíamos el nuevo equilibrio con el anterior?

Conviene observar que en estática comparativa tampoco no hacemos caso del proceso de ajuste de las variables; simplemente comparamos el estado de equilibrio inicial (precambio) con el estado de equilibrio final (postcambio). De nuevo también excluimos la posibilidad de que el equilibrio sea inestable, porque suponemos que el nuevo equilibrio es alcanzable, tal como lo era el anterior.

Un análisis estático-comparativo puede ser de carácter o cualitativo o cuantitativo. Si por ejemplo, estamos interesados solo en la cuestión de si la renta de equilibrio *Y* crecerá o disminuirá cuando se incremente la inversión I_0, el análisis será cualitativo porque solo se considera cuál es la dirección del cambio. Pero si nos referimos a la magnitud del cambio en *Y* a resultas de un cambio en I_0 (es decir, la magnitud del multiplicador de la inversión), el análisis obviamente será cuantitativo. Sin embargo, al obtener una respuesta cuantitativa, automáticamente podemos identificar la dirección del cambio a partir de su signo algebraico. De aquí que el análisis cuantitativo siempre incluya el cualitativo.

Debe quedar claro, por tanto, que el problema a considerar es esencialmente el de hallar la tasa de cambio: tasa de cambio del valor de equilibrio de una variable endógena con respecto al cambio en un parámetro particular o variable exógena. Por esta razón, el concepto matemático de derivada toma un significado preponderante en estática comparativa, porque este concepto – el más fundamental de la rama de las matemáticas conocida como cálculo diferencial - ¡está directamente relacionado con la noción de tasa de cambio! Además, más adelante, encontraremos que el concepto derivada también es muy importante en los problemas de optimización.

Tabla 2.7. Introducción de la derivada en *Métodos Fundamentales de Economía Matemática* de Chiang

2.2.3. Los exámenes

Los programas no aportan una información suficientemente fiable sobre el tipo de actividades matemáticas que se realizan en el aula. En nuestra opinión, los exámenes propuestos pueden ser un buen indicador de lo que el profesor — como representante de la institución escolar— ha considerado esencial. Y por ello hemos revisado una amplia muestra de los exámenes realizados durante el curso académico 2010/11 en diferentes grados de economía de diferentes facultades españolas.

Si los programas nos mostraban una realidad similar a la que encontramos en carreras científicas, los exámenes vienen a confirmar esta situación. La mayor parte de los enunciados analizados nos muestra una estructura estándar en los que abundan problemas expresados en contextos económicos, donde se plantean cuestiones matemáticas y a lo sumo se propone en algún apartado alguna aplicación económica. A modo de ilustración mostramos el siguiente problema propuesto en el examen de la asignatura de Análisis matemático del grado en economía y finanzas de la Universidad Autónoma de Madrid, en junio del año 2011:

> 3. Un almacén de camisetas vende dos marcas competidoras, *A* y *B*. El propietario del almacén puede obtener ambas camisetas a un coste de 2 euros la unidad y calcula que si las camisetas tipo *A* se venden a x euros cada una y las de tipo B a y euros la unidad, los consumidores comprarán cada día $400 - 500x + 400y$ camisetas de tipo *A* y, $200 + 600x - 700y$ camisetas de tipo *B*. Se pide:
> (a) [0.5 puntos] Obtener la función que determina el beneficio diario del almacén en función de los precios x e y de cada tipo de camiseta.
> (b) [1 punto] ¿Qué precios debe fijar el propietario del almacén para obtener el máximo beneficio? ¿Cuántas camisetas de cada tipo se venderán diariamente? ¿Cuánto ganará el almacén?
> (c) [0.5 puntos] ¿Es la solución encontrada un máximo global?

Como se puede ver, los dos primeros apartados plantean situaciones aplicadas a la economía, pero la tercera es una cuestión matemática sin ninguna interpretación económica. La tónica general consiste en aprovechar los «contextos económicos» para plantear cuestiones matemáticas.

En el anexo 2.3 se presenta una recopilación de diferentes exámenes, cuya revisión nos permite concluir que, en la mayoría de los casos, no se requiere ninguna interpretación económica. Más bien, los problemas se presentan oportunamente *disfrazados de entornos económicos* para plantear cuestiones exclusivamente matemáticas. Cabe añadir que hemos encontrado muchos enunciados de exámenes en los que no se hace ninguna referencia económica y bien podrían pasar por enunciados de examen de cualquier asignatura de matemáticas de carreras científicas. En todo caso, las preguntas con contenido económico representan un porcentaje muy bajo en la nota global del examen.

3. Las matemáticas para las ciencias sociales en el bachillerato español

En el apartado anterior se ha visto cómo, mayoritariamente, las matemáticas que se estudian en los grados en economía no difieren mucho de las que se estudian en cualquier carrera científica y que su alejamiento de la realidad económica hace que esta asignatura no esté plenamente integrada en tales estudios. En esta sección, veremos que esta falta de adecuación es incluso más grave en el caso de los estudios de bachillerato.

Tal como hemos hecho en el caso de los estudios universitarios, empezaremos por un breve recorrido histórico de la formación económica en la enseñanza secundaria en España y sus relaciones con las matemáticas, para finalmente llegar al momento actual y ver en qué estado se encuentran estos estudios.

3.1. La formación económica en la historia de la enseñanza Secundaria española

A finales del siglo diecinueve, el pedagogo y fundador de la *Institución Libre de Enseñanza*[17] Francisco Giner de los Ríos fue pionero en la integración de la economía en la educación elemental. Él creía que facilitando conocimientos económicos a la población se favorecía una buena administración de los recursos del país. Así, en 1896, incorporó al programa de bachillerato de dicha institución una asignatura llamada *Principios de técnica agrícola, industrial y económica*, que incluía temas elementales de economía política. En el año 1938 una reforma[18] en el bachillerato eliminó esta asignatura del programa. No es hasta la introducción de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo[19] (LOGSE), en el año 1991, que se incorpora de nuevo la materia de Economía al bachillerato, concretamente en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Con esta reforma aparece también la asignatura *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* —que sustituye a la asignatura de *Matemáticas II* vigente hasta ese momento— que es la que, de forma natural, deberían cursar aquellos alumnos que quieren iniciar sus estudios universitarios en el área de economía.

17 Institución educativa privada fundada en 1876 por un grupo de catedráticos comprometidos en la renovación educativa, cultural y social de España que habían sido separados de la Universidad por defender la libertad de cátedra y negarse a ajustar sus enseñanzas a los dogmas oficiales en materia religiosa, política o moral. (http://www.fundacionginer.org/historia.htm)

18 Ley de Reforma de la Enseñanza Media de 20 de septiembre de 1938 - BOE de 23 de septiembre de 1938. (http://www.filosofia.org/mfa/fae938a.htm)

19 Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo. (http://www.boe.es/boe/dias/1990/10/04/pdfs/A28927-28942.pdf)

Sobre la adecuación de estas asignaturas con la realidad a la que se refieren, en el Libro Blanco de Economía (Aneca 2005) se recogen las siguientes reflexiones:

> La LOGSE corrigió parcialmente el déficit existente con la inclusión de la materia Economía en la modalidad de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, alejando de ella a los alumnos de las otras tres. Pero la ausencia de un itinerario más específico para la formación de futuros economistas revela el que constituye uno de los mayores problemas del diseño actual: la inadecuada formación en matemáticas de este Bachillerato respecto de la que se les va a exigir en la universidad.
>
> Junto a la notable diferencia entre los contenidos curriculares matemáticos de este itinerario y los de Ciencias y Ciencias de la Salud, hemos de considerar que los docentes de la asignatura tropiezan con el desinterés y la falta de base de una mayoría de alumnos que literalmente, huyen de las matemáticas. Desde luego que la Economía es una Ciencia Social, pero no cabe duda que necesita de un instrumental matemático mucho mayor que la Historia, la Geografía, la Psicología o el Derecho.
>
> Hasta el momento, para acceder a la Diplomatura de Empresariales o a las Licenciaturas de Dirección de Empresas o de Economía, no se exige haber superado ninguna modalidad específica de Bachillerato y basta con aprobar la selectividad. No es de extrañar que haya buenos estudiantes que fracasen al llegar a la universidad y como se constata con carácter general, en el primer curso sea muy común un elevado número de suspensos y no presentados en Matemáticas, constituyendo un enorme tapón que distorsiona toda evaluación referente a la calidad de la docencia[20].

Esta reflexión, propuesta por un grupo de reconocidos profesores de diferentes facultades españolas de Economía y Ciencias Empresariales, arroja una realidad bastante desalentadora, que va empeorando a medida que pasan los años sin que nadie le ponga remedio.

Más en general, en cuanto a la formación económica en la enseñanza secundaria española, en el Libro Blanco se afirma:

> […] Constituye un principio pedagógico fundamental considerar que han de ser las actividades cotidianas cercanas al alumno las que deben indicar la secuenciación conceptual de los contenidos que se ofrecen. Pese a ello, comprobamos como en ese nivel educativo [la ESO] y en la mayoría de opciones del Bachillerato permanecen ausentes componentes básicos para la formación del ciudadano, como los referentes al mercado, sus elementos y características; a los agentes económicos (economías domésticas, empresas y administraciones públicas) y sus interrelaciones; al significado de las macromagnitudes, de los presupuestos públicos, del ahorro, los impuestos, la política económica, etc. Por su significación especial, habría que destacar la función reguladora del Estado y su imprescindible papel en la redistribución de la renta.

---

[20] *Ibíd*. p.82.

> Por todo ello, son muchos los docentes que estiman conveniente la implantación en la oferta educativa del segundo ciclo de la ESO de una materia introductoria que ofrezca los conocimientos económicos esenciales. Esta asignatura formaría ciudadanos para ejercer un consumo responsable y sentaría las bases del espíritu emprendedor impulsor de una posible iniciativa empresarial, tan necesaria en nuestra sociedad (*Ibid*, p.81).

Durante la elaboración de esta memoria, el *Departament d'Ensenyament del Govern de la Generalitat de Catalunya* ha aprobado un plan que, buscando fomentar la iniciativa empresarial entre el alumnado de secundaria, introducirá en el currículum de cuarto de ESO una nueva asignatura: Orientación profesional e Iniciativa emprendedora, que los alumnos podrán escoger de manera optativa a partir del curso 2012/13[21].

Finalmente nos parece oportuno añadir otra reflexión que va en la misma línea, publicada por José M. Domínguez[22] y J. Felipe Foj[23] en el diario de economía *Cinco Días*:

> […] Desde hace años, muchas voces se han manifestado a favor de acabar con el confinamiento actual, abogando por generalizar las enseñanzas de economía al conjunto de modalidades del bachillerato. Son numerosas las razones que, desde nuestro punto de vista, avalan dicho planteamiento: la transcendencia de los aspectos económicos en la vida real y su necesaria asimilación para el ejercicio de una ciudadanía responsable, la relevancia creciente de las cuestiones económicas en las distintas facetas del conocimiento, así como sus evidentes repercusiones en todas las ocupaciones y sectores de actividad, en los que el alumno ya se desenvuelve como consumidor.
>
> En este contexto, no parece razonable que sea necesario tener que cursar estudios universitarios de la especialidad para poder tener una visión básica acerca del funcionamiento del sistema económico, de las relaciones comerciales internacionales, del papel de los impuestos, de la configuración de los servicios públicos y de los esquemas de prestaciones sociales, entre otras importantes cuestiones, todas ellas imprescindibles para forjarnos una idea adecuada de nuestros derechos y deberes como ciudadanos, ahorradores o prestatarios, la familiarización con los fundamentos económicos allana el terreno para unas relaciones sociales más sólidas, fluidas y transparentes[24].

---

[21] http://www.elperiodico.cat/ca/noticias/societat/iniciativa-empresarial-sera-una-materia-optativa-deso-1213296

[22] Catedrático de Economía aplicada de la Universidad de Málaga y vocal de la junta directiva de la Organización de Economistas de la Educación.

[23] Profesor de Economía del Instituto «El Palo» de Málaga y miembro de la Asociación Estatal de Docentes de Economía en Secundaria.

[24] 27 de febrero de 2007.

3.2. Los programas

Dada la diferencia existente entre las comunidades autónomas en España en cuanto a la programación (debida, entre otras cosas, a las exigencias derivadas del estudio de las diferentes lenguas oficiales), nos centraremos en lo que sigue en el caso del bachillerato catalán. Tal como queda recogido en el decreto 142/2008[25] de la comunidad autónoma de Catalunya bajo el marco de la Ley Orgánica de Educación[26] española, existen tres modalidades del bachillerato: artístico, científico-tecnológico y, humanístico y ciencias sociales, estructurado en materias comunes, en materias de modalidad y en materias optativas.

Los alumnos tienen que cursar, en el conjunto de los dos cursos del bachillerato, un mínimo de seis materias de modalidad, de las cuales al menos cinco tienen que ser de la modalidad escogida. Entre las materias de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales encontramos: *Economía*, *Economía de la empresa I y II*, y *Matemáticas aplicadas a les ciencias sociales I y II* [27]. Estas cinco materias tienen una evidente importancia para nuestro trabajo, ya que son la base con la que el futuro estudiante debería iniciar sus estudios de grado de cualquier área de economía. Por ello, hemos analizado las relaciones que se establecen en el decreto mencionado.

En el caso de la *Economía*, el decreto indica que esta materia tiene relación con las *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*, ya que requiere el conocimiento de la estadística descriptiva y la interpretación del cálculo de los parámetros más significativos, así como de las diferentes formas de representación gráfica como herramientas fundamentales para asegurar el análisis de datos. También comporta la comprensión de la idea de función y de su representación (especialmente por lo que se refiere a las curvas de demanda y oferta) y del sistema de ecuaciones relacionado con el precio y la cantidad de equilibrio del mercado. Entre sus contenidos encontramos:

---

[25] Decreto 142/2008, de 15 de julio, por el cual se establece la ordenación de las enseñanzas del bachillerato en Catalunya (http://www.gencat.cat/diari/5183/08190087.htm)

[26] Ley orgánica de educación, 2/2006, de 3 de mayo: (http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf)

[27] El resto de materias de modalidad son: Geografía, Griego I y II, Historia del arte, Historia del mundo contemporáneo, Latín I y II, Literatura universal, Literatura catalana y Literatura castellana.

- Resolución gráfica del modelo de competencia perfecta: la determinación del precio de equilibrio
- Identificación de los cambios que suponen desplazamientos de las curvas y sus consecuencias en el equilibrio
- Cálculo e interpretación de la elasticidad-precio.

El decreto establece explícitamente que la conexión con la materia de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* se da a través de las *progresiones* (un modelo para el estudio del interés simple y compuesto); de la *hoja de cálculo* (una herramienta para resolver problemas de matemáticas financieras); de la *representación gráfica de funciones* por medio del uso de programas informáticos; del *análisis de funciones* para extrapolar modelos de fenómenos sociales y económicos; de la *estadística descriptiva* (gestión, tratamiento e interpretación crítica de datos, gráficos y parámetros, y las diferentes fases y tareas de un trabajo estadístico); de las *distribuciones bidimensionales* (interpretación de fenómenos sociales y económicos en que intervienen dos variables), y de la *resolución de sistemas de ecuaciones* (interpretación de dos ecuaciones lineales aplicación del estudio local y global de una función a situaciones propias de las ciencias sociales y económicas).

Por otro lado, en la materia de *Economía de la empresa*, el decreto precisa que existen numerosas conexiones con los contenidos de las *matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* relacionadas con el análisis y tratamiento de datos que permiten la toma de decisiones. Más concretamente, en el primer curso estas conexiones vendrían dadas por la *estadística descriptiva* (gestión, tratamiento e interpretación crítica de datos, gráficos y parámetros); el *análisis de funciones* para extrapolar modelos de fenómenos sociales y económicos, y la *representación gráfica de funciones* (por medio del uso de programas informáticos). Y en el segundo curso, por el interés simple y compuesto; las anualidades de capitalización y amortización; la programación lineal, y los problemas de máximos y mínimos.

Como hemos podido observar, la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* presupone conexiones importantes con las tres asignaturas propiamente económicas ya desde primer curso del bachillerato, al menos de forma oficial en el currículum. El problema surge por la no obligatoriedad de cursar ninguna de estas cinco materias pudiéndose dar el caso paradójico que un alumno que inicia primer curso universitario de cualquier grado de economía no haya cursado ninguna de ellas.

Nos parece importante poner en evidencia la existencia de algunas incoherencias en los contenidos que marca el currículum. Por ejemplo, en la materia *Economía*, aparece un concepto muy importante utilizado en teoría económica, la *elasticidad* —que procede inicialmente del campo de la física— que se define como la variación porcentual de una variable en relación con otra variable. Se trata de un concepto fundamentado en la noción de derivada que en ningún momento se trabaja en la materia de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*.

Por otro lado, si comparamos el currículum de las asignaturas de *Matemáticas* —correspondiente a la modalidad de bachillerato científico-tecnológico— y de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*, observamos que cualquier alumno que haya cursado la primera estará mejor preparado para enfrentarse a la asignatura de matemáticas en estudios universitarios en economía, ya que sus contenidos son más afines a los seguidos en los estudios de economía (por ejemplo, en muchos programas analizados, el cálculo integral forma parte del temario de la universidad cuando en el currículum de bachillerato de ciencias sociales no consta).

A continuación mostramos una tabla comparativa, realizada a partir de los contenidos[28] de las asignaturas de *Matemáticas* y *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* de las dos modalidades de bachillerato (científico-tecnológico y humanístico-social) que aparecen en el decreto 142/2008, donde se han marcado tanto los contenidos comunes (en negrita) como las alusiones a la economía (en cursiva).

[28] No se ha tenido en cuenta el bloque de Probabilidad y Estadística por estar fuera del ámbito de este trabajo.

Primer curso	
Bachillerato Científico - Tecnológico	**Bachillerato Humanístico - Social**
Aritmética y Álgebra	
Clasificación y representación de los conjuntos numéricos: - Ampliación de los conjuntos numéricos de los naturales a los reales: problemas y ecuaciones que se pueden resolver en cada conjunto. - Representación de los números reales sobre la recta. - Los números complejos como solución de ecuaciones cuadráticas que no tienen raíces reales. Diferentes representaciones	
El cálculo con números decimales: notaciones**, aproximaciones y errores en función de la situación objeto del cálculo:** - La notación científica para trabajar con calculadora y/o ordenador, en contextos científicos. - Las aproximaciones y los errores en la medida y el cálculo. - **El cálculo con calculadora y ordenador.** - **Resolución de problemas que impliquen desigualdades con una incógnita.** - **El uso de los intervalos como una manera de expresar los resultados.**	**El cálculo con números decimales: aproximaciones y errores en función de la situación objeto del cálculo:** - Números racionales e irracionales. - Aproximaciones decimales en función de los contextos. - Errores absoluto y relativo. - **El cálculo con calculadora y ordenador.** - **Resolución de problemas que impliquen desigualdades con una incógnita.** - **El uso de los intervalos como una manera de expresar los resultados.**
El cálculo con polinomios: la transformación de expresiones algebraicas para aplicar al estudio de funciones: - **La simbología de los polinomios y sus operaciones.** - **Raíces.** - **Descomposición en factores.** - Algunos cálculos sencillos con fracciones algebraicas.	**El cálculo con polinomios: la transformación de expresiones algebraicas para aplicar al estudio de funciones:** - **La simbología de los polinomios y sus operaciones.** - **Raíces.** - **Descomposición en factores.**
Las progresiones: un modelo para el estudio del interés simple y del compuesto. El comportamiento en el infinito de una sucesión: un paso previo al estudio en una función: - Estudio de situaciones donde se presentan colecciones ordenadas de números. Reglas de recurrencia y términos generales. - **Las progresiones aritméticas y geométricas. Interés simple e interés compuesto.** - El comportamiento en el infinito en casos elementales. Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.	**Les progresiones: un modelo para el estudio del interés simple y el compuesto:** - Aumentos y disminuciones en porcentaje. - **Progresiones aritméticas y geométricas: interés simple e interés compuesto.** - *Tasa de interés anual equivalente (TAE). Interpretación de diferentes tipos de operaciones ofertadas por entidades financieras.*
	La hoja de cálculo: una herramienta para resolver problemas de matemática financiera: - *Anualidades de capitalización: planes de pensiones y de amortización: hipotecas y préstamos personales.* - *Construcción y uso de hojas de cálculo para hacer tablas de amortización.*
Análisis	
Estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos científicos, tecnológicos y **sociales:** - **Funciones a partir de tablas y gráficos. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones para la interpretación de fenómenos** científicos. - **Funciones a trozos. Una primera idea de continuidad, en contextos que comportan saltos.** La	**Estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos sociales** *y económicos* - **Funciones a partir de tablas y gráficos. Aspectos globales de una función. Las funciones en la interpretación de fenómenos** *sociales y económicos.* - **Funciones polinómicas de primer y segundo grado y de proporcionalidad inversa** *aplicadas a las ciencias sociales.* **Interpolación y extrapolación lineal.** - **Funciones definidas a trozos. Una primera idea de continuidad, en contextos que comporten saltos.**

función valor absoluto. - Las funciones de proporcionalidad inversa en fenómenos físicos. - Comportamiento asintótico. Estudio, con ordenador, de las funciones homográficas como translación de las funciones de proporcionalidad inversa. - **Situaciones que mantienen el tanto por uno de variación constante: modelos exponenciales.** - **Las propiedades de la función exponencial. El crecimiento exponencial frente a otros móldelos de crecimiento.** - **Concepto de logaritmo ligado a la resolución de ecuaciones exponenciales.** La función logarítmica: aplicación al estudio de fenómenos científicos o tecnológicos. Interpretación física y geométrica de les tasas de cambio en contextos científicos diversos: - Tasas medias de cambio. Aproximar e interpretar tasas instantáneas de cambio en modelos científicos. Cálculo gráfico de la pendiente de una curva en un punto a partir de la pendiente de la recta tangente: construcción gráfica de la función derivada. Cálculo analítico de derivadas por aproximación de pendientes de secantes. - Cálculo de funciones derivadas: derivadas de las funciones elementales, las derivadas y las operaciones con funciones. Derivadas sucesivas. Cálculo de la recta tangente a una curva en un punto: aproximación lineal a una curva. - Uso de calculadoras y/o programas informáticos que facilitan tanto el cálculo simbólico como la representación gráfica.	El modelo de crecimiento exponencial frente a los modelos lineales o cuadráticos: - **Situaciones que mantienen el tanto por uno de variación constante: modelos exponenciales. La función exponencial.** - **El crecimiento exponencial frente otros modelos de crecimiento.** - **Concepto y propiedades de los logaritmos ligados a la resolución de ecuaciones exponenciales.**
Geometría	
Las funciones circulares en el estudio de fenómenos periódicos y la trigonometría para resolver problemas mediante triangulación: - El ángulo como giro. Unidades de medida de ángulos. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Las funciones sinus, cosinus y tangente. El estudio, con ordenador, de las funciones trigonométricas bajo cambios de escala: período y amplitud. Aplicación al estudio de fenómenos periódicos. - Resolución gráfica y analítica de triángulos: los teoremas del seno y del coseno. Problemas geométricos que se pueden resolver por triangulación. Los procedimientos de cálculo en la topografía. Los vectores, una nueva herramienta para resolver problemas de geometría. Las cónicas en ámbitos no matemáticos: - Los vectores como manera de representar una magnitud y una dirección. Los vectores libres como translaciones en el plano. - Ecuaciones de la recta. Dirección y pendiente. Problemas de incidencia y paralelismo. Ángulos y distancias. Aplicación a la resolución de problemas geométricos. - Lugares geométricos: las cónicas. Las cónicas en el arte y la arquitectura.	

Segundo curso	
Bachillerato Científico-Tecnológico	**Bachillerato Social**
Álgebra lineal	**Álgebra lineal y geometría**
El lenguaje matricial como una herramienta para expresar y resolver problemas relacionados con la organización de datos - **Las matrices como herramienta** para resolver sistemas, representar algunas transformaciones geométricas, y en general, **para trabajar con datos estructurados en tablas.** - **Operaciones con matrices. Aplicación a contextos** reales. **Los sistemas lineales, una herramienta para plantear y resolver problemas** - Determinantes de orden 2 y 3. Rango de una matriz. Cálculo de la matriz inversa. - Discusión y **resolución de sistemas de ecuaciones lineales** (con un parámetro como máximo). Planteamiento de **problemas.**	**El lenguaje matricial como una herramienta para expresar y resolver problemas relacionados con la organización de datos** - **Las matrices como herramienta para trabajar con datos estructurados en tablas.** - **Operaciones con matrices. Aplicación a contextos** *de las ciencias sociales.* **Los sistemas lineales, una herramienta para plantear y resolver problemas:** - **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales (sin parámetros).** Método de Gauss. - **Problemas** con enunciado.
Geometría en el espacio	
La interpretación geométrica de los sistemas lineales con tres **incógnitas** - Vectores libres en el espacio. Dependencia e independencia lineal. - Ecuaciones del plano y de la recta. Posiciones relativas. **Interpretación geométrica de sistemas lineales con** tres **incógnitas.** El planteamiento y la resolución de problemas métricos en el espacio - Producto escalar. Perpendicularidad y ángulos. - Producto vectorial y mixto. Interpretación geométrica y aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes. - Cálculo de distancias.	**La interpretación geométrica de los sistemas de dos ecuaciones lineales** con dos **incógnitas** - Diversos usos de la simbología de los vectores en el plano. - Dirección y pendiente de las rectas expresadas en la forma $ax + by + c = 0$. **Interpretación geométrica de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**
	Programación lineal
	La modelización de situaciones que requieren sistemas de inecuaciones - Inecuaciones lineales de una y dos incógnitas. - Representación de una situación mediante un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Representación gráfica de la región factible. *La programación lineal bidimensional: un modelo para resolver problemas, frecuentemente ligados a la producción* - *La función objetivo. Máximos y/o mínimos en una región.* - *Optimización de una situación con la ayuda de la programación lineal. Interpretación de la solución según el contexto.*
Análisis	
La aplicación del estudio local y global de una función a situaciones geométricas, científicas y tecnológicas - Una aproximación al concepto de **límite de una función en un punto y en el infinito. Asíntotas verticales y horizontales.**	-Interpretación física y geométrica de las tasas de cambio y las asíntotas en situaciones relacionadas con las ciencias sociales - **Límites en el infinito y límites infinitos en un punto. Asíntotas horizontales y verticales** en las funciones racionales con un polinomio de primer

- Continuidad. Clasificación de los puntos de discontinuidad. - El teorema de Bolzano: un método para aproximar raíces. - Estudio, con ordenador, de los puntos de no derivabilidad de una función.	grado en el numerador y en el denominador y en funciones exponenciales. Interpretación de asíntotas en contextos no matemáticos. - Tasas medias de cambio. Aproximar e interpretar tasas instantáneas de cambio en modelos de las ciencias sociales y económicas que piden. Cálculo gráfico de la derivada de una curva en un punto a partir de la pendiente de la recta tangente. Construcción gráfica de la función derivada. Cálculo analítico de derivadas por aproximación de pendientes de secantes. - Cálculo de funciones derivadas: derivadas de las funciones elementales, las derivadas y las operaciones con funciones. Derivada de la compuesta de una función en casos sencillos. Cálculo de la recta tangente a una curva en un punto: aproximación lineal a una curva. La aplicación de el estudio local y global de una función a situaciones propias de las ciencias sociales y económicas
- **Estudio de funciones: dominio y recorrido, signo, puntos de corte con los ejes,** simetrías**, límites en el infinito, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos,** máximos y mínimos absolutos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión. - **Representaciones gráficas.** Aplicación a situaciones geométricas, científicas y tecnológicas. - **Uso de calculadores y/o programas informáticos que faciliten tanto el cálculo simbólico como la representación gráfica.** - **Problemas de optimización.**	- **Estudio (dominio, puntos de corte con los ejes, signo, límites en el infinito y asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos) y representación gráfica de funciones** polinómicas, homográficas y exponenciales sencillas que sean modelos de situaciones del ámbito de las ciencias sociales y económicas. - **Uso de programas informáticos i/o calculadoras gráficas para generar el gráfico de una función y estudiar las características.** - **Problemas de optimización** aplicados a las ciencias sociales y económicas.
El cálculo de áreas planas, una de las situaciones que requieren el cálculo integral - Antiderivadas o primitivas de una función. Cálculo de primitivas casi inmediatas que se pueden hacer directamente aplicando las dos reglas básicas del cálculo integral o con cambios de variable sencillos, y el método de integración por partes. - Introducción al concepto de integral definida a partir de la aproximación del cálculo del área bajo una curva. Aplicación al cálculo de áreas.	

Como se puede observar —incluso a simple vista—, existe un evidente desnivel respecto a la cantidad de contenidos de ambas materias. Analizándolos con más profundidad se observa que prácticamente todo el temario de la modalidad humanístico-social está incluido en el de la modalidad científico-técnica, que es mucho más extenso. Como ya hemos dicho, los contenidos de la materia de *Matemáticas* del bachillerato científico-tecnológico serían más apropiados para abordar un primer curso universitario de los grados de economía, con lo que nos encontramos ante una situación paradójica.

3.3. Los libros de texto

Otro de los indicadores empíricos que hemos analizado son los libros de texto de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* para segundo de bachillerato, que de forma mayoritaria se utilizan en Catalunya. Para ello, hemos revisado a fondo las últimas ediciones de los textos publicados por las principales editoriales[29] poniendo especial atención a las aplicaciones sobre la economía.

A pesar que el currículum es único para los estudiantes de segundo de bachillerato, los libros de texto de cada editorial eligen algunos temas que consideran más relevantes y omiten otros. El criterio que utilizan lo desconocemos, pero hemos podido constatar que en ningún índice se hace referencia a cuestiones o aplicaciones económicas o sociales. En ninguno de ellos hemos encontrado descrita la utilidad para la economía de cada uno de los contenidos, es decir la «razón de ser» de cada uno de los temas que aparecen. Sólo hay referencias *económicas* en algunos ejercicios que aparecen al final de cada tema, nunca como punto de partida para introducir una cuestión.

Parece más bien que los contenidos de la asignatura *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* se han diseñado *simplificando* el libro de segundo de bachillerato de la asignatura de matemáticas para la modalidad científico-tecnológica. Incluso encontramos bastantes ejercicios que están contextualizados en diferentes ámbitos de la química o la física en lugar de estarlo en situaciones económicas (o de otras ciencias sociales).

Para concluir este apartado, queremos mostrar que esta incoherencia no se limita al estado español sino que parece ser habitual en muchos otros países. Así, en el momento de la publicación del manifiesto post-autista que se ha mostrado al principio del capítulo, de los cuatro bachilleratos franceses —científico, económico, de letras y de artes— sólo el científico era tomado en consideración por las facultades de economía, en las que lo único importante era saber manejar bien los *modelos* para encontrar el «buen resultado, acorde con la hipótesis de partida». Para obtener el título de bachillerato, los alumnos del itinerario *económico*, debían responder a exámenes en los que se les preguntaba sobre «los efectos de la organización del trabajo sobre el

[29] McGrawHill, Santillana, Editex, Barcanova, Castellnou, Vicens Vives y Edebé.

crecimiento económico», «la relación entre progreso técnico y crecimiento a partir del análisis de Schumpeter» y «el desarrollo de la sociedad democrática y la igualdad de oportunidades a partir del análisis de Tocqueville». Una vez en la facultad, si conseguían ser admitidos —un alumno por cada veinte procedente del bachillerato científico—, este tipo de preguntas desaparecía cediendo el paso a retahílas de ecuaciones. «Hace más fácil el calificar y da a las clases apariencia de rigor científico aunque nunca responden a los grandes interrogantes económicos contemporáneos», dice el documento estudiantil.[30]

3.4. Los exámenes de acceso a la universidad

Si bien es cierto que el currículum es el mismo para todos los estudiantes de bachillerato, aquellos contenidos que el alumno acaba recibiendo, depende de muchos factores externos al propio currículum oficial —libros de texto utilizados, criterio del profesor, etc.—, y por ello es difícil analizarlo en su conjunto. Ahora bien, lo que es común para todos los estudiantes que quieren acceder a la universidad es el examen de acceso, y por ello, hemos querido también analizar los enunciados de dichas pruebas en la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*.

La estructura de los exámenes hasta el curso 2008/09 era la siguiente: se debían escoger tres cuestiones de cuatro propuestas, y un problema entre dos planteados. Cada cuestión valía dos puntos y los problemas, cuatro. A partir del curso 2009/10 la estructura cambia y se presentan seis cuestiones de las cuales se deben escoger cinco. Cada cuestión vale dos puntos.

Las variaciones de una convocatoria a otra las establece anualmente una comisión formada por profesores universitarios y profesores de secundaria de matemáticas que son los que deciden que contenidos tendrán una presencia *más probable* en las pruebas. Este hecho condiciona a los profesores de secundaria que, apremiados por el escaso tiempo de que se dispone en segundo de bachillerato, seleccionan los contenidos en función de lo que *es probable* que salga en las pruebas, omitiendo descaradamente aquellos cuya probabilidad es escasa, dando clara muestra que el segundo de

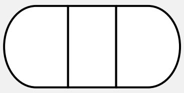
30 http://www.autisme-economie.org/sites/autisme-economie.org/IMG/article_PDF/Rebelin-de-los-alumnos-de_a150.pdf

bachillerato está exclusivamente orientado a las pruebas de acceso. Este hecho implica que la «razón de ser» de los contenidos matemáticos no exista, reforzando las hipótesis de Fonseca (2004) ya comentadas en esta memoria referidas al *aislamiento y rigidez de las organizaciones matemáticas escolares*, impidiendo así a los alumnos establecer conexiones entre los diferentes contenidos ya que no se explican «debido a que no saldrá en el examen» y limitándose a hacer ejercicios mecánicos de los tipos que pueden salir en la prueba de selectividad. Aunque en el currículum de segundo de bachillerato, se explicita en muchas ocasiones «aplicaciones a situaciones propias de las ciencias sociales y económicas»[31], bien por falta de tiempo o bien por estar excluidas de las pruebas de acceso, estas aplicaciones acaban desapareciendo del aula.

Una vez analizados todos los exámenes propuestos en las pruebas de acceso desde el curso 1999/00[32] hasta la actualidad en Catalunya, hemos observado un aumento progresivo de la presencia de «situaciones propias de las ciencias sociales y económicas». Pero se trata de una presencia contextual más que conceptual. Así, mientras hace unos años los enunciados de los problemas de las pruebas eran o bien exclusivamente matemáticos:

> **[Curso 2002/03, Serie 2, Junio, Problema 6]** Un triángulo rectángulo tiene el vértice A, correspondiente al ángulo recto, en el origen de coordenadas. Otro de sus vértices es el punto $B(2,4)$, y la hipotenusa tiene por ecuación la recta $x=2$. Calculad:
> a) Las ecuaciones de los lados AB y AC;
> b) El tercer vértice C;
> c) El área del triángulo.

o bien en contextos ajenos a las ciencias sociales:

> **[Curso 2003/04, Serie 1, Junio, Problema 6]** Se quiere construir una piscina que tenga por base un rectángulo y dos semicírculos adjuntos, tal y como se indica en la figura siguiente:
>
> 
>
> Sabiendo que el perímetro de la piscina tiene que ser de 30 m, calculad sus dimensiones para que la superficie sea máxima.

[31] *Cf. pp.*86-87.

[32] Recopilación de exámenes de los años 1999 a 2007: *Seletac. Exercicis de Selectivitat. Humanitats i Ciències Socials*. Barcelona : Ed. Vicens Vives, y recopilación de los años sucesivos a partir de la web del gobierno catalán: http://www.gencat.cat/economia/ur/ambits/universitats/acces/vies/pau/examens/index.html.

A medida que han ido pasando los años, esta tendencia está variando y es más común encontrar enunciados más propios de la asignatura:

[Curso 2008/09, Serie 4, Junio, Problema 6] El precio de coste de una unidad de un cierto producto es de 120 €. Si se vende a 150 € la unidad, lo compran 500 clientes. Por cada 10 € de aumento en el precio, las vendas disminuyen en 20 clientes.

a) Encontrad un fórmula mediante la cual obtengamos los beneficios.
b) Calculad a qué precio p por unidad tenemos que vender el producto para obtener un beneficio máximo.
c) En el caso anterior, encontrad el número de unidades que se venden y calculad el beneficio máximo.

Aunque todavía nos encontramos con enunciados poco apropiados:

[Curso 2009/10, Serie 4, Junio, Problema 6] En una explotación ganadera se declara una epidemia, y los veterinarios prevén que la propagación de esta seguirá la función: $f(x) = -2x^2 + 48x + 162$, donde x representa el número de semanas que han transcurrido desde el momento de la declaración de la epidemia, y $f(x)$ indica el número de animales afectados.

a) ¿Cuántos animales hay afectados en el momento de declararse la epidemia? ¿Cuántas semanas durará la epidemia hasta el momento en que ya no quede ningún animal afectado?
b) Indicad cual será el número máximo de animales afectados, y en qué semana se producirá?

Como podemos ver en estos cuatro ejemplos, los problemas son muy estereotipados e intentan adecuar el contexto para pedir siempre las mismas cosas. Raramente se requiere hacer una interpretación de los resultados obtenidos ni responder a preguntas abiertas o inversas.

Un indicador muy relevante que nos aportan las pruebas de acceso a la universidad de la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* de las últimas convocatorias son las notas medias que se han obtenido[33]. Estos resultados, que se presentan a continuación en una tabla, revelan una realidad bastante preocupante, ya que estas son muy bajas, lo que augura una dificultad evidente para dichos alumnos en seguir la asignatura de matemáticas del grado correspondiente:

Año	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Nota Media	4,55	4,64	5,19	4,59	5,00	4,90

Tabla 2.8. Notas medias en las PAU de la asignatura de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales en el período 2006-2011

[33] http://www.gencat.cat/economia/ur/ambits/universitats/acces/vies/pau/info/estadistiques/index.html

4. Síntesis de resultados y problemas transpositivos abiertos

4.1. El «aplicacionismo» en economía

Una vez constatado el estado actual en el que se encuentran las matemáticas aplicadas a la economía, tanto a nivel universitario como en el pre-universitario, nos centraremos en analizar el modo en que dichas instituciones escolares interpretan y describen las matemáticas y la relación que estas tienen con la economía.

Tal y como hemos observado en nuestro estudio, se establece una separación rígida entre las matemáticas y la economía, de manera que las primeras, una vez construidas, se «aplican» a la segunda sin «contaminarse» por ellas, y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática de las ciencias económicas a cuyo estudio contribuyen. Denominamos «aplicacionismo» a esta forma de interpretar la relación de las matemáticas con las demás ciencias.

Tanto en la institución universitaria como en la secundaria, se asume que cada tipo de problemas se resuelve aplicando una determinada técnica matemática y que dicha aplicación da origen a un tipo particular de modelo matemático que permite resolver todas las cuestiones planteadas. No se consideran cuestiones problemáticas que vayan más allá de las cuestiones internas a cada aplicación particular de los modelos estandarizados. No se plantean, por tanto, preguntas sobre la «comparación» del grado de adecuación de dos o más modelos de un mismo sistema, ni sobre la necesidad de modificar progresivamente un modelo determinado para dar respuesta a las nuevas cuestiones problemáticas.

B. Barquero (2009) en su tesis doctoral establecía una serie de indicadores del «aplicacionismo» que retomaremos en este punto y que nos permitirán contrastar empíricamente hasta qué punto prevalece el aplicacionismo en ambas instituciones. Recordamos primero dichos indicadores:

> I1: Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas
>
> I2: Las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas científicos forman parte de una formación matemática básica común.
>
> I3: La enseñanza de las matemáticas sigue la lógica deductivista.

I4: Dado que las «aplicaciones» vienen después de una formación matemática básica, se destaca una proliferación de cuestiones aisladas con origen en distintos sistemas y que se mantienen fijas.
I5: La enseñanza de las herramientas matemáticas básicas siempre es anterior al estudio de su aplicación.
I6: Se podrían enseñar los sistemas sin los modelos, es decir, se podría enseñar economía sin matemáticas.

Una vez analizados los programas, la bibliografía y los enunciados de exámenes de las matemáticas aplicadas a la economía, a nivel universitario y en su etapa previa, podemos establecer que:

(1) Las matemáticas y la economía evolucionan con lógicas independientes y sin ninguna interacción, reduciendo así el posible papel de las matemáticas como herramienta de modelización de los sistemas económicos. Efectivamente, las matemáticas que son enseñadas presentan una estructura muy estereotipada y cristalizada que no se mezcla con los sistemas que se modelizan y dichas matemáticas enseñadas nunca se modifican como consecuencia de ser aplicadas. [I1, I2 y I3]
(2) La organización tradicional de los contenidos matemáticos en los estudios de economía sitúa de forma preferencial el bloque tecnológico-teórico en el origen de la actividad matemática y, en consecuencia, tiende a construir tipos de problemas muy cerrados y aislados para obtener así ejemplificaciones de cada una de las propiedades de cada tema y simplificar (algorimizando) el proceso de evaluación. [I4 y I5]
(3) No se llega a plantear el problema matemático y didáctico de cómo articular los contenidos matemáticos para que estos puedan ser utilizados como instrumentos necesarios e imprescindibles en el estudio de cuestiones económicas. Es por ello que la organización matemático-didáctica de las matemáticas en los estudios de economía potencia y refuerza la creencia según la cual sería posible enseñar economía sin matemáticas. [I6]

4.2. Problemas transpositivos abiertos

Al abordar el estudio de las matemáticas que se enseñan en los estudios de economía y empresa de la universidad española actual, hemos aportado evidencia sobre los siguientes fenómenos, que avanzamos aquí a modo de conjeturas documentadas.

En primer lugar, hemos visto que existe lo que podríamos llamar un «programa prototípico» de asignatura de matemáticas para la economía y empresa que adoptan la gran mayoría de universidades con muy pocas excepciones. Dicho programa retoma sin grandes modificaciones una organización muy estándar de los contenidos matemáticos del Cálculo diferencial y el Álgebra lineal, materias elementales de la mayoría de estudios universitarios científicos. Esta organización de los contenidos es absolutamente «intramatemática» en la medida en que se basa en la lógica de construcción teórica de los conceptos matemáticos y no toma como punto de partida las grandes problemáticas económicas o empresariales a las que las matemáticas contribuyen a aportar respuestas. Podemos citar, en contraposición la gran innovación que supone la propuesta de *Chiang* que, a pesar de ser un libro citado en la mayoría de programas, no sirve como eje estructurador a ninguno de ellos.

Esta situación es muy similar a la que describe Berta Barquero (2009) en términos del «aplicacionismo dominante» en la enseñanza de las matemáticas para las ciencias experimentales. En esta perspectiva, se considera que los estudiantes deben aprender primero unas matemáticas básicas que serían las mismas para todas las ciencias experimentales y que, una vez construidas, uno aprendería a «aplicar» en su ámbito de actividad concreto (la biología, la geología, etc.). Todo sucede como si, también en los estudios de ciencias económicas y empresariales, existiera un corpus de matemáticas básicas y una organización dada de estas matemáticas que los alumnos van a «aplicar» posteriormente en las asignaturas de economía, finanzas, empresa, etc. Estas aplicaciones quedan siempre relegadas al final de los temas de estudio y, como hemos constatado al analizar los exámenes de algunas asignaturas de universidades importantes (Autónoma de Barcelona, Autónoma de Madrid, Complutense, Pompeu Fabra), están prácticamente ausentes en las evaluaciones o exámenes finales. Podemos considerar en este sentido que en el ámbito de las matemáticas para la economía y empresa, el *trabajo transpositivo* realizado hasta la fecha se limita a retomar una organización ya elaborada por la matemática sabia, a añadir algunos problemas a modo de «ejemplos motivadores» o «aplicaciones» de final de capítulo dentro del ámbito de la economía y empresa (elasticidad, estudio de costes, etc.), sin producirse una reconstrucción específica de contenidos matemáticos a enseñar a partir de las necesidades que se plantean en economía y que estos contenidos vienen a colmar.

El análisis de la evolución histórica de la ciencia económica y su relación con las matemáticas muestra, tal como indica Artaud (1993), complejos procesos de transposición institucional entre la comunidad de los investigadores en economía y la matemática sabia. La emergencia de la economía como ciencia autónoma ha ido siempre muy relacionada con la inclusión, consideración, construcción y creación de modelos matemáticos, a pesar de que la relación entre economía y matemáticas no haya dejado nunca de ser altamente polémica.

El movimiento «post-autista» de los estudiantes universitarios de economía de principios de los años 2000 muestran hasta qué punto esta polémica ha traspasado a la enseñanza, poniendo en evidencia las dificultades que genera esta carencia transpositiva. Por un lado, y como hemos visto, las asignaturas de matemáticas ignoran las problemáticas de la economía y empresa, haciendo un lugar nimio a la construcción, uso y validación de modelos matemáticos a partir de situaciones problemáticas extra-matemáticas. Por otro lado, las asignaturas más propias de la economía y empresa se podrían dividir en dos grandes bloques. Algunas, como la microeconomía o las matemáticas financieras, darían rienda suelta al uso avanzado de modelos matemáticos específicos de estos ámbitos de actividad, proliferando así —de ahí la «queja» del movimiento post-autista— la enseñanza de una ciencia económica altamente matematizada que se miraría el ombligo y sería incapaz de abordar los graves problemas económicos y financieros que sufre nuestra sociedad. Las demás materias, por el escaso uso que hacen de la herramienta matemática, envían el mensaje de que la economía y empresa podría desarrollarse perfectamente al margen de los modelos matemáticos.

Creemos que el análisis de este complejo fenómeno transpositivo no puede hacerse manteniéndose únicamente en el ámbito de la investigación económica y matemática (lo que tradicionalmente se considera como estudios epistemológicos) o en el de la enseñanza, porque ambos están íntimamente relacionados. El problema que manifiesta el fenómeno «post-autista» es a la vez un problema epistemológico y didáctico. Postulamos que un primer paso para abordarlo está en orientar la enseñanza universitaria de las matemáticas hacia un paradigma que incorpore la modelización matemática como una herramienta esencial del análisis económico y empresarial.

Cuando ampliamos el ámbito empírico de la enseñanza universitaria para incorporar los estudios de bachillerato y la asignatura específica que se creó en los años noventa de las Matemáticas para las ciencias sociales, aparece el mismo problema transpositivo. La dificultad para integrar la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización no es menor en el bachillerato que en la universidad. De ahí que la asignatura específica de la modalidad de ciencias sociales haya acabado siendo una versión «reducida» de su análoga para la modalidad de ciencias y tecnología, en lugar de proponer un conjunto más ajustado no sólo de las principales herramientas matemáticas que se utilizan en economía sino, sobre todo, de las funciones y problemas económicos que les dan su razón de ser.

De este modo, hemos podido documentar y empezar a contrastar empíricamente las conjeturas que avanzábamos al final del Capítulo 1 de esta memoria:

C3.1. Extrapolando los resultados obtenidos por Barquero (2009), podemos postular que las matemáticas se presentan en las instituciones escolares (tanto en el bachillerato de ciencias sociales como en la enseñanza universitaria) con lógicas intramatemáticas y sin ninguna interacción con la economía ni la empresa, es decir, sin considerarse como una herramienta de modelización de sistemas económicos y empresariales. En las instituciones escolares responsables de la enseñanza de las ciencias económicas se asigna a las matemáticas un papel secundario que permite, a lo sumo, precisar y cuantificar algunos aspectos de los fenómenos económicos cuyo núcleo esencial, se supone implícitamente, puede ser construido y estudiado sin hacer ningún uso de las matemáticas.

C3.2. De forma análoga a lo que ocurre en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales, postulamos que la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de Economía y Empresa siguen lo que podríamos considerar como una «organización estándar» con contenidos de cálculo diferencial en una y varias variables, y de álgebra lineal elemental. Estos contenidos se estructuran siguiendo la lógica de la construcción teórica de los conceptos otorgando un papel secundario al uso de las matemáticas en Economía.

C3.3. En las instituciones escolares (tanto en el bachillerato de ciencias sociales como en la enseñanza universitaria), se considera que las matemáticas no son de ninguna manera *constitutivas del conocimiento económico* ni necesarias para la resolución de problemas empresariales. Las matemáticas, una vez construidas, *se aplican* a las ciencias económicas sin «contaminarse» por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática económica a cuyo estudio contribuyen. Se supone que las matemáticas y la economía tienen una existencia y un desarrollo independientes. La *actividad de modelización se entiende así como una mera «aplicación»* del conocimiento matemático previamente construido o, en los casos más extremos, como una simple «ejemplificación» del uso de las herramientas matemáticas a ciertos sistemas económicos que, en ocasiones, se construyen artificialmente para que se ajusten a la utilización de las herramientas matemáticas que se quieren aplicar.

CAPÍTULO 3. Las matemáticas para las ciencias sociales en el paso de Secundaria a la Universidad

1. Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad

El alumno que inicia sus estudios universitarios debe hacer frente en poco tiempo a múltiples situaciones nuevas para las cuales no ha sido preparado. La institución de procedencia —la escuela secundaria— está demasiado preocupada en poder finalizar todo el contenido susceptible de aparecer en las pruebas de acceso a la universidad, a la vez que continúa con la misma metodología que ha utilizado durante todos los cursos, sin anticipar al estudiante lo que se encontrará tan solo unos meses más tarde en la universidad.

Hasta la implantación del Espacio Europeo Superior de Educación (EEES), la llegada del estudiante a la universidad suponía una ruptura muy grande con respecto a la secundaria. El nuevo EEES parece haber incorporado estrategias de mejora en el traspaso entre ambas instituciones. En este sentido encontramos en el estatuto del estudiante universitario[34] algunos artículos que así lo confirman:

- [los estudiantes de Grado] tienen derecho a recibir orientación y tutoría personalizadas en el primer año y durante los estudios, para facilitar la adaptación al entorno universitario y el rendimiento académico. (art. 8)

[34] Real Decreto 1791/2010 de 30 de diciembre, publicado en el BOE (Núm. 318 Viernes 31 de diciembre de 2010 Sec. I. Pág. 109353)

- […] se ofrecerán metodologías de trabajo en la universidad y formación en estrategias de aprendizaje, para proporcionar ayuda a los estudiantes en los momentos de transición entre las diferentes etapas del sistema educativo. (art.65)

Todavía es muy reciente para comprobar el impacto que estos nuevos cambios están teniendo sobre los alumnos, ni tampoco hemos encontrado muchas investigaciones al respecto. De hecho, tradicionalmente las investigaciones en didáctica tienden a concentrarse o bien en la institución de salida —la escuela—, o bien en la de llegada —la universidad—, pero en menor medida encontramos estudios que se centren en la transición entre ambas instituciones. En esta línea encontramos a Evans (2000) que presenta una recopilación muy completa de estas investigaciones, abarcando desde los estudios más genéricos —sociológicos o pedagógicos— hasta los más específicos de las diferentes disciplinas enseñadas —física, matemáticas, estadística, geografía, economía, contabilidad, administración y dirección de empresas, derecho, educación, entre otras—.

En este capítulo nos centraremos en la transición de ambas instituciones en el caso concreto de la asignatura de matemáticas de los primeros cursos universitarios en el ámbito de la economía y la empresa en España.

1.1. Las dificultades de los alumnos de matemáticas en el paso de Secundaria a la Universidad

Sin duda, la generalización de la enseñanza secundaria y correlativamente de la enseñanza universitaria explicaría parte de las dificultades con las que los alumnos se encuentran en los primeros cursos universitarios. Tradicionalmente la universidad estuvo acostumbrada a enseñar a una élite social e intelectual muy seleccionada y en las últimas décadas se ha producido una apertura hacia la mayoría de alumnos de secundaria. Esta entrada masiva de alumnos ha provocado un aumento de la diversidad que al sistema de enseñanza le está costando asimilar. Hasta la reciente reforma del Espacio Europeo de Educación Superior, la universidad seguía con los mismos planes de estudio, metodologías didácticas y sistemas de evaluación que hace cincuenta años, sin modificarse en función de la nueva realidad. Más concretamente, a nivel español, la implantación de la reforma educativa LOGSE, que extiende la enseñanza secundaria obligatoria hasta los dieciséis años, ha generado una diversidad enorme en la extensión y profundización de los conocimientos matemáticos de los alumnos que posteriormente iniciarán estudios universitarios. Esto ha provocado una disminución, muchas veces consciente, del nivel de exigencia matemática, tanto en la enseñanza secundaria como universitaria. La distancia entre la nueva secundaria y la universidad se está agravando tanto, que la mayoría de universidades españolas proponen desde hace unos años unos «cursos cero» para facilitar la transición entre las dos instituciones.

En este capítulo partiremos de la situación actual en la que la universidad se ve «abocada» a proponer estos cursos e intentaremos analizar sus posibles funciones «remediadoras», haciendo posteriormente una propuesta didácticamente fundamentada, experimentándola y evaluándola empíricamente.

Partiremos de los resultados obtenidos por C. Fonseca (2004) en su tesis doctoral en didáctica de las matemáticas titulada *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, que ya hemos comentado en el Capítulo 1 y que podemos resumir en las dos proposiciones siguientes:

(1) Las dificultades que manifiestan los alumnos en el paso Secundaria–Universidad se pueden formular en términos de *discontinuidades matemáticas y didácticas* entre las dos etapas educativas. En efecto, en secundaria se construyen praxeologías matemáticas puntuales y locales incompletas y desarticuladas, con un fuerte contenido práctico-técnico y un débil componente tecnológico-teórico. En cambio, en la universidad se construyen praxeologías matemáticas locales también incompletas y desarticuladas pero con un fuerte componente tecnológico-teórico y un débil componente práctico-técnico. Además, no se articulan las *praxis* de secundaria con los *logos* de la universidad. En general, en ninguna de las dos instituciones se parte de las cuestiones problemáticas que están en el origen de las praxeologías matemáticas que se enseñan, es decir, lo que llamamos la «razón de ser» del conocimiento matemático que se enseña.

Se postula que la «incompletitud» de las matemáticas estudiadas en las dos instituciones estaría relacionada con una «incompletitud didáctica» causada por una débil realización de algunas dimensiones importantes del proceso de estudio y por la ausencia de un cuestionamiento inicial que motive y otorgue una «razón de ser» a las principales nociones y técnicas que los alumnos tienen que aprender a utilizar.

(2) Una manera de reducir estas discontinuidades, en algún grado o en algún ámbito concreto de la matemática estudiada, consiste en diseñar praxeologías didácticas que permitan la reconstrucción de praxeologías matemáticas locales relativamente completas, tanto en la enseñanza secundaria, como en la universitaria, como en el paso de una a la otra. Se postulan dos condiciones necesarias para hacerlo: el *desarrollo suficiente y adecuadamente dirigido del trabajo de la técnica* y el *tomar como punto de partida del proceso de estudio una cuestión («razón de ser») suficientemente rica a la cual la praxeología matemática local aporte una respuesta.*

Partiendo de estas hipótesis, hemos formulado las cuestiones $\mathbf{Q_1}$ y $\mathbf{Q_2}$ que ya se han presentado en el Capítulo 1 de esta memoria y que retomamos a continuación:

$\mathbf{Q_1}$: *¿Cómo se puede describir e interpretar la respuesta institucional espontánea, que se materializa mediante los cursos «cero» de matemáticas, al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad?*

> $\mathbf{Q_{11}}$**:** ¿Qué características tienen los dispositivos didácticos que han sido creados en las universidades españolas para facilitar el tránsito de los alumnos de secundaria a la universidad? ¿Cuál parece ser la fundamentación matemático-didáctica (más o menos explícita) de dichos dispositivos?
>
> $\mathbf{Q_{12}}$: ¿En qué medida estos dispositivos parecen apropiados para paliar las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad?

$\mathbf{Q_2}$: *¿Qué características diferenciales, en relación a la respuesta institucional espontánea, pueden presentar los cursos «cero» si se fundamentan en la teoría antropológica de lo didáctico?*

> $\mathbf{Q_{21}}$: En un curso propedéutico diseñado en base al modelo epistemológico-didáctico que propone la TAD, ¿qué dispositivos didácticos deben instaurarse? ¿Cuáles son las praxeologías matemáticas que se proponen para ser estudiadas? ¿Cómo se relacionan entre sí a lo largo del proceso de estudio? ¿Qué papel juega la modelización matemática?

Q_{22}: ¿En qué medida los «cursos cero» diseñados en base a los criterios que propone la teoría antropológica de lo didáctico permiten paliar las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad?

1.2. Los «curso cero» de matemáticas como nuevo dispositivo didáctico

Partiremos de un fenómeno que está sucediendo en España en los últimos años, coincidiendo con la llegada a la universidad de las generaciones de la reforma educativa de 1990, que alargaba la enseñanza obligatoria de los 14 a los 16 años y reducía la secundaria post-obligatoria de cuatro cursos a dos. Como reacción a la llegada de los «nuevos alumnos» de la reforma a la universidad, a finales de la década de los noventa del siglo pasado, un gran número de universidades puso en marcha unos cursos preparatorios para los alumnos de nuevo ingreso (llamados también «cursos propedéuticos», «cursos cero», «cursos de nivelación», etc.). Su duración no suele exceder de tres semanas y se acostumbran a realizar durante los primeros días de septiembre, antes de empezar el curso académico. Su principal objetivo es *facilitar* el tránsito de los alumnos entre las dos instituciones, *completando* los contenidos matemáticos que se estudian en secundaria con aquellos que se consideran imprescindibles para cursar las asignaturas de matemáticas de primer ciclo universitario.

Hemos querido comprobar qué investigaciones hay a nivel español sobre la preocupación por el nivel con que llegan los alumnos de secundaria a la universidad. Hemos centrado nuestra búsqueda en investigaciones hechas en el campo de la administración y dirección de empresas y las ciencias económicas y empresariales, que es donde centraremos nuestra experimentación. Para ello, nos hemos remitido a las actas publicadas de las jornadas que anualmente se celebran desde la *Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa* (ASEPUMA) y las del *Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació*.

Los trabajos que abordan el tema que estamos tratando, van primordialmente en las dos líneas que describiremos a continuación. En primer lugar, encontramos trabajos que proponen un diagnóstico del perfil del alumno que llega a la universidad, con el objetivo de averiguar el porqué del fracaso de este alumno durante el primer curso de estudios.[35] A grandes rasgos, estos estudios achacan el fracaso académico a la corta duración y la «mala calidad» de los estudios del bachillerato social y al hecho que el perfil del alumno que accede a dichos estudios es el de un estudiante poco motivado y sin demasiada vocación para estos estudios.

La segunda línea de trabajos se centra en dar soluciones a las dificultades de los alumnos aportando pequeñas variaciones en los cursos de matemáticas de primero para mejorar el rendimiento académico. Podemos destacar varias propuestas: una consiste en modificar completamente la metodología didáctica utilizada, basando la nueva organización didáctica en el aprendizaje cooperativo (Estapé 2005); otra se basa en la incorporación de un capítulo «cero» que aportaría una base económica para explicar las necesidades que provocan la utilización de las matemáticas en la economía y la empresa (Erice 2005).

La tendencia de los últimos años apunta a la presencia habitual de los llamados «cursos cero» en casi todos los grados dónde en el primer curso universitario se imparte la asignatura de matemáticas, ya sea como créditos de libre configuración ya sea de forma «obligatoria» en forma de un primer cuatrimestre «cero». Los estudios de economía no son una excepción y de hecho en muchas universidades ya se trata de un dispositivo institucionalizado plenamente. Ante esta realidad hemos querido analizar cómo están diseñados estos cursos y hemos buscado información sobre los aspectos siguientes:

- Cuál fue el origen de la implantación del curso;
- Qué relación tiene el diseño del curso con el del «curso académico» habitual;
- Cuál es la función principal del curso;
- Qué relación tiene con las matemáticas estudiadas en secundaria;
- Qué relación tiene con las matemáticas que se estudiarán en la universidad;
- Qué efecto tienen estos cursos en el «rendimiento» de los alumnos durante el primer año de estudios en la universidad;

35 Álvarez, Blanco, Guerrero & Quiroga (1998), Camacho, Fernández, Gómez, Masero, Vázquez & Zapata (2005), Castellanos, González, González de Sela & Manzano (1998) Corcho, Cortienes & Guerrero (2005), Fernández & Escribano (2005) y García Hernández (2001).

- Qué responsabilidades (matemáticas y didácticas) tiene que asumir el alumno en estos cursos y en qué se diferencian de las que estaba acostumbrado en la enseñanza secundaria.

Esta información nos permitirá deducir una caracterización de las «tecnologías didácticas» universitarias dominantes y sus posibles consecuencias en las dificultades de los alumnos que llegan de secundaria. Y nos debería informar sobre el tipo de diagnóstico espontáneo que hace la universidad sobre las deficiencias de los alumnos que provienen de secundaria y la posibilidad de ponerles remedio.

1.3. Mapa de los «cursos cero» de matemáticas

Durante el periodo 2005-2009 llevamos a cabo un estudio pormenorizado de distintos dispositivos que nos permitieran delimitar el estado de los «curso cero» que se estaban realizando[36]. Entre ellos, destacamos:

- Las entrevistas con diseñadores de los cursos y con profesores responsables de impartir, tanto «cursos cero» como «académicos»;
- La asistencia a las clases de estos cursos;
- El análisis de los apuntes y materiales, tanto de profesores como de alumnos;
- El análisis de encuestas pasadas al final del curso a los alumnos;
- Las entrevistas con los alumnos.

Entrevistando a profesores responsables de los «cursos cero» nos encontramos que la mayoría no habían tomado la decisión de implantarlos, y por tanto, no tenían muy clara la «razón de ser» de estos cursos. Esto nos hizo pensar que su implantación se había constituido como una *moda* impuesta en cada universidad para no ser menos que las demás, sin llevar a cabo un análisis previo de su necesidad, eficacia y adecuación del diseño. Ante la pregunta de qué relación tiene con las matemáticas que se verán en la universidad, mayoritariamente dicen que a pesar de no avanzar la materia que se verá en la universidad, sí que seleccionan aquellos temas que son básicos para desarrollar las matemáticas que forman parte del «curso académico». A la pregunta de qué relación tiene el diseño del curso de septiembre con el curso «normal» de matemáticas de primer

[36] Dicho estudio y sus conclusiones se puede encontrar detallado en la memoria de investigación presentada por la autora de esta memoria para optar al Diploma d’Estudis Avançats (Serrano 2007)

curso, las respuestas apuntan en la línea que no consideran que deba existir ninguna relación ya que entienden los «cursos cero» como un repaso de secundaria. Ante la pregunta de qué relación tiene con las matemáticas estudiadas en secundaria, mayoritariamente dicen que es un resumen de las matemáticas vistas en bachillerato.

Para establecer qué efecto tienen estos cursos sobre el *rendimiento de los alumnos durante el primer año de estudios en la universidad*, nos encontramos que, mayoritariamente, los profesores no han hecho ningún estudio en esta línea. Además como estos cursos no se acostumbran a evaluar, tampoco nos podían proporcionar datos que pudieran relacionar el rendimiento de los alumnos en el curso «cero» con su rendimiento posterior en la asignatura académica.

En definitiva, los profesores resultaron ser una fuente muy pobre de información sobre el motivo, diseño e incidencia de estos cursos sobre el rendimiento universitario de los alumnos. Esto nos condujo a llevar a cabo una metodología «naturalista» de observación de algunos de estos cursos.

1.4. Los programas de los cursos «cero»

Los «cursos cero» van dirigidos a un amplio abanico de alumnos que iniciarán carreras muy diferentes, donde teóricamente las matemáticas tienen también diferentes niveles de complejidad. Esto podría hacer pensar que el diseño y contenido de cada uno de estos cursos tendría que estar adaptado a las peculiaridades de los diferentes estudios universitarios. La realidad, sin embargo, desmiente esta suposición. El objetivo principal en la mayoría de estos cursos es cubrir el *máximo número de contenidos* en el poco tiempo que dura el curso, intentando hacer un repaso exhaustivo de toda la matemática de secundaria, independientemente de su importancia en relación al curso académico, y también del tipo de alumnado al que vaya dirigido el «curso cero» en cuestión.

En este sentido no creemos muy atrevido clasificar los cursos observados en dos grandes grupos, según los *tipos ideales de modelos docentes* descritos en capítulo primero de este trabajo (§1.5). Encontramos por un lado, cursos «*empiristas*» que combinan dos dimensiones del proceso de estudio con total preponderancia: el momento del trabajo de la técnica (modelo *tecnicista*) y los momentos exploratorio y del primer encuentro (modelo *modernista*). Su principal característica es la estructuración del curso partiendo de un listado de ejercicios y problemas no demasiado articulados entre sí pero más o menos organizados por temas o ámbitos temáticos. El estudio de esta larga lista de problemas diferentes conduce al alumno a vivir una especie de *eterno momento exploratorio* que, por falta de tiempo, no es nunca productivo y que el profesor acaba frustrando con un «bombardeo» continuo de recordatorios de técnicas y tecnologías de manera muy oportunista siguiendo las necesidades de cada caso. Los alumnos acostumbran a ver así una gran cantidad de praxeologías matemáticas *puntuales* y *aisladas* con todos sus componentes. A pesar de la apariencia de una metodología «activa» centrada en la resolución de problemas, el trabajo en el aula lo acaba haciendo principalmente el profesor. Creemos que esta estrategia es la que domina en el caso de los cursos ofertados en carreras científicas.

El segundo gran grupo lo conforman lo que llamamos cursos de «*estilo clásico*» que combinan dos dimensiones del proceso de estudio: el momento tecnológico-teórico (modelo *teoricista*) y el momento del trabajo de la técnica (modelo *tecnicista*). Su principal rasgo es ver desfilar una gran cantidad de praxeologías matemáticas siguiendo una sucesión de temas fijados a priori, donde el único hilo conductor entre ellos, cuando lo hay, se sitúa en el nivel del discurso teórico que no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno puesto que esta responsabilidad es asumida en exclusiva por el profesor. Al final, el alumno también acaba trabajando con una gran cantidad de praxeologías matemáticas *puntuales* y *aisladas*, aunque el discurso del profesor las presente conectadas y estructuradas en praxeologías matemáticas locales o regionales. Creemos que esta estructura corresponde más a los cursos ofertados en carreras de temática económica y social.

En Serrano (2007) se encuentra un análisis más detallado sobre el estudio de las praxeologías didácticas en las que se basan un curso «empirista» y otro «clásico».

1.5. La situación actual

La nueva estructura en grados no parece haber modificado el funcionamiento de los «cursos cero» en las facultades españolas de economía. Los programas a los que hemos podido acceder desde las diferentes web[37] de las universidades así lo confirman. A modo de ejemplo mostramos algunos programas de cursos «cero» ofertados en diferentes grados de economía en facultades españolas:

Universitat Autònoma de Barcelona

I.- Introducción

1. Repaso de cálculos algebraicos básicos
2. El sistema de los números reales: igualdades, desigualdades, intervalos, valor absoluto
3. Lógica formal básica: proposiciones, implicaciones, condiciones necesarias y suficientes
4. Demostración matemática: razonamiento inductivo y deductivo
5. Teoría de conjuntos básica: operaciones con conjuntos, diagramas de Venn

II.- Cálculo diferencial

1. Funciones de una variable real: dominio, imagen, representación gráfica
2. Familias de funciones: polinomiales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas
3. Límites y continuidad: definición, interpretación geométrica
4. Derivadas: definición interpretación geométrica, métodos de derivación

III.- Cálculo integral

1. Integrales indefinidas: interpretación geométrica, métodos de integración
2. Integrales definidas: Interpretación geométrica. Propiedades

IV.- Álgebra lineal

1. Matrices: definición, operaciones con matrices
2. Determinantes: definición, propiedades
3. Rango de una matriz
4. Matriz inversa
5. Sistemas de ecuaciones lineales

Universidad Carlos III Madrid

1. Polinomios y fracciones algebraicas.
2. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
3. Funciones elementales.
4. Cálculo de límites.
5. Funciones continuas.
6. Cálculo de derivadas.
7. Representación gráfica.
8. Cálculo de primitivas.

Universitat Pompeu Fabra

El curso será eminentemente práctico, con mucha resolución de problemas y muchos cálculos. El contenido se centrará en aspectos básicos de cálculo con fracciones, manipulación algebraica de exponentes, potencias, raíces, simplificación de expresiones, factor común, resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado, sistemas de ecuaciones lineales, gráficas y tablas de valores de funciones sencillas. También se trataran los errores más comunes en el tema de las potencias y las raíces.

Universidad de Zaragoza

Unidad Didáctica 1: Cálculo operacional: fracciones, potencias, raíces y logaritmos.

- *Fracciones:* Conceptos. Operaciones. Operaciones con fracciones algebraicas.
- *Potencias y raíces:* Conceptos. Propiedades de las potencias. Propiedades de las raíces. Función potencial y función exponencial.
- *Logaritmos:* Conceptos. Propiedades. Función logarítmica.

[37] Cabe destacar la dificultad para encontrar dichos programas en los portales de acceso público de las web de las Universidades.

Unidad Didáctica 2: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

- *Ecuaciones:* Conceptos. Ecuaciones polinómicas con una incógnita. Ecuaciones no polinómicas con una incógnita. Ecuaciones con dos incógnitas.
- *Inecuaciones:* Conceptos. Inecuaciones polinómicas con una incógnita. Inecuaciones racionales con una incógnita. Otras inecuaciones con una incógnita. Inecuaciones con dos incógnitas.
- *Sistemas de ecuaciones:* Conceptos. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas de *m* ecuaciones con *n* incógnitas.
- *Sistemas de inecuaciones:* Conceptos. Sistemas de inecuaciones con una incógnita. Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

Unidad Didáctica 3: Trigonometría.

- Medidas de ángulos: el grado sexagesimal y el radián. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Relación entre las razones trigonométricas de dos ángulos. Otras igualdades trigonométricas. Funciones trigonométricas y sus inversas.

Unidad Didáctica 4: Números reales y números complejos.

- *Números reales:* Números naturales y números enteros. Números racionales y números irracionales. Números reales.
- *Números complejos:* Conceptos. Operaciones. Representación gráfica. Forma polar y forma trigonométrica.

Unidad Didáctica 5: Geometría en el plano.

- *Puntos y vectores:* Puntos en el plano. Vectores fijos. Vectores libres.
- *Rectas:* Inclinación y pendiente de una recta. Ecuaciones de una recta. Incidencia y paralelismo.
- *Cónicas:* Circunferencia. Elipse. Hipérbola. Parábola.

Unidad Didáctica 6: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

- *Matrices:* Concepto. Tipos de matrices. Operaciones con matrices. Propiedades. Operaciones elementales. Rango de una matriz. Cálculo de la matriz inversa por el Método de Gauss.
- *Determinantes:* Cálculo. Propiedades. Cálculo de la matriz. cálculo del rango de una matriz.
- *Sistemas de ecuaciones lineales:* Concepto. Tipos de sistemas lineales. Discusión de un sistema lineal. Métodos de resolución de sistemas lineales.

Unidad Didáctica 7: Funciones reales de variable real.

- *Funciones reales de variable real:* Conceptos básicos. Funciones elementales. Límite de una función.
- *Derivada de una función real:* Conceptos básicos. Interpretación geométrica. Función derivada. Regla de L´Hôpital.
- *Representación gráfica:* Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Asíntotas y ramas parabólicas. Estudio y representación gráfica.

Universidad de Málaga

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MATRICES

1. Matrices y determinantes
2. Sistemas de ecuaciones lineales

INTRODUCCIÓN

1. Razones trigonométricas. Operaciones. Identidades y ecuaciones
2. De los números naturales a los complejos
3. Monomios y polinomios

TEORÍA DE FUNCIONES

1. Funciones. Forma de expresar una función
2. Límite en un punto. Continuidad. Propiedades de los límites
3. Tipos de funciones. Operaciones con funciones
4. Función exponencial. Función logarítmica
5. Función derivada. Interpretación geométrica. Aplicaciones de la derivada.

Como podemos observar en la muestra presentada no parece que la entrada en el nuevo Espacio Europeo de Educación Superior haya cambiado la estructura de estos cursos, que siguen estando compuestos por un número muy elevado de contenidos.

1.6. Conclusiones

El contrato didáctico, es decir el reparto de responsabilidades entre profesor y alumno en lo que se refiere al contenido matemático en juego, así como el tipo de actividad matemática que los alumnos tienen que realizar, muestra que estos cursos pretenden que los alumnos trabajen en una cantidad muy importante de praxeologías matemáticas diferentes para intentar recubrir, en cierta manera, la casi totalidad del currículum de secundaria. El tiempo limitado de que se dispone para este objetivo tan ambicioso no permite que los alumnos puedan vivir los diferentes momentos del proceso de estudio. En consecuencia, cada curso se limita a proponer algunos momentos privilegiados que, supuestamente, permiten hacer una «reconstrucción rápida» de las praxeologías matemáticas consideradas. Estos son el *momento tecnológico* o bien el *momento exploratorio*, acompañados del *momento del trabajo de la técnica* que, por falta de tiempo, aparece siempre interrumpido antes de poder ser productivo. Así, en ningún caso se dispone del tiempo y el espacio necesario para el trabajo de desarrollo técnico ni para llevar a cabo el cuestionamiento que se requiere para construir praxeologías matemáticas locales que agrupen y otorguen más flexibilidad y eficacia a las técnicas y tecnologías que los alumnos aprenden a utilizar en secundaria. Nos parece que este tipo de praxeología didáctica no sólo no contribuye a paliar la desarticulación de las praxeologías matemáticas que se estudian en secundaria, sino que reforzarían todavía más su aislamiento y rigidez.

Estas conclusiones corroboran la conjetura 1 que hemos presentado en el primer capítulo:

Conjetura 1. *Efectos de los cursos propedéuticos tradicionales en la transición Secundaria-Universidad*:

Los cursos propedéuticos (o «cursos cero») se fundamentan (implícitamente) en modelos didácticos que, a lo sumo, toman en consideración dos de los *momentos* *didácticos* o dimensiones del proceso de estudio que propone la TAD, y se sustentan en un modelo epistemológico de las matemáticas esencialmente «conceptualista» y «acumulativo» (esto es, un modelo que interprete el conocimiento matemático como una red de conceptos que puede ampliarse mediante la acumulación de nuevos conceptos y nuevas relaciones entre ellos). En consecuencia, favorecen y agravan el aislamiento y la desarticulación de las praxeologías matemáticas que se estudian en secundaria y no contribuyen a paliar las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad.

Una primera explicación de este fenómeno radica en el hecho que estos cursos se organizan mediante *praxeologías didácticas uni o bidimensionales* (teoricistas, tecnicistas, «modernistas» o «clásicas») que refuerzan uno o dos momentos del proceso de estudio en detrimento de los otros. En consecuencia, los procesos de estudio que se derivan no permiten reconstruir praxeologías matemáticas *locales* relativamente completas que agrupen las *puntuales* estudiadas en secundaria otorgándoles la flexibilidad técnica y el desarrollo tecnológico suficiente para hacer instrumentos eficaces para el estudio de nuevas cuestiones problemáticas.

Este análisis nos condujo a hacer una propuesta alternativa de «curso cero» que va, en cierta forma, en sentido contrario a los cursos ofrecidos habitualmente en las universidades. Si, como hemos postulado, el principal hándicap con el que llegan los estudiantes a la universidad es su incapacidad para articular conocimientos teóricos y prácticos para formar estrategias de resolución, que vayan más allá de la simple aplicación de técnicas puntuales a problemas aislados, entonces creemos que el objetivo de un curso de transición Secundaria–Universidad tendría que facilitar este trabajo a los alumnos. En vez de una revisión rápida y necesariamente superficial, de una parte importante de los conocimientos que los alumnos acaban de estudiar (o de los que deberían haber estudiado), proponemos llevar a cabo un estudio detallado y en profundidad de unas pocas cuestiones problemáticas y con interés para los estudiantes, que les conduzcan a conectar conocimientos, a cuestionar las técnicas aprendidas y a desarrollarlas hasta dotarlas de más alcance y validez.

2. Diseño y experimentación de un «curso cero» de matemáticas desde el enfoque de la teoría antropológica de lo didáctico

A partir de los resultados sobre las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad ya presentados, reforzado por nuestro análisis exploratorio de los «cursos cero» existentes actualmente en las universidades españolas, proponemos diseñar y experimentar un curso que intente paliar dichas discontinuidades. En otras palabras, ante el fenómeno de la atomización y rigidez de las praxeologías matemáticas escolares, el problema didáctico que nos planteamos es el de diseñar un proceso de estudio que posibilite integrar ciertas praxeologías puntuales en una praxeología local relativamente completa.

2.1. Análisis a priori de la praxeología matemática a reconstruir

El curso que proponemos debe cumplir las características siguientes:

(1) El objetivo general es *la articulación de unas cuantas praxeologías matemáticas puntuales* o *locales* estudiadas en secundaria, que presenten un grado bajo de «completitud». Se trata de praxeologías que los alumnos no son capaces de conectar espontáneamente y que formen parte de una praxeología matemática *local central* en el programa de la asignatura de matemáticas de los estudios universitarios que iniciarán.

(2) La articulación de estas praxeologías matemáticas puntuales deberá hacerse como respuesta a una *cuestión problemática inicial* que tenga interés y «sentido» para los alumnos. Se pretende que la articulación de las praxeologías matemáticas puntuales tenga una *funcionalidad matemática* y no responda (solo) a presiones del contrato didáctico.

(3) La reconstrucción de la praxeología matemática local a partir de las praxeologías matemáticas puntuales que «aportan» los alumnos, debe provocar *que surjan y se integren de manera funcional los diferentes momentos del proceso de estudio* sin que haya el predominio de algunos pocos en detrimento de los otros.

2.1.1. *La praxeología matemática local que se quiere reconstruir*

La cuestión inicial Q_0 que hemos escogido como punto de partida del proceso didáctico puede condensarse en el estudio de desigualdades del tipo $f(x) \geq g(x)$ donde f y g son funciones «elementales» de variable real. El origen de esta cuestión se vincula a un problema de comparación de magnitudes económicas:

> ***Q_0*: *Determinar para qué ventas los ingresos de una empresa son mayores que los costes, o los precios unitarios mayores que los costes medios, o los beneficios mayores que un valor dado, o los costes menores que un valor dado, etc.***

Si modelizamos los ingresos, costes, precios unitarios, costes medios y beneficios de una empresa mediante funciones que dependen de una única variable —las ventas—, entonces la cuestión planteada conduce al estudio de una desigualdad del tipo considerado. Supondremos que en todos los casos, el modelo matemático $f(x) \geq g(x)$ ya está dado (es decir, no pediremos a los alumnos que determinen las funciones a partir de ciertas informaciones sobre la empresa) y que el problema reside en determinar los valores de x para los que se cumple la desigualdad.

La praxeología matemática que permitirá dar respuesta a la cuestión inicial Q_0 puede considerarse como una articulación de tres praxeologías matemáticas puntuales que se estudian en secundaria:

(1) La *resolución de ecuaciones* (lineales y cuadráticas, cúbicas con raíces enteras o racionales, logarítmicas o exponenciales muy sencillas), que designaremos por $\mathbf{P_{EQ}}$;

(2) La *resolución de inecuaciones algebraicas* (de primer y segundo grado básicamente), muy incipiente en secundaria y que designaremos por $\mathbf{P_{IN}}$;

(3) La *representación gráfica de funciones elementales* (polinomios de grado $\leq$ 3, funciones exponenciales y funciones racionales), que designaremos por $\mathbf{P_G}$.

Para los estudiantes que acaban el bachillerato, estas tres praxeologías aparecen muy poco conectadas entre sí. El estudio de ecuaciones forma parte del trabajo algebraico con expresiones de primer y segundo grado que los alumnos estudian con anterioridad a la introducción de las funciones. La resolución de los otros tipos de ecuaciones (cúbicas o logarítmicas y exponenciales elementales) aparece en diferentes temas del currículum, ligada normalmente al estudio de funciones, pero muy poco vinculada a su representación gráfica. Si bien la resolución de ecuaciones puede aparecer como una sub-técnica para la representación gráfica de funciones, las gráficas no se utilizan nunca como herramienta para resolver ecuaciones ni inecuaciones. De hecho, dentro del estudio de funciones, las gráficas siempre aparecen como el producto final de una técnica muy estandarizada que empieza con la determinación del dominio, el estudio de los límites de la función en los puntos frontera del dominio, la determinación de los puntos de corte con los ejes, el cálculo de la derivada, el estudio de la monotonía, la concavidad y convexidad, etc. En este sentido, la gráfica es siempre el objetivo único y final del proceso, no se considera nunca como un modelo de la relación entre dos magnitudes que puede resultar útil para resolver problemas. Los alumnos aprenden a representar funciones, pero no aprenden a hacer nada con estas representaciones. Por este motivo, cada función, sea o no elemental, se considera como un elemento aislado, casi como un pretexto para poner en marcha una técnica cuyos pasos están especificados previamente (dominio, límites, etc.) y que conduce a la construcción de la gráfica. En particular, no se estudian las familias de funciones elementales como tales ni, por tanto, las relaciones entre los valores de los parámetros que determinan una función de la familia y la forma de la gráfica de dicha función.

La hipótesis que asumimos es que, después de los estudios de secundaria, los alumnos son capaces globalmente de realizar, dentro de cada praxeología, los siguientes tipos de actividades:

$\mathbf{P_{EQ}}$: Resolver ecuaciones de primer grado mediante manipulaciones algebraicas, resolver ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula del discriminante, resolver ecuaciones de tercer grado —sólo si tienen una raíz racional— utilizando la técnica de factorización de Ruffini y resolver ecuaciones exponenciales del tipo $a \cdot b^x = c$.

$\mathbf{P_{IN}}$: Resolver inecuaciones de primer grado mediante manipulaciones algebraicas y, en algunos casos, resolver inecuaciones polinómicas del tipo $(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots (x - x_n) \geq 0$, con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números racionales.

$\mathbf{P_G}$: Dada una función elemental $f(x)$, buscar el dominio, límites, puntos de corte con los ejes, intervalos de variación, etc. hasta llegar a la representación gráfica.

Presentamos a continuación, a modo de *modelo epistemológico de referencia*, la manera como estas tres praxeologías proporcionan los ingredientes necesarios para producir una respuesta a la cuestión inicial Q_0 considerada y como la producción de la respuesta articula estos ingredientes insertando las praxeologías consideradas en una *praxeología local* más amplia y compleja. A partir de este modelo de recorrido matemático, formularemos el análisis a priori de la praxeología didáctica que proponemos experimentar en el «curso cero» diseñado. Finalmente describiremos la experimentación realizada y su evaluación a posteriori a partir de los resultados obtenidos.

2.1.2. Presentación del modelo epistemológico de referencia

La reconstrucción de una praxeología local que vaya más allá de la simple aplicación de una técnica para resolver un tipo de problemas requiere partir de un cuestionamiento «potente» —esto es, que requiera como respuesta una praxeología local relativamente completa— que guie y, a la vez, justifique el proceso de estudio que se tiene que tomar. En nuestro caso, la cuestión problemática que hemos escogido es:

Q_0: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son funciones cualesquiera?

Ante la imposibilidad de dar una respuesta única a esta cuestión, se decide considerar casos particulares de la misma, tomando como criterio las *familias* de funciones f y g consideradas: funciones afines, cuadráticas, cúbicas, hiperbólicas y exponenciales. Se verá que, al introducir nuevas familias de funciones, la técnica utilizada para resolver la desigualdad se tendrá que ir modificando. Se puede considerar así que la variable «familia de funciones» constituye el *motor* de la dinámica del estudio.

En el anexo 3.1 se encuentra el desarrollo completo de cada una de las sub-cuestiones y aquí solo presentaremos un esquema que lo resume:

- Consideramos una primera sub-cuestión que restringe el estudio a la desigualdad cuando las funciones son afines. En este caso se dispone de tres técnicas:
    - *Algebraica*, consistente en resolver directamente la desigualdad. En el caso de las funciones afines se debe distinguir entre los casos de f creciente y f decreciente debido al cambio de sentido de la desigualdad. Nos referiremos a esta técnica como τ_A.

- *Algebraica-ecuacional*, consistente en reducir la inecuación a la ecuación correspondiente y con los puntos solución establecer intervalos, estudiando en cada uno de ellos dónde se cumple la desigualdad. En el caso de las funciones afines, se trata de una técnica fiable y económica pero poco justificada. La llamaremos τ_{AE}.
- *Gráfica*, consistente en representar las dos funciones y ver gráficamente en que intervalos se cumple la desigualdad. En el caso de las funciones afines, se trata de una técnica fiable y fácil de justificar, pero poco económica. Nos referiremos a ella como τ_G.

- Consideramos una segunda sub-cuestión que restringe el estudio a la desigualdad cuando las funciones son polinómicas de grado dos. En este caso se dispone de las mismas tres técnicas:
  - *Algebraica*, que será apropiada únicamente en el caso en que las dos funciones tengan el mismo término cuadrático.
  - *Algebraica-ecuacional*, que es poco justificada (si no se recurre a la técnica gráfica) y poco económica debido al número de cálculos que se tienen que realizar.
  - *Gráfica*, es fiable y fácil de justificar.

- Consideramos una tercera sub-cuestión que restringe el estudio a la desigualdad cuando las funciones son polinómicas de grado tres. En este caso se dispone de cuatro técnicas:
  - *Algebraica*, que tendrá un alcance muy limitado.
  - *Algebraica-ecuacional*, que será fiable si las funciones *f*, *g* o *f–g* tienen raíces evidentes, pero siempre realizando muchos cálculos.
  - *Gráfica*, fiable y fácil de justificar siempre que las raíces sean evidentes.
  - *Gráfico-numérica*, consistente en realizar las gráficas y establecer de manera aproximada las raíces mediante algún método de aproximación de raíces[38]. En este caso se tratará de una técnica fiable y económica. Nos referiremos a ella como τ_{GN}.

[38] Método de la Dicotomía (o Bisección), Método de Newton, Método de la Secante, Método de la Regula-Falsi, etc.

- Consideramos una cuarta sub-cuestión que restringe el estudio a la desigualdad cuando las funciones son hiperbólicas. En este caso se dispone de las mismas cuatro técnicas:
  - *Algebraica*, que tendrá un alcance muy limitado.
  - *Algebraica-ecuacional*, también con alcance limitado y solo será fiable si las funciones *f–g* tienen raíces evidentes.
  - *Gráfica*, fiable y fácil de justificar siempre que las raíces sean evidentes.
  - *Gráfico-numérica*, fiable y económica si las raíces no son evidentes.

- Consideramos una quinta sub-cuestión que restringe el estudio a la desigualdad cuando las funciones son exponenciales. Disponemos de las cuatro mismas técnicas:
  - *Algebraica,* que tendrá un alcance limitadísimo.
  - *Algebraica-ecuacional,* también con alcance limitadísimo.
  - *Gráfica*, fiable y eficaz si la función *f-g* tiene ceros evidentes.
  - *Gráfico-numérica*, apropiada si las raíces no son evidentes.

- Consideramos una sexta sub-cuestión que restringe el estudio a la desigualdad cuando las funciones son de alguno de los tipos anteriores pero diferentes entre ellas. Las técnicas serán:
  - *Algebraica*, que tendrá un alcance limitado.
  - *Algebraica-ecuacional*, también con alcance limitado.
  - *Gráfica*, óptima si los ceros son evidentes.
  - *Gráfico-numérica*, óptima si los ceros no son evidentes.

Una vez considerados todos los casos particulares, si se tiene que estudiar la desigualdad $f(x) \geq g(x)$ donde f y g son funciones elementales cualesquiera (polinómicas de grado ≤ 3, hiperbólicas o exponenciales), se ha visto que, en general, las técnicas algebraicas acostumbran a no funcionar y que, por el contrario, las técnicas gráficas son mucho más eficientes y económicas, aunque sólo proporcionan, en general, respuestas aproximadas que se deben «afinar» posteriormente mediante algún método numérico. Por tanto, ahora ya se puede dar una primera respuesta a nuestra cuestión inicial Q_0:

Q_0: ¿Para qué *x* se cumple $f(x) \geq g(x)$ si *f* y *g* son funciones cualesquiera?

R_{01}: Si f y g son funciones elementales de los tipos considerados anteriormente, o de algún tipo para el cual se puede obtener fácilmente una representación gráfica, entonces se puede aplicar la técnica gráfica o la grafico-numérica y deducir el intervalo aproximado de valores x deseado.

R_{02}: Si no se dispone fácilmente de la representación gráfica de f y g, ni de alguna desigualdad $h(x) \geq k(x)$ equivalente, entonces se puede realizar un estudio «completo» de la función $f - g$ (estudiando los límites en la frontera del dominio, los intervalos de monotonía, etc.) y deducir un valor aproximado del intervalo solución a partir de la gráfica.

Una vez llegados a este punto, es fácil que del estudio de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$ surjan nuevas cuestiones problemáticas, como por ejemplo:

Q_1*: ¿Cómo asegurar, a partir solo de la gráfica (es decir, sin un estudio completo de la función $f - g$), que se han encontrado todos los puntos de corte entre f y g?

Esta cuestión pone de manifiesto la necesidad del estudio de las variaciones de $f - g$, por ejemplo utilizando derivadas, y puede servir como motivación del estudio «completo» que citábamos anteriormente.

También pueden surgir nuevas cuestiones a partir de variaciones de la cuestión inicial Q_0 como, por ejemplo, cómo varían las soluciones si se fija una de las dos funciones y se varía la segunda dentro de una determinada familia de funciones. Esta es la opción que hemos escogido nosotros en el recorrido que proponemos a los alumnos, al proponerles un nuevo tipo de problemas generado por el estudio de una cuestión económica donde se dispone de una *función de costes*, se tiene que «construir» la *función de ingresos* y se plantea el problema de escoger el precio unitario apropiado para que la empresa siempre tenga beneficios a partir de un determinado valor de ventas. Este tipo de problemas «refuerza» en cierto sentido el trabajo con la técnica gráfica y el interés de representar gráficamente las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en vez de la diferencia $f(x) - g(x)$.

Q_0: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son funciones cualesquiera?

Praxeologías disponibles:

Algebraica
Algebraico-Ecuacional
Gráfica
Gráfico-Numérica

Q_1: f y g afines $\rightarrow R_1$

Q_2: f y g polinómicas de grado 2 $\rightarrow R_2 \supset R_1$

Q_3: f y g polinómicas de grado 3 $\rightarrow R_3 \supset R_2 \supset R_1$

Q_4: f y g racionales $\rightarrow R_4$

Q_5: f y g exponenciales $\rightarrow R_5$

Q_6: f y g funciones de los tipos anteriores pero diferentes entre ellos $\rightarrow R_6 \supset \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$

Q_7: f y g no son ninguna de les funciones anteriores $\rightarrow R_7 \supset R_6$

Tabla 3.1. Resumen del modelo epistemológico de referencia utilizado en el curso «cero» del 2006/07.

Estas consideraciones se aclararan en el próximo apartado con la presentación del análisis a priori de la praxeología didáctica que se experimentará. En el anexo 3.2 se presentan unas tablas que resumen los análisis anteriores indicando, para cada sub-cuestión considerada, aquellos aspectos (técnicos y también tecnológico-teóricos) en los que las diferentes praxeologías consideradas se muestran eficaces y a la vez las limitaciones que presentan.

2.2. Análisis a priori de la praxeología didáctica

El curso que aquí presentamos estaba dirigido a alumnos que iniciaban sus estudios universitarios en ADE o Ciencias Empresariales de la Facultat d'Economía IQS de la Universitat Ramon Llull (Barcelona) y fue programado y realizado por nuestro equipo de investigación en didáctica teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones de este equipo sobre las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad (Fonseca 2004).

El objetivo del curso era intentar iniciar procesos de estudio motivados por una cuestión problemática inicial relacionada con los estudios que van a empezar permitiendo la construcción de *praxeologías locales relativamente completas* como respuesta a esta cuestión.

El curso se estructuró en dos bloques diferenciados. El primero estaba dedicado al trabajo con desigualdades entre funciones elementales («Ingresos y Costes»), y el segundo a la modelización elemental con parámetros («Compra y venta de camisetas»). Al final de estos dos bloques se realizó una prueba final.

A continuación presentaremos el diseño a priori del proceso de estudio. Lo hemos estructurado en unidades, que se corresponden aproximadamente con las diferentes sesiones del curso, donde cada una de ellas se presenta en forma de una tabla dividida en cuatro partes fundamentales:

1. El objetivo, estructura y principales contenidos de la unidad (O–E–C);
2. La referencia al recorrido matemático (RM) en el que está centrada la unidad, en relación al modelo epistemológico de referencia presentado en el apartado anterior;
3. El diseño a priori del recorrido didáctico (RD) propuesto, es decir, la descripción de como se tienen que hacer evolucionar temporalmente los aspectos más importantes del proceso de estudio. También se encuentra la documentación necesaria y la forma de gestionar los diferentes momentos del proceso de estudio.

   Para indicar de quien es la responsabilidad de cada tarea en cada momento distinguiremos diferentes posiciones: PR — profesor, AI — alumno individual, GA — grupo(s) de alumno(s) en que se divide la clase y CE — comunidad de estudio (grupo clase con profesor);
4. Algunos elementos importantes para la gestión del recorrido didáctico (GRD).

Solo presentaremos aquí el análisis didáctico a priori correspondiente al bloque dedicado a las desigualdades. Veremos cómo, al principio, las unidades corresponden a la completación de las diferentes praxeologías matemáticas consideradas inicialmente hasta llegar a la técnica gráfica que se tiene que ir construyendo y completando poco a poco a medida que se introducen nuevas familias de funciones. La última unidad corresponde al estudio de una cuestión económica donde también se tiene que comparar una función de ingresos y una de costes pero la primera no viene dada explícitamente. Además, el tipo de cuestiones que se plantean requieren considerar diferentes funciones de ingresos y de costes a medida que se varía el precio unitario o el coste fijo, provocando así una pequeña variación de la técnica gráfica.

2.2.1. Estudio de funciones elementales con parámetros: «Ingresos y Costes»

El trabajo de esta primera parte del curso consiste básicamente en abordar la cuestión de la comparación de dos funciones de una variable —una de ingresos y otra de costes— mediante la representación gráfica de funciones elementales. Este trabajo requiere la articulación de tres praxeologías puntuales —P_{EQ}, P_{IN} y P_G— que los alumnos han estudiado en bachillerato.

UNIDAD 1: (3 horas)	
O–E–C	- Presentación de la cuestión Q_0: Sea $B(x)$ la función de beneficio de una empresa que produce x productos, ¿cuántos productos tiene que producir para obtener ganancias, es decir, para que valores de x el beneficio $B(x)$ es positivo? Se tiene que interpretar Q_0 como un caso particular de la cuestión presentada en el apartado 2.1.2: $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow I(x) - C(x) \geq 0 \Leftrightarrow I(x) \geq C(x)$ - Comentar que la cuestión inicial Q_0 pretende modelizar una situación real, pero ante la imposibilidad de estudiar funciones de varias variables (ya que los alumnos todavía no la han estudiado) nos reduciremos al caso en el que el beneficio depende de una única variable. - Considerar otras cuestiones que se podrían plantear: caso del beneficio máximo, estudio de sus variaciones, etc. - Recordatorio de las familias de funciones que se han estudiado en secundaria.
RM	Planteamiento de Q_0 y exploración rápida de τ_A, τ_{AE} y τ_G, conocidas por los alumnos, en el caso de funciones afines, parabólicas y cúbicas.
RD	Documentación: Entrega de la lista de funciones. (ver el anexo 3.3). Evolución y gestión del recorrido didáctico: *Momento del primer encuentro del grupo de alumnos(GA):* Presentación de la cuestión generatriz Q_0 y trabajo en gran grupo hasta plantear la desigualdad $I(x) > C(x)$. Los alumnos se distribuyen en grupos de 2 ó 3 y empiezan a trabajar la cuestión planteada para las primeras funciones de la lista (afines, parabólicas y cúbicas). *Trabajo exploratorio (GA):* Trabajo en grupos para la redacción de la primera respuesta provisional a Q_0. Uno de los objetivos es observar con qué técnica resuelven la cuestión, que notación utilizan y si verifican la solución encontrada. *Institucionalización y evaluación (PR y CE):* El profesor, una vez ha analizado las respuestas dadas (aprovechando una pausa a media clase), hace una síntesis en la pizarra de desigualdades entre dos pares de funciones afines (una sin cambio de signo y otra con cambio) y entre dos pares de cuadráticas, indicando las diferentes técnicas que han aparecido, la facilidad o dificultad de uso y sus limitaciones. En el estudio del caso cuadrático se introduce la técnica gráfica (los alumnos ya saben, en principio, representar parábolas) que tiene que aparecer como la más potente, siempre y cuando se pueda aplicar de manera rápida y fiable (sin tener que hacer el estudio de cada función).
GRD	El profesor no tiene que participar en la elaboración de las respuestas de los alumnos ya que se intenta que aparezcan de manera espontánea las principales «maneras de hacer» que se enseñan en secundaria. En la evaluación e institucionalización hace falta buscar un nombre compartido (con los estudiantes) para designar las técnicas y sus componentes. También hace falta enfocar la evaluación como una característica de las técnicas utilizadas y no de las capacidades o errores de los estudiantes. Se puede aprovechar para poner en evidencia las carencias teóricas de los alumnos en lo que respecta a la justificación y validación de las técnicas: cómo se pueden justificar, cuándo y porqué son válidas, cuándo y porqué no lo son, cómo se pueden generalizar, etc.

UNIDAD 2: (3 horas)	
O–E–C	Propuesta de utilización de la técnica gráfica por su potencia y eficacia *siempre y cuando no se tenga que hacer el estudio «completo» de las funciones.* Programación del estudio: agrupación de los casos según los tipos de funciones. Delimitación del problema inicial al estudio de las funciones cuadráticas.
RM	$Q_2 \subset Q_0 \rightarrow \tau_A$, τ_{AE} y τ_G
RD	Documentación: la misma lista de funciones Evolución y gestión del recorrido didáctico: *Institucionalización (PR y CE):* El profesor expone los principales ingredientes (técnicos y teóricos) de τ_G para el caso de las parábolas: Translaciones horizontales y verticales, dilataciones, diferentes escrituras de la ecuación de la parábola. Una vez explicada la representación gráfica de la parábola ya se puede dar respuesta a Q_2. Se aprovecha para exponer P_G para el caso de las funciones afines (Q_1) y dar una primera respuesta parcial a Q_0 en el caso que las funciones implicadas sean afines o polinómicas de grado 2. *Momento exploratorio (GA):* Se pide a los alumnos que consideren las funciones de la lista donde están implicadas parábolas y rectas. *Trabajo de la técnica (GA):* Diferentes maneras de aplicar las translaciones y dilataciones; diferentes escrituras posibles; casos sencillos ($y = a(x - x_0)\cdot(x - x_1)$); variaciones de la técnica ($y = a\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1) + k$); combinaciones entre rectas y parábolas; etc. *Momento tecnológico-teórico (GA y CE):* Pueden surgir cuestiones como las siguientes, que el profesor anotará en la pizarra: - Podemos estar seguros que dos parábolas sólo cortaran en el(s) punto(s) encontrado(s)? - Se han estudiado todas las configuraciones posibles? - Cómo interpretar los casos donde no hay puntos de corte entre les funciones implicadas? *Momento de la institucionalización y evaluación (de la técnica gráfica) (CE y PR):* Al principio de la siguiente clase el profesor hace una síntesis del trabajo realizado indicando los casos más fáciles y aquellos donde surge algún tipo de complicación (variaciones técnicas).
GRD	Los casos no considerados en clase se dejan para hacer en casa. La representación gráfica de la parábola acostumbra a ser del dominio del alumno. El trabajo con las translaciones y dilataciones, no. La técnica gráfica es poco sensible a los errores numéricos. Los alumnos oponen resistencia cuando se les pide cambiar de técnica respecto a lo que han hecho en secundaria.

UNIDAD 3: (3 horas)	
O–E–C	Propuesta de utilización de la técnica gráfica por su potencia y eficacia en el caso de las funciones polinómicas de grado 3. Programación del estudio: agrupación de los casos según los tipos de funciones. Delimitación del problema inicial a las funciones cúbicas.
RM	$Q_3 \subset Q_0 \rightarrow \tau_A, \tau_{AE}, \tau_G$ y τ_{GN}
RD	Documentación: la misma lista de funciones. Evolución y gestión del RD: *Institucionalización (CE y PR):* El profesor, después de hacer una síntesis del caso cuadrático expone los principales ingredientes (técnicos y teóricos) de P_G para el caso de las cúbicas: translaciones, dilataciones; cambios de variable. Al intentar dar respuesta a Q_3 puede pasar que los puntos de corte no sean evidentes y por tanto se deba introducir P_{GN}. Una vez explicada la representación gráfica de la cúbica se puede dar respuesta a Q_3 y a Q_0 en el caso que las funciones implicadas sean polinómicas de grado ≤ 3. *Momento exploratorio (GA):* Se pide a los alumnos que consideren las funciones de la lista donde están implicadas cúbicas, parábolas y rectas y que intenten dar respuesta a Q_3 y Q_0 (para el caso afín, cuadrático y cúbico). *Trabajo de la técnica (GA):* Diferentes maneras de aplicar las translaciones y dilataciones; diferentes escrituras posibles; casos sencillos ($y = a(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot (x - x_2)$); variaciones de la técnica ($y = a\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot (x - x_2) + k$); combinaciones entre rectas, parábolas y cúbicas; etc. *Momento tecnológico-teórico (GA y CE):* Pueden surgir cuestiones como las siguientes: • ¿Podemos estar seguros que dos cúbicas sólo cortaran en los puntos encontrados? • ¿Se han estudiado todas las configuraciones posibles? • ¿La aproximación numérica de los puntos de corte se podría hacer más rápidamente? *Momento de la institucionalización y evaluación (de la técnica gráfica) (CE y PR):* Al principio de la siguiente clase el profesor hace una síntesis del trabajo realizado indicando los casos más fáciles y aquellos donde surge algún tipo de complicación (variaciones técnicas).
GRD	A diferencia de lo que pasa con las parábolas, la representación de las cúbicas no acostumbra a ser del dominio del alumno de secundaria. Los casos no considerados en clase se dejan para hacer en casa.

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD 4: (3 horas)</th></tr>
<tr><td>O–E–C</td><td>Propuesta de utilización de la técnica gráfica para las funciones hiperbólicas.
Programación del estudio: agrupación de los casos según los tipos de funciones.
Delimitación del problema inicial a las funciones hiperbólicas.</td></tr>
<tr><td>RM</td><td>$Q_4 \subset Q_0 \rightarrow \tau_A, \tau_{AE}, \tau_G$ y τ_{GN}</td></tr>
<tr><td>RD</td><td>Documentación: misma lista de funciones.

Evolución y gestión del RD:
Institucionalización (CE y PR):
Después de la síntesis del trabajo hecho con las cúbicas, el profesor expone los principales ingredientes (técnicos y teóricos) de P_G para el caso de les hipérbolas: translaciones horizontales y verticales, dilataciones; diferentes escrituras de la ecuación de la hipérbola.
Al intentar dar respuesta a Q_4 puede pasar que los puntos de corte no sean evidentes, pero siempre se pueden calcular porque el problema se reduce a resolver una ecuación de segundo grado.
Una vez explicada la representación gráfica de la hipérbola podemos dar respuesta a Q_4 y a Q_0 en el caso que las funciones implicadas sean polinómicas de grado ≤ 3 e hipérbolas.
Momento exploratorio (GA):
Se pide a los alumnos que consideren las funciones de la lista donde están implicadas cúbicas, parábolas, hiperbólicas y afines y que intenten dar respuesta a Q_4 y Q_0 (para el caso afín, cuadrático, cúbico e hiperbólico).
Trabajo de la técnica (GA):
Diferentes manera de aplicar las translaciones y dilataciones; diferentes escrituras posibles; combinaciones entre rectas, parábolas, cúbicas e hipérbolas; etc.
Momento tecnológico-teórico (GA y CE):
Pueden surgir cuestiones como las siguientes:
¿Podemos estar seguros que dos hipérbolas sólo cortarán en los puntos encontrados?
¿Se han estudiado todas las configuraciones posibles?
¿En qué casos se pueden calcular los puntos de corte?
¿Cuándo se tienen que aproximar?
Momento de la institucionalización y evaluación (CE y PR):
Al principio de la siguiente clase, el profesor hace una síntesis del trabajo realizado indicando los casos más fáciles y aquellos donde surge algún tipo de complicación (variaciones técnicas).
Hace falta recalcar que la técnica gráfica «por transformaciones de funciones elementales» es más rápida y eficaz que la técnica de estudio «completo» de una función que los alumnos aprenden a utilizar en secundaria.</td></tr>
<tr><td>GRD</td><td>Tal como pasaba con las cúbicas, los alumnos de secundaria tampoco dominan la representación gráfica de las hipérbolas. Así que tendrán tendencia a retomar la técnica de estudio «completo» de una función que es la que saben utilizar. Hace falta hacerles ver que es de aplicación mucho más compleja, aunque para ellos les parezca más fácil que la técnica nueva (evaluación).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">UNIDAD 5: (3 horas)</td></tr>
<tr><td>O–E–C</td><td>Propuesta de utilización de la técnica gráfica para las funciones exponenciales.
Programación del estudio: agrupación de los casos según los tipos de funciones.
Delimitación del problema inicial a las funciones exponenciales.</td></tr>
<tr><td>RM</td><td>$Q_5 \subset Q_0 \rightarrow \tau_A, \tau_{AE}, \tau_G$ y τ_{GN}</td></tr>
<tr><td>RD</td><td>Documentación: misma lista de funciones.

Evolución y gestión del RD:
Institucionalización (CE y PR):
Después de la síntesis del caso de las hipérbolas, el profesor expone los principales ingredientes (técnicos y teóricos) de P_G para el caso de las exponenciales: translaciones horizontales y verticales, dilataciones; correspondencia con las diferentes escrituras de la ecuación de la función exponencial.
Al intentar dar respuesta a Q_5 puede pasar que los puntos de corte no sean evidentes y por tanto se tenga que introducir P_{GN} o recordar el uso de logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales.
Momento exploratorio (GA)
Se pide a los alumnos que consideren las funciones de la lista donde están implicadas exponenciales, cúbicas, parábolas, hipérbolas y afines, y que intenten dar respuesta a Q_5 y Q_0.
Trabajo de la técnica (GA)
Diferentes maneras de aplicar las translaciones y dilataciones; diferentes escrituras posibles; combinaciones entre rectas, parábolas, cúbicas e hipérbolas; etc.
Momento tecnológico-teórico (GA y CE)
Pueden surgir diferentes cuestiones:
• ¿Podemos estar seguros que dos exponenciales sólo cortaran en los puntos encontrados?
• ¿Se ha estudiado toda la casuística (configuraciones posibles)?

Momento de la institucionalización y evaluación (de la técnica gráfica) (CE y PR)
Hace falta indicar al final de la clase cuales son las funciones de la lista que no son de ninguno de los tipos estudiados en las sesiones anteriores y que son, precisamente, aquellas que delimitan el ámbito de validez de la técnica gráfica. Esto facilita la síntesis del trabajo realizado hasta el momento y conduce a escribir mediante parámetros los tipos de funciones utilizadas hasta el momento: $af(x - b) + c$, donde $f(x)$ es de los tipos considerados. Pueden aparecer variaciones «fuertes» de la técnica gráfica, por ejemplo con funciones del tipo $f(\alpha x - b)$ o $f(x^2)$.</td></tr>
<tr><td>GRD</td><td>Esta sesión tiene que ser más «ágil» que las anteriores para que quede tiempo al final para la institucionalización del recorrido global y para la evaluación de la técnica gráfica.

Se dejan para hacer en casa los casos que no se hayan podido estudiar en clase y aquellas funciones que salen fuera del ámbito de validez de la técnica gráfica.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD 6: (3 horas)</th></tr>
<tr><td>O–E–C</td><td>Estudio de una cuestión económica donde el modelo propuesto se reduce al estudio de una desigualdad donde una función es fija y viene dada, y la otra se tiene que construir y varía en función de un parámetro (precio unitario). Esta situación pone en evidencia la «economía» y eficacia del uso de la técnica gráfica.</td></tr>
<tr><td>RM</td><td>Situación económica → P_{GN}</td></tr>
<tr><td>RD</td><td>Documentación: Lista de problemas (ver anexo 3.4)

Evolución i gestión del RD:
Momento exploratorio (AI y CE)
El trabajo se hace de forma individual. Cada alumno lee el enunciado del primer problema y se comenta el primer caso en la pizarra para asegurarse que todos los estudiantes han construido el modelo apropiado $I(x) > C(x)$.
Momento del trabajo de la técnica y tecnológico-teórico (AI y CE)
La resolución del problema requiere una variación técnica sostenida por la interpretación teórica que el coste fijo corresponde a la translación vertical de la función de costes (problema 1) y que el precio unitario corresponde a la pendiente de la recta. La variación de estos dos parámetros permite modificar el intervalo de soluciones y es sobre esta variación que hace falta razonar en este caso.
Institucionalización y evaluación (AI)
Al volver de la pausa se corrige el primer problema y, si no hay tiempo de acabar el segundo, se propone entregarlo el próximo día para hacer una evaluación individual.
La evaluación de todo el trabajo llevado a cabo se hace con la prueba final.
De hecho, la resolución de estos dos problemas, con las (pequeñas) variaciones técnicas y teóricas que suponen, se corresponde con la verdadera evaluación de la P_G que se ha construido hasta el momento.</td></tr>
<tr><td>GRD</td><td>Dado que es el primer trabajo de modelización que se propone a los alumnos, es importante que el profesor se asegure que todos los alumnos entienden las diferentes interpretaciones que se les pide y que no de por evidente ninguna de estas interpretaciones.

Puede surgir la cuestión de saber si el número de artículos producidos y el número de artículos vendidos coinciden. Hace falta remarcar que es una hipótesis que hacemos para simplificar el trabajo de modelización a pesar que sea poco realista.</td></tr>
</table>

2.2.2. Modelización elemental con parámetros: «Compra y venta de camisetas»

La segunda parte del curso se adentra en el trabajo de modelización matemática propiamente dicha. El caso propuesto proviene de un trabajo de investigación de nuestro grupo (Ruiz-Munzón 2010) centrado en la enseñanza de la modelización algebraico-funcional en bachillerato. Simula una situación potencialmente real en la que un grupo de estudiantes hace una consulta al grupo-clase para que les digan si un determinado negocio de estampación y venta de camisetas dará unos beneficios deseados:

PEDIDO 1. ¿Cómo ganar 1000 € vendiendo camisetas?

Un grupo de alumnos de segundo de bachillerato han decidió estampar y vender camisetas en la fiesta mayor del barrio para financiarse el viaje de fin de curso. Tienen datos de sus compañeros de cursos anteriores. De momento, saben que, en los años anteriores, se tenía que pagar 150 € al ayuntamiento por el alquiler del *stand* de la feria.
Os pedimos que los ayudéis a determinar una estrategia por tal de recoger unos 1000 € de beneficios.

Curso	03 / 04	03 / 04	03 / 04	04 / 05	05 / 06
Ventas camisetas	70	180	120	243	160
Costes totales	325	600	450	757.5	550
Ingresos totales	280	720	480	972	640

Tabla para hacer estrategias:

Precio	**Coste**	**Alquiler**	**Ingresos**	**Costes**	**Beneficio**	**Observaciones**
p	*c*	*L*	*I*	*C*	$B = I - C$	Para obtener un beneficio de 1000€….

El estudio de esta situación se puede expresar inicialmente mediante una desigualdad del tipo $B(x) = I(x) - C(x) > 1000$, donde $I(x) = px$ es la función de ingresos (siendo p el *precio unitario* de venta) y se introducen dos funciones de costes, una lineal: $C_1(x) = cx + L$ (siendo c el *coste unitario* de fabricación o de compra de las camisetas y L el *alquiler* del stand) y una cuadrática $C_2(x) = (\alpha + Kx)x + L$ (siendo $c = \alpha + Kx$ un coste unitario que crece con la producción x).

En ninguno de los dos casos el estudio de la desigualdad $B(x) = I(x) - C(x) > 1000$ conduce directamente a una solución «realista» porque el número de ventas necesarias para obtener 1000 € de beneficios no corresponde ni se aproxima a las ventas obtenidas por grupos de alumnos hasta el momento. Se requiere entonces que se discutan diferentes estrategias posibles: aumento del precio unitario p, disminución de los costes *c*, aumento de las ventas *x*. Hace falta por lo tanto ir planteando nuevas situaciones más complejas que se modelicen mediante familias de funciones de una variable con parámetros (rectas, parábolas o hipérbolas). Es precisamente en la manipulación de los parámetros donde se encuentra la solución final.

En la primera sesión (Pedido 1 – costes lineales), los alumnos trabajan por grupos en la resolución de la cuestión planteada y se discuten las posibles respuestas. Ante el fracaso de todas ellas, se determinan distintas estrategias según el número y tipo de parámetros escogidos: coste unitario de las camisetas, precio unitario de venta, costes fijos del local. Cabe destacar lo que podríamos llamar la «creatividad» de los alumnos en el tratamiento de la cuestión planteada por lo que respecta a las diferentes estrategias de venta propuestas. En lugar de proponer las variaciones de parámetros que habíamos previsto (aumentar el precio de venta o disminuir los costes), surgieron en clase propuestas más variadas y más realistas, como hacer ofertas para las ventas grandes («un artículo gratis si se compran 3») con la consiguiente complicación matemática de obtener un modelo funcional apropiado.

En la segunda sesión los grupos de alumnos consideraron las diferentes posibilidades de variación de los parámetros y, mediante el recurso a modelos algebraicos (los modelos gráficos no son necesarios en este punto), obtuvieron conjuntamente una respuesta viable al problema, destacando el parámetro pertinente $p - c$ (diferencia entre el precio unitario y el coste unitario).

En la tercera sesión se les hace entrega de otro pedido (Pedido 2 – función de costes cuadrática):

PEDIDO 2. ¿Cómo ganar 7000 € vendiendo camisetas?

Una tienda de deportes también ha venido a pedirnos ayuda. Esta tienda vende un tipo especial de camisetas y nos piden que estudiemos su negocio y que hagamos propuestas para mejorar la rentabilidad de forma que obtengamos con sus ventas un beneficio de 7000 €, sabiendo que las ventas se encuentran entre 300 y 3000 unidades.

Sabemos que el alquiler mensual del local es de 1200€. Otra información adicional a tener en cuenta es que el coste de una camiseta no es constante, depende linealmente del número de camisetas compradas: $c = 10^{-5}x + 2{,}5$ (donde x es el número de camisetas compradas).

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Ventas camisetas	886	900	1093	2450	1660	2670
Costes totales	3422,85	3458,10	3944,45	7385,03	5377,56	7946,29
Ingresos totales	3544	3600	4372	9800	6640	10680

La tienda de deportes ha realizado anteriormente un estudio de mercado del cual ha recibido la siguiente información:
- El precio de venta del producto que nos han proporcionado no puede ser superior a 5 €.
- El coste unitario para ventas pequeñas siempre será mayor que 2 €.
- El precio del alquiler de un local en misma zona es superior a 900 €.

En este caso, la consideración de las desigualdades con parámetros hace indispensable el uso de modelos gráficos (parábolas e hipérbolas con asíntotas oblicuas). Para abordar este segundo pedido, los alumnos partieron de los resultados obtenidos en el primer pedido y recurrieron a los modelos gráficos de manera bastante ágil.

2.2.3. Prueba final

Finalmente se propuso a los alumnos una prueba final dividida en dos partes. La primera hacía referencia a la primera parte del curso (resolución gráfica de una desigualdad funcional). La segunda proponía una situación de consultoría análoga a la de la segunda parte del curso (compra y venta de pulseras).

Una empresa produce x unidades de un producto. Determinar el intervalo de producciones x aconsejadas si sabemos que la función de ingresos es $I(x) = \frac{-3}{x+1} + 3$, y la de costes es $C(x) = x^3+0,5$.

El coste de producción de un determinado artículo es $k(x) = x^2 + 2x + 4$, donde x es el número de unidades. El artículo se vende a 7 € por unidad.

(i) Representar en un mismo gráfico la función de ingresos y la de costes.
(ii) Determinar el intervalo de producciones para las cuales se obtienen beneficios.
(iii) Cómo cambiará este intervalo si los costes fijos aumentan a 9 €? Dar una explicación a partir de la gráfica.
(iv) ¿Cómo cambiará este intervalo si se decide aumentar el precio de venta a 9 € por unidad? Dar una explicación a partir de la gráfica.

Los alumnos de 1º de bachillerato quieren vender pulseras de goma con los colores del instituto para recoger dinero para el viaje de fin de curso. El coste de cada pulsera es de 0,30 € y las quieren vender a 1 €. El precio del alquiler de la parada es de 80 €.

1. Escribir la función de ingresos $I(x)$, la de costes $C(x)$ y la de beneficios $B(x)$.
2. Representar la función beneficio.
3. Indicar en la gráfica el número mínimo de ventas para obtener beneficios positivos.
4. Utilizar la gráfica para calcular aproximadamente cuantas pulseras se tienen que vender para obtener un beneficio de 750 €. Calcularlo exactamente.
5. Explicar cómo varia la gráfica de la función de beneficios y el número mínimo de ventas para obtener 750 € de beneficios en los casos siguientes:
   i. El precio de las pulseras sube a 1,20 €.
   ii. El coste de las pulseras sube a 0,35 €.
   iii. El alquiler de la parada baja a 65 €.
6. Si el alquiler de la parada es de 100 €,

i. Determinar cuál ha de ser la relación entre el precio de venta y el precio de coste de cada pulsera para obtener un beneficio de 750 € con la venta de 500 pulseras.
ii. ¿Se puede obtener este beneficio con estas ventas, vendiendo pulseras a menos de 1,5€? ¿Se puede obtener este beneficio con estas ventas, vendiendo pulseras al doble de su precio de coste?

Como se puede observar, el primer problema corresponde exactamente a una desigualdad como las trabajadas en la primera parte el curso, donde se debe comparar una cúbica y una hipérbola. El segundo problema reproduce una situación muy similar a los dos problemas estudiados en la unidad seis con funciones de costes cuadráticas donde se pide realizar e interpretar dos variaciones: la de los costes fijos (translación vertical de la función de costes) y la del precio unitario (aumento de la pendiente de la recta de ingresos). El tercer problema propone un estudio análogo al del caso de las camisetas cuando la función de costes es lineal. Las preguntas son muy detalladas e incluyen aspectos técnicos e interpretaciones en términos del sistema económico considerado.

2.3. Descripción de la experimentación

El curso que se propone aquí ha sido experimentado en la Facultat d'Economia IQS de la Universitat Ramon Llull en el mes de septiembre de los años 2004, 2005 y 2006, tanto en sesiones de mañanas como de tardes. En los seis casos, la duración del curso ha sido de 30 horas distribuidas en 10 sesiones. El número de alumnos ha variado entre los 40 y 50 por sesión. Durante los cursos del 2004 y 2005 hubo dos profesoras, una por la mañana y otra por la tarde, y una observadora para el grupo de tardes. Durante el curso 2006 una profesora diferente de las dos anteriores se responsabilizó de los dos grupos de mañanas y tardes. Este curso no fue objeto de observación.

La estructura y la gestión de cada sesión han sido bastante similares en todas las experiencias. Nosotros consideraremos aquí el curso experimentado en septiembre de 2005 en la sesión de tardes. Descartamos la experimentación del 2004 ya que creemos que una primera edición no es óptima para el análisis al no tener referencias previas.

A continuación detallaremos brevemente como se vivió la experimentación de este curso en relación con el análisis a priori (§2.2):

- Unidad 1

Se presentó a los alumnos la cuestión general Q_0 (comparar ingresos con costes) y se entregó el primer listado de funciones (cf. anexo 3.3). Tal y como se ha descrito en el análisis a priori del recorrido didáctico, el profesor inició el *momento del primer encuentro*, especificó la cuestión en términos del estudio de desigualdades entre funciones y dejó a los alumnos explorar los problemas por grupos. La distribución se hizo por grupos de 2 ó de 3 personas. Creemos que hubiese sido mejor hacerlos de 4, ya que hubiera facilitado la comunicación y el debate. Los grupos estuvieron discutiendo las primeras inecuaciones durante tres cuartos de hora. Cada grupo entregó un informe con las soluciones. Se hizo una pausa para que la profesora revisara todos los informes donde efectivamente se comprobó que las técnicas dominantes en secundaria son algebraicas y que los alumnos no validan las soluciones ni saben cómo expresar la solución de una inecuación (que es un intervalo de valores y no un número concreto). A la vuelta de la pausa, la profesora introdujo en la pizarra la técnica gráfica para invalidar las soluciones erróneas propuestas por los alumnos, especialmente en el caso de las inecuaciones de segundo orden. Se deja para hacer en casa el estudio de las otras funciones cuadráticas y lineales presentes en la lista.

- Unidad 2

Una vez «motivada» en la sesión anterior la necesidad de la técnica gráfica, la profesora explica a los alumnos las traslaciones y dilataciones que permiten pasar de la parábola $y = x^2$ a $y = a(x - b)^2 + c$. De entrada, los alumnos son un poco escépticos y quieren volver siempre a la técnica aprendida previamente: dar valores a la función y, a lo sumo, encontrar los puntos de corte con el eje Ox.

- Unidad 3, 4 y 5

En este caso, como que los alumnos no dominan la representación gráfica de las cúbicas, hipérbolas y exponenciales, la técnica de las transformaciones les parece apropiada y no ofrecen tanta resistencia como en el caso de las parábolas. En general los alumnos que asistían al curso tenían una buena preparación matemática, lo que explica mejor sus «resistencias» a técnicas nuevas cuando ya dominan otras. Se adaptaron rápidamente a la técnica gráfica porque les proporcionaba una visión más global y comprensible de las situaciones consideradas.

- Unidad 6

Esta última unidad de resolución de problemas de modelización fue como la daga final para los que se habían resistido a cambiar de técnica, ya que las interpretaciones y las pequeñas variaciones de la gráfica hacían poco apropiadas tanto la técnica algebraica de resolución de inecuaciones como la técnica de la representación gráfica «paso por paso». También queremos comentar que en general los alumnos se mostraban satisfechos de estudiar casos económicos «reales» que les aportaba una visión funcional de la matemática y, muy especialmente, del trabajo que habían hecho hasta el momento.

Globalmente, y como pasa siempre que se trabaja con grupos de alumnos, el ritmo de trabajo y el bagaje matemático del grupo era bastante heterogéneo. Además, el hecho de venir de centros de secundaria diferentes, otorgaba a la actividad propuesta una nueva función que no habíamos previsto: la de unificar las pequeñas variaciones que se producen en las notaciones, designaciones y «maneras de decir» que a veces complican mucho la comunicación matemática con los alumnos.

2.4. Análisis y resultados obtenidos

Uno de los objetivos de las experimentaciones es ver que incidencia ha tenido sobre los alumnos la realización del curso experimentado desde el punto de vista del *rendimiento académico*. Evidentemente hay muchos factores que influyen y, por tanto, a la hora de hacer un análisis tenemos que acotar las variables que queremos estudiar. En todo caso no pretendemos llevar a cabo un análisis de corte experimentalista ni un control completo de todas las variables.

En primer lugar, tenemos que definir lo que entendemos por «rendimiento». Dado que en el curso «cero» solo se trabaja el tema de la modelización funcional con una variable, hemos creído conveniente estudiar la incidencia de la asistencia al curso sobre *la nota del primer parcial* que es el que corresponde al estudio de funciones en una variable (el curso consta de tres bloques: Funciones en una variable, Funciones en varias variables y Álgebra lineal).

Una vez establecida la nota sobre la que haremos el estudio, escogimos hacer un diseño factorial completo[39] tomando como posibles factores los siguientes:

- Asistencia al curso (mínimo el 80% de les sesiones);
- Haber demostrado interés en la asignatura de matemáticas (a criterio del profesor responsable: asistencia continuada a les clases, entrega de ejercicios, etc.);
- Opción de Matemáticas en Bachillerato (científico-tecnológico o ciencias sociales);
- Procedencia (bachillerato o de ciclos formativos).

Cada uno de estos factores únicamente puede tomar dos valores, existiendo por tanto 2^4 combinaciones posibles. Construimos una matriz de Box, Hunter & Hunter (Box, Hunter & Hunter 1999) para considerar un diseño factorial completo 2^4 y obtenemos como resultados más relevantes que (1) haber asistido al curso sobre la nota del examen del primer parcial es *el segundo factor más importante* después del hecho de provenir de bachillerato y no de ciclos formativos y (2) el hecho de haber realizado el curso cero ha permitido que los alumnos obtuviesen por término medio *17,59 puntos más (sobre 100)* que los que no lo han realizado.

Otro de los objetivos de nuestra experimentación, al margen del aspecto de la incidencia académica, es la valoración que asignan los alumnos al trabajo realizado. Por ello, pasamos un cuestionario (que se puede consultar en el anexo 3.5) en cada una de las experimentaciones en las que se pide valorar diferentes aspectos del curso: novedad del tipo de trabajo realizado, relación con las matemáticas de secundaria, ritmo de trabajo, explicaciones de los profesores, expectativas iniciales, «cantidad» de conceptos nuevos abordados, aprovechamiento del curso, adecuación del horario, duración, etc. En el anexo 3.6 mostramos los resultados obtenidos en la encuesta pasada a los alumnos del curso 2004/05, de los que destacamos aquí los siguientes puntos:

[39] Estudio realizado en el marco del curso de doctorado «Diseño de Experimentos» de la Facultat d'Economia IQS durante el curso 2004/05.

(1) En general podemos hablar de una *satisfacción general del curso*: los alumnos no destacan grandes insuficiencias, aportan comentarios positivos, consideran el curso muy útil y, a pesar de la duración, se les hace corto. No lo consideran demasiado difícil y notan que se dedica bastante tiempo a cada tema.

(2) La mayoría de los alumnos comentan como gran aportación del curso la aparición de la técnica gráfica, que les ha permitido resolver problemas de forma ágil y «entender el porqué» de cosas que habían aprendido a hacer en secundaria.

(3) Muchos alumnos encuentran que en el curso se han introducido pocos conceptos nuevos. Esta apreciación es sin duda debida a que muchos de los contenidos introducidos son aspectos técnicos (en oposición a «conceptuales») que no tienen un nombre establecido, la cual cosa los hace difícil de identificar por parte de los alumnos. Esto también denota que los alumnos están acostumbrados a ver muchas cosas en muy poco tiempo (y en el curso que nosotros presentamos se ven «pocas» cosas en mucho tiempo) y que se esperan un curso de repaso donde se abordarán, de manera necesariamente superficial, la mayoría de contenidos de secundaria. Asimismo, también podemos considerar que esta observación denota una dificultad para institucionalizar las praxeologías matemáticas introducidas y reconstruidas, debido sin duda a la falta de un vocabulario prestablecido para designar y nombrar los componentes praxeológicos utilizados.

(4) La sensación general de los alumnos es que han percibido un cambio importante en el tipo de trabajo que están acostumbrados a realizar en secundaria, tal como indican comentarios del tipo: «en secundaria se hacían cosas sin saber por qué y de forma mecánica, y en este curso te explican para que sirven las cosas y de forma más sencilla, sin tener que hacer tantos cálculos», «hemos visto nuevas formas de resolución más prácticas y eficaces» o bien «el ritmo del curso es mejor ya que es más práctico».

2.5. Conclusiones de las experimentaciones

La observación de diferentes cursos cero «estándar» nos había conducido a formular la hipótesis que, por el gran número de praxeologías matemáticas introducidas y el tipo de praxeologías didácticas utilizadas, los cursos «cero» contribuyen a aumentar el aislamiento y la rigidez de las praxeologías matemáticas estudiadas en secundaria (Serrano 2007). Nuestra propuesta consistió en diseñar un curso que intentase superar este aislamiento proponiendo elementos articuladores en los términos introducidos por Fonseca (2004).

La experimentación de este curso en sus distintas modalidades constituye un primer contraste de la conjetura 2 formulada en el Capítulo 1 de esta memoria que recordamos a continuación:

Conjetura 2. *Efectos de los cursos propedéuticos basados en la TAD en la transición Secundaria-Universidad*:

Los cursos propedéuticos diseñados y gestionados con la fundamentación didáctica de la TAD modifican sustancialmente el tipo de actividad matemática mediante el uso sistemático de la modelización matemática, favorecen la articulación de ciertas praxeologías matemáticas tradicionalmente atomizadas y, en consecuencia, disminuyen o suavizan algunas de las discontinuidades entre la secundaria y la universidad. Estos efectos deberán ser descritos con más precisión en función del curso «cero» en cuestión pero, en cualquier caso, postulamos que su incidencia será siempre muy limitada en relación al enorme problema de las discontinuidades citadas. Los cursos «cero», situados en un «limbo» entre la secundaria y la universidad, constituyen en todos los casos una respuesta puntual al citado problema y, como tal, completamente insuficiente.

Para mostrar en qué medida se ha cumplido dicha conjetura, sintetizaremos los principales resultados obtenidos en las experimentaciones.

- *Respecto de la praxeología didáctica utilizada:*

En cada una de las unidades propuestas, se ha intentado que los alumnos vivieran los diferentes *momentos del estudio* y de la forma más autónoma posible. Esta autonomía se consiguió para el *momento exploratorio* y *del trabajo de la técnica*, pero, excepto en la tercera parte del curso, no se ideó ningún dispositivo específico para que fueran los alumnos los que gestionaran los *momentos de la institucionalización* y *de la evaluación.* La gestión del *momento tecnológico-teórico*, fue bastante compartida dado que los alumnos formulaban dudas y cuestiones durante los *momentos exploratorio* y *del trabajo de la técnica* que eran recogidos sistemáticamente por el profesor y tratados en gran grupo. Faltó quizás que alguna de estas cuestiones se incluyera posteriormente en el *momento de la institucionalización*, dando un estatuto particular y asignándole el lugar que le pertenece en la construcción de la praxeología matemática global en construcción.

Dado que la autonomía de los alumnos es poco frecuente en secundaria, los alumnos mostraban cierta resistencia a asumir las nuevas responsabilidades que se les proponían. Aun así, creemos que se acabaron adaptando a la nueva situación. Esta *evolución del contracto didáctico* en el sentido de conseguir que los alumnos asuman mayores responsabilidades en la gestión del estudio, constituye un resultado muy importante de nuestras experimentaciones puesto que el corte entre el contrato didáctico habitual en secundaria, y el que se requiere para hacer vivir la modelización matemática en los estudios universitarios es una de las principales restricciones que debemos superar.

- *Respecto de las praxeologías matemáticas aparecidas:*

Recordemos que una praxeología matemática será más o menos «completa» en función del grado en que sus componentes cumplan los indicadores descritos en el Capítulo 1. En este curso que presentamos, se han conseguido incorporar en un alto grado las características dadas por los indicadores siguientes:

- PL1. *Integración de diferentes tipos de problemas*

La representación gráfica de funciones, la resolución de ecuaciones, la resolución de inecuaciones y el estudio del beneficio de una empresa (dada la función de ingresos y la de costes) aparecieron en el curso como un único tipo de tarea.

- PL2. *Diferentes técnicas para cada tipo de tareas*

Los alumnos vieron que para representar gráficas de funciones, resolver ecuaciones o resolver inecuaciones había más formas de hacer que las que habían aprendido en secundaria y que todas estas nuevas técnicas estaban formadas por ingredientes praxeológicos que ellos tenían disponibles. Además tenían criterios para seleccionar en cada caso, la técnica más adecuada (fiable y económica).

- PL5. *Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas*

Como hemos visto en los comentarios que los alumnos aportan en el cuestionario final, esta exigencia tecnológico-teórica de explicar, interpretar y «entender lo que hacen» se consiguió plenamente. Creemos que es uno de los logros más importantes del curso.

- PL6. *Existencia de tareas matemáticas «abiertas»*

Este aspecto apareció en las dos últimas partes del curso y creemos que los alumnos supieron asumir bastante bien el desconcierto de las preguntas abiertas.

- PL7. *Integración de elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica*

Este indicador está muy correlacionado a PL1 y PL5. Y resulta claro que la praxeología matemática construida en torno de la técnica gráfica contiene precisamente unos elementos tecnológicos muy próximos a la práctica, necesarios para justificar las soluciones de las inecuaciones y permitir calcular un valor aproximado.

- Para el indicador PL3 (*Independencia de los objetos ostensivos que instrumentan las técnicas*) los alumnos acostumbrar a mostrar cierta resistencia a utilizar notaciones y expresiones diferentes de las que estaban acostumbrados. Dado que todos ellos provienen de centros de secundaria diferentes, se intenta unificar términos, expresiones y notaciones de cara a favorecer el trabajo en grupo y la interacción entre los alumnos y la profesora.

2.6. Variaciones de los «cursos cero»

Durante el periodo 2007-2011, en IQS School of Management, se han realizado diferentes variaciones del curso presentado. En este periodo no se ha llevado a cabo recogida sistemática de información como en las ediciones anteriores. Cada edición del curso se ha dividido en diez sesiones de dos horas cada una, habiendo un grupo de mañana y otro de tarde. En cada una de ellas se ha utilizado una cuestión generatriz diferente dando siempre más énfasis al trabajo de modelización de sistemas económicos reales y a la presentación de resultados. A modo de ejemplo, mostraremos los enunciados de las últimas ediciones. En los anexos 3.7 y 3.8 se presenta un diario de sesiones.

[**CURSO CERO 2009/10**]: Dada la situación de crisis en la que se encuentra la industria discográfica mundial desde hace ya varios años, puede resultar interesante hacer un estudio de las actividades económicas que desempeña una empresa discográfica actual. El objetivo de este ejercicio, que se irá desarrollando a lo largo del curso introductorio, será realizar un estudio simplificado de las características empresariales y económicas de la empresa discográfica catalana Picap a través de modelos y razonamientos matemáticos, utilizando datos reales orientativos proporcionados por la propia discográfica e información que los alumnos deberán ser capaces de encontrar de forma autónoma. Con todo ello se realizará una predicción de la situación a la que podría llegar esta empresa en los próximos meses, creando debates de las ventajas y los inconvenientes de las magnitudes económicas que constituyen los modelos utilizados.

Picap es una discográfica catalana que nació oficialmente en la primavera de 1984. La idea principal de esta empresa era dar soporte a los intérpretes y autores de Cataluña, respetando su expresión lingüística, pero dando un soporte preferencial al catalán. Picap es una empresa formada por un joven equipo de profesionales que trabajan con profesionalidad e ilusión.

[**CURSO CERO 2010/11**]: A pesar de la situación de crisis en la que nos encontramos y el estancamiento del consumo, algunas empresas han conseguido desafiar las no muy alentadoras previsiones. Puede resultar interesante iniciar un estudio sencillo, para una de estas empresas que se encuentran en pleno auge, acerca de las posibles claves de su éxito y analizar algunas de las actividades económicas desempeñadas. Nos centraremos en la firma de moda Desigual, una empresa española en expansión internacional. El objetivo de este ejercicio, que se irá desarrollando a lo largo del curso introductorio, será realizar un estudio simplificado de algunas de las características empresariales y económicas de esta firma de moda a través de modelos y razonamientos matemáticos, utilizando datos reales orientativos proporcionados por la propia empresa e información que los alumnos deberán ser capaces de encontrar de forma autónoma. Con todo ello se realizará una predicción de la situación a la que podría llegar esta empresa a corto plazo, creando debates de las ventajas y los inconvenientes de las magnitudes económicas que constituyen los modelos utilizados y razonando acerca de la viabilidad de estas predicciones.

Moda atrevida

«La empresa Desigual tiene su origen en el tándem formado por el diseñador suizo Thomas Meyer, fundador y alma mater de la compañía, y Manel Adell, el ejecutivo que en 2003 tomó las riendas del grupo para dirigir su expansión internacional. Su historia empieza en los años 80, cuando Thomas Meyer se paseaba por el puerto de Ibiza apenas sin superar los 20 años de edad. Thomas Meyer vendía camisetas en el mercadillo de la isla. Puso una tienda, sin nombre, en el barrio de la Marina. En ese tiempo primaban camisetas con el sello I love Ibiza. A contracorriente, imprimió en sus t-shirts estampados basados en graffitis y manchas caleidoscópicas. Así nació Desigual.»

(J. S Derqui)

Finalmente, acabaremos este apartado indicando que en el curso 2011-12, a petición de la propia universidad donde se imparten estos cursos, IQS School of Management (Universitat Ramon Llull), se realizó un estudio para comprobar la incidencia del curso «cero» sobre el curso ordinario. Los resultados mostraron que aquellos alumnos que habían cursado el curso «cero» globalmente obtenían mejores resultados en el primer trimestre pero no en el segundo y tercer trimestre. Este dato revela que los estudiantes que cursaron el curso «cero» no eran mejores, puesto que su rendimiento en los trimestres sucesivos es similar, pero si obtienen mejores resultados en el primer trimestre. Por lo tanto, parece que el curso «cero» ha conseguido el objetivo de articular los contenidos del segundo trimestre con los que se estudian en el primer trimestre universitario. Además, se confirma que el curso es claramente insuficiente —de acuerdo con la conjetura 2— para salvar las enormes discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad.

3. A modo de síntesis

Hemos visto que la respuesta espontánea desde la universidad al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas de los alumnos que provienen de secundaria se materializa en cursos propedéuticos con un programa amplísimo. Se pretende «visitar» un gran número de praxeologías matemáticas en un tiempo muy reducido y con una praxeología didáctica muy simplista por lo que respecta a los diferentes momentos que se proponen hacer vivir al alumno: momento de la *institucionalización* y momento *exploratorio* o *tecnológico-teórico*. Esta situación nos conduce a postular que, al margen de otro tipo de posibles beneficios, que sin duda aportan, este tipo de «cursos cero» agravan la desarticulación y la rigidez de las praxeologías matemáticas que conforman el bagaje de los alumnos y, por tanto, las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad.

Como respuesta, hemos mostrado la posibilidad de introducir en el sistema de enseñanza universitario una praxeología didáctica «viable» elaborada partiendo de los siguientes criterios directores propuestos por Fonseca (2004) en las conclusiones de su trabajo:

(1) La praxeología didáctica tiene que posibilitar el desarrollo de las técnicas matemáticas que utilizan los alumnos más allá de su aplicación rígida a un único tipo de problemas;
(2) El proceso de estudio tiene que partir de una cuestión con suficiente poder generador como para que su respuesta requiera la articulación de diferentes praxeologías matemáticas previamente disponibles en una praxeología como mínimo local y relativamente «completa».

Dadas las características particulares de los cursos cero en qué centramos nuestro estudio, hace falta añadir a las dos características anteriores, una tercera:

(3) Tanto la cuestión inicial como las praxeologías matemáticas disponibles que se deben completar e integrar se tienen que elegir de manera que su desarrollo posterior tenga un papel central en la asignatura de matemáticas que los alumnos tendrán que cursar posteriormente.

Estas características, o mejor, su ausencia, son las que nos permiten postular la poca incidencia sobre el rendimiento académico posterior de los alumnos de «cursos cero» demasiado genéricos y exhaustivos como los que se proponen habitualmente (Ruiz-Munzón & Serrano 2011).

Para completar e integrar las praxeologías matemáticas que se estudian en secundaria, el curso que hemos diseñado y experimentado introduce lo que podríamos llamar «técnicas mixtas» formadas a partir de la composición de técnicas «simples» que aparecen en las diferentes praxeologías matemáticas puntuales que queremos articular. Se trata de articular técnicas que la institución de secundaria considera como técnicas «independientes» y que, naturalmente, los alumnos no saben relacionar ni integrar espontáneamente. Entre estas técnicas «mixtas» podemos citar las siguientes:

- Las técnicas gráfico-algebraicas que relacionan los cambios de las gráficas de las funciones de una familia (especialmente cambios producidos por translaciones y dilataciones de la gráfica) con los cambios de la expresión algebraica correspondiente.
- Las técnicas gráficas que permiten resolver (aunque solo sea aproximadamente) la ecuación o las inecuaciones asociadas a una función.
- Les técnicas (muy poco visibles) que permiten interpretar las variaciones de las gráficas de les funciones (o de los parámetros de la expresión algebraica de estas funciones) en términos de variaciones de las magnitudes que caracterizan la situación que modelizan. Este tipo de técnicas está asociado a la modelización funcional de sistemas (Ruiz-Munzón 2010)

Otro resultado interesante que ya hemos destacado en el análisis de los datos obtenidos en la encuesta que se pasó a los alumnos al acabar el curso es que, por el hecho de introducir un tipo de praxeología didáctica «peculiar» y, en todo caso, alejada de las praxeologías didácticas habituales en secundaria, tanto las «resistencias» de los alumnos como los comentarios que explicitaban sobre los diferentes aspectos del curso (duración, cantidad de teoría y de práctica, ritmo de trabajo, etc.) muestran *por contraposición* las restricciones que pesan en la enseñanza secundaria sobre el tipo de proceso de estudio experimentado. Las podemos resumir en los tres puntos siguientes:

- Cuando los alumnos opinan que en el curso cero «se ha visto poca materia», nos están diciendo que, en general, en secundaria, el ritmo de introducción de nuevas nociones y nuevas técnicas es mucho más rápido. Por tanto, su grado de desarrollo es mucho menor y esto conduce a la construcción de praxeologías puntuales aisladas y rígidas.
- Cuando los alumnos opinan que «se ha visto poca teoría y mucha práctica», nos están diciendo que, en general, en secundaria, el tipo de praxeología didáctica dominante es aquella donde el profesor presenta (bastantes) conceptos nuevos que después los alumnos aprenden a utilizar, en relativo «poco tiempo».
- Cuando los alumnos opinan que con lo que han hecho en el curso «entienden el porqué de las cosas», nos están diciendo que, en general, en secundaria, el tipo de praxeología didáctica dominante otorga muy poco espacio al momento tecnológico-teórico y a la interpretación, validación y justificación de las técnicas utilizadas.

Esta lectura de los resultados del cuestionario confirma la hipótesis formulada por Fonseca (2004) sobre el carácter puntual, rígido y aislado de las praxeologías matemáticas de secundaria, así como de la «incompletitud» de las praxeologías didácticas dominantes.

El último resultado que queremos destacar, y que será determinante para la continuación que proponemos de nuestra investigación, es la clara insuficiencia que presenta el curso cero como posible vía de actuación para resolver el problema de la transición Secundaria–Universidad. En efecto, tanto el tipo de cuestión general en la cual englobamos este problema *—la desarticulación de las matemáticas escolares—* como los resultados obtenidos a partir de las experimentaciones sucesivas del curso cero, nos confirman la necesidad de abordar el problema didáctico desde un nivel superior de actuación.

Vemos dos posibles vías en este sentido. En primer lugar existiría la posibilidad de hacer más propuestas de cursos propedéuticos «integradores» escogiendo diferentes cuestiones problemáticas y diferentes tipos de praxeologías matemáticas de secundaria para completar y articular. Esto daría lugar a un abanico de «cursos cero» que, en su conjunto podrían presentarse como la «estrategia de articulación» de las matemáticas de secundaria. Pero, debido a la amplitud que tomaría este programa de estudios, esta estrategia nos conduciría, en cierto sentido, al primer aspecto del problema abordado, es decir, el de la creación y experimentación de procesos de estudio «funcionales», en los cuales se vivieran los diferentes momentos didácticos e hiciera falta desarrollar, completar e integrar las praxeologías matemáticas suficientemente como para transformarlas en saberes útiles y no en simples objetos culturales que se tienen que conocer, o como mínimo, «haber visitado».

Se podría pensar en integrar dichos cursos en el funcionamiento normal del bachillerato, pero nos encontramos con un obstáculo muy resistente que nos impide realizarlo en el segundo curso, que es donde de forma natural debería estar, que no es otro que las pruebas de acceso a la universidad. Estas no solo marcan los contenidos sino que también el tiempo que se dedica a ellos. Propuestas muy similares a estos cursos cero se han llevado a cabo en diferentes institutos de secundaria, tal como queda recogido en la tesis doctoral de Noemí Ruiz-Munzón (2010), pero siempre en un primer curso de bachillerato.

En cambio, la vía de desarrollo de la investigación que hemos escogido para continuar este trabajo es la de actuar, no sobre las matemáticas que se enseñan en secundaria sino sobre las que se enseñan en un primer curso universitario. La opción parece más económica porque las Facultades o Escuelas Universitarias disfrutan de más autonomía docente que los institutos de educación secundaria y porque los cambios que haría falta proponer afectan a menos grupos de alumnos, a menos profesores por centro y a alumnos que ya tienen —o tendrían que estar adquiriendo— más recursos didácticos. En definitiva, porque las restricciones debidas al proceso de transposición didáctica son más «duras» en la enseñanza secundaria que en la universidad.

CAPÍTULO 4. Recorridos de estudio e investigación en un primer curso universitario de Matemáticas para la empresa

1. Introducción

El análisis de las asignaturas de matemáticas en los diferentes grados del ámbito económico —programas, bibliografía, etc.— que se ha desarrollado ampliamente en el segundo capítulo de esta memoria nos ha permitido constatar que, en general, las matemáticas no se enseñan a partir de la necesidad de modelizar situaciones o cuestiones económicas, sino que se presentan como unas herramientas básicas que el estudiante debe aprender a manejar sin saber a priori qué tipos de problemas le permitirá resolver, es decir, no se integra de forma sistemática y normalizada el desarrollo explícito de la actividad de modelización. A lo sumo, al final del proceso de estudio se llevan a cabo algunas aplicaciones puntuales de las nociones y técnicas aprendidas. Se enseñan conocimientos previamente matematizados sin tener en cuenta los procesos de modelización de los sistemas —matemáticos o extra-matemáticos— que han generado estos conocimientos, mostrando a posteriori los usos o aplicaciones de estos conceptos, de forma independiente a las problemáticas que les dieron origen.

La respuesta al problema didáctico de la modelización matemática que propone la teoría antropológica de lo didáctico se sustenta en un nuevo dispositivo didáctico, los recorridos de estudio e investigación (REI) introducidos por Chevallard (2004, 2005b y 2006). Se trata de un tipo genérico de dispositivos didácticos cuyo objetivo principal es el de integrar mecanismos que permitan a la actividad de modelización matemática vivir institucionalmente.

Como veremos, en el caso de la asignatura de matemáticas de la licenciatura y grado de ADE en IQS School of Management, los REI se generan a partir de una única cuestión problemática inicial que los alumnos deberán ir estudiando durante todo el trimestre. De esta forma, los alumnos irán desarrollando las competencias necesarias para resolver un problema empresarial complejo que requiere construir y utilizar sucesivamente distintos tipos de modelos matemáticos. Durante este proceso, los estudiantes deberán asumir responsabilidades en el tratamiento matemático del problema así como en la propia gestión del proceso de estudio que el contrato didáctico tradicional asignaba en exclusiva al profesor: reformular la cuestión inicial para facilitar el estudio; modificar las condiciones iniciales del problema según el tipo de cuestión planteada; buscar información sobre los modelos matemáticos que se pueden utilizar; realizar simulaciones; cuestionar los modelos construidos; plantear nuevas cuestiones; tomar decisiones sobre la planificación y organización del trabajo; sintetizar los resultados obtenidos; presentarlos de forma oral y escrita; etc. Se trata de aspectos de la actividad matemática que la puesta en marcha de los REI exige a la vez que posibilita

2. La asignatura de Matemáticas en el grado de IQS-ADE

Los programas de la asignatura de matemáticas de carreras de ciencias económicas que se han analizado en el segundo capítulo de esta memoria se describen habitualmente mediante «temas» que incluyen determinadas definiciones, propiedades, teoremas, demostraciones y tipos de problemas. Estos tipos de problemas se utilizan para ejemplificar el uso de las definiciones y teoremas, delimitando al mismo tiempo el ámbito de la aplicación. Casi siempre aparecen al final del proceso de estudio, como una consecuencia de los contenidos de cada tema, una «aplicación» que les da sentido y muestra la funcionalidad (se ven tantos tipos de problemas como posibles aplicaciones de este modelo). Esta organización tradicional de los contenidos de la enseñanza —que se ha impuesto históricamente— tiene el inconveniente de esconder las cuestiones problemáticas que constituyen la «razón de ser» de las nociones, propiedades, teoremas y técnicas que han acabado cristalizando en el saber matemático que se quiere enseñar.

Además, como esta organización sitúa las nociones y teoremas en el origen de la actividad matemática, tiende a construir tipos de problemas muy «aislados» y «cerrados» para obtener aplicaciones y ejemplificaciones de cada una de las nociones o propiedades de cada tema.

En total contraposición a esta organización, la asignatura de matemáticas impartida en IQS School of Management desde el curso 2006/07 integra la noción de *recorrido de estudio e investigación*, descrita en el primer capítulo, para abordar el problema de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización. Dado que un REI se inicia con una cuestión con fuerte poder generador, de la que surgen numerosas cuestiones derivadas, es fácil que para elaborar las respuestas se requiera movilizar un gran número de contenidos del programa (nociones, propiedades, teoremas, etc.) que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del proceso de estudio de la cuestión generatriz. Los REI recuperan así la relación genuina entre cuestiones y respuestas (o entre problemas y teorías) que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general, y de la actividad de modelización matemática en particular.

Para integrar más fácilmente los REI en la organización habitual de la asignatura, se presentan como «talleres de modelización matemática», es decir, como dispositivos de estudio donde los estudiantes, bajo la supervisión del profesor, tienen que resolver cuestiones a partir de la construcción, uso y evaluación de modelos matemáticos elaborados con los materiales teóricos y técnicos introducidos en la asignatura. Estos talleres complementan así las clases magistrales de teoría y problemas, presentando una praxeología didáctica de carácter completamente diferenciado.

Hablaremos de «IQS-ADE» para designar los estudios de la Licenciatura en administración y Dirección de Empresas que se han impartido en la Facultat d'Economia IQS (actualmente IQS School of Management) de la Universidad Ramon Llull (Barcelona) desde su creación en 1991. A partir del curso 2008-2009, se inició el nuevo programa de Grado en Administración y Dirección de Empresas que desde entonces sustituye a los estudios de licenciatura. Desde sus inicios, IQS-ADE acoge cada curso entre 150 y 200 estudiantes repartidos en tres grupos clase de 50 a 70 alumnos. Al pertenecer a una universidad privada sin ánimo de lucro, el perfil socioeconómico de estos estudiantes es medio-alto. Desde el curso 2002/03, todos ellos disponen de un ordenador portátil que se incluye con la matrícula del primer curso.

La asignatura de Matemáticas tanto en la licenciatura como en el grado de IQS-ADE es de carácter anual con una frecuencia de 3 horas semanales. Su programa se divide en tres grandes ámbitos que corresponden a los tres trimestres del curso: álgebra lineal, cálculo diferencial en una variable y cálculo diferencial en varias variables. Este programa (ver anexo 4.1) se viene impartiendo con cambios menores desde el curso 2006/07. La asignatura se imparte en dos sesiones semanales de una hora y media cada una: la primera sesión se estructura en forma de clase magistral con explicaciones y resoluciones de problemas por parte del profesor en la pizarra, mientras que en la segunda se desarrolla lo que se designa como «seminario» o «taller de modelización matemática», centrado en el estudio de una cuestión problemática relacionada con la economía o la empresa y con el temario del trimestre y se organiza en forma de REI.

Hasta el curso 2006/07, las investigadoras en didáctica de las matemáticas, Marianna Bosch, Berta Barquero y la autora de esta memoria fueron profesoras de esta asignatura y las principales creadoras del material didáctico utilizado. En ediciones posteriores, la asignatura pasó a impartirla Vanessa Serrano, una profesora ajena a la investigación que presentamos aquí, aunque es también una investigadora en didáctica, cuya área principal de interés es la didáctica de la estadística. En la mayoría de cursos ha habido profesorado asistente que ha colaborado en la impartición de los talleres de modelización. Asimismo, durante algunos cursos, la autora de esta memoria ha acudido como observadora de las sesiones de los talleres.

3. Los talleres de modelización matemática

Los *talleres de modelización matemática* se iniciaron en la facultad de Economía del Institut Químic de Sarrià de la Universidad Ramon Llull de Barcelona durante el curso académico 2006/07, a partir de un proyecto de la *Millora de la Qualitat Docent* financiado por la Generalitat de Catalunya (Bosch 2008). Hasta el curso 2011/12 se han realizado distintos REI, como se detalla a continuación:

Curso	Trimestre	Descripción REI
2006/07	Primero	REI 1 – movilidad (versión 1)
	Segundo	REI 2 – previsión (versión 1)
2007/08	Primero	REI 1 – movilidad (versión 2)
	Segundo	REI 2 – previsión (versión 2)
2008/09	Primero	REI 1 – movilidad (versión 3)
	Segundo	REI 2 – previsión (versión 3)
2009/10	Primero	REI 3 – Optimización1
	Segundo	REI 4 – Optimización2
2010/11	Primero	REI 5 – Evolución de poblaciones. Caso discreto
	Segundo	REI 6 – Evolución de poblaciones. Caso continuo
	Tercero	REI 7 – Evolución de poblaciones. Caso matricial
2011/12	Primero	REI 8 – Venta de camisetas. Ingresos y costes
	Segundo	REI 9 – Venta de camisetas. Estudio de la demanda
	Tercero	REI 10 – Venta de camisetas. Gestión de stocks

Tabla 4.1. Relación de recorridos de estudio e investigación implementados en el IQS-ADE entre los cursos 2006/07 al 2011/12

Durante los cuatro primeros cursos académicos se hicieron versiones de los dos recorridos de estudio e investigación propuestos para los dos primeros trimestres haciendo modificaciones a partir de los problemas, dificultades, etc. detectados en las versiones precedentes. A partir del curso 2010/11 se introducen cambios más profundos, y se proponen tres recorridos de estudio e investigación con el mismo hilo conductor para los tres trimestres.

En todos los casos, el número de alumnos que participaron fue similar, tres grupos de primer curso de licenciatura (o grado) en Administración y Dirección de Empresas, a los que se deben añadir, durante los cursos 2006/07 y 2007/08, dos grupos de Diplomatura en Ciencias Empresariales. En total, representan aproximadamente entre 150 y 200

alumnos por curso. La primera experimentación de los talleres (2006/07) fue realizada por cuatro profesores distintos, que eran los profesores habituales de la asignatura, tres de los cuales forman parte de nuestro grupo de investigación en didáctica de las matemáticas: B. Barquero, M. Bosch y L. Serrano. En las siguientes dos experimentaciones (2007/08 y 2008/09), fueron dos las profesoras que lo llevaron a cabo: B. Barquero y se incorpora V. Serrano. En las posteriores, se ha mantenido siempre V. Serrano de profesora.
En este trabajo detallaremos cinco recorridos de estudio e investigación: los dos experimentados durante el curso 2006/2007 (primera versión de «Movilidad» y «Previsión») y los tres del curso 2010/2011 («Evolución de poblaciones»). El motivo de haber escogido las dos primeras versiones de los talleres de «movilidad» y «previsión» y no las sucesivas, está justamente en mostrar cómo las dificultades encontradas en cada edición han motivado cambios en las ediciones posteriores, de manera que se mostrará cómo las diferentes versiones de un mismo REI han ido enriqueciéndose con estas aportaciones. En el caso de los tres talleres correspondientes a la «evolución de poblaciones» se han incluido los del curso 2010/11.

Para cada uno de los talleres seguiremos una misma pauta: empezaremos realizando el análisis matemático a priori de la cuestión generatriz que guía el recorrido de estudio e investigación. A continuación haremos un análisis a priori de la praxeología didáctica y finalmente evaluaremos globalmente el conjunto de recorridos considerados que nos permitirá analizar el funcionamiento global del REI y destacar las restricciones institucionales observadas durante las experimentaciones.

El funcionamiento de un taller es el siguiente: en la primera sesión se presenta a los alumnos una cuestión relevante y con interés en relación a los estudios que han iniciado, es decir, con un componente económico atractivo. Se propone una serie de preguntas a partir de unos datos ofrecidos por el profesor pidiéndoles que intenten dar respuesta a dichas preguntas sin ninguna orientación más. Trabajan en grupos de tres o cuatro personas con la ayuda de un ordenador portátil. El profesor deja vivir el *momento del primer encuentro* hasta que todos los alumnos han formulado sus propias hipótesis. Es entonces cuando el profesor hace una puesta en común con las aportaciones de todos los grupos y explica cual será el camino a seguir. El hecho de trabajar con una cuestión interesante pero a la vez realista, hace que los estudiantes entiendan que para llegar a dar respuesta a las preguntas planteadas necesiten herramientas matemáticas. Algunas veces se trata de matemáticas conocidas —porque se están estudiando paralelamente en las clases de teoría o porque las conocen de secundaria— pero otras se deben desarrollar haciendo un alto en el taller. De esta forma, los estudiantes se involucran en la asignatura.

Aparece una figura nueva, la del «secretario de la clase», que ha ido evolucionando a lo largo de las ediciones. En un principio, se nombraba al azar un alumno cuya responsabilidad era elaborar un informe que contuviera una síntesis del trabajo realizado durante las puestas en común de cada sesión, informe que era leído al empezar la siguiente sesión. En las ediciones posteriores, dicho informe se debía entregar al profesor con anterioridad a la sesión para que lo revisara y lo pusiera a disposición de todos los alumnos a través de una plataforma digital accesible para todos ellos.

Además del informe semanal que de forma rotatoria se debe entregar al profesor, los alumnos a nivel de grupo y a nivel individual deben hacer varias entregas. De forma semanal, y antes de iniciar la siguiente sesión, se debe enviar al profesor una síntesis del trabajo realizado por el grupo propio. Y a final del trimestre, se debe enviar un informe individual que resuma el taller.

El sistema de evaluación consiste en un examen a final de cada trimestre en el que los estudiantes tienen que resolver un conjunto de problemas del mismo tipo que los estudiados en clase y que cuenta un 50% de la nota trimestral. La entrega de los informes en grupo e individuales del taller, cuentan un 40% de la nota trimestral, y el 10% restante corresponde a controles en clase y entregas de problemas resueltos.

Una vez hecha la descripción general del funcionamiento del taller, pasaremos al análisis detallado de cada uno de los cinco recorridos de estudio e investigación citados.

4. Recorridos de estudio e investigación durante el curso 2006/07

Durante el curso 2006/07 se iniciaron las experimentaciones de los recorridos de estudio e investigación en IQS-ADE. En esta primera edición se desarrollaron dos talleres durante los dos primeros trimestres. En el tercero, no se llevó a cabo propiamente un taller.

4.1. Primer trimestre: un recorrido de estudio e investigación sobre movilidad

El objetivo del taller era plantear a los estudiantes un problema muy próximo a las situaciones reales de fenómenos donde se producen evoluciones de poblaciones en las que las matrices (de transición) aparecen como un posible modelo de trabajo.

Previamente al inicio del taller, se dedicaron unas cinco sesiones de *clase teórica* a recordar las nociones básicas del álgebra matricial ya estudiadas en bachillerato (principales operaciones con matrices, cálculo de inversas, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales).

4.1.1. Análisis a priori de la praxeología matemática

Sea X una población que está dividida en g grupos, cuyos tamaños respectivos en el periodo de tiempo n son: $x_1(n)$, $x_2(n)$, … , $x_g(n)$, de la cual conocemos una distribución inicial: $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots , x_g(0))$ y disponemos de información referente al porcentaje de transición de los individuos de X entre los distintos grupos en periodos consecutivos (nos restringiremos al caso en el que el tiempo es discreto). Bajo estas condiciones, elaboramos nuestra cuestión generatriz:

> Q_0: Conocido el número de individuos de una población X en un instante determinado, ¿cómo podemos describir la evolución del tamaño de los diferentes grupos en los que está dividido X?, ¿será siempre posible predecir qué ocurrirá después de un determinado periodo de tiempo?, ¿Y lo que ocurrirá a largo plazo?

Denotamos por $x_i(n)$ al número de individuos que hay en el instante n en el grupo i. Suponiendo que hay g grupos, podemos describir, mediante el vector $x(n)$ el total de individuos de cada uno de los grupos en que se divide X:

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_g(n) \end{pmatrix}$$

Si además disponemos de los porcentajes de transición entre los diferentes grupos, podemos construir una matriz de transición M asociada a la evolución de la población X.

A continuación mostraremos algunas de las propiedades más destacadas de dichas matrices:

- Los elementos de una matriz de transición $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq g, 1\leq j\leq g,}$ son las probabilidades de transición entre grupos, $m_{ij} \in [0,1)$ con $1 \leq i, j \leq g$. Así, cada elemento m_{ij} es la probabilidad de que un individuo de X que en el instante de tiempo $t = n$ está en el j-ésimo grupo, en el instante de tiempo siguiente, $t = n + 1$, pase al i-ésimo grupo.
- Los elementos de la k-ésima columna, m_{ik} con $1 \leq i \leq g$ describen como se distribuyen porcentualmente los individuos que en el instante $t = n$ estaban en el k-ésimo grupo, entre las g clases de las que se compone la población X en el instante $t = n+1$.
- Este hecho nos permite comprobar que las columnas de una matriz de transición indican las condiciones de distribución en las que la población se encuentra en el «estado anterior» y las filas, el «estado siguiente», entre «estados consecutivos» de tiempo, esto es, de $t = n$ a $t = n + 1$.
- La suma de los elemento de cada columna será uno, consecuencia directa de las dos anteriores propiedades.

Podemos describir la evolución del número de individuos de la población X en periodos de tiempo consecutivos mediante la relación: $x(n+1) = M\cdot x(n)$
Si además, suponemos que los porcentajes de transición se mantienen constantes con el paso del tiempo n, la relación anterior se puede expresar con estos términos: $x(n+1) = M^{n+1}\cdot x(0)$ para $n > 0$. Entonces, nos planteamos la siguiente cuestión:

Q_1: Dada una matriz de transición M de orden g, y una distribución inicial $x(0)$, ¿cómo podemos calcular la trayectoria de la sucesión vectorial $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la ecuación matricial: $M\cdot x(n) = M^{n+1}\cdot x(0)$?, ¿ qué características podemos destacar?

La *simulación numérica*, utilizando por ejemplo la hoja de cálculo Excel, muestra que la trayectoria de la sucesión vectorial $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ parece tender a una distribución estable, a la que llamaremos *vectores fijos*. Esto nos abre varios interrogantes que los condensamos en la cuestión siguiente:

Q_2: ¿Cómo podemos demostrar la existencia de vectores fijos, x^e, hacia los cuales parece tender toda trayectoria de $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la ecuación matricial $M\cdot x(n) = M^{n+1}\cdot x(0)$? En el caso que existan dichos vectores fijos, ¿cómo podemos calcularlos a priori?

Definiremos vector fijo x^e de la matriz de transición M de orden g a aquel vector que satisface la relación: $M\cdot x^e = x^e$, o equivalentemente: $(M - I_g)\cdot x^e = 0$, lo que nos conduce a un sistema homogéneo. Para iniciar la discusión de dicho sistema, tenemos en cuenta la tercera de las propiedades de las matrices de transición que afirmaba que la suma de los elementos de cada columna era 1. Esto implica que los elementos de las columnas de la matriz $M - I_g$ suman cero y por tanto, $\det(M - I_g)$ será igualmente cero. Esto nos conduce a concluir que el sistema anterior siempre será compatible indeterminado y por tanto, tendrá infinitas soluciones.

Nos surgen nuevas cuestiones:

Q_3: Toda trayectoria de $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ¿tiende a un vector fijo x^e? ¿Cuál es la relación entre x^e, la matriz de transición y la condición inicial?

Para poder dar respuesta a estas cuestiones debemos estudiar la sucesión $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada a partir de la relación matricial encontrada al principio: $x(n+1) = M^{n+1}\cdot x(0)$ para $n > 0$, y esto nos exige hacer un paréntesis en nuestro recorrido para estudiar las potencias n-ésimas de M.

Q_4: Sea M una matriz cuadrada de orden g, ¿cuál es la expresión general de los términos de la sucesión $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$?, ¿Qué propiedades destacamos?, ¿Cómo podemos describir $\lim_{n\to\infty}\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$?, ¿hay algún caso en el que podamos asegurar que $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge?. En el caso que sea convergente, ¿podemos predecir cuál será este límite?

En el caso que una matriz D sea diagonal, se cumple que D^n sigue siendo diagonal y se obtiene al elevar los elementos de la diagonal a la potencia n-ésima. Como no siempre dispondremos de matrices diagonales, recurrimos al siguiente resultado conocido sobre la diagonalización de matrices:

> Si M es una matriz diagonalizable, entonces se pueden encontrar matrices D y K que satisfacen la siguiente relación: $M = K\cdot D\cdot K^{-1}$, donde D es una matriz diagonal que contiene los valores propios (λ_i) asociados a M, y K la matriz de cambio de base que contiene los vectores propios (v_i) asociados a cada λ_i de M.

De esta forma, el problema del cálculo de la potencia n-ésima de *M* nos conduce al problema de encontrar las matrices *K* y *D* que satisfacen $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$.

Una matriz de transición *M* de orden *g* tiene siempre asociado un vector propio de valor propio 1, ya que al cumplirse $\det(M - I_g) = 0$, el valor 1 siempre es solución del polinomio característico de *M*. El resto de valores propios λ_i de M satisfacen $|\lambda_i| < 1$. El vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ corresponde al cálculo del vector fijo x^e.

Así, tenemos que $\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 0 \ldots 0 \\ 0 0 \cdots 0 \\ \vdots \vdots \ddots \vdots \\ 0 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$

Si definimos $x^e = (x_1^e, x_2^e, \ldots, x_g^e)$ como las componentes del vector propio correspondiente al valor propio 1 de *M* tal que $\sum_{i=1}^{g} x_1^e = 1$, entonces, junto con la expresión que acabamos de encontrar, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \lim_{n\to\infty} K \cdot D^n \cdot K^{-1} = \begin{pmatrix} x_1^e & \cdots & x_1^e \\ x_2^e & \cdots & x_2^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_g^e & \cdots & x_g^e \end{pmatrix}$$

Este resultado nos permite dar respuesta a una cuestión antes planteada (Q_2):

Si disponemos de una distribución inicial $x(0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_g^0)$:

$$\lim_{n\to\infty} M^n x(0) = \begin{pmatrix} x_1^e & \cdots & x_1^e \\ x_2^e & \cdots & x_2^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_g^e & \cdots & x_g^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_g^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^e \\ \vdots \\ x_g^e \end{pmatrix} \cdot (x_1^0 + \cdots + x_g^0)$$

Esta propiedad nos permite asegurar que la población *X* a largo plazo siempre tenderá a un vector fijo, es decir, a una distribución de equilibrio x^e que solo depende de la cantidad total inicial de individuos, siendo independiente de cómo están distribuidos inicialmente.

Estudiar el momento n_E en el cual se llega a la estabilidad (es decir $x(n+1) = x(n)$ para $n > n_E$) consistirá en resolver : $M^{n+1} \cdot x(0) = M^n \cdot x(0)$. Si *M* no es diagonal consideraremos: $K \cdot D^{n+1} \cdot K^{-1} \cdot x(0) = K \cdot D^n \cdot K^{-1} \cdot x(0)$, y dado que queremos calcularlo con una cierta precisión, impondremos: $K \cdot D^{n+1} \cdot K^{-1} \cdot x(0) - K \cdot D^n \cdot K^{-1} \cdot x(0) \approx 10^{-\mu}$ o equivalentemente: $K \cdot D^n \cdot (D - I) \cdot K^{-1} \cdot x(0) \approx 10^{-\mu}$

Empezaremos considerando el caso de matrices de dimensión *2x2*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \end{pmatrix}$$

Como ya hemos visto, siempre existe un valor propio igual a 1. Si consideramos que corresponde a λ_1 tendremos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|K|} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \end{pmatrix}$$

$$\frac{(\lambda_2 - 1){\lambda_2}^n}{|K|} \cdot \begin{pmatrix} -a_{21} \cdot x_1(0) + a_{11} \cdot x_2(0) \\ a_{21} \cdot x_1(0) - a_{11} \cdot x_2(0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \end{pmatrix}$$

Es decir: $\frac{(\lambda_2 - 1){\lambda_2}^n}{|K|} \cdot |-a_{21} \cdot x_1(0) + a_{11} \cdot x_2(0)| \approx 10^{-\mu}$

O equivalentemente: ${\lambda_2}^n \approx \frac{|K|}{|-a_{21} \cdot x_1(0) + a_{11} \cdot x_2(0)| \cdot (\lambda_2 - 1)} \cdot 10^{-\mu}$

Aplicamos logaritmos:

$$n \approx \frac{log\left(\frac{|K|}{|-a_{21} \cdot x_1(0) + a_{11} \cdot x_2(0)| \cdot (\lambda_2 - 1)} \cdot 10^{-\mu}\right)}{log\lambda_2} = \frac{-\mu}{log\lambda_2} + \frac{log\left(\frac{|K|}{|-a_{21} \cdot x_1(0) + a_{11} \cdot x_2(0)| \cdot (\lambda_2 - 1)}\right)}{log\lambda_2}$$

En el caso de una matriz de orden *3x3* no se obtiene una fórmula simple para encontrar *n* y se debe proceder eligiendo un valor de *n* suficientemente para que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \end{pmatrix}$$

(donde hemos considerado que el valor propio $\lambda_1 = 1$)

O lo que es equivalente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - 1){\lambda_2}^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - 1){\lambda_3}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 - 1){\lambda_2}^n(\lambda_3 - 1){\lambda_3}^n \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \\ 10^{-\mu} \end{pmatrix}$$

4.1.2. Análisis de la praxeología didáctica

A continuación presentaremos el diseño a priori del recorrido didáctico propuesto, es decir, la descripción de cómo se tienen que hacer evolucionar temporalmente los aspectos más importantes del proceso de estudio. También se comentarán algunos de los elementos más importantes para la gestión del recorrido didáctico. Finalmente se presentará un diario de sesiones a modo de crónica unificada entre todas las experimentaciones que tuvieron lugar.

Para el *taller de modelización* del primer trimestre del curso 2006/07, partimos de la siguientes cuestiones generatrices:

> *Q1: ¿Cómo evoluciona la distribución de los «elementos» (individuos, cuotas de mercado, productos, acciones de bolsa, rentas, virus, etc.) con el paso del tiempo si se mantienen constantes ciertos porcentajes de evolución o transición?*
> *Q2: ¿Existen distribuciones estables? ¿Por qué? ¿Son únicas? ¿Cómo determinarlas?*
> *Q3: ¿Existe alguna relación entre la distribución inicial, la distribución estable y el momento n en el que se produce la estabilización?.*

Se asigna a cada grupo un caso que describe una situación de transición concreta. Hay diez casos diferentes cuyos enunciados presentamos a continuación. Los datos de cada caso fueron preparados por el equipo de profesores para que en su estudio matricial implicara a matrices convergentes.

CASO 1. PREVISIÓN DE AVERÍAS
La encargada del servicio de informática de una empresa sabe que el 50% de los ordenadores tienen problemas al día siguiente, pero son problemas pequeños y pueden resolver durante el día. Por lo tanto, el 100% de los ordenadores estropeados están en buen estado al día siguiente. Estudiar el porcentaje de ordenadores estropeados a largo plazo.

CASO 2. SISTEMAS ELECTORALES
Un país con un sistema electoral bipartidista tiene dos grandes partidos A y B. Un estudio muestra que, en periodo «normal», la probabilidad de cambio de voto de los electores de cada partido es estable entre unas elecciones y las siguientes. El 4% de los votantes de A pasan a votar B a las siguientes elecciones y el 16% de los votantes de B pasan a votar A. Si estos porcentajes se mantienen constantes, estudiar el reparto de votos a largo plazo.

CASO 3. CUOTAS DE MERCADO
Dos marcas de tabaco A y B controlan el mercado. Un estudio muestra que los consumidores de la marca A se mantienen fieles a la marca en un 30% y se cambian de marca en el 70% restante, mientras que un 40% de los consumidores de B se mantienen fieles a la marca y el resto pasa a A. Estudiar la evolución de las cuotas de mercado a largo plazo si suponemos que estos porcentajes se mantienen constantes.

CASO 4. BOLSA DE VALORES
El valor de una acción fluctúa cada día. Cuando la bolsa es estable, el incremento de un valor en un día acostumbra a provocar un descenso del mismo valor al día siguiente, y a la inversa, un descenso del valor provoca un aumento al día siguiente. Supongamos que, en un determinado mercado, sólo el 15% de los valores que aumentan un día lo hacen al día siguiente (los demás bajan) y sólo el 10% de los valores que bajan un día siguen bajando al día siguiente (los demás suben). Si suponemos estos porcentajes constantes, estudiar la evolución de las subidas y bajadas a largo plazo.

CASO 5. PLAN DE MOVILIDAD LABORAL
Un banco tiene 3 oficinas principales: una en Gracia, otra en Sarria y una tercera en el Eixample. Para que el equipo de trabajadores *juniors* se mantenga al día y con un buen nivel de eficiencia, se ha diseñado un plan de movilidad

que les obliga cada año a cambiar de oficina. En una reunión de dirección, el responsable de Recursos Humanos presenta la política siguiente:

- De los trabajadores de Gracia, el 40% se va a Sarria y el 10% al Eixample;
- De los trabajadores de Sarria y el 10% se va al Eixample;
- De los trabajadores del Eixample, el 50% se va a Gracia y el 10% a Sarria.

Estudiar la evolución de los trabajadores *juniors* en la empresa si se mantienen constantes estos porcentajes.

CASO 6. DISTRIBUCIÓN DE LAS RENTAS

En un estudio de mercado, al hacer el perfil socioeconómico de los consumidores, se distribuyen las unidades familiares en rentas *bajas, medias* y *altas*. Consideremos una sociedad en la que, de un año al otro:

- De las familias con rentas bajas, el 70% se mantiene, mientras que el 20% pasan a renta media y un 10% a rentas altas.
- De las familias con rentas medias, el 30% pasa a rentas bajas y un 10% a rentas altas.
- De las familias con rentas altas, un 30% pasa a rentas medias y un 10% a rentas bajas.

Estudiar la distribución futura de la renta a largo plazo si suponemos que estos porcentajes se mantienen constantes.

CASO 7. CONTROL DE UN VIRUS INFORMÁTICO

En el año 2000 apareció un virus informático que afectaba a los usuarios que se conectaban a una página web el día 1 de enero. Una vez el virus entraba en el ordenador, podía empezar a actuar directamente o mantenerse en estado latente durante un año, empezando a actuar el 1 de enero del año siguiente. El saneamiento del ordenador tarda 1 año en realizarse.

Se recogieron datos de usuarios afectados en una empresa y se vio que:

- El virus afecta un 9% de los ordenadores «sanos» donde se queda en estado «latente» y afecta un 1% de los ordenadores «sanos» donde se «manifiesta» directamente;
- El virus se «manifiesta» en un 18% de los ordenadores que lo tenían «latente»;
- Se consiguen arreglar un 13% de los ordenadores con el virus «manifiesto» y dejarlos «sanos».

Estudiar la distribución futura de los virus informáticos a largo plazo si suponemos que estos porcentajes se mantienen constantes.

CASO 8. LOGÍSTICA DE TRANSPORTE

Una agencia tiene una flota de barcos distribuida entre los puertos de Barcelona, Mallorca y Cádiz. De los barcos que están a principios de cada mes en Barcelona la mitad vuelven a final de mes, un 20% se va a Cádiz y el resto se queda en Mallorca. De los barcos que a principios de mes están en Cádiz, al final de mes hay un 20% en Barcelona, un 40% en Mallorca y el resto vuelve a Cádiz. De los barcos que están a principios de mes en Mallorca, un 80% vuelve a puerto y el resto se queda en Barcelona.

Estudiar la evolución de la flota de barcos si se mantienen constantes estos porcentajes.

CASO 9. CUOTAS DE MERCADO

Tres empresas A, B y C comparten el mercado de cierto producto. La empresa A tiene el 20% de la cuota de mercado, B tiene el 60% y C el 20% restante. Durante el año se producen los siguientes cambios:

- A conserva el 85% de sus clientes y cede a B el 5% y a C el 10%
- B conserva el 55% de sus clientes y cede a A el 10% y a C el 35%
- C conserva el 85% de sus clientes y cede a A el 10% y a B el 5%

Estudiar la evolución de las cuotas de mercado si suponemos que estos porcentajes se mantienen constantes a lo largo de los años.

CASO 10. EMPRESA DE SEGUROS

Una empresa de seguros de coche reparte sus clientes en tres grupos G0, G1, G2 según si han tenido 0, 1 o más de 1 accidente durante el año. Las estadísticas de la compañía muestran que:

- Un 80% de los clientes del grupo G0 se quedan en este grupo al año siguiente; un 10% pasa a G1 y un 10% de pasa a G2.
- Un 10% de los clientes de G1 pasan a G0, un 80% se quedan en G1 y un 10% pasa a G2.
- Los clientes de G2 siempre se quedan en G2.

Estudiar la evolución de los grupos de clientes a largo plazo si suponemos que estos porcentajes se mantienen constantes.

A continuación describiremos el diseño de las praxeologías didácticas a priori que corresponderían a cada una de las sesiones en las que se divide el taller. Para ello utilizaremos unas tablas en las que introduciremos la siguiente notación:

- P para indicar al profesor.
- G para indicar cada uno de los grupos de trabajo en los que se divide la clase.

Primera sesión
- P entrega a G la lista con los diferentes casos. - Asignación a G de dos de los casos de la lista, excepto el primero, que servirá de guía para P. - Se pide a G que durante la primera parte de la sesión intente describir cómo evolucionarán cada una de sus situaciones problemáticas con el paso del tiempo si se considera que los porcentajes de evolución/transición se mantienen constantes con el paso del tiempo. (P_1) - Para facilitarles dicha exploración P comenta la posibilidad de considerar una situación inicial común para todos: tomar «100» de cada tipo. - Se deja tiempo para explorar el caso que se les ha asignado. - Puesta en común de los resultados e introducción (por parte de P, si es necesario) del lenguaje matricial: al cabo de n periodos de tiempo, designamos como $X_n$la distribución de los elementos de forma que satisface $X_n = M^n \cdot X_0$ (donde M matriz de transición, X_0 situación inicial y X_n situación al cabo de n periodos de tiempo). - Propuesta, por parte de P, del uso de la notación matricial para la exploración de la situación y unificación consensuada sobre el uso de una notación. - Puesta en común de los resultados esperados para la siguiente sesión: descripción de distintos casos considerando varios casos iniciales y distintos periodos de tiempo. Observaciones: - El álgebra matricial debe aparecer como una herramienta más económica ante la gran complejidad de cálculos, especialmente si se quieren sistematizar con el ordenador. Se debe acordar si el producto de M por los sucesivos X_n se realiza por la derecha o por la izquierda (el producto por la derecha es el más habitual, por similitud con la notación funcional). - El estar trabajando el álgebra matricial en las clases de teoría, debería permitir a G plantear cada caso en esos términos. - La herramienta modelizadora de los diversos fenómenos descritos son las llamadas matrices de transición. P puede introducir la definición y características principales de este tipo particular de matrices o pedir a los alumnos que busquen información sobre el tema.

Segunda sesión
- Puesta en común de los resultados obtenidos a partir del trabajo de la sesión anterior: a partir de la simulación de muchos casos particulares, aparecen estabilidades en todos los casos, lo cual debería

resultar sorprendente.

- Ante el fenómeno de la convergencia de las sucesiones consideradas, surge la cuestión de estudiar qué distribuciones convergen y la velocidad de convergencia (Q_2). Para ello P puede sugerir considerar casos específicos y comprobar que efectivamente siempre se producen estabilizaciones (o se llega a una situación de estabilidad) a largo plazo. Pueden utilizar indistintamente la hoja de cálculo Excel o la calculadora simbólica Wiris.
- Puesta en común del caso 1 con «100» iteraciones de cada tipo y comprobación de que, en pocas iteraciones, la distribución tiende a estabilizarse. El número de decimales que se escoja condiciona el grado de precisión de la estabilidad.
- P pide a G comprobar qué pasa si se parte de distribuciones iniciales distintas a las «100».
- Se comprueba experimentalmente Q_2 pero todavía no se puede dar una respuesta.
- P propone a G para la siguiente sesión analizar si existe alguna relación entre la distribución *inicial*, la distribución *estable* y el momento o tiempo *n* en el que se produce la estabilización (Q_3).

Observación:

- El uso del Excel — que están aprendiendo de forma paralela en la asignatura de informática— y de Wiris —que se les ha dado unas pequeñas orientaciones a principio de curso— permiten a G manipular los datos fácilmente.

Tercera sesión

- P escucha las propuestas de G sobre Q_3. A partir de las experimentaciones realizadas hasta el momento, resulta muy difícil para G dar respuesta.
- P plantea lo siguiente: si X_i, es la distribución «estable» se tiene que cumplir: $M \cdot X_i = X_i$. Es decir, se replantea la cuestión, que pasa a ser: Q_4 ¿Cómo debe ser la distribución para que se cumpla $MX = X$?.
- P utiliza el caso 1 para ejemplificar lo que G deberá realizar con sus datos propios: Si se considera $X_i = \binom{x}{y}$, se puede escribir $M \cdot X_i = X_i$ como $M \cdot \binom{x}{y} = \binom{x}{y}$ ó de forma equivalente: $(M - I) \cdot \binom{x}{y} = \binom{0}{0}$, sistema de ecuaciones homogéneo. El problema consistirá en encontrar los valores de *x* e *y* que cumplen la igualdad, es decir, consistirá en resolver un sistema.
- Se pide a G si el sistema podría tener infinitas soluciones:Q_5. Para ello se les pide que prueben con diferentes matrices.

Observación:

- El sistema siempre será compatible ya que por el hecho de ser un sistema homogéneo, siempre existirá, al menos, la solución trivial.

Cuarta Sesión

- Puesta en común de las posibles respuestas a Q_5. G lo comprueba experimentalmente pero le es muy difícil dar una justificación.
- P da la respuesta a través de una de las propiedades de las matrices de transición.
- Una vez P ha mostrado que existen infinitas soluciones –llamadas vectores fijos–, plantea a la clase las siguientes cuestiones relacionadas con los vectores fijos: ¿son únicos?, ¿cómo determinarlos?, ¿podemos saber a cuál de los infinitos vectores fijos tenderá la distribución? (Q_6).

- P recuerda que el sistema que están considerando es cerrado (no entran ni salen individuos), eso quiere decir que si inicialmente hay T individuos, en cada iteración se debe cumplir que $\sum X_i = T$. Por tanto, al resolver el sistema, si imponemos la condición $\sum X_i = T$, se encontrará el vector fijo. Dado el dominio que los alumnos tienen ya en este punto del cálculo matricial, se les plantea resolverlo matricialmente.
- P vuelve al caso 1, tomando primero «200» individuos iniciales y luego «150». Los resultados coinciden en ambos casos con los ya vistos experimentalmente en la tercera sesión.

Observaciones:

- Las columnas de las matrices de transición siempre suman 1, y por tanto, cuando se les resta la matriz identidad, las columnas de $(M - I)$ suman cero, y atendiendo a las propiedades de los determinantes, se tiene que $\det(M–I) = 0$. Así, considerando que la matriz $(M - I)$ tiene dimensión mxm, el rango del sistema será $m - 1$, y el sistema ampliado también, con lo cual se concluye que el sistema es compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

Quinta sesión

- Se parte de la cuestión introducida en la sesión anterior, ¿existe alguna relación entre la distribución inicial, la distribución estable y el momento n en el que se produce la estabilización?.
- Para encontrar el momento n en el que se estabiliza la distribución necesitaríamos encontrar una fórmula general para la potencia n-ésima de la matriz M, M^n.
- P hace un paréntesis en el taller para proporcionar a los alumnos diferentes matrices –las mismas para todos los grupos–, y se les pide que con la ayuda de Wiris o de Excel, las eleven a diferentes exponentes y que observen qué pasa en cada caso. Aquellas que no son diagonales, a medida que se aumentando la potencia, aumentan notablemente cada uno de sus elementos. En cambio, aquellas que inicialmente eran diagonales, cumplen que en cada iteración n, los elementos de la diagonal están elevados a n.
- De esta forma, los alumnos observan que para encontrar una fórmula general de M^n, sería mucho más sencillo si la matriz fuera diagonal. En ninguno de los casos presentados, M lo es. En las clases de teoría, los alumnos están viendo las aplicaciones lineales, los cambios de base y la diagonalización, así que ya saben cómo conseguir transformar una matriz no diagonal M (diagonalizable), mediante una aplicación lineal como: $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$, donde K es la matriz de vectores propios y D la matriz diagonal de valores propios.
- Así, las potencias de $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$, serán: $M^n = K \cdot D \cdot K^{-1} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot K \cdot D \cdot K^{-1} = K \cdot D \ldots\ldots \cdot D \cdot K^{-1} = K \cdot D^n \cdot K^{-1}$.
- El profesor explica que para encontrar el valor n se debe elevar a n cada miembro de la diagonal y considerar un grado de aproximación (centésimos, milésimos, etc.). Para cada término se resuelve la igualdad aplicando logaritmos, y nos quedamos con el valor más grande de todos.

Observación:

- Sobre cómo calcular los valores y vectores propios de cada matriz, no se trata en el taller, por haberse explicado con detalle en las clases de teoría. Se explica el uso de la orden: valors_i_vectors_propis(*A*). de Wiris que, para cada matriz *A* nos calcula mediante una sola orden, sus vectores y valores propios.

Diario de sesiones – taller primer trimestre 2006/07

El profesor entregó a los diferentes grupos la lista con los diferentes casos, asignando dos casos a cada uno y les pidió que intentaran describir cómo evolucionarán sus situaciones particulares con el paso del tiempo.
Durante el primer cuarto de la sesión los alumnos trabajaron de forma autónoma y en ese momento, el profesor propuso que todos los grupos consideraran una misma situación común: tomar «100» de cada tipo. Trabajaron

así el resto de la primera mitad de la clase.
La tendencia mayoritaria fue la de utilizar técnicas aritméticas para dar las soluciones y tuvo que ser siempre el profesor quien introdujera el álgebra matricial. Para ello consideró el caso 1 de la lista (que no había sido asignado a ningún grupo) y que le sirvió de guía en todo momento del taller:

> **C*aso 1.* P*revisión de averías*:** La encargada del servicio de informática de una empresa sabe que el 50% de los ordenadores tienen problemas al día siguiente, pero son problemas pequeños y los puede resolver durante el día. Por lo tanto, el 100% de los ordenadores estropeados están en buen estado al día siguiente. Estudiar el porcentaje de ordenadores estropeados a largo plazo.

El profesor planteó lo siguiente: si consideramos que ***Hoy*** hay 100 ordenadores en buen estado (*Bien*) y 100 con problemas (*Mal*), siguiendo las pautas marcadas por el enunciado, ***Mañana*** tendremos: ***Bien***: 50% de 100 + 100% de 100 = 50 + 100 = 150 y ***Mal***: 50% de 100 = 50, es decir:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{Bien}\text{: 50\% de } 100\ +\ 100\%\text{ de }100 \Leftrightarrow 0{,}5\cdot 100\ +\ 1\cdot 100 \\ \boldsymbol{Mal}\text{: 50\% de } 100\ +\ \ 0\%\text{ de }100 \Leftrightarrow 0{,}5\cdot 100\ +\ 0\cdot 100 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}5\cdot 100 + 1\cdot 100 \\ 0{,}5\cdot 100 + 0\cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Se pidió a los alumnos que lo aplicaran a sus casos respectivos. El profesor les dejó trabajar de forma autónoma y finalmente se hizo una puesta en común para comprobar que los diferentes grupos que trabajaban con los mismos datos, coincidían.
En este punto el profesor unificó la notación haciendo el siguiente razonamiento: llamó M a la matriz de transición, X_0 a la situación inicial y X_n a la situación al cabo de n periodos de tiempo, de manera que al cabo de:

- Un periodo: $X_1 = M\cdot X_0$
- Dos periodos: $X_2 = M\cdot X_1 = M^2\cdot X_0$
- Tres periodos: $X_3 = M\cdot X_2 = \cdots = M^3\cdot X_0$

Así, en n periodos, tendremos $X_n = M^n\cdot X_0$. El profesor pidió a todos los grupos que introdujesen la nueva notación en sus casos. La sesión acaba con una puesta en común.

La segunda sesión se inició con la propuesta por parte del profesor de trabajar con la hoja de cálculo Excel para hacer simulaciones sobre las previsiones a corto y, principalmente, a largo plazo y tomó el caso 1 como ejemplo:

Iteración	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
Bien	100	150	125	137,5	131,25	134,375	132,8125	133,5938	133,2031	133,3984	133,3008
Mal	100	50	75	62,5	68,75	65,625	67,1875	66,40625	66,79688	66,60156	66,69922
Total	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200

Cada grupo a pesar de tener situaciones diferentes encontró que se producía una estabilidad. En el caso que muestra el profesor en la pizarra se observa como en apenas siete iteraciones ya hay una estabilidad. Con el uso de Excel, los alumnos pudieron iterar fácilmente y observaron que a más iteraciones más precisión.
El profesor les pidió cambiar los valores iniciales y que observaran que sucedía.
Todos los grupos observaron que efectivamente se producían convergencias —independientemente del caso considerado o de los valores iniciales usados— pero no supieron explicar si siempre sería así ni si la velocidad tenía relación con los valores iniciales o si dependía de los porcentajes de transición, o si por el contrario se trataba de meras casualidades.
El profesor propuso para la siguiente sesión que analizaran si existía alguna relación entre la distribución *inicial*, la distribución *estable* y el momento n en el que se produce la estabilización, concluyendo así la segunda sesión.

La tercera sesión se inició haciendo una puesta en común y el profesor, tras escuchar todas las opciones aportadas por los diferentes grupos sobre la cuestión Q_3, tuvo que introducir el siguiente razonamiento: si llamamos $X_i = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, podemos escribir la estabilidad como M·X_i=X_i es decir, $M\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ o de forma

equivalente: $(M-I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, y por tanto se debe resolver un sistema de ecuaciones homogéneo.
El profesor, volvió a tomar el caso 1 como ejemplificación para encontrar la relación de los elementos en la estabilidad: $\begin{pmatrix}0{,}5 & 1\\0{,}5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow(M-I)\cdot X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=2y$
Es decir, la relación que los elementos *x* e *y* deben tener en la estabilidad es: $\begin{cases}x=2y\\y=y\end{cases}$ y que el profesor llamó vector fijo.
El profesor pidió a todos los grupos que resolvieran sus respectivos sistemas y quedó pendiente para la siguiente sesión que encontraran la relación con los datos iniciales.

La cuarta sesión se inició haciendo una puesta en común de los diferentes argumentos aportados por los alumnos pero ninguno fue concluyente. Tuvo que ser el profesor quien explicara que el sistema al ser cerrado (no entran ni salen individuos o elementos) cumple $\sum X_i=T$ (donde T es el número total de individuos). En el caso que el profesor había resuelto en la pizarra: «100» de cada tipo , se tiene $x+y=200$, que junto con el resultado anterior permite concluir que $\begin{cases}x=133.3\\y=66.6\end{cases}$ tal como se había encontrado de forma experimental.
Este resultado permitió justificar que la estabilidad no depende de cómo están distribuidos inicialmente los valores, sino del total de «individuos» iniciales. El profesor pidió a los alumnos que corroboraran experimentalmente este resultado, mediante la simulación numérica este resultado.

La quinta sesión se dedicó a analizar si existía alguna relación entre la distribución inicial, la distribución estable y el momento *n* en el que se produce la estabilización. Para ello, el profesor necesitó hacer un alto en el taller para explicar cómo trabajar con potencias de matrices, no a nivel teórico —que ya se estaba haciendo en paralelo en las clases magistrales— sino con la calculadora simbólica Wiris.
Primero les hizo elevar diferentes matrices a diferentes exponentes con el objetivo que los estudiantes se dieran cuenta que las matrices diagonales cumplen que en cada iteración *n*, los elementos de la diagonal están elevados a *n*.
De esta forma, los alumnos observaron que para encontrar una fórmula general de M^n, sería mucho más sencillo si la matriz fuera diagonal. En ninguno de los casos presentados, *M* lo era. En las clases de teoría, los alumnos acababan de ver las aplicaciones lineales, los cambios de base y la diagonalización, así que ya sabían cómo conseguir transformar una matriz no diagonal *M* (diagonalizable), mediante una aplicación lineal como: $M=K\cdot D\cdot K^{-1}$, donde *K* es la matriz de vectores propios y *D* la matriz diagonal de valores propios. Así, las potencias de *M* serán: $M^n=K\cdot D^n\cdot K^{-1}$.
El profesor explicó que para encontrar el valor *n* se debe elevar a *n* cada miembro de la diagonal y considerar un grado de aproximación (centésimos, milésimos, etc.). Para cada término se resuelve la igualdad aplicando logaritmos, quedándonos con el valor más grande de todos.
El profesor volvió a tomar el caso 1 y mediante la calculadora simbólica wiris encontró la matriz de los vectores y valores propios: $K=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ respectivamente, por lo que pudo reescribir de la forma $M=K\cdot D\cdot K^{-1}$ y por tanto: $M^n=K\cdot D^n\cdot K^{-1}$, donde D^n es la matriz: $\begin{pmatrix}-0{,}5^n & 0\\0 & 1^n\end{pmatrix}$.
Con un grado de aproximación al milésimo, se obtuvo que la estabilidad se alcanzaba con 10 iteraciones:
$|-0{,}5^n|\approx 0{,}001\Rightarrow n=\frac{Ln(0{,}001)}{Ln(0{,}5)}=9{,}96$

4.2. Segundo trimestre: un recorrido de estudio e investigación sobre la previsión de ventas

El objetivo del taller era plantear a los estudiantes un problema muy próximo a las situaciones reales de previsión de ventas en el que las funciones aparecen como un posible modelo predictivo. Dado el bagaje matemático y económico de los estudiantes del curso, ninguna técnica particular de previsión forma parte de su cultura. El uso de Excel en el primer trimestre del curso y su familiaridad con las familias de funciones elementales (tanto en el bachillerato como en las clases teóricas que se realizan de forma paralela al taller) nos permitieron suponer que podrían detectar fácilmente una tendencia en las ventas (por ejemplo a partir de la representación gráfica) y modelizarla funcionalmente. La formulación de la cuestión del taller también introducía la idea de *variación porcentual* (anual y trimestral), lo que nos aseguraba que el estudio de la *variación de una función* apareciera durante el recorrido. Dado que el taller se realizaría en paralelo con las clases teóricas en las que se iba a abordar el tema de la derivada, era posible que, en algún momento, el estudio de la variación de las ventas se pudiera relacionar con el cálculo de derivadas.

De todos modos, la elección de una situación de previsión de ventas venía motivada principalmente por el hecho que permitía distinguir de manera clara y sencilla entre el *sistema económico* que se estudia (las ventas) y los *modelos* que se utilizan para estudiarlo (las funciones). Además, el hecho de trabajar con distintos productos y distintos grupos de estudiantes posibilita la consideración de diferentes modelos posibles, facilitando así la emergencia del problema de la *adecuación entre el modelo y el sistema*. Dicho en otra palabras, el objetivo del taller era que los alumnos utilizaran las funciones como modelos de algún sistema económico simple y que se plantearan la cuestión de la elección del modelo (¿Qué modelo es mejor? ¿Bajo qué criterios? etc.) y abordaran el problema de su validación en función de los datos considerados.

4.2.1. Análisis a priori de la praxeología matemática

Partimos de la siguiente cuestión:

> Q_0: Dado un número finito de valores $\{(x_t, y_t\}_{t=1}^{n}$ que representa la evolución temporal de cierta magnitud, ¿se puede describir el comportamiento de dichos puntos a corto y largo plazo? ¿Se puede encontrar alguna función *f*(*x*) para estimar dicho comportamiento, es decir, $f(x_t) \approx y_t$?

Estamos suponiendo aquí que la serie temporal $\{(x_t, y_t\}_{t=1}^{n}$ es discreta del tipo $x_t = t$ y que el conjunto de valores iniciales viene dado en forma numérica. Este primer *medio experimental* permite aportar una primera respuesta, no muy precisa, a Q_0: por ejemplo que y_t crece o decrece con t, o que no es monótona («a veces crece y otras decrece»), etc. Si consideramos además la representación gráfica de la serie, el comportamiento a corto plazo de dicha representación puede ser fácilmente asociado aproximadamente a alguna de las funciones elementales:

- Funciones lineales: $f(x) = ax + b$
- Funciones parabólicas: $f(x) = a(x - b)^2 + c$
- Funciones cúbicas del tipo: $f(x) = a(x - b)^3 + c$
- Funciones hiperbólicas: $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$
- Funciones exponenciales: $f(x) = a^{x-b} + c$

Además, mediante el uso de las técnicas gráficas y gráfico-numéricas que se han detallado en el capítulo 3 de esta memoria, se pueden obtener de forma aproximada los valores de los parámetros a, b y c que caracterizan cada familia de funciones.

Al asociar la gráfica que aproxima los valores iniciales de la serie temporal con un tipo de función pueden surgir nuevas cuestiones:

Q_1: Dada una familia de funciones (que depende de los parámetros a, b y c) para representar la tendencia de y_t, ¿cómo elegir a, b y c para que la aproximación sea «la mejor»? ¿Qué significa que una aproximación sea «mejor» que otra?

Q_2: ¿Cómo decidir entre dos familias de funciones cuál es la que mejor aproxima?

Un criterio para abordar la primera cuestión sería minimizar el promedio del error absoluto que se comete al aproximar cada valor inicial y_t con $f(t)$ considerado. Evidentemente, la mejor aproximación será aquella cuyo promedio del error, entre los datos reales y las previsiones realizadas a partir de los modelos, sea menor. La técnica para encontrar la combinación de los parámetros a, b y c que conduce a la mejor aproximación consiste en una primera simulación manual, completada con la herramienta *Solver* que nos proporciona la hoja de cálculo Excel. Dicha herramienta permite ajustar los valores de los parámetros a, b y c cuyo error promedio es mínimo, siempre que los valores iniciales aportados por el usuario sean próximos a los reales.

$a =$
$b =$
$c =$

t_i	y_i	$f(t_i)$	Error Absoluto
0	y_0	$f(0)$	E0 = $\|y_0 - f(0)\|$
1	y_1	$f(1)$	E1= $\|y_1 - f(1)\|$
2	y_2	$f(2)$	E2 = $\|y_2 - f(2)\|$
…	…	Promedio:	$\sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{n+1}$

La segunda cuestión planteada surge cuando dos familias de funciones diferentes tienen valores de la media de error muy parecidos. ¿Qué tipo de modelo elegir? ¿Sigue siendo válida la comparación de la media de los errores o podemos incorporar nuevos criterios sobre la «simplicidad» o «interpretabilidad» del modelo?

Para obtener más elementos de comparación entre distintos tipos de modelos (o familias de funciones), se puede considerar un nuevo elemento: la tasa de variación absoluta: $TVA_t = y_t - y_{t-1}$. Con estos nuevos valores: $TV_1 = y_1 - y_0$, $TV_2 = y_2 - y_1$…..,$TV_n = y_n - y_{n-1}$, volvemos a realizar el mismo estudio realizado para y_1, y_2, …, y_n. Es decir, iniciamos representándolos gráficamente, lo que nos permitirá hacer una primera selección de aquella familia o familias de funciones que podrían corresponder, para finalmente encontrar la que da una mejor aproximación.

$a =$	a ‘=
$b =$	b ‘=
$c =$	c ‘=

t_i	y_i	$f(t_i)$			
0	y_0	$f(0)$	TV	$g(t_i)$	Error Absoluto
1	y_1	$f(1)$	$y_1 - y_0$	$g(1)$	$\| y_1 - y_0 - g(1)\|$
2	y_2	$f(2)$	$y_2 - y_1$	$g(2)$	$\| y_2 - y_1 - g(2)\|$
3	y_3	$f(3)$	$y_3 - y_2$	$g(3)$	$\| y_3 - y_2 - g(3)\|$
4	y_4	$f(4)$	$y_4 - y_3$	$g(4)$	$\| y_4 - y_3 - g(4)\|$
…	…				$\sum_{i=1}^{n} \frac{\|(y_i - y_{i-1}) - g(i)\|}{n}$

Si aplicamos el criterio utilizado previamente, podemos considerar que la mejor aproximación es aquella con menor error promedio, obteniendo la combinación de los parámetros a, b y c mediante la herramienta *Solver*.

A partir de aquí, se puede plantear la siguiente cuestión:

Q_3: ¿Existe alguna relación entre la expresión analítica del primer modelo y la expresión que ajusta los datos de la tasa de variación?

Para poder abordar esta cuestión, consideraremos el teorema del valor medio de Lagrange:

> Sea f una función continua en el intervalo [a,b] y derivable en (a,b). Existe un valor $\xi \epsilon (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$

Para el caso que nos ocupa, tenemos que: $f(t+1) - f(t) = f'(\xi) \cdot (t + 1 - t)$, es decir, podemos aproximar: $f(t+1) - f(t) \approx f'(t)$.

Surge así un nuevo criterio para decidir, entre dos familias de funciones, cuál se ajusta mejor a un conjunto de datos. Se estudia la tendencia de la tasa absoluta de variación y se elige como «mejor modelo» *la función cuya derivada coincida con la función que mejor ajusta a la tasa absoluta de variación*.

4.2.2. Análisis de la praxeología didáctica

El diseño a priori del recorrido didáctico propuesto se hará bajo los mismos supuestos que se detallaron en el punto 4.1.2. incluyendo al final un diario de sesiones producto de la fusión de todas las experimentaciones llevadas a cabo en el *taller de modelización* del segundo trimestre del curso 2006/07.

La cuestión generatriz que inicia el recorrido es la siguiente:

tAD La empresa de software educativo TAD (*Tecnologías Aplicadas a la Docencia*) lleva un registro de las ventas trimestrales de siete de sus principales productos durante los últimos tres años. Nos encarga un informe sobre las cuestiones siguientes:

P1: *¿Qué ventas se pueden prever durante los próximos trimestres para cada producto? ¿Y para los próximos meses? Presentar una fórmula que permita calcular las previsiones y justificarla explicando las garantías y limitaciones de cada propuesta.*

P2: ¿Para qué productos se prevén unas ventas con un crecimiento mayor al 10% trimestral? ¿Para cuáles se prevé un decrecimiento mayor al 12% anual?

TRIMESTRE	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Marzo 2003	1890	1050	1375	1300	300	750	250
Junio 2003	1940	1100	1100	1105	800	740	270
Septiembre 2003	1970	1120	920	940	1050	735	290
Diciembre 2003	1980	1160	790	800	1200	730	315
Marzo 2004	1990	1200	690	680	1250	720	340
Junio 2004	1995	1250	610	580	1300	710	370
Septiembre 2004	2000	1300	550	490	1330	700	400
Diciembre 2004	2001	1360	500	420	1350	685	430
Marzo 2005	2004	1420	460	350	1370	670	460
Junio 2005	2015	1490	420	300	1380	650	500
Septiembre 2005	2030	1550	390	260	1390	635	540
Diciembre 2005	2060	1640	370	220	1400	615	580
Marzo 2006	2100	1720	340	185	1410	590	630
Junio 2006	2170	1810	325	160	1415	570	680
Septiembre 2006	2250	1900	310	135	1420	545	730
Diciembre 2006	2365	2000	290	115	1425	520	790
	Diccionario Español ingles	Juego simulación empresarial	Tutorial de programación	Videos ciencias naturales	Programa horarios centro	Calculadora gráfica numérica	Calculadora simbólica

Los datos de cada uno de los productos fueron «preparados» por los profesores de la siguiente forma: en una hoja de cálculo se calcularon dieciséis valores de las siete funciones elementales siguientes:

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
$0{,}5(x-6)^3+2000$	$2{,}5(x+5)^2+1000$	$\frac{5500}{x+4}$	$1300\cdot 0{,}85^x$	$\frac{-1200}{x+1}+1500$	$-0{,}8(x+2)^2+750$	$250\cdot 1{,}08^x$

Se modificaron entonces ligeramente los valores de cada una de ellas para distorsionarlos un poco sin perder con ello la *tendencia* general de la función original. De este modo, los datos propuestos a los estudiantes no corresponden directamente a ninguna función elemental.

Antes de iniciar el taller, se dedicaron cuatro sesiones de *clases teóricas* a introducir las principales familias de funciones (que los alumnos ya han estudiado en secundaria): rectas, parábolas, cúbicas, hipérboles y exponenciales. El objetivo era que los alumnos supieran manejar la expresión general de cada familia de funciones y pudieran asociarla a distintos gráficos. En otras palabras, se enseñó a los alumnos cómo *asignar una expresión algebraica a la gráfica de una función* sabiendo previamente de qué familia se trataba (recta, parábola, cúbica, etc.). Para ello se les explicó cómo deducir, a partir de la curva $y = f(x)$, la gráfica de la función $y = af(x - b) + c$ para valores concretos de a, *b*, *c* y, recíprocamente, cómo deducir la expresión de una función cualquiera $y = f(x)$ dada su gráfica y conjeturando previamente a qué familia pertenece la función.

Hemos comentado anteriormente que el taller de modelización se desarrollaba en paralelo con las clases de teoría. En ellas, y de manera simultánea a la realización del taller, se fueron introduciendo en clase las nociones de *variación absoluta* o *relativa* de una función entre dos puntos, de *derivada* de una función, de *recta tangente*, etc., dentro de la problemática general del estudio de las variaciones de una función. Nos centramos siempre en la relación funcional entre dos variables económicas: ingresos en función del número de ventas, costes en función de la producción, demanda en función del precio, etc.

A continuación describiremos mediante unas tablas el diseño de las praxeologías didácticas a priori que corresponderían a cada una de las sesiones en las que se divide el taller y, de la misma forma cómo hemos presentado el taller del primer trimestre y acabaremos presentando una tabla con la crónica unificada.

Primera sesión
- P entrega la hoja con la cuestión generatriz y los datos, asignando a G dos productos de la lista. - Se deja a G total libertad para explorar la cuestión y aportar una primera previsión para las ventas de los próximos trimestres. - Dependiendo del producto, asociar la gráfica con un tipo de función puede tener más de una opción. - P utiliza el producto 1 para hacer una primera puesta en común y aprovecha para proponer una plantilla de Excel. Pide a G que busque sus modelos de previsión siguiendo la estrategia explicada por P en el caso 1 e introduciendo los datos en la plantilla común. - La sesión concluye con la necesidad de hallar los parámetros del tipo de función considerado por G que mejor se ajustaran a los datos del producto. - P pide a G buscar más de un tipo de función para aproximar los datos. Queda como trabajo pendiente para la siguiente sesión. Observaciones: - Es de esperar que los distintos G utilicen la hoja de cálculo de Excel para hacer la *representación gráfica de las ventas en función del tiempo,* asociando la representación gráfica obtenida con alguna de las familias de funciones estudiadas previamente en clase.

Segunda sesión

- G presenta las expresiones analíticas obtenidas para cada producto. Al tratar diferentes G un mismo producto, o bien las familias escogidas son diferentes, o bien la misma familia pero con expresiones analíticas distintas.
- P plantea entonces el problema de determinar cuál de las previsiones obtenidas es «mejor». Ante la imposibilidad de determinarlo a simple vista, sólo con las columnas de datos o sólo con las gráficas, P introduce como posible criterio calcular la «diferencia» entre los valores de la función considerada y los datos de cada producto. Para ello, P propone añadir una nueva columna a la plantilla de Excel para calcular la media aritmética de las diferencias en valor absoluto entre el valor dado y el obtenido por la simulación del modelo (*error medio).*
- El objetivo siguiente es encontrar, para cada producto y cada familia de funciones, la función con menor error medio.
- G hace distintas pruebas y, a mitad de la sesión, P explica cómo utilizar la herramienta de Excel, *Solver*, que permite, precisamente, obtener la combinación de los parámetros *a*, *b*, *c* que minimiza el error medio, siempre y cuando los valores iniciales de los parámetros sean próximos a la solución.
- Se concluye la sesión pidiendo a G buscar para la siguiente sesión como mínimo una expresión analítica para hacer una previsión de las ventas de cada uno de los siete productos de la lista.

Observación:

- La función *Solver* permite encontrar la mejor aproximación en caso de haber diferentes propuestas dentro de la misma familia de funciones. Pero no es efectiva a la hora de decidir entre dos familias de funciones distintas, puesto que se pueden obtener valores de error medios parecidos cuyas diferencias son atribuibles al azar. Además, dadas dos previsiones hechas con funciones de distinto tipo, el hecho que una previsión de un error medio menor que otra no parece siempre un buen criterio para determinar que la previsión es «mejor».

Tercera sesión

- P hace una puesta en común de las expresiones algebraicas trabajadas por G para cada producto. En los diferentes productos en los que hay coincidencia entre las familias de funciones, dada la precisión con la que actúa la función *Solver*, las expresiones algebraicas coinciden bastante.
- El problema de la comparación de modelos de previsión se plantea para los casos en los que, para un mismo producto, se han elegido diferentes familias de funciones con errores mínimos bastante parecidos.
- Si de forma natural no aparece la idea del cálculo de las variaciones trimestrales para hacer la previsión, P introducirá la propuesta de considerar una nueva variable además de las ventas: la tasa trimestral de variación de las ventas. En la práctica, consiste en añadir una columna a la hoja de cálculo para calcular la

tasa de variación (TV) entre trimestres, a partir de los datos ofrecidos en el problema. Si x es el trimestre considerado y $V(x)$ el valor de las ventas, se calcula la tasa de variación como: $TV(x) = V(x) – V(x – 1)$.

- Se pide a G que procedan con la nueva columna de la misma forma que con los datos iniciales, es decir, representar gráficamente, decidir a qué familia/s de funciones pueden corresponder y encontrar la que de una mejor aproximación.
- P expone en la pizarra el caso del producto 1.

Cuarta y quinta sesión

- Una vez los diferentes G presentan sus propuestas de modelos para la *previsión de las ventas* y para la *previsión de las variaciones de las ventas*, P plantea la cuestión de si existe alguna relación entre la expresión analítica del modelo de las ventas y la expresión que ajusta los datos de la tasa de variación.
- En aquellos productos para los que se dispone de más de un modelo (algunos de los cuales dan errores medios muy pequeños), el estudio de las variaciones permite concluir que la gráfica que mejor ajusta la tasa de variación «se parece» a la gráfica de la función derivada de la función que mejor modeliza y ajusta la evolución de las ventas del producto.
- Surge así un nuevo criterio para decidir, entre dos familias de funciones, cuál se ajusta mejor a un conjunto de datos. Se estudia la tendencia de la tasa absoluta de variación y se elige como «mejor modelo» *la función cuya derivada coincida con la función de la tasa absoluta de variación*.
- Se consiguen así dos criterios complementarios para la elección del modelo funcional que mejor describe la tendencia de las ventas de un producto.
- P hace una síntesis de todo lo explicado hasta ahora utilizando el producto 2.
- G aporta la previsión de ventas que se les planteaba en la cuestión inicial.

Diario de sesiones – taller segundo trimestre 2006/07

El profesor entregó la hoja a los diferentes grupos asignándoles dos productos de la lista. La exploración duró aproximadamente la mitad de la primera sesión. La mayoría de los grupos introdujo los datos en la hoja de cálculo y basó la predicción en las gráficas. En ese momento se hizo una puesta en común y el profesor utilizó el producto 1 para unificar notación a partir de una plantilla de Excel. También explicó la asociación entre la tendencia de los valores y su expresión analítica. En el caso utilizado, la forma de los datos sugiere una función cúbica. De forma aproximada se puede establecer el punto de inflexión (b,c) y probando distintos valores, el coeficiente de dilatación a. Se encontró así una expresión analítica del tipo $y = a(x – b)^3 + c$ bastante ajustada a los datos: $y = 0,5·(x – 6)^3 + 2000$. En el resto de los casos, la asociación no era tan evidente.
La plantilla que utilizó el profesor fue la siguiente:

a =	0,50
b =	6
c =	2000

	Tiempo	P1	$y = a(x - b)^3 + c$
Marzo 2003	0	1890	1892
Junio 2003	1	1940	1937,5
Septiembre 2003	2	1970	1968
Diciembre 2003	3	1980	1986,5
Marzo 2004	4	1990	1996
…	…	…	…

La sesión acabó con la propuesta por parte del profesor que cada grupo eligiera diferentes familias para un mismo producto siguiendo la estrategia explicada para el producto 1.

La segunda sesión se inició con una puesta en común que permitió a los diferentes grupos observar, de un lado que para el mismo producto, se habían escogido diferentes familias de funciones elementales que aproximaban, y por otro que, en el caso que las familias escogidas fueran las mismas, los valores de los parámetros no coincidían.
El profesor planteó el problema de determinar que previsión era «mejor» y para ello introdujo el criterio de minimizar el error medio que se comete al comparar los datos reales con las previsiones a partir del modelo con la aproximación. Para ello añadió una nueva columna en la plantilla para calcular la diferencia (en valor absoluto) entre el valor real dado y el valor obtenido con la aproximación (que llamó error medio).
Cada grupo trabajó con sus datos y a mitad de sesión, el profesor explicó la herramienta de Excel, *Solver*.
La sesión se acabó proponiendo a cada grupo que lo aplicaran a los siete productos.

La tercera sesión se inició haciendo una puesta en común y esta vez sí que coincidieron los valores de los parámetros en los casos en los que se considerara la misma función.
El profesor pidió que plantearan cómo proceder en el caso en el que un mismo producto tuviera diferentes familias de funciones que lo aproximaban. Tras un tiempo de exploración, tuvo que ser el profesor quien propusiera considerar una nueva variable además de las ventas: la tasa trimestral de variación de las ventas, añadiendo una columna a la hoja de cálculo para calcular la *tasa de variación* entre trimestres, a partir de los datos ofrecidos en el problema.
El profesor pidió a los alumnos que con los nuevos datos hicieran lo mismo que habían hecho con los iniciales:

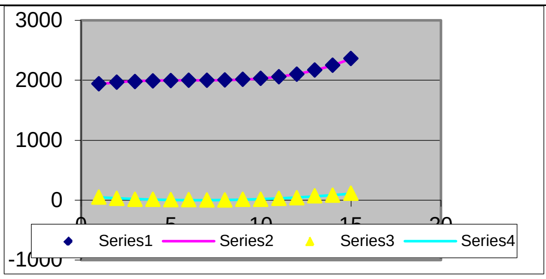
a =	0,50
b =	6,03
c =	1999,98

a =	1,535550423
b =	6,56966939
c =	-0,14

Tiempo	P1	$y = a(x - b)^3 + c$	Error Absoluto
0	1890	1890	3,35149E-10
1	1940	1936,149043	3,850956982
2	1970	1967,156	2,84399954
3	1980	1986,031714	6,031713689
4	1990	1995,787024	5,787024064
5	1995	1999,432773	…
…	…	…….	

TV	$y = a(x - b)^2 + c$	Error Absoluto
50	47,49514781	2,504852193
30	31,92568186	1,925681859
10	19,42731676	9,427316756
10	10,0000525	5,24979E-05
5	3,643889085	1,356110915
…	…….	…….
		3,209613707

Al representar los puntos de la tasa de variación, los datos parecen poderse modelizar con una función cuadrática del tipo $y= a(x–b)^2+c$. Mediante la elección de los parámetros a, b y c aproximados y la herramienta *Solver*, se encontró fácilmente una propuesta de modelo.



Gráfica 1. Producto 1: datos reales y tasa absoluta de variación

Se inicia la cuarta sesión con una puesta en común y el profesor planteó a los diferentes grupos si existía alguna relación entre la expresión inicial de las ventas y la de la variación. Se dejó a los alumnos que exploraran dicha cuestión.

Tuvo que ser el profesor quien introdujera la relación entre ambas, que es la derivada. Para ello tomó como ejemplo el producto 2, que desarrolló en la pizarra. A continuación mostramos su resumen:

a =	60,9231585
b =	973,0270065

T	P2	$y = ax+b$	ERROR ABS
0	1050	973,0270065	76,972994
1	1100	1033,950165	66,049835
2	1120	1094,873323	25,126677
3	1160	1155,796482	4,203518
4	1200	1216,71964	16,71964
...			
			40,625

a =	326,9560258
b =	1,095991712
c =	732,9617596

T	P2	$y = ab^x+c$	ERROR ABS
0	1050	1059,917785	9,9177854
1	1100	1091,302854	8,697146
2	1120	1125,700629	5,7006291
3	1160	1163,400305	3,4003054
4	1200	1204,718838	4,7188383
...			
			7,1614775

a =	2,461032595
b =	-5,178087668
c =	995,0134217

T	P2	$y = a(x-b)^2+c$	ERROR ABS
0	1050	1061,000084	11,000084
1	1100	1088,948002	11,051998
2	1120	1121,817985	1,8179849
3	1160	1159,610033	0,3899671
4	1200	1202,324146	2,3241461
...			
			3,6341819

El estudio del error medio permitió descartar simplemente como aproximación una función lineal. Al calcular la tasa de variación se obtuvo lo siguiente:

a =	-0,9915454
b =	-1,2772106
c =	61,073044

Tiempo	P2	TV	$y=ab^x+c$	Error Abs
0	1050			
1	1100	50	62,339456	12,339456
2	1120	20	59,455569	39,455569
3	1160	40	63,138901	23,138901
4	1200	40	58,43451	18,43451
...				...
				16,926535

a =	5,0000008
b =	24,999974

Tiempo	P2	TV	$y = ax + b$	Error Abs
0	1050			
1	1100	50	29,999975	20,000025
2	1120	20	34,999975	14,999975
3	1160	40	39,999976	2,368E-05
4	1200	40	44,999977	4,9999771
...				...
				5,666668

El profesor pidió a los alumnos que comprobaran si al derivar la expresión analítica inicial se obtenía la correspondiente a la obtenida en las tasas de variación.

Para los datos originales, las dos expresiones encontradas fueron:

OPCIÓN 1: $y \approx 326{,}96\ (1{,}09)^x + 732{,}96$

OPCIÓN 2: $y \approx 2{,}46\ (x - (-5{,}18))^2 + 995{,}01 = 2{,}46\ (x + 5{,}18)^2 + 995{,}01$

Y para los datos obtenidos en las tasas de variación, las dos expresiones encontradas fueron:

OPCIÓN 1: $y \approx -0{,}99\ (1{,}27)^x + 61{,}07$

OPCIÓN 2: $y \approx 5x + 25$

La función que comete menor error al trabajar con las tasas de variación, es la lineal, que a su vez es la derivada de la expresión analítica de la parábola antes encontrada $y = 2{,}46\ (x + 5{,}18)^2 + 995{,}01$.

4.3. Los recorridos de estudio e investigación como dispositivo normalizado

El análisis realizado *a posteriori* sobre estas primeras experimentaciones se encuentra detallado al final del capítulo. Una observación que podemos anticipar es que para garantizar la novedad que supone para todos los alumnos el recorrido de estudio e investigación, las cuestiones planteadas en las sucesivas experimentaciones deben ser diferentes. Por ello, en los siguientes cursos se implementaron REI basados en la misma praxeología matemática pero partiendo de cuestiones iniciales distintas y con organizaciones didácticas también diferentes, fruto de la incorporación de nuevos dispositivos para mejorar el funcionamiento de los talleres.

A continuación mostramos los enunciados que se entregaron a los estudiantes y que contienen las cuestiones generatrices de los sucesivos talleres.

Curso 2007/08 - primer trimestre

1. Aplicación a fenómenos geológicos:

Un estudio geológico sobre la evolución de la piedra y de la arena en periodos de 100 años muestra lo siguiente: El 70% de lo que era piedra después de 100 años seguirá siendo piedra y sólo el 10% de lo que era arena se convertirá en piedra.

(a) Completad la matriz ***A*** con la información que proporciona el estudio descrito:

	Piedra	**Arena**
Piedra		
Arena		

(b) Suponiendo que los porcentajes de evolución se mantienen constantes en cada periodo de 100 años, determinad la evolución en 100, 200 y 300 años, considerando los siguientes casos:
   1. Al principio hay 30 toneladas de piedra y 50 de arena.
   2. Al principio hay 20 toneladas de piedra y 60 de arena.
   3. Al principio hay 50 toneladas de piedra y 50 de arena.
   4. Al principio hay 70 toneladas de piedra y 30 de arena.

(c) Calculad los puntos fijos de la matriz de transición considerada. ¿Aparecía alguno de estos puntos fijos en los apartados anteriores?

(d) Calculad los valores y vectores propios asociados a la matriz ***A***.

(e) Determinad la matriz ***D*** asociada a ***A*** en esta nueva base.

(f) Determinad la evolución después de 2000 años de una cantidad inicial cualquiera (a,b) de piedra y arena.

(g) ¿Podemos afirmar que siempre habrá a largo plazo más de un 70% de materia que se habrá convertido en piedra? ¿Por qué?

2. Aplicación a asuntos políticos:

Sistemas electorales: Un país con un sistema electoral democrático tiene dos grandes partidos con representación parlamentaria: A y B. Un estudio muestra que la probabilidad de cambio del voto entre los electores de cada partido entre unas elecciones y las siguientes. El resultado es el siguiente:

	A	**B**
A	0,96	0,16
B	0,04	0,84

(a) Si consideramos 100 votantes del país y suponemos que se reparten el 50% entre los dos partidos, calculad la evolución del voto en las 10 elecciones siguientes suponiendo que la probabilidad de cambio de voto se mantiene constante.
(b) Repetid el apartado anterior en los dos casos siguientes: suponiendo que el partido A tiene un 25% de votantes y el **B** tiene el 75% restante. Y suponiendo después que el partido **A** tiene un 90% de los votantes y el **B** un 10%, ¿cómo varían los resultados?
(c) Calculad los puntos fijos de la matriz de transición considerada, ¿aparecía alguno de estos puntos fijos en los apartados anteriores? ¿Por qué?
(d) Calculad los valores y vectores propios asociados a la matriz ***A***.
(e) Determinad la matriz ***D*** asociada a ***A*** en esta nueva base.
(f) ¿Cómo podemos predecir la repartición de los votos en las *n*-ésimas elecciones si los votantes se reparten inicialmente al 50% entre los dos partidos.
(g) Explicad por qué la evolución a lo largo plazo no depende de la distribución inicial de los votantes.

3. Aplicación a asuntos empresariales:

Cuotas de mercado: Dos marcas de tabaco A y B controlan el mercado, repartiéndose el 60% y el 40% respectivamente. Este año se prevé en el mercado un movimiento de 13 millones de €. Supongamos que los consumidores de la marca A se mantienen fieles a la marca en un 30% y se cambian de marca el 70%, mientras que un 40% de los consumidores de B se mantienen fieles y la resta pasa a A. ¿Cómo se repartirán el mercado en 5 años si suponemos que las condiciones actuales y el volumen de ventas se mantiene? ¿Y en 20 años?

Bolsa de valores: El valor de una acción fluctúa cada día. Cuando la bolsa se encuentra estable, el incremento de un valor en un día acostumbra a provocar un descenso del mismo valor al día siguiente, y al revés. Supongamos que la matriz de transición para una determinada acción es la siguiente:

HOY↓ AYER→	**Aumento**	**Descenso**
Aumento	0,15	0,90
Descenso	0,85	0,10

Pla de movilidad laboral: Una compañía multinacional tiene 3 oficinas principales: una en Atlanta (A), otra en Barcelona (B) y una tercera en Canberra (C). Para que el equipo de trabajadores de la compañía se mantenga al día y con un buen nivel de eficiencia, se ha diseñado un plan de movilidad laboral que los obliga cada año a cambiar de oficia. Los trabajadores que no se acojan a este plan tienen que abandonar la empresa. En una reunión de dirección, el jefe de Recursos Humanos presentó los datos siguientes:
– En el año 2000, de los 1000 trabajadores de la compañía, 400 estaban en Atlanta, 300 en Barcelona y 300 en Canberra.
– La planificación para el 2001 fue: el 40% de los trabajadores de Atlanta se destinaron a Barcelona, el 10% a Canberra y el 10% se fueron de la empresa. De los trabajadores de Barcelona, el 10% se fueron a Canberra y 20% se fueron. Y de los trabajadores de Canberra, el 50% se fueron a Atlanta, el 10% a Barcelona y el 10% se fueron.

Distribución de las rentas: En una determinada comunidad autónoma española el 20% de las rentas familiares son inferiores a 6000€, el 70% están comprendidas entre 6000€ y 12000€, y solo el 10% superan esta cifra. Estos tres grupos de renta los llamamos renta *baja*, *media* y *alta* respectivamente. Hay muchos estudios que informan que de un año a otro, un 70% de las familias con renta baja se mantiene con este tipo de renta, mientras que un 20% pasan a renta media y el 10% restante a renta alta. De las familias con renta media, se mantienen con esta renta un 60%, pasan a renta baja un 30% y a alta un 10%. Por último, el 60% de les rentas altas lo siguen siendo, un 30% pasa a media y un 10% a baja.
Las autoridades de la citada comunidad autónoma están muy preocupadas por la distribución futura de la renta y están pensando en aplicar medidas correctoras ya que se cree que la situación puede empeorar en un futuro. Existe una distribución de rentas estable? Qué % de familias están en cada grupo de renta?

4. Aplicación a fenómenos genéticos y de epidemiología:

Cultivo de plantas y descendencia genotípica: Un agricultor tiene una plantación de flores de color rojo, rosa y blanco que viene determinada por los genotipos *AA*, *Aa y aa* respectivamente. El agricultor decide fertilizar todas las flores con una de color rosa ya que le interesa conseguir que un 75% de su producción sea de flores rosas que son las mejor pagadas. Lo conseguirá? O si no, qué cambios en la plantación tendría que hacer?
– Inicialmente hay 100 flores rojas, 200 rosas y 300 blancas,

– Con una flor roja (*AA*) cuando se aparea con una rosa (*Aa*) tiene una probabilidad del 50% que la generación siguiente sea *AA* o *Aa*. Con una flor rosa (*Aa*) cuando se aparea con una rosa (*Aa*) tiene una probabilidad del 50% que la generación siguiente sea *Aa* y una probabilidad de un 25% de que sea tanto *AA* o bien *aa*. Y con una flor blanca (*aa*) cuando se aparea con una rosa (*Aa*) tiene una probabilidad del 50% que la generación siguiente sea *Aa* o *aa*.

Herencia genética de enfermedades: Entre las personas, muchas de las enfermedades genéticas son regidas por la herencia auto-somática. En su transmisión siempre interviene un gen normal (*A*) y un gen denominado anormal (*a*). El genotipo *AA* es el de un individuo no portador de la enfermedad mientras que un *Aa* es el de un portador aunque no la sufre y el *aa* es el de uno que la sufre seguro. Se ha hecho un estudio para identificar a los portadores de una de las enfermedades y estudiar su evolución.
– El experimento se empieza con 1000 no portadores, 200 portadores y 10 enfermos.
– Primero se experimenta de manera que todos los individuos se reproducen con individuos sanos (*AA*).
– Un segundo experimento hace que se reproduzcan con portadores *Aa*.
¿Se conseguirá con los dos experimentos reducir a un 0.5% la proporción de los individuos que sufren la enfermedad? ¿En cuántas generaciones se conseguirá?

¿Se puede controlar una epidemia? Durante el año 2003 se recogieron datos referentes a la evolución de un brote detectado de legionela. Se hizo un estudio en el mismo barrio donde había habido el brote y se distinguieron tres grupos de personas: sanos, portadores (que todavía no habían desarrollado la enfermedad) y enfermos. El experimento se empezó con 200 personas residentes en el mismo barrio, en el inicio de las pruebas había 170 sanos, 27 portadores y 3 enfermos. ¿Se consiguió eliminar el brote de legionela? ¿En cuántos días? Se estimaba que de un día a otro la evolución se mantenía constante de la siguiente manera:
– Un 9% de los sanos se convertían en portadores y un 1% desarrollaba directamente la enfermedad,
– Un 18% de los portadores desarrollaba la enfermedad cada día,
– De los enfermos, un 13% se recuperaba y pasaba a ser sano.

***Las matrices de Leslie*: aplicación a la dinámica de poblaciones**
Un estudio de una piscifactoría en el cual distinguimos entre *alevines y adultos* nos proporciona los siguientes datos sobre la evolución de la población con el paso de los años: el 10% de los alevines mueren y el resto se convierten en adultos, la reproducción da lugar a 10 alevines por cada adulto y el 80% de los adultos se sacan fuera de la piscifactoría.
(a) Si x_n y y_n denotan respectivamente la población de alevines y adultos en el año n, ¿cuál es la matriz resultante?
(b) Utilizad esta matriz para determinar la evolución después de 50 años de una cantidad inicial cualquiera (a, b) de alevines y adultos.

Un estudio de una población de insectos en la cual distinguimos tres grupos: *larvas*, *jóvenes* y *adultos* nos ha proporcionado los siguientes datos sobre la evolución de esta población con el paso de los meses: el 15% de larvas mueren y el resto se convierten en jóvenes, la reproducción da lugar a 3 larvas por cada joven, el 60% de los adultos de la población muere al cabo de un mes, la reproducción da lugar a 20 larvas por cada adulto.
(a) Utilizad la matriz de Leslie que describe el estudio realizado para describir la dinámica de la población a largo plazo (podéis considerar, por ejemplo, después de 20, 30 y 40 meses).

Curso 2007/2008 - segundo trimestre

Un instituto de estudios macroeconómicos nos hace la consulta siguiente:
En el Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es) hemos encontrado las series temporales de datos que adjuntamos. Necesitamos, para cada serie, tener una previsión para los próximos 5 años y poder justificar que la previsión sea razonable. ¿Qué tasa anual de crecimiento/decrecimiento podemos prever para los próximos 5 años? Necesitamos también, para cada magnitud, tener los datos de otro caso que presente una tendencia diferente.

DATOS:

CASO1. Producción de petróleo crudo. Medias mensuales. Miles de toneladas métricas						
Tiempo	**Arabia Saudita**	**Noruega**	**Nueva Zelanda**	**Reino Unido**	**Rusia**	**Venezuela**
1998	32932	12394	119	10352	25267	12882
1999	30644	12398	114	10689	25396	11433
2000	33693	13219	102	9870	26917	12059
2001	32816	13591	97	9820	28983	11777
2002	30881	12151	92	9662	31598	10598
2003	36871	11638	88	8841	35084	10930
2004	36904	11575	76	7287	38226	13108
2005	39069	10877	69	6996	39100	14409

CASO2. Muertes en carretera *				
Tiempo	**Alemania**	**España**	**Francia**	**Portugal**
1996	8758	5483	8541	2394
1997	8549	5604	8444	2210
1998	7792	5957	8918	2126
1999	7772	5738	8487	1995
2000	7503	5776	8079	1860
2001	6977	5517	8160	1671
2002	6842	5347	7655	1675
2003	6613	5399	6058	1546
2004	5842	4741	5530	1294

CASO 3. Tasa de paro *			
Tiempo	**España**	**Francia**	**Tailandia**
1998	18,6	11,5	3,4
1999	15,6	10,8	3
2000	13,9	9,5	2,4
2001	10,6	8,7	2,6
2002	11,5	9	1,8
2003	11,5	9,7	1,5
2004	11	10	1,5
2005	9		1,4

CASO 4. Valor total de las importaciones (CIF), exportaciones (FOB) y saldo. Millones de dólares de EE.UU.								
Tiempo	**China**			**España**			**Estonia**	
	Importación	**Exportación**	**Saldo**	**Importación**	**Exportación**	**Saldo**	**Importación**	**Exportación**
1999	165699	194931	29232	144438	109966	-34472	4094	2937
2000	225094	249203	24109	152901	113348	-39553	4242	3132
2001	243553	266098	22545	153634	115175	-38459	4280	3298
2002	295170	325596	30426	163575	123563	-40012	4810	3448
2003	412760	438228	25468	208553	156024	-52529	6480	4539
2004	561229	593326	32097	257672	182156	-75516	8336	5936
2005	659953	761953	102000	287610	191021	-96589	10111	7688

CASO 5. Ordenadores personales por 100 habitantes						
Tiempo	**Australia**	**España**	**Estados Unidos**	**Francia**	**India**	**Jamaica**
1998	36,84	10,92	45,16	23,22	0,27	3,94
1999	42,25	11,94	50,73	26,75	0,33	4,3
2000	46,98	14,46	57,21	30,43	0,45	4,65
2001	51,51	21,89	62,44	32,86	0,58	4,98
2002	56,51	19,4	62,44	34,71	0,72	5,37
2003	60,36	21,89	62,44	41,74	0,89	5,79
2004	68,9	25,36	76,22	49,64	1,21	6,2
2005	68,9	28,11	76,22	57,86	1,54	6,2

CASO 6. Usuarios de Internet por 100 habitantes						
Tiempo	**Australia**	**España**	**Estados Unidos**	**Francia**	**India**	**Jamaica**
1998	22,42	4,4	30,81	6,34	0,14	1,97
1999	29,57	7,04	36,7	9,16	0,28	2,35
2000	34,45	13,67	44,06	14,37	0,54	3,1
2001	39,66	17,97	50,1	26,38	0,68	3,83
2002	53,46	19,11	50,1	31,38	1,59	22,86
2003	56,84	22,93	55,58	36,56	1,75	30,28
2004	65,28	33,18	63	39,27	3,24	39,87
2005	70,4	35,41	63	43,23	5,44	39,87

CASO 7. Enfermedades de declaración obligatoria. Casos notificados por enfermedades *			
Tiempo	**Hepatitis A**	**Paludismo**	**Sífilis**
1998	2040	362	771
1999	1453	392	677
2000	988	443	709
2001	899	466	700
2002	622	474	736
2003	760	456	917
2004	845	383	1156
2005	1136	328	1339

* Los grupos que trabajen con las tablas 2, 4 y 7 deberán ampliar el número de series hasta llegar a un total de seis (ampliando el número de países o el número de enfermedades en cada caso). Para hacerlo deberán buscar nuevos valores en la página *www.ine.es*.

Curso 2008/09 - primer trimestre

El **Bicing** es un servicio de alquiler de bicicletas públicas en la ciudad de Barcelona que se implantó en marzo de 2007, promovido por el ayuntamiento y gestionado por la empresa Clear Channel.

El ayuntamiento de la ciudad de Girona ha decidido implantar este servicio en su ciudad. Para ello se han instalado 3 estaciones: una en la estación de trenes (A), otra al lado de la catedral (B) y la última al lado de la universidad (C). Gracias a una prueba piloto, se ha podido observar que los porcentajes de bicicletas que se desplazan de una estación a otra se mantienen bastante fijos cada mes. En una reunión con la empresa encargada del Bicing se presentaron los datos siguientes:

(a) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.
A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:
– El 40% de las bicicletas de la estación se desplazaron a la catedral, el 10% a la universidad y el resto (50%) se quedaron en la estación.
– De las bicicletas de la catedral, el 0% (ninguna) se desplazó a la estación, el 10% a la universidad y el resto (90%) se quedaron en la catedral.
– De las bicicletas de la universidad, el 50% se desplazaron a la estación, el 10% se quedaron en la universidad y el resto (40%) se desplazaron a la catedral.

(b) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.
A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:
– El 70% de las bicicletas de la estación se quedaron en la estación, el 20% se desplazaron a la catedral y el resto a la universidad.
– De las bicicletas de la catedral, el 30% se desplazaron a la estación, el 10% a universidad y el resto se quedaron en la catedral.
– De las bicicletas de la universidad, el 10% se desplazaron a la estación, el 30% a la catedral y el resto se quedaron en la universidad.

(c) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.
A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:
– El 10% de las bicicletas de la estación se desplazaron universidad y el resto se quedaron en la estación.
– De las bicicletas de la catedral, el 18% se desplazaron a la universidad y el resto se quedaron en la catedral.
– De las bicicletas de la universidad, el 13% se desplazaron a la estación y el resto se quedaron en la universidad.

(d) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.
A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:
– El 50% de las bicicletas de la estación se quedaron en la estación, el 20% se desplazaron a la universidad y el resto a la catedral.
– De las bicicletas de la catedral, el 80% se quedaron en la catedral y el 20% se desplazaron a la estación.
– De las bicicletas de la universidad, el 20% se desplazaron a la estación, el 40% a la catedral y el resto se quedaron en la universidad.

(e) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.
A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:
– El 10% de las bicicletas de la estación se desplazaron a la catedral, el 10% a la universidad y el resto se quedaron en la estación.
– De las bicicletas de la catedral, el 10% se desplazaron a la estación, el 10% a la universidad y el resto se quedaron en la catedral.
– De las bicicletas de la universidad, el 100% se quedaron en la universidad.

(f) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.
A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:
– El 5% de las bicicletas de la estación se desplazaron a la catedral, el 10% a la universidad y el resto se quedaron en la estación.
– De las bicicletas de la catedral, el 10% se desplazaron a la estación, el 35% a universidad y el 55% restante se quedaron en la catedral.

– De las bicicletas de la universidad, el 10% se desplazaron a la estación, el 85% se quedaron en la universidad y el resto se desplazaron a la catedral.

(g) A finales del mes de agosto, se repartieron las 1000 bicicletas de la compañía de la manera siguiente: 500 en la estación, 300 en la catedral y 200 en la universidad.

A finales del mes de septiembre, el estudio piloto mostraba que:

– El 20% de las bicicletas de la estación se desplazaron a la catedral, el 20% a la universidad y el 60% restante se quedaron en la estación.
– De las bicicletas de la catedral, el 10% se desplazaron a la estación, el 20% a universidad y el 70% restante se quedaron en la catedral.
– De las bicicletas de la universidad, el 10% se desplazaron a la estación, el 60% se quedaron en la universidad y el resto se desplazaron a la catedral.

El ayuntamiento de Girona os encarga un informe que responda de forma rigurosa a las siguientes cuestiones:

- **¿Cuál será la distribución de las bicicletas a largo plazo si mantenemos la distribución inicial de bicicletas?**
- **¿Qué pasa si modificamos la distribución inicial? ¿Es posible que alguna de las estaciones se quede sin bicicletas?**

Curso 2009/10 - primer trimestre

Germans Subirats S.L

Germans Subirats S.L es una empresa catalana familiar especializada en la fabricación de un modelo de guitarras españolas. Esta pequeña empresa está formada por una plantilla de 12 empleados que trabajan en la cadena de producción de la fábrica donde se producen. Los trabajadores de esta fábrica no pueden trabajar más de doce horas diarias por convenio laboral.

Esta empresa ha decidido contrataros para que realicéis un estudio exhaustivo que les permita tener un control de su producción, para ello os facilita los datos que se recogen en el archivo *Datos_trimestre1.xls*. Estos datos reflejan, después de distintas pruebas realizadas en esta empresa, la producción de guitarras diarias (P) en relación al número total de horas diarias trabajadas por el conjunto de sus empleados (T).
Con esta información, la empresa *Germans Subirats S.L.* pretende que podáis alcanzar los objetivos siguientes:

- Modelizar matemáticamente la producción diaria de guitarras en relación al número total de horas trabajadas (T).
- Encontrar el número de horas que se deberían trabajar para optimizar la producción diaria de esta empresa.
- ¿De qué otros factores podría depender la producción de este modelo de guitarras? Introducirlos en el modelo planteado inicialmente.
- ¿Cómo se podría optimizar la producción en esta nueva situación?

Curso 2009/10 – segundo trimestre

Biocarwash es una empresa que nació en 2005 con el propósito de revolucionar el campo del lavado de automóviles. En 2008 se unió al Grupo Fundosa y salió al mercado bajo el sistema de franquicia.

El **Grupo Fundosa** es un grupo creado en 1989 por la **Fundación ONCE** para aumentar las posibilidades de empleo de las personas con discapacidad.

El servicio que ofrece **Biocarwash** se presta fundamentalmente a empresas en las zonas de estacionamiento de éstas o en concesionarios de automóviles, donde se presta el servicio de mantenimiento de la flota.
Lo más importante de esta fórmula de lavado para la limpieza de vehículos es que se trata de un sistema totalmente ecológico, los productos utilizados son biodegradables y se utilizan entre 4 y 6 litros de agua por vehículo, en comparación con los 250 litros de un túnel de lavado convencional.

Biocarwash es una unidad autónoma, que puede ser utilizada por personas con discapacidad, ya que tiene un motor eléctrico y una manguera que le permite ser manejada fácilmente. También posee una potente aspiradora industrial que, junto con la mayor autonomía de la máquina permite el lavado de 8 a 10 vehículos por día de trabajo.

Con toda esta información, la empresa **Biocarwash** os propone un estudio en que debéis analizar las características del servicio que ofrecen.
La función de demanda de esta empresa expresa la relación existente entre la cantidad demandada de este servicio y cualquier otra variable de la que pueda depender. Se propone responder a las siguientes cuestiones:

1) ¿De qué variables podría depender la demanda de este producto? Justificar vuestra respuesta.
2) Explicar qué es la elasticidad de la función de demanda. Explicar detalladamente.
3) Determinar la fórmula que os permite calcular la elasticidad de la demanda respecto de cada una de sus variables.
4) Estudiar los distintos tipos de elasticidades, interpretando los resultados.
5) Plantear cuestiones que surjan durante el estudio.

5. Recorridos de estudio e investigación durante el curso 2010/11

El objetivo de los talleres que se plantean a los estudiantes durante este curso académico es el de un problema muy próximo a las situaciones reales de evolución de poblaciones en el que primero las sucesiones recurrentes, luego las ecuaciones diferenciales y finalmente las matrices aparecen como posibles modelos de trabajo. A diferencia de los talleres de cursos anteriores, en los que el trabajo desarrollado en cada trimestre era independiente, durante este curso académico habrá un hilo conductor entre los tres trimestres, de manera que los alumnos están familiarizados con la situación y la pueden abordar con más confianza.

El diseño de estos REI está inspirado en los recorridos de estudio e investigación sobre dinámica de poblaciones que Berta Barquero (2009) detalla en su tesis doctoral. En ese caso, los talleres estaban dirigidos a alumnos de primer curso de ciencias experimentales, cuyos conocimientos previos y sus necesidades matemáticas durante el curso son diferentes a las del alumnado para el que se ha diseñado el REI que presentaremos a continuación. Podríamos decir que se trata de una reducción del estudio realizado por B. Barquero.

5.1. Primer trimestre: un recorrido de estudio e investigación sobre evolución discreta

El taller que se presenta en el primer trimestre se inició la cuarta semana del curso, con lo cual la mayoría de los grupos habían tenido unas siete sesiones de *clases magistrales* que se dedicaron a introducir los conceptos de familia de funciones, función lineal, cuadrática, hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas. También se realizó una sesión introductoria sobre Excel y Wiris.

5.1.1. Análisis a priori de la praxeología matemática

Dada una población P, definimos p_t como el número de individuos de dicha población en el instante de tiempo t. La cuestión generatriz que va a activar nuestro estudio de la dinámica de la población P es la siguiente:

Q_0: Suponiendo que conocemos el número de individuos de una población P en ciertos periodos de tiempo, ¿podemos predecir cómo evolucionará el número de individuos de la misma después de n periodos?, ¿será siempre posible predecir la evolución del tamaño de P a largo plazo?, ¿qué tipo de hipótesis sobre el entorno, población y crecimiento se tienen que asumir?, ¿cómo podemos hacer predicciones sobre la evolución del número de individuos de P y cómo pueden ser validadas?

Iniciaremos la construcción del modelo para el estudio de la dinámica de poblaciones haciendo dos suposiciones iniciales. La primera es que los valores que puede tomar el tiempo son discretos, y la segunda que, el número de individuos en un instante concreto depende del estado inmediatamente anterior (población con *generaciones separadas*). Esto nos conduce a considerar sucesiones recurrentes de orden 1: $p_{t+1} = f(p_t)$, donde f es una función de variable real.

La evolución general de la población P quedará caracterizada por el estudio de la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada p_i denota el número de individuos en el instante i.
La hipótesis de *generaciones separadas* nos conduce a considera dos posibles magnitudes para describir el crecimiento de P:

- *Tasa absoluta de variación* entre dos generaciones consecutivas: $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$
- *Tasa relativa de variación* entre dos generaciones consecutivas: $r_n = \frac{\Delta p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}-p_n}{p_n}$

De esta última se deriva el *índice relativo de variación*: $i_n = \frac{p_{n+1}}{p_n}$ que a su vez, satisface: $i_n - 1 = \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = r_n$.

Para iniciar nuestro estudio consideraremos que todos los individuos de la población son iguales y que los *recursos disponibles son ilimitados*. Esto nos lleva a formular una hipótesis sobre el crecimiento de la población *P*: la tasa relativa de variación de *P* se mantiene constante: $r_n \equiv r, r \epsilon \mathbb{R}$. Y esta hipótesis nos lleva a considerar la siguiente cuestión:

Q_1: Si $r_n \equiv r, r\epsilon\mathbb{R}$, ¿cómo evolucionará dicha población?, ¿Qué propiedades tendrá la evolución de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a corto y largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva esta evolución?

Para dar respuesta a Q_1, consideraremos: $r_n = \frac{\Delta p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = r \Rightarrow r = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n}$

Así aparece nuestro primer modelo, conocido como «modelo maltusiano» en honor al economista y demógrafo inglés, Thomas Malthus, quien en 1798 puso de manifiesto la contradicción existente entre el crecimiento exponencial de la población humana y el crecimiento lineal de los recursos existentes.

A partir de este último resultado obtenemos la siguiente ecuación recurrente:

$$r = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} \Leftrightarrow r.p_n = p_{n+1} - p_n \Leftrightarrow p_{n+1} = p_n + r.p_n = (1+r)p_n = \alpha.p_n$$

Donde el parámetro α se interpreta como el coeficiente de crecimiento de la población *P*. Como esta relación es válida en cualquier instante, tenemos que: $p_{n+1} = \alpha.p_n = \alpha.(\alpha.p_{n-1}) = \ldots\ldots = \alpha^n.p_0$. Esto nos permite calcular el número de individuos que habrá en cualquier instante, conociendo el número inicial de individuos de la población *P* —que tiene un *crecimiento geométrico*—, y nos permite dar una primera respuesta a Q_1, donde debemos diferenciar tres casos según el valor del parámetro α ($\alpha \in \mathbb{R}$):

- Si $0 < \alpha < 1$, el número de individuos de la población *P* tiende a la extinción. Este caso es equivalente a $r < 0$.
- Si $\alpha = 1$, el número de individuos de la población *P* se mantiene constante e igual a la población inicial p_0. Este caso es equivalente a $r = 0$.
- Si $\alpha > 1$, el número de individuos de la población *P* crece indefinidamente. Este caso es equivalente a $r > 0$.

Para este último caso, el modelo maltusiano tiene una clara limitación, y es el hecho que el aumento geométrico del número de individuos de la población choca con la existencia de recursos limitados. Esta limitación, conocida como *paradoja maltusiana*, nos conduce a considerar otras cuestiones, introduciendo nuevas hipótesis. Por un lado, la tasa relativa de variación, r_n, no será constante si no que variará en función del número de individuos de la población p_n. Y por otro, p_n no podrá sobrepasar cierto valor máximo K.

Con estas dos nuevas hipótesis, r_n pasará a considerarse decreciente a medida que P se aproxima a K. El caso más sencillo a estudiar es suponer que este r_n decrece linealmente en función de p_n. Surge así una nueva cuestión:

Q_2: ¿Cuál es la evolución de una población cuya tasa relativa de variación decrece linealmente en función de P_n?, ¿Qué propiedades tiene la evolución de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a corto y largo plazo?, ¿Qué factores determinan de forma más decisiva esta evolución?

Si retomamos la relación que habíamos establecido para r_n inicial e imponemos que decrezca linealmente, tendremos: $r_n = \frac{p_{n+1}-p_n}{p_n} = -Ap_n + B,$ con $A > 0\ y\ B > 0$

Además, tenemos que imponer que p_n no puede sobrepasar el límite establecido, K. Y eso se traduce en que, a medida que p_n se acerque a K, r_n se aproximará a cero, es decir:

$$\begin{cases} r_n = -A\cdot p_n + B \\ Si\ p_n \approx K \Rightarrow r_n \approx 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -A\cdot K + B \Rightarrow A = \frac{B}{K} \text{ ó } B = AK$$

Si ahora sustituimos esta relación en la expresión de la población en el instante $n+1$ encontrada con anterioridad $p_{n+1} = p_n + r.p_n$, obtenemos:

$$p_{n+1} = p_n + \left(-\frac{B}{K}\cdot p_n + B\right)\cdot P_n = p_n(1+B) - \frac{B}{K}\cdot {p_n}^2 \text{ (en términos de } B\text{)}$$

O su equivalente en términos de A: $p_{n+1} = p_n(1 + A\cdot K) - A\cdot p_n^2$

Si a partir de la expresión en términos de B consideramos el índice relativo de variación, obtenemos: $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{p_n(1+B)-\frac{B}{K}{p_n}^2}{p_n} = (1+B) - \frac{B}{K}p_n$

Si ahora consideramos el cambio de variable: $Y_n = \frac{B}{B+1}\cdot\frac{p_n}{K}$, y aislamos p_n obtenemos: $p_n = \frac{K\cdot Y_n\cdot(B+1)}{B}$

Y hacemos lo mismo para p_{n+1}: $Y_{n+1} = \frac{B}{B+1}\cdot\frac{p_{n+1}}{K} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{K\cdot Y_{n+1}\cdot(B+1)}{B}$

Sabemos que $p_{n+1} = p_n + r_n\cdot p_n$, por lo tanto: $\frac{K\cdot Y_{n+1}\cdot(B+1)}{B} = \frac{K\cdot Y_n\cdot(B+1)}{B}(1+r_n)$

Es decir: $Y_{n+1} = Y_n\ (1 + r_n)$. Y si substituimos r_n por su expresión lineal:

$$Y_{n+1} = Y_n\ (1 + [-Ap_n + B]).$$

Y a su vez, P_n por la expresión del cambio de variable y operamos:

$$Y_{n+1} = Y_n \left(1 + [-A\frac{KY_n(B+1)}{B} + B]\right) \Rightarrow\ Y_{n+1} = Y_n\ (1 - Y_n(B+1) + B)$$

Considerando $\beta = B + 1$, obtenemos una ecuación recurrente normalizada:

$$Y_{n+1} = Y_n\ \beta(1 - Y_n)$$

Este modelo llamado *logístico*, incluye al modelo anterior, correspondería al caso particular donde los recursos disponibles son ilimitados.

Una propiedad que se cumple para este segundo modelo es que la variación absoluta de la tasa r_n —respecto de la variación del número de individuos de p_n— es una invariante:

$$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n = (-Ap_{n+1} + B) - (-Ap_n + B) = -A(p_{n+1} - p_n) = -\frac{B}{K}\Delta p_n$$

Y por tanto, el cociente incremental $\frac{\Delta r_n}{\Delta p_n}$ es constante: $\frac{\Delta r_n}{\Delta p_n} = -\frac{B}{K}$. Este resultado nos permite calcular el valor del parámetro B una vez se ha fijado un valor de K.

5.1.2. Análisis de la praxeología didáctica

A continuación presentaremos el diseño a priori del recorrido didáctico propuesto. La situación inicial que se presenta a los alumnos y que permitirá activar a lo largo del curso diferentes modelos matemáticos, gira alrededor de un tema lo suficientemente cercano y atractivo para los estudiantes: las redes sociales. El enunciado que se entrega a los estudiantes es el siguiente:

www.LunaticWorld.com

¿Qué es una red social? Es una estructura social formada por nodos, los usuarios de la red, y aristas, las relaciones existentes entre ellos. Estas relaciones pueden ser de diversos tipos: económicas, profesionales, de amistad, etc. Probablemente en la actualidad las redes sociales son el principal atractivo de Internet, mostrando el gran cambio que se está produciendo en la forma de comunicarse e interactuar.

Nos centraremos en estudiar el crecimiento del número de usuarios de la red social de Internet LunaticWorld, que fue creada en 2004 con 18 usuarios. Una de las características principales de esta red social es que un individuo tan solo puede formar parte de ella a través de la invitación de un usuario ya existente.

En la tabla adjunta encontraréis información acerca de la evolución del tamaño de la población de usuarios de esta red durante los últimos años. Con esta información, y a lo largo del primer trimestre, se propone abordar las siguientes cuestiones principales:

Año	Tamaño población
2004	18
2005	56
2006	151
2007	447
2008	1034
2009	3143

¿Podemos predecir cómo evolucionará el tamaño de esta población después de un número determinado de períodos?
¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de esta población a largo plazo?
¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se tienen que asumir?
¿Cómo podemos hacer predicciones sobre la evolución de su tamaño y cómo éstas pueden ser validadas?

En este taller, todos los grupos de alumnos trabajaban con los mismos datos (los de la tabla). Estos datos fueron «preparados» por los profesores para que sugirieran un crecimiento exponencial.

La primera sesión de seminario fue destinada a elaborar los grupos de trabajo, definir detalladamente la metodología de trabajo a seguir y, finalmente, presentar las cuestiones que generaran el estudio:

Q1. ¿Podemos predecir cómo evolucionará el tamaño de esta población después de un número determinado de períodos?

Q2. ¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de esta población a largo plazo?

Q3. ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se pueden asumir?

Q4. ¿Cómo podemos hacer predicciones sobre la evolución de su tamaño y cómo éstas pueden ser validadas?

En cada sesión se plantean una serie de cuestiones intermedias cuyas respuestas parciales deberían permitir dar respuesta a las cuestiones iniciales. Al igual que hemos hecho con los talleres anteriores, presentamos mediante unas tablas las praxeologías didácticas a priori que corresponden a cada una de las sesiones en las que se divide el taller. Y a continuación se mostrará un diario de sesiones a modo de crónica unificada entre las diferentes experimentaciones realizadas.

Primera sesión
- P entrega la hoja con los datos y plantea las siguientes cuestiones *intermedias* dejando total libertad a G para explorar las cuestiones: *Qi_1. ¿Cómo podemos designar las variables que representan el tiempo y el tamaño de la población?* *Qi_2. ¿Cómo podemos describir el crecimiento de esta población?* *Qi_3. Utilizando los datos disponibles, ¿podríamos decir cuál será el número de usuarios de esta red social después de 1, 2, 3, 4 y 5 años?* - Es de esperar que las designaciones utilizadas más frecuentemente sean n, t o i para el tiempo en años y b_n, p_t o Y_i para la población respectiva. Al final de la sesión P unificará la notación para que en todas las

experimentaciones se utilice la misma. (Qi_1)

- Para describir el crecimiento de la población, lo normal es que cada G introduzca los datos aportados en una hoja de cálculo y los representen, permitiéndoles observar la tendencia exponencial creciente de estos. (Qi_2). También introducen y calculan las tasas absoluta y relativa y, el índice de variación, que están estudiando en las clases teóricas. Si no aparece de forma natural, será P quien lo proponga.
- Al representar los gráficos de la tasa relativa de variación y del índice de variación se observa que los datos oscilan alrededor de un valor. Se calcula el promedio de dichos valores: 182,41% y 2,82 respectivamente, permitiendo dar la previsión de los próximos cinco años.
- P corrige en la pizarra proponiendo una plantilla común a G. (Qi_3)
- P propone la expresión que parece ajustar los datos iniciales:
  $p_{n+1} = p_n + 1{,}82 \cdot p_n = 2{,}82 \cdot\ p_n\ \ (n \geq 0)$, es decir, la expresión que postula es una sucesión recurrente.
- P establece dos hipótesis: (H_1) el número de invitaciones será de unas 1,82 por año y (H_2) este número permanece constante.
- Preguntas para trabajar en la siguiente sesión:
  - *Qi_4. Estudiar el modelo discreto propuesto.*
  - *Qi_5. ¿Cómo afectará al modelo un número de usuarios inicial distinto?*
  - *Qi_6. ¿Qué pasaría si existiera un número máximo de usuarios? ¿Cambiaría el modelo planteado?*
  - *Qi_7. ¿Cuándo se alcanzaría la población máxima?*

Observaciones:

- Nosotros utilizaremos aquí sólo una notación para simplificar la exposición: n para designar el número de años y p_n para designar la población al pasar n años.
- A pesar que los datos a corto plazo parecen ajustarse a una exponencial, G ve claramente que a largo plazo este ajuste no es coherente, ya que aumentar los datos infinitamente no sería compatible con el crecimiento de una red social, ya que querría decir que todo el mundo acaba siendo usuario.

Segunda sesión

- Durante la presentación de los resultados del G expositor, P plantea el problema de conocer la población a largo plazo, deduciéndose la expresión general de la sucesión recurrente :

$p_{n+1} = 2{,}82 \cdot p = 2{,}82 \cdot (2{,}82 \cdot p_{n-1}) = \cdots =\ 2{,}82^{n+1} \cdot p_0$.

La sucesión es divergente y por lo tanto, los estudiantes plantean la incoherencia del modelo.

- Para abordar la segunda cuestión, se parte de $p_{n+1} = 2{,}82^{n+1} \cdot p_0$, donde cada año que pasa, la población del anterior está multiplicada por el factor promedio 2,82 y esto es independiente de la población inicial, de hecho: $i_n - 1 = \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = r_n$
- Para responder la tercera de las cuestiones planteadas para esta sesión, es decir, ¿qué pasaría si existiese un número máximo K de usuarios?, se propone a G considerar como hipótesis la existencia de este número máximo K de usuarios en la red (H_3). En este punto, debemos reconsiderar el hecho que r_n sea constante ya que si lo fuera, su comportamiento a largo plazo seria infinito. Por tanto, asumiremos como nueva hipótesis que r_n no es constante (H_4)**.**
- De hecho, queremos que a medida que la población aumente, el número de invitaciones disminuya, es decir, necesitamos establecer una relación de dependencia inversa entre las dos variables. P introduce la relación lineal como la más sencilla: $r_n = -A{\cdot}p_n + B$, donde A y B son reales mayores o iguales a cero.
- Entonces el objetivo será determinar los parámetros A y B de manera que cuando la población de la red social llegue al máximo: $p_n = K$, el número de invitaciones sea cero: $r_n = 0$ (H_5). Para ello, se deberá buscar diferentes valores a los parámetros y estudiar numérica y gráficamente qué pasa en cada caso.
- G intentan dar respuesta a la cuestión Q_{i7} pero les resulta inaccesible. P explica que se debe ampliar el estudio para poder responderla.
- Las nuevas cuestiones intermedias con las que se acaba la sesión son las siguientes:

Qi_8. Especificar el nuevo modelo discreto planteado en función del máximo, encontrando A y B.
Qi_9. Dar diferentes valores a los parámetros del modelo y estudiar la evolución de la población numérica y gráficamente en los casos considerados.
Qi_{10}. Simplificar, en la medida de lo posible, el modelo propuesto. ¿Se puede dejar el nuevo modelo expresado en términos de p_0?

Tercera sesión

- De H_5 se deduce la relación entre A y B: $A = \frac{B}{K}$ ó $B = AK$
- Sustituyendo esta relación en la expresión encontrada en la sesión anterior, se obtiene: $p_{n+1} = p_n + \left(-\frac{B}{K} \cdot p_n + B\right) \cdot p_n = p_n(1 + B) - \frac{B}{K} \cdot p_n^2$. También se puede dejar en términos de A: $p_{n+1} = p_n(1 + A \cdot K) - A \cdot p_n^2$, obteniéndose una relación cuadrática(Qi_8).
- Para «*dar diferentes valores a los parámetros del modelo y estudiar la evolución de la población numérica y gráficamente en los casos considerados* se debería utilizar una hoja de cálculo y dar valores (positivos) a A y a B.
- Si se supera el máximo K, la sucesión oscilará. A largo plazo estas oscilaciones serán menores y la p_n tenderá a K. Si el máximo no se alcanza en un número entero de años, aparecerán estas oscilaciones.
- En los casos en los que la sucesión oscile alrededor del valor máximo K, se deberá ajustar el valor de A para no superar nunca dicho máximo. (El valor de B queda determinado por la relación $-A \cdot K + B = 0$). Ante la imposibilidad de calcular el valor de A, P propondrá utilizar la herramienta de Excel, *solver*.
- Para responder la última cuestión, es decir, si se podía dejar el modelo en términos de p_0 (población inicial), la respuesta no puede ser afirmativa ya que r_n se va reduciendo cada año.
- Para la siguiente sesión de seminario se plantean las siguientes nuevas cuestiones intermedias:
  Qi_{11}. Estudiar de forma teórica B ó A. ¿entre que valores se mueven?
  Qi_{12}. Analizar el modelo normalizado aplicando un cambio de variable: $Y_n = \frac{B}{B+1} \cdot \frac{Pn}{K}$. *Hacer un estudio de las características con* $\propto = B + 1$.
  Qi_{13}. Establecer otro tipo de relación funcional entre r_n y p_n, y estudiarla.

Cuarta sesión

- Con el modelo propuesto en la sesión anterior, si se llegaba a un máximo de usuarios en un número entero de años, el gráfico no presentaba ningún tipo de oscilación. Pero si se llegaba al máximo en un número de años no entero, el gráfico oscilaba tras superar a K, aunque estas pequeñas oscilaciones se aceptaban siempre y cuando forman parte de un margen aceptable. Todo esto dependía del parámetro B, además de un margen de error más grande para que no se supere el límite, por ejemplo, $K + 100$.
- Surgen dos problemas, uno de ellos es fijar mediante Excel un intervalo de valores de B para que las oscilaciones estén dentro del margen de error. Y el otro es que los resultados del modelo tienen que aproximarse a los resultados reales de los últimos años. Para ello, se tiene que realizar un cálculo para establecer hasta que B máxima se puede alcanzar siempre y cuando cumpla con los requisitos anteriores.
- Si nos fijamos en p_n: $p_{n+1} = p_n + r_n p_n = (1 + r_n)p_n = (1 - Ap_n + B)p_n \approx (1 + B)p_n$, ya que en el momento inicial: $-Ap_n \approx 0$. Entonces, se deduce: $p_{n+1} \approx (1 + B)p_n \Rightarrow B \approx \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 \approx 1{,}82$
- Para contestar la segunda cuestión planteada, se deben hacer una serie de manipulaciones algebraicas para expresar el modelo en forma normalizada, obteniendo: $Y_{n+1} = Y_n\, \beta(1 - Y_n)$
- P propuso aquí trabajar con variables normalizadas (valores entre 0 y 1) para poder comparar distintas

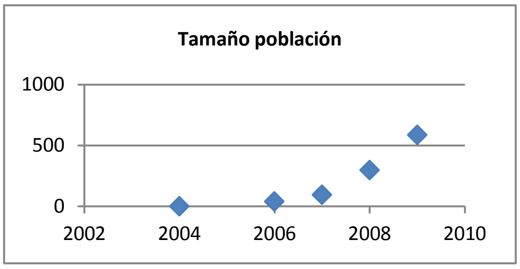
redes sociales con distinto número de usuarios.

- Finalmente, P explicó la estructura que debía tener el informe individual.

Diario de sesiones – taller primer trimestre 2010/11

El profesor entregó la hoja con los datos y las cuestiones iniciales e introdujo las cuestiones *intermedias*: Qi_1, Qi_2 y Qi_3.

Las designaciones de variables más frecuentes fueron: n, t o i para el tiempo en años y b_n, p_t o Y_i para el tamaño de la población respectiva (Qi_1).
Los alumnos introdujeron mayoritariamente los datos en una hoja de cálculo lo que les permitió, mediante su representación gráfica, observar la tendencia creciente de estos (Qi_2)



.

El profesor propuso a los alumnos que calcularan las tasas absoluta y media, y el índice de variación:

Año	Tamaño Población	Tasa absoluta de variación	Tasa relativa de variación	Índice variación
2004	18			
2005	56	38	211,111111	3,11111111
2006	151	95	169,642857	2,69642857
2007	447	296	196,02649	2,9602649
2008	1034	587	131,319911	2,31319911
2009	3143	2109	203,965184	3,03965184
	Promedio =	625	182,413111	2,82413111

Cuando los alumnos representaron los gráficos de la tasa relativa de variación y del índice de variación, observaron que los datos oscilaban alrededor de un valor. El promedio de dichos valores: 182,41% y 2,82 respectivamente.

A partir del quinto año, cada término se consigue a partir del anterior multiplicado por el factor 2,82: $p_{n+1} = p_n + 1{,}82 \cdot p_n = (1 + 1{,}82) \cdot p_n = 2{,}82 \cdot\ p_n\ \ (n \geq 0)$ sucesión recurrente (Qi_3).

El profesor estableció que (1) el número de invitaciones será de unas 1,82 por año y (2) la hipótesis de considerar que este número permanecería constante con el paso de los años.
A pesar que los datos a corto plazo parecen ajustarse a una exponencial, los alumnos vieron claramente que a largo plazo este ajuste no era coherente, ya que aumentar los datos infinitamente no sería compatible con el crecimiento de una red social, ya que querría decir que todo el mundo acaba siendo usuario.
La primera sesión se acabó planteando las cuestiones intermedias para trabajar en la siguiente sesión: Qi_4, Qi_5, Qi_6, Qi_7.

La segunda sesión se inicia con la presentación de los resultados del grupo expositor.

La profesora planteó el problema de conocer la población a largo plazo deduciendo la expresión general de la sucesión recurrente: $p_{n+1} = 2{,}82 \cdot p = 2{,}82 \cdot (2{,}82 \cdot p_{n-1}) = \cdots = 2{,}82^{n+1} \cdot p_0$. La mayoría de los grupos constató que la sucesión era divergente y por lo tanto, planteaban la incoherencia del modelo.

Para abordar la segunda cuestión (Qi_5), se partió de $p_{n+1} = 2{,}82^{n+1} \cdot p_0$, donde cada año que pasa, la población del anterior estaba multiplicada por el factor promedio 2,82 y esto era independiente de la población inicial, de hecho: $i_n - 1 = \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = r_n$

Para responder la tercera de las cuestiones planteadas para esta sesión, se propuso considerar como hipótesis la existencia de este número máximo K de usuarios en la red. Si r_n fuera constante su comportamiento a largo plazo seria infinito, por tanto, se asumió como nueva hipótesis que r_n no era constante**.** Y como se necesitaba establecer una relación de dependencia inversa entre las dos variables, se introdujo la relación más sencilla, la lineal: $r_n = -A \cdot p_n + B$, donde A y B son reales mayores o iguales a cero.

El objetivo era entonces determinar los parámetros A y B de manera que cuando la población de la red social llegara al máximo: $p_n = K$, el número de invitaciones $r_n = 0$. Para ello, se debía buscar diferentes valores a nuestros parámetros y estudiar numérica y gráficamente que pasaba en cada caso.

Los alumnos intentaron dar respuesta a la cuestión Q_{i7} pero les resultó inaccesible. La profesora les explicó que se debía ampliar el estudio para poder responderla.

Las nuevas cuestiones intermedias con las que se acabó la sesión fueron las siguientes:

Qi_8. Especificar el nuevo modelo discreto planteado en función del máximo, encontrando A y B.
Qi_9. Dar diferentes valores a los parámetros del modelo y estudiar la evolución de la población numérica y gráficamente en los casos considerados.
Qi_{10}. Simplificar, en la medida de lo posible, el modelo propuesto. ¿Se puede dejar el nuevo modelo expresado en términos de p_0? Esto es, ¿existe una expresión cerrada del modelo?

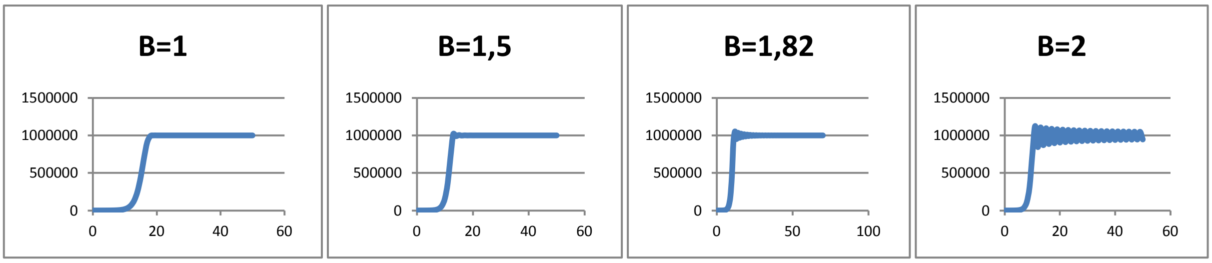
Para abordar la primera de las cuestiones se partió de la premisa que: si $p_n = K$, entonces $r_n = 0$, obteniéndose así una relación entre A y B: $\begin{cases} r_n = -A \cdot p_n + B \\ Si\ p_n = K, r_n = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -A \cdot K + B \Rightarrow A = \frac{B}{K}$ ó $B = AK$

Sustituyendo esta relación en la expresión que se había encontrado en la sesión anterior de la población en el instante *n+1*: $p_{n+1} = p_n + \left(-\frac{B}{K} \cdot p_n + B\right) \cdot p_n = p_n(1 + B) - \frac{B}{K} \cdot {p_n}^2$ (en términos de B) o en términos de A: $p_{n+1} = p_n(1 + A \cdot K) - A \cdot {p_n}^2$. En ambos casos, se trataba de una relación cuadrática (Qi_8).

Para «*dar diferentes valores a los parámetros del modelo y estudiar la evolución de la población numérica y gráficamente en los casos considerados*» se utilizó una hoja de cálculo dando valores a A y a B, mayores que 0.

Si se superaba el máximo K, la sucesión oscilaba. A largo plazo estas oscilaciones eran menores y la p_n tendía a K. Si el máximo no se alcanza en un número entero de años, aparecerán estas oscilaciones.

A modo de ejemplo:



Se fijó el valor máximo de usuarios en un millón y el valor de B –que es el que se indica en cada caso–. El valor de *A* queda fijado como *B*/*K*.

La última cuestión de la sesión pedía si podíamos dejar el modelo en términos de la población inicial. La respuesta no puede ser afirmativa ya que r_n se va reduciendo cada año.

Dado que en algunos casos la sucesión oscilaba alrededor del valor máximo *K*, se tuvo que ajustar el valor de *A* para no superar nunca dicho máximo. Ante la imposibilidad de calcular el valor de *A*, la profesora propuso utilizar la herramienta de Excel, *Solver*.

Para la siguiente sesión de seminario se plantean las siguientes nuevas cuestiones intermedias:

Qi_{11}. Estudiar de forma teórica B ó A. ¿entre qué valores se mueve?
Qi_{12}. Analizar el modelo normalizado aplicando un cambio de variable: $Y_n = \frac{B}{B+1} \cdot \frac{Pn}{K}$,. Hacer un estudio de las características de este modelo con $\propto = B + 1$
Qi_{13}. Establecer otro tipo de relación funcional entre r_n y p_n, y estudiarla.

Con el modelo propuesto en la sesión anterior, si se llegaba a un máximo de usuarios en un número entero de años, el gráfico no presentaba ningún tipo de oscilación. Pero si se llegaba al máximo en un número de años no entero, el gráfico oscilaba tras superar a *K*, aunque estas pequeñas oscilaciones se aceptaban siempre y cuando forman parte de un margen aceptable. Todo esto dependía del parámetro *B*, además de un margen de error más grande para que no se superase el límite, por ejemplo, *K* + 100.

Surgieron dos problemas, uno de ellos fue fijar mediante Excel un intervalo de valores de *B* para que las oscilaciones estuvieran dentro del margen de error. Y el otro, que los resultados del modelo tenían que aproximarse a los resultados reales de los últimos años. Para ello, se tuvo que realizar un cálculo para establecer hasta que *B* máxima se podía alcanzar siempre y cuando cumpliera con los requisitos anteriores.
Si nos fijamos en p_n: $p_{n+1} = p_n + r_n p_n = (1 + r_n)p_n = (1 - Ap_n + B)p_n \approx (1 + B)p_n$, ya que en el momento inicial: $-Ap_n \approx 0$. Entonces, se deduce: $p_{n+1} \approx (1 + B)p_n \Rightarrow B \approx \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 \approx 1{,}82$
Para contestar la segunda cuestión planteada, se debían hacer una serie de manipulaciones algebraicas para expresar el modelo en forma normalizada: $Y_{n+1} = Y_n\, \beta(1 - Y_n)$

La profesora propuso aquí trabajar con variables normalizadas (valores entre 0 y 1) para poder comparar distintas redes sociales con distinto número de usuarios.

5.2. Segundo trimestre: un recorrido de estudio e investigación sobre evolución continua

Retomaremos el estudio realizado en el apartado anterior considerando ahora el *tiempo* como *magnitud continua*, lo que nos conducirá a considerar modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales de primer orden.

5.2.1. Análisis a priori de la praxeología matemática

Dada una población *P*, definimos $p(t)$ como el número de individuos de dicha población en el instante de tiempo t ($t \in \mathbb{R}$). La cuestión generatriz que va a activar nuestro estudio de la dinámica de la población P es la misma que consideramos para magnitudes discretas:

Q_0: Suponiendo conocido el número de individuos de una población P en un instante t_0 determinado, ¿podemos predecir cómo evolucionará el número de individuos de la misma en un instante t cualquiera?, ¿será siempre posible predecir la evolución del tamaño de P a largo plazo?, ¿qué tipo de hipótesis sobre el entorno, población y crecimiento se tienen que asumir?, ¿cómo podemos hacer predicciones sobre la evolución del número de individuos de P y cómo pueden ser válidas?

Para describir la variación del número de individuos de la población en el instante t, utilizaremos la derivada: $P'(t) = \frac{dP}{dt}$

Así, podremos definir la tasa instantánea relativa de variación como:

$$r = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} \Rightarrow r(t) = \frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = \frac{\frac{P(t+1) - P(t)}{t+1-t}}{P(t)} \approx \frac{P'(t)}{P(t)}$$

Al igual que hicimos en el caso discreto, asumiremos inicialmente una serie de hipótesis iniciales sobre la población $P(t)$. La primera es que todos los individuos de la población son iguales. La segunda que los recursos de los que dispone dicha población son *ilimitados*. Y finalmente, consideraremos $r(t)$ constante con el paso del tiempo, es decir $r(t) \equiv r, r \in \mathbb{R}$. Esto nos lleva a plantearnos la siguiente cuestión:

Q_1: ¿Cuál es la dinámica de una población P(t) con $r(t) \equiv r, r \in \mathbb{R}$?, ¿Qué propiedades tiene la evolución de P(t) a corto y a largo plazo?, ¿qué factores determinan de forma más decisiva la evolución de P(t)?

Como $r(t)$ es constante: $r = \frac{P\prime(t)}{P(t)} \Rightarrow P'(t) = r \cdot P(t)$ que se trata de una ecuación diferencial de primer orden cuya solución se calculará utilizando la integral:

$$r = \frac{P'(t)}{P(t)} \Rightarrow \int r dt = \int \frac{P'(t)}{P(t)} dt \Rightarrow rt + C = Ln(P(t))$$

De donde: $e^{rt+C} = e^{Ln(P(t))} \Rightarrow e^C \cdot e^{rt} = P(t) \Rightarrow P(t) = ke^{rt}$

Si conocemos el tamaño inicial de la población: $P(0) = p_0$, podremos determinar el valor de la constante k en la función solución $P(t)$: $P(t) = p_0 e^{rt}$

A este primer modelo se le conoce como *modelo maltusiano continuo* y nos muestra que la población $P(t)$ tiene un crecimiento exponencial, proporcionándonos una primera respuesta a Q_1. Debemos diferenciar tres posibles casos según el valor del parámetro r:

- Si $r > 0$, entonces la población crece indefinidamente
- Si $r < 0$, la población tiende a la extinción
- Si $r = 0$, la población se mantiene constante e igual al valor inicial p_0.

Al igual que pasó en el caso discreto, se trata de una situación poco realista dado que presupone crecimiento exponencial con recursos infinitos. Para superar esta limitación, conocida como *paradoja maltusiana*, introduciremos nuevas hipótesis: (1) existencia limitada K de recursos, (2) $r(t)$ decrece en función del número de individuos de $P(t)$, y (3) dicho decrecimiento se produce de forma lineal. Esto nos lleva a considerar la siguiente cuestión:

Q_2: ¿Cuál es la dinámica de una población P con $r(t)$ función lineal decreciente? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $P(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva a $P(t)$?

Consideraremos r como: $r = -A \cdot P(t) + B$. Por tanto, tendremos una nueva ecuación diferencial: $\frac{P'(t)}{P(t)} = -A \cdot P(t) + B \Rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = -A \cdot P(t) + AK = A(-P(t) + K) \Rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)\cdot(-P(t)+K)} = A$

Obtenemos un nuevo modelo, llamado *modelo logístico*, cuya resolución conlleva una serie de manipulaciones que detallaremos a continuación. Primero descompondremos en suma de fracciones el cociente de la izquierda:

$$\frac{1}{P(t)\cdot(-P(t)+K)} = \left[\frac{\alpha}{P(t)} + \frac{\beta}{-P(t)+K}\right] = \frac{1}{K}\cdot\left(\frac{1}{P(t)} + \frac{1}{-P(t)+K}\right)$$

Por lo que nuestra ecuación diferencial inicial será equivalente a:

$$\frac{P'(t)}{K}\cdot\left(\frac{1}{P(t)} + \frac{1}{-P(t)+K}\right) = A \Rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{P'(t)}{-P(t)+K} = AK$$

Y para resolverla, simplemente integramos a ambos lados de la igualdad y operamos:

$$\int\left(\frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{P'(t)}{-P(t)+K}\right) = \int AK \Rightarrow LnP(t) - Ln(-P(t)+K) = AKt + C$$

$$Ln\frac{P(t)}{-P(t)+K} = AKt + C \Rightarrow \frac{P(t)}{-P(t)+K} = e^{AKt+C} \Rightarrow \frac{P(t)}{-P(t)+K} = e^{AKt}\cdot e^{C} = \gamma\cdot e^{AKt}$$

$$P(t) = \gamma e^{AKt}\cdot(-P(t)+K) = -\gamma e^{AKt}\cdot P(t) + \gamma K e^{AKt} \Rightarrow P(t) = \frac{K\gamma e^{AKt}}{1+\gamma\cdot e^{AKt}}$$

Para encontrar el valor de γ debemos imponer que para $t = 0$ tenemos una cierta población inicial.

5.2.2. *Análisis de la praxeología didáctica*

Durante el taller del segundo trimestre, y para garantizar la autonomía del trabajo de los grupos, se decidió repartir datos diferentes para cada uno, que quedan recogidos en la siguiente tabla:

Año	**Tamaño población**															
	G 1	**G 2**	**G 3**	**G 4**	**G 5**	**G 6**	**G 7**	**G 8**	**G 9**	**G 10**	**G 11**	**G 12**	**G 13**	**G 14**	**G 15**	**G 16**
2004	352	90	11	190	580	80	53	352	144	96	17	152	41	85	40	14
2005	411	190	112	240	760	141	94	411	189	126	168	192	78	391	71	60
2006	441	270	151	310	1580	171	114	662	430	287	227	248	260	904	114	206
2007	490	681	499	610	2500	435	656	735	591	394	749	488	456	1586	435	360
2008	577	1448	626	810	3100	622	933	866	924	616	939	648	800	3043	933	800
2009	692	1828	1798	1100	4500	1279	1919	1340	1720	1147	2697	910	1290	5640	2558	1350

A continuación presentamos las praxeologías didácticas a priori que corresponden a cada una de las sesiones en las que se dividió el taller y una crónica de las diferentes sesiones que tuvieron lugar.

Primera sesión

- Reorganización de G
- Presentación de las cuestiones sobre las que se deberá trabajar:

Q_1. Hacer una simulación en el caso del modelo discreto con recursos ilimitados acerca de la evolución del tamaño de la población de un año respecto el anterior (eje x: P_n y eje y: P_{n+1}).

Q_2. Hacer una simulación en el caso del modelo discreto de recursos limitados acerca de la evolución del tamaño de la población de un año respecto el anterior (eje x: P_n y eje y: P_{n+1}).

Q_3. Escribir el modelo de recursos ilimitados considerando el tiempo como una magnitud continua (modelo continuo).

- Se deja a G tiempo para explorarlas.
- El gráfico debe realizarse situando la población en el año n+1 (P_{n+1}) en el eje de ordenadas y la población del año anterior (P_n) en el eje de abscisas. En el caso de los recursos ilimitados (es decir, sin máximo de usuarios) se había establecido como hipótesis que la tasa relativa de variación era constante: $P_{n+1} = (1 + r)\cdot P_n$. Por tanto, en este caso, la relación que hay es lineal. Para elaborar este gráfico, se debe considerar que la población inicial es de 18 usuarios y a partir de aquí calcular la población mediante la relación $P_{n+1} = (1 + 1{,}82)\cdot P_n$. (Es decir, no se tendrá en cuenta los datos facilitados en el primer trimestre).
- Si sobre el mismo gráfico donde se representa la simulación, se considera la recta de pendiente 1, se observa que a medida que pasan los años, estas dos rectas se distancian más una de la otra, constatando que hay divergencia hacia el infinito.
- Para poder dar respuesta a Q_2, debemos cambiar la hipótesis que r (número de invitaciones) es constante, ya que imponemos la condición de que exista un número máximo de usuarios en la red social y con el valor de r constante teníamos un comportamiento infinito, que es incompatible con la existencia de dicho máximo. Utilizaremos el mismo razonamiento del primer trimestre, dónde r tenía la expresión $r = -A.P_n + B$, (A y B constantes positivas).
- Así, si queremos establecer la relación entre P_n y P_{n+1}, obtendremos: $P_{n+1} = (1 + r)\cdot P_n = (1 - A.P_n + B)\cdot P_n = (1 + B)\cdot P_n - A.P_n^2$, que es una relación cuadrática cuya gráfica corresponderá a una parábola convexa.

- Para hacer una simulación, consideraremos varios casos en función del máximo y del parámetro B, tal y como hicimos en el primer trimestre. Como ha sucedido en el caso anterior, se toma la población inicial de 18 usuarios y a partir de aquí, se utiliza $P_{n+1} = (1 + B) \cdot P_n - A.P_n^2$ para calcular los usuarios de los siguientes años.
- Se observa que hay un momento en el que la parábola se estanca y hay mucha concentración de puntos. Esto pasa cuando se sobrepasa el máximo impuesto, y por tanto la población debe disminuir. Disminuye, aumenta, disminuye….entrando en un bucle hasta que a largo plazo se llega a K. Se llama punto «atractor». Esto pasa cuando no llegamos a K en un número concreto de años.
- Para contestar a Q_3, el profesor propone un cambio de notación respecto a la utilizada en el primer trimestre. Designa por $P(t)$ la población de la red social *Lunatic World* en el instante de tiempo t, donde ahora t puede tomar cualquier valor real. La expresión que encontramos en el primer trimestre, con la nueva notación, pasará a ser: $r = \frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} \Rightarrow r(t) = \frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} = \frac{\frac{P(t+1)-P(t)}{t+1-t}}{P(t)} \approx \frac{P'(t)}{P(t)}$. Así, $r = \frac{P'(t)}{P(t)} \Rightarrow P'(t) = r \cdot P(t)$. Que se trata de una ecuación diferencial.
- Con este resultado se acaba esta primera sesión y se proponen las siguientes cuestiones para la siguiente sesión:

Q_4. *Buscar información acerca de las ecuaciones diferenciales (definición y clasificación).*
Q_5. *Resolver la ecuación diferencial encontrada aplicando lo aprendido acerca de éstas.*

- A diferencia del primer trimestre, donde cada grupo trabajaba con los mismos datos, al final de esta sesión se asigna a cada grupo unos datos determinados con los que deberán trabajar a lo largo del trimestre.

Segunda sesión

- Los estudiantes tienen que buscar información sobre las ecuaciones diferenciales. Esta búsqueda se puede realizar principalmente en libros de matemáticas recomendados en los primeros cursos universitarios de diferentes carreras, y en internet. Este trabajo les debe permitir clasificar la ecuación que habían encontrado en la primera sesión como una ecuación diferencial ordinaria de grado uno, cuya resolución se realiza mediante la integración (que se estaba trabajando de forma paralela en las *clases magistrales*), obteniendo: $P(t) = ke^{rt}$
- Para encontrar los valores de las constantes k y r, el proceso a seguir por cada grupo será el mismo, pero cada uno con sus propios valores. Lo primero que deben hacer los estudiantes es encontrar el promedio de las tasas relativas de variación como se realizó en el primer trimestre.
- Si algunos grupos se encuentran que los datos que se les había asignado presentaban valores que parecían «anómalos» la profesora sugiere que a la hora de hacer el promedio los descarten.
- Finalmente se propusieron las cuestiones que se debían trabajar en la siguiente sesión:

Q_6. *Escribir la ecuación diferencial relacionada con el modelo continuo para recursos limitados.*
Q_7. *Clasificar la ecuación diferencial obtenida y resolverla paso a paso.*
Q_8. *Elaborar propuestas: plantear nuevas hipótesis que debería satisfacer el sistema y explica qué efecto podrían tener sobre el modelo encontrado.*

Tercera sesión

- Al trabajar con el modelo de los recursos limitados se debe imponer un máximo de usuarios, tal y como hicimos en el primer trimestre pero utilizando un modelo continuo. Para ello, se parte de la ecuación diferencial obtenida en la primera sesión de este segundo trimestre: $r = \frac{P'(t)}{P(t)}$ y se impone que r es de la forma:

$r = -A \cdot P(t) + B$, obteniendo una nueva ecuación diferencial: $\frac{P'(t)}{P(t)} = -A \cdot P(t) + B \Rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = -A \cdot P(t) + AK$ (Q_6).

- Para contestar la primera parte de la segunda de las cuestiones, es posible que el profesor deba ayudar más que en la la cuestión Q_4. Y la segunda parte también puede representar un gran reto para los estudiantes. El profesor, tras dejarles durante un tiempo que intentaran resolverla por ellos mismos, guiará un poco la resolución, quedando la expresión: $P(t) = \frac{K\gamma e^{AKt}}{1+\gamma \cdot e^{AKt}}$
- Para encontrar el valor de γ debemos imponer que para $t = 0$ tenemos una cierta población inicial.
- El valor de A quedará fijado una vez establecido nuestro máximo de usuarios permitido y nuestro valor de B.

Para presentar en el informe individual, la profesora les pide que comprueben que, efectivamente, el modelo obtenido tiende a K cuando el tiempo tiende a infinito.

Diario de sesiones – taller segundo trimestre 2010/11

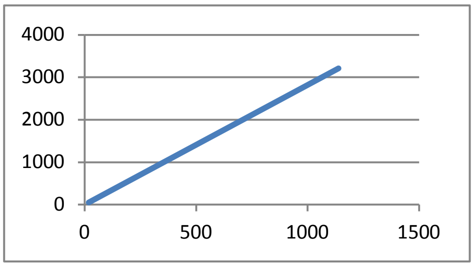
En la primera sesión del taller se reorganizaron los grupos y se presentaron tres cuestiones, dejando un tiempo para estudiarlas:

Q_1. Hacer una simulación en el caso del modelo discreto con recursos ilimitados acerca de la evolución del tamaño de la población de un año respecto el anterior (eje x: P_n y eje y: P_{n+1}).

Q_2. Hacer una simulación en el caso del modelo discreto de recursos limitados acerca de la evolución del tamaño de la población de un año respecto el anterior (eje x: P_n y eje y: P_{n+1}).

Q_3. Escribir el modelo de recursos ilimitados considerando el tiempo como una magnitud continua (modelo continuo).

Sobre la primera cuestión se pidió hacer una simulación en el caso del modelo discreto estudiado en el primer trimestre, cuando no había limitación de usuarios, situando la población en el año n+1 (P_{n+1}) en el eje de ordenadas y la población del año anterior (P_n) en el eje de abscisas. En el caso de los recursos ilimitados (es decir, sin máximo de usuarios) se había establecido como hipótesis que la tasa relativa de variación era constante: $P_{n+1} = (1 + r) \cdot P_n$. Por tanto, en este caso, la relación es lineal:

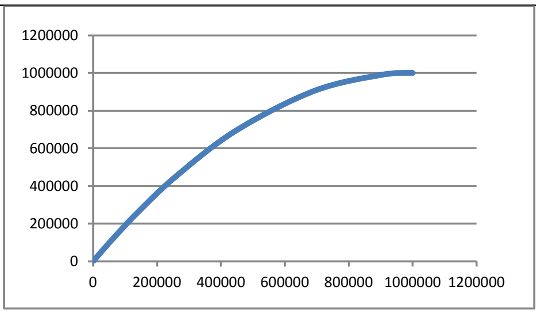


Para elaborar este gráfico, se consideró que la población inicial era de 18 usuarios y a partir de aquí: $P_{n+1} = (1 + 1{,}82) \cdot P_n$.

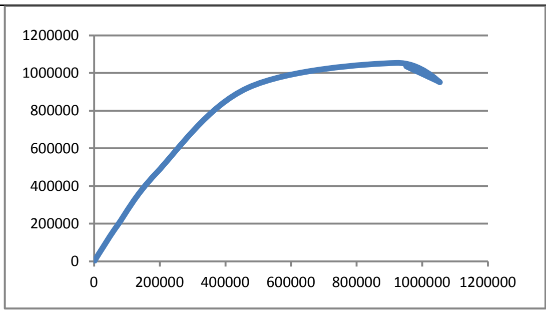
Para poder dar respuesta a la cuestión dos, se debió cambiar la hipótesis que r fuera constante, En el primer trimestre se consideró que la r debía tener una relación inversa con el tamaño de la población y se estableció que dicha relación sería la más sencilla, la lineal, de manera que r pasaba a tener la expresión $r = -A.P_n + B$, donde A y B eran constantes positivas. Así, si queremos establecer la relación entre P_n y P_{n+1}, obtendremos:

$P_{n+1} = (1 + r) \cdot P_n = (1 - A.P_n + B) \cdot P_n = (1 + B) \cdot P_n - A.P_n^2$, que es una relación cuadrática cuya gráfica corresponderá a una parábola convexa.

Para hacer una simulación, se consideraron varios casos en función del máximo y del parámetro B, tal y como hicimos en el primer trimestre. Como en el caso anterior, a partir de los 18 usuarios iniciales se utilizó $P_{n+1} = (1 + B) \cdot P_n - A.P_n^2$ para calcular los usuarios de los siguientes años.



Número máximo de usuarios: K=1000000, B = 1 y A=B/K.



Número máximo de usuarios: K= 1000000, B = 1,82 y A=B/K.

Se observa que hay un momento en el que la parábola se estanca y hay mucha concentración de puntos. Esto pasa cuando se sobrepasa el máximo impuesto, y por tanto la población debe disminuir. Disminuye, aumenta, disminuye….entrando en un bucle hasta que a largo plazo se llega a *K* (punto «atractor»). Esto pasa cuando no se llega a *K* en un número concreto de años.

Finalmente, para escribir el modelo de recursos ilimitados considerando el tiempo como una magnitud continua, se hizo un cambio de notación respecto a la utilizada en el primer trimestre. Se designó por $P(t)$ la población de la red social *Lunatic World* en el instante de tiempo t, (t valor real). La expresión del primer trimestre, con la nueva notación, pasó a ser: $r = \frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} \Rightarrow r(t) = \frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} = \frac{\frac{P(t+1)-P(t)}{t+1-t}}{P(t)} \approx \frac{P\prime(t)}{P(t)}$. Así, se obtuvo la ecuación diferencial: $r = \frac{P\prime(t)}{P(t)} \Rightarrow P'(t) = r \cdot P(t)$.

Con este resultado se acabó esta primera sesión y se propusieron las siguientes cuestiones para la siguiente sesión:
Q_4. Buscar información acerca de las ecuaciones diferenciales (definición y clasificación).
Q_5. Resolver la ecuación diferencial encontrada aplicando lo aprendido acerca de éstas.

A diferencia del primer trimestre, donde cada grupo trabajó con los mismos datos, al final de esta sesión se asignó a cada grupo unos datos determinados para trabajar a lo largo del trimestre.

Los estudiantes tuvieron que buscar información sobre las ecuaciones diferenciales. Esta búsqueda se realizó principalmente en libros de matemáticas recomendados en los primeros cursos universitarios de diferentes carreras, y en internet. Este trabajo les permitió clasificar la ecuación que habían encontrado en la primera sesión como una ecuación diferencial ordinaria de grado uno, cuya resolución se realiza mediante la integración (que se estaba trabajando de forma paralela en las *clases magistrales*):$r = \frac{P\prime(t)}{P(t)} \Rightarrow \int r dt = \int \frac{P\prime(t)}{P(t)} dt \Rightarrow rt + C = Ln(P(t))$

Elevando al número *e* los dos lados de la igualdad: $e^{rt+C} = e^{Ln(P(t))} \Rightarrow e^C \cdot e^{rt} = P(t) \Rightarrow P(t) = ke^{rt}$

Para encontrar los valores de las constantes *k* y *r*, el proceso a seguir por cada grupo fue el mismo, pero cada uno con sus propios valores. A modo de ejemplo, se muestran los datos del grupo 1.
Lo primero fue encontrar el promedio de las tasas relativas de variación como se realizó en el primer trimestre:

Año	**Población**		
2004	352		
2005	411	1,167614	=411/352
2006	441	1,072993	=441/411
2007	490	1,111111	...
2008	577	1,177551	...
2009	692	1,199307	...
		1,145715	**=promedio**

Así, con los datos del grupo 1 se obtuvo que r = 1,14. Y para calcular el valor de k, se consideró el caso inicial, t = 0: $\begin{cases} P(t) = ke^{rt} \\ si\ t = 0 \Rightarrow P(0) = 352 \end{cases} \Rightarrow 352 = ke^{1,14 \cdot 0} \Rightarrow k = 352$. Por tanto, la solución fue: $P(t) = 352e^{1,14t}$

Algunos grupos se encontraron que los datos que se les había asignado presentaban valores que parecían «anómalos». La profesora sugirió que a la hora de hacer el promedio los descartaran.

Finalmente se propusieron las cuestiones que se debían trabajar en la siguiente sesión:
Q_6. Escribir la ecuación diferencial relacionada con el modelo continuo para recursos limitados.
Q_7. Clasificar la ecuación diferencial obtenida y resolverla paso a paso.
Q_8. Elaborar propuestas: plantear nuevas hipótesis que debería satisfacer el sistema y explica qué efecto podrían tener sobre el modelo encontrado.

En esta sesión se debía trabajar con el modelo de los recursos limitados, es decir, debemos imponer un máximo de usuarios, tal y como se hizo en el primer trimestre pero utilizando un modelo continuo. Para ello, se partió de la ecuación diferencial obtenida en la primera sesión de este segundo trimestre: $r = \frac{P\prime(t)}{P(t)}$, imponiendo que r es de la forma: $r = -A \cdot P(t) + B$

Por tanto, se obtuvo una nueva ecuación diferencial: $\frac{P\prime(t)}{P(t)} = -A \cdot P(t) + B \Rightarrow \frac{P\prime(t)}{P(t)} = -A \cdot P(t) + AK$

Para contestar la primera parte de la segunda de las cuestiones, los alumnos utilizaron las mismas fuentes de información que para contestar la cuestión Q_4. Esta vez, les costó más clasificarla y tuvo que ser la profesora quien acotase más la búsqueda.

Donde si hubieron problemas más graves fue al intentar dar respuesta a la segunda parte de la segunda cuestión. Resolver la nueva ecuación diferencial representó para la gran mayoría de alumnos un reto muy grande. La profesora, tras dejarles durante un tiempo que intentaran resolverla por ellos mismos, acabó guiando un poco la resolución, quedando la expresión: $P(t) = \frac{K\gamma e^{AKt}}{1+\gamma \cdot e^{AKt}}$

Para encontrar el valor de γ se impuso que para t = 0 había una cierta población inicial. Por ejemplo, si se considera el caso del grupo 1, donde la población inicial era 352, se obtuvo:

$$P(0) = \frac{\gamma K \cdot e^0}{1 + \gamma \cdot e^0} = 352 \Rightarrow \gamma = \frac{352}{K - 352}$$

El valor de A quedó fijado una vez establecido nuestro máximo de usuarios permitido y nuestro valor de B.

Para presentar en el informe individual, la profesora pidió que comprobaran que, efectivamente, el modelo obtenido tiende a K cuando el tiempo tiende a infinito.

5.3. Tercer trimestre: un recorrido de estudio e investigación sobre evolución matricial

Retomando el estudio de dinámica de poblaciones, vamos a modificar las hipótesis relativas a las características particulares de los individuos de nuestra población. Según estas nuevas características *agruparemos a los individuos en grupos* que consideraremos homogéneos a efectos de «aparecer» o «desaparecer» en dicha población.

5.3.1. *Análisis a priori de la praxeología matemática*

Reformularemos nuestra hipótesis inicial que ha ido acompañándonos a lo largo del estudio:

Q_0: ¿Cómo predecir la evolución del número de individuos de una población P que está dividida en grupos, de un cierto periodo n a su consecutivo $n + 1$?, ¿y la evolución a largo plazo?

El modelo matemático más utilizado por los demógrafos en sus estudios del crecimiento de poblaciones es el modelo de *Leslie*. Este modelo sólo tiene en cuenta la población dividida por edades. En 1965 *Lefkovich* propuso un modelo matricial para estudiar la evolución de una población que generalizaba al modelo propuesto por *Leslie*. La diferencia fundamental entre ambos modelos reside en el hecho de que ahora se clasifica a los individuos de la población en etapas, en lugar de clases de edades.

Para estudiar cómo evoluciona una población P que suponemos estructurada en g grupos, consideraremos el vector: $P(n) = \left(p_1(n), p_2(n), \dots, p_g(n)\right)$. Daremos una serie de *hipótesis* sobre las que *construiremos nuestro modelo*:

- La población del primer grupo cuando pasa de un periodo n a su consecutivo $n+1$ se puede ver afectada por la incorporación de individuos de los otros grupos. Llamaremos a_i a la probabilidad de que esto suceda.
- En cada grupo sólo se pueden incorporar los individuos del mismo grupo o de la categoría inmediatamente inferior. Llamaremos t_i y b_i a las probabilidades respectivas de transición entre grupos.

Nos planteamos las siguientes cuestiones, si conocemos el número inicial de individuos de una población P con las características acabadas de describir:

Q_1: ¿Cómo podemos describir la evolución en el número de individuos de los diferentes grupos en los que se estructura P?

Q_2: ¿Será siempre posible predecir qué ocurrirá después de un cierto periodo de tiempo? ¿y lo que ocurrirá a largo plazo?

Podemos describir nuestra población como:

$p_1(n) = p_1(n-1) \cdot t_1 + \ p_2(n-1) \cdot a_2 + \cdots + p_g(n-1) \cdot a_g$

$p_2(n) = p_1(n-1) \cdot b_1 + \ p_2(n-1) \cdot t_2$

$p_3(n) = p_2(n-1) \cdot b_2 + \ p_3(n-1) \cdot t_3$

….

$p_g(n) = p_{g-1}(n-1) \cdot b_{g-1} + \ p_g(n-1) \cdot t_g$

Así, nuestro modelo se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \\ \vdots \\ p_g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_g \\ b_1 & t_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & t_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{g-1} & t_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1(n-1) \\ p_2(n-1) \\ p_3(n-1) \\ \vdots \\ p_g(n-1) \end{pmatrix}$$

O equivalentemente, $P(n) = L \cdot P(n\text{-}1)$. Y si suponemos que los porcentajes de transición se mantienen constantes, podemos aplicar n veces la relación anterior, obteniendo esta ecuación equivalente: $P(n)= L^n \cdot P(0)$, donde $P(0)$ es la distribución inicial de individuos.

Así, para una población P de la que conocemos $P(0)$ y la matriz que contiene los porcentajes de transición L, podemos predecir la evolución de los diferentes grupos $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que conforman P.

La *simulación numérica*, por ejemplo utilizando la hoja de cálculo Excel, nos permite ver que:

(1) A partir de cierto instante n_e existe una estabilización de la tasa de variación de población, es decir: $\{P(n+1) = a \cdot P(n), a \in \mathbb{R}\}$. Equivalentemente, podemos considerar que para $n > n_e$: $P_i(n+1) \approx a \cdot P_i(n) \Leftrightarrow \frac{P_i(n+1)}{P_i(n)} \approx a$, donde $0 \leq i \leq g, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

(2) Si partimos de dos distribuciones iniciales distintas, pero con igual número total de individuos, sus respectivas tasas de variación acaban estabilizándose, es decir, existe un cierto n_e a partir del cual ambas distribuciones son prácticamente idénticas.

(3) Si consideramos dos distribuciones iniciales con número diferente de individuos, pero ambas proporcionales entre sí, también acaban estabilizándose sus tasas de variación y lo hacen de forma proporcional.

Nos seguimos planteando cuestiones:

Q_3: Dada un sucesión vectorial $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, ¿es siempre posible encontrar una constante a y un tiempo n_e que satisfagan la relación $\{P(n+1) \approx a \cdot P(n), n > n_e\}$?

Mediante la simulación numérica observamos que dicha relación se cumple. Para calcularla analíticamente, partimos de las siguientes relaciones:
(r1) $P(n+1) = a \cdot P(n)$ y (r2) $P(n+1) = L \cdot P(n)$

Si las igualamos, obtenemos la ecuación: $a \cdot P(n) = L \cdot P(n)$ (r3) cuya resolución equivale a tratar el problema de determinar el valor propio a asociado a la matriz L y su correspondiente vector propio $P(n)$ para el que se satisface (r3):

$$\alpha \cdot P(n) = L \cdot P(n) \Leftrightarrow (L-\alpha)P(n) = 0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} t_1-\alpha & a_2 & a_3 & \dots & a_g \\ b_1 & t_2-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & t_3-\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{g-1} & t_g-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

Si consideramos el valor propio dominante λ_i con su vector propio correspondiente $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$, se cumple que:

(1) $\lambda_i = 1 + r \Rightarrow r$ nos indicará el ritmo de crecimiento de la población.

(2) $\frac{v_{i1}}{v_{i1}+v_{i2}+v_{i3}}, \frac{v_{i2}}{v_{i1}+v_{i2}+v_{i3}}, \frac{v_{i3}}{v_{i1}+v_{i2}+v_{i3}}$ indican los porcentajes con los que se estabilizan las tasas de variación.

Así respondemos a la cuestión planteada.

Para dar respuesta a la cuestión sobre el momento en el que se da la estabilidad de la tasa de variación, es decir, sobre el momento n_e en el cual $\forall n > n_e : P(n) \approx \alpha \cdot P(n-1)$, deberemos elaborar un estudio más detallado de la ecuación matricial que caracteriza la evolución de $P(n) = L^n \cdot P(0)$, es decir, el estudio de la potencia n-ésima de L. Para ello se abre un paréntesis sobre la diagonalización de matrices, que están estudiando esas semanas en clase de teoría:

> Si M es una matriz diagonalizable, entonces se pueden encontrar matrices D y K que satisfacen la siguiente relación: $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$, donde D es una matriz diagonal que contiene los valores propios (λ_i) asociados a M, y K la matriz de cambio de base que contiene los vectores propios (v_i) asociados a cada λ_i de M.

De esta forma, el problema del cálculo de la potencia n-ésima de L nos conduce al problema de encontrar las matrices K y D que satisfacen $L = K \cdot D \cdot K^{-1}$.

Como D era la matriz diagonal que contenía los valores propios, D^n será una matriz cuyos elementos de la diagonal contendrá los valores propios elevados a la n-ésima potencia. Se tratará de igualar el valor absoluto de cada uno de ellos a un valor cercano a cero (según el valor de aproximación que queramos). Mediante logaritmos resolveremos las n ecuaciones y nos quedaremos con el valor más grande de ellos, que corresponderá aproximadamente al valor de n para el que se obtiene la estabilidad de la tasa de variación.

5.3.2 Análisis de la praxeología didáctica

En este taller se continuará utilizando la red social *Lunatic World* para llevar a cabo nuestro trabajo pero con una serie de cambios respecto a los anteriores trimestres. A partir de ahora se deja de tratar a todos los usuarios de esta red social de la misma forma en cuanto a número de invitaciones se refiere. En este sentido, los usuarios se dividirán en tres rangos (Basic, Medium y Premium) en función de la antigüedad como usuario de la red social, de manera que al cabo de un periodo mensual un usuario ya existente puede mantenerse en su rango, pasar a un rango superior o dejar de ser usuario de la red. Además, los únicos usuarios que podrán realizar invitaciones serán los Medium y los Premium, siendo por defecto usuarios Basic aquellos que han sido recién invitados durante un mes determinado. Los usuarios Premium tienen privilegios en relación a los Medium y estos últimos mejores condiciones que los Basic (por ejemplo en cuanto a lo que hace referencia a la capacidad de memoria disponible).

De nuevo se vuelven a constituir los grupos y se les explica la nueva situación a estudiar, asignando a cada nuevo grupo unos datos propios con los que deberán trabajar todo el trimestre y que mostramos a continuación:

Tras un análisis realizado durante los últimos meses se ha determinado lo siguiente:

Grupo 1:

- El 15% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 75% pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 25% pasan a ser usuarios Premium y el 50% continúan siendo Medium. Cada uno de los usuarios Medium del periodo anterior invita a cuatro nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 90% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a tres nuevos usuarios Basic.

Grupo 2:

- El 75% de los usuarios Basic pasan a ser Medium en el próximo mes.

- El 80% de los usuarios Medium pasan a ser usuarios Premium en el próximo mes y cada uno de los usuarios Medium invita a tres nuevos usuarios Basic.
- El 50% de los usuarios Premium se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.

Grupo 3:

- El 10% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 90% pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 50% pasan a ser usuarios Premium y el 20% continúan siendo Medium. Cada uno de los usuarios Medium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 75,5% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.

Grupo 4:

- El 5% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 90% pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 35% pasan a ser usuarios Premium y cada uno de los usuarios Medium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 55,5% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a un nuevo usuario Basic.

Grupo 5:

- El 85% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 25% pasan a ser usuarios Premium, el 25% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita a cinco nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 45,5% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.

Grupo 6:

- El 76,5% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 29,75% pasan a ser usuarios Premium y cada uno de ellos invita en promedio a 1,7 nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 75% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a un nuevo usuario Basic.

Grupo 7:

- El 67,5% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 25% se mantienen en Medium, un 35% pasan a ser usuarios Premium y cada uno de ellos invita en promedio a 1,5 nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 25% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita en promedio a 1,5 nuevos usuarios Basic.

Grupo 8:

- El 50% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 42,5% pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 45% pasan a ser usuarios Premium y cada uno de ellos invita en promedio a 1,5 nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 85% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a un nuevo usuario Basic.

Grupo 9:

- El 60% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 20% pasan a ser usuarios Premium, el 15% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita a tres nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 80% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita en promedio a 2,5 nuevos usuarios Basic.

Grupo 10:

- El 10% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 82,5% pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 27,5% pasan a ser usuarios Premium y cada uno de ellos invita en promedio a 4,4 nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 90% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita en promedio a 3,3 nuevos usuarios Basic.

Grupo 11:

- El 65% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.
- De los usuarios Medium, un 55% pasan a ser usuarios Premium, el 25% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita a cuatro nuevos usuarios Basic.
- De los usuarios Premium, el 50% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a seis nuevos usuarios Basic.

Grupo 12:

- El 65% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.

– De los usuarios Medium, un 45% pasan a ser usuarios Premium, el 30% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita a cuatro nuevos usuarios Basic.
– De los usuarios Premium, el 70% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.
– Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.

Grupo 13:
– El 5% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 95% pasan a ser Medium.
– De los usuarios Medium, un 75% pasan a ser usuarios Premium, el 5% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita a cinco nuevos usuarios Basic.
– De los usuarios Premium, el 95% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.

Grupo 14:
– El 25% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 47,5% pasan a ser Medium.
– De los usuarios Medium, un 37,5% pasan a ser usuarios Premium, el 25% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita en promedio a 2,5 nuevos usuarios Basic.
– De los usuarios Premium, el 55% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a un nuevo usuario Basic.

Grupo 15:
– El 99% de los usuarios Basic pasan a ser Medium.
– De los usuarios Medium, un 38,5% pasan a ser usuarios Premium, el 50% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita en promedio a 2,2 nuevos usuarios Basic.
– De los usuarios Premium, el 90% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita en promedio a 1,1 nuevos usuarios Basic.

Grupo 16:
– El 15% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 75% pasan a ser Medium.
– De los usuarios Medium, un 75% pasan a ser usuarios Premium, el 20% continúan siendo Medium y cada uno de ellos invita a tres nuevos usuarios Basic.
– De los usuarios Premium, el 80% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a dos nuevos usuarios Basic.

Suponiendo que estos valores se mantienen de mes en mes:

1) Predecir la evolución del tamaño de la población de usuarios estructurada en estos tres grupos de un mes n al mes siguiente n+1.

2) Si durante este mes existen 1000 usuarios Basic, 2250 usuarios Medium y 1750 usuarios Premium, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 meses?

3) En la situación del apartado anterior, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 50 meses?

4) **Propuestas.**

A continuación detallaremos las tres sesiones que tuvieron lugar.

Primera sesión
- Se plantea a los estudiantes las cuestiones siguientes, suponiendo que los valores presentados se mantienen de mes en mes: *Q_1. Predecir la evolución del tamaño de la población de usuarios estructurada en estos tres grupos de un mes n al mes siguiente n+1.* *Q_2. Si durante este mes existen 1000 usuarios Basic, 2250 usuarios Medium y 1750 usuarios Premium, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 meses?* *Q_3. En la situación del apartado anterior, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 50 meses?* *Q_4. Propuestas.* - El profesor propone una notación común para todos los grupos: B_n, M_n y P_n que representan la población en el mes *n* de los usuarios Basic, Medium y Premium, respectivamente. También comenta que se debe tener en cuenta que hay la posibilidad de darse de baja de la red, por eso es posible que no aparezca un tanto por ciento de algún grupo. - Cada grupo, con sus propios datos, construyen las diferentes ecuaciones para cada tipo de usuario que les permite calcular el número de usuarios de un mes *n* al mes siguiente *n+1*. (Q_1)

- Para dar respuesta a la segunda pregunta se debe tener en cuenta el carácter matricial que se le puede asignar a las ecuaciones. El profesor unifica las notaciones designando $\begin{pmatrix} B_{n+1} \\ M_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix}$ por X_{n+1}, $\begin{pmatrix} B_n \\ M_n \\ P_n \end{pmatrix}$ por X_n y por M la matriz de porcentajes. En el primer mes se cumple: $X_1 = M \cdot X_0$. En el segundo, $X_2 = M \cdot X_1 = M \cdot M \cdot X_0 = M^2 \cdot X_0$
- Para obtener el resultado en un mes cualquiera, $X_{n+1} = M \cdot X_n = \ldots = M^n \cdot X_0$
- Con esta fórmula se puede calcular de forma sencilla la población al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 50 meses (Q_2 y Q_3).
- Llegados a este punto se pide a los alumnos que elaboren propuestas.
- Finalmente, para acabar esta sesión de seminario, se plantean unas nuevas cuestiones que son las que se deberán trabajar en la siguiente sesión:

Q_5. *¿Se puede destacar alguna característica de las trayectorias generadas por X(n) de esta población por los distintos grupos de usuarios a largo plazo? (Se debe de hacer numéricamente (Excel o Wiris) no de manera teórica).*

Q_7. *¿Es posible determinar el instante (mes) a partir del cual se cumple la característica anterior? Determinar el mes a partir del cual se cumple la característica a largo plazo.*

Q_8. *¿Qué pasaría si cambiáramos la situación inicial pero manteniendo el total de usuarios iniciales? Es decir, que en lugar de 1000, 2250, 1750 fueran otros números pero que sumaran 5000 igualmente.*

Segunda sesión

- Para observar cómo varía la población $X(n)$ y por tanto, poder responder a la primera cuestión, los alumnos pueden proceder básicamente de dos formas. La primera, calculando el porcentaje de usuarios de cada tipo respecto el total en cada iteración. Mediante la hoja de cálculo Excel es muy fácil estudiar a medio-largo plazo como será dicho comportamiento. La segunda forma consiste en calcular la tasa de variación entre cada iteración –o bien relativa o bien instantánea–, también con Excel y a medio-largo plazo.
- Los porcentajes, a partir de un cierto momento se estabilizan. Esta «estabilidad» se consigue antes o después en función del número de decimales que fijemos.
- Con la primera forma se observa que se estabiliza en 2,18, es decir, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} \approx 2{,}18$. Y mediante el cálculo de la tasa instantánea de variación: $\frac{x_i(n+1)-x_i(n)}{x_i(n)}$, se estabiliza en una unidad menos que el caso anterior, 1,18. Este resultado lógicamente se deriva de $\frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} - 1 = \frac{x_i(n+1)-x_i(n)}{x_i(n)}$. El momento en que se estabiliza, también dependerá del grado de aproximación que exijamos.
- De esta forma, se da respuesta a las primeras cuatro preguntas planteadas para esta sesión. Para abordar la quinta, se trata simplemente de cambiar los datos iniciales en la hoja de cálculo donde se han realizado los cálculos anteriores y se observa que se llega a los mismos resultados de estabilidad, aunque en momentos distintos. Incluso si se toman valores muy extremos, como por ejemplo escogiendo que alguno de los grupos inicialmente tuviera cero usuarios.
- El profesor explica que a partir de la simulación numérica con Excel se ha podido comprobar la existencia de un cierto instante n_e, llamado *tiempo de estabilización*, a partir del cual $X_{n+1} = a \cdot X_n$ para un cierto a real para $n > n_e$.
- Propuestas
- Las preguntas que se plantean para trabajar en la siguiente sesión son:

Q_9. *Calcular analíticamente (sin hacer simulación a largo plazo) el valor de α para que se cumpla la condición X(n+1) = αX(n).*

Q_{10}. *Calcular analíticamente el instante de tiempo n_e a partir del cual se cumple la relación anterior.*

Q_{11}. *Propuestas*

Tercera sesión

En la sesión anterior, mediante la simulación numérica los alumnos pudieron constatar que a largo plazo, la tasa de variación se mantiene constante. También pudieron comprobar que esta estabilidad se consigue antes o después en función del grado de aproximación deseado. Para poder verificarlo analíticamente el profesor debe introducir varias consideraciones:

La población en el momento $n + 1$ es igual a la población en el instante anterior más un coeficiente constante, es decir: $X(n+1) = X(n) + rX(n) = (1 + r)X(n) = \alpha X(n)$.

Si M es la matriz que contiene los porcentajes de transición de un periodo a otro, se cumple que $X(n+1)= M\cdot X(n)$.

Por tanto, considerando ambas, obtenemos la igualdad: $M\cdot X(n) = \alpha X(n)$, cuya resolución equivale a $(M-\alpha\cdot I_d)\cdot X(n) = 0$, es decir, se debe resolver el polinomio característico.

Al resolver esta ecuación, aparecen tres valores propios. Debemos descartar tanto el negativo como el inferior a uno ya que nuestra población es creciente y su límite infinito. En el caso que estamos considerando, la solución que nos interesa será $\alpha = 2{,}1872$, valor que ya nos aparecía en la simulación numérica cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} = 2{,}1872$. Por tanto, ya podemos contestar a la primera de las cuestiones planteadas en esta sesión: el valor α que satisface $X(n+1)= \alpha X(n)$ a largo plazo, o equivalentemente: $\lim_{n\to\infty} \frac{X_i(n+1)}{X_i(n)}$, es una de las soluciones del polinomio característico de $M- \alpha\cdot I_d$, concretamente un valor propio mayor que uno.

Para encontrar el instante n_e a partir del cual $X(n+1) \approx a\cdot X(n)$ donde $X(n)= M^n\cdot X(0)$ necesitaríamos poder calcular la potencia n-ésima de M. Dado que esta matriz no es diagonal, se debe recurrir a la teoría sobre diagonalización explicada en las clases de teoría.

El profesor explica que la calculadora wiris ofrece con una sola orden poder encontrar las matrices K y K^{-1} que permiten escribir M de forma diagonal, es decir, $M=K\cdot D\cdot K^{-1}$. De manera que se puede calcular la potencia n-ésima de M fácilmente: $L^n=K\cdot M^n\cdot K^{-1}$.

Para comprobar para qué valor n_e se cumple $\forall n > n_e: X(n+1) \approx \alpha \cdot X(n) \Rightarrow D^n \approx 0$

Si queremos encontrar el valor de n_e con un grado de precisión 10^{-2}. Aplicamos logaritmos y nos quedamos con el valor más grande, que coincide con el valor encontrado mediante la simulación numérica.

Propuestas

Diario de sesiones – taller tercer trimestre 2010/11

Se entregaron las siguientes cuestiones a los alumnos, suponiendo que los valores presentados se mantienen de mes en mes, dejándoles un espacio a su exploración:

Q_1. Predecir la evolución del tamaño de la población de usuarios estructurada en estos tres grupos de un mes n al mes siguiente n+1.

Q_2. Si durante este mes existen 1000 usuarios Basic, 2250 usuarios Medium y 1750 usuarios Premium, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 meses?

Q_3. En la situación del apartado anterior, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 50 meses?

Q4. Propuestas.

La profesora propuso una notación común para todos los grupos: B_n, M_n y P_n que representaba la población en el mes n de los usuarios Basic, Medium y Premium, respectivamente. Al haber la posibilidad de darse de baja de la red, es posible que no apareciera un tanto por ciento de algún grupo.

Cada grupo, con sus propios datos, construyó las diferentes ecuaciones para cada tipo de usuario que permitía calcular el número de usuarios de un mes n al mes siguiente *n+1*. A modo de ilustración, tomaremos los datos facilitados al grupo 1:

– El 15% de los usuarios Basic continúan siendo Basic durante el mes siguiente y el 75% pasan a ser Medium.
– De los usuarios Medium, un 25% pasan a ser usuarios Premium y el 50% continúan siendo Medium. Cada uno de los usuarios Medium del periodo anterior invita a cuatro nuevos usuarios Basic.
– De los usuarios Premium, el 90% se mantienen en Premium y cada uno de los usuarios Premium del periodo anterior invita a tres nuevos usuarios Basic.

Las ecuaciones correspondientes fueron:
$B_{n+1} = 0{,}15 \cdot Bn + 4 \cdot Mn + 3 \cdot Pn$, $M_{n+1} = 0{,}75 \cdot Bn + 0{,}5 \cdot Mn$ y $P_{n+1} = 0{,}25 \cdot Mn + 0{,}9 \cdot Pn$

De esta forma se dió respuesta a la primera cuestión. Para dar respuesta a la segunda preguntase tuvo en cuenta el carácter matricial de las ecuaciones anteriores:

$$\begin{array}{r} B_{n+1} = 0{,}15B_n + 4M_n + 3P_n \\ M_{n+1} = 0{,}75B_n + 0{,}5M_n \\ P_{n+1} = 0{,}25M_n + 0{,}9P_n \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B_{n+1} \\ M_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 4 & 3 \\ 0{,}75 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n \\ M_n \\ P_n \end{pmatrix}$$

Si se designa $\begin{pmatrix} B_{n+1} \\ M_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix}$ por X_{n+1}, $\begin{pmatrix} B_n \\ M_n \\ P_n \end{pmatrix}$ por X_n y $\begin{pmatrix} 0{,}15 & 4 & 3 \\ 0{,}75 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ por M, en el primer mes: $X_1 = M \cdot X_0$, en el segundo, $X_2 = M \cdot X_1 = M \cdot M \cdot X_0 = M^2 \cdot X_0$ …. Es decir, para un mes cualquiera, $X_{n+1} = M \cdot X_n = \ldots = M^n \cdot X_0$
Con esta fórmula se puede calcular de forma sencilla la población al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 50 meses, contestando la segunda y tercera cuestión.

En este punto, la familiaridad con los que los alumnos trabajaban en Excel o Wiris permitió que utilizaran indistintamente ambas herramientas para dar respuesta. Mayoritariamente decidieron hacer la previsión de los cinco primeros meses mediante la hoja de cálculo, y la predicción de los 50 meses en la calculadora simbólica.
En el caso que estamos tomando como ejemplo, tendríamos:

			X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0,15	4	3	1000	14400	16072,5	56538,375	95436,13125	246955,7259
0,75	0,5	0	2250	1875	11737,5	17923,125	51365,34375	97259,77031
0	0,25	0,9	1750	2137,5	2392,5	5087,625	9059,64375	20995,01531
			5000	18413	30202,5	79549,125	155861,1188	365210,5116

De la misma forma, para responder la tercera pregunta, simplemente debemos iterar el proceso en Excel hasta X_{50}:

			X_0	X_1	X_2		X_{24}	X_{25}		X_{49}	X_{50}
0,15	4	3	1000	14400	16072,5		6,67087E+11	1,45904E+12		2,1E+20	4,58E+20
0,75	0,5	0	2250	1875	11737,5	....	2,96546E+11	6,48589E+11	....	9,31E+19	2,04E+20
0	0,25	0,9	1750	2137,5	2392,5		57596634602	1,25974E+11		1,81E+19	3,96E+19
			5000	18413	30202,5		1,02123E+12	2,2336E+12		3,21E+20	7,01E+20

O bien calcular mediante wiris la potencia 50 de la matriz y multiplicarla por la distribución inicial.
Como ya podíamos intuir en la segunda pregunta, el crecimiento exponencial que tiene esta red social bajo estas nuevas condiciones era tan rápido que era incoherente. En pocos meses superaría la población mundial
A continuación mostramos algunas de las propuestas planteadas por los distintos grupos.:

- ¿Cómo afectaría al modelo matricial la imposición de un límite de población para cada uno de los rangos?
- Introducción de una recompensa, más invitaciones por ejemplo, para aquellos Premium que lleven más de 10 meses en el rango.
- Contar cuantos usuarios se dan de baja y hacer un estudio para hallar porcentajes respecto a las 3 categorías.
- ¿Cómo afectaría a la evolución de la población a largo plazo si los usuarios Basic pudieran invitar a

otros usuarios?

- ¿Qué pasaría si para pasar de un grupo a otro tuvieras que pagar una cuota?
- ¿Cómo repercutiría a nuestra matriz si los usuarios Medium no pudieran invitar a ningún usuario Basic?
- Dentro de cada grupo de usuarios hacer una separación por sexos.
- Calcular la función de beneficios si por cada nuevo usuario nos pagan «*x*» por publicidad y nosotros damos un regalo valorado en «*y*» a los usuarios Premium por cada 5 usuarios invitados.
- ¿Qué pasaría si los usuarios tuviesen que realizar un mínimo de invitaciones para conseguir formar parte de la categoría superior?
- ¿Qué beneficios se obtendrían si los usuarios Premium hubieran de pagar una cuota anual de 5€, con unos costes de mantenimiento de 0.001€ por usuario?
- ¿Podríamos conseguir que la población disminuyese y aumentase de forma cíclica? Es decir, poder prever las modas, por ejemplo y saber pronosticar cuándo habrá una bajada de usuarios en nuestra red y cuándo volverá a estar de moda y captará nuevos usuarios.
- ¿Podríamos introducir una nueva variable como por ejemplo la edad de los usuarios, para posteriormente introducir restricciones de edad en los usuarios de nuestra red?
- Hacer que la categoría Basic tenga un periodo de prueba de 2 meses, en el cual cuando finalice el tiempo de prueba tengas que abonar una cuota para ascender a Medium. Sin embargo, si siendo Basic has realizado un mínimo de 20 invitaciones, se puede seguir siendo Basic.
- ¿Qué sucedería si el requisito para pasar de un rango al siguiente fuese el de haber invitado a un número mínimo de personas, a excepción de la categoría de usuarios Basic?
- ¿Es posible calcular la distribución de usuarios en un mes determinado, partiendo de la base que no disponemos del porcentaje de distribución de los usuarios Basic?
- Podemos poner una condición para que los usuarios Basic cuando tengan determinada antigüedad pasen a Medium y también así con los Medium pasen a Premium.

Finalmente, para acabar esta sesión de seminario, se plantearon unas nuevas cuestiones:
Q_5. *¿Se puede destacar alguna característica de las trayectorias generadas por X(n) de esta población por los distintos grupos de usuarios a largo plazo? (Se debe de hacer numéricamente (Excel o Wiris) no de manera teórica).*
Q_7. *¿Es posible determinar el instante (mes) a partir del cual se cumple la característica anterior? Determinar el mes a partir del cual se cumple la característica a largo plazo.*
Q_8. *¿Qué pasaría si cambiáramos la situación inicial pero manteniendo el total de usuarios iniciales? Es decir, que en lugar de 1000, 2250, 1750 fueran otros números pero que sumaran 5000 igualmente.*

Para observar cómo variaba la población $X(n)$ y por tanto, poder responder a la primera cuestión, los alumnos procedieron mayoritariamente de dos formas. La primera, calculando el porcentaje de usuarios de cada tipo respecto el total en cada iteración. Mediante la hoja de cálculo Excel les fue muy fácil estudiar a medio-largo plazo como será dicho comportamiento. La segunda forma consistió en calcular la tasa de variación entre cada iteración –o bien relativa o bien instantánea–, también con Excel y a medio-largo plazo. A continuación mostramos como ejemplo los cálculos con los datos del caso 1:

- Mediante el cálculo del porcentaje de cada tipo respecto al total de individuos en cada mes:

			X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0,15	4	3	20,00%	78,21%	53,22%	71,07%	61,23%	67,62%	63,84%	66,21%	64,77%	65,66%
0,75	0,5	0	45,00%	10,18%	38,86%	22,53%	32,96%	26,63%	30,52%	28,13%	29,60%	28,70%
0	0,25	0,9	35,00%	11,61%	7,92%	6,40%	5,81%	5,75%	5,64%	5,66%	5,63%	5,65%
			100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
65,11%	65,45%	65,24%	65,37%	65,29%	65,34%	65,31%	65,33%	65,32%	65,32%	65,32%
29,25%	28,91%	29,12%	28,99%	29,07%	29,02%	29,05%	29,03%	29,04%	29,04%	29,04%
5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%	5,64%
100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Como podemos observar, los porcentajes, a partir de un cierto momento se estabilizaban, y que la «estabilidad» se consigue antes o después en función del número de decimales que fijemos.

- Mediante el cálculo de la tasa relativa $x_i(n + 1) / x_i(n)$:

	X_2	X_3	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
$x_1(n+1)/x_1(n)$	1,116146	3,517709	1,687989	2,587654	1,980385	2,327651	2,106247	2,238756	2,156234	2,206413
$x_2(n+1)/x_2(n)$	6,260000	1,526997	2,865870	1,893490	2,404352	2,068552	2,265022	2,141296	2,215999	2,169719
$x_3(n+1)/x_3(n)$	1,119298	2,126489	1,780722	2,317422	2,058129	2,252952	2,142215	2,213428	2,170626	2,197186

X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
2,194385	2,182738	2,189877	2,185492	2,188182	2,186531	2,187544	2,186922	2,187304	2,187069	2,187213
2,180567	2,191217	2,184673	2,188686	2,186222	2,187734	2,186806	2,187375	2,187026	2,187240	2,187108
2,190947	2,184831	2,188586	2,186282	2,187696	2,186828	2,187361	2,187034	2,187235	2,187112	2,187187

X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}
2,187125	2,187179	2,187146	2,187166	2,187154	2,187161	2,187157	2,187160	2,187158	2,187159	2,187158
2,187189	2,187140	2,187170	2,187151	2,187163	2,187156	2,187160	2,187157	2,187159	2,187158	2,187159
2,187141	2,187169	2,187152	2,187163	2,187156	2,187160	2,187158	2,187159	2,187158	2,187159	2,187158

Se observa que se estabiliza en 2,18, es decir, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} \approx 2{,}18$

- Mediante el cálculo de la tasa instantánea de variación: $\frac{x_i(n+1)-x_i(n)}{x_i(n)}$

	X_2	X_3	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
$x_1(n+1)-x_1(n)/x_1(n)$	0,116146	2,517709	0,687989	1,587654	0,980385	1,327651	1,106247	1,238756	1,156234	1,206413
$x_2(n+1)-x_2(n)/x_2(n)$	5,260000	0,526997	1,865870	0,893490	1,404352	1,068552	1,265022	1,141296	1,215999	1,169719
$x_3(n+1)-x_3(n)/x_3(n)$	0,119298	1,126489	0,780722	1,317422	1,058129	1,252952	1,142215	1,213428	1,170626	1,197186

X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
1,175446	1,194385	1,182738	1,189877	1,185492	1,188182	1,186531	1,187544	1,186922	1,187304	1,187069
1,197957	1,180567	1,191217	1,184673	1,188686	1,186222	1,187734	1,186806	1,187375	1,187026	1,187240
1,180970	1,190947	1,184831	1,188586	1,186282	1,187696	1,186828	1,187361	1,187034	1,187235	1,187112

X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}
1,187213	1,187125	1,187179	1,187146	1,187166	1,187154	1,187161	1,187157	1,187160	1,187158	1,187159
1,187108	1,187189	1,187140	1,187170	1,187151	1,187163	1,187156	1,187160	1,187157	1,187159	1,187158
1,187187	1,187141	1,187169	1,187152	1,187163	1,187156	1,187160	1,187158	1,187159	1,187158	1,187159

En este caso, se estabilizó en una unidad menos que el caso anterior, 1,18. Este resultado lógicamente se deriva de $\frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} - 1 = \frac{x_i(n+1)-x_i(n)}{x_i(n)}$. El momento en que se estabiliza, también dependerá del grado de aproximación que exijamos.

De esta forma, se dió respuesta a las primeras cuatro preguntas planteadas para esta sesión. Para abordar la quinta, se trató simplemente de cambiar los datos iniciales en la hoja de cálculo donde se habían realizado los cálculos anteriores, observando que se llega a los mismos resultados de estabilidad, aunque en momentos distintos. Incluso si se toman valores muy extremos, como por ejemplo escogiendo que alguno de los grupos inicialmente tuviera cero usuarios.

Es decir, a partir de la simulación numérica con Excel se pudo comprobar la existencia de un cierto instante n_e, *tiempo de estabilización*, a partir del cual $X_{n+1} = a \cdot X_n$ para un cierto a real para $n > n_e$.

Como propuestas más destacadas de esta sesión:

- Qué pasaría si cambiamos el modelo de forma que el número de invitaciones sea variable ¿Cómo sería el modelo? ¿Cómo afectaría a la evolución de la TRV?
- Hay alguna situación inicial que nos permitiera llegar a una estabilidad desde el momento inicial. ¿Por qué?
- ¿Qué pasaría si cambiaran las condiciones de la red social?
- ¿Es posible que exista algún mes en que la tasa relativa de variación de cualquier grupo sea igual a 0? Si es así, encuentra el año en que sucede y di cual son sus condiciones.
- ¿Cómo cambiaria nuestra matriz inicial (T) si los usuarios de la red no pudiesen marcharse?
- Crear un modelo que no tienda a infinito, es decir, que tenga recursos limitados
- Si la red social experimentara pérdidas de usuarios, ¿cómo repercutiría a la predicción de la evolución del tamaño de la población de usuarios?
- ¿Es posible que alguna de las tres clases decrezca?
- ¿Hay alguna distribución inicial de usuarios que haría posible que el crecimiento relativo fuese estable desde el inicio?
- ¿Sería posible la extinción de uno de los rangos?
- ¿Sería posible conseguir que la TRV se estabilizara en un mes previamente seleccionado?
- ¿Podría suceder que la distribución de la población entre usuarios Basic, Medium y Premium nunca se estabilizara?
- ¿Qué sucedería si la población de usuarios Premium quedara restringida a un 10% de la población total?
- ¿Podríamos introducir de alguna manera en nuestros cálculos los efectos de una catástrofe natural por ejemplo, que hiciese variar la tasa instantánea de variación temporalmente y que después volviese a su estado normal?
- ¿Qué tendría que ocurrir para que los tres grupos tuvieran el mismo número de usuarios?
- ¿Cómo afectaría al modelo que tuviera que haber un mínimo de usuarios para cada tipo de clasificación de usuarios para que la red pudiera funcionar?
- Es muy frecuente en empresas de todo tipo que premien a sus usuarios en función de cuantos nuevos usuarios consiguen captar. El gimnasio DIR por ejemplo, realiza un descuento a sus consumidores en función de la cantidad de invitaciones que mandan. Suponiendo que quisiéramos premiar de algún modo a los usuarios que más invitaciones mandan, deberíamos dar con el modo de contabilizar el número de invitaciones que han sido mandadas por cada usuario Premium.
- ¿Cómo calcular el total (un número exacto) de usuarios? En el caso de que quisiéramos saber la población total de usuarios para hacer un estudio de Benchmarking, necesitaríamos saber cuál es la población total, para poder así comparar con otras redes sociales, como por ejemplo Facebook.
- Calcular los pronósticos de Basic, Medium i Premium, si cada mes un usuario se diera de baja de las tres redes.
- ¿Qué pasaría si los usuarios Medium y los Premium en un momento determinado dejaran de poder invitar a usuarios en la red? ¿Cómo afectaría al gráfico?
- ¿Podríamos encontrar un modelo que hiciera que la población creciera hasta cierto mes para luego decrecer hasta llegar a cero? Por ejemplo el hecho de que la red social no evolucionara y se podría quedar obsoleta con el tiempo.

- ¿A qué es debido que la distribución de usuarios de la red según la categoría de pertenencia no se vea modificado a largo plazo, al intercambiar los datos iniciales?
- ¿Cómo podemos realizar un predicción de los usuarios a largo plazo sin tener datos de los meses anteriores?
- ¿Si de repente la red social, decide suprimir el grupo de usuarios Premium, como afecta esta decisión a nuestro modelo?
- Añadir otra categoría que esté formada por usuarios que estén dispuestos a pagar una cantidad mensual que les distinga de los otros por el hecho que puedan promocionar su empresa u otra cosa.
- ¿Qué sucedería si la tasa de crecimiento nunca se estabilizara?

Las preguntas que se plantearon para trabajar en la siguiente sesión fueron las siguientes:
Q_9. Calcular analíticamente (sin hacer simulación a largo plazo) el valor de α para que se cumpla la condición $X(n+1) = \alpha X(n)$.
Q_{10}. Calcular analíticamente el instante de tiempo n_e a partir del cual se cumple la relación anterior.
Q_{11}. Propuestas

En la sesión anterior, mediante la simulación numérica los alumnos pudieron constatar que a largo plazo, la tasa de variación se mantenía constante. También pudieron comprobar que esta estabilidad se conseguía antes o después en función del grado de aproximación deseado. Para poder verificarlo analíticamente se debieron hacer varias consideraciones:

(3) La población en el momento $n + 1$ es igual a la población en el instante anterior más un coeficiente constante, es decir: $X(n+1) = X(n) + rX(n) = (1 + r)X(n) = \alpha X(n)$.

(4) Si M es la matriz que contiene los porcentajes de transición de un periodo a otro, se cumple que $X(n+1)= M\cdot X(n)$.

Por tanto, considerando ambas, se obtuvo la igualdad: $M\cdot X(n) = \alpha X(n)$, cuya resolución equivalía a $(M-\alpha\cdot I_d)\cdot X(n) = 0$, es decir, se debía resolver el polinomio característico.

Tomando de nuevo el caso 1: $det(M - \alpha \cdot I_d) = 0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} 0{,}15-\alpha & 4 & 3 \\ 0{,}75 & 0{,}5-\alpha & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}9-\alpha \end{pmatrix} = 0$

$$-\alpha^3 + 1{,}55\alpha^2 + 2{,}34\alpha - 2{,}07 = 0 \Leftrightarrow \{\alpha = -1{,}3423\}, \{\alpha = 0{,}7051\}, \{\alpha = 2{,}1872\}$$

Al resolver esta ecuación, aparecieron tres valores propios. Se descartó tanto el negativo como el inferior a uno ya que nuestra población era creciente y su límite infinito. En nuestro caso, la solución que nos interesa será $\alpha = 2{,}1872$, valor que ya nos aparecía en la simulación numérica cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} = 2{,}1872$. Por tanto, ya se puede contestar a la primera de las cuestiones planteadas en esta sesión: el valor α que satisface $X(n+1)= \alpha X(n)$ a largo plazo, o equivalentemente: $\lim_{n\to\infty} \frac{X_i(n+1)}{X_i(n)}$, es una de las soluciones del polinomio característico de $M- \alpha\cdot I_d$, concretamente un valor propio mayor que uno.

Para dar respuesta a la segunda cuestión, necesitamos encontrar el instante n_e a partir del cual $X(n+1) \approx a\cdot X(n)$ donde $X(n)= M^n\cdot X(0)$. Por tanto, necesitaríamos poder calcular la potencia n-ésima de M. Dado que la dicha matriz no es diagonal, debemos recurrir a la teoría sobre diagonalización explicada en las clases de teoría.

Se les explicó que la calculadora wiris ofrece con una sola orden poder encontrar las matrices K y K^{-1} que permiten escribir M de forma diagonal, es decir, $M=K\cdot D\cdot K^{-1}$. De manera que se pueda calcular la potencia n-ésima de M fácilmente: $L^n=K\cdot M^n\cdot K^{-1}$.

En nuestro caso 1:

$$D = \begin{pmatrix} -1{,}3423 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7051 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}1872 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}21319 & 1 \\ -0{,}40711 & -0{,}77959 & 0{,}44453 \\ 0{,}04539 & 1 & 0{,}08634 \end{pmatrix}; K^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}57165 & -1{,}13742 & -0{,}76485 \\ -0{,}06179 & -0{,}04573 & 0{,}95117 \\ 0{,}41516 & 1{,}12767 & 0{,}96763 \end{pmatrix}$$

$$L^n = (K \cdot D \cdot K^{-1})^n = K \cdot D^n \cdot K^{-1} = K \cdot \begin{pmatrix} -1{,}3423^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7051^n & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}1872^n \end{pmatrix} \cdot K^{-1}$$

Para comprobar para qué valor n_e se cumple $\forall n > n_e : P(n+1) \approx \alpha \cdot P(n)$
Si queremos encontrar el valor de n con un grado de precisión 10^{-2}:

$$|-1{,}3423|^n \approx 0{,}01$$
$$0{,}7051^n \approx 0{,}01$$
$$2{,}1872^n \approx 0{,}01$$

Aplicamos logaritmos y nos quedamos con el valor más grande:

$$n = \frac{log 0{,}01}{\log(|-1{,}3423|)} = -15{,}64$$
$$n = \frac{log 0{,}01}{\log(0{,}7051)} = 13{,}17$$
$$n = \frac{log 0{,}01}{\log(2{,}1872)} = -5{,}88$$

Así, la estabilidad se dará a partir del 13º mes con una precisión de 10^{-2}, coincidiendo con el valor encontrado mediante la simulación numérica.

Algunas de las propuestas más destacadas que los alumnos han planteado fueron:

- ¿Qué pasaría si cambiamos la situación inicial? ¿Volvería a estabilizarse en el mismo n_e?, en caso contrario ¿por qué parámetros podría estar causado?
- Si cambiamos nuestra matriz A, ¿siempre podríamos encontrar su matriz diagonalizada? ¿Por qué?
- ¿Cómo cambiaría el modelo si pusiéramos un límite de usuarios en la red?
- ¿Cuál sería el mes en donde se estabilizaría la población si el total de usuarios sumasen 10000?
- ¿Qué pasaría si en la diagonalización todos fueran 1? ¿Qué condiciones llevarías a cabo para sacar un resultado?
- ¿Cómo repercutiría a nuestra matriz si tuviéramos un límite de usuarios Premium?
- ¿Cómo afectaría el modelo si la población fuera cerrada, no pudiesen entrar, ni salir, nuevos usuarios?
- En caso de que los usuarios decrecieran, encontrar el año «N» de dicho descenso.
- ¿Podríamos encontrar una matriz que nos reflejará la volatilidad en el número de usuarios, es decir, que después de llegar a un máximo de usuarios comenzara a descender el uso de la red y posteriormente volviera a experimentar un aumento en su uso?
- Hacer el proceso inverso, es decir, encontrar la población inicial conociendo la Matriz de Transición y el punto fijo donde se estanca la población.
- ¿Podríamos encontrar una matriz M tal que la matriz X no creciera?
- ¿Qué sucedería si solo mayores de edad pudieran entrar en esta web? ¿Cambiaría el esquema de la web? ¿Aumentaría o disminuiría la población?
- ¿Sería posible fijar previamente el mes en el cual queremos que la población se estabilice?
- ¿Cómo debería ser la matriz L para que la población decreciera a partir de un mes t?
- ¿Existe algún método específico para saber cuál de los valores propios es el que se refiere al índice relativo de variación?
- ¿Podríamos encontrar, en otra situación, que los tres valores propios no se adecuaran a nuestra población? ¿Qué fueran negativos los tres?
- ¿Podría suceder que la distribución de la población entre usuarios Basic, Medium y Premium nunca se estabilizara?

- ¿Podría suceder que algún grupo a largo plazo se quedará sin usuarios?
- ¿Necesariamente se tiene que utilizar el valor positivo para estudiar la progresión geométrica? ¿Qué pasaría si hubiesen dos valores positivos como solución? ¿Cuál de ellos debería escogerse?
- Como hemos visto en este caso, del cálculo del valor propio (vaps), se obtienen tres valores de los cuales dos son negativos y uno de ellos es positivo. Coincide a su vez que el valor positivo es equivalente al valor de alfa (buscado), valor que tiende a infinito mientras que los dos restantes tienden a 0. Nos preguntamos si eso es una regla que se repita siempre o que solo pasa en algunos casos (como en el nuestro). ¿Cómo podríamos investigarlo?
- Tal y como se ha observado tras los cálculos realizados, detectamos una relación establecida entre la matriz diagonal (D) y la tasa relativa de variación. Nos preguntamos en qué consiste tal relación y ¿cuál es el factor que nos permite encontrar alfa (tasa relativa de variación +1) como uno de los componentes de la matriz D?
- ¿Cómo podríamos hallar el tamaño de la población de un mes determinado de cada tipo de usuario?
- ¿Cómo se modificaría la población si en un mes determinado a la red social permite la entrada a cualquier persona sin necesidad de invitación?
- ¿Podríamos encontrar analíticamente la combinación de porcentajes de cada grupo respecto el total a partir únicamente de la matriz L?
- ¿Podríamos encontrar, en el supuesto que existiera, una matriz de transición en el caso que la población Basic estuviera limitada a un número determinado de individuos?
- En el supuesto que la población Basic estuviera limitada, ¿Las demás poblaciones acabarían estabilizándose en un momento determinado?
- Partiendo de una matriz de Leslie, ¿cómo es posible que aunque variemos la situación inicial de la que partimos, la estabilidad se dé en el mismo mes?
- ¿Qué pasaría si cambiáramos la matriz de L, es decir, si cambiáramos el repartimiento de los usuarios? ¿Cómo afectaría a la evolución del crecimiento y a la estabilización? Sería igual…
- Encontrar la tasa relativa de población pero esta vez en vez de por meses por años.
- Hacer un estudio de una red social en la que los usuarios disminuyan, para ver cómo se puede expresar mediante matrices.
- ¿Existiendo algún tipo de movilidad entre las 3 diferentes categorías de usuarios pero la población la considerásemos cerrada, como se plantearía el problema?
- ¿Influiría en el instante de tiempo concreto cuando se estabiliza la población si hubiese cambios en la situación inicial de la que partíamos?
- ¿Produciría algún cambio significativo en los cálculos realizados, la incorporación de una nueva categoría de usuarios totalmente dependiente de las 3 otras?
- Estudiar la dinámica de poblaciones de manera analítica, gráfica y numérica según edad y sexo utilizando la matriz de Leslie y predecir la evolución de cada tipo.
- ¿Qué pasaría si los tres tipos de poblaciones cayeran en picado, es decir la red social se quedara con muy pocos miembros? ¿Cómo se podría tomar la decisión de cerrar o no la plataforma?
- Estudiar el caso en que las invitaciones son eliminadas. Es decir, la matriz de Leslie queda sustituida por una matriz de transición, ¿qué nuevas características aparecerían?
- ¿Qué pasaría si los usuarios Premium tuvieran una fecha de caducidad en la red?
- Si existiera una limitación para los usuarios Basic de 100.000, ¿Cuándo se llegaría a dicho límite?

6. Análisis a posteriori de la implementación de los REI

6.1. Crónica de los recorridos y materiales de clase

Hemos presentado hasta aquí el diseño y análisis a priori de diferentes REI experimentados, tanto desde el punto de vista de la praxeología matemática esperada como de su organización didáctica. La experimentación de estos REI se ha llevado a cabo en condiciones relativamente análogas en lo que se refiere a la organización global de la asignatura y al papel e importancia del taller de modelización dentro de la misma. También podemos suponer que el perfil del alumnado de la Facultat d'Economia IQS (actual IQS School of Management) se ha mantenido bastante homogéneo. Hay dos variaciones que merece la pena comentar. La primera afecta al profesorado de los talleres. Como ya hemos, entre los profesores que dirigieron las experimentaciones de los REI para los cuatro grupos de los dos primeros cursos considerados (2006/07 y 2007/08) había tres participantes de nuestro grupo de investigación en didáctica, incluyendo a la autora de la memoria. A partir del curso 2008/09, este grupo de profesores pasó el relevo a una profesora única responsable de todos los grupos de matemáticas de primer curso de ADE, que contó en ocasiones con algún profesor asistente para la gestión del taller (esencialmente las sesiones de trabajo en clase y la corrección de los informes). La segunda variación importante han sido los distintos dispositivos didácticos que se han ido implementando, así como las adaptaciones y modificaciones que han sufrido hasta llegar a la forma estable que mantienen actualmente. Estas modificaciones han servido para mejorar las condiciones de desarrollo del taller, dadas las capacidades y potencialidades de los alumnos y de la profesora.

La descripción de lo que sería una dinámica «normalizada» de los talleres tal como se han realizado hasta la fecha se ha presentado en forma de diario de sesiones. Este material es el resultado de «fusionar» las distintas crónicas de las sesiones de los talleres que hemos recogido durante estos años. Contiene toda la información que hemos considerado necesaria para reproducir el desarrollo de un REI en el aula, incluyendo algunas de las principales respuestas de los grupos de estudiantes durante las puestas en común. Constituye así una importante fuente de información empírica del desarrollo en clase de los REI experimentados.

Para complementar esta información presentamos en el anexo 4.2 los informes que los secretarios de cada sesión por grupos presentaron en cada uno de los tres trimestres del curso 2010/11. Se ha respetado tanto su presentación como su redactado, habiéndose solo realizado alguna ligera modificación para facilitar la impresión.

6.2. Cuestionarios a los alumnos

Otro factor que hemos querido analizar es la valoración que los alumnos aportan sobre las experiencias realizadas de los recorridos de estudio e investigación. Para ello, se ha pasado al final de cada uno de los talleres un cuestionario a cada alumno, siempre el mismo durante todos los cursos.

El cuestionario (que se puede consultar en el anexo 4.3) consta de treinta y cuatro cuestiones, veintiséis de las cuales corresponden a preguntas en las que se debe valorar del uno al cinco (de menos a más) diferentes aspectos relacionados con la dificultad, la duración de las sesiones, la metodología usada, el papel de los profesores, la cantidad de trabajo, la organización, etc. En otras cinco, se pide al alumno que aporte aspectos tanto positivos como negativos del desarrollo del taller, y comentarios generales de interés. Las tres últimas corresponden a la identificación del grupo y trimestre.

A partir del análisis de las respuestas a todas las encuestas pasadas a los estudiantes hemos extraído algunas conclusiones que pasaremos a detallar a continuación, siguiendo el orden en el cual aparecen las preguntas en el cuestionario.

- *Cuestiones de valoración*

En primer lugar, tanto el número como la duración de las sesiones dedicadas a realizar el taller son bastante bien aceptados por los estudiantes.

Una constante en las repuestas obtenidas es la consideración que tienen sobre el alto grado de dificultad que ha representado el taller. A pesar de ello, les ha suscitado mucho interés y consideran que está relacionado con los contenidos del curso, permitiéndoles ver el lado práctico de la teoría estudiada en clase. Aun así, les resulta complicado tener una visión global del problema tratado.

Sobre el contenido matemático que los alumnos encuentran en el taller, observamos que hay diferencias entre sus consideraciones sobre la teoría y la práctica. Mientras que mayoritariamente les parece correcto el contenido teórico, la opinión sobre el práctico es que es excesivo.

Los alumnos creen que el trabajo del taller se debe desarrollar principalmente fuera del horario establecido, pero manifiestan que no han tenido demasiados inconvenientes para reunirse y trabajar. Respecto al trabajo en grupo, los alumnos destacan el buen ambiente con el que han trabajado. Este punto es importante ya que son alumnos que se acaban de conocer. También subrayan las pocas dificultades que les ha supuesto repartir responsabilidades y la facilidad con la que se han adaptado al trabajo en grupo. Consideran que los resultados son mejores al trabajar en grupo que si lo hicieran de forma individual.

Sobre los informes que deben entregar, tanto semanalmente como al final del taller, los alumnos dicen no tener excesivas dificultades para redactarlos, que las puestas en común y las correcciones posteriores les ayudan mucho, aunque la figura de la profesora no es determinante para el desarrollo de su trabajo.

Sobre el uso del ordenador como herramienta del taller, los alumnos opinan que se sienten muy cómodos utilizándolo y que durante el taller han aprendido a utilizarlo mejor, además el uso de las TIC les facilita mucho el trabajo en matemáticas.
Los alumnos no consideran que el peso otorgado en la nota final al taller sea excesivo.

- *Aspectos positivos*

De forma bastante generalizada, los alumnos han citado como aspectos positivos el *trabajo en grupo*, la *nueva visión de las matemáticas* y el *uso de las TIC*. Ahora bien, el análisis detallado de las respuestas a las encuestas nos permite ampliar cada uno de estos puntos, y aunque en muchos casos se trata de comentarios unipersonales, nos parece interesante comentarlos.

Los alumnos no están particularmente habituados al trabajo en grupo en la asignatura de matemáticas en secundaria, es por ello que sus comentarios, aunque se realicen de forma puntual, nos pueden dar una visión muy amplia de los problemas con los que se han encontrado frente a esta nueva forma de trabajo. En su gran mayoría, los comentarios sobre el trabajo en grupo son positivos, como por ejemplo: hay «colaboración», «cooperación», «compañerismo», «buen ambiente en clase», «hemos creado lazos más fuertes», se «fomenta la amistad», permite «conocer mejor a mis compañeros» y «mejorar relaciones con las personas», a la vez que «me ayudan en mis carencias». Y a nivel de trabajo: les ayuda a «saber organizarse», «aprender a repartir el trabajo», «ayuda a espabilarse», consigue «dinamismo» e «intercambio de opiniones», «es un incentivo del trabajo pensar que una pequeña aportación de cada miembro crea un gran trabajo», permite hacer una «exposición del trabajo al frente de la clase» y ayuda a «aprender a redactar informes sobre un caso práctico y comentarlo». También permite «delegar responsabilidades» y «aprender a trabajar para el grupo y no solo para ti», lo que lleva a «poder discutir varias opciones», fomentando el «sentido de la responsabilidad».

El aprendizaje y uso del ordenador es considerado de forma mayoritaria como otro de los aspectos positivos, y entre los comentarios más repetidos encontramos «aprender Excel y Wiris» y «aprender a resolver (y presentar) problemas matemáticos con el ordenador».

Sobre el taller propiamente dicho, los alumnos coinciden en destacar que les ha permitido ver la «aplicación práctica de la teoría vista en clase», y por tanto, «aprender a resolver problemas y situaciones de la empresa» e «integrar las matemáticas en las ciencias sociales». Valoran muy positivamente «el trabajo con empresas reales», ya que «ayuda a entender económicamente las matemáticas» y «aprendes a interpretar la realidad de la situación de una empresa». Esta nueva visión que destacan los alumnos sobre las matemáticas se ve reflejada en diferentes comentarios como los que citamos a continuación: «es un reto hacer un trabajo sin teoría», «nos ayuda a entender», «obliga a pensar y razonar», «aprendemos más», «sirve para desarrollar mejor problemas abiertos», «te hace reflexionar sobre aspectos matemáticos», «nos ayuda a buscar alternativas para poder resolver problemas», «ayuda a enfocar de forma global el problema», «va más allá de simples fórmulas matemáticas», «mejora en la capacidad personal de resolver los problemas», «manera de hacer menos monótonas las matemáticas», «entretenido», «interesante».

De cara a la evaluación, algunos alumnos comentan que «ayuda a estudiar para el examen» con «opción a subir mucho tu nota final». Por ello, «obliga a llevar la asignatura al día», aunque debes hacer una «búsqueda propia de información».

En las encuestas analizadas del curso 2010-11 encontramos que valoran muy positivamente «seguir con el tema del trimestre anterior».

- *Aspectos negativos*

Sobre los aspectos negativos encontramos como temas más frecuentes la dificultad del problema, la cantidad de tiempo necesario para realizarlo – quitándoles tiempo para estudiar –, y los inconvenientes de tener que quedar fuera del horario de clase para realizarlo. También consideran que los contenidos del taller tienen poca relación con los contenidos explicados en las clases magistrales y que reciben muy poca información de lo que se debe hacer en el taller, perdiendo demasiado tiempo en averiguarlo. Las sesiones de seminario se hacen demasiado cortas para preguntar las dudas y consideran que la profesora les ayuda poco. A pesar de haber encontrado el trabajo en grupo como esencialmente *positivo*, en esta sección encontramos que aparece como *aspecto negativo* por el hecho de que no todo el mundo se implica de la misma forma y se producen tensiones dentro de los grupos.

A continuación, mostraremos algunos comentarios en relación con cada uno de los aspectos acabados de citar:

- *Sobre la falta de guia en el taller*:

De un lado, los alumnos se quejan de la poca guía aportada por la profesora para desarrollar el taller, así recogemos comentarios como: «a veces necesitaríamos más ayuda», es «poco guiado» y «sin pautas a seguir», «no hay parámetros para saber si vas bien encaminado a la hora de resolver el problema», « poca información por parte de la profesora».
La otra gran queja que hacen los alumnos versa sobre el poco tiempo del que disponen

en clase para resolver dudas. En esta línea encontramos frecuentemente comentarios del tipo: «poco rato para solucionar dudas», «nos cuesta mucho realizarlo» y «sería mejor si pudiéramos consultar con el profesor más días a parte de la hora de clase».

- *Sobre el trabajo en grupo*:

Principalmente hay tres quejas sobre el trabajo en grupo, una es la falta de implicación de algunos miembros del grupo, otra sobre las dificultades encontradas para reunirse fuera del horario escolar y la última sobre las dificultades de llegar a consensos. En relación a la primera, encontramos comentarios como: «falta de compromiso», «conflicto con compañeros que no trabajan», «muy difícil organizarse con gente sin voluntad de trabajar. Desmotiva y hace perder mucho el tiempo», «trabajar en grupo sirve para que una haga el trabajo y el resto observen. En la vida real todo es individual».

Sobre las dificultades de reunión encontramos «a veces es un poco complicado quedar con el grupo completo» y sobre las dificultades de llegara a acuerdos comunes entre los diferentes miembros del grupo: «a veces cuesta ponerse de acuerdo», «es difícil llegar a una conclusión en común».

- *Sobre la dificultad matemática del taller*:

Una parte muy importante de los comentarios sobre los aspectos negativos hacen referencia a la dificultad matemática que encuentran los alumnos sobre el taller. Así, encontramos comentarios del estilo: «falta de teoría», «a veces necesitamos ayuda externa», «nos cuesta aplicar los conceptos», «poca explicación para hacerlo y no sabemos usar el ordenador», «mucha de la materia no se ha visto en clase», «no explicar el problema antes de hacerlo», «tenemos que resolver problemas sin saber los pasos ni qué sentido tiene», «te encuentras ante problemas que no sabes resolver», «poca relación con las matemáticas», «se tendría que especificar más el contenido y propuestas de los seminarios», «dificultad en hallar el planteamiento en algunos casos», «muy difíciles para aquellos que no son buenos en matemáticas», «hacen perder muchas tardes, y no sirven para comprender mejor la asignatura», «a veces no se acerca mucho a los casos reales», «mucha exigencia para cosas que nunca hemos tratado», «la teoría que teníamos que buscar a veces era bastante complicada», «los ejercicios no tienen mucha relación con matemáticas. Sería mejor para el seminario una clase de repaso», «no me ha ayudado a entender la teoría», «demasiado teórico», «cuesta arrancar».

- *Sobre los informes y exposiciones*:

En secundaria, no es habitual ni la elaboración de informes matemáticos ni las presentaciones orales, por lo que de antemano sabemos que va a suponer una dificultad añadida al componente matemático. Al analizar las encuestas, esta suposición se corrobora y encontramos comentarios como: «necesitamos muchas horas para poder redactarlo», «redactar y sacar conclusiones del informe», «el informe individual es muy pesado», «dificultad para redactar», «ser secretario», «exposiciones», «propuestas de cada sesión», «la explicación de lo que hay que hacer debería darse antes del día de la entrega de ese informe»,

Pero también encontramos quejas *técnicas*, como por ejemplo: «poco tiempo de entrega», «demasiadas entregas», «la forma de enviarlo», «demasiado valor a las presentaciones, expresiones, conclusiones..., y menos al objetivo del problema», «poco flexible en las fechas de entrega», «la dureza desde el primer día en los métodos de envío».

Y sobre la forma de evaluar: «no puedes puntuar tu trabajo individual», «entregar el informe el día del examen final», «no se hace un exposición final con todo el seminario hecho de un trimestre», «dura corrección», «exposiciones cortas y no hay una global donde se pueda ver el contenido de todo el trimestre».

- *Sobre el uso de las TIC*:

Los comentarios sobre el uso de las TIC varían considerablemente según se trate del primer trimestre o el resto. En los dos últimos no acostumbran a señalarse como aspectos negativos, y las pocas críticas hacen referencia a las dificultades de «tener que escribir ecuaciones a ordenador». En cambio, en el primer trimestre de cada año, cuando todavía no se ha visto en profundidad Excel en la asignatura de informática, encontramos muchas referencia al uso de la hoja de cálculo: «no sabemos trabajar con Excel», «demasiado Excel con poca explicación de este».

- *Sobre el impacto del taller*:

Otros aspectos negativos que encuentran son, por ejemplo, que el taller da «más trabajo» que la propia materia, «nos quita clases teóricas», «no tendría que contar en junio/septiembre», «se junta con los demás trabajos y exámenes», hacen «difícil llegar al diez» y «se ha de hacer informe individual cuando vienen los exámenes».
O valoraciones globales como: el taller es «muy repetitivo» y «poco útil», consideran que es «demasiado rebuscado», «es un poco abstracto», «espeso», «no muy interesante» donde «no he aprendido muchas cosas» y provoca «estrés».

- *Comentarios generales*:

Finalmente, presentamos una muestra de algunos comentarios que no han sido citados ni en los aspectos negativos ni positivos y que resultan interesantes para esta investigación. El conjunto de todos los comentarios generales se presenta en el anexo 4.4:

- […] añadiría un ejemplo para que a los alumnos les sirva como guía para iniciar la investigación.
- A veces ante distintas opiniones no nos ponemos de acuerdo porque no partimos de unos apuntes iguales.
- Podrían añadir una clase más de seminario para resolver dudas sino demasiado trabajo en casa.
- […] es muy útil para encontrar un sentido económico, cosa que nunca imaginé que fuese tan sencillo.
- Quizás sería muy útil colgar teoría en la blackboard.
- La idea de un secretario es indispensable.

6.3. Entrevistas con alumnos

6.3.1. Organización y metodología de las entrevistas

Al final del curso 2010-11, se realizaron una serie de entrevistas a alumnos de primer curso con el fin de obtener su valoración sobre los diferentes talleres realizados a lo largo del curso. Dichas entrevistas se hicieron en un despacho de la propia universidad y en todas ellas había dos profesoras, una que lanzaba preguntas abiertas a grupos de tres o cuatro personas y otra que transcribía simultáneamente sus respuestas. Esta forma de hacer, nos pareció una forma más informal para ahondar en ciertos aspectos que posiblemente en una entrevista uno-a-uno hubiese sido más difícil. Además, el hecho que los alumnos no conocieran a sus entrevistadoras les dio más libertad para hablar abiertamente de sus opiniones. Las entrevistadoras tenían un guión de preguntas que se iban adaptando a las respuestas que se iban obteniendo (que se puede consultar en el anexo 4.5).

Se realizaron tres entrevistas, una para cada grupo de alumnos. En cada entrevista participaron 5 o 6 alumnos (uno por cada grupo de trabajo del grupo clase) elegidos por la profesora de la asignatura. Durante la clase de matemáticas, se pidió a los alumnos que se reunieran en el aula contigua para realizar la entrevista. Todas duraron alrededor de 20 minutos. A continuación describiremos los aspectos más relevantes que hemos extraído de dichas entrevistas, siguiendo la estructura prevista en el guión.

6.3.2. Novedades que representa el taller

La mayoría de los entrevistados destacan la novedad respecto a lo que estaban acostumbrados en secundaria. Como no lo han hecho antes, les cuesta saber qué tienen que hacer. Reconocen que el paso del tiempo les ha permitido acostumbrarse a esta nueva forma de trabajo. Nos parece relevante indicar que algunos alumnos que habían realizado el «curso cero» en septiembre comentan la ventaja que sentían respecto al resto en relación con la forma de trabajar en el taller.

Comentan lo perdidos que se encuentran en un principio, sin saber dónde buscar, ni cómo utilizar lo encontrado y como muchas veces se encontraban ante diferentes caminos que parecían llevar a la respuesta correcta. Esto rompe también con lo que están acostumbrados. Desde un principio, la profesora les explicó que ella los guiaría en el proceso pero sin dar la solución, y que recaía en los propios alumnos el peso del estudio.

A nivel organizativo les ha costado acostumbrarse debido a que el trabajo en equipo no es habitual en las matemáticas del bachillerato y aquí se añade la dificultad del trabajo en equipos de personas prácticamente desconocidas. Además, el trabajo requería reuniones fuera del horario *escolar* y esto lo presentan como un hándicap debido a las obligaciones personales de cada uno de ellos. Aun así lo valoran por lo novedoso y beneficioso. Muchas veces alguien del grupo abría una nueva vía y eso les permitía avanzar. Trabajando individualmente no pasa. De todas formas apuntan ampliamente a las dificultades interpersonales que han ido apareciendo a lo largo de los trimestres. La implicación de todos los miembros del grupo no es igual, con lo que el trabajo deja de ser colectivo y eso hace que los miembros del grupo «que trabajan» expulsen del grupo a aquellos que «no lo hacen».

Otra novedad que aporta el trabajo del taller es la elaboración de los informes. En general comentan que todos los miembros del grupo colaboraban, ayudándose entre sí. La mayoría de los alumnos entrevistados aseguran que a pesar de creer tener facilidad para redactar, se han encontrado con bastantes dificultades a la hora de hacerlo en términos matemáticos, ya que nunca antes lo habían hecho. El hecho que los informes se entregaban a la profesora y esta los devolvía corregidos con muchos comentarios, hacia que los grupos mejoraran su forma de redactar.

La figura del secretario también es nueva. Para quien le tocaba realizar dicha tarea lo obligaba a hacer una síntesis de todo lo trabajado, y como posteriormente se publicaba en la plataforma digital de la universidad, el resto de los alumnos se beneficiaba de ello. Aun así, comentan que a medida que pasan las sesiones, esta consulta la utilizan menos.

Para la redacción del informe individual, los alumnos entrevistados comentan que no les ha costado nada ya que con los apuntes tomados en el taller, los informes del secretario y las aportaciones de los miembros del grupo, hay suficiente para hacerlo. Comentan que la profesora insistía en explicar lo más importante, obligándoles a sintetizar.

Sobre otra de las novedades de los talleres, las presentaciones orales de los grupos, algunos alumnos consideran que es una satisfacción salir a exponer si el seminario ha salido bien. Además que les ayuda a repasar todo lo visto. Muchos reconocen que el miedo a no hacer el ridículo en una posible exposición, les obliga a esforzarse en dicha preparación. Al principio sentían mucho respeto por ponerse delante de sus compañeros, pero con el paso del tiempo, los alumnos se han acostumbrado y se sienten más tranquilos. Para algunos, las presentaciones resultan demasiado largas, sobre todo si el grupo que ha salido a exponer no lo tiene bien preparado y la profesora debe interrumpir frecuentemente.

Un aspecto que destacan positivamente de forma unánime es el papel que desempeña la profesora. Destacan la estructuración de las sesiones y como evita al máximo dar la respuesta, «obligando» a los alumnos a buscar ellos solos la solución. Tan solo guía dando indicaciones pero siempre disponible para ayudar a todos los grupos.

6.3.3. Contenidos matemáticos

El hecho que se trabaje un tema cercano –las redes sociales– favorece la implicación de los alumnos en el taller. Aunque creen mayoritariamente que las preguntas que guían los talleres son un poco forzadas. Y algunos apuntan que les parece un poco pesado trabajar siempre con el mismo problema. Pero la gran mayoría creen que el estudiar un caso con el que llevan familiarizándose tantas semanas, facilita entender las nuevas cuestiones.

Creen que hay mucha relación entre lo visto en *clase magistral* y lo que se ve en el taller. A veces se ve en clase primero y se utiliza en el taller después, pero a veces sucede que se requiere de alguna herramienta matemática que no se ha estudiado todavía para continuar y así se justifica que posteriormente se estudie en teoría. En general dicen que se trata de una aplicación práctica en el taller de lo visto en clase. Les ha gustado que el trabajo del taller se completara con otras herramientas: Excel, Wiris, etc.

En las sesiones de seminario donde deben trabajar por grupo, los alumnos se quejan que son demasiados grupos con dudas para un único profesor y que a veces la espera es muy larga. Este problema se agrava cuando la duda se refiere a no saber cómo continuar. En general, los alumnos destacan la actitud de trabajo de los compañeros en estas sesiones. Hay veces que la duda es común para muchos grupos y la profesora la explica en voz alta para todos. Al principio todos los alumnos tenían una dependencia muy grande de la profesora, pero a medida que se han acostumbrado a la forma de trabajar y se han apropiado de la cuestión, esta dependencia es menor, hasta el punto que muchos de ellos comentan darse cuenta cuando «van bien» y cuando no. Un comentario que nos ha parecido relevante en este punto es el de un alumno que subraya la importancia que le ha dado al hecho que «la profesora haya hecho de guía porque así se acostumbra a que el día de mañana no se lo den todo hecho».

Sobre los contenidos que se ven en el taller, los alumnos no consideran que sean de excesiva dificultad y que prácticamente todo está visto en el bachillerato. Para los alumnos la complicación no radica en los contenidos sino en la manera de formular las cosas, y en la forma de entregarlas.

Sobre la relación de la asignatura con las matemáticas del bachillerato creen mayoritariamente que en la universidad han visto su utilidad, mientras que en el bachillerato se limitaba a aprender una serie de conceptos sin ver su aplicación. Todo era más mecánico y ahora es más relacionado con la realidad. Creen en general que la exigencia es alta, y que los que vienen del bachillerato científico o tecnológico están mejor preparados. Los que vienen del bachillerato social se quejan que en las matemáticas que vieron aparecían algunos ejercicios de beneficio, pero en general no había aplicación a la economía, y en cambio, aquí casi todos los problemas tienen relación con la economía y empresa. Así un alumno concluye que «lo que falla en las matemáticas del bachillerato social es que la gente no sabe porqué hace las cosas y por eso no les gusta las matemáticas».

La búsqueda de información necesaria para el desarrollo del taller ha venido principalmente de dos fuentes. Una es la teoría impartida en las clases magistrales y la otra, internet. Aunque sobre esta última, comentan que todo es muy matemático y no lo entendían. También han recurrido a familiares y amigos con conocimientos matemáticos, y libros de texto matemáticos.

6.3.4. Comentarios generales

Finalmente les pedimos a los alumnos que hicieran una valoración de aquellos aspectos que consideraban mejores y peores del desarrollo del taller. Como peor aspecto del taller consideran la indisciplina de algunos miembros del grupo (se quejan que personas que no han trabajado nada tengan nota gratis, aunque una posterior reflexión les lleva a aceptar que son ellos quienes lo permiten); que haya una pregunta en el examen (creen que están de sobras evaluados con todo el trabajo que han hecho en el taller y además, que representa un porcentaje muy alto); que ocupara mucho tiempo en su desarrollo (les parece corto de tiempo para la gran cantidad de trabajo a realizar) y tener que redactar el informe y las propuestas de nuevas preguntas.

A nivel positivo, destacan que acaban aprendiendo muchísimo más que con la forma tradicional de enseñanza. Permite ver la aplicación a la realidad. El trabajo en grupo muestra de lo que es capaz cada uno de hacer. Destacan el uso del ordenador.

6.4. Entrevista con la profesora

En abril de 2012 entrevistamos a la profesora responsable de los talleres y la asignatura de Matemáticas de los últimos años en IQS School of Management, Vanessa Serrano. A continuación mostramos la transcripción de la entrevista:

(1) En el primer taller que realizaste como profesora, ¿qué dificultades, qué resistencias propias y qué resistencias de los alumnos encontraste? ¿Qué diagnóstico harías de la situación en la que realizaste el taller? ¿Qué pensaste del taller? ¿Tuviste tentaciones de eliminarlo? ¿Qué aspectos positivos/negativos le viste al taller?

Como profesora, una de las mayores dificultades encontrada durante el primer seminario consistía en controlarse a la hora de hacer explicaciones a los grupos de trabajo (los alumnos intentan habitualmente extraer la máxima información posible del profesor y no siempre es fácil contenerse). También resultaba algo complejo transmitirles que el profesor no conoce exactamente (a priori) la respuesta al problema (o que la respuesta no es única o que, incluso, puede no existir respuesta final), suelen esperar que el profesor les confirme en cada paso o cálculo realizado si el resultado es correcto (considerando que el resultado puede ser correcto o no, no hay términos medios).

Por parte de los alumnos, lo más complejo fue que aceptaran el nuevo contrato de aprendizaje. Los alumnos suelen esperar preguntas concretas de respuesta inmediata y suelen confundir las preguntas más generales (exposición de situaciones abiertas) con una falta de objetivos claros a largo plazo. Cuando algún grupo realizaba una exposición oral, los demás grupos tendían a infravalorar (en caso de no coincidir) las herramientas propias utilizadas ya que las del grupo expositor tenían el visto bueno del profesor.

Uno de los principales problemas en la aplicación del seminario durante el primer año como profesora fue la aceptación del contrato por parte de los alumnos y, en cierto modo y a veces como consecuencia, la aceptación propia. Los alumnos no valoraban inicialmente el nivel de aprendizaje que llegaban a alcanzar y terminaban por considerar que les quitaba tiempo para el estudio de la asignatura (excluyéndolo como parte del proceso de aprendizaje). Todos estos problemas se fueron suavizando a medida que avanzaba el curso y, sobre todo, a lo largo de los años (a medida que los seminarios se iban institucionalizando).

De los principales aspectos positivos encontrados destacaría el hecho de que pese a que la cantidad de conocimientos matemáticos (o no matemáticos) que aparecen en el seminario es menor a los que podrían haberse trabajado en una clase magistral, el nivel de asimilación y comprensión por parte de los alumnos es mucho más elevado. Los alumnos podían ver (aunque no siempre estaban predispuestos a ello) la situación o problemática que serviría de razón de ser del porqué recurrir a ellos (la motivación).

Como inconvenientes, como ya he comentado anteriormente, debo destacar el gran esfuerzo que suponía conseguir que los alumnos aceptaran la nueva metodología de trabajo y mantener su nivel de motivación.

(2) ¿Qué cambios has ido introduciendo en los talleres de los años sucesivos y cuales fueron/han sido las motivaciones que te llevaron/han llevado a ello?

A lo largo de los años y, a petición de una gran mayoría de los alumnos (observaciones recogidas en los cuestionarios facilitados durante el curso), se ha ido variando el peso del seminario dentro de la asignatura (se ha reducido, aunque no en gran medida). Por otro lado, se ha ido estableciendo que las entregas sean quincenales en lugar de semanales para dejar algo más de tiempo al trabajo en grupo dentro del aula (también quincenal).

Otro de los aspectos que ha variado a lo largo de los años ha sido el informe individual que los alumnos entregan al final de cada trimestre como síntesis del trabajo realizado. Los alumnos no terminaban de entender la filosofía de este informe y comentaban habitualmente que les robaba mucho tiempo de estudio de cara a los exámenes trimestrales, en realidad muchos alumnos terminaban copiando fragmentos del trabajo en grupo o de los informes de secretario. Frente a estos comentarios, y con el objetivo añadido de forzar un trabajo real de síntesis, se limitó a un informe de como máximo tres páginas (aproximadamente) y su peso en la asignatura.

Otra de las mejoras, ha sido intentar hacer más partícipes a los alumnos, no solo en la resolución de la situación planteada, sino también en los objetivos parciales establecidos. Actualmente se les pregunta a los alumnos, en cada uno de los informes quincenales entregados, propuestas/sugerencias para nuevas sesiones.

(3) ¿Qué cambios introducirías de cara al curso próximo?

El análisis a final de curso de los comentarios facilitados por los estudiantes en los cuestionarios siempre es una buena herramienta para reflexionar acerca de posibles mejoras. A pesar de no tener aún estos resultados, actualmente uno de los posibles cambios que se podrían introducir durante el próximo curso sería buscar herramientas que aumenten la motivación de los alumnos (en general), aunque la aceptación y la valoración por parte de los alumnos es bastante buena. En este sentido y durante el tercer trimestre del curso actual ya se han introducido algunos cambios que pretenden mantenerse para el próximo, como establecer una nueva dinámica en las sesiones de trabajo en grupo. Se ha establecido que al final de cada sesión de trabajo en el aula cada grupo compartirá con el resto el trabajo realizado, la metodología seguida y nuevas propuestas o cuestiones a analizar para la próxima entrega. Previamente se advierte al gran grupo que conocer nuevas metodologías no implica el abandono de las propias pero sí ampliar el abanico de posibilidades a tomar en consideración para decantarse finalmente por una/s concreta/s.

(4) ¿Qué cosas crees que funcionan bien y cuáles no tanto?

El funcionamiento en general de los seminarios ha alcanzado un muy buen nivel. Quizás, en ciertos alumnos, siguen apareciendo algunas de las resistencias encontradas en los primeros seminarios, pero como profesora de éstos creo disponer de más herramientas para suavizarlas y conseguir en la mayoría de las situaciones una buena predisposición por parte de los alumnos.

(5) ¿Cómo influye el taller en las clases magistrales?

Los seminarios son un aspecto muy positivo para las clases magistrales ya que, por un lado, en los seminarios aparece la razón de ser de muchas de las nociones que intervienen en las clases magistrales y, por otro, en muchas situaciones algunos contenidos surgen (aunque no siempre de forma explícita, pero sí de forma muy intuitiva) antes en las sesiones de seminario que en la clase magistral. Este aspecto facilita la aparición y la comprensión de estos nuevos conceptos (aunque este proceso no sea del todo visible por parte de los alumnos y, cuando es muy visible, suele provocar cierta disconformidad).

(6) Comentarios

Como conclusión general, creo conveniente destacar que la introducción de este nuevo sistema de aprendizaje (paralelo a las clases de teoría y problemas) es un proceso que no siempre resulta sencillo (pese que a nivel institucional, los seminarios ya se venían trabajando previamente) pero que a lo largo de cada curso y de los años de aplicación ha ido mostrando cómo enriquece a la asignatura y al aprendizaje de esta por parte de los alumnos. Los cambios introducidos anualmente, el proceso de institucionalización y aceptación (sobre todo por parte de los alumnos, pero también por parte del profesor) ha sido clave para una mejora continuada que aún sigue abierta a nuevos cambios y mejoras.

7. Conclusiones: la ecología local de los recorridos de estudio e investigación

En el momento de valorar los resultados obtenidos después de las seis experimentaciones consecutivas de los talleres de modelización matemática en IQS-ADE, partiremos de las cuestiones y conjeturas avanzadas en el primer capítulo de esta memoria en relación a la función y viabilidad de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización en un primer curso universitario de ciencias económicas o empresariales. Recordemos que las cuestiones planteadas al respecto se formulaban en los términos siguientes:

Q_4: *¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan que el estudio universitario de las matemáticas en las instituciones responsables de la enseñanza de las ciencias económicas y empresariales se organice en torno a la modelización matemática de sistemas económicos?*

Q_{41}: ¿Existen dispositivos didácticos capaces de posibilitar la vida normal de la modelización matemática de sistemas económicos y empresariales en las instituciones universitarias correspondientes?

Q_{42}: ¿Qué *condiciones* se deberían instaurar para que fuese posible integrar la modelización matemática de forma normalizada en los actuales sistemas de enseñanza universitarios de ciencias económicas y empresariales? En particular, ¿qué *infraestructura didáctico-matemática* se requiere para que la modelización matemática ocupe el núcleo del proceso de estudio universitario de las matemáticas en ciencias económicas y empresariales?

Q_{43}: ¿Qué *restricciones* dificultan y hasta impiden la vida de la modelización matemática de sistemas económicos en la enseñanza universitaria? ¿En qué niveles de la escala de codeterminación didáctica se sitúan estas restricciones? ¿En cuáles de estos niveles se podría actuar para atenuar o superar estas restricciones? En particular, ¿cómo incide el modelo epistemológico dominante y la relación que este propugna entre las matemáticas y las ciencias económicas y empresariales en la forma de organizar la enseñanza de la modelización matemática en las instituciones docentes universitarias? ¿De qué manera el modelo pedagógico dominante puede dificultar la vida normalizada de la modelización matemática en las instituciones docentes en cuestión?

Consideraremos a continuación las distintas conjeturas avanzadas para señalar en qué aspectos y en qué medida se han contrastado a partir de los datos obtenidos en las distintas experimentaciones.

7.1. Los REI como dispositivo didáctico para enseñar la modelización matemática

Conjetura 4.1. Los REI experimentados resultan ser un dispositivo didáctico apropiado para facilitar la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa.

Hemos mostrado que existen cuestiones empresariales «reales» o «realistas» suficientemente generativas como para servir de punto de partida de distintos REI y ser abordadas con modelos matemáticos elaborados con las herramientas de lo que constituye un primer curso universitario de matemáticas para la economía y empresa.

Además, el estudio de estas cuestiones no permite aportar respuestas definitivas de forma directa sino que requiere la elaboración de distintos modelos matemáticos que se deben contrastar empíricamente para determinar su validez y alcance, planteando nuevas cuestiones y constituyendo el punto de partida de nuevos modelos más eficaces.

Los resultados observados en los REI experimentados nos permiten afirmar que el estudio de las cuestiones generatrices conduce a llevar a cabo un verdadero trabajo de modelización matemática tal como se interpreta en la TAD. Detallaremos aquí el análisis del REI sobre previsión de ventas para mostrar en qué se concreta este trabajo de modelización, destacando la importancia que tiene *la dialéctica de los media y los medios* en el trabajo de construcción y contraste de modelos matemáticos, dialéctica que constituye uno de los principales componentes de la dinámica de los REI. Un análisis semejante aparece en el trabajo de Berta Barquero (2009) en relación al REI sobre modelos de poblaciones y en el de Cecilio Fonseca (2004) en relación al REI sobre movilidad laboral.

El proceso de asignar un modelo apropiado a un sistema dado se puede hacer directamente eligiendo un modelo previamente construido y disponible a partir de una fuente de información exterior (un «media»). De todos modos, la productividad del modelo, el hecho que permite producir nuevo conocimiento del sistema considerado, requiere un cierto grado de ajuste o adaptación al sistema. Este proceso no suele hacerse de una vez para siempre. Requiere un movimiento de ida y vuelta entre el modelo y el sistema, dentro de una dinámica propia del ensayo-error o, mejor, de la dialéctica preguntas-respuestas o, en términos de Lakatos, de conjeturas y refutaciones. El REI sobre previsión de ventas constituye a este respecto un caso ejemplar. Recordemos que parte de una situación muy sencilla: se tiene una serie temporal corta de datos sobre las ventas de una empresa en los últimos meses o trimestres y se debe proponer una previsión a corto y medio plazo. Aparecen así dos cuestiones principales: el *problema de la elección del mejor modelo* para hacer la predicción y, dentro de la comparación de modelos, el cotejo entre el *ajuste de las variaciones* y las *variaciones del ajuste*. Durante la primera parte del taller, la primera decisión a tomar fue la de fijar la *familia de funciones* que parece reproducir la dinámica observada en los datos a partir de la representación gráfica de los datos en Excel. En términos de la dialéctica de los medios y los media, el gráfico como primer modelo de la situación funciona a la vez como un *media* en la medida en que «indica» a los alumnos el tipo de función más apropiado y también como un *medio* puesto que, al representar la función elegida en el mismo gráfico que los datos puntuales, permite contrastar el grado de ajuste del modelo con los datos que modeliza. Ahora bien, para que la representación gráfica de los datos iniciales pueda funcionar como *media*, es necesario que se puedan activar los conocimientos previos de los alumnos sobre funciones elementales y, en particular, el trabajo con familias de funciones y sus respectivas gráficas realizado previamente durante las clases de teoría. La novedad del trabajo que se debe realizar aquí es elegir la familia de funciones que parece más apropiada a la dinámica observada. Una vez elegida, se buscan distintos valores para los parámetros de la función y se contrastan las posibles soluciones utilizando una hoja de cálculo y la representación gráfica tanto de los datos como de los valores de la función elegida. Son entonces estas representaciones gráficas las que funcionan como *medio* para contrastar cuál es el mejor modelo.

El problema de cómo construir un *criterio para determinar el mejor modelo* es la cuestión crucial que impulsa el proceso de estudio. El medio constituido por las gráficas de Excel deja de funcionar como un media y surge la necesidad de establecer una *medida del ajuste* que viene a enriquecer el medio inicial dado por las series de datos numéricos o su representación gráfica. La opción elegida aquí es la de calcular la suma o el promedio de las diferencias absolutas entre los datos y los valores de la función considerada. La incorporación de la función Solver de Excel –que funciona para los alumnos como una caja negra– proporciona entonces otro medio suplementario que agiliza el trabajo de búsqueda de la función que minimiza el error. Queda sin embargo pendiente el problema de la comparación entre dos funciones de distinta familia cuando los errores de cada caso no son demasiado distintos.

Una vez realizados algunos primeros ajustes con distintas *familias de funciones*, puede suceder que, en algunos casos, dos modelos distintos den lugar a errores medios similares. La existencia de un componente aleatorio en el valor del error medio hace que se plantee la necesidad de construir un *criterio suplementario para determinar cuál es el mejor modelo.* En este caso, el *medio* constituido por los valores numéricos y los gráficos tanto de las ventas como de los modelos se verá enriquecido por la introducción y el ajuste de una nueva variable: las variaciones de las ventas. La noción de derivada como aproximación de la variación será entonces el nuevo elemento del *medio* que aportará el profesor como nuevo criterio de validación del ajuste: si un modelo ajusta las ventas, entonces la derivada del modelo debería ser un buen ajuste para las variaciones de las ventas. Por ejemplo, si las ventas parecen seguir un crecimiento parabólico, se espera que las variaciones de las ventas sigan un crecimiento lineal; si el crecimiento es exponencial, que el de las variaciones también sea exponencial, etc. En este caso, el *medio* lo constituye el producto de todo el trabajo realizado en la primera parte del taller, es decir la construcción de distintos modelos para cada serie de datos. Además, y como ya hemos comentado previamente, al disponer de una calculadora simbólica que permite calcular con facilidad la expresión algebraica del valor medio $f(x + 1) - f(x)$ de una función cualquiera, se pudo incluso comparar el valor de la derivada del modelo con el de este valor medio y constatar así la aproximación mencionada. Es importante señalar que el aumento de complejidad del *medio* dificultó sin duda el desarrollo de esta segunda parte del taller por tratarse todavía de un trabajo matemático inestable para los alumnos. Pero también creemos que la situación mostraba un caso ejemplar de la funcionalidad de la derivada como aproximación simple de la variación media de una función.

7.2. Viabilidad de los REI en la enseñanza universitaria

Conjetura 4.2. Viabilidad de los recorridos de estudio e investigación (REI) en las instituciones universitarias de enseñanza de ciencias económicas y empresariales

Recordemos que esta conjetura se dividía en las dos hipótesis siguientes:

C4.2.1. Para integrar la modelización matemática como actividad normalizada en los estudios universitarios mediante los REI, estos no deben organizarse de forma aislada a las asignaturas o materiales que conforman los estudios. Cuando los REI constituyen el núcleo en torno al cual se organizan los contenidos y actividades de las materias o asignaturas, incluyendo el proceso de evaluación de las mismas, entonces su funcionamiento como dispositivo normalizado está más garantizado y su «rendimiento» en términos de integración de la modelización matemática tiene un mayor alcance.

En el caso de estudio considerado, y a diferencia de la investigación de Barquero (2009), los REI experimentados en la asignatura de Matemáticas para la economía y empresa de IQS-ADE, se han articulado totalmente a la organización didáctica global de la asignatura. Desde las primeras sesiones de cada taller, los contenidos de las clases de teoría y problemas aparecen siempre relacionados con el tipo de cuestiones abordadas en los REI de manera que estos constituyen el núcleo en torno al cual gira el programa. La mejor prueba de ello es el hecho que el trabajo realizado en los talleres constituya un 30% de la evaluación final de la asignatura y, además, que en cada examen trimestral uno de los tres problemas propuestos tenga una relación directa con las cuestiones abordadas en el REI. Dependiendo de los trimestres y de las cuestiones abordadas en cada REI, en algunos casos los REI provocan necesidades que se colman posteriormente en las clases de teoría y problemas (caso de la derivada y de la diagonalización de matrices) y, en otros casos, aportan cuestiones que contribuyen a dar a los contenidos de clase sus razones de ser (caso de las familias de funciones y el problema de los ajustes).

Esta integración ha requerido un importante trabajo de ingeniería matemática para la creación del material del curso organizando los contenidos en torno a tipos de problemas y no de conceptos matemáticos. Se ha requerido además la elaboración de discursos tecnológico-teóricos totalmente nuevos para adaptarlos a las nuevas organizaciones matemáticas enseñadas. En realidad, la presencia de la matemática como herramienta de modelización es general en todas las actividades matemáticas de la asignatura, y no vive únicamente en el taller. Dicho en otras palabras, no se diseña un taller para hacer vivir actividades distintas a las habituales de clase. El taller aparece como un desarrollo natural y, en cierta forma, como el motor de las clases de teoría y problemas. En este sentido, su pervivencia a largo plazo resulta mucho más segura que si funcionara como un mero apéndice de los demás dispositivos didácticos.

A lo largo de los seis cursos que han durado las experimentaciones, la implementación de los REI en los talleres de modelización matemática se ha ido afianzando como dispositivo didáctico normalizado. A pesar de las dificultades iniciales previsibles para la instauración del nuevo contrato didáctico que rige la realización de los REI y que los profesores a lo largo de los cursos han aprendido a gestionar cada vez mejor, se ha llegado a una situación en la que la asignatura de matemáticas de primer curso ya no puede concebirse sin el taller de modelización asociado: las clases de teoría y problemas se nutren de las problemáticas y necesidades suscitadas en el taller y, en algunas ocasiones, es el taller el que rige el avance del tiempo didáctico, subordinando así la introducción de las nuevas praxeologías matemáticas a las nuevas cuestiones que aparecen fruto del trabajo de modelización.

7.3. Cambios en los contratos didáctico y pedagógico dominantes en la universidad

La segunda conjetura relativa a la viabilidad de los REI quedaba formulada en los términos siguientes:

Conjetura 4.2.2. Para que los REI puedan ser viables como dispositivo didáctico normalizado, se requieren cambios importantes en los contratos didácticos y pedagógicos universitarios tradicionales. Es posible actualmente introducir nuevas técnicas didácticas que favorezcan estos cambios al facilitar que alumnos y profesores asuman nuevas responsabilidades en la gestión del proceso de estudio, así como nuevas formas de compartir estas responsabilidades.

7.3.1. La clase como consultoría matemática

La principal estrategia didáctica para instaurar el nuevo contrato didáctico que debe regir en los talleres de modelización matemática que sirven de sede a los REI, consiste en simular una situación profesional real: la de una consultoría de matemáticas que recibe encargos por parte de una o varias empresas durante el curso. Se estable así una distinción entre las clases de teoría y problemas basadas en un funcionamiento más «académico» y el taller de modelización donde se lleva a cabo un trabajo «profesional». La distribución de los alumnos en grupos de consultores y las puestas en común bajo la supervisión del profesor, que actúa como líder o responsable de la consultoría, también se alimenta de los contratos profesionales propios de este tipo de empresa.

En esta situación, el realismo de la cuestión generatriz del REI es muy importante para la puesta en marcha del nuevo contrato, como lo es también el hecho que el profesor no disponga de una respuesta previa a la cuestión formulada —hecho bastante habitual dado el grado de «apertura» de estas cuestiones—. Detalles como ponerle un nombre a la empresa, asignarle un logo o, en algunas ocasiones, hablar de empresas reales (Bicing, Desigual, etc.) constituyen puntos de apoyo nada despreciables. En los casos en que, por los motivos que sean, sale a relucir el carácter artificial de algún dato o situación, también hay que saber indicar a los estudiantes el juego de simulación, sin que ello le quite necesariamente fuerza a la situación. De ahí que hablemos más de problemas «realistas» y no «reales».

Los estudiantes parecen muy sensibles a este tipo de cambio, que genera gran aceptación, como muestran sus respuestas en términos de «otras matemáticas», «entendemos para qué sirven las cosas», etc.

7.3.2. Dispositivos para favorecer el nuevo reparto de responsabilidades

Apoyándose en el contrato profesional anteriormente citado, el profesor debe saber renunciar a un gran número de «gestos profesionales» que está acostumbrado a asumir sin ser casi consciente de ello: planificación temporal del trabajo, gestión de las puestas en común, validación de las respuestas, formulación de las nuevas cuestiones, etc. Es para ello necesaria la creación de nuevos dispositivos didácticos, como el *secretario* de la sesión para realizar el acta, la presentación de *informes parciales* con nuevas cuestiones a tratar y propuestas para el trabajo futuro, las *presentaciones orales* en clase, etc. Es también fundamental que el profesor sea consciente de su papel de guía y, sobre todo, de la importancia de mantenerse al margen de la resolución de muchas cuestiones o situaciones problemática sin aportar directamente las herramientas matemáticas que permitirían resolverlas. La insistencia de los estudiantes en destacar las «pocas explicaciones» que da siempre la profesora es una muestra del éxito alcanzado al respecto. También se observa cómo el funcionamiento de muchos de estos dispositivos requiere su tiempo de aprendizaje y adaptación. Así los estudiantes destacan muchas dificultades en el primer trimestre que desaparecen al avanzar el curso: redactado de los informes, presentaciones orales, gestión del trabajo en grupo, etc.

7.4. Restricciones a los REI en las instituciones universitarias

La conjetura relativa a las restricciones institucionales que pesan sobre los REI quedaba dividida en tres subconjeturas, según el nivel de la escala de codeterminación didáctica considerada en cada caso.

7.4.1. Restricciones al nivel de la disciplina

Conjetura 4.3.1. Si nos situamos en el nivel de la disciplina enseñada, en este caso las matemáticas, la principal restricción a la implementación de los REI la constituye la ausencia de una infraestructura matemática apropiada y, en particular, la preponderancia de la organización conceptualista de la matemática enseñada, que pone más énfasis en las nociones y lógica interna de las matemáticas que en los problemas que estas permiten resolver.

Ya hemos señalado en el Capítulo 2 de esta memoria la gran uniformidad y, en cierto sentido, pobreza transpositiva de los materiales didácticos más comunes para la enseñanza universitaria de las matemáticas para la economía y empresa. Esta carencia afecta por supuesto en gran medida las posibilidades de organizar diferentes REI y recorridos lo suficientemente variados como para no reproducir de forma regular procesos de estudio que el profesor ya habría vivido con otros estudiantes. Es evidente que, en el caso que nos ocupa, la elaboración de materiales que constituyen una primera infraestructura matemático-didáctica (local) ha sido un requisito importante al diseño, implementación y desarrollo del los REI a los largo de los seis cursos académicos. Es prácticamente imposible que el trabajo, aquí asumido por todo un grupo de investigación y con el soporte de distintos proyectos a nivel local e internacional, sea realizado por un único profesor o equipo de profesores (por lo menos en el estado actual de la profesión de profesor universitario).

Para que la enseñanza de las matemáticas en las carreras de economía y empresa se pueda organizar en torno a los REI, se necesita un repertorio variado y variable de cuestiones generatrices, mapas de posibles recorridos, desarrollos tecnológico-teóricos apropiados y conexiones entre las distintas materias de los estudios (micro y macro economía, finanzas, gestión de operaciones, etc.) del que carecemos por completo actualmente. Estamos aquí ante un caso claro de necesidad de articular las necesidades docentes con la investigación didáctica y con el desarrollo del conocimiento matemático y de las disciplinas afines a la economía y empresa, no en el sentido de creación de nuevos conocimientos sino en el de reorganización y creación de conexiones entre los mismos.

7.4.2. Restricciones al nivel de la organización didáctica y pedagógica universitaria

Conjetura 4.3.2. En el nivel de la organización didáctica universitaria tradicional, los modelos didácticos dominantes basados en el «teoricismo» y el «tecnicismo» dificultan situar las cuestiones problemáticas generadoras de los REI en el núcleo del programa de estudios, especialmente aquellas que surgen en el ámbito de la economía y empresa.

Hemos visto en el Capítulo 2 de esta memoria que la inmensa mayoría de programas universitarios de asignaturas de matemáticas para la economía y empresa se organizan en torno a nociones o elementos teóricos, rara vez en torno a grandes métodos o tipos de técnicas matemáticas y nunca alrededor de grandes tipos de cuestiones. Para amoldarse a la visibilidad y legitimidad institucionales, el propio programa de la asignatura de Matemáticas de IQS-ADE, presenta una estructura relativamente próxima a la tradicional, a pesar de que los contenidos se organicen mucho más en grandes tipos de problemas que siguiendo la construcción teórica de los conceptos. Esta situación dificulta que los talleres de modelización puedan funcionar con la suficiente legitimidad si no se es capaz de asociarlos con los contenidos tradicionales del programa. Otro rasgo que muestra claramente la fuerza de esta restricción (que emerge en el nivel de la organización didáctica) viene dado por las respuestas que dan los alumnos al preguntarles por el contenido «teórico» y «práctico» del taller de modelización. O cuando, en la gestión de los talleres, tanto profesores como alumnos tienen una sensación de que «el tiempo no avanza» y, por lo tanto, que se está durante mucho tiempo realizando un mismo tipo de actividad.

Encontramos en las respuestas de los alumnos a los cuestionarios otros elementos que muestran hasta qué punto la nueva organización didáctica de los talleres rompe con su experiencia habitual en el estudio de las matemáticas: por ejemplo cuando consideran que el taller es «excesivamente práctico», que hay «poca teoría» o que tiene «poca relación con los contenidos de la asignatura», que el profesor los «guía poco», les da «poca información sobre lo que tienen que hacer» y «pocas explicaciones». En definitiva, los alumnos no entienden cómo es posible que les hagan «resolver problemas sin saber los pasos que hay que hacer ni qué sentido tiene». Es toda la organización didáctica tradicional la que se expresa aquí en boca de los alumnos, marcando especialmente aquellos aspectos nuevos que introducen los REI como actividad de estudio de las matemáticas y cuya implementación no puede darse por sentada.

Conjetura 4.3.3. Otra restricción importante a este nivel es la ausencia de dispositivos didácticos tradicionales en los que se fomenten aspectos de la actividad matemática esenciales en los REI: trabajo en grupo, formulación de problemas, redacción de informes, presentación oral de resultados, búsqueda de información, contraste empírico de conjeturas, planificación del trabajo, resolución de problemas durante un periodo largo de tiempo (semanas o meses).

No creemos que sea muy exagerado afirmar que las organizaciones didácticas universitarias actuales son bastante parcas en variedad de dispositivos para la gestión del estudio de las matemáticas. Y esta pobreza de dispositivos se hace especialmente visible cuando se pretende llevar a cabo un estudio, durante largos periodos de tiempo, de cuestiones problemáticas y en grupos pequeños de estudiantes. La gestión y desarrollo de los REI no puede por lo tanto basarse en dispositivos y gestos didácticos que los alumnos estén acostumbrados a realizar y requiere por ello la adaptación a muchos aspectos nuevos de trabajo que va, generalmente, en detrimento de la viabilidad y evolución positiva de los REI.

Este aspecto sale a relucir en las respuestas de los alumnos a los cuestionarios y entrevistas: dificultad del taller, cantidad de trabajo requerido, inconveniente de tener que quedar fuera de clase para el trabajo en grupo, sesiones cortas para preguntar dudas, problemas en la gestión del trabajo en grupo, redacción de los informes, «ser secretario», etc.

Cabe comentar al respecto que las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior y el énfasis que se pone en la adquisición de competencias respecto al «aprendizaje de contenidos» puede constituir un condicionante muy favorable para la implementación de los REI en los estudios universitarios, tal como han comentado Serrano y Bosch en un estudio reciente (Serrano & Bosch 2011). Indican, por ejemplo, la importancia del trabajo en el taller para el desarrollo de competencias genéricas como el análisis-síntesis, la comunicación oral y escrita, el uso de las TIC, la búsqueda de información y la gestión del trabajo en grupo.

7.4.4. Restricciones al nivel de la organización pedagógica universitaria tradicional

Conjetura 4.3.4. En el nivel de la organización pedagógica universitaria, el paradigma de la «visita de las obras» (en contraposición al del «cuestionamiento del mundo») junto con la epistemología dominante del «aplicacionismo» refuerzan la estructura estándar de los programas como una secuencia de temas para estudiar y dificultan su evolución hacia un conjunto de cuestiones para responder.

Para mostrar las restricciones que, provenientes de la *organización pedagógica universitaria tradicional*, dificultan en el caso que estamos estudiando que las matemáticas se organicen en torno a la modelización matemática de sistemas económicos, utilizaremos los datos proporcionados en el análisis a posteriori de la implementación de los REI, junto a los datos empíricos obtenidos en el capítulo 2 de esta memoria. Veremos así en qué forma algunos de los rasgos del modelo docente dominante junto al aplicacionismo en el que se sustenta, se contraponen en muchos aspectos al modelo docente propuesto por la TAD representado por los REI.

El modelo docente imperante en la enseñanza universitaria está íntimamente ligado a la pedagogía «monumentalista» que Chevallard (2009) describe en los términos siguientes:

> Une pédagogie dans laquelle on attend seulement du professeur qu'il *expose* aux élèves la matière à étudier suppose ainsi une infrastructure dont l'essentiel se réduit à des «leçons», c'est-à-dire des exposés sur les différents thèmes et sujets prévus par le programme. Or même la création de ces exposés ne va pas de soi. Elle est facilitée lorsque, pour l'essentiel, elle reprend de façon à peine transposée un « texte du savoir » élaboré dans la sphère (mathématique) savante[40].

En base a los datos empíricos mencionados describiremos a continuación algunos rasgos de la pedagogía actualmente dominante que refuerzan la estructura de los programas como una secuencia de temas para estudiar y dificultan su evolución hacia un conjunto de cuestiones para responder.

[40] *Ibid.*, p. 13

(a) En la organización pedagógica universitaria tradicional y, en particular, en los estudios de economía y empresa, el objetivo de los procesos de enseñanza se centra en un *contenido establecido de antemano* y, en consecuencia, las cuestiones problemáticas que aparecen ocupan una posición subsidiaria en los procesos de estudio y tienden a desaparecer.

La pedagogía monumentalista parte siempre de un objetivo de enseñanza *fijado de antemano* y formulado en términos de *contenidos del saber* que se debe enseñar. En estos casos, y dadas las limitaciones temporales de todo proceso de estudio, se tiende a buscar el camino más corto y rápido que conduce, en la mayoría de ocasiones, a que los procesos de enseñanza y aprendizaje se reduzcan a la *introducción de los contenidos objetos de estudio*. Esto significa que la pedagogía monumentalista ante cualquier cuestión que se pueda plantear, elimina prácticamente las respuestas provisionales intermedias (puesto que la «buena respuesta» está predeterminada). Queda así patente hasta qué punto esta característica de la pedagogía monumentalista limita la vida institucional de los procesos de modelización matemática (en los sistemas de enseñanza que participan de dicho modelo docente).

(b) La pedagogía monumentalista *no cuestiona la pertinencia del saber*, sólo se contrasta a lo sumo su coherencia lógica. No hay contraste con un *medio* salvo en el caso de la demostración formal que sirve ante todo para probar la coherencia interna de las respuestas introducidas. Incluso en este caso, el recurso al *medio* de la prueba formal es algo que suele recaer bajo la responsabilidad exclusiva del profesor. Se destaca la escasez de diferentes tipos de *medios* para poner a prueba y «testar» la validez de estas respuestas. El hábito de la tradición escolar muestra una escasez documental que termina por favorecer el trabajo con *medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio*. Esta tendencia refuerza una estructura del programa en términos de temas a estudiar y dificulta su evolución hacia un conjunto de cuestiones abiertas a responder.

(c) La pedagogía dominante preconiza que la enseñanza debe ser cada vez más *individualizada* y *personalizada* para tomar en consideración la exigencia creciente de la *atención a la diversidad* de manera que el profesor debe individualizar los objetivos de los contenidos y hasta el método de enseñanza. Se da por supuesto que son las diferencias individuales las que determinan principalmente el éxito o el fracaso del proceso didáctico, olvidando que todo proceso de estudio se desarrolla siempre en el seno de una *comunidad* (aunque esta pueda ser virtual) y que la organización de la enseñanza debe basarse, esencialmente, en las *características compartidas* por los estudiantes, como alumnos, más que en las singularidades de cada individuo como persona. Esta concepción individualista refuerza, de nuevo, un proceso didáctico basado en el estudio de temas puesto que del estudio de cuestiones abiertas debe responsabilizarse una comunidad.

(d) La pedagogía monumentalista *no cuestiona los contenidos* de la enseñanza (matemáticos, económicos u otros cualesquiera) puesto que los supone *transparentes* y *no problemáticos*. Dado que el carácter *problemático*, *provisional* y *parcial* de las sucesivas respuestas que pueden aportarse a una cuestión científica constituye el «nervio» de todo proceso de modelización matemática (en el sentido que la TAD la conceptualiza) este rasgo del modelo docente imperante, en la medida que se está incorporando al modelo docente dominante en las instituciones responsables de la enseñanza universitaria de las matemáticas en economía y empresa, constituye un impedimento para la vida de la modelización matemática en dichas instituciones.

Resulta, en definitiva, que la implantación y el desarrollo generalizado de los REI en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no sólo la epistemología «aplicacionista» imperante, sino también las restricciones que impone la *ideología pedagógica dominante* en el sistema de enseñanza universitaria. Para ello será necesaria la introducción de nuevos dispositivos y «gestos» didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual.

CAPÍTULO 5. Aportaciones y problemas abiertos

1. La problemática inicial: condiciones de posibilidad del cambio didáctico

En la introducción de esta memoria empezábamos planteando algunos aspectos del *problema docente* de la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios de economía y empresa. Aunque el planteamiento se hacía a título personal, como expresión de la perplejidad de una joven profesora que acababa de incorporarse a la docencia universitaria, es obvio que dicha perplejidad trasluce y expresa un conjunto de cuestiones que son problemáticas para la profesión docente en su conjunto y que están en el origen del *problema didáctico* que hemos tratado en esta memoria. Llegados a este punto, podemos retomar dichas cuestiones enfatizando que en todas ellas está presente, de manera más o menos latente, la propuesta de la necesidad de un *cambio didáctico*:

> ¿Por qué las asignaturas de matemáticas, que se sitúan en los primeros cursos de los estudios universitarios de economía y empresa y que supuestamente constituyen una base para el estudio de otras materias, son abandonadas por muchos de los estudiantes y acaban convirtiéndose en la «última asignatura de la carrera»? ¿Cómo se podría cambiar esta situación anómala? ¿Cómo se explica que los estudiantes puedan prescindir completamente de la formación matemática a lo largo de sus estudios de economía y empresa? ¿Quién huye de las matemáticas, los estudiantes o las instituciones responsables de diseñar los programas de estos estudios? ¿Cómo se podría conseguir una enseñanza de las matemáticas *funcional*, en la que se pusiera de manifiesto la utilidad y el sentido del uso de las matemáticas para abordar problemas que surgen en el ámbito de la economía y empresa?

Una reacción muy extendida ante esta problemática consiste en suponer que sería posible cambiar las cosas mediante una acción directa y voluntaria sobre algunos

elementos del sistema de enseñanza que están al alcance del trabajo del profesor. Se supone que para provocar un cambio en la dirección deseada bastaría con mejorar la *formación de los profesores* y *cambiar los programas de estudio* para integrar de manera adecuada las matemáticas en la formación de los futuros profesionales de economía y empresa.
Esta forma espontánea de interpretar los mecanismos del cambio didáctico se apoya en una ideología cultural según la cual las regularidades que rigen el desarrollo de la realidad social y antropológica (entre las que se sitúa el hecho educativo), si es que existen, son de naturaleza absolutamente diferentes de las que rigen la evolución de la realidad natural. Así, mientras que culturalmente se acepta que la realidad natural está regida por leyes, la realidad social y antropológica es considerada como el ámbito de las decisiones «voluntarias» y de la «libertad» humana.

Este prejuicio, junto a una *concepción individualista* de la enseñanza, son los principales fundamentos ideológicos sobre los que descansa, en el ámbito de la enseñanza, el convencimiento de que el profesor, incluso individualmente, tiene plena libertad para elegir los dispositivos didácticos con los que organizará el proceso de enseñanza y, en gran medida, para seleccionar y estructurar los contenidos de la misma. Esta posición cultural ante el cambio didáctico no es ajena al mundo de la investigación didáctica. En el caso de la enseñanza de las matemáticas se ha tendido tradicionalmente a considerar que el cambio del sistema educativo depende principalmente del libre albedrío de los protagonistas de dicho sistema, poniendo un énfasis especial en la formación del profesorado como eje principal de dicho cambio. Sin embargo, en las dos últimas décadas estamos asistiendo a lo que la investigadora francesa Michèle Artigue denomina la «consolidación de los enfoques socio-culturales» entre los que cabe mencionar la etnomatemática, la educación matemática crítica, la socioepistemología y, especialmente, la teoría antropológica de lo didáctico (Artigue 2011). Se trata de enfoques que, con características e intereses muy diferenciados, plantean el problema de las condiciones del cambio didáctico en un universo más amplio y complejo.

En el caso particular de la TAD, al enfatizar la dimensión institucional y sistémica de la realidad antropológica, se empieza por situar el problema de la formación del profesorado en el ámbito de un problema didáctico mucho más extenso que añade como principales motores del cambio la investigación en didáctica y el desarrollo del sistema educativo:

> L'insistance sur la seule formation des professeurs (et des autres personnels) oblitère ainsi le rôle cardinal, d'une part de la *recherche* (en didactique), d'autre part du *système* (d'instruction publique) dans la marche générale des choses. Et c'est, par contraste, dans la perspective dessinée par ces deux « piliers » qu'il faut poser le problème de la formation des professeurs. (Chevallard 2000, p. 98)

En consecuencia, la TAD sitúa el problema de las condiciones del cambio didáctico en un ámbito alejado de las concepciones individualistas y voluntaristas de la enseñanza. La TAD postula que el cambio didáctico será una consecuencia del desarrollo del «saber didáctico» —transferible, objetivo y técnico—, apostando por un progreso del sistema de enseñanza, esto es, de las «técnicas didácticas» y de las «tecnologías didácticas», que pueda sustentarse en un cuerpo teórico fundado científicamente. Se postula además que en el desarrollo de este saber, ocupa un lugar esencial el estudio de las *condiciones* que se requieren para que sea posible un cambio didáctico en una dirección determinada y las *restricciones* que lo obstaculizan, dificultan e incluso lo impiden: es lo que se designa como el estudio de la *ecología didáctica* de los sistemas de enseñanza. De hecho, la TAD define la didáctica como la ciencia de las condiciones y las restricciones de la difusión de los conocimientos en la sociedad.

2. Aportaciones en relación a la ecología de la modelización matemática en los estudios de ciencias económicas y empresariales

Como consecuencia de lo dicho en el apartado anterior, las aportaciones de esta memoria deberán ser interpretadas principalmente como aportaciones al *problema de la ecología del cambio didáctico* (en el ámbito matemático e institucional que hemos considerado). Es entonces importante subrayar claramente que esta memoria no pretende *simplemente ni prioritariamente* aportar una nueva forma de enseñar las matemáticas en los estudios universitarios de economía y empresa. Tampoco pretende *únicamente* proponer una organización de la enseñanza de las matemáticas que permita integrar la modelización matemática en el corazón de dichos estudios. Es cierto que hemos hecho una propuesta didáctica que cumple esas condiciones y que propugna un cambio didáctico profundo del papel de las matemáticas en la institución docente que hemos tomado en consideración. Además, hemos experimentado, modificado sucesivamente y evaluado dicha propuesta y podemos considerar que, como propuesta viable, constituye una aportación al desarrollo de la enseñanza de las matemáticas en los estudios de economía y empresa. Pero las aportaciones que queremos subrayar aquí son las que han servido para *fundamentar y para diseñar dicha propuesta*, esto es, las que se han obtenido a partir del análisis previo de las *condiciones* que deben satisfacer las organizaciones didácticas para hacer posible la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa y, en particular, del análisis de las *restricciones* que dificultan dicha integración en los actuales sistemas de enseñanza. Se trata, en definitiva, de las aportaciones en relación a la *dimensión ecológica* del problema de la modelización matemática (Gascón 2011) en el ámbito de la enseñanza universitaria de las ciencias económicas y empresariales.

En efecto, después de los resultados obtenidos en las tesis doctorales de Cecilio Fonseca (2004) y Berta Barquero (2009), citados ampliamente en esta memoria, las cuestiones iniciales que nos planteábamos en esta investigación tomaron un cariz un poco diferente para centrarse en el papel de la modelización matemática y en su ecología institucional:

> ¿Cómo es posible que la modelización matemática de sistemas económicos esté prácticamente ausente o, en el mejor de los casos, juegue un papel absolutamente secundario y accesorio en los estudios universitarios de economía y empresa? ¿Cómo se podría modificar esta situación?
> Los cursos «cero», ¿sirven realmente para paliar las discontinuidades matemáticas entre el bachillerato y la Universidad? Dichos cursos, ¿qué diagnóstico proponen implícitamente sobre las carencias de la enseñanza Secundaria? ¿Cómo pretenden remediar dichas carencias? ¿Qué cambios matemático-didácticos proponen? ¿Hasta qué punto potencian o facilitan la integración de la modelización matemática en los estudios de ciencias económicas y empresariales?

En lo que sigue sintetizaremos muy brevemente dichas aportaciones partiendo de las cuestiones y conjeturas que hemos utilizado en el primer capítulo de esta memoria para formular nuestro problema de investigación y enfatizando las cuestiones que forman parte de la citada dimensión ecológica del problema tratado.

2.1. El papel de la modelización matemática en las instituciones actuales responsables de la enseñanza de las ciencias económicas y empresariales

Partimos del principio que las matemáticas son una herramienta de modelización de sistemas extra e intra-matemáticos y que esta función instrumental es lo que les da sentido en la enseñanza. Sin embargo, esta función está muy poco presente en los sistemas actuales de enseñanza de las matemáticas, en los distintos niveles educativos en general y en los estudios universitarios en particular.

Antes de proponer cambios didácticos controlados del papel que juega la modelización matemática en las instituciones docentes, es necesario indagar cuál ha sido el resultado producido por *la transposición didáctica* al actuar sobre la actividad de modelización matemática, esto es, cuál es el estado actual de las cosas en lo que se refiere al papel de la modelización matemática en las instituciones de enseñanza de las ciencias económicas y empresariales. Se trata de una cuestión que no se suele plantear cuando la problemática didáctica se mantiene muy próxima a la *problemática docente* puesto que el profesor, *como tal profesor,* tiene que negar la existencia de los procesos transpositivos para preservar la legitimidad de la matemática enseñada, manteniendo así la ilusión de la existencia de *un único saber matemático* que, naturalmente, coincidiría con el que se enseña en las instituciones docentes (Chevallard 1985/1991).

Con el objetivo de empezar a indagar los efectos de la transposición didáctica sobre el papel que juega actualmente la modelización matemática en las instituciones que estamos considerando, hemos empezado a poner en práctica una metodología muy ligada a lo que Chevallard (2011) designó como el *análisis clínico de la didáctica* y que engloba lo que suele denominarse *ingeniería didáctica.* Dicho análisis incluye la observación y la descripción detallada de las praxeologías matemáticas y didácticas efectivamente existentes en determinadas instituciones, utilizando como referencia determinados modelos epistemológicos y didácticos.

El recorte institucional que hemos utilizado para enmarcar esta problemática engloba las instituciones docentes responsables del bachillerato y de la enseñanza universitaria de economía y empresa. Por lo tanto, la base empírica que hemos tomado en consideración abarca desde los programas oficiales, los libros de texto y de consulta y los exámenes de los nuevos grados en el ámbito de la economía y la empresa de una amplia muestra de las universidades españolas, hasta la historia de la formación económica en la enseñanza secundaria española, los programas de bachillerato, los libros de texto de secundaria y los exámenes de acceso a la Universidad.

En este apartado abordaremos la cuestión central:

***¿Cuál es el estado actual de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa*?**

que podemos declinar en el siguiente conjunto de cuestiones derivadas:

¿Cómo ha evolucionado históricamente el papel de las matemáticas (y, muy especialmente, la función de la modelización matemática) en las instituciones universitarias responsables de los estudios de economía y empresa? ¿Cómo se relaciona el papel actual de la modelización matemática en dichas instituciones docentes con el tipo de matemáticas que se estudian en el bachillerato de ciencias sociales? ¿Cómo se considera en dichas instituciones (cómo se describe y cómo se interpreta por los sujetos de la misma) la modelización matemática y su relación con la economía y la empresa? ¿Cuál es, en definitiva, la forma de interpretar la relación entre las matemáticas y la economía y empresa en las instituciones universitarias de enseñanza correspondientes?

Podemos sintetizar las principales aportaciones de nuestra investigación relativas a estas cuestiones en los puntos siguientes:

(1) En la enseñanza universitaria española de las matemáticas para la economía y empresa (y de manera bastante análoga al caso de las ciencias experimentales), prevalece una organización de los contenidos matemáticos que sigue una lógica matemática de *construcción de conceptos* y no de *construcción de modelos.* Dado que esta organización sitúa las nociones y teoremas como origen de la actividad matemática, tiende a construir tipos de problemas muy «aislados» y «cerrados». Los problemas que surgen o podrían surgir en el ámbito de la economía y empresa se utilizan para *ejemplificar* el uso de las definiciones y teoremas, delimitando al mismo tiempo el ámbito de la aplicación. Casi siempre aparecen al final del proceso de estudio, como una consecuencia de los contenidos de cada tema, una *aplicación* que les da sentido y muestra su funcionalidad.

(2) El trabajo transpositivo se ha limitado a *retomar una organización ya elaborada por la matemática sabia* que prevalece en la mayoría de estudios universitarios de las ciencias experimentales y añadir algunas aplicaciones a modo de «ejemplos motivadores» al final del capítulo, sin producirse una reconstrucción específica de los contenidos matemáticos a enseñar a partir de las necesidades que se plantean en los estudios de economía y empresa. Existe algún ejemplo de trabajo transpositivo en esta dirección, como el libro de Chiang (2006), pero su difusión en la enseñanza es extremadamente limitada.

(3) La lógica del desarrollo matemático sabio acaba prevaleciendo sobre la lógica del desarrollo de los sistemas económicos y empresariales y, en consecuencia, la *problemática de la modelización matemática está prácticamente ausente*. Las matemáticas, lejos de considerarse como una herramienta de modelización de los sistemas económicos y empresariales, se ven relegadas en las citadas instituciones docentes a un papel secundario que permite, a lo sumo, precisar y cuantificar algunos aspectos de los fenómenos económicos.

(4) En el caso de los estudios de bachillerato y, más específicamente, en las «*Matemáticas para las ciencias sociales*» aparece el mismo fenómeno transpositivo, hasta el punto que la asignatura de matemáticas específica de la modalidad de ciencias sociales ha acabado siendo prácticamente una versión reducida y simplificada de su análoga para la modalidad de ciencias y tecnología, cuyos contenidos parecen paradójicamente más afines a los de las asignaturas de matemáticas de las carreras de economía y empresa.

(5) En las instituciones escolares (tanto en el bachillerato de la modalidad de ciencias sociales como en la enseñanza universitaria de economía y empresa) se considera que las matemáticas no son de ninguna manera *constitutivas del conocimiento económico-empresarial.* Las matemáticas, una vez construidas, se «aplican» a las ciencias económicas y empresariales sin «contaminarse» por ellas y sin modificar la problemática económico-empresarial a cuyo estudio contribuyen. La actividad de modelización matemática se interpreta así como una mera «aplicación» de conocimientos matemáticos previamente construidos y, en los casos más extremos, se confunde la modelización matemática con la construcción de sistemas económicos artificiales para que se ajusten a la utilización de las herramientas matemáticas que se quieren aplicar. Se constata así la vigencia del *aplicacionismo* (Barquero 2009) como forma dominante de interpretar la relación entre las matemáticas y la economía y empresa.

(6) La relativa «universalidad» de estos resultados en el ámbito empírico que hemos tomado en consideración refuerza nuestra hipótesis que las fuertes restricciones que dificultan y prácticamente impiden articular la enseñanza de las matemáticas en torno a la modelización matemática de sistemas económico-empresariales, *no podrán ser eliminadas de manera puramente voluntarista*. Parece obvio que se requerirá un mayor conocimiento de los mecanismos que están en el origen de dichas restricciones, del nivel de codeterminación didáctica en el que surgen y de los instrumentos y dispositivos que se requieren para convertirlos en condiciones modificables.

El *movimiento post-autista* constituye un síntoma muy interesante de la insuficiencia del voluntarismo para cambiar las cosas en una dirección determinada incluso en el caso en que, como sucede en el manifiesto de dicho movimiento, se perciba con bastante claridad el sin sentido del *uso descontrolado de la formalización matemática* en algunos estudios universitarios de economía. Esta constatación no permite por sí sola proponer criterios fundados para decidir cuál sería un uso «adecuado» de las matemáticas en economía ni, mucho menos, para diseñar el tipo de dispositivos didácticos que permitirían cambiar las cosas en la dirección de un uso funcional de las matemáticas en la enseñanza de las ciencias económicas y empresariales.

2.2. El problema de la ecología de la modelización matemática de sistemas económicos en la enseñanza universitaria

Una vez constatada la ausencia de una enseñanza universitaria que otorgue un papel principal a la modelización matemática de sistemas económicos, surge la cuestión de la *ecología* de dicha enseñanza, es decir de las condiciones que se requieren y las restricciones que dificultan llevarla a cabo de forma normalizada en la universidad actual. Para responderla a esta cuestión es importante tener en cuenta la necesidad de *priorizar y jerarquizar las restricciones* que tomaremos en consideración puesto que no todas tienen la misma importancia ni la misma relevancia. Así, puede suceder que una restricción concreta sea tan decisiva que anule o convierta en prácticamente irrelevantes a las restantes.

Las investigaciones relativas a la problemática ecológica han puesto de manifiesto que las *restricciones* que determinan las características de las praxeologías institucionales (ya sean praxeologías matemáticas, didácticas o de cualquier otro tipo) son, en general, independientes de la voluntad de los sujetos de las mismas. Lo anterior no significa que las restricciones sean inamovibles ni que los sujetos no tengan responsabilidad alguna en lo que se refiere a la trasformación de las praxeologías. Siempre existen restricciones que parecen inaccesibles desde ciertas posiciones institucionales (como, por ejemplo, desde la posición de «profesor» o de «alumno») y pueden serlo desde otras (por ejemplo la de «director de un centro educativo» o «colectivo académico»), convirtiéndose así en una *condición* para esta posición.

El primer ámbito institucional que hemos tomado en consideración en este estudio ecológico incluye los cursos «cero» o cursos propedéuticos de matemáticas que organizan las diferentes universidades españolas por considerarlos la respuesta institucional espontánea al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad y, por lo tanto, un posible factor de cambio en el papel que puede jugar la modelización matemática en el estudio de las ciencias económicas y empresariales en los primeros cursos universitarios. En segundo lugar, y como núcleo principal del ámbito institucional considerado, hemos tomado los propios cursos universitarios de matemáticas para la economía y la empresa. En ambos casos (cursos propedéuticos y cursos universitarios) hemos empezado analizando «cómo son las cosas» actualmente para proponer, a continuación, modificaciones en una dirección determinada, esto es, para proponer una nueva forma de enseñar las matemáticas en los estudios universitarios de economía y empresa a fin de analizar su viabilidad, las condiciones que se requieren para implementarla y, sobre todo, las restricciones que su implementación pone de manifiesto.

La base empírica considerada en lo que respecta a los cursos propedéuticos abarca los programas de cursos «cero» de bastantes universidades españolas, tanto de ciencias económicas como de ámbitos estrictamente científicos (biología, geología, química, etc.); entrevistas a profesores responsables de la docencia de dichos cursos y materiales utilizados tanto por los profesores como por los alumnos y la observación detallada de dos de estos cursos (Serrano 2007). En una segunda fase, después que el sistema universitario español estuviese integrado en el Espacio Europeo de Educación Superior, hemos vuelto a analizar los programas de cursos «cero» ofrecidos en muchas Universidades españolas, esta vez restringiéndolo al ámbito económico. Forma parte de este primer bloque de material empírico, el diseño, experimentación y evaluación de los cursos propedéuticos sustentados en la TAD (praxeologías matemáticas reconstruidas, modelo epistemológico de referencia, datos obtenidos del análisis clínico de las sucesivas experimentaciones, etc.).

En lo que respecta a los cursos universitarios de matemáticas para la economía y la empresa, además de la base empírica necesaria para indagar el estado actual de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa (y que hemos comentado en el apartado anterior), hemos considerado todo el material empírico originado por el diseño, experimentación durante más de cinco cursos académicos, observación y evaluación de los recorridos de estudio e investigación descritos en el capítulo 4 de esta memoria.

La cuestión central que nos planteamos es la siguiente:

> ***¿Qué tipo de restricciones, procedentes de qué nivel de la escala de niveles codeterminación didáctica son cruciales para la ecología de la modelización matemática en las instituciones universitarias responsables de los estudio de economía y empresa*?**

Que podemos declinar en las cuestiones derivadas:

¿Qué incidencia tienen o podrían tener los cursos propedéuticos sobre la vida de la modelización matemática en un primer curso universitario de ciencias económico-empresariales? ¿Y si los cursos propedéuticos son diseñados e implementados en base a los principios de la TAD? ¿Qué restricciones dificultan o impiden organizar el estudio de las matemáticas en torno a la modelización de sistemas económico-empresariales? ¿En qué niveles de la jerarquía surgen dichas restricciones? ¿Qué condiciones se deberían instaurar, y en qué niveles de la jerarquía, para que fuese posible la vida de la modelización matemática con las características que propone la TAD? ¿Cómo incide el «aplicacionismo» sobre el papel que se otorga a la modelización matemática en las instituciones universitarias responsables de los estudio de economía y empresa? ¿Qué dispositivos didácticos se requieren para convertir la modelización matemática de sistemas económico-empresariales en el núcleo de la enseñanza de las matemáticas en los estudios de economía y empresa?

Los resultados obtenidos se pueden resumir en los puntos que presentamos a continuación.

(7) La respuesta institucional que la universidad ofrece al problema de las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad se materializa en un modelo didáctico con fuertes rasgos «teoricistas» y «tecnicistas» sustentado en una epistemología de corte «conceptualista». En efecto, el modelo didáctico de los cursos «cero» habituales pretende cubrir las lagunas de la enseñanza secundaria mediante la acumulación de nuevos conceptos y nuevas relaciones entre ellos y mediante la enseñanza de ciertas técnicas básicas (principalmente algorítmicas) que no se han trabajado en secundaria. Se constata así que los cursos «cero» habituales, al agravar el aislamiento y la desarticulación de las praxeologías matemáticas que se estudian en secundaria, fortalecen aún más las restricciones que dificultan la integración de la modelización matemática en los cursos universitarios de economía y empresa.

(8) Los cursos «cero» fundamentados en la teoría antropológica de lo didáctico están centrados en el estudio de una cuestión generatriz que permite la *articulación* mediante el *uso sistemático de la modelización matemática*, de *praxeologías puntuales* que aparecen aisladas en la matemática escolar de Secundaria. La puesta en marcha de estos cursos muestra que es posible diseñar e implementar cursos «cero» con características muy distintas a la respuesta institucional espontánea que ofrece la universidad y que preparan para una mejor aceptación de las matemáticas como herramienta de modelización de situaciones económicas. Pero, en todo caso, los resultados a largo plazo muestran, como era de esperar, la insuficiencia de los cursos «cero» para modificar de forma significativa las restricciones que dificultan la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de economía y empresa.

Las condiciones que se requieren para posibilitar que los estudiantes reconstruyan *praxeologías matemáticas locales relativamente completas* mediante un trabajo sistemático de modelización matemática se sitúan en un ámbito institucional radicalmente más amplio que el abarcado por los cursos «cero». En esta memoria nos centramos especialmente en las condiciones que se deben instaurar en el ámbito universitario para posibilitar este tipo de actividad matemática y en las restricciones, provenientes de cualquiera de los niveles de codeterminación, que inciden sobre dichas posibilidades. Esta opción parece más económica metodológicamente porque en el ámbito universitario se disfruta de más autonomía docente que en los institutos de educación secundaria y porque las restricciones debidas al proceso de transposición didáctica son más «duras» en la enseñanza secundaria que en la universidad.

(9) Los recorridos de estudio e investigación (REI) experimentados durante más de cinco cursos académicos consecutivos en IQS School of Management resultan ser un dispositivo didáctico apropiado para facilitar la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa. En particular hemos mostrado que existen cuestiones empresariales «reales» o «realistas» suficientemente generativas como para servir de punto de partida de distintos REI y que dichas cuestiones pueden ser abordadas con modelos matemáticos elaborados con las herramientas de lo que constituye un primer curso universitario de matemáticas para la economía y empresa.

(10) Para garantizar el funcionamiento de los REI como dispositivo normalizado y su «rendimiento» en términos de integración de la modelización matemática, se requiere que (los REI) constituyan el *núcleo en torno al cual se organizan los contenidos y actividades* de las materias o asignaturas de matemáticas, incluyendo el proceso de evaluación de las mismas o, en otras palabras, que los REI no se organicen de forma aislada del resto de dispositivos del programa de estudios. En nuestro caso, y a diferencia de la investigación de Barquero (2009), los REI experimentados en la asignatura de Matemáticas para la economía y empresa de IQS-ADE se han articulado totalmente a la organización didáctica global de la asignatura, lo que constituye un avance importante en relación a los resultados obtenidos hasta la fecha. Además, la *pervivencia a largo plazo del cambio didáctico* originado por la integración de la modelización matemática resulta mucho más segura si los REI constituyen el núcleo del programa de estudios que si los REI se organizaran como un mero apéndice de los demás dispositivos didácticos.

(11) Una condición imprescindible para que los REI constituyan el núcleo de un programa de estudios (en nuestro caso del programa de la asignatura de Matemáticas para la economía y empresa de IQS-ADE) radica en la elaboración de *infraestructuras matemáticas* mediante un importante trabajo de *ingeniería matemática* con el objetivo de organizar los contenidos del curso en torno a tipos de problemas y no de conceptos matemáticos. Se requiere, asimismo, la elaboración de discursos tecnológico-teóricos totalmente nuevos para adaptarlos a las nuevas organizaciones matemáticas enseñadas.

(12) Para hacer posible la implantación efectiva del nuevo contrato didáctico inherente a los REI se requiere la creación de nuevos gestos didácticos como, por ejemplo, la realización de actas de sesiones por parte del *secretario* de cada sesión, la presentación de *informes parciales* con nuevas cuestiones a tratar y propuestas para el trabajo futuro, las *presentaciones orales* en clase, la búsqueda *de información* más allá de los media tradicionales y, en definitiva, la creación de nuevos dispositivos encaminados a facilitar que los estudiantes compartan responsabilidades didácticas tradicionalmente asignadas en exclusiva al profesor. Paralelamente dichos dispositivos facilitarán que el profesor renuncie progresivamente a un gran número de «gestos profesionales» que está acostumbrado a asumir en exclusiva sin ser casi consciente de ello: planificación temporal del trabajo, gestión de las puestas en común, validación de las respuestas, formulación de las nuevas cuestiones, etc.

(13) Otras condiciones aparentemente secundarias pero realmente muy importantes para poner en marcha el nuevo contrato didáctico son el *realismo de la cuestión generatriz* del REI, la *simulación de una situación profesional* real (como, por ejemplo, la de una consultoría de matemáticas que recibe encargos por parte de una o varias empresas durante el curso) y que el profesor *no disponga realmente de una respuesta* previa a la cuestión formulada, hecho bastante habitual dado el grado de «apertura» de estas cuestiones. Detalles como ponerle un nombre a la empresa, asignarle un logo o, en algunas ocasiones, hablar de empresas reales (Bicing, Desigual, etc.) constituyen puntos de apoyo nada despreciables para favorecer dichas condiciones.

(14) Los rasgos fuertemente *teoricistas* y *tecnicistas* de la organización didáctica universitaria tradicional constituyen una restricción importante que dificulta grandemente situar las cuestiones problemáticas generadoras de los REI en el núcleo del programa de estudios, especialmente aquellas que surgen en el ámbito de la economía y empresa. Esta restricción se pone claramente de manifiesto en el hecho que los programas universitarios de asignaturas de matemáticas para la economía y empresa se organizan en torno a nociones o elementos teóricos y, en algunos casos, en torno a grandes métodos o tipos de técnicas matemáticas, pero nunca alrededor de grandes tipos de cuestiones.

(15) La aceleración del *tiempo didáctico* en la organización didáctica universitaria tradicional que impide *mantener problemas abiertos durante un largo periodo de tiempo* (los alumnos tienen una sensación de que en los REI «el tiempo no avanza» y, por lo tanto, que se está durante demasiado tiempo realizando un mismo tipo de actividad), la preponderancia de la «teoría» sobre la «práctica» (los alumnos tienden a considerar que los REI son excesivamente prácticos, que hay poca teoría) y el *carácter excesivamente dirigido de la actividad escolar* tradicional (los alumnos reclaman más dirección en los REI y no entienden cómo es posible que les hagan «resolver problemas sin saber los pasos que hay que hacer ni qué sentido tiene»), son rasgos del modelo didáctico tradicional que dificultan la vida de los REI en la enseñanza universitaria

(16) La organización pedagógica universitaria tradicional está íntimamente ligada a la *pedagogía monumentalista* y, en consecuencia, el objetivo de los procesos de enseñanza se centra en un *contenido establecido de antemano* y las cuestiones problemáticas que aparecen ocupan una posición subsidiaria en los procesos de estudio y tienden a desaparecer. Ante cualquier cuestión que se pueda plantear, se eliminan las respuestas provisionales intermedias (puesto que la «buena respuesta» está predeterminada). Queda así patente hasta qué punto esta característica de la pedagogía monumentalista pueda limitar la vida institucional de los procesos de modelización matemática.

Resulta, en definitiva, que la implantación y el desarrollo generalizado de los REI en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no sólo la *epistemología dominante* que se manifiesta en el «aplicacionismo» imperante, sino también las restricciones que impone la *ideología pedagógica dominante* en el sistema de enseñanza universitaria. Para ello será necesaria la introducción de nuevos dispositivos y «gestos» didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que requieren un cambio del contrato didáctico habitual.

2.3 Síntesis de conclusiones

Las conclusiones obtenidas en torno a las cuatro cuestiones problemáticas abordadas en la investigación se pueden resumir en las siguientes formulaciones.

Q_1: *¿Cómo se puede describir e interpretar la respuesta institucional espontánea, que se materializa mediante los «cursos cero» de matemáticas, al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad?*

La respuesta institucional que la universidad ofrece al problema de las discontinuidades con que se encuentran los estudiantes al pasar de secundaria a la universidad se materializa en unos «cursos cero» cuyo objetivo es trabajar, durante un corto periodo de tiempo, una gran cantidad de organizaciones matemáticas poco conectadas entre sí con una organización didáctica que no activa todos los momentos o dimensiones del proceso de estudio. Este doble hecho tiende a favorecer, y podría incluso agravar, el aislamiento y la desarticulación de las praxeologías matemáticas estudiadas en secundaria porque impide integrar las organizaciones matemáticas escolares en organizaciones más amplias y completas. Por todo ello los «cursos cero» no facilitan la integración de la modelización matemática en los cursos universitarios de economía y empresa.

Q_2: *¿Qué características diferenciales, en relación a la respuesta institucional espontánea, pueden presentar los «cursos cero» si se fundamentan en la teoría antropológica de lo didáctico?*

Nuestra propuesta de cursos «cero» fundamentada en la teoría antropológica de lo didáctico parte del estudio de una cuestión generatriz con suficiente poder generador e interés económico para requerir la articulación, mediante el uso sistemático de la modelización matemática, de praxeologías matemáticas puntuales que aparecen aisladas en la matemática escolar de secundaria. Esta estrategia permite a los estudiantes empezar a utilizar las matemáticas de secundaria como una herramienta de modelización de situaciones económicas. De todos modos, los resultados a largo plazo muestran la insuficiencia de estos cursos para modificar de forma significativa las restricciones que dificultan la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de economía y empresa.

Q_3: *¿Qué papel juegan y cuál podrían jugar las matemáticas en los primeros cursos universitarios de Economía y Empresa?*

La mayoría de las universidades españolas responsables de la enseñanza de las matemáticas para la economía y empresa adoptan un programa estándar, similar al seguido en carreras científicas, en los que los contenidos se organizan en torno a la lógica interna de los conceptos matemáticos y no en torno a tipos de problemas económicos o empresariales. La actividad de modelización matemática tiene un papel muy secundario y, cuando aparece, se interpreta como una mera «aplicación» de conocimientos matemáticos previamente construidos. Este *aplicacionismo*, derivado del modelo epistemológico dominante, separa completamente la construcción de los fenómenos económicos y empresariales de la aplicación subsidiaria de las matemáticas

Q_4: *¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan que el estudio universitario de las matemáticas en las instituciones responsables de la enseñanza de las ciencias económicas y empresariales se organice en torno a la modelización matemática de sistemas económicos?*

Se ha adoptado un dispositivo didáctico para la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización basado en los llamados *recorridos de estudio e investigación.* Se han diseñado y experimentado tres recorridos de estudio e investigación durante más de cinco cursos académicos consecutivos en la asignatura de matemáticas de primer curso de ADE en IQS School of Management.

El análisis clínico de estas experimentaciones ha dado lugar a dos grandes tipos de resultados.

(1) Por un lado, se confirman los resultados obtenidos por Berta Barquero (2009) en el caso de la enseñanza de las ciencias experimentales de que los recorridos de estudio e investigación son un dispositivo didáctico apropiado para facilitar la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios. Se han ampliado los resultados de Barquero en dos sentidos. En primer lugar se incorpora el ámbito educativo de los estudios universitarios de economía y empresa al de las ciencias experimentales. En segundo lugar se muestra por *primera vez* la posibilidad –y la fecundidad- de integrar los recorridos de estudio e investigación en la organización didáctica global de la asignatura, en lugar de introducirlos como un dispositivo complementario.

(2) Por otro lado, el diseño, experimentación y análisis de los recorridos de estudio e investigación ha permitido avanzar en el estudio de la *ecología* de este dispositivo didáctico y, por extensión, de la enseñanza de la modelización matemática en un primer curso universitario de matemáticas.

En lo que se refiere a las *principales condiciones* que se requieren para integrar los *recorridos de estudio e investigación* en la enseñanza universitaria de las matemáticas como un dispositivo didáctico normalizado, destacamos lo siguiente:

- Los *recorridos de estudio e investigación* deben constituir el núcleo en torno al cual se organizan los contenidos y actividades de la asignatura de matemáticas, incluyendo el proceso de evaluación de las mismas. No basta con que aparezcan como «complementos» a la organización didáctica tradicional. Para ello es necesario un importante trabajo de *ingeniería matemática* que permita la elaboración de nuevas organizaciones curriculares centradas en el trabajo de modelización.
- Para diseñar los recorridos, se deben tomar como punto de partida cuestiones empresariales «reales» o «realistas» suficientemente generativas, en el sentido que su estudio requiera la utilización de una gran parte de los modelos matemáticos elaborados con las herramientas de lo que constituye un primer curso universitario de matemáticas para la economía y empresa.
- La implementación de los recorridos de estudio e investigación requiere incorporar nuevos dispositivos didácticos a la enseñanza universitaria tradicional, encaminados por un lado a facilitar que los estudiantes compartan responsabilidades que el contrato didáctico imperante asigna en exclusiva al profesor y, por otro lado, a hacer vivir en el aula algunas de las dialécticas que están en la base del funcionamiento de los recorridos. Se han experimentado algunos de estos dispositivos y analizado su funcionalidad y condiciones de existencia. Se ha mostrado que su funcionamiento también requiere la renuncia por parte del profesor de un gran número de «gestos profesionales» y la creación de nuevas técnicas y tecnologías didácticas.

Sobre las *restricciones* que dificultan el funcionamiento normalizado de los recorridos de estudio e investigación —y que inciden, al mismo tiempo, en la posibilidad de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización—, nuestra investigación ha puesto en evidencia las siguientes, que atribuimos a los rasgos fuertemente *teoricistas* y *tecnicistas* de la organización didáctica universitaria tradicional y al *aplicacionismo* característico de la epistemología dominante:

- o Dificultad para situar las *cuestiones problemáticas* generadoras de los recorridos en el núcleo del programa de estudios, permitiendo que las necesidades «prácticas» precedan a la introducción de recursos «teóricos», en lugar de partir de un listado de contenidos establecido de antemano en el que las cuestiones problemáticas ocupan una posición subsidiaria.

- Dificultad para que los problemas abordados en clase permanezcan abiertos durante un largo periodo de tiempo, dado que el avance del *tiempo didáctico* se mide en términos de la aparición formal de conocimientos teóricos y no de necesidades prácticas o aporte y validación de respuestas a problemas.

- Carácter *excesivamente dirigido* de la actividad escolar tradicional, que dificulta que los estudiantes asuman de forma autónoma la resolución de cuestiones problemáticas, así como que el profesor delegue en ellos responsabilidades esenciales del proceso de estudio.

- Ausencia de un cuestionamiento de la *pertinencia del saber enseñado* que se supone transparente y no problemático, concomitante con una alarmante *escasez de medios* para poner a prueba la validez de las respuestas «oficiales» a las cuestiones planteadas.

Resulta, en definitiva, que la implantación y el desarrollo generalizado de los REI en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no sólo la epistemología «aplicacionista» imperante, sino también las restricciones que impone la *ideología pedagógica dominante* en el sistema de enseñanza universitaria. Para ello será necesaria la introducción de nuevos dispositivos y «gestos» didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual.

3. Problemas abiertos

3.1. El papel de las matemáticas en las ciencias económicas y empresariales fuera y dentro de la enseñanza universitaria

El análisis empírico de las matemáticas que se enseñan actualmente en los estudios universitarios de economía y empresa muestra que el proceso transpositivo no parece haber partido de las necesidades matemáticas que surgen en el trabajo en ciencias económicas y empresariales, o en los ámbitos profesionales directamente vinculados a estos estudios. Los obstáculos con que se encuentra hoy día una enseñanza funcional de las matemáticas para las ciencias económicas y sociales es, en gran parte, una consecuencia de esta falta de trabajo transpositivo que se puede atribuir al predominio del *aplicacionismo* como epistemología dominante en la enseñanza universitaria. Se plantea así el problema de estudiar con mayor detalle y sistematicidad la naturaleza de esta epistemología dominante y cómo se relaciona con el papel que ha jugado desde el inicio el proceso de matematización no solo en el desarrollo sino también en la constitución de las ciencias económicas. Para abordar este problema, no se puede obviar la existencia de una relación controvertida entre las ciencias económicas y las matemáticas que, como hemos visto con el caso del movimiento post-autista, sigue sin una respuesta clara en la actualidad. Tampoco se puede omitir el gran desconocimiento que existe hoy día sobre las necesidades matemáticas en los ámbitos de estudio, investigación y desarrollo profesional al mundo de la economía y empresa. Creemos que el futuro de la enseñanza universitaria no puede prescindir de abordar este problema social cuyo componente didáctico es primordial.

3.2. Las «Matemáticas para las ciencias sociales» en el bachillerato

El problema de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización que está en el origen de nuestra investigación se plantea de forma análoga en la enseñanza secundaria y, en particular, en el bachillerato de la modalidad de ciencias económicas y sociales, la etapa más próxima a la que se considera aquí. Hemos dicho que las restricciones transpositivas suelen ser muchas más rígidas en secundaria que en la universidad y, en ciertos aspectos, incluso más en el bachillerato debido a los impedimentos que genera el examen final de acceso a la universidad. En lo que se refiere a los recorridos de estudio e investigación como dispositivo didáctico para facilitar dicha enseñanza, se puede mostrar, a partir de trabajos como el de Javier García (2005), Esther Rodríguez (2006) y Noemí Ruiz-Munzón (2010), que su ecología presenta muchos rasgos similares a los obtenidos en la investigación que aquí presentamos y que su implementación como dispositivo normalizado choca con restricciones muy fuertes a niveles tanto de la disciplina como de los contratos didácticos, pedagógicos y escolares dominantes. De todos modos, no existen estudios sistemáticos sobre la posibilidad de organizar todo un curso de bachillerato a partir de unos pocos REI que permitan recubrir los principales aspectos del currículum de matemáticas, ni sobre la ecología de este tipo de propuesta. La articulación entre el bachillerato y la universidad constituye un problema crucial que no puede abordarse únicamente desde una de las dos instituciones educativas implicadas.

3.3. Incidencia de los recorridos de estudio e investigación en las praxeologías personales de los estudiantes

El objetivo principal de nuestra propuesta didáctica, fundamentada en un análisis ecológico de los REI, es el de hacer posible que los estudiantes lleven a cabo una actividad matemática funcional vinculado al ámbito científico y profesional de la economía y empresa. En consecuencia, si se pretendiese evaluar el «rendimiento» o, más en general, el efecto de esta modalidad de enseñanza sobre las praxeologías personales de los estudiantes, se deberían utilizar instrumentos de evaluación apropiados. Nuestra investigación no ha abordado de forma sistemática esta dimensión, por otra parte fundamental, del problema de enseñanza dado que, por cuestiones metodológicas, consideramos que la dimensión ecológica es previa. A partir de los resultados obtenidos y del material empírico recogido a lo largo de las experimentaciones, se pueden plantear múltiples cuestiones relacionadas con esta dimensión como las siguientes:

- Estudio estadístico sistemático de las respuestas a los cuestionarios y entrevistas para conocer mejor la percepción de los estudiantes sobre el trabajo realizado en los REI y su evolución a lo largo del curso académico, así como su visión de las matemáticas y de su relación con las ciencias económicas y empresariales.
- Relación entre las respuestas al cuestionario y el rendimiento académico de los estudiantes, tanto en el propio taller como en la asignatura de matemáticas y también en otras asignaturas relacionadas como, por ejemplo, la microeconomía, la informática, etc.
- Relación entre el rendimiento de los estudiantes en el taller y en la asignatura de matemáticas.
- Incidencia de los talleres en la visión que tienen los estudiantes sobre las matemáticas y su función en el entorno económico y empresarial.

3.4. La ecología regional de los recorridos de estudio e investigación

La investigación que hemos realizado está circunscrita a un ámbito institucional muy concreto y los resultados obtenidos en cuanto a la ecología de los REI en la enseñanza universitaria no pueden extrapolarse tal cual más allá de este nivel local. El problema de la difusión de los REI como dispositivo didáctico para la enseñanza universitaria de la modelización matemática requiere nuevos estudios que aborden aquellas particularidades que no siempre se pueden reproducir en otros ámbitos institucionales. Por ejemplo, mientras que en nuestro caso el equipo de profesores siempre contaba con investigadores en didáctica, cabría estudiar qué papel tiene la variable profesor en la ecología de los REI. Del mismo modo, la organización a nivel escolar y pedagógico de IQS School of Management cuenta con unas características específicas que no sabemos cómo han podido incidir en el funcionamiento de los REI: centro de una universidad privada, grupos con un número reducido de estudiantes, dedicación del profesorado e importancia otorgada a la docencia, nivel socio-económico de los estudiantes, atención personalizada, recursos pedagógicos disponibles, etc.

3.5. Profundizar en las analogías entre la enseñanza de las matemáticas para las ciencias económicas y para las ciencias experimentales

Nuestra investigación toma como uno de sus puntos de partida el trabajo de tesis doctoral de Berta Barquero (2009) en el cual se estudia la ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. En nuestro caso, hemos utilizado una metodología de investigación similar pero ampliando significativamente la base empírica, al considerar el currículo de bachillerato, los cursos de transición a la universidad y la experimentación regular de los REI de forma integrada a la asignatura de matemáticas. Los resultados obtenidos convergen mayoritariamente con los de B. Barquero y corroboran las hipótesis formuladas en términos de la ecología de los REI en la enseñanza universitaria.

Estas similitudes pueden resultar sorprendentes si uno toma en consideración el hecho que las ciencias experimentales tienen un nivel de matematización mucho mayor que las ciencias sociales y que el entorno institucional presenta características distintas en las facultades de ciencias y en las de economía y empresa (por ejemplo en el tipo de formación matemática del profesorado, la metodología de las distintas áreas, etc.). Surgen así dos cuestiones muy distintas. La primera sería de índole metodológica. Se trataría de profundizar en las similitudes y diferencias entre ambos casos, para contrastarlos en lugar de, como en nuestro caso, adoptar a uno como guía del otro. En cierta manera, es posible que la investigación de Barquero nos haya conducido a privilegiar los géneros próximos en detrimento de las diferencias específicas. La segunda cuestión es de índole epistemológica y consiste en abordar, a través del estudio del papel de la modelización matemática en las distintas ciencias y su ecología institucional, el problema señalado al inicio de este apartado de la relación entre las matemáticas y las demás ciencias así como la manera en que los procesos de transposición didáctica inciden en esta relación. La cuestión subyacente sería la del proceso de matematización progresiva de las distintas ciencias, la manera en que este proceso se traslada a la enseñanza y, recíprocamente la forma en que la enseñanza —especialmente la universitaria— incide en él. Para este estudio es necesario ampliar el ámbito empírico más allá de los alumnos y profesores para incluir a los investigadores y profesionales de la empresa.

El recorrido de estudio e investigación que ha dado lugar a esta memoria se inició a partir de un problema docente muy práctico sobre qué matemáticas enseñar en los estudios universitarios de Economía y Empresa y cómo organizar dicha enseñanza. La problematización de esta cuestión en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico provocó la necesidad de elaborar un análisis epistemológico de la matemática escolar y, especialmente, del papel que tiene la modelización matemática en el estudio de problemas vinculados a la economía y empresa. Este estudio nos condujo al análisis de las condiciones de posibilidad de nuevos dispositivos didácticos que faciliten la vida de una actividad matemática funcional centrada en la modelización de sistemas económicos y empresariales. La experimentación de estos dispositivos ha puesto en evidencia rasgos importantes de su ecología institucional que delimitan un espacio de posibilidades y condiciones para la renovación de la enseñanza universitaria de las matemáticas. Las cuestiones que se abren al final de este recorrido exceden ampliamente tanto el margen de acción de la propia práctica docente, como el ámbito institucional en el que surgía la cuestión inicial. De hecho, nos conduce a un *problema de epistemología general* y de *gestión social de la transmisión del conocimiento* relativo a la función de las matemáticas como herramienta en las prácticas sociales relacionadas con las distintas ciencias y su papel en la evolución de las mismas. No debería sorprender que este problema tenga un fuerte componente didáctico y que pueda —y deba— abordarse con las herramientas que proporciona la ciencia didáctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alegre et al. (1990). *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales I y II*. Madrid: Editorial AC Thomson.

Alejandre, F. & Llerena, F. (1995). *Problemes de Matemàtiques per a Econòmiques i Empresarials*. Sant Cugat: Edicions Media.

Álvarez, P., Blanco, M.A., Guerrero, M. & Quiroga, R. (1998). Un diagnóstico del conocimiento básico matemático para la economía y la empresa. *VI Jornadas de Asepuma*.

Arya, J. C. & Lardner, R. W. (2002). *Matemáticas aplicadas a la administración y economía.* Madrid: Editorial Prentice Hall.

Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique. Une étude exploratoire*. Thèse doctorale. Université d'Aix-Marseille II.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 9*(3), 281-308.

Artigue, M. (2011). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos, *XIII CIAEM-IACME*, Recife (Brasil).

Balbás, A., Gil, J. A. & Gutiérrez, F. (1989). *Análisis matemático para la Economía I y II*. Madrid: Editorial AC.

Barbolla, R. et al. (2001). *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la Economía.* Madrid: Editorial Prentice-Hall.

Barquero, B. (2006). *Els recorreguts d'estudi i investigació (REI) i l'ensenyament de la modelització matemàtica en el primer curs universitari de Ciències*. Barcelona: Treball de recerca. Departament de Matemàtiques. Universitat Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F.J. García (Ed.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría antropológica de lo Didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2146-2155). Nicosia: University of Cyprus. Disponible en: http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg11-11-barquero.pdf

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). The 'ecology' of mathematical modelling: Constraints to its teaching at University level. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2146-2155). Lyon: Université de Lyon. http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg11-11-barquero.pdf

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339-352.

Blanco, S., García, P. & Pozo del, E. (2002). *Matemáticas Empresariales I. Vol. 1 y 2*. Madrid: Editorial AC Thomson.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Haines, C. *et al.* (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics.* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. (2008). Les TIC a l'ensenyament de la modelització matemática en Ciències Econòmiques i en Ciències experimentals. AGAUR: www.recercat.net/handle/2072/97460

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.) Balises en Didactique des Mathématiques. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (pp. 107-122).

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: del taller de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. *II Congreso de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD)*. Uzes.

Bosch, M. Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 24 (2-3), 205-250.

Box, G., Hunter, W. & Hunter, J. (1999). *Estadística para investigadores – Introducción al Diseño de Experimentos, Análisis de Datos y Construcción de Modelos.* Barcelona: Editorial Reverté.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970 - 1990.* (N. Balacheff, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) Dordrecht, Paises Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques: Didactique des Mathématiques 1970 – 1990.* Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Camacho, M.E., Fernández, P., Gómez, D., Masero, I., Vázquez, M.J. & Zapata, A. (2005). Estudio de condicionantes que afectan al aprendizaje de las matemáticas empresariales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

Cámara, A., Garrido, R. & Tolmos, P. (2002). *Problemas Resueltos de Matemáticas para Economía y Empresa*. Madrid: Editorial AC Thomson.

Castellanos, L., González, M.C., González, M.A. & Manzano, I. M. (1998). Las matemáticas empresariales: estudio de los factores determinantes del rendimiento académico.*VI Jornadas de Asepuma*.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné* (2.ª edición) Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires : Aique Grupo Editor S.A.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2000). La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes, *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques (Houlgate, 18-25 août 1999)* (p. 98-112), ARDM.

Chevallard, Y. (2001a). Les mathématiques et le monde: dépasser « l'horreur instumentale». *Quadrature* (41), 25-40.

Chevallard, Y. (2001b). Aspectos problemáticos de la formación docente [en ligne], *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2002a). *Séminaire PCL2 de Mathématiques.* IUFM d'Aix-Marseille. www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/cd_2007.html.

Chevallard, Y. (2002b). Les mathématiques dans les formations universitaires : un schéma alternatif. Trabajo presentado en el seminario de *Mathématiques et sciences humaines* de la Faculté des sciences de Luminy (Université de la Méditerranée). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=55

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Journées de didactique comparée 2004 (Lyon, 3-4 mai 2004). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2005a). La didactique dans la cité avec les autres sciences. *Symposium de didactique comparée. Réseau Éducation Formation*, Montpellier, 15-16 sep 2005. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=65

Chevallard, Y. (2005b). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En : Ducourtioux, C. & Hennequin, P.-L. (Éds.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP nº 168*, 239-263. Paris: APMEP.

Chevallard, Y. (2006a). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Journées 2006 de l'APMEP* (Clermont-Ferrand, 26-28 octobre 2006).

Chevallard, Y. (2006b). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2007). La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. En Ruiz Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In: ARDM (Ed.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques de 2007* (pp. 344-366). Paris: IREM Paris VII.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. IUFM Toulouse, Francia. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Chevallard, Y. (2010). Où va la didactique? Perspectives depuis et avec la TAD En Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. (Éds) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 923-948). Montpellier, Francia: Université de Montpellier.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vanderbrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Chiang, A. C. & Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de Economía Matemática.* Madrid: McGraw-Hill.

Colera, J. et al. (2010). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials 2 Batxillerat.* Barcelona: Editorial Barcanova.

Corcho, P., Cortés, G. & Guerrero, M. (2005). Características académicas de los alumnos que inician estudios universitarios en ciencias económicas y empresariales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

Dreyfus, T., Hershkowitz R. & Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. In M. van den Heuvel-Panhuizen [Ed.], *Proceedings of the 25th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 377-384). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Dubinsky, E.& McDonald M. A.(2002). *A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research*. New ICMI Study Series, 7(3), 275-282.

Erice, C. (2005). Estrategias de aprendizaje en la asignatura matematicas I de la diplomatura de ciencias empresariales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

Escoredo, A. et al. (2010). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials 2n Batxillerat.* Projecte La casa del saber. Madrid: Grup Promotor Santillana.

Estapé, G. (2005). Aprendre matemàtiques: treballar individualment o en grup? Una experiència de treball cooperatiu a l'assignatura de matematiques aplicades a l'empresa. *II Jornades d'Innovació Docent.*

Evans, M. (2000). Planning for the transition to tertiary Study: A literature review. *Journal of Institutional Research*. Disponible en: www.icme-10.dk

Fernández, G.M. & Escribano, M.C. (2005). El primer eslabón de las matemáticas en las facultades de CC. económicas y empresariales: los análisis económicos lineales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

Fuentes Quintana, E. (1999). *Economía y economistas españoles, Vol.VII: La consolidación de la economía española*. Ed. Círculo de Lectores Galaxia Gutemberg.

García, F. J (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matematica escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Jaén: Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 38*(3), 226-246.

García Hernández, J.M. (2001). Sobre la opción cursada en los estudios previos y su incidencia en las notas obtenidas en matemáticas de la L.A.D.E. *IX Jornadas de ASEPUMA.*

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18* (1), 7-34.

Gascón, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5 (3), 673-698.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 14(2), 203-231.

Gascón, J. & Bosch, M. (2007). La miseria del generalismo pedagógico ante el problema de la formación del profesorado. En Ruiz Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 165-205). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.

González, C. et al. (2010). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 2º Bachillerato*. Barcelona: Editorial Editex.

Gonzalo, S. et al. (2010). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials 2*. Barcelona: Castellnou Edicions.

Gutiérrez Valdeón, S. & Franco, A (1997). Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa. Madrid: Ed. AC.

Haeussler, E. F. & Paul, R. S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economías, Ciencias Sociales y de la Vida*. Madrid: Editorial Prentice Hall.

Jarne, G., Pérez-Grasa, I. & Minguillón, E. (1997). *Matemáticas para la Economía: álgebra lineal y cálculo diferencial*. Madrid: Editorial McGraw Hill.

Jané Sanahuja, A. et al. (2009). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials 2n Batxillerat*. Sèrie Fluvià. Editorial McGraw Hill.

Larson, R. E., Hostetler, R. P. & Edwards, B. H. (2006). *Cálculo Vol. 1 y 2.* Madrid: Ed. McGraw-Hill.

López Cachero, M. & Vegas Pérez, A. *Curso básico de Matemáticas para la Economía y Dirección de empresas I* y *II*. Madrid: Editorial Pirámide.

Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vanderbrouck, F. & Wozniak, F. (2011, Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Ortega, J. (1993). *Introducció a l'anàlisis matemática*. Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

Pancorbo, L. (2010). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials 2.* Barcelona : Editorial Vicens Vives.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid. http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf

Ruiz-Munzón, N. (2006). *Ecologia de la modelització algebraico-funcional al Batxillerat.* Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados, Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N. & Serrano, V. (2011). Una visión innovadora de los cursos cero de matemáticas enfocada al grado de Administración y Dirección de Empresas. *Revista d'Innovació Docent Universitària, 4*, 26-40.

Sanz, P. & Vázquez, F. J. (1995). *Cuestiones de cálculo*. Madrid: Ed. Pirámide.

Sastre, L. & Moyà, M. (1998). *Àlgebra Lineal. Problemes resolts, Mètodes matemàtics per a l'economia.* Mallorca: Edicions Documenta Balear.

Serrano, L. (2007). *La modelització matemàtica en els estudis de Ciències Econòmiques i Socials: disseny d'organitzacions didàctiques per a l'articulació curricular entre l'ESO, el Batxillerat i la Universitat*. Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados, Universitat Ramon Llull. Facultat d'Economia IQS.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer curso universitario. En Ruiz-Higueras, L., Estepa,

A. & García, F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 757-764). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2186-2195). Nicosia: University of Cyprus. Disponible en: http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg11-15-serrano.pdf.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). «Cómo hacer una previsión de ventas»: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. (Éds) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 835-857). Montpellier: Université de Montpellier.

Serrano, V. & Bosch, M. (2011). Taller de modelización matemática: dinámica de poblaciones. *Jornadas Interuniversitarias de Innovación Docente 2011*. Barcelona: Blanquerna Tecnologia i Serveis, Universitat Ramon Llull.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Stewart, J. (2001) *Calculo de una variable Vol. I*. Madrid: Ed. Thompson-Paraninfo.

Sydsaeter, K., Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico,* Madrid: Ed. Prentice Hall.

Tan, S. T. (1998) *Matemáticas para administración y economía.* Madrid: International Thomson.

Vegas Pérez, A. (1948). *Matemática para Economistas – Curso general de Matemáticas con aplicaciones a la Economía.*

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(234), 133-170.

Weber, M. (1922). *Economía y Sociedad.* México: Fondo de Cultura Económica (FCE) (1ª edición en alemán, 1922. Primera edición en español, 1944).

VVAA (2009). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials II*. Barcelona: Editorial Edebé.

VVAA (2008). *Seletac. Exercicis de Selectivitat. Humanitats i Ciències Socials*. Barcelona: Ed. Vicens vives

Anexos

Anexo 1.1. Emergencia de la teoría antropológica de lo didáctico

En este apartado presentamos una «reconstrucción histórica» de las evoluciones de los diversos enfoques en investigación en didáctica siguiendo la propuesta de Gascón (1998) que han confluido hasta conformar las bases de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), iniciada por Yves Chevallard a finales de los años ochenta.

El enfoque clásico en didáctica de las matemáticas se caracteriza por la suposición acrítica que el *conocimiento matemático no es problemático*, que el problema reside en su enseñanza y aprendizaje, y que los saberes que se utilizan para describir e interpretar los hechos educativos (pedagogía, psicología, sociología, etc.) pueden ser «aplicados» a los problemas didácticos pero no pueden ser modificados como consecuencia de esta aplicación. A partir de aquí, se pueden distinguir dos enfoques sucesivos en el desarrollo de la problemática didáctica clásica. El primero, centrado en el *aprendizaje del alumno*, tiene como objeto primario de investigación el conocimiento matemático del alumno y su evolución, delegando explícitamente en la psicología la fundamentación científica de la didáctica. El segundo enfoque amplia la problemática didáctica introduciendo cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional, tomando como objeto primario de investigación *la actividad y el pensamiento del profesor*. En este caso, se necesita una base multidisciplinar mucho más amplia que incluya, entre otros, la psicología educativa, la sociología y la epistemología de las matemáticas para fundamentar la investigación.

A principios de la década de los setenta del siglo pasado, el investigador francés Guy Brousseau vio la necesidad de crear un modelo propio, explícito y contrastable de la actividad matemática que no se redujera al estudio de los procesos cognitivos de los alumnos, para estudiar los fenómenos ligados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se toma como objeto de estudio no al alumno haciendo matemáticas, sino la *situación didáctica* por medio de la cual los alumnos consiguen apropiarse de un saber matemático específico ya constituido o en vías de constitución. Se pasa así a considerar el *proceso de enseñanza-aprendizaje en situación*, entendiéndose por *situación didáctica* el conjunto de relaciones establecidas explícitamente o implícitamente entre tres elementos: el alumno o grupo de alumnos; la interacción del alumno con un *medio* formado por un conjunto de objetos e instrumentos sin intención didáctica, y el *profesor* o «instancia enseñante», que propone al alumno diferentes situaciones con la intención de hacer que se apropien de un saber matemático. Nace así la teoría de las situaciones didácticas (TSD), cuya principal aportación fue postular la existencia de *fenómenos didácticos* no reducibles a fenómenos psicológicos o sociológicos, cuyo estudio necesita una modelización explícita y contrastable del *saber matemático* en términos de situaciones. La ampliación clave fue el postulado de Brousseau (1986) de que todo *fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial*, lo que comporta la problematización del conocimiento matemático y la necesidad de elaborar *modelos epistemológicos específicos de la didáctica*. De aquí que Brousseau hubiera propuesto llamar *epistemología experimental* a la nueva disciplina que preconizaba su teoría (Gascón 1998).

La necesidad de estudiar las condiciones de creación y difusión del conocimiento matemático en las diferentes instituciones sociales, desde las productoras o creadoras del conocimiento, hasta las que lo utilizan como instrumento, pasando por las instituciones más propiamente didácticas, es decir, centradas en la enseñanza de las matemáticas, es el punto de partida del llamado *enfoque antropológico* en didáctica creado por el investigador Yves Chevallard, discípulo de Brousseau, a finales de los años ochenta. Este enfoque, que supone una ampliación de la problemática de la TSD, nace con las primeras teorizaciones sobre el proceso de *transposición didáctica* (Chevallard 1985/1991), que pone de manifiesto que no es posible interpretar la matemática ni la actividad matemática que se estudia en la escuela sin tener en cuenta fenómenos relacionados con los procesos de (re)construcción de las matemáticas que tienen el origen en la institución «sabia» o productora de los saberes matemáticos.

Los procesos de transposición didáctica distinguen diferentes tipos de «saberes» (cf. figura 1) que intervienen en todos los procesos de enseñanza y aprendizaje:

- el «saber sabio» o saber matemático, tal como lo produce la comunidad científica;
- el «saber matemático a enseñar», tal como es designado oficialmente por los programas oficiales y libros o tratados para la enseñanza;
- el «saber matemático enseñado», tal como es realmente enseñado por los profesores en el aula;
- el «saber matemático aprendido» o construido por los alumnos al final del proceso de enseñanza-aprendizaje y que queda disponible para nuevos procesos de estudio.

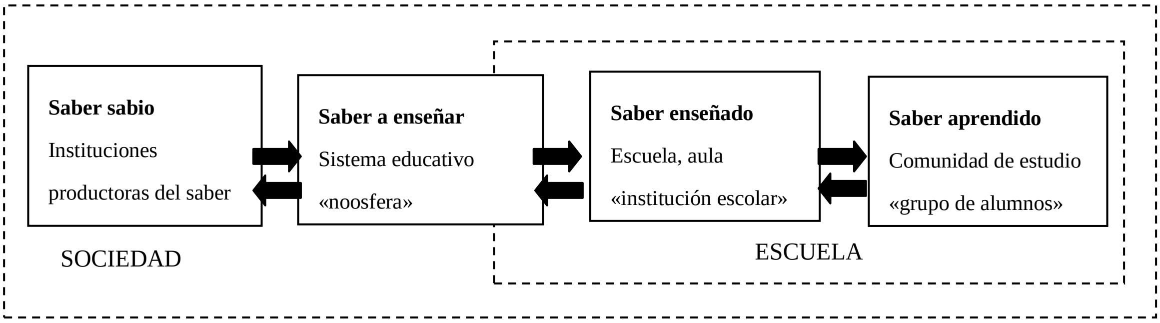


Figura 1. Proceso de transposición didáctica

Mientras que algunas teorías didácticas tienden a centrar su análisis en las dos últimas etapas del proceso transpositivo, la TAD postula que no es posible explicar las características del «saber aprendido», ni ninguno de los fenómenos didácticos que emergen en él, sin tomar en consideración todas las etapas de la transposición. El investigador se debería situar así en una posición externa en relación a las diversas instituciones que forman parte de su objeto de estudio. Esto supone disponer de un modelo suficientemente rico para describir el saber matemático tanto si se sitúa en la institución «sabia», como si se trata de la práctica de un estudiante universitario o de un alumno de primaria. En este aspecto, el modelo de las situaciones didácticas propuesto por G. Brousseau presenta dificultades importantes. Por ello, Y. Chevallard introduce la noción de *praxeología* o de *organización praxeológica* como elemento básico para la descripción del saber. Dicha noción está descrita detalladamente en el primer capítulo de esta memoria.

Chevallard (2006a) afirma que no hay un sistema de referencia privilegiado desde el cual observar, analizar, juzgar el mundo de los saberes y más ampliamente, el de las praxeologías. El «saber sabio» es una función y no una sustancia, respecto a la cual el didacta se debe descentrar expresamente. Pero la ausencia de un sistema de referencia absoluto no hace menos imprescindible la utilización de sistemas de referencia relativos adecuados a cada situación, modelos cuyo carácter hipotético les atribuye una provisionalidad permanente —o, mejor dicho, una evolución permanente—, siempre sometidos a la prueba del contraste empírico y reformulados en función de los nuevos problemas por abordar (Bosch & Gascón 2005). Este modelo, que constituye una herramienta fundamental para la emancipación epistemológica e institucional del análisis didáctico, en términos de la TAD recibe el nombre de *modelo epistemológico de referencia*.

Anexo 2.1. Direcciones de las páginas web de los programas de grados en economía de facultades españolas:

Universidad de Alcalá (www.uah.es):
Grados en *Administración y dirección de empresas* y en *Contabilidad y Finanzas*:

- Matemáticas I:
  http://www.uah.es/estudios/asignaturas/descarga_fichero.asp?CodAsig=340001&CodPlan=G340&Anno=2011-12
- Matemáticas II:
  http://www.uah.es/estudios/asignaturas/descarga_fichero.asp?CodAsig=340004&CodPlan=G340&Anno=2011-12

Grado en *Economía*:

- Análisis matemático:
  http://www.uah.es/estudios/asignaturas/descarga_fichero.asp?CodAsig=360004&CodPlan=G360&Anno=2011-12

Universidad Alfonso X (www.uax.es):
Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas empresariales:
  http://campus.uax.es/asignatura/html_alumno/asig_prog.php?cod_asig=0120105&prev=publico

Universidad de Almería (www.ual.es):
Grados en *Administración y dirección de empresas*, en *Economía y Finanzas* y en *Contabilidad*:

- Matemáticas: http://cvirtual.ual.es/guiado/servlet/bin?id=5966_CAS

Universidad Autónoma de Barcelona (www.uab.es):
Grados en *Administración y dirección de empresas* y en *Economía*:

- Matemáticas I:
  http://www.uab.es/guiesdocents/2011-12/g102345p950t2501572a2011-12iCAT.pdf
- Matemáticas II
  http://www.uab.es/guiesdocents/2011-12/g102344p950t2501572a2011-12iCAT.pdf

Grados en *Comptabilitat i Finances*, y en *Empresa i Tecnologia*:

- Matemáticas I:
  http://www.uab.es/guiesdocents/2011-12/g102097p947t2501231a2011-12iCAT.pdf
- Matemáticas II:
  http://www.uab.es/guiesdocents/2011-12/g102096p947t2501231a2011-12iCAT.pdf

Universidad Autónoma de Madrid (www.uam.es):
Grado en *Economía*:

- *Análisis matemático* y *Álgebra lineal*:
  http://www.uam.es/ss/Satellite/Economicas/es/1242654726586/1242654022725/guiadocente/detalle/Curso_1%C2%BA,_2011-2012.htm

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- *Instrumentos matemáticos para la empresa* y *Métodos matemáticos para la empresa*.
  http://www.uam.es/ss/Satellite/Economicas/es/1242654724360/1242654021641/guiadocente/detalle/Curso_1%C2%BA,_2011-2012.htm

Grado en *Economía y Finanzas*:

- *Análisis matemático* y *Álgebra lineal*:
  http://www.uam.es/ss/Satellite/Economicas/es/1242654732921/1242654023023/guiadocente/detalle/Curso_1%C2%BA,_2011-2012.htm

Universidad de Barcelona (www.ub.edu):
Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas I:
  http://www.ub.edu/grad/plae/AccesInformePD?curs=2010&codiGiga=363645&idioma=CAT&recurs=publicacio
- Matemáticas II:

http://www.ub.edu/grad/plae/AccesInformePD?curs=2010&codiGiga=363646&idioma=CAT&recurs=publicacio

Grado en *Economía*:

- Matemáticas I: http://www.ub.edu/grad/plae/AccesInformePD?curs=2011&codiGiga=361831&idioma=CAT&recurs=publicacio
- Matemáticas II: http://www.ub.edu/grad/plae/AccesInformePD?curs=2011&codiGiga=361832&idioma=CAT&recurs=publicacio

Universidad Carlos III (www.uc3m):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas para la economía I: http://www3.uc3m.es/reina/Fichas/Idioma_1/204.13152.html
- Matemáticas para la economía II: http://www3.uc3m.es/reina/Fichas/Idioma_1/204.13156.html

Grado en *Economía*:

- Matemáticas para la economía I: http://www3.uc3m.es/reina/Fichas/Idioma_1/202.13637.html
- Matemáticas para la economía II: http://www3.uc3m.es/reina/Fichas/Idioma_1/202.13641.html

Grado en *Contabilidad y finanzas*:

- Matemáticas para la economía: http://www3.uc3m.es/reina/Fichas/Idioma_1/201.13742.html

Universidad Complutense de Madrid (www.ucm.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas empresariales I: http://portal.ucm.es/c/document_library/get_file?uuid=cdf355c7-12ba-42dd-9ff9-7ebf42bbff85&groupId=127685
- Matemáticas empresariales II: http://portal.ucm.es/c/document_library/get_file?uuid=f56d821d-d79d-48ff-8b40-298cdc7e6475&groupId=127685

Grado en *Economía*:

- Matemáticas I: http://portal.ucm.es/c/document_library/get_file?uuid=95070faa-b859-42f3-a269-407907509cbe&groupId=127685
- Matemáticas II: http://portal.ucm.es/c/document_library/get_file?uuid=76c73c1f-523e-47fa-9c25-9c0d1ebe64f3&groupId=127685

Universidad Europea de Madrid (www.uem.es):

Grado en *Economía*:

- Matemáticas: http://campusvirtual.uem.es/moodle/uxxi-mo/verprograma_esp.php?asignatura=9960001103
- Análisis matemático: http://campusvirtual.uem.es/moodle/uxxi-mo/verprograma_esp.php?asignatura=9960001108

Grado en *Finanzas* y en *Dirección y creación de empresas*:

- Matemáticas empresariales: http://campusvirtual.uem.es/moodle/uxxi-mo/verprograma_esp.php?asignatura=9987001105

Universidad de Girona (www.udg.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas* y en *Economía*:

- Matemáticas I: http://www.udg.edu/Guiadematricula/Dissenyassignatura/tabid/15700/Default.aspx?curs=2011&codia=3107G00002&codip=
- Matemáticas II: http://www.udg.edu/Guiadematricula/Dissenyassignatura/tabid/15700/Default.aspx?curs=2011&codia=3107G00003&codip=

Grado en *Comptabilitat i Finances*:

- Matemáticas Empresariales: http://www.udg.edu/Guiadematricula/Dissenyassignatura/tabid/15700/Default.aspx?curs=2011&codia=3107G02001&codip=

Universidad de Granada (www.ugr.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas: http://grados.ugr.es/empresas/pages/infoacademica/1112_matematicas

Grado en *Economía*:

- Matemáticas: http://grados.ugr.es/economia/pages/infoacademica/guias-docentes-1a-geco/matematicas

Grado en *Finanzas y Contabilidad*:

- Matemáticas: http://grados.ugr.es/finanzas/pages/infoacademica/guias-docentes-11_12/fico_matem_11_12

Universidad de Huelva (www.uhu.es):

Grados en *Administración y dirección de empresas* y en *Finanzas y Contabilidad*:

- Matemáticas: http://www.uhu.es/empresariales/grados/ade/programas/matem.pdf

Universidad Internacional de Cataluña (www.uic.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas: http://www.uic.es/guia-docent?cod_asignatura=7794&anyo=2011

Universitat de Lleida (www.udl.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas empresariales: http://www.ade.udl.cat/export/sites/Ade/docs/guiadocent/2011-2012/101303.pdf

Universitat Oberta de Cataluña (www.uoc.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Fundamentos en Matemáticas: http://cv.uoc.edu/tren/trenacc/web/GAT_EXP.PLANDOCENTE?any_academico=20111&cod_asignatura=71.516&idioma=CAS&pagina=PD_PREV_PORTAL

Universitat Pompeu Fabra (www.upf.es):

Grados en *Administración y dirección de empresas* y en *Economía*:

- Matemáticas I: http://www.upf.edu/pra/3324/20833.html
- Matemáticas II: http://www.upf.edu/pra/3324/20834.html

Grado en *Ciencias Empresariales-Management*:

- Matemáticas: http://www.upf.edu/pra/3326/20639.html

Universidad Rey Juan Carlos (www.urjc.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas: http://www.urjc.es/estudios/grado/ade/guias/Primero/Matematicas%20Empresariales.pdf

Grado en *Economía*:

- Métodos matemáticos para la economía I: http://www.urjc.es/estudios/grado/economia/guias/Primero/Metodos%20Matematicos%20para%20la%20Economia%20I.pdf
- Métodos matemáticos para la economía II: http://www.urjc.es/estudios/grado/economia/guias/Primero/Metodos%20Matematicos%20II.pdf

Universitat Ramón Lull (www.url.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas: http://www.iqs.edu/documentacion/files/estudios/Grados/ade/plan%20estudios/MATEM%C3%81TICAS_1.pdf

Grado en Dirección de empresas – BBA:

- Matemáticas: http://madoc.esade.edu/asi/llibres/libros11.nsf/3d5b62f4877e723ac1257482003f0d21/c125789600549a4dc1257483003c0b92?OpenDocument

Universitat Rovira i Virgili (www.urv.es):

Grados en *Administración y dirección de empresas*, en *Contabilidad y Finanzas* y en *Economía*:

- Matemáticas I: http://moodle.urv.net/docnet/guia_docent/index.php?centre=16&ensenyament=1621&assignatura=16214008&any_academic=2011_12
- Matemáticas II: http://moodle.urv.net/docnet/guia_docent/index.php?centre=16&ensenyament=1621&assignatura=16214009&any_academic=2011_12

UNED (www.uned.es):

Grado en *Administración y dirección de empresas*:

- Matemáticas I: http://serviweb.uned.es/conversorpdf/impresoA.asp?url=http://portal.uned.es/pls/portal/url/page/UNED_MAIN/GESTIONGRADO/TODALAGUIA/2012/?idAsignatura=6502102-
- Matemáticas II: http://serviweb.uned.es/conversorpdf/impresoA.asp?url=http://portal.uned.es/pls/portal/url/page/UNED_MAIN/GESTIONGRADO/TODALAGUIA/2012/?idAsignatura=65022024

Grado en *Economía*:

- Matemáticas para la economía: Cálculo: http://serviweb.uned.es/conversorpdf/impresoA.asp?url=http://portal.uned.es/pls/portal/url/page/UNED_MAIN/GESTIONGRADO/TODALAGUIA/2012/?idAsignatura=65011026
- Matemáticas para la economía: Álgebra: http://serviweb.uned.es/conversorpdf/impresoA.asp?url=http://portal.uned.es/pls/portal/url/page/UNED_MAIN/GESTIONGRADO/TODALAGUIA/2012/?idAsignatura=65011084

Anexo 2.2. Índice del libro Métodos Fundamentales de Economía Matemática de Chiang

13.5. Algunas aplicaciones económicas de las integrales
13.6. Modelo de crecimiento de Domar

14. Tiempo continuo: Ecuaciones diferenciales de primer orden
    14.1. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes y términos constantes
    14.2. Dinámica del precio de mercado
    14.3. Coeficiente variable y término variable
    14.4. Ecuaciones diferenciales exactas
    14.5. Ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y de primer grado
    14.6. El enfoque gráfico-cualitativo
    14.7. Modelo de crecimiento de Solow
15. Ecuaciones diferenciales de orden superior
    15.1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y término constante
    15.2. Números complejos y funciones circulares
    15.3. Análisis del caso de la raíz compleja
    15.4. Un modelo de mercado con expectativas de precios
    15.5. La interacción de la inflación y el desempleo
    15.6. Ecuaciones diferenciales con término variable
    15.7. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
16. Tiempo discreto: ecuaciones en diferencias de primer orden
    16.1. Tiempo discreto, diferencias y ecuaciones en diferencias
    16.2. Resoluciones de una ecuación en diferencias de primer orden
    16.3. Estabilidad dinámica del equilibrio
    16.4. El modelo de la telaraña
    16.5. Modelo de mercado con inventario
    16.6. Ecuaciones en diferencias no lineales. El enfoque gráfico-cualitativo
17. Ecuaciones en diferencias de orden superior
    17.1. Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes y término constante
    17.2. El modelo de Samuelson de la integración entre el multiplicador y el acelerador
    17.3. Inflación y desempleo en tiempo discreto
    17.4. Generalizaciones para término variable y ecuaciones de orden superior
18. Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias simultáneas
    18.1. Génesis de los sistemas dinámicos
    18.2. Resoluciones de ecuaciones dinámicas simultaneas
    18.3. Modelos dinámicos de input-output
    18.4. El modelo de inflación y desempleo una vez más
    18.5. Diagramas de fases de dos variables
    18.6. Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal
    18.7. Limitaciones de análisis dinámico
19. Programación lineal
    19.1. Ejemplos simples de programación lineal
    19.2. Formulación general de los programas lineales
    19.3. Conjuntos convexos y programación lineal
    19.4. Método simplex: búsqueda de puntos extremo
    19.5. Método simplex: búsqueda de un punto extremo óptimo
    19.6. Notas adicionales sobre el método simplex
20. Programación lineal (continuación)
    20.1. Dualidad
    20.2. Interpretación económica de un dual
    20.3. Análisis de actividad: nivel micro
    20.4. Análisis de actividad: nivel macro
21. Programación no lineal
    21.1. La naturaleza de la programación no lineal
    21.2. Condiciones de Kuhn-Tucker
    21.3. La cualificación de restricciones
    21.4. Teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker: programación cóncava
    21.5. Teorema de suficiencia de Arrow-Enthoven: programación cuasicóncava
    21.6. Aplicaciones económicas
    21.7. Limitaciones de la programación matemática

Anexo 2.3. Recopilación de algunos enunciados de examen de las asignaturas de matemáticas en diferentes grados en economía de facultades españolas.

MÉTODOS MATEMÁTICOS – GRADO EN ADE (UAM) – Junio de 2011

4. Una empresa privada láctea produce dos tipos de leche, descremada y entera en cantidades d y e (unidades de volumen) respectivamente. Los beneficios de la empresa dependen de los ingresos I y los costes C de la forma $B(I,C) = I - C$. A su vez, los ingresos y costes dependen de la producción, $I(e, d)$ y $C(e, d)$ de forma que sus gradientes son $\nabla I(e, d) = (100 - e, 100 - 3d)$ y $\nabla C(e, d) = (3e, d)$. Se pide:

a) Calcule los beneficios marginales respecto a e y respecto a d y la producción crítica que anula dichos beneficios marginales. **(1 punto)**

b) Utilizando la matriz hessiana de B respecto a (e, d), determine de qué tipo es dicha producción crítica. **(1 punto)**

5. Sea la función de utilidad de un consumidor $U(x, y) = x^2 + 2x^3y^2 + y^4$ con $x, y > 0$, donde x e y representan las cantidades consumidas de los bienes X e Y respectivamente. Responda a las siguientes preguntas:

a) Estudie si en un entorno de la cesta (1,1) su curva de indiferencia define a y como función de x, es decir $y = f(x)$. En caso afirmativo, calcule la derivada de dicha función en $x = 1$, es decir $f'(1)$. **(1 punto)**

b) Si el consumidor desea consumir 1.2 unidades del producto X, ¿cuál es el consumo aproximado del bien Y para que su utilidad sea la misma? **(1 punto)**

MATEMÁTICAS – GRADO EN EMPRESARIALES (UPF) – Marzo de 2010

5. ***(15 p.)*** Supongamos que un monopolista produce dos bienes, A y B, que se venden por 100€ y 160€, respectivamente, por unidad. La función de costes, en euros, para producir q_1 unidades de A y q_2 unidades de B es la siguiente: $C(q_1,q_2) = 2 + \frac{1}{3} q_1^2 + q_2^2 + q_1q_2$.

a) Encontrar la función de beneficios del monopolista en términos de q_1 y q_2.

b) Determinar para que valores de q_1 y q_2 hay puntos estacionarios.

c) Clasificar los puntos estacionarios.

d) Argumentar si los puntos estacionarios son extremos absolutos y dar el beneficio máximo global, si existe.

MATEMÁTICAS I - GRADOS EN ECO/ADE/IBE (UPF) – Diciembre de 2010

2. (a) Los beneficios de una empresa en el año 2000 fueron de 1 millón de \$. Sabemos que los beneficios de esta compañía crecen con una tasa del 2% anual. Encuentra la fórmula de los beneficios en el año t (considerando el año 2000 como el año en que $t = 0$).

(b) Otra empresa tuvo en el año 2000 beneficios de 0.5 millones de \$. En esta empresa los beneficios crecen con una tasa del 4% anual. En qué año (si es el caso) la segunda empresa pasará a tener más beneficios que la primera empresa?

(10 puntos)

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA EMPRESA – G.ADE (UAM) – Enero de 2011

1. [1,5 puntos] Hoy hemos comprado un ordenador mediante unos pagos de 95 euros al mes durante 2 años, el primero de los cuales lo realizaremos dentro de un mes. Calcula el valor actual de dicho ordenador si los tipos de interés en el próximo año estarán al 4% nominal anual y en el año siguiente al 6% nominal anual (ambos con capitalización mensual de intereses).

2. [1,5 puntos] Tenemos la opción de invertir cierto capital en dos cuentas: la primera de ellas es al 4% nominal anual con capitalización mensual de intereses, y la segunda es al 4,25% nominal anual con capitalización simple de intereses. Si queremos invertir el capital por un plazo de dos años, ¿cuál de las dos cuentas será más rentable?

3. [1,5 puntos] Sean $C(x) = 10 + 10x + 0{,}03x^2$ la función de coste y $p(x) = 50 – 0{,}01x$ la función de demanda inversa (o precio por unidad) de una empresa monopolista al producir x unidades de un cierto bien. Determina para qué producción y a qué precio de venta por unidad la empresa obtiene su máximo beneficio.

4. [2,5 puntos] Una cementera ha comprobado que la cantidad total de cemento producida a lo largo del turno de 8 horas que comienza a las 6 de la mañana viene dada por la función: $P(t) = 3t^5 – 50t^4 + 210t^3 + 1750t$, donde t representa el tiempo en horas transcurrido desde el inicio del turno y P(t) se mide en toneladas, T.

a) Calcula la cantidad total de cemento producida entre las 10 de la mañana y el final del turno.

b) Demuestra que en algún instante entre las 10 de la mañana y el final del turno la velocidad de producción (producción marginal) ha sido de 1078 T/h.

c) Calcula en qué momento del turno se produce cemento a mayor ritmo, es decir, en qué momento la producción marginal es máxima.

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA EMPRESA – G. ADE (UAM) – Junio de 2011

1. [1,5 puntos] Hoy hemos comprado el mobiliario de nuestra oficina. Hemos dado una entrada de 200 euros y, para pagar el resto, haremos unas entregas de 100 euros al mes durante 2 años, la primera de las cuales la realizaremos dentro de un mes. Calcula el valor final de dicho mobiliario si los tipos de interés en el próximo año estarán al 3% nominal anual y en el año siguiente al 5% nominal anual (ambos con capitalización mensual de intereses).

2. [1,5 puntos] Tenemos la opción de invertir cierto capital en dos cuentas: la primera de ellas es al 4% nominal anual con capitalización mensual de intereses, y la segunda es al 4,25% nominal anual con capitalización bimensual de intereses. Si queremos invertir nuestro capital durante 5 años, ¿qué cuenta es más interesante?

3. [1,5 puntos] Sea $C(x) = 8 + x + \frac{1}{2}x^2$ la función de costes de una empresa monopolista, donde $x \geq 0$ es el número de unidades producidas de cierta mercancía, y cuya función inversa de demanda (o precio por unidad) es $p(x) = \frac{64}{1+x}$. Determina para qué producción de la mercancía y a qué precio de venta por unidad la empresa obtiene su máximo beneficio. Recuerda que el beneficio viene dado por la fórmula $B(x) = xp(x) – C(x)$

4. [2,5 puntos] Los datos de consumo de Red Eléctrica Española muestran que el consumo acumulado de energía en mega-vatios (MW) a lo largo del pasado domingo en la comunidad de Madrid siguió la función: $C(t) = 3600t - 630t^2 + 52t^3 - t^4$ donde $t \in [0,24]$ indica el tiempo en horas transcurrido desde las 0 h del domingo.

- Calcula el consumo total de energía en la comunidad de Madrid del domingo pasado.
- Demuestra que en algún momento del día la demanda de energía, es decir, el consumo marginal, fue de 27648 MW/h.
- Calcula el momento del día en que la demanda de energía fue mayor.

MÉTODOS MATEMÁTICOS – G. ADE (UAM) – Mayo de 2011

3. Una piscifactoría estima que el nivel de recuperación del salmón en cautividad se mide mediante un índice que viene dado por la siguiente forma cuadrática: $r(x, y, z) = mx^2 + 2mxy + y^2 + z^2$, donde $m \in \mathbb{R}$ y x, y y z son variables que dependen tanto del volumen de explotación como de condiciones adicionales.

a) Clasificar la forma cuadrática r en función de los posibles valores de $m \in \mathbb{R}$. **(1.5 puntos)**

b) Si la empresa asume una producción sostenible de forma que no autoriza niveles de recuperación negativos, determine los posibles valores de m con los que se mantendrá la explotación de los salmones. **(0.5 puntos)**

4. Como es bien sabido la Comisión Europea controla la producción a nivel de la Unión de ciertos productos para asegurar precios. Los países A y B son los únicos productores de aceite de oliva en la actualidad. Las producciones respectivas en millones de toneladas/año de estos países se denotan por x e y respectivamente. Los expertos de la Unión han determinado en base a datos históricos que el precio medio en origen en la U.E. del hectolitro de aceite viene dado por la fórmula: $P(x, y) = 2(x^3 - 2x) + 5(y^3 - 7y)$. Los cupos de producción actuales de los países A y B son de $x = 2$ e $y = 3$ (millones de toneladas) respectivamente.

a) Demuestra que y, la producción del país B, está determinada por una función implícita $y = f(x)$ en un entorno de (2, 3) (las producciones actuales) para el conjunto de indiferencia del precio actual. **(1 punto)**

b) Calcula cuál tendría que ser la producción aproximada del país B si el país A quiere aumentar su producción en 0,5 millones de toneladas al año y la U.E. quiere mantener el nivel de precio medio por hectolitro actual. **(1 punto)**

Enunciados de examen sin ninguna referencia económica:

ÁLGEBRA LINEAL, Grado de Economía y Finanzas (UAM) de Junio de 2011; ANÁLISIS MATEMÁTICO, Grado de Economía y Finanzas (UAM) de Mayo de 2011; MATEMÁTICAS III, Grados de ECO y ADE (UPF) de Junio de 2010; ÁLGEBRA LINEAL, Grado de Economía y Finanzas. Universidad; Universidad de VIGO

Anexo 3.1. Desarrollo de la praxeología matemática correspondiente al «curso cero» realizado en el curso académico 2006/07 en el Instituto Químico de Sarrià (Universidad Ramon Llull)

El caso de las funciones afines

La primera sub-cuestión que se plantea es la siguiente:

Q_1: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son funciones afines?

Se consideran dos técnicas puede esencialmente disponibles:

- *Técnica algebraica* (τ_a), basada en la manipulación de $ax + b \geq cx + d$:
  Si $a > c$, se obtiene: $ax + b \geq cx + d \Leftrightarrow (a - c)x + (b - d) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{d-b}{a-c}$
  Si $a < c$, cambia el sentido de la desigualdad: $ax + b \geq cx + d \Leftrightarrow x \leq \frac{d-b}{a-c}$

En la enseñanza secundaria española, las dificultades con los cambios de sentido de las desigualdades provoca la sustitución de la técnica anterior por otra técnica que reduce la resolución de las desigualdades a la de las ecuaciones correspondientes. En primer lugar se resuelve la ecuación $f - g = 0$ y después se evalúa la función $f - g$ en un punto de cada uno de los intervalos delimitados por las soluciones:

- *Técnica algebraicoecuacional* (τ_{ae}) basada en la reducción de la desigualdad a la ecuación correspondiente: Dado $ax + b \geq cx + d$, se considera: $ax + b = cx + d \Leftrightarrow x = \frac{d-b}{a-c}$. Se evalúa $f - g$ en un punto de $\left(-\infty, \frac{d-b}{a-c}\right)$ y en otro de $\left(\frac{d-b}{a-c}, \infty\right)$ y se decide el signo de la desigualdad ($f < g$ ó $f > g$).

En la enseñanza secundaria, *el entorno tecnologicoteórico* de las dos técnicas anteriores se limita a las reglas del cálculo algebraica y ecuacional (de aquí la evolución de τ_a hacia τ_{ae}). De todas formas, en este caso, un razonamiento gráfico basado en las pendientes de las rectas asociadas a las funciones afines permite dar una justificación sencilla al cambio de signo de la desigualdad cuando $a < c$.

El caso de les funciones cuadráticas.

La segunda sub-cuestión que se plantea es la siguiente:

Q_2: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son funciones polinómicas de 2º grado?

Cuando $f - g$ es un polinomio de segundo grado, la *técnica algebraica* fracasa[41]. La *técnica algebraicoecuacional* sigue siendo eficaz aunque requiere en algunos casos un número elevado de cálculos. También presenta cierta «complejidad» a nivel tecnológico: se tiene que escribir la función cuadrática $f - g$ como un producto de dos factores afines (factorizar) y estudiar el signo del producto en función del signo de cada factor. Curiosamente, esta técnica acostumbra a fracasar (en manos de los estudiantes) cuando la función cuadrática no tiene raíces reales.

Por razones de economía y fiabilidad, tiene sentido entonces considerar una tercera técnica basada en la representación gráfica de f y g:

- *Técnica gráfica* **(**τ_g): se esbozan las dos parábolas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y se establece gráficamente en que intervalos $f(x) \geq g(x)$. Para determinar numéricamente los intervalos solución, se calculan los puntos de corte, si existen.

Veamos ahora la construcción de esta técnica gráfica que permite representar la gráfica de $f(x) = a(x - b)^2 + c$ a partir de la de $f(x) = x^2$ y la gráfica de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ a partir de la de $f(x) = a(x - b)^2 + c$.

Construcción de la técnica gráfica

1. Translaciones: paso de $f(x) = x^2$ a $f(x) = (x - b)^2 + c$

   Por un lado, se considera la gráfica de $f(x) = x^2$ y se le aplica un desplazamiento horizontal de b unidades para obtener la gráfica de $f(x) = (x - b)^2$ donde su vértice se ha desplazado del punto (0,0) al punto (b,0). (*figura 1.1*)

   Por otro lado, si a la gráfica de $f(x) = x^2$ se le aplica un desplazamiento vertical de c unidades, se obtiene la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ donde su vértice se ha desplazado del punto (0,0) al punto (0,c). (*figura 1.2*)

   Finalmente, combinando los dos desplazamientos, se llega a la gráfica de $f(x) = (x - b)^2 + c$, donde su vértice se ha desplazado del punto (0,0) al punto (b,c). (*figura 1.3*)

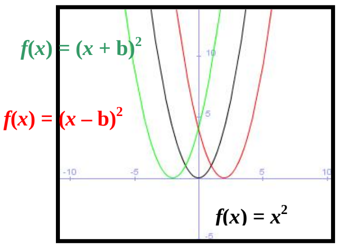


figura 1.1

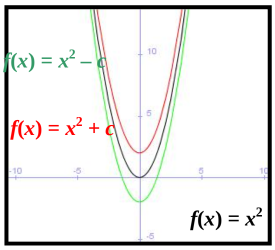


figura 1.2

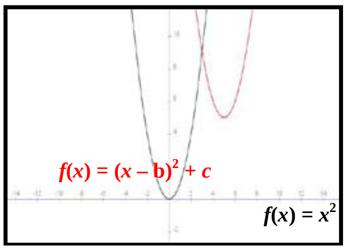


figura 1.3

41 Una posible resolución de $ax^2 + bx + c \geq 0$ consistiría en «completar cuadrados» hasta obtener una inecuación equivalente del tipo $a(x - p)^2 + q \geq 0$. Esta inecuación se transforma en $(x - p)^2 \geq - q/a$,y después de una discusión sobre el signo de $-q/a$, se puede llegar a la solución: $|x - p| \geq \sqrt{-q/a}$. Pero esta técnica está muy lejos del trabajo matemático que se hace en Secundaria.

2. Dilataciones: Paso de $f(x) = x^2$ a $f(x) = ax^2$

Si $0 < a < 1$ se tiene que la parábola resultante es más «ancha» que la $f(x) = x^2$ pero el vértice no ha variado su posición (*figura 1.4*).

Si $a > 1$ se tiene que la parábola resultante es más «estrecha» que la $f(x) = x^2$ pero el vértice no ha variado su posición (*figura 1.4*).

Si a es negativa la parábola «cambia de sentido» pero se mantienen las consideraciones anteriores (*figura 1.5*).

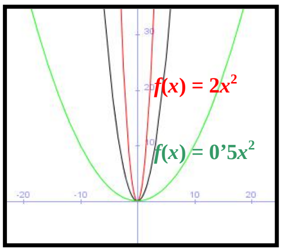


figura 1.4

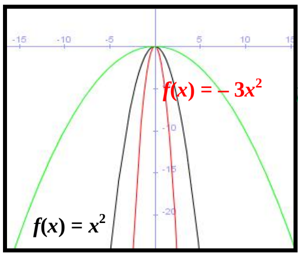


figura 1.5

3. Combinaciones: como pasar de $f(x) = x^2$ a $f(x) = a(x – b)^2 + c$

Se aplica un desplazamiento del vértice (0,0) al punto (b,c) y se modifica el ancho en función del valor de a en los términos explicados antes (*figura 1.6*)

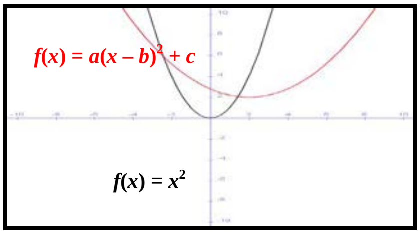


figura 1.6

En la práctica, esta última técnica resulta más eficiente que las algebraicas. Por un lado, la representación gráfica permite determinar muy rápidamente la solución cuando las dos parábolas no se cortan o se cortan en algún punto evidente. Por otro lado, la técnica es menos sensible a posibles errores numéricos ya que la gráfica permite obtener a priori un valor aproximado de las soluciones.

Notemos también que la τ_g da respuesta a la cuestión Q_1 y, sobretodo, permite resolver de manera eficaz las desigualdades donde f y g son funciones cuadráticas y afines «elementales» (cuya representación gráfica es inmediata, como por ejemplo $x^2 \leq x – 3$).

4. Caso general: como pasar de $f(x) = x^2$ a $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

La técnica anterior se puede ampliar fácilmente al caso en que la parábola se presenta en forma canónica $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. En efecto, desarrollando la expresión $a(x – b)^2 + c$, se obtienen las equivalencias: A = a, B = – $2ab$ y C = $ab^2 + c$.

La gráfica se deduce entonces del cálculo del vértice de abscisas $–B/2A$, de la «posición» de la parábola (A > 0 ó A < 0) y, si se necesita, del cálculo de los puntos de corte con el eje Ox.

El caso de las funciones cúbicas

La tercera sub-cuestión a considerar es la siguiente:

Q_3: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son funciones polinómicas de 3r grado?

Cuando $f - g$ es un polinomio de grado 3, la *técnica algebraico-ecuacional* requiere la resolución de una ecuación de tercer grado. Excepto casos excepcionales (raíces evidentes), el algoritmo de resolución por radicales no acostumbra a ser del dominio del estudiante. Esta limitación fuerte de τ_{ae} justifica el recurso a la técnica gráfica que sufre aquí una clara modificación respecto al caso anterior ya que en la mayoría de las veces los intervalos solución sólo se podrán obtener de manera aproximada (usando el método de dicotomía, por ejemplo).

- *Técnica grafico-numérica* (τ_{gn}): se esbozan las dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y se establece gráficamente y de manera aproximada en que intervalos $f(x) \geq g(x)$. Para determinar numéricamente los intervalos solución se determina gráficamente un primer valor aproximado de la solución que se «refina» posteriormente utilizando el método de dicotomía.[42]

Construcción de la técnica gráfica

Notamos aquí que, en secundaria, la representación gráfica de una función cúbica no acostumbra a ser del dominio del alumno.

6.1.1. Translaciones: Paso de $f(x) = x^3$ a $f(x) = (x - b)^3 + c$

Se considera la gráfica de $f(x) = x^3$ y se le aplica un desplazamiento horizontal de b unidades para obtener la gráfica de $f(x) = (x - b)^3$ donde el punto de inflexión pasa del (0,0) al (b,0). (figura 2.1).

Se considera la gráfica $f(x) = x^3$ y se le aplica un desplazamiento vertical de c unidades para obtener la gráfica de $f(x) = x^3 + c$ donde el punto de inflexión pasa del (0,0) al (0,c). (figura 2.2).

Finalmente consideramos el caso general $f(x) = (x - b)^3 + c$, donde se tiene un desplazamiento del punto de inflexión del (0,0) al (b,c) (figura 2.3).

42 El método de dicotomía (o bisección) se basa en el teorema de Bolzano según el cual una función F real continua en un intervalo $[a,b]$ tal que $F(a)F(b) < 0$ tiene al menos un cero $c \in (a,b)$. Para resolver la ecuación $F(x) = 0$, se evalúa F en el punto medio de $[a,b]$ y, en función de su signo, se determina el subintervalo donde se encuentra el cero de la función. Se repite el procedimiento obteniendo en el paso n-ésimo un intervalo de longitud $(b - a)/2^n$ donde se encuentra la solución. (Ortega 1990).

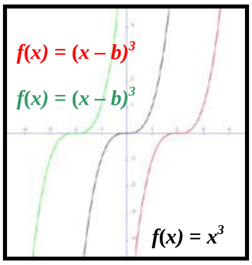


figura 2.1

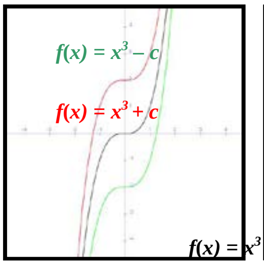


figura 2.2

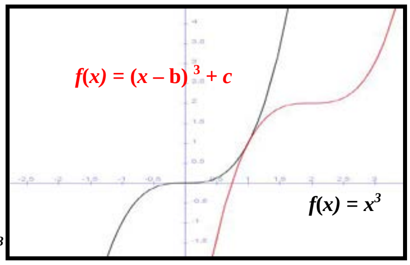


figura 2.3

2. Dilataciones: Paso de f(x) = x^3 a f(x) = ax^3

Si 0 < *a* < 1 se tiene que la cúbica resultante es más «ancha» que $f(x) = x^3$ pero el punto de inflexión no ha variado su posición (figura 2.4).

Si *a* > 1 se tiene que la cúbica resultante es más «estrecha» que la $f(x) = x^3$ pero el punto de inflexión no ha variado su posición (figura 2.4).

Si *a* es negativa la hipérbola «cambia de sentido» pero se mantienen las consideraciones anteriores (figura 2.5).

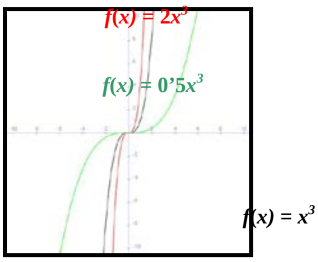


figura 2.4

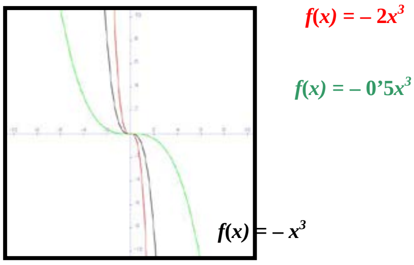


figura.2.5

3. Combinaciones: cómo pasar de $f(x) = x^3$ a $f(x) = a(x – b)^3 + c$

Hay un desplazamiento del punto de inflexión del (0,0) al punto (*b*,*c*) y la anchura depende del valor de *a* en los términos explicados antes (figura 2.6)

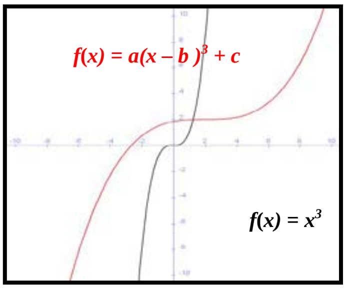


figura 2.6

4. Caso general: cómo pasar de $f(x) = x^3$ a $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Siguiendo un procedimiento similar al caso cuadrático, tendríamos que desarrollar la expresión $a(x – b)^3 + c$, y obtendríamos las equivalencias: $A = a$, $B = –3ab$, $C = 3ab^2$, $D = – ab^3 + c$. Donde se deduce que la reducción sólo es posible cuando $B^2 = 2AC$.

En general, si consideramos el caso $A = 1$, el que sí podemos hacer es reducir cualquier cúbica de la forma $x^3 + Bx^2 + Cx + D$ en una expresión del tipo z^3 + z + utilizando el cambio de Vieta x = z – B/3.

Llegados a este punto, es importante señalar que la resolución gráfica de la inecuación $f(x) \geq g(x)$ puede llevarse a cabo de muchas formas diferentes, ya sea representando directamente las dos funciones iniciales f y g, ya sea buscando una inecuación equivalente $h(x) \geq k(x)$ donde h y k sean funciones de representación inmediata o cuasi inmediata. Así por ejemplo, la inecuación $3x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq x^3 + 2x$ puede dar lugar a las inecuaciones equivalentes: $2x^3 \geq x^2 + 4x - 1$ ó $2x^3 + 1 \geq x^2 + 4x$. En general, el estudio del caso homogéneo $2x^3 - x^2 - 4x + 1 \geq 0$ acostumbra a dar lugar a una gráfica no inmediata que requiere el estudio de las variaciones de la función (derivada, etc.). De todas formas, este estudio puede llegar a ser necesario, ya que no siempre es evidente establecer con seguridad el número de intersecciones entre las curvas $y = h(x)$ y $y = k(x)$.

El caso de las funciones hiperbólicas

La cuarta sub-cuestión que abordamos se puede formular en los términos siguientes:

Q_4: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son hipérbolas del tipo $\frac{a}{x-b} + c$?

- τ_a: Si al hacer $f - g$ queda un polinomio de grado < 2, se puede actuar como en el caso de las funciones afines. Si no es así, no se puede continuar, se debe cambiar a alguna de las otras técnicas.
- τ_{ae}: Surgen muchas dificultades para factorizar $f - g$, por lo que es mejor cambiar de técnica.
- τ_g: se esbozan las dos funciones y visualmente se establecen en que intervalos $f(x) \geq g(x)$, ayudados del punto de corte, si existe, calculados previamente.
- τ_{gn}: se utilizará si al aplicar la técnica τ_g no se pueden calcular los puntos de corte. Una vez esbozadas las dos funciones se aplica el método de dicotomía para aproximar la solución.

Notemos que, al igual que en los casos anteriores, la representación gráfica de una hipérbola no acostumbra a ser del dominio del alumno. Se tendrá, por tanto, que hacer una extensión de la técnica gráfica utilizada anteriormente:

Construcción de la técnica gráfica

1. Translaciones: Paso de $f(x) = \frac{1}{x}$ a $f(x) = \frac{1}{x-b} + c$

   Se considera la gráfica de $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ y se le aplica un desplazamiento horizontal de b para obtener la gráfica de $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x-b}}$ donde el centro de la hipérbola pasa del punto (0,0) al punto (b,0). (figura 3.1)

   Se considera la gráfica $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ y se le aplica un desplazamiento vertical de c unidades para obtener la gráfica de $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{c}$ donde el centro de la hipérbola pasa del punto (0,0) al punto (0,c). (figura 3.2)

Finalmente se considera el caso general, donde lo que se tiene es un desplazamiento del centro de la hipérbola del punto (0,0) al punto (*b*,*c*) (figura 3.3).

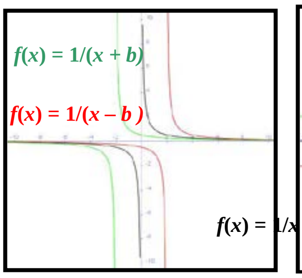


figura 3.1

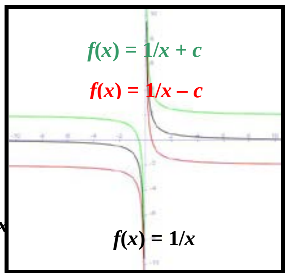


figura 3.2

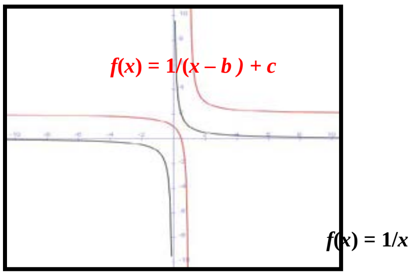


figura 3.3

2. Dilataciones: Paso de $f(x) = \frac{1}{x}$ **a** $f(x) = \frac{a}{x}$

Si $0 < a < 1$ se tiene que la hipérbola resultante es más «ancha» que la $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ pero el centro de la hipérbola no ha variado su posición (figura 3. 4).

Si $a > 1$ se tiene que la hipérbola resultante es más «estrecha» que la $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ pero el centro de la hipérbola no ha variado su posición (figura 3.4).

Si *a* es negativa la hipérbola «cambia de sentido» pero se mantienen las consideraciones anteriores (figura 3.5).

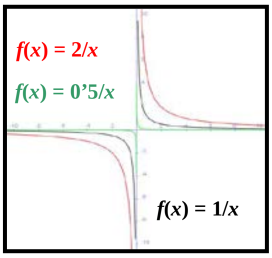


figura 3.4

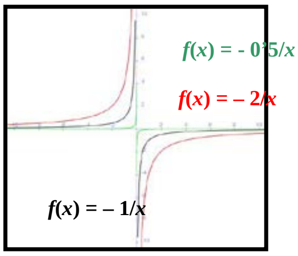


figura 3.5

3. Combinaciones: cómo pasar de $f(x) = \frac{1}{x}$ **a** $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$

Hay un desplazamiento del centro de la hipérbola (0,0) al punto (*b*,*c*) y la anchura depende del valor de *a* en los términos explicados antes (figura 3.6).

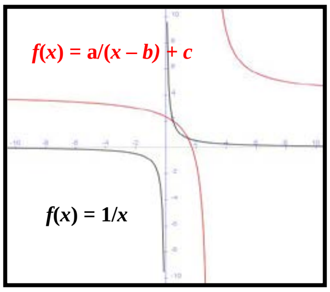


figura 3.6.

La quinta sub-cuestión se puede formular en los términos siguientes:

Q_5: ¿Para qué x se cumple $f(x) \geq g(x)$ si f y g son exponenciales del tipo $a^{x-b} + c$?

Las técnicas algebraicas τ_a y τ_{ae} fracasan prácticamente siempre.

- Para aplicar la *técnica gráfica*, se esbozan las dos funciones y visualmente se establece en que intervalos $f(x) \geq g(x)$, a partir de los puntos de corte, si existen, calculados previamente.

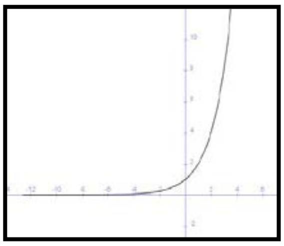
- Se utilizará la *técnica graficonumérica* si al aplicar la técnica gráfica no se pueden calcular los puntos de corte. Una vez esbozadas las dos funciones se aplica el método de dicotomía para acotar la solución.

Notemos que, en la misma línea que los casos anteriores, la representación gráfica de una exponencial no acostumbra a ser del dominio del alumno.

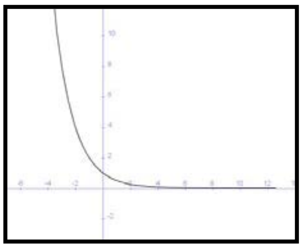
Construcción de la técnica gráfica

A diferencia de las familias de funciones anteriores, la representación gráfica de la exponencial tiene un tratamiento diferente. Para empezar, hace falta distinguir dos casos, en función de los valores que puede tomar la base:

Si $a > 1$: la gráfica de $f(x)=a^x$ es $f(x)=a^x$ es creciente

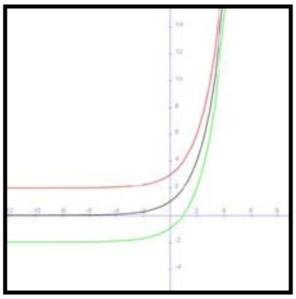


Si $0 < a < 1$: la gráfica de decreciente



1. Translaciones: Paso de $f(x) = a^x$ a $f(x) = a^x + c$

   Independientemente del valor de a se produce un desplazamiento vertical de c unidades (es decir, su asíntota horizontal se desplaza c unidades)



$f(x) = a^x + c$

$f(x) = a^x$

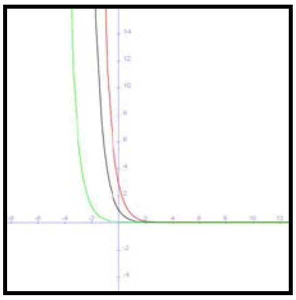
$f(x) = a^x - c$

2. Dilataciones: Paso de $f(x) = a^x$ a $f(x) = a^{x-b} = a^x . a^{-b} = da^x$ (d > 0)

Si 0 < d < 1 se tiene que la exponencial resultante es más «ancha» que la $f(x) = a^x$ pero sin variar su asíntota horizontal.

Si d > 1 se tiene que la exponencial resultante es más «estrecha» que la $f(x) = a^x$ pero sin variar su asíntota horizontal.

Si d es negativa la hipérbola «cambia de sentido» pero se mantienen las consideraciones anteriores (distinguiendo entre 0 < |d| < 1 i |d| > 1)



$f(x) = 2a^x$

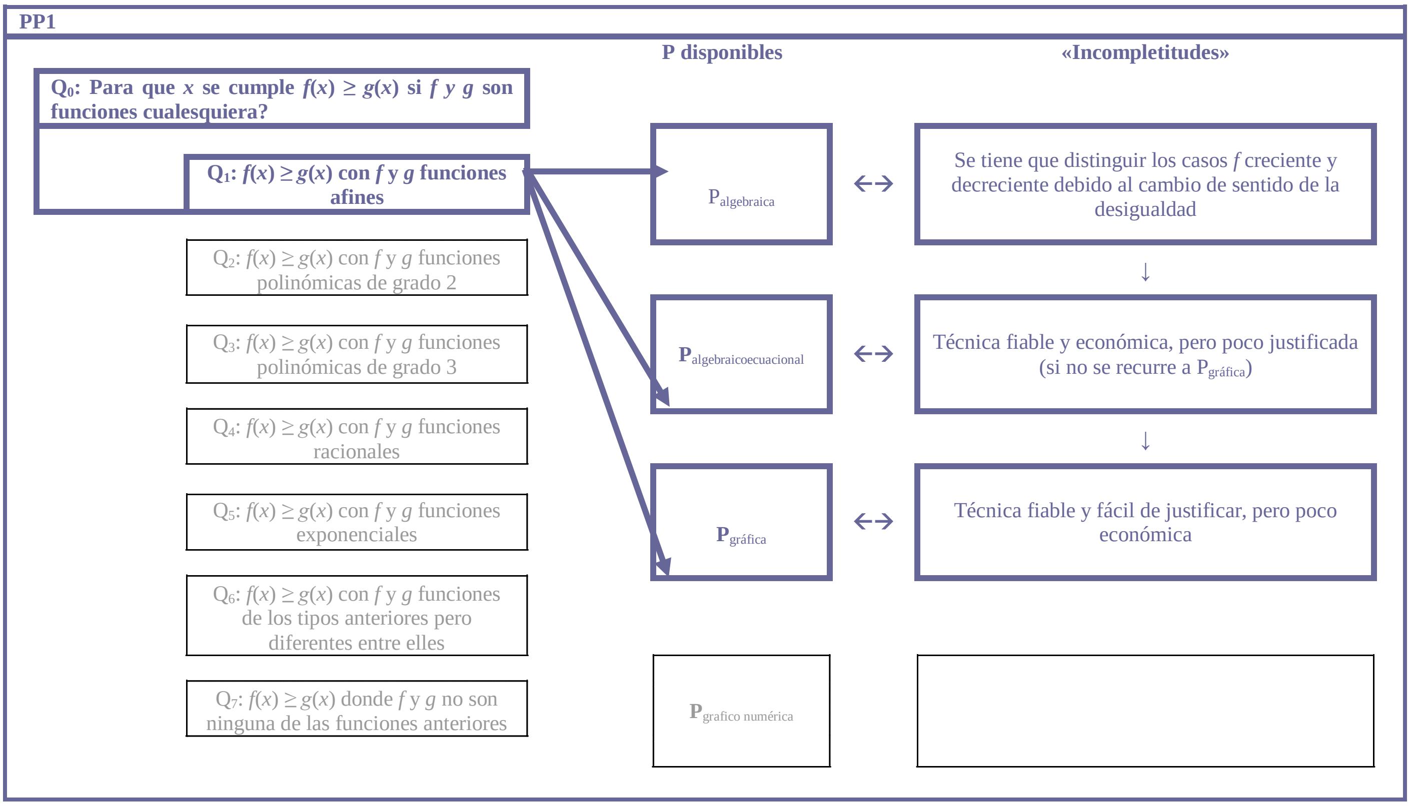
$f(x) = a^x$

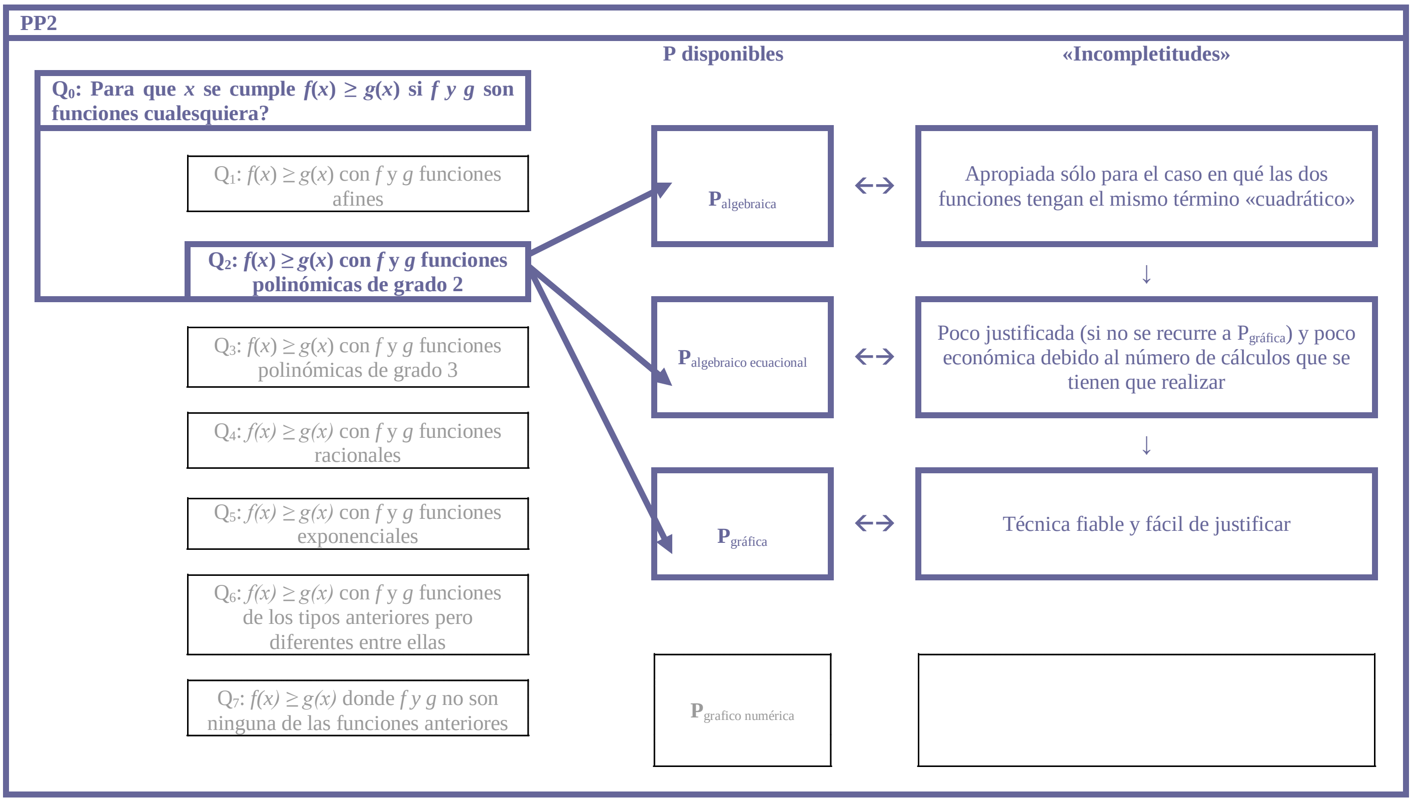
$f(x) = 0'5a^x$

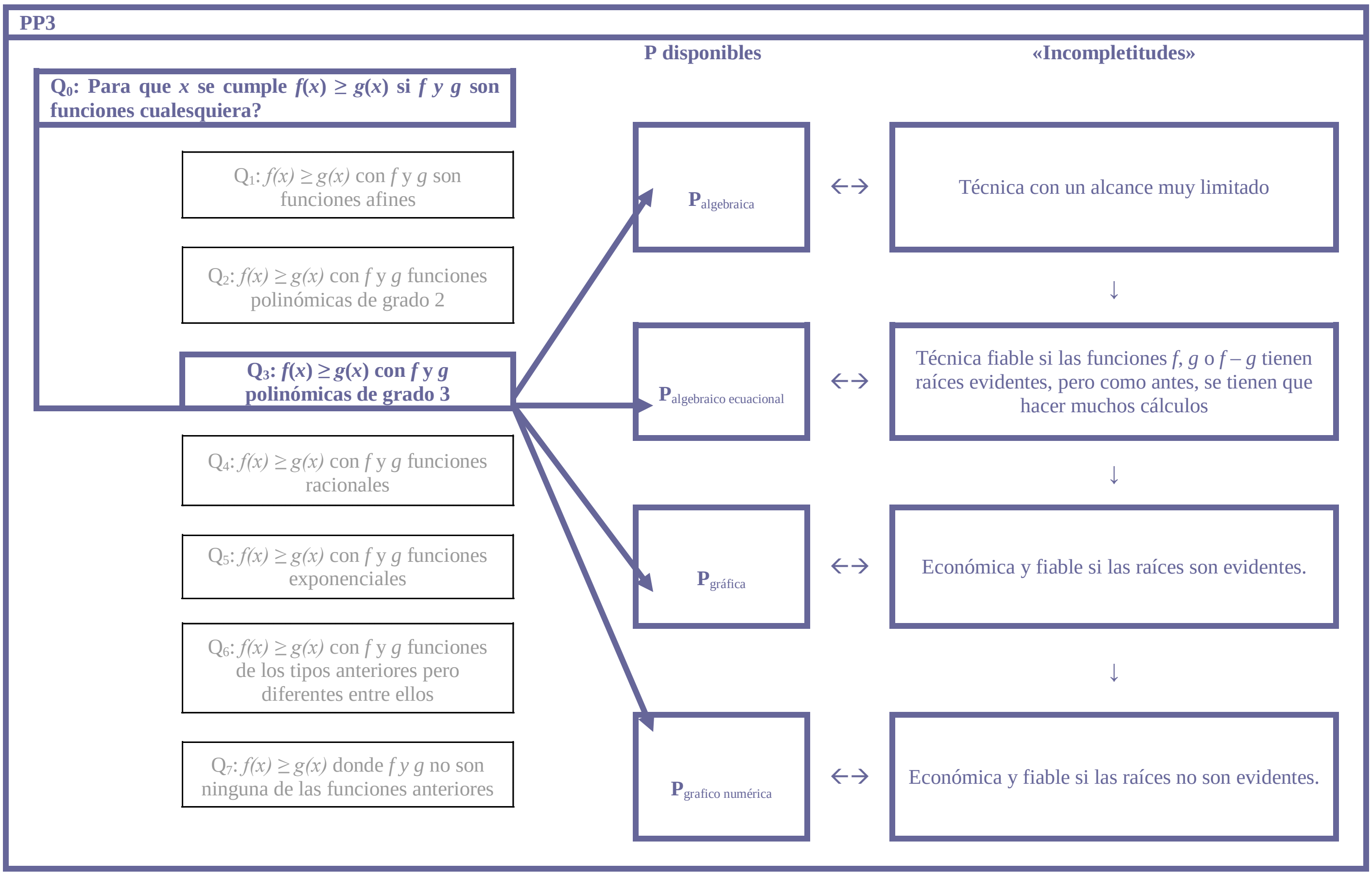
3. Caso general: como pasar de $f(x) = a^x$ a $f(x) = a^{x-b} + c = da^x + c$ (d > 0)

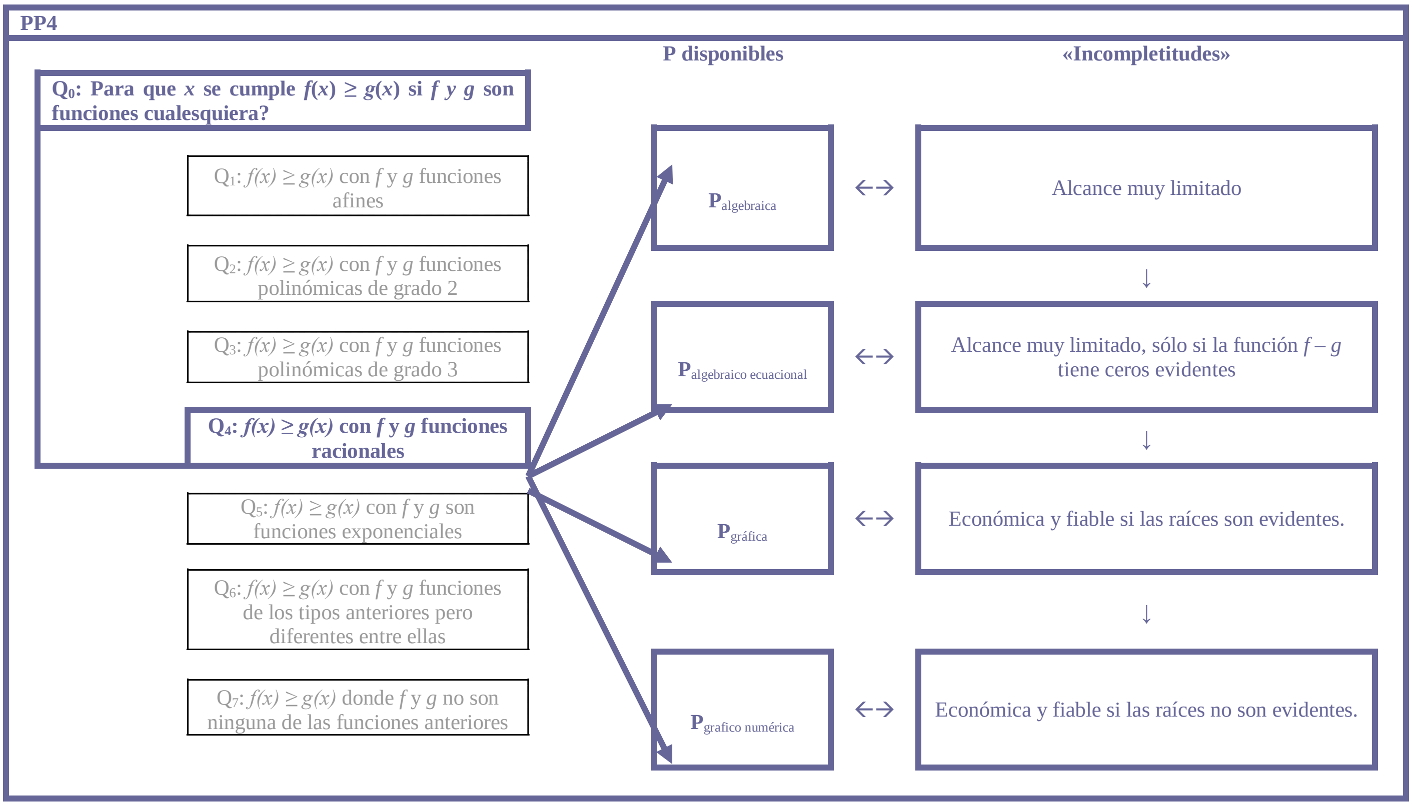
Hace falta aplicar un desplazamiento horizontal de c unidades y modificar la anchura según el valor de d en los términos explicados antes.

Anexo 3.2. Esquema del modelo epistemológico de referencia utilizado en el «curso cero» del 2006/07






PP3
P disponibles
«Incompletitudes»
Q₀: Para que x se cumple f(x) ≥ g(x) si f y g son funciones cualesquiera?
Q1: f(x) ≥ g(x) con f y g son funciones afines
Q2: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones polinómicas de grado 2
Q3: f(x) ≥ g(x) con f y g polinómicas de grado 3
Q4: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones racionales
Q5: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones exponenciales
Q6: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones de los tipos anteriores pero diferentes entre ellos
Q7: f(x) ≥ g(x) donde f y g no son ninguna de las funciones anteriores
P algebraica
P algebraico ecuacional
P gráfica
P grafico numérica
Técnica con un alcance muy limitado
Técnica fiable si las funciones f, g o f – g tienen raíces evidentes, pero como antes, se tienen que hacer muchos cálculos
Económica y fiable si las raíces son evidentes.
Económica y fiable si las raíces no son evidentes.


PP4
P disponibles
«Incompletitudes»
Q₀: Para que x se cumple f(x) ≥ g(x) si f y g son funciones cualesquiera?
Q1: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones afines
Q2: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones polinómicas de grado 2
Q3: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones polinómicas de grado 3
Q4: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones racionales
Q5: f(x) ≥ g(x) con f y g son funciones exponenciales
Q6: f(x) ≥ g(x) con f y g funciones de los tipos anteriores pero diferentes entre ellas
Q7: f(x) ≥ g(x) donde f y g no son ninguna de las funciones anteriores
P algebraica
P algebraico ecuacional
P gráfica
P grafico numérica
Alcance muy limitado
Alcance muy limitado, sólo si la función f – g tiene ceros evidentes
Económica y fiable si las raíces son evidentes.
Económica y fiable si las raíces no son evidentes.

PP5

P disponibles | **«Incompletitudes»**

Q$_0$: Para que *x* se cumple $f(x) \geq g(x)$ si *f* y *g* son funciones cualesquiera?

Q$_1$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones afines?

Q$_2$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones polinómicas de grado 2

Q$_3$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones polinómicas de grado 3

Q$_4$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones racionales

Q$_5$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones exponenciales

Q$_6$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones de los tipos anteriores pero diferentes entre ellas

Q$_7$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* no son ninguna de les funciones anteriores

P disponibles		«Incompletitudes»
$\mathbf{P}_{\text{algebraica}}$	←→	Alcance limitadísimo
		↓
$\mathbf{P}_{\text{algebraico ecuacional}}$	←→	Alcance limitadísimo
		↓
$\mathbf{P}_{\text{gráfica}}$	←→	Fiable y eficaz si la función $f - g$ tiene raíces evidentes
		↓
$\mathbf{P}_{\text{grafico numérica}}$	←→	Apropiada si las raíces no son evidentes

PP6

Q$_0$: Para que *x* se cumple $f(x) \geq g(x)$ si *f* y *g* son funciones cualesquiera?

Q$_1$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones afines

Q$_2$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones polinómicas de grado 2

Q$_3$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones polinómicas de grado 3

Q$_4$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones racionales

Q$_5$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones exponenciales

Q$_6$: $f(x) \geq g(x)$ con *f* y *g* funciones de los tipos anteriores pero diferentes entre ellos

Q$_7$: $f(x) \geq g(x)$ donde *f* y *g* no son ninguna de les funciones anteriores

P disponibles		«Incompletitudes»
$\mathbf{P}_{\text{algebraica}}$	←→	Alcance limitado
		↓
$\mathbf{P}_{\text{algebraico ecuacional}}$	←→	Alcance limitado
		↓
$\mathbf{P}_{\text{gráfica}}$	←→	Óptima si las raíces son evidentes
		↓
$\mathbf{P}_{\text{grafico numérica}}$	←→	Óptima si las raíces no son evidentes.

Anexo 3.3. Material entregado durante el «curso cero» del 2006/07

INGRESOS $I(x)$	COSTES $C(x)$
(1) $I(x) = 1{,}06\cdot x - 10$	**(a)** $C(x) = x/4 + 7$
(2) $I(x) = 3\cdot x + 2$	**(b)** $C(x) = 4\cdot x$
(3) $I(x) = x/100$	**(c)** $C(x) = 0{,}5\cdot x + 0{,}25$
(4) $I(x) = x^2 - 3{,}5$	**(d)** $C(x) = 2\cdot x$
(5) $I(x) = 5$	**(e)** $C(x) = x^2 + 2\cdot x - 1$
(6) $I(x) = x^2 - 3\cdot x$	**(f)** $C(x) = 0{,}5\cdot x^2 + 4{,}5\cdot x + 9$
(7) $I(x) = (x + 2)^2 - 4$	**(g)** $C(x) = (x + 1)\cdot(x + 3)$
(8) $I(x) = x - 50$	**(h)** $C(x) = 0{,}03\cdot(x + 1)^2 + 3$
(9) $I(x) = 5\cdot x - 3$	**(i)** $C(x) = 0{,}5\cdot x^2 + 2\cdot x$
(10) $I(x) = x^2 + 4\cdot x$	**(j)** $C(x) = (x + 1)^2 + 1$
(11) $I(x) = \frac{1}{4}\cdot x^2$	**(k)** $C(x) = x^2 + 2{,}5\cdot x + 1{,}5$
(12) $I(x) = 3\cdot(x + 10) - 30$	**(l)** $C(x) = \frac{2}{5}\cdot x + 2$
(13) $I(x) = 0{,}5\cdot(x - 5)^2 - 12{,}5$	**(m)** $C(x) = 0{,}02\cdot(x + 1)^2 + 5$
(14) $I(x) = (x - 1)^3$	**(n)** $C(x) = \frac{7}{8}\cdot x + 7$
(15) $I(x) = 2\cdot(x - 1)^3 - 2$	**(o)** $C(x) = 15$
(16) $I(x) = 5\cdot x^2 + 8\cdot x$	**(p)** $C(x) = 4\cdot x^2 + 7\cdot x + 2$
(17) $I(x) = x\cdot(x + 1)^2$	**(q)** $C(x) = x^3 + 2$
(18) $I(x) = (x + 1)\cdot x\cdot(x + 5)$	**(r)** $C(x) = 0{,}2\cdot(x + 5)^2$
(19) $I(x) = 0{,}4\cdot x\cdot(2x + 7)$	**(s)** $C(x) = x^3 + 1$
(20) $I(x) = (x - 2)^3 - 8$	**(t)** $C(x) = 0{,}3\cdot(x + 3)^2 - 2$
(21) $I(x) = 0{,}1\cdot(x - 5)^3$	**(u)** $C(x) = 0{,}1\cdot x^2 + 5$
(22) $I(x) = 2\cdot(x - 1)^3 - 2$	**(v)** $C(x) = 0{,}15\cdot x^3 + 6$
(23) $I(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	**(w)** $C(x) = 0{,}75\cdot x$
(24) $I(x) = 3 - \frac{1}{x}$	**(x)** $C(x) = 0{,}75\cdot x$
(25) $I(x) = \frac{-1}{x - 30}$	**(y)** $C(x) = 0{,}5\cdot x + 5$
(26) $I(x) = \frac{5\cdot x - 4}{x}$	**(z)** $C(x) = 0{,}25\cdot x + 1$
(27) $I(x) = 7 - \frac{2}{x^2}$	**(aa)** $C(x) = 0{,}5\cdot(x + 2)^2$
(28) $I(x) = \frac{-1}{x - 4} - 0{,}25$	**(bb)** $C(x) = x + 4$
(29) $I(x) = 1{,}3^x - 1$	**(cc)** $C(x) = 0{,}05\cdot x^2 + 0{,}6$
(30) $I(x) = 1{,}04^x$	**(dd)** $C(x) = x^3 + 13\cdot x^2 + 50\cdot x + 56$
(31) $I(x) = 10 - \frac{1}{2^x}$	**(ee)** $C(x) = \frac{-2}{x - 50}$
(32) $I(x) = 1{,}5^x$	**(ff)** $C(x) = 0{,}02\cdot x^2$
(33) $I(x) = \frac{-5}{x^2 - 4}$	**(gg)** $C(x) = 0{,}02\cdot(x + 2)^3$
(34) $I(x) = 1 - 0{,}9^x$	**(hh)** $C(x) = 0{,}4\cdot x^3 + 0{,}5$
(35) $I(x) = -\frac{1}{x} + 1$	**(ii)** $C(x) = x + 1$
(36) $I(x) = \frac{-2}{x + 5} + 4$	**(jj)** $C(x) = \frac{-1}{x - 3}$
(37) $I(x) = 10 - \frac{10}{x}$	
(38) $I(x) = \frac{1}{x + 2} + x^2 - 2$	
(39) $I(x) = \frac{1}{2}x$	
(40) $I(x) = 3 + \frac{7}{2x - 1}$	

Anexo 3.4 Material entregado durante el «curso cero» del 2006/07

Ejercicio 1

El coste de fabricación (en €) de un determinado artículo para la producción de x unidades viene dado por la función $C(x) = x^2 + 100x$

(a) Representa la función gráficamente
(b) ¿Para qué producciones el coste es nulo? ¿Cuál es el coste cuando todavía no se ha producido nada? ¿Para qué producciones el coste es superior a 500 €?
(c) Da la expresión general de la función de ingresos para la venta de x unidades del articulo si el precio de venta es de 120 € por unidad. Representa la función de ingresos juntamente con la de costes.
(d) ¿Qué cantidades tiene que producir la empresa para tener beneficios positivos? Indica en la gráfica qué producciones permiten tener más beneficios.
(e) Repetir los apartados anteriores si la empresa se ve forzada a añadir un coste constante de mantenimiento de la maquinaria de 50 €. ¿Cómo influye este hecho a la función de costes? ¿Cómo se ven afectados los beneficios?

Ejercicio 2

Repite el problema anterior (apartados (a), (b), (c) y (d)) con la función de costes:
$C(x) = 2x^2 – 3x + 1$ considerando un precio unitario inicial de 12 €.
Explica gráficamente:

- ¿Qué cambios se producen en la función de ingresos si los precios ahora son de 15 € por unidad? ¿Cómo cambian los beneficios?
- ¿Y si los precios son de 10 € por unidad?
- Determina el precio unitario mínimo a partir del cual la empresa empieza a tener beneficios.

Anexo 3.5. Enunciado del cuestionario[43] pasado a los alumnos del «curso cero» del 2004/05

Estamos haciendo una investigación sobre los cursos de setiembre que se hacen en diferentes Universidades catalanas. Por favor, contestad con la máxima sinceridad. Vuestras respuestas serán tratadas confidencialmente.

MUCHAS GRACIAS

Nota Matemáticas Bachillerato	Nota Matemáticas Selectividad	Nota de acceso a la Universidad	Tipo de Bachillerato

1. Porqué motivos decidiste hacer este curso?
2. Explica con tus palabras cual crees que es el objetivo del curso:
3. Valora del 1 al 5 las siguientes características del curso (marca la opción escogida):

(a)	Duración del curso	(muy corto=)	1 2 3 4 5	(=muy largo)
(b)	Duración de las sesiones	(muy cortas=)	1 2 3 4 5	(=muy largas)
(c)	Contenido teórico	(muy poco=)	1 2 3 4 5	(=mucho)
(d)	Contenido práctico	(muy poco=)	1 2 3 4 5	(=mucho)
(e)	Dificultad	(muy poca=)	1 2 3 4 5	(=mucha)
(f)	Tiempo dedicado a cada tema	(muy poco=)	1 2 3 4 5	(=mucho)
(g)	Han aparecido conceptos nuevos?	(muy pocos=)	1 2 3 4 5	(=muchos)
(h)	Han aparecido técnicas nuevas?	(muy pocas=)	1 2 3 4 5	(=muchas)
(i)	Cantidad de trabajo hecho *en clase*	(muy poco=)	1 2 3 4 5	(=mucho)
(j)	Cantidad de trabajo hecho *en casa*	(muy poco=)	1 2 3 4 5	(=mucho)
(k)	Crees que el curso te ha sido útil?	(muy poco=)	1 2 3 4 5	(=mucho)

4. Indica dos de las principales aportaciones del curso:
5. Indica dos de las principales deficiencias del curso:
6. Sabrías indicar alguna diferencia entre el trabajo que has realizado durante el curso y el que hacías en Secundaria?
7. Comentarios sobre el curso en general:

[43] La traducción es nuestra.

Anexo 3.6. Cuestionario a alumnos del «curso cero» 2004/05 analizado

Nota Matemáticas Bachillerato	Nota Matemáticas Selectividad	Nota de acceso a la Universidad	Tipo de Bachillerato
Media = 6.69	**Media = 5.44**	**Media = 6.35**	**Moda = Social**

1. ¿Porqué motivos decidiste hacer este curso?

   Aproximadamente el 50% de las personas que han respondido la pregunta ha citado como motivo REFRESCAR conceptos del bachillerato, un 15% adquirir una DINÁMICA de trabajo, un 10% estar más PREPARADOS en el primer curso de Universidad y el resto, AMPLIAR conceptos.

2. Explica con tus palabras cual crees que es el objetivo del curso:

   Aproximadamente el 50% de las personas que han respondido la pregunta ha citado como motivo REPASAR conocimientos, un 20% INTRODUCCIÓN de conceptos nuevos, un 20% ADQUIRIR un nivel óptimo y el resto, coger RITMO de trabajo.

3. Valora del 1 al 5 las siguientes características del curso (marca la opción escogida):

(a)	Duración del curso	(muy corto=)	Media = **3**	(=muy largo)
(b)	Duración de las sesiones	(muy cortas=)	Media = **3.45**	(=muy largas)
(c)	Contenido teórico	(muy poco=)	Media = **2.55**	(=mucho)
(d)	Contenido práctico	(muy poco=)	Media = **3.52**	(=mucho)
(e)	Dificultad	(muy poca=)	Media = **2.3**	(=mucha)
(f)	Tiempo dedicado a cada tema	(muy poco=)	Media = **2.85**	(=mucho)
(g)	¿Han aparecido conceptos nuevos?	(muy pocos=)	Media = **1.8**	(=muchos)
(h)	¿Han aparecido técnicas nuevas?	(muy pocas=)	Media = **2.9**	(=muchas)
(i)	Cantidad de trabajo hecho *en clase*	(muy poco=)	Media = **3.3**	(=mucho)
(j)	Cantidad de trabajo hecho *en casa*	(muy poco=)	Media = **2.75**	(=mucho)
(k)	¿Crees que el curso te ha sido útil?	(muy poco=)	Media = **3.75**	(=mucho)

4. Indica dos de las principales aportaciones del curso:

   Entre los más citados, encontramos las siguientes aportaciones: REFRESCAR conceptos del bachillerato, APARICIÓN de nuevas técnicas, INTRODUCCIÓN de nuevos conceptos, mucha APLICACIÓN económica, CONOCER nuevos compañeros y COGER tanto, ritmo de trabajo como de confianza.

5. Indica dos de las principales deficiencias del curso:

   De las personas que han respondido la pregunta han citado mayoritariamente la FALTA de temario y de tiempo.

6. Sabrías indicar alguna diferencia entre el trabajo que has realizado durante el curso y el que hacías en Secundaria?

   De las personas que han respondido la pregunta, mayoritariamente han indicado como principales diferencias la FORMA de trabajar, el RITMO de trabajo, la DISTRIBUCIÓN del trabajo en clase y en casa, y el hecho de que en el curso se EXPLICA el por qué de las cosas.

7. Comentarios sobre el curso en general:

   Todas las personas que han contestado esta pregunta han dado una valoración positiva.

Anexo 3.7. «Curso cero» 2009/10. Diario de sesiones.

Primera sesión

En esta primera sesión del curso, se les entrega el siguiente enunciado:

Dada la situación de crisis en la que se encuentra la industria discográfica mundial desde hace ya varios años, puede resultar interesante hacer un estudio de las actividades económicas que desempeña una empresa discográfica actual. El objetivo de este ejercicio, que se irá desarrollando a lo largo del curso introductorio, será realizar un estudio simplificado de las características empresariales y económicas de la empresa discográfica catalana Picap a través de modelos y razonamientos matemáticos, utilizando datos reales orientativos proporcionados por la propia discográfica e información que los alumnos deberán ser capaces de encontrar de forma autónoma. Con todo ello se realizará una predicción de la situación a la que podría llegar esta empresa en los próximos meses, creando debates de las ventajas y los inconvenientes de las magnitudes económicas que constituyen los modelos utilizados.

PICAP

Picap es una discográfica catalana que nació oficialmente en la primavera de 1984. La idea principal de esta empresa era dar soporte a los intérpretes y autores de Cataluña, respetando su expresión lingüística, pero dando un soporte preferencial al catalán. Picap es una empresa formada por un joven equipo de profesionales que trabajan con profesionalidad e ilusión.

Para completar dicho trabajo, se les proporciona los siguientes datos:

Grupos en contrato con Picap	Estilo musical	Fecha de inicio del contrato con la discográfica	Presupuesto medio para la grabación, masterización y diseño cada disco (1)	Presupuesto medio para la grabación de cada videoclip (1)	Ingresos medios aproximados en concepto de derechos de autor por parte de la discográfica(1)	De los discos vendidos, % que se queda el artista y % que se queda la discográfica (1) (2)	Número medio de copias vendidas hasta el momento
Albert Fibla	Canción de autor	2003	3600 €	1500 €	2500 €	6%	473
Baetúria	Folk	2004	3500 €	1600 €	1800 €	6%	350
Entregirats	Pop	2000	2000 €	1000 €	1500 €	8%	302
Keympa	Música Céltica	2001	2500 €	1300 €	1600 €	6%	411
Lexu's	Pop	2005	3400 €	1500 €	3500 €	6%	603
Naltrus	Rock	2004	3000 €	1400 €	1700 €	6%	328
Nua	Pop	2005	3500 €	1500 €	2100 €	7%	381
Pitjorestàstu	Pop/Rock	2006	3300 €	1300 €	1900 €	6%	290
Rodamons	Rock	2004	3800 €	1700 €	3500 €	6%	715
Turnéz & Sesé	Canción de autor	2000	3100 €	1200 €	2200 €	6%	436

(1) datos orientativos
(2) El porcentaje del artista, llamado Royalties, oscila entre el 5% y el 18% sobre el bruto que ingresa la discográfica por las ventas de su disco.

Además, la empresa facilita la siguiente información:

- **Estilos musicales con los que trabaja:** Pop, Rock, Canción de autor, Música Céltica y Folk, preferentemente.
- **Fuentes de ingresos de la discográfica:** La principal fuente de ingresos es la venta de discos, la segunda los derechos (emisión pública, sincronizaciones, licencias etc.) y, finalmente, las subvenciones públicas (en un claro descenso).
- **Tipos de gastos (exceptuando los de grabación, masterización y diseño) por parte de la discográfica relacionados con la edición y la venta de un disco:** Cada disco tiene un presupuesto diferente en función de las expectativas de ventas y del mercado al que se dirija, estas diferencias entre ellos pueden ser enormes.

Otros gastos en concepto de empresa: producción industrial (copias), canon de autor, canon de intérprete, promoción y publicidad, gastos de distribución, financieros, de estructura de empresa, transporte, entre otros.

- **Subvenciones de la Generalitat que recibe la discográfica por cada disco editado (datos orientativos):** La discográfica recibe unos 6000 € por cada disco editado aproximadamente.
- **De los derechos de autor, porcentaje que se queda el autor y porcentaje que se queda la discográfica:** Este canon normalmente se reparte de la siguiente forma: el 53% para la discográfica y el 47% para el autor, aproximadamente.

Esta primera sesión se dividió en dos partes. En la primera parte se llevo a cabo la elección de los equipos de trabajo, que varió entre tres y cuatro personas, a los que se les asignó un grupo musical. En la segunda se pidió a cada equipo de trabajo la búsqueda de la información siguiente sobre el grupo musical asignado:

- Duración del contrato con la discográfica hasta el momento actual.
- Número de discos editados con Picap y fecha de edición de cada uno de ellos (para ello se propone buscar en las páginas web de los grupos que se pueden encontrar en www.picap.cat, en www.actualrecords.cat o directamente en www.google.es).
- Precio de venta de cada uno de estos discos en el mercado.
- Número de canciones en cada disco.
- Duración de las canciones de cada disco.
- Número de videoclips de cada disco y fecha de presentación de estos videoclips.
- Para las canciones del grupo, ránquing de compras a través de descargas en iTunes.

Segunda sesión

Esta sesión también se divide en dos partes. En la primera, y a partir de los datos recogidos durante la primera sesión y los proporcionados por el enunciado del problema, se pide a cada grupo de trabajo responder las siguientes cuestiones:

1) Si las subvenciones que otorga la Generalitat a esta empresa por cada disco han disminuido un 15% respecto el año anterior, ¿de qué subvenciones disponía esta discográfica anteriormente?
2) Si se sabe que estas subvenciones van a aumentar un 8% en los próximos cuatro meses, ¿cuáles serán en este caso las subvenciones de las que va a disponer la discográfica durante el próximo año por cada disco?
3) ¿Qué variación porcentual se debería producir para obtener una subvención de 7800 € por disco editado el año que viene?
4) ¿Qué cantidad media han recibido los autores en concepto de derechos de autor por cada disco editado con esta discográfica?
5) Cálculo de la duración media de las canciones de cada disco. ¿De qué nos informa este valor medio? Interpretar.
6) Cálculo de tiempo medio entre la publicación de cada videoclip/disco. ¿De qué nos informa este valor medio? Interpretar.
7) Cálculo de los ingresos medios mensuales en concepto de derechos de autor que cobra la discográfica del primer disco de estos grupos.
8) Dada una variable que toma distintas categorías o valores, se entiende por moda la categoría más frecuente (que aparece con más frecuencia). Si consideramos la variable canciones de un disco determinado del grupo compradas a través de descargas en iTunes, ¿cuál sería su moda?

En la segunda parte de la sesión se introduce el concepto de *microeconomía* y se inicia otro tipo de estudio:

La microeconomía es una parte de la economía que estudia el comportamiento económico de agentes individuales, como por ejemplo las empresas.

Mediante un estudio de mercado se determina que los costes referentes a cada una de las copias

vendidas de cada disco que ha tenido que afrontar la discográfica son aproximadamente de 3 € y unos costes fijos anuales de unos 330 € por grupo.

Esto permite hacer otro tipo de cuestiones:

9) Construir modelos matemáticos que representen los ingresos y los costes de la empresa discográfica Picap para el total de discos en el mercado de este grupo, escribiendo estas funciones en términos del total de copias vendidas desde el inicio del contrato hasta el momento actual. Utilizar la información recogida hasta el momento y detallar las magnitudes económicas básicas que determinan estas funciones.
10) Citar dos aspectos que puedan resultar de interés para estudiar durante las próximas sesiones del curso.

Tercera sesión

Se pide dar respuesta a las siguientes cuestiones utilizando los dos modelos construidos durante la última sesión.

1) ¿Qué número mínimo de copias asegura unos beneficios positivos? ¿Podéis dar respuesta a esta cuestión utilizando únicamente las funciones de ingresos y costes? Describir el método seguido para dar la respuesta.

Dadas las diferentes fuentes de ingresos y los tipos de gastos de esta empresa discográfica, calculados en función del total de copias vendidas, podremos calcular sus beneficios realizando la diferencia entre ingresos y costes.

2) Determinar la función que representa los beneficios de esta empresa en términos del total de copias vendidas y representarla gráficamente.
3) ¿Podrá alguna vez la discográfica obtener unos beneficios superiores a 10000 € con las ventas de los discos del grupo musical con el que trabajáis? ¿Cuántos discos deberían venderse?
4) ¿Os parece razonable el resultado? Explicar el porqué de la respuesta.
5) ¿Cómo debería reaccionar la discográfica para conseguir estos beneficios?
6) ¿Cómo se deberían modificar los parámetros de los modelos encontrados para obtener estos beneficios?
7) ¿Cuántos discos deberían venderse en este caso?

Cuarta y quinta sesión

Durante estas dos sesiones se proporciona a los alumnos datos nuevos sobre las funciones que representan los ingresos y los costes de la discográfica Picap, donde la variable *x* hace referencia al número total de copias vendidas de los discos del grupo musical con el que trabajan.

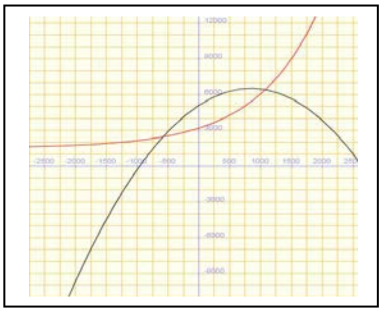
INGRESOS $I(x)$	**COSTES $C(x)$**
(1) $I(x) = 8{,}6 \cdot x + 510$	**(1)** $C(x) = 0{,}001 \cdot x^2 + 2{,}5 \cdot x + 2750$
(2) $I(x) = 0{,}001 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 5500$	**(2)** $C(x) = 0{,}005 \cdot (x + 50)^2 + 850$
(3) $I(x) = -0{,}05 \cdot (x - 950)^2 + 12500$	**(3)** $C(x) = 0{,}00001 \cdot (x - 50)^3 + 1450$
(4) $I(x) = \frac{-6550000}{x+790} + 8500$	**(4)** $C(x) = 2{,}1 \cdot x + 970$
(5) $I(x) = 0{,}000003 \cdot (x+500) \cdot (x+1000) \cdot (x + 1500)$	**(5)** $C(x) = -10092 \cdot 0{,}99903^x + 13500$

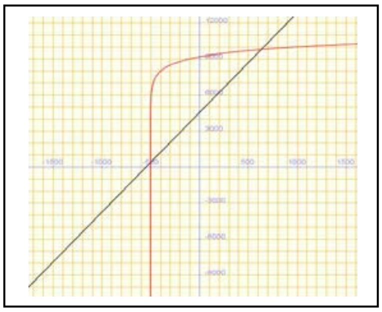
Con estos nuevos modelos matemáticos, se pide responder a las cuatro primeras cuestiones planteadas en la sesión anterior.

Sexta sesión

Se les propone dos ejercicios. El primero tiene el enunciado siguiente:

(1) Las funciones cuya representación gráfica se muestra a continuación pueden describir los ingresos y los costes de la empresa discográfica Picap, donde la variable independiente *x* hace referencia al número total de copias vendidas de los discos del grupo musical con el que trabajáis.

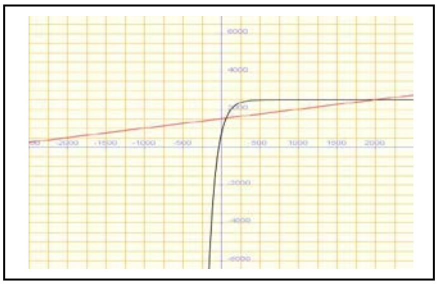


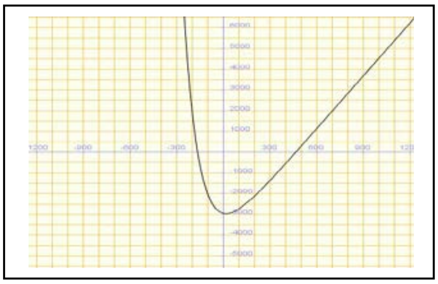


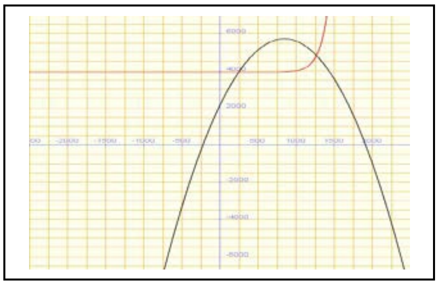
Dada esta información gráfica, hacer un esbozo de sus respectivas funciones de beneficios.

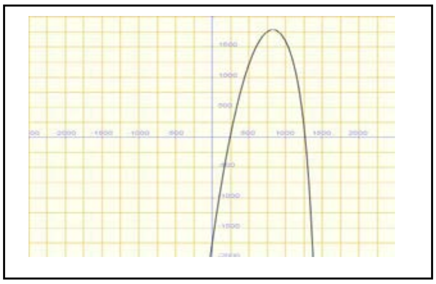
Y el segundo:

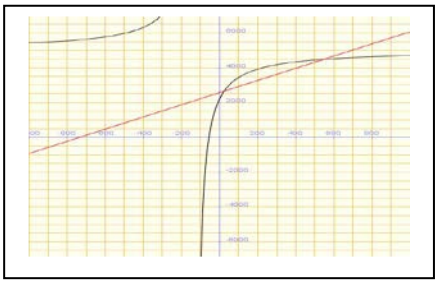
(2) Relacionar, en cada caso, cada una de las funciones de ingresos (en negro) y costes (en rojo) de la columna de la izquierda, con su respectiva función de beneficio, de la columna de la derecha. Describir con todo detalle el método que habéis utilizado para dar la respuesta.

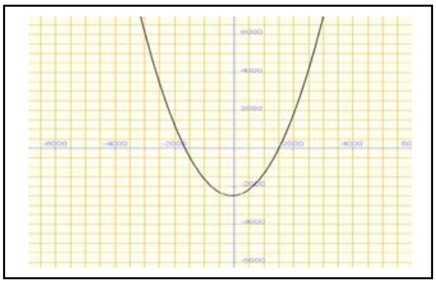


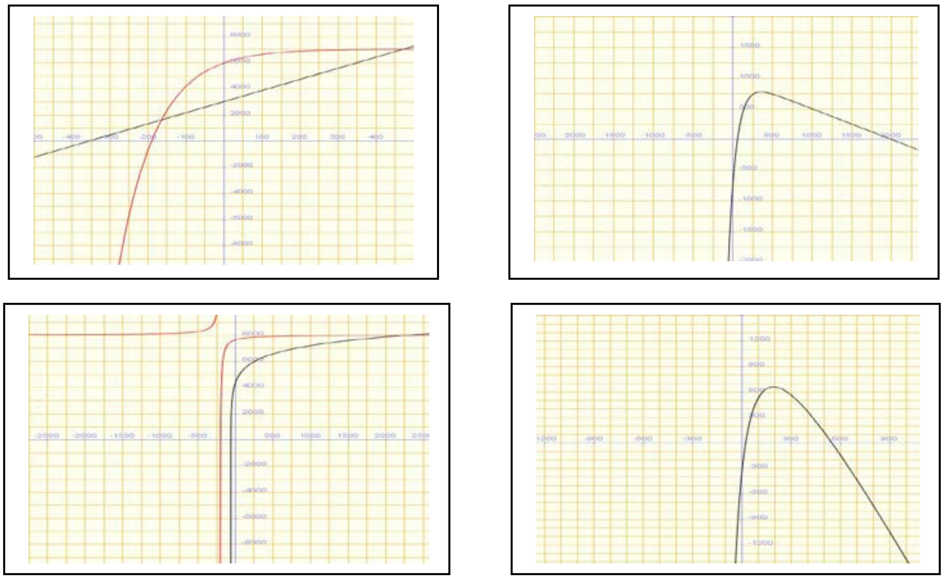












Séptima sesión

Esta sesión se centra en estudiar cuando la empresa discográfica Picap obtendrá un beneficio máximo. Se dará mucha importancia a la discusión de los resultados en el sentido que estos sean coherentes en el contexto en que trabajamos y cómo podríamos modificar esta situación para conseguirlo en caso negativo. Se pide utilizar los modelos de las sesiones 4 y 5.

Además, se pide a los alumnos responder las siguientes cuestiones relacionadas con el trabajo realizado en esta sesión:

- ¿Qué cantidad total de copias deberían venderse para obtener unos beneficios máximos? Dar una respuesta aproximada a partir de la representación gráfica de las funciones de ingresos y costes o de la función beneficio.
- Determinar, si es conveniente, posibles modificaciones en la representación gráfica de estas funciones para conseguir un máximo con sentido. Explicar qué repercusión tendrían estas modificaciones gráficas en su expresión analítica.
- ¿Cuál de estas modificaciones puede interesarle más a la discográfica para conseguir su objetivo?

Octava sesión

Esta sesión se inicia con información nueva que se entrega a los alumnos. En concreto, se les proporciona una tabla que recoge de forma aproximada el número de copias vendidas durante los últimos *seis trimestres* (desde inicios del 2008) del primer disco de cada grupo musical.

Albert Fibla	23	21	20	25	24	23
Baetúria	21	21	21	23	24	27
Entregirats	10	12	15	11	10	8
Keympa	14	12	13	15	15	14

Lexu’s	48	51	56	53	44	40
Naltrus	22	22	20	15	16	12
Nua	28	35	30	31	28	26
Pitjorestàstu	31	34	34	37	35	33
Rodamons	67	42	30	21	15	45
Turnéz & Sesé	17	15	13	12	10	10

A partir de esta información, se pide dar respuesta a las cuestiones que se plantean a continuación:

- Hacer una predicción numérica de las copias que se venderán durante los próximos dos trimestres, indicando detalladamente el proceso que seguís para dar el resultado.
- Calcular los beneficios que se prevé que generará este disco para la discográfica durante estos dos próximos trimestres si las copias vendidas de este disco sigue la predicción señalada en el apartado anterior.

Novena sesión

Esta sesión se utilizará para hacer una síntesis del trabajo realizado en las sesiones anteriores, y para ello se pide de hacerlo de una forma original.

Se explica a los alumnos que los resultados de trabajos, experiencias y proyectos de investigación pueden darse a conocer de diversas maneras, por ejemplo presentándolos en congresos. Uno de los principales medios de exposición que se utilizan en estos congresos son los pósters. Estas formas de exposición contribuyen al intercambio de información entre los asistentes. Y por tal motivo, se les pide realizar el siguiente ejercicio:

- Preparar un póster en el que se sintetice el estudio desarrollado a lo largo del curso introductorio de Matemáticas. Debatir entre los miembros del grupo la estructura y el contenido del póster.
- Preparar la exposición oral del póster que se llevará a cabo el último día del curso, distribuyendo la explicación convenientemente entre los miembros del grupo. La exposición oral tendrá una duración máxima de 10 minutos.

Para ello, se proporcionan las características generales que un póster debería tener:

- Inteligible: que las ideas mostradas en él puedan seguirse con facilidad.
- Legible: que se pueda leer con facilidad (el tamaño del texto debe ser suficientemente grande para poder leerlo a 2 o 3 metros de distancia).
- Bien organizado: el formato debe ser atractivo para las personas a las que va dirigido.
- Conciso: la información expuesta debe ser la más relevante, no se pueden exponer todos los detalles del trabajo.

A nivel de formato se les informa que el tamaño del póster debe ser de 75*cm* x1*m* y se utilizará como soporte para construirlo el programa PowerPoint. Para realizar el póster a partir de este programa lo primero que se debe hacer es abrir una diapositiva en blanco y pulsar «Archivo» y «Configurar página», posteriormente se establecerán las dimensiones fijadas. El título debe ser lo que más se vea del póster y justo debajo de éste deben aparecer los autores del trabajo. Las diferentes partes del póster deberán ir en cajas para que sea más fácil trabajar con ellas.

Y finalmente, la estructura del póster debe estar formada por: título; autores; centro; introducción, hipótesis y objetivo; metodología (materiales y métodos); resultados, y conclusiones.

Décima sesión
Esta última sesión se dedica a la presentación de los posters. Primero se fija la hora de presentación de cada uno, y se dejan los quince minutos primeros para colocarlos y que toda la clase los puedan contemplar. A continuación se hace la exposición, que ocupa entre cinco y ocho por grupo, más unos minutos para hacer preguntas. Finalmente se pasa un cuestionario a los alumnos en los que puedan valorar el contenido del seminario y los objetivos de éste (unos 15 minutos aproximadamente).

Anexo 3.8. «Curso cero» 2010/11. Diario de sesiones.

Primera sesión

En esta primera sesión del curso, se les entrega el siguiente enunciado:

A pesar de la situación de crisis en la que nos encontramos y el estancamiento del consumo, algunas empresas han conseguido desafiar las no muy alentadoras previsiones. Puede resultar interesante iniciar un estudio sencillo, para una de estas empresas que se encuentran en pleno auge, acerca de las posibles claves de su éxito y analizar algunas de las actividades económicas desempeñadas. Nos centraremos en la firma de moda Desigual, una empresa española en expansión internacional. El objetivo de este ejercicio, que se irá desarrollando a lo largo del curso introductorio, será realizar un estudio simplificado de algunas de las características empresariales y económicas de esta firma de moda a través de modelos y razonamientos matemáticos, utilizando datos reales orientativos proporcionados por la propia empresa e información que los alumnos deberán ser capaces de encontrar de forma autónoma. Con todo ello se realizará una predicción de la situación a la que podría llegar esta empresa a corto plazo, creando debates de las ventajas y los inconvenientes de las magnitudes económicas que constituyen los modelos utilizados y razonando acerca de la viabilidad de estas predicciones.

Moda atrevida

«La empresa Desigual tiene su origen en el tándem formado por el diseñador suizo Thomas Meyer, fundador y alma mater de la compañía, y Manel Adell, el ejecutivo que en 2003 tomó las riendas del grupo para dirigir su expansión internacional. Su historia empieza en los años 80, cuando Thomas Meyer se paseaba por el puerto de Ibiza apenas sin superar los 20 años de edad. Thomas Meyer vendía camisetas en el mercadillo de la isla. Puso una tienda, sin nombre, en el barrio de la Marina. En ese tiempo primaban camisetas con el sello I love Ibiza. A contracorriente, imprimió en sus t-shirts estampados basados en graffitis y manchas caleidoscópicas. Así nació Desigual.»

(J. S Derqui)

Se les proporciona la siguiente información:
Desigual nos ha facilitado información que representa, de forma orientativa, la evolución de algunas características empresariales y económicas relevantes para la empresa.

1) Número de tiendas propias abiertas a nivel nacional en los últimos trimestres:

Trimestre	T1 2008	T2 2008	T3 2008	T4 2008	T1 2009	T2 2009	T3 2009	T 4 2009	T 1 2010	T 2 2010
Tiendas abiertas	15	19	12	22	20	25	24	35	45	55

2) Número de tiendas propias abiertas fuera de España en los últimos trimestres:

Trimestre	T1 2008	T2 2008	T3 2008	T4 2008	T1 2009	T2 2009	T3 2009	T 4 2009	T 1 2010	T 2 2010
Tiendas abiertas	2	4	3	4	6	7	8	15	32	44

3) Evolución de las ventas anuales contabilizadas en millones de euros:

Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Millones de euros	19	30	49	86	162	230

4) Evolución de los ingresos semanales (€) desde el 31 de mayo de 2010 en la tienda de Passeig de Gràcia 47 (Barcelona):

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Ingresos semanales	21570	22000	25000	26750	32000	37500	42000	45500	55000	67500	75000

5) Evolución de los ingresos semanales (€) desde el 15 de febrero de 2010 en la tienda de las Ramblas 136 (Barcelona):

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Ingresos semanales	52500	25250	25000	26750	28790	31300	35000	34990	41000	43550	45570

6) Evolución de los ingresos semanales (€) desde el 1 de marzo de 2010 en la tienda de la Rambla de Catalunya 140 (Barcelona):

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
Ingresos semanales	25000	25450	26750	28800	31300	35050	34995	40975	43700	45973

7) Evolución de los ingresos semanales (€) desde el 31 de mayo de 2010 en la tienda de la calle Arcs 10 (Barcelona):

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Ingresos semanales	21550	21975	24790	23980	27500	37450	41900	45555	56700

8) Evolución de las ventas semanales de las camisetas one-print desde el 31 de mayo de 2010 en la tienda de Passeig de Gràcia 47 (Barcelona):

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Camisetas one-print vendidas	120	125	124	133	128	187	204	253	297	450	500

9) Evolución de las ventas semanales de las camisetas one-print desde el 15 de febrero de 2010 en la tienda de las Ramblas 136 (Barcelona):

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Camisetas one-print vendidas	233	112	118	130	116	151	159	173	175	230	253

10) Evolución de las ventas semanales de las camisetas one-print desde el 1 de marzo de 2010 en la tienda de la Rambla de Catalunya 140 (Barcelona):

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Camisetas one-print vendidas	100	101	107	115	125	140	140	164	194	210

11) Evolución de las ventas semanales de las camisetas one-print desde el 31 de mayo de 2010 en la tienda de la calle Arcs 10 (Barcelona):

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Camisetas one-print vendidas	86	88	99	96	110	150	186	225	345

Esta primera sesión se dividió en dos partes. En la primera hubo la elección de los equipos de trabajo, que varió entre tres y cuatro personas, a los que se les asignó una característica económico-empresarial a cada grupo para, posteriormente, poder estudiarla y analizarla. En la segunda se pidió a cada equipo de trabajo la búsqueda de la información acerca los orígenes de Desigual y el papel que desempeña actualmente e intentar determinar, de forma cualitativa, las posibles claves de su éxito.

Segunda sesión

A partir de los datos asignados a cada equipo de trabajo durante la primera sesión, se pide realizar un estudio que permita hacer una predicción numérica a corto plazo de las características económico-empresariales expuestas. Se permite al estudiante utilizar cualquier herramienta matemática estudiada en el bachillerato, indicando y justificando detalladamente el proceso de estudio seguido para dar el resultado. Se deja pues al estudiante que explore libremente el problema.

Tercera sesión

Esta sesión se dividió en dos partes. En la primera se hace una iniciación al programa Excel, donde se enseña como introducir datos, realizar representaciones gráficas, hacer referencias a otras celdas, escribir fórmulas y calcular funciones matemáticas. Además, cada equipo de trabajo debe realizar un estudio del grado de error cometido por el modelo propuesto en la segunda sesión. ¿Es posible mejorar el modelo? ¿Qué cambios podemos realizar?
En la segunda parte se introduce la herramienta *solver* de Excel: cómo podemos cargar este complemento y cómo utilizarlo. Cada equipo de trabajo debe aplicar la herramienta solver al modelo mejorado obtenido en la primera parte de la clase. Realizar una puesta en común de los resultados finales y comentar posibles errores.

Cuarta sesión

A partir de los resultados obtenidos en la última sesión, las respuestas al cuestionario facilitado el primer día y la información que se muestra a continuación, se pide responder las siguientes cuestiones:

1) Discutir sobre las predicciones a corto plazo realizadas por todos los grupos de clase. ¿Puede existir alguna predicción que no se ajuste a la realidad?
2) ¿Cómo se puede reflejar el grado de notoriedad espontánea de la empresa Desigual entre los alumnos del Curso Preparatorio de Matemáticas?
3) Describir y representar el porcentaje de notoriedad sugerida entre todos los alumnos del curso.
4) ¿Cuáles son las tiendas Desigual propias más conocidas entre los alumnos del curso? Representar las respuestas.
5) Si una de las camisetas one-print de esta firma se vende a 17 € durante el período de rebajas, tras un descuento del 30%, ¿cuál era el precio de la camiseta anteriormente?
6) Supongamos que la empresa Desigual dispone durante esta temporada de 10 modelos diferentes de camisetas de precios variados (como muestra la tabla). Estas camisetas no tienen el mismo impacto entre los clientes y, en consecuencia, el porcentaje de consumo es distinto para cada una. También conocemos que de cada 100 camisetas vendidas 16 son del modelo 1, 7 del modelo 2, 10 del modelo 3, 5 del modelo 4, 3 del modelo 5, 7 del modelo 6, 15 del modelo 7, 7 del modelo 8, 12 del modelo 9 y 18 del modelo 10.

Camisetas	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7	Modelo 8	Modelo 9	Modelo 10
Precio	35 €	25 €	47 €	60 €	29 €	55 €	29,9 €	45 €	49 €	39 €

Describir y calcular dos formas de representar el precio de las camisetas Desigual.

7) Construir un modelo matemático que pueda representar los ingresos de la empresa Desigual en función del número de camisetas vendidas.

Quinta sesión

A partir de un análisis más profundo se ha determinado que las funciones siguientes representan los ingresos y los costes de la empresa Desigual con respecto al número de camisetas one-print vendidas, representado por la variable x.

INGRESOS *I*(*x*)	**COSTES *C*(*x*)**
(1) $I(x) = 25\cdot x$	(1) $C(x) = 0{,}001\cdot x^2 + 2{,}5\cdot x + 3750$
(2) $I(x) = -0{,}003\cdot x^2 + 15\cdot x$	(2) $C(x) = 0{,}005\cdot(x + 50)^2 + 850$
(3) $I(x) = -0{,}01385\cdot(x - 950)^2 + 12500$	(3) $C(x) = 0{,}00001\cdot(x - 50)^3 + 1450$
(4) $I(x) = 0{,}01\cdot x\cdot(4500-x)$	(4) $C(x) = 2{,}1\cdot x + 970$
(5) $I(x) = 20\cdot x$	(5) $C(x) = 250\cdot 1{,}005^x + 15500$

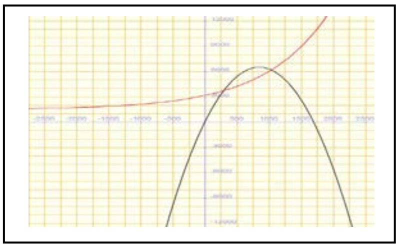
Con estos modelos matemáticos, responder a las cuestiones planteadas a continuación:

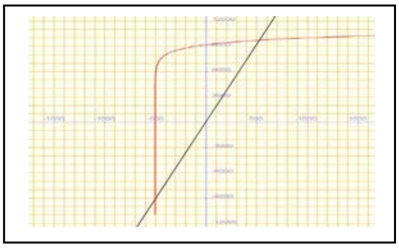
1) ¿Qué número mínimo de camisetas asegura unos beneficios positivos? ¿Podéis dar respuesta a esta cuestión utilizando únicamente las funciones de ingresos y costes? Describir el método seguido para dar la respuesta.
2) ¿Se podrán obtener unos beneficios superiores a 10000 € de la venta de camisetas one-print? ¿Cuántas camisetas deberían venderse?
3) ¿Os parece razonable el resultado? Explicar el porqué de la respuesta.
4) ¿Cómo debería reaccionar la empresa Desigual para conseguir estos beneficios? ¿Cómo se podrían modificar los parámetros de los modelos para obtener estos beneficios?

Sexta sesión

En esta sesión se plantean dos ejercicios. El enunciado del primero es el siguiente:

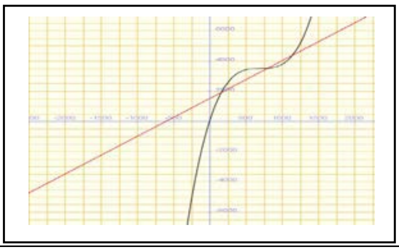
(1) Las funciones cuya representación gráfica se muestra a continuación pueden describir los ingresos (color negro) y los costes (color rojo) de la empresa Desigual, donde la variable independiente x hace referencia al número total de camisetas one-print vendidas. Dada esta información gráfica, hacer un esbozo de sus respectivas funciones de beneficios.

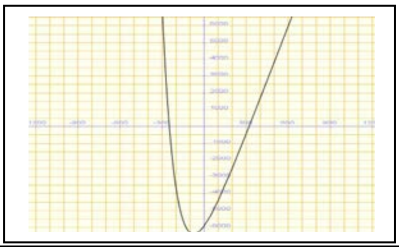


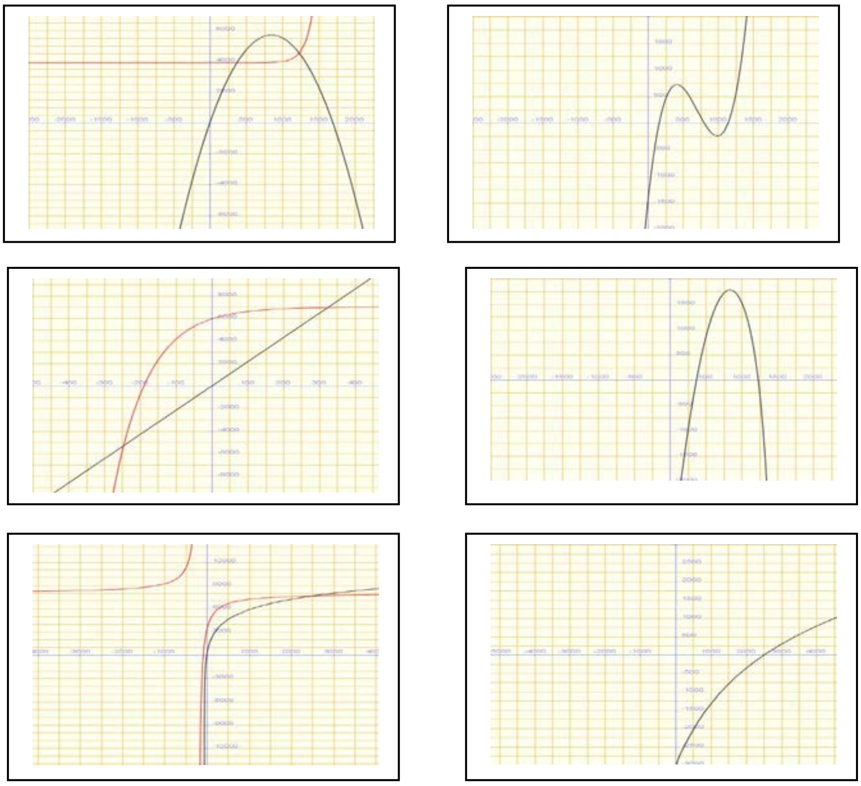


Y el enunciado del segundo:

(2) Relacionar, en cada caso, cada una de las funciones de ingresos (en negro) y costes (en rojo) de la columna de la izquierda con su respectiva función de beneficio de la columna de la derecha. Describir con todo detalle el método que habéis utilizado para dar la respuesta.







Séptima y octava sesión

Esta sesión se centra en estudiar cuando la empresa Desigual obtendrá el beneficio máximo en relación a las ventas de las camisetas one-print. El alumno deberá si los resultados obtenidos pueden tener sentido en el contexto en el que trabajamos y cómo podríamos modificar esta situación para conseguirlo en caso contrario.

Para cada uno de los modelos de la sesión 5, determinar qué cantidad total de camisetas one-print deberían venderse para obtener unos beneficios máximos.
Para los modelos del ejercicio 1 de la sesión 6, determinar qué cantidad total de camisetas one-print deberían venderse para obtener unos beneficios máximos. Dar una respuesta aproximada a partir de la representación gráfica de las funciones de ingresos y costes o de la función beneficio.
Determinar, para el apartado anterior y siempre que sea conveniente, posibles modificaciones en la representación gráfica de estas funciones para conseguir un máximo con sentido. Explicar qué repercusión tendrían estas modificaciones gráficas en su expresión analítica.

Novena y Décima sesiones

Ambas sesiones son idénticas a las descritas en «curso cero» anterior (2009-10).

Anexo 4.1. Programa de la asignatura de matemáticas en IQS-ADE (URL)

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

MATEMÁTICAS
Curso: Primero
Carácter: Obligatorio
Nº de créditos: 9
Profesor: Vanessa Serrano - vanessa.serrano@iqs.url.edu

OBJETIVOS

La asignatura de Matemáticas tiene como objetivo principal aprender a elaborar y utilizar modelos matemáticos para la descripción, el análisis y la resolución de situaciones problemáticas que se dan en el ámbito de la empresa, la economía, las finanzas o la vida cotidiana. Las nociones matemáticas de *función en una o varias variables* y de *matriz* sirven de hilo conductor del programa.

Es necesario llegar a conocer las propiedades y principales usos de estos modelos matemáticos, familiarizándose con los principales tipos de situaciones económicas, empresariales y sociales que éstos permiten representar. Pero no basta con saber adaptar y utilizar con precisión los modelos conocidos. Los estudiantes deberán ser capaces de analizar una situación problemática en términos de dependencia entre magnitudes variables, destacando la información pertinente para elaborar un modelo matemático de dicha situación. Y deberán saber utilizar los modelos matemáticos propuestos y sintetizar los resultados obtenidos con estos modelos para generar nuevos conocimientos y cuestiones sobre las situaciones problemáticas consideradas.

En la mayoría de casos, las técnicas de elaboración, utilización y evaluación de estos modelos matemáticos requieren el uso de la calculadora simbólica Wiris (www.wiris.com) cuyo acceso se facilitará a los estudiantes para hacer simulaciones, representar los datos, variar las situaciones estudiadas, hacer comprobaciones empíricas y evaluar los resultados obtenidos. La utilización pertinente de la calculadora simbólica también forma parte de los objetivos del curso.

COMPETENCIAS QUE DEBE ADQUIRIR EL ESTUDIANTE

a) Competencias específicas:
   Como resultado a los contenidos de la asignatura los estudiantes deberán ser capaces de conseguir los siguientes objetivos («Análisis y Síntesis»):
   1. Dominar los conceptos teóricos que constituyen la materia.
   2. Conocer las técnicas básicas introducidas para modelizar situaciones.
   3. Desarrollar el propio pensamiento analítico.

b) Competencias transversales
   Como resultado de las actividades realizadas durante el curso, los estudiantes deberán desarrollar las siguientes habilidades:
   4. Conocer algunos soportes matemáticos como hojas de cálculo y calculadoras simbólicas («TICs»).
   5. Trabajo en equipo.

PROGRAMA Y PLANIFICACIÓN

La asignatura se estructura en tres partes: Cálculo de Funciones en una Variable, Cálculo de Funciones en varias Variables y Álgebra Lineal, que corresponden básicamente a los tres trimestres del curso académico:

I. CÁLCULO DE FUNCIONES EN UNA VARIABLE (septiembre – diciembre)
Tema 1. Familias de funciones elementales
Tema 2. Derivadas y cálculo de variaciones
Tema 3. Problemas de modelización funcional y optimización.
Tema 4. Integrales y áreas
II. CÁLCULO DE FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES (enero – marzo)
Tema 5. Estudio de funciones en varias variables
Tema 6. Derivadas parciales y optimización (con y sin restricciones).

III. ÁLGEBRA LINEAL (abril - mayo)
Tema 7. Cálculo matricial y sistemas de ecuaciones lineales
Tema 8. Aplicaciones lineales y cambios de base.
Tema 9. Matrices de transición y diagonalización.

ACTIVIDADES FORMATIVAS Y EVALUACIÓN

Se alternarán las *clases teóricas* (explicaciones y resolución de problemas) con un *taller de modelización matemática* (seminarios) centrado en el estudio de una cuestión problemática relacionada con la economía o la empresa y el temario del trimestre.

El trabajo en el *taller de modelización matemática* se realizará en grupos de 4 alumnos y requerirá la entrega de unos informes por grupo (cada dos semanas aproximadamente) con los resultados parciales obtenidos y un informe individual al acabar el trimestre. Los informes por grupo entregados deberán tener una extensión máxima de 20 páginas, el tipo de letra deberá ser Times New Roman y el tamaño 12 (o similares). Cualquier informe deberá entregarse en pdf.

El **sistema de evaluación** es el siguiente:

→ Los tres trimestres se evalúan de forma independiente:

- El trabajo realizado en el taller de modelización (participación e informes) cuenta un 30% de la nota trimestral.
- El examen al final de trimestre (diciembre, marzo y mayo) cuenta un 40%.
- El 30% restante se repartirá de la siguiente forma: 10% notas de clase (entregas de problemas resueltos y comportamiento en el aula) y 20% controles.

Solo se realizarán los promedios trimestrales si la nota del examen final de cada trimestre es superior a 3,5. En caso contrario la nota del trimestre será la nota del examen.
La nota del informe individual se podrá mejorar tanto en junio como en septiembre con una nueva entrega, mientras que la nota de los informes por grupo, la nota de clase y la de los controles se mantendrán durante todo el curso.

- ➔ CONVOCATORIA DE JUNIO: El curso se puede aprobar si la media aritmética de las tres notas trimestrales es superior a 5 y las notas de los exámenes finales de trimestre son superiores a 3,5. En este caso, la nota final será la media aritmética de las tres notas trimestrales. En caso contrario, el estudiante deberá presentarse en el examen final de junio a los trimestres no aprobados (o con nota del examen final de trimestre inferior a 3,5). Los porcentajes de la tabla anterior se mantienen en la convocatoria de junio.
- ➔ CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE: El examen de septiembre incluye siempre la totalidad del curso. Un 70% de la nota corresponderá a este examen y el 30% restante a la nota del taller de modelización.

Los grupos del taller de modelización que expongan de forma voluntaria y con una buena presentación conjunta podrán ver incrementada la nota de los informes de grupo en 2 puntos a final de curso (en la evaluación continuada o en la convocatoria de junio, no en septiembre).

BIBLIOGRAFÍA.

ALEJANDRE, F., LLERENA, F., *Problemes de Matemàtiques per a Econòmiques i Empresarials*, Edicions Media, 1995.
ARYA, J. C., LARDNER, R. W., *Matemáticas aplicadas a la administración y economía,* Prentice Hall, 2002 (4ª edición).
CHIANG, A. C., *Métodos fundamentales de Economía Matemática,* McGraw-Hill, 1987, 3ª edició.
HAEUSSLER, E. F., PAUL, R. S., *Matemáticas para Administración, Economías, Ciencias Sociales y de la Vida,* Prentice Hall, 1997
JARNE, G., PÉREZ-GRASA, I., MINGUILLÓN, E., *Matemáticas para la Economía: álgebra lineal y cálculo diferencial*, Editorial McGraw Hill, 1997.
LÓPEZ CACHERO, M., VEGAS PÉREZ, A. *Curso básico de Matemáticas para la Economía y Dirección de empresas I* y *II*, Editorial Pirámide.
SASTRE, L., MOYÀ, M., *Àlgebra Lineal. Problemes resolts, Mètodes matemàtics per a l'economia,* Edicions Documenta Balear, 1998.
SYDSAETER, K., HAMMOND, P. J., *Matemáticas para el análisis económico*, Prentice Hall, 1996.
TAN, S. T., *Matemáticas para administración y economía,* International Thomson, 1998.

Anexo 4.2. Informes secretarios talleres curso 2010/11

Primer Trimestre

Q1. ¿Podemos predecir cómo evolucionará el tamaño de esta población después de un número determinado de períodos?
Q2. ¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de esta población a largo plazo?
Q3. ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se tienen que asumir?
Q4. ¿Cómo podemos hacer predicciones sobre la evolución de su tamaño y cómo éstas pueden ser validadas?

Cuestiones Sesión 1:
Qi1. ¿Cómo podemos escribir las variables que representan el tiempo y el tamaño de la población?
Qi2. ¿Cómo podemos describir el crecimiento de esta población?
Qi3. Utilizando los datos disponibles, ¿podríamos decir cuál será el número de usuarios de esta red social después de 1, 2, 3, 4 y 5 años?

Cuestiones Sesión 2:
Qi4. Estudiar el modelo discreto propuesto
Qi5. Como afectará al modelo un número de usuarios inicial distinto?
Qi6. ¿Qué pasaría si existiera un número máximo de usuarios? ¿Cambiaría el modelo planteado?
Qi7. ¿Cuándo se alcanzaría la población máxima?

Cuestiones Sesión 3:
Qi8. Especificar el nuevo modelo discreto planteado en función del máximo, encontrando A y B.
Qi9. Dar diferentes valores a los parámetros del modelo y estudiar la evolución de la población numérica y gráficamente en los casos considerados.
Qi10. Arreglar, en la medida de lo posible, el modelo propuesto (simplificado). ¿Se puede dejar el nuevo modelo expresado en términos de P_0?

Cuestiones Sesión 4:
Qi11. Estudiar de forma teórica B ó A. ¿entre que valores se mueve?
Qi12. Analizar el modelo normalizado aplicando un cambio de variable: $Y_n = \frac{B}{B+1} \cdot \frac{Pn}{K}$, con $\propto = B+1$. Hacer un estudio de las características de $\propto$.
Qi13. Establecer otro tipo de relación funcional entre r_n y P_n, y estudiarla.

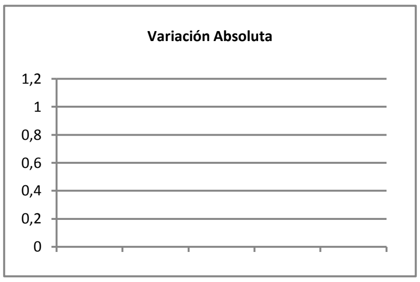
Trimestre 1	Sesión 1	Grupo 1

En primer lugar, fijamos que las variables van a ser" i" para los años transcurridos desde 2004 e "$\mathbf{Y_i}$" para el tamaño de la población al cabo de "i" años. (Recordar que es más práctico trabajar con subíndices de manera que podamos especificar los años más fácilmente, es decir, nuestra notación debe ajustarse a las fórmulas utilizadas y ser coherente entre ellas. Entonces, "i" es igual al año transcurrido desde 2004).

A partir de aquí, ya podemos empezar a desarrollar el estudio del crecimiento de estas variables a través del cálculo de la variación absoluta.
La **variación absoluta** es la variación que ha experimentado la variable durante el período «i» (ΔY_i) y que se obtiene por diferencia ente el dato registrado en el momento «i» y el dato en el momento inmediato anterior, «i -1».

$\mathbf{\Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}}$. Así pues, calculamos que:

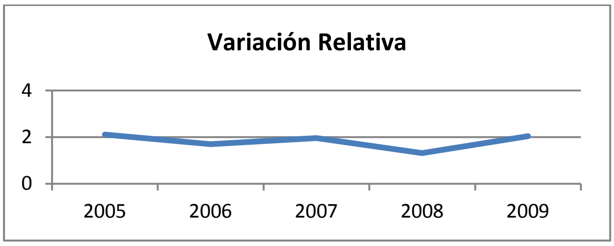
$\Delta Y_{2005} = 56 - 18 = 38$; $\Delta Y_{2006} = 151 - 56 = 95$; $\Delta Y_{2007} = 447 - 151 = 296$; $\Delta Y_{2008} = 1034 - 447 = 587$; $\Delta Y_{2009} = 3143 - 1034 = 2109$



Por lo tanto, podemos afirmar que: $\Delta Yt > 0$, hay una **evolución creciente** de la variable en estos períodos.
Debemos tener en cuenta que en el momento de hacer las tablas para hacer la representación gráfica en el primer año, en 2004, no se pone ningún número, ni siquiera el 0, ya que no existe una variación entre el primer año y el anterior (el año anterior no existía esta red social). Por lo tanto se deja la celda vacía.
A partir de estas dos gráficas vemos que existe un **crecimiento** aproximadamente **exponencial**.

Para medir las variaciones de modo más preciso, eliminando las diferencias de escala para que sean comparables entre sí, es necesario expresar las variaciones en términos relativos. En este caso, es habitual expresarla en porcentaje o tanto por ciento, para lo cual se multiplica por 100.

Calculamos la variación relativa a través de la fórmula $\boldsymbol{Y = \frac{Y_{i+1}-Y_i}{Y_i} \cdot 100}$**:**
$Y = \frac{56-18}{18} \cdot 100 = 211\,\%$„ $\quad Y = \frac{151-56}{56} \cdot 100 = 177\%$
$Y = \frac{447-151}{151} \cdot 100 = 196\%$ $\quad Y = \frac{1034-447}{447} \cdot 100 =$
131% $Y = \frac{3143-1034}{447} \cdot 100 = 204\%$



Vemos que existe una tendencia que oscila alrededor de un valor. Calculamos el promedio y obtenemos que la media de la variación del crecimiento sea de un 183,8%.

En la tercera de nuestras cuestiones, debemos hacer la predicción a 5 así que buscamos la exponencial: $\mathbf{Y = A \cdot K^x}$. De esta forma podemos calcular las predicciones de forma más precisa, es decir podemos calcular años y meses. Se usa una forma continua que permite calcular en años o fracciones de años. Para llevarlo a cabo podemos decir que: $Y=18 \cdot 2{,}8^x$. (Vamos probando con diferentes valores para K y cogemos el 2,8 porque es un número que se adapta perfectamente a la gráfica con los datos reales de crecimiento. Así nos da una buena predicción). La conclusión de las predicciones sería un crecimiento rápido y elevado.

Para poder predecir el número aproximado de usuarios para los próximos años utilizamos la siguiente fórmula**:** $\mathbf{\Delta E = Y_{i+1} - Y_i}$
Tasa relativa de variación: $r_i = \frac{Y_{i+1}-Y_i}{Y_i}$ (En tanto por uno)
Lo reflejamos en un gráfico con el Excel y vemos que va oscilando pero se mantiene en una línea estable.
Calculamos el promedio i da aprox. r es igual a 1.8
Calculamos el porcentaje de aumento**:** $\mathbf{Y_{i+1} = Y_i \cdot r + Y_i}$ Si sacamos factor común de esta última operación obtenemos: $\mathbf{Y_{i+1} = 2.8 \cdot Y_i}$ Esta forma es la discreta con la cual el tiempo debemos trabajarlo en años.
"i" es igual al número de años transcurridos desde 2004 $\rightarrow$ $i \geq 0$ $(i \in N)$
De esta manera podemos obtener un modelo de predicción recurrente.
También existe el índice de variación que se calcula: $\mathbf{Ii = \frac{Y+1}{Yi}}$ (En tanto por uno).

Trimestre 1	Sesión 1	Grupo 2

Las variables tiempo y número de usuarios son descritas como t y P_t respectivamente.
La función es exponencial ya que tiende a crecer cada vez más rápido. Para estudiar cuantitativamente los resultados podemos hacer una tasa relativa de variación de año en año: $(P_t-P_{t-1})/P_{t-1}$ donde t =años desde 2004 y P_t=población por año. Fórmula de función exponencial: $P=A\cdot k^t+B$
Según el modelo matemático de la exponenciales, a largo plazo, iría aumentando indefinidamente cosa que no tiene mucho sentido porque o bien todo el mundo acaba siendo usuario o bien la red social estaría limitada.
El tiempo puede ser estudiado de forma discreta (números naturales) o continua (decimales).
Discreta:

- P_n=tamaño población de usuarios al cabo de n años
- n=número de años transcurridos desde 2004
- tasa absoluta de variación= $\Delta P=P_{n+1}-P_n$
- tasa relativa de variación: $r_n=(P_{n+1}-P_n)/P_n$ (en tanto por 1)
- índice relativo de variación: $i_n=P_{n+1}/P_n$ (en tanto por 1)

Años(n)	i_n
0	________
1	3.11
2	2.65
3	2.96
4	2.31
5	3.04

Las variables tiempo y número de usuarios son descritas como t y P_t respectivamente. Promedio: i=2.82
Modelo matemático que nos permita hacer predicciones: $\mathbf{P_{n+1}=2.82\cdot P_n}$

Continua: los años se pueden tomar con números decimales

- x=años y=población

Modelo: $y=A\cdot k^x+B$

Hipótesis: ¿Cómo trabajamos la variable temporal? Los años se considerarán por ahora de forma discreta.

Trimestre 1	Sesión 1	Grupo 3

El trabajo consiste en el estudio de la dinámica de población, se hace a través de una red social a la cual se accede por invitación, des del año de su creación el 2004 hasta el 2009 donde se puede ver que cada vez hay un crecimiento mayor respecto al año anterior y se ha calculado que cada año tiene un crecimiento de un 300% más o menos, esto se puede observar en todos los años excepto en el primero ya que no hay un año anterior con el que se pueda comparar, es decir se han basado en el índice relativo de variación.

La fórmula matemática que han usado para calcular es: P_{t+1}/P_t

Han decidido basarse en:
P_t = tamaño de la población
t = años transcurridos desde 2004

Se trata de las variables que han elegido para llevar a cabo sus estudios y gráficas. Si se hubiera dado el caso de que cada año este índice tiene una tendencia creciente, no tendría sentido hacer el promedio de éstos. Como en este caso más o menos se mantiene estable sí que es correcto hacer el promedio.
Para calcular la población del año 2010 o cualquier año el grupo 1 ha usado la siguiente fórmula: $P_{t+1} = P_t \cdot 2.824$

Comentan que tendría sentido pensar que el número de usuarios de esta red social tendría que acabar estabilizándose, ya que es imposible captar al todas las personas. Sus propuestas son determinar a partir de qué año el crecimiento será menor al de la media, la segunda si alguna vez decrecerán los usuarios de LunaticWorld y si se llegara a perder el 50% de los usuarios.

Mejoras que pueden aplicarse:

-En lugar de ir escribiendo la variable *t* como 2004, 2005, 2006, etc., sabiendo que su inicio es el 2004 podemos ir escribiendo: t_0 t_1 t_2

-Los años los trabajamos de forma discreta, ya que por el momento trabajaremos con años enteros no con fracciones de año, por lo tanto no es continua. Al número de años transcurridos des de 2004 le llamaríamos *n*, porque es un número natural, entonces P_n=tamaño de población al cabo de *n* años.

-Se pueden usar tres métodos para conocer lo que ha variado la población:

- Tasa absoluta de variación, para calcular sería: $\Delta P = P_{n+1} - P_n$
- Tasa relativa de variación, para calcular sería: $r_n = (P_{n+1} - P_n)/P_n$
- Índice relativo de variación, para calcular sería: $i_n = P_{n+1}/P_n$
  Este se expresa en tanto por uno o tanta por cien, el grupo 1 ha usado este método y el resultado ha sido i=2.824 (promedio de los i_n).

Trimestre 1	Sesión 2	Grupo 1

1. Sucesión recurrente: Cada término de la sucesión es definido como una función de términos anteriores.

Hay dos tipos:

- Convergente: tiene límite A (un número real).
- Divergente: el límite es + infinito o - infinito.

2. $Y_{i+1}=Y_i \cdot r + Y_i = (1+r) \cdot Y_i = \alpha \cdot Y_i = \alpha^{n+1} \cdot Y_0$

   r=1,8241 (es el promedio del número de invitaciones de cada usuario antiguo)

   En el caso de existir un número máximo de usuarios en la red:

   - Cuanto más aumente la población, menos invitaciones podremos hacer.
   - Existe una relación inversa entre el nº de invitaciones y el tamaño de la población.

3. $Y_{i+1}=Y_i \cdot 1{,}8241 + Y_i$

   - Este modelo es válido si no existe una limitación en el número de usuarios.

Pueden existir diferentes situaciones:

- Si "α" es mayor que 1 crece sin parar.
- Si "α" es igual a 1 ni crece ni decrece, la población se mantiene constante.
- Si "α" está entre 0 y 1 el modelo decrece.

TEORÍA GENERAL

Fórmula general : $X_n = \alpha^n \cdot X_0$

- Si α es mayor a 1, el límite cuando n crece será ∞. DIVERGENTE.
- Si α está entre 0 y 1, el límite cuando n crece será 0. CONVERGENTE.
- Si $\alpha=1$, $X_n=X_0$, el límite será X_0. CONVERGENTE.

NUEVA HIPÓTESIS

Existe un número máximo de usuarios (M).

I	Y_i	$r_i=(Y_{i+1}-Y_i)/Y_i$
1	Y1	
2	Y2	
3	Y3	
4	Y4	
5	Y5	

En la tercera columna (tasa relativa de variación) sale un promedio de 1,8. Relación entre la tasa relativa de variación y el índice relativo de variación: $I_i=r_i+1$ Hipótesis realizada en la primera sesión: el número promedio de invitaciones se mantiene constante. Pero no puede ser constante si creemos que la población debe tener un número máximo. Cuando llega al máximo de población las invitaciones serán 0. Buscamos que r_i decrezca a medida que Y_i aumenta.

Cuando $Y_i=M$, $r_i=0$ $r_i= -A \cdot Y_i + B$ A,B han de ser mayor o igual a 0.

Si A es 0, r_i sería constante, cuanto más aumenta Y_i más disminuye r_i. Por lo tanto, $Y_{i+1}=Y_i+(-A \cdot Y_i + B) \cdot Y_i$.

Cuando Y_i llegue al máximo $(-A \cdot Y_i + B)=0$

Trimestre 1	Sesión 2	Grupo 2

A modo de síntesis, en el último seminario utilizamos el modelo discreto:

Pn+1=2.82·Pn
n=número de años transcurridos desde 2004 (n mayor o igual 0)
Pn=tamaño población de usuarios al cabo de n años

- Cuestión 1:

Ahora, utilizamos una nueva interpretación para poder estudiar las características del modelo: **Pn+1= Pn +1.82·Pn**
1.82 es la media de invitaciones que envía un usuario en la red durante un año (que suponíamos contante).
Con el modelo utilizado, y suponiendo que el número de invitaciones es constante, nos encontramos en una situación que no es demasiado real: vemos que el crecimiento va en aumento y que nunca para, es decir, no hay un número máximo de población. Este modelo a c/p es bastante efectivo, pero nos damos cuenta que a l/p no nos sirve ya que la población no crecerá ilimitadamente.
Estudiamos la sucesión recurrente:

Pn=2.82 · Pn-1
Pn-1=2.82·Pn-2
.
.
P1=2.82 · Po

Pn+1= $\mathbf{2.82^{n+1} \cdot P_0}$

Obtenemos una sucesión geométrica, que es lo mismo que **Pn=2.82 · Pn-1**, pero aplicando iterativamente la recurrencia.

Características de una sucesión geométrica: $\mathbf{X_n = \alpha^n \cdot X_0}$
Si $0 < \alpha < 1$ lim $X_n = 0$ converge.
Si $\alpha > 1$ lim $X_n = \infty$ diverge.
Si $\alpha = 0$ lim $X_n = 0$
Si $\alpha = 1$ lim $X_n = X_0$

Utilizamos $\alpha = 2.82$, el resultado de esta sucesión. Por lo tanto, nos tiende a infinito por lo que a largo plazo nos parece incoherente utilizar este modelo ya que la intuición nos dice que la red social debe llegar a un punto en el que la población no crezca más, ya sea porque todo el mundo la utiliza o porque haya un número máximo de usuarios permitido.

- Cuestión 2:

Si cambiamos **Po, P1, P2**… el promedio puede variar pero no necesariamente, lo que cambia es la población.
$i_n - 1 = (P_{n+1} / P_n) - 1 = (P_{n+1} - P_n) / P_n = r_n$
Ésta va cambiando la población año tras año, pero suponemos que $r_n = r$, es decir, 1.82 se mantiene constante**.**

- Cuestión 3:

Hipótesis: existe un número máximo de usuarios (K) en la red. Como en el modelo anterior el número de invitaciones era constante ahora no nos sirve; cada año no se invitan 1.82 usuarios.
Utilizaremos uno nuevo: **Pn+1= Pn +Pn·**$\mathbf{r_n}$**→** para que se contemple que existe un nº máximo de usuarios, a medida que **Pn** aumenta**,** $\mathbf{r_n}$ debe disminuir**.** Y cuando **Pn=K,** $\mathbf{r_n = 0}$**.**

Lo que queremos es que el nº de invitaciones que hace cada usuario ya existente no sea constante, por eso tenemos que hacer que dependa de **Pn**. Para eso utilizaremos una fórmula con una relación inversa que hará que cuando aumente un parámetro, disminuya el otro.
Vamos a utilizar una relación lineal inversa: $\mathbf{r_n = -A \cdot P_n + B}$**, donde A y B son mayores o iguales a cero.**
Pn+1=Pn + Pn · (-A·Pn+B)

Trimestre 1	Sesión 2	Grupo 3

Introducción:
Para empezar, vamos a recordar los datos y formulaciones hechas en el informe anterior. La nomenclatura de las variables quedaran fijadas de tal forma: el tiempo expresado en años será reconocido con la letra “t” y para referirnos al tamaño de población fijaremos la variable con la letra “P”, añadiendo un subíndice para determinar el año del cual expresamos la población. Rectificamos los cálculos de previsiones para los siguientes años, multiplicando la variación relativa anual por cien para obtener el resultado sobre un cien por cien para conocer mejor el crecimiento real.

Pregunta 1: Estudio del modelo discreto planteado en la sesión anterior
Sucesión recurrente: para realizar el cálculo de un término hay que hacerlo respecto al año anterior.
$P_n=2.824*P_{n-1}$
$P_{n-1}=2.824*P_{n-2}$
$P_{n-2}=2.824*P_{n-3}$
ASÍ TODO EL RATO
$P_1=2.824*P_0$
$P_0=18$

$P_{n+1}=2.824^{n+1}*P_0$ ESTA EXPRESIÓN ES EQUIVALENTE A ESTA EXPRESIÓN: $P_{n+1}=2.824*P_n$
$P_{n+1}=2.824^{n+1}*P_0 \rightarrow$ Sucesión geométrica

Sucesión geométrica: $x_n=\alpha^n*x_0$
Si $\alpha > 1 \rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} x_n= +\infty \rightarrow$DIVERGE
Si $0 < \alpha < 1 \rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} x_n=0 \rightarrow$CONVERGE
Si $\alpha=1 \rightarrow x_n=0 \rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} x_n=x_0$
Si $\alpha=0 \rightarrow x_n=0 \rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} x_n=0$
Si cambio lo que hay inicialmente, lo inicial de cada año también cambiará, pero el modelo, es decir, la fórmula se puede mantener. El parámetro actual viene definido por un parámetro anterior. Por ejemplo para saber lo que ha sucedido al cabo de 20 años, tenemos que saber lo que ha pasado durante los 19 años anteriores. La n representa los años transcurridos desde el 2004. Como la sucesión es recurrente, cogeremos lo del año anterior para calcular lo del año de ahora.

Pregunta 2: Como cambiaría nuestro modelo, si hubiera un máximo número de usuarios
Podemos pensar que el número máximo de usuarios sería 50000, y esto querrá decir que se parará en 50000 (por ejemplo), y que a partir de este momento ya no podrá crecer. Cuando alcanzamos este máximo, ya no se podrá superar este punto. Nuestro modelo es divergente.

Hipótesis: Que pasaría si hay un número máximo de usuarios. Existiría un número K de usuarios máximo.
El 2.824 salía de la media del índice relativo de variación.

N	P_n	Índice de variación
0	P_0	-
1	P_1	P_1/P_0
2	P_2	P_2/P_1
3	P_3	P_3/P_2
4	P_4	P_4/P_3
5	P_5	P_5/P_4

El 2.824 sale del promedio entre todos los índices de variación.

Pregunta 3: ¿Cuándo llegamos a ese máximo número de usuarios?
Con el objetivo de conocer cuando la red social LunaticWorld llegaría a su población máxima debemos hacer una predicción basada en una sucesión recurrente. Primero, tenemos que conocer que es una sucesión, para ello tenemos que tener claro que cuando hablamos de sucesiones no lo estamos haciendo de series, sino de la existencia de elementos encadenados o sucesivos los cuales dependen de los anteriores
Lo que queremos es obtener un valor, para que el número de usuarios no aumente más, y haya un máximo de usuarios de esta red social.
Para obtener este máximo lo que tenemos que hacer es encontrar un modelo y darle valores a n.

Trimestre 1	Sesión 3	Grupo 1

HIPOTESIS 1

- Supongamos que trabajamos con un población de usuarios ilimitada
- Si no hay limitación: $Y_{i+1} = 2{,}824 \cdot Y_i = 2{,}824^{i+1} \cdot Y_o$
  $Y_{i+1} = Y_i + 1{,}824 \cdot Y_i$

r_i= constante: es el promedio de las tasas relativas de variación de la población de los primeros años.

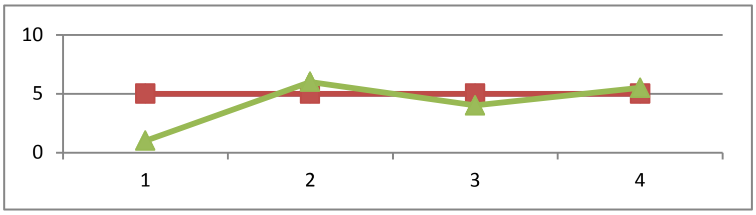
- A partir de este modelo, conocemos que a largo plazo crece sin parar.
- Es importante recordar que solo tenemos información de los años enteros, no sabemos en fracciones de año.

HIPOTESIS 2

- Nos planteamos la opción en que la población estuviera limitada: $Y_{i+1} = Yi + r_i \cdot Y_i$
- Queremos que r_i (número de invitaciones por usuario) no sea constante y que a medida que Y_i aumente (población máxima), r_i disminuya. A medida que la población aumente, podremos hacer menos número de invitaciones.
- Optamos por la relación inversa más sencilla, la lineal:
  $r_i = -A \cdot Y_i + B$ sustituimos r_i en el modelo inicial:
  $Y_{i+1} = Yi + (-A \cdot Yi + B) \cdot Yi$ cuando $Yi = M$, $r_i = 0$, lo sustituimos en la fórmula anterior y podemos establecer una relación entre A y B. Por lo tanto:
  1) $B = A \cdot M$
  $0 = -A \cdot M + B$
  2) $A = B/M$
  1) $Y_{i+1} = Yi + (-A \cdot Yi + A \cdot M) \cdot Yi \rightarrow Y_{i+1} = Yi - A \cdot Yi^2 + A \cdot M \cdot Yi$
- Es una relación cuadrática, ya que la población no se estanca del todo sino que va habiendo oscilaciones.
- Cabe recordar que no podemos usar la fórmula recurrente en el año 0 (2004), ya que el año anterior no había red y decir que había cero usuarios no es reflejar la realidad.
  2) $Y_{i+1} = Yi + (-B/M \cdot Yi + B) \cdot Yi \rightarrow Y_{i+1} = (1 + r_{i+1}) \cdot Yi \rightarrow Y_{i+1} = I_i \cdot Y_i$

NUEVA HIPOTESIS:

- Realmente, la población no se estanca, sino que va oscilando. De aquí sale la forma cuadrática dicha anteriormente. Puede ser que lleguemos a un punto máximo y que alguien se dé de baja. Entonces la población en un principio disminuirá, pero al poder hacer más invitaciones, la población volverá a sobrepasar el número máximo y así sucesivamente.
- A largo plazo estas oscilaciones son cada vez menores e Yi se irá aproximando cada vez más a M.
- Lo que realmente sucede es que llegamos al año "i", donde la población aún está por debajo de M, el modelo permite que la población continúe.
- Si el máximo no se alcanza en un nº entero de años aparecerán estas oscilaciones.



Este gráfico es un ejemplo de las oscilaciones. La línea roja es el número máximo de usuarios y la verde son las oscilaciones que va haciendo. Diremos "i" al punto que se sobrepasa y "M" al que está por debajo del máximo.

- Para que no supere el punto máximo, tendríamos que coger M con un valor un poco por debajo del máximo.

Trimestre 1	Sesión 3	Grupo 2

Introducción:
Para empezar, vamos a recordar los datos y formulaciones hechas en el informe anterior.
Sucesión recurrente: para realizar el cálculo de un término hay que hacerlo respecto al año anterior. Así pues el parámetro de un año concreto viene definido por el parámetro del año anterior: $P_n=2.824 \cdot P_{n-1}$
Un número máximo de usuarios hace que la función sea finita, es decir, que cuando se alcance este máximo ya no se podrá superar este punto.

Pregunta 1: Encontrar los parámetros del nuevo modelo discreto que hemos planteado (en función del nº máximo de usuarios K). La sucesión recurrente nos da el tamaño de la población de cada año. K: fijado por las personas que hayan accedido a la red. Al observar la gráfica podemos ver como la función supera el límite de usuarios y cuando alcanza el máximo oscila. Para cada año que transcurre desde entonces la oscilación es menor.
La K y la A están relacionadas, hay que ir dando valores de K y observar el resultado que más se ajuste.
La forma que adquiere la función de un año para el otro tiene forma cuadrática, esto representa las oscilaciones que encontramos en la gráfica.

Pregunta 2: Nos planteamos la opción en que la población estuviera limitada. $P_{n+1}= P_n + r_n \cdot P_n$
Queremos que r_n (número de invitaciones por usuario) no sea constante y que a medida que P_n aumente (población máxima), r_n disminuya. A medida que la población aumente, podremos hacer menos invitaciones.
• Optamos por la relación inversa más sencilla, la lineal: $r_n= -A \cdot P_n + B$ sustituimos r_n en el modelo inicial: $P_{n+1}= P_n + (-A \cdot P_n + B) \cdot P_n$, cuando $P_n = K$, $r_n =0$, lo sustituimos en la fórmula anterior y podemos establecer una relación entre A y B. Por lo tanto:
1) $B = A \cdot K$ $(0 = -A \cdot K + B)$
2) $A = B/K$
$P_{n+1}= P_n + (-A \cdot P_n + AK) \cdot P_n$
Es una relación cuadrática, ya que la población no se estanca del todo sino que va habiendo oscilaciones.
Cabe recordar que no podemos usar la fórmula recurrente a partir del año 0 (2004)

Concluimos: La población no siempre se estanca, sino que puede ir oscilando. De aquí sale la forma cuadrática. Puede ser que lleguemos a un punto máximo y que algún usuario se dé de baja de la red, entonces la población en un principio disminuirá, pero de esta forma se podrán hacer más invitaciones y la población volverá a superar el número máximo. Esta acción se irá repitiendo y por este motivo aparecen oscilaciones, pero con el paso del tiempo estas serán cada vez menores. No aparecerán oscilaciones en el caso que se pudiera alcanzar el máximo un número entero de años.

Trimestre 1	Sesión 3	Grupo 3

El modelo que usábamos anteriormente servía para ejemplos a corto plazo, ya que a largo plazo la población se disparaba.
Por eso, buscamos una fórmula que incluyera una máximo K de población, que hiciera que a la vez que aumentaba la población, el número de invitaciones por usuario (r_n), fuese reduciéndose, hasta llegar a 0, en su máximo K.
El grupo 10, obtuvo las siguientes fórmulas:

$$\mathbf{P_{n+1}=P_n+\left(-A \times P_n+B\right)P_n \qquad A\cdot K=B}$$

Después se trataba de aplicar diferentes valores para encontrar una ecuación, que al aumentar la población, disminuyera el número de invitaciones, hasta llegar a 0 en un máximo K de población.
La última pregunta, pedía si podíamos dejar el modelo en términos de P_0. No se podía encontrar, ya que cada vez más, obtendríamos expresiones más largas y más complicadas, siendo imposible expresarlo en función de P_0 de forma reducida, ya que r_n va disminuyendo año tras año, sin ser constante.

Conclusiones:
En la pasada sesión, concluimos que teníamos que encontrar un modelo, que se asemejase al patrón de crecimiento inicial, planteado en un principio.
También vimos, que el valor de A, tenía que ser muy pequeño, por ejemplo 0,000001, y que para reducir su error, podíamos utilizar una herramienta del Excel llamada Solver.
Así obtendremos unos valores, que hará reducir el promedio de los errores en valor absoluto cometidos por este modelo, para que evolucione como inicialmente se había planteado.

Trimestre 1	Sesión 4	Grupo 1

HIPÓTESIS:
- Inicialmente habíamos puesto limitación en M= 100.000
- Nos proponemos establecer un máximo un poco por debajo de M y así no se supera el máximo real permitido.
  -Procurar:
    - Que sea un número entero. -Las oscilaciones.
    - Encontrar un valor de A que mejore al mismo tiempo: -El promedio de error.
- **2 objetivos que queríamos que cumpliera nuestro modelo:**
    - Que la población llegue al máximo y se estabilice.
    - Que los datos de los 6 primeros años se asemejen al máximo a los valores reales.

PREGUNTA 1: Estudiar de forma teórica el parámetro B (o A): $Y_{i+1} = Y_i + Y_i\,(\frac{-B}{M} \cdot Yi + B)$ $\mathbf{r_i}$ = nº invitaciones

- No era necesario estudiar los dos parámetros ya que: $\boldsymbol{A} = \frac{B}{M}$ ó $\boldsymbol{B} = A \cdot M$
- Si estudiamos el parámetro **B**: **B∊ [a, b]:** entre qué intervalo se movía B
- Si estudiamos el parámetro **A**: -Solo teníamos que multiplicar sus extremos por M.

PRIMER OBJETIVO: Que a largo plazo el modelo se estabilice alrededor del máximo:
Si hacemos un estudio de Y_i a largo plazo, empezando la red social en 2004 con 18 usuarios:
- Queríamos que los **usuarios** ↑ hasta el **máximo** y veíamos que:
    - Si se llegaba a la población máxima en **número entero de años** → Se estanca.
    - Si se llegaba a la población máxima **entre un año y otro** → Va oscilando.
- Queríamos **establecer** el intervalo / **margen máximo permitido** que sobrepasa de M.
    - Si queremos más precisión: **1**
    - Si queremos menos precisión: **10**

- Ahora la **población máxima**= M+100 (margen que hemos aceptado, por ejemplo).

SEGUNDO OBJETIVO: Que el modelo en se asemeje a los datos reales.
- ✗ Nos encontramos con un problema:
    - Cuando el margen de error es pequeño → las oscilaciones son más grandes.
    - Cuando las oscilaciones son pequeñas → el margen de error es más grande.

-Vigilar: Ya que una oscilación que gráficamente parece pequeña, en la realidad puede ser muy grande.

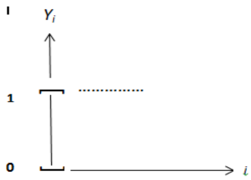
TASA DE VARIACIÓN: $\Delta\mathbf{r_i} = r_{i+1} - r_i$ → $\Delta\mathbf{r_i} = ((-B/M)\cdot Y_{i+1} + B) - ((-B/M)\cdot Y_{i+1} + B)$ → $\Delta\mathbf{r_i} = (-B/M)\cdot (Y_{i+1} - Y_i)$ → $\Delta\mathbf{r_i} = (-B/M)\cdot\Delta Y_i$ **Constante. Como $\Delta\mathbf{r_i} = (-B/M)\cdot\Delta\mathbf{Y_i}$;**
- La variación del número de invitaciones es **inversamente proporcional** a la variación del número de usuarios.
- Y la relación que existe entre ellas es **invariante a los años transcurridos**, es decir, que si pasas de un año a otro la relación siempre será la misma.

PREGUNTA 2:
Y (mayúscula) = Población, y **(minúscula)** = Nueva variable normalizada [0,1]
*Para distinguirlas, a continuación utilizaremos para denominar la población la **Y (negrita)**, y la variable normalizada: *y (cursiva).*
$\mathbf{Y}_{i+1} = Yi + Yi \cdot ((-B/M)\cdot Yi + B)$, $\mathbf{Y}_i \in [18, M+100]$ Aceptamos un margen máximo de error. Lo fijamos dependiendo de M. (Fijamos 100 como podríamos fijar 500).
- Suponemos que el margen= 100.
- Si quiero comparar redes sociales una opción es **normalizarlas**, llevarlas a escala [0, 1].

Cambio de variable:
$y_i = (B/(B+1))\cdot(Yi/M)$ $y_i \in [0,1]$
$\alpha = B+1$ → $(B = \alpha - 1)$
$\mathbf{Y}_i = (y_i \cdot (B+1) \cdot M)/B$ → $\mathbf{Y}_{i+1} = (y_{i+1} \cdot (B+1) \cdot M)/B$
Sustituimos a: $\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_i \cdot((-B/M)\cdot Yi + B)$ → $M)/B = (y_i\cdot(B+1)\cdot M)/B + ((y_i\cdot(B+1)\cdot M)/B)\cdot((-B/M)\cdot((y_i \cdot(B+1)\cdot M)/B) + B)$… $y_i = \alpha \cdot y_i \cdot(1 - y_i)$
$y_i \in [0,1]$
Para **comprobar**:

I	y_i
0	$y_0 = (B/(B+1))\cdot(Y_0/M)$
1	

18



- Queremos comprobar que este entre 0 y 1 para hacer una comparación. $\alpha \in [a+1, b+1]$

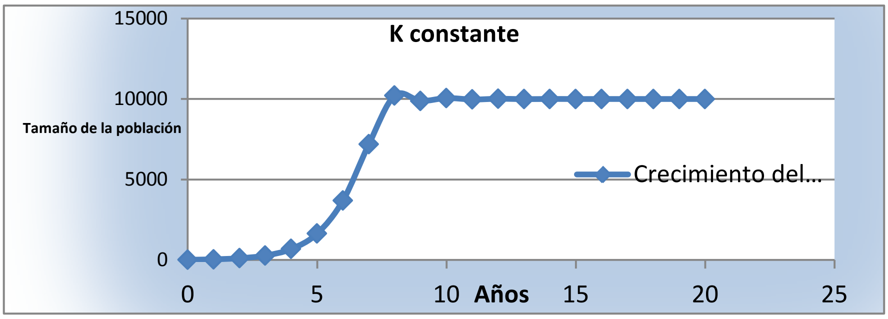
PREGUNTA 3:
Entre r_i e $\mathbf{Y_i}$ queremos encontrar una relación inversa y no lineal. Proponemos la **Hiperbólica**:
Expresión general: **Y = (A/(X+C)) + B,** Con dependiente r_i $\mathbf{r_i = (A/(Y_i+C)) + B}$
Objetivo: Encontrar los parámetros A, B, C o establecer la relación entre ellos: Cuando $\mathbf{Y_i}$ = M que $r_i = 0$
-Generatriz: $r_i = 1/Y_i$
- Podemos considerar que C=0, ya que sin la C ya cumplimos los requisitos.
Por lo tanto resumiendo decimos que: C=0, A>0, B > 0. Y de esta forma nos queda la fórmula en función de dos parámetros: $\mathbf{r_i = (A/Y_i) - B}$
Como sabemos qué relación hay entre A y B: Si $\mathbf{Y_i}$ = M → $r_i = 0$
0 =(A/M) – B B= A/M
Por lo tanto, la fórmula nos queda así: $\mathbf{r_i = (A/Y_i) - (A/M)}$
Y el modelo final nos queda: $\mathbf{Y_{i+1} = Y_i + Y_i \cdot ((A/Y_i) - (A/M))}$

Trimestre 1	Sesión 4	Grupo 2

En la **primera pregunta** partimos de la tabla que nos dan los años y el tamaño de la población:

T (años)	P (población)
0 (2004)	18
1 (2005)	56
2 (2006)	151
3 (2007)	447
4 (2008)	1034
5 (2009)	3143

El objetivo que buscábamos es que la K se estabilice en k= 10.000 en este caso y lo representamos gráficamente para asegurarnos de que los datos que hemos obtenido cumplen la condición de acercarse al máximo K.



En la **segunda pregunta** tenemos que hacer el siguiente cambio de variable: $y_n = \frac{B}{B+1} * \frac{P_n}{K}$

Partiremos del modelo discreto de la última sesión: $P_{n+1} = P_n + \left(-\frac{B}{K} * P_n + B\right) * P_n$

Tendremos que aislar P_n y sustituirla en la fórmula anterior. Una vez sustituido nos tendría que salir la siguiente fórmula: $y_{n+1} = \alpha * y_n * (1 - y_n)$

En el caso de que no obtener esta fórmula puede significar que no se ha simplificado al máximo la fórmula. Una vez tenemos el modelo normalizado podemos comparar poblaciones muy distintas entre sí. El nuevo modelo tiene que tomar valores entre el 0 y el 1.

En **la tercera pregunta** nos piden que busquemos una relación inversa no lineal.

La sucesión dada es la siguiente: $P_{n+1} = P_n + \left(-\frac{B}{K} * P_n + B\right) * P_n$

A partir de la sucesión dada, se puede comprobar que esta sucesión nos muestra una relación entre R_n y P_n lineal: $R_n = -\mathrm{A} * P_n + \mathrm{B}$, donde A es la pendiente de esta recta. En nuestro caso, la convertiremos en una relación **cuadrática**: $R_n = -\mathrm{A} * P_n^2 + \mathrm{B}$. Podemos ver que en esta relación la C=0.

En el caso de realizarlo con una relación **hiperbólica** la fórmula general sería la siguiente:

$P_{n+1} = P_n + (A/P_n - A/k) * P_n \quad A>0.$

Trimestre 1	Sesión 4	Grupo 3

Empezamos la sesión 3 presentando dos hipótesis sobre el modelo que predecía el número de afiliados a la red social. Una de ellas era la posibilidad de que no hubiera ningún límite en la población de dicha red, lo cual estaba representada por una sucesión recurrente: $P_{n+1} = Pn + 1{,}824 \cdot Pn$

No obstante, nos centramos en una nueva hipótesis, basada en un límite que denominaremos K. Este modelo, el cual está determinado por una relación lineal inversa entre r_n y P_n, presenta dos posibilidades, en función de si trabajamos con el parámetro A o B:

- En función de A: $P_{n+1} = Pn + (-A \cdot Pn + A \cdot K) \cdot Pn$
- En función de B : $P_{n+1} = Pn + (-\frac{B}{K} \cdot Pn + B) \cdot Pn$

A partir de aquí, se pedía un seguido de cuestiones

1. Estudiar de forma teórica el parámetro B y la variación absoluta de rn.
2. Analizar el modelo "normalizado" aplicando un cambio de variable.
3. Establecer otro tipo de relación funcional entre r_n y P_n y estudiarla.

Cuestión 1

Con este último modelo, si se llegaba a un máximo de usuarios en un año entero, el gráfico no presentaba ningún tipo de oscilación. Pero si este año no es entero, efectivamente el gráfico oscilaba tras superar K, aunque estas pequeñas oscilaciones se aceptaban siempre y cuando formen parte de un margen aceptable. Todo esto dependía del parámetro B, además de un margen de error más grande para que no se supere el límite, por ejemplo, K + 100.

Se nos presentaban dos problemas. Uno de ellos era fijar mediante Excel un intervalo de valores para B para que las oscilaciones estuvieran dentro del margen de error. Y otro de ellos era que los resultados del modelo tenían que asemejarse a los resultados reales de los últimos años. Para ello, se tenía que realizar un cálculo para establecer hasta qué B máximo se podía alcanzar, siempre y cuando cumpliera con los requisitos anteriores.

Además, se nos pedía calcular la tasa absoluta de variación de r_n, el promedio de invitaciones que realizaba un usuario de la red. Asimismo, el procedimiento es el siguiente:

$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n = (-\frac{B}{K} \cdot P_{n+1} + B)$-$(-\frac{B}{K} \cdot Pn + B) = -\frac{B}{K} \cdot (P_{n+1} - P_n) = -\frac{B}{K} \cdot \Delta Pn$

En consecuencia, llegamos a la conclusión de que el aumento de invitaciones es invariable respecto al aumento de la población, ya que establecimos una relación lineal, y –B/K se trataría de la pendiente de ésta.

Cuestión 2

En la segunda cuestión se nos pedía un normalizado con un cambio de variable, siguiendo las siguientes restricciones:

$Y_n = \frac{B}{B+1} \cdot \frac{P_n}{K}$ $\qquad B + 1 = \alpha$

- Aislando Pn en función de Yn: $P_n = \frac{Y_n \cdot (B+1) \cdot K}{B}$
- Y Pn+1 en función de Yn+1: $P_{n+1} = \frac{Y_{n+1} \cdot (B+1) \cdot K}{B}$

La substitución quedaría de la siguiente forma: $\frac{Y_{n+1} \cdot \alpha \cdot K}{B} = \frac{Y_n \cdot \alpha \cdot K}{B} + (-\frac{B}{K} \cdot \frac{Y_n \cdot \alpha \cdot K}{B} + B) \cdot \frac{Y_n \cdot \alpha \cdot K}{B}$

Y resultando en lo siguiente: $Y_{n+1} = \alpha \cdot Y_n \cdot (1 - Y_n)$

Para comprobar que está bien realizado, se utiliza el Excel, dándole valores a n para ver cómo actúa Yn (debería estar entre 0 y 1). Los resultados que obtenemos son estos: $\alpha \epsilon [a+1, b+1]$ siendo B $\epsilon [a, b]$ la respuesta de la primera cuestión. Se normaliza la ecuación para poder compararla con otros modelos, ya que en este caso ambos tomarían valores entre 0 y 1.

Cuestión 3

En la última pregunta, se busca una relación no lineal inversa entre r_n y P_n. Ponemos como ejemplo la función hiperbólica:$r_n = \frac{A}{Pn+C} + B$

Le aplicamos una relación inversa:

La B se trata del movimiento vertical y lo aplicamos al modelo para que corte en el punto K. La A ha de ser positiva, ya que comprende en el primer (siendo decreciente) y tercer cuadrante. Por último, la C es el movimiento horizontal, y en este caso se requiere. El modelo quedaría así: $r_n = \frac{A}{Pn} - B$

En el caso de que P_n fuera K, y la r_n = 0: $0 = \frac{A}{K} - B \rightarrow B = \frac{A}{K}$

El modelo definitivo quedaría de la siguiente manera: $P_{n+1} = Pn + Pn \cdot (\frac{A}{Pn} - \frac{A}{K})$

Cuestiones Sesión 1:

Q1. Hacer una simulación en el caso del modelo discreto de recursos ilimitados acerca de la evolución del tamaño de la población de un año respecto el anterior (eje x: P_n y eje y: P_{n+1}).
Q2. Hacer una simulación en el caso del modelo discreto de recursos imitados acerca de la evolución del tamaño de la población de un año respecto el anterior (eje x: P_n y eje y: P_{n+1}).
Q3. Escribir el modelo de recursos ilimitados considerando el tiempo como una magnitud continua (modelo continuo).

Cuestiones Sesión 2:

Q1. Buscar información acerca de las ecuaciones diferenciales y estudiar los diferentes criterios de clasificación.
Q2. Resolver la ecuación diferencial planteada en la sesión anterior, trabajando cada grupo con sus propios datos

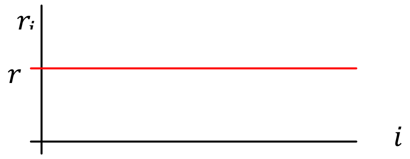
Cuestiones Sesión 3:

Q1. Encontrar la ecuación diferencial que debe cumplir el modelo continuo x(t) de recursos limitados.
Q2. Clasificar la ecuación diferencial planteada en el apartado anterior y resolverla.

Trimestre 2	Sesión 1	Grupo 1

1ra Hipótesis: Modelo discreto (recursos ilimitados)

- El tiempo se valora como una magnitud discreta: Y_i =nº de usuarios al cabo de i años desde el inicio (2004) y i = número natural
- Relación de dependencia del año siguiente con el anterior
  $Y_{i+1} = f(Y_i)$ → relación funcional→ sucesión recurrente
  Y_0 = nº de usuarios inicial (2004)
  $r_i = \frac{Y_{i+1}-Y_i}{Y_i}$ = tasa relativa de variación
  $r = 1{,}824$ =promedio



Hay ciertas oscilaciones pero r se mantiene constante: $Y_{i+1} = Y_i + r.Y_i$ → $Y_{i+1} = (1+r).Y_i$
$Y_{i+1} = \alpha.Y_i$ → $\alpha = 1 + r = 2{,}824$→Existe una relación lineal entre Y_{i+1} y Y_i: $Y_{i+1} = \alpha^{i+1}.Y_0$→ Sucesión geométrica

$$\begin{cases} \text{Si } 0 < \alpha < 1,\ Y_i \text{ tiende a 0 por lo que converge} \\ \text{Si } 1 = \alpha,\ Y_i = Y_0 \text{ se mantiene constante} \\ \text{Si } \alpha > 1,\ Y_i \text{ crece infinitamente por lo que diverge } \alpha = 2{,}824 \end{cases}$$

El modelo es ilimitado: no contempla un nº máximo de usuarios.

2ª Hipótesis: Modelo Discreto (recursos limitados)

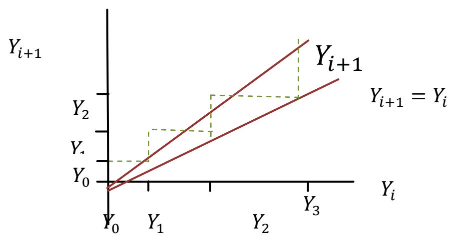
- Suponemos que existe nº máximo de usuarios M.
- El modelo antiguo no funciona ya que no contempla un máximo, r_i no puede ser constante.
- A medida que Y_i se acerca al máximo, r_i se acerca a 0. Hay que buscar la relación inversa entre Y_i y r_i .

  $r_i = -A.\ Y_i + B$ → $B = A.M$ o $\frac{B}{M} = A$

  $Y_{i+1} = Y_i + r_i.Y_i$ → $Y_i + (-A.Y_i + A.M).Y_i$ → $Y_{i+1} = -A.Y_i^2 + (1 + A.M).Y_i$ → Existe una relación cuadrática entre Y_{i+1} y Y_i

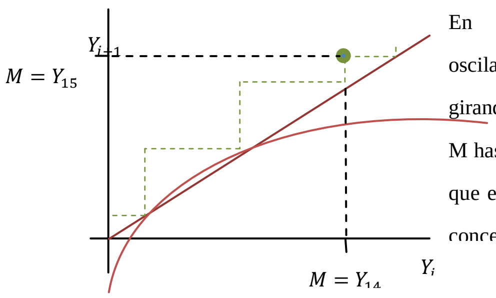
  M está prefijado y A es el único parámetro libre. Según el valor que se le dé, la curva al llegar M se mantendrá constante en ese valor a lo largo del tiempo o bien oscilará en torno a este valor hasta estabilizarse en M.

1. Con el modelo de recursos ilimitados el crecimiento al estudiar la evolución de la población (Y_i) en función del año (i) se da un crecimiento exponencial. Mientras que si estudiamos la evolución de la población (Y_{i+1}) en función de la del año anterior (Y_i) se obtiene un resultado bien diferente. Se pueden observar dos curvas una es la del año siguiente ($Y_{i+1} = 2{,}824.Y_i$) y la otra ($Y_{i+1} = Y_i$) la del año anterior a este. Lo que sucede es que va creciendo rápidamente una divergencia entre dichas rectas.

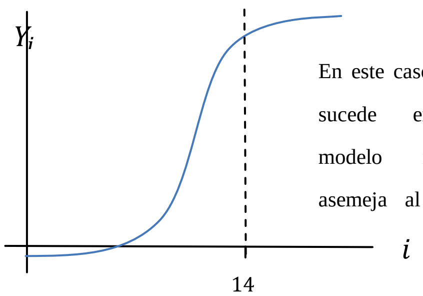


i	Y_i	Y_{i+1}
1	18	=2,824*18
2	=2,824*18	
3		
4		
5		

Si fijamos valor de M en 10000 y A en 0,0001



En este modelo la oscilación se manifiesta girando en torno al punto M hasta llegar a él. Por lo que entorno a M hay una concentración de puntos y



En este caso, lo que sucede en este modelo no se asemeja al modelo

2.Pasar del modelo discreto de recursos ilimitados al caso continuo (r_i → nº de invitaciones)

$$r_i = \frac{Y_i+1-Y_i}{Y_i} \rightarrow r(t) = \frac{TIV}{Y(t)},\ r = \frac{Y'(t)}{Y(t)} \rightarrow Y(t) = \frac{Y'(t)}{r} \rightarrow \text{Ecuación diferencial}$$

Nos va a permitir encontrar el modelo de recursos ilimitados teniendo en cuenta el tiempo en cualquier momento. Su resultado depende de la derivada.

Trimestre 2	Sesión 1	Grupo 2

Para esta sesión de seminario se nos plantearon tres cuestiones principales, de las cuales dos de ellas trataban de cerrar lo que vimos en el trimestre anterior y la última buscaba introducir nuevos conceptos a nuestros estudios sobre la red social.
La primera pregunta trataba de buscar una simulación del crecimiento para el modelo discreto de los recursos ilimitados, por lo que la tasa relativa de variación se consideraba constante y la relación entre P_{n+1} y P_n era lineal:
$P_{n+1}=(1+r)\cdot P_n$.
Una vez hallado, para hacer la simulación que nos muestra la población de un año respecto a la del año anterior, realizamos una tabla en la que el eje x corresponde a P_n y el eje y a P_{n+1}, al ser de recursos ilimitados la simulación que nos salía una relación lineal.
El gráfico resultante tiene que ser de la siguiente manera, ya que este crece de forma exponencial y sin límite.

«Gráfico»

La segunda pregunta nos pedía que realizáramos la misma simulación pero esta vez debíamos recurrir al modelo de los recursos limitados, donde marcamos un límite en la población llamado k.
Para esta simulación recurriremos a la siguiente expresión: $P_{n+1}= P_n + r_n\cdot P_n$
Pero esta vez r_n tendrá una relación inversa lineal con P_n, por lo que trabajaremos sobre esta fórmula:
$P_{n+1}= P_n + (-A\cdot P_n + A*k)\cdot P_n$
Realizando una tabla en la que x sea P_n y las y P_{n+1} obtenemos una nueva progresión en la que vemos un crecimiento hasta llegar hasta el límite pero una vez alcanzado la simulación anual oscila constantemente en torno al valor marcado.
El gráfico seria el siguiente:

«Gráfico»

En la tercera pregunta de este informe teníamos que tratar de hallar un modelo para la progresión de los recursos ilimitados donde pudiéramos llegar a calcular la progresión en cualquier momento, lo que introdujo la idea de la t como una variable continua. Para calcular esto realizamos un cambio de notación $P_n = X(t)$
Como para saber el crecimiento de una función en cualquier punto usamos la derivada en ese punto, introducimos la idea en la fórmula hallando la siguiente expresión. X(t)=X`(t)/r
Mediante esta fórmula aparece el nuevo concepto de ecuaciones diferenciales, las cuales estudiaremos en las próximas sesiones.

Trimestre 2	Sesión 1	Grupo 3

Introducción:

En esta primera sesión de seminario englobamos todo lo trabajado durante el primer trimestre.

La primera pregunta trataba solo de analizar gráfica y numéricamente lo ya estudiado anteriormente, aunque añadiéndole un pequeño cambio: en vez de analizar la población respecto al tiempo analizarla respecto a la población del año anterior.

Y con la segunda pregunta le dimos un cambio importante a nuestro proyecto, ya que a partir de ahora no analizaremos el tiempo de forma discreta, sino que lo haremos de forma continua, es decir, en vez de analizar la población año a año la podremos analizar en el instante de tiempo que deseemos.

Pregunta 1

Recursos ilimitados

Representamos nuestro modelo de recursos ilimitados y gráficamente aparece una función lineal, a diferencia de las sesiones anteriores el objetivo de esta pregunta es la comprobación de la relación lineal que existe entre P_{n+1} y P_n.

Esta comprobación se hace mediante un método conocido como el de "tela de araña".

Representamos: En el eje de las x tenemos P_n; en el de las y P_{n+1}. Además en la misma gráfica dibujamos la recta pendiente 1 que es lo que nos permitirá hacer el análisis.

Observamos que a medida que pasan los años se distancia más una recta de la otra, es decir nos da la divergencia hacía infinito (crecimiento infinito).

Recursos limitados

Cuando representábamos población en función del tiempo veíamos que la función crecía de forma exponencial y podía sobrepasar el límite k porque el control de la población se realizaba de forma anual y después se estabilizaba con pequeñas oscilaciones acercándose a k.

Si representamos P_{n+1} en el eje de las **y** y P_n en el de las **x**, aparece una parábola convexa y observamos que hay un momento en que la parábola se estanca y hay mucha concentración de puntos, es que cuando sobrepasamos el máximo k, la población de P_{n+1} ha de disminuir; disminuye, aumenta, disminuye… y vamos entrando en un bucle hasta que a largo plazo llegamos a k, se conoce como punto atractor. Esto ocurre si no llegamos al máximo k en un año concreto, si llegáramos en un año concreto la parábola se quedaría ahí.

Pregunta 2

En esta cuestión teníamos que pasar el modelo de recursos ilimitados de forma discreta a continua, recordemos la fórmula discreta: $\mathbf{P_{n+1}= P_n+ R_n*P_n}$

Donde R_n es constante y P_n es la población en el año n:

$$\mathbf{R_n=\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}}$$ (Indica el crecimiento relativo anual)

Para pasar al modelo continuo aplicaremos los siguientes cambios: x(t)=Población en el instante t; t pertenece a los reales.

Para encontrar el incremento en un instante de tiempo determinado hacemos la derivada.

$$R(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} \Rightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow X(t) = \frac{x'(t)}{R}$$

Para saber el número de usuarios en el instante que queramos usaremos esta ecuación diferencial (que son las que dependen de su derivada).

Trimestre 2	Sesión 2	Grupo 1

PREGUNTA 1:

En esta pregunta hablamos de los diferentes tipos y formas de clasificar las ecuaciones diferenciales:

- Según el tipo: **ordinarias** (la función que buscamos depende de una única variable independiente). o **parciales** (la función que buscamos depende de más de una variable independiente).
- Según el orden: la derivada de orden mayor de la ecuación diferencial.
- Según la linealidad: **lineales** (cuando la función y sus derivadas sucesivas están elevadas a la potencia 1 como mucho, entre otras características) o **no lineales**.

PREGUNTA 2:

Se trata de resolver la ecuación diferencial que nos proponían: $x(t) = \frac{x´(t)}{r}$

Ésta fue el resultado de derivaciones y simplificaciones del modelo de recursos ilimitados.

Al resolver dicha ecuación diferencial obtenemos la siguiente función: x(t) = $e^{r \cdot t+C}$

Donde r es el promedio de las tasas relativas de variación y el valor de C lo conseguimos de la condición inicial (nº de usuarios del 2004, t=0).

Una vez obtenemos la función resultante vamos substituyendo los valores de t de la tabla inicial y lo comparamos con los datos reales que tenía cada grupo en la blackboard acerca del crecimiento de usuarios, representándolos gráficamente.

Trimestre 2	Sesión 2	Grupo 2

Pregunta I.
En esta pregunta se definió y explicó los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.
Una ecuación diferencial es una ecuación en la que nuestro objeto de búsqueda, que es una función y no una única variable, está expresado en términos de sus derivadas sucesivas.
La clasificación de las variables son las siguientes;

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias:** La función considerada depende de una sola variable independiente.
- **Ecuaciones en derivadas parciales:** La función considerada depende de más de una variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales también se pueden separar o agrupar según su orden y el grado. Las ecuaciones diferenciales que más encajan con la planteada en la sesión anterior son las ecuaciones lineales homogéneas de primer orden y de grado 1.
Es una ecuación lineal con coeficientes constantes, por ejemplo: y'=y·a.
La solución sería $y=f(x)=c_0 \cdot e^x$, siendo C un nº real.
La solución sería → $y=f(x)= \mathbf{C}_0 \cdot e^x$→ **C** siendo un nº real.
Obtenemos el grado de la ecuación diferencial mirando el mayor exponente (de la derivada de mayor orden) que hay en la ecuación, siempre y cuando la ecuación diferencial esté expresada en forma de polinomio.
Para que la ecuación sea diferencial lineal debe cumplir las condiciones siguientes:

- Ni la función ni sus derivadas están elevadas a ninguna potencia distinta de uno o cero.
- En cada coeficiente que aparece multiplicándolos sólo interviene la variable independiente.
- Una combinación lineal de sus soluciones es también solución de la ecuación.

Ejemplo: y"'+3y''-6y'+y=0
Esta ecuación es de orden 3 (mirando el mayor orden de derivación), lineal, con coeficientes constantes y homogénea (el término independiente es 0).

Pregunta II.
En el anterior seminario se obtuvo la siguiente ecuación diferencial: $X(t) = \frac{X'(t)}{R}$
Tenemos en cuenta que los datos de la población respecto al año a partir de ahora variará en funión del grupo, por lo tanto cada uno tendrá su R.
Recordamos que la R se obtiene haciendo la tasa relativa de variación con los nuevos datos y luego se hace el promedio de éstas, de esta manera se obtiene R.
Para encontrar la previsión del nº de usuarios de la red social según nuestro modelo para un año determinado tenemos de derivar la ecuación X(t), es decir, hemos de encontrar X'(t).
Pero no podemos derivarla, ya que desconocemos la expresión de la función X(t), por lo que tenemos que integrar.
$\mathbf{R = \frac{X'(t)}{X(t)} \rightarrow \int R\, dt = \int \frac{X'(t)}{X(t)} dt \rightarrow \int R\, dt = \int \frac{1}{X(t)} \cdot X'(t) dt \rightarrow R \cdot t + C = \ln (X(t)) \rightarrow e^{R \cdot t} \cdot e^{C} = X(t)}$

Aquí tenemos la ecuación diferencial de nuestra red social, pero nos falta saber cuál es la constante C, para encontrarla sabemos que en el inicio de la red social (t=0), los usuarios $X(t)=X_0$ (X_0= población en año 2004 de cada grupo), por lo que podemos deducir:
$X(t) = e^{R \cdot t} \cdot e^C$
$X_0 = e^{R \cdot 0} \cdot e^C$
$X_0 = 1 \cdot e^C$
$e^C = X_0$
Podemos ver que se trata de una ecuación diferencial ordinaria, ya que depende de una sola variable independiente, es también una ecuación lineal homogénea de primer orden.
A continuación introducimos los datos obtenidos a partir de la función obtenida y los comparamos con los datos reales para comprobar si se asemejan o se distancian mucho de ellos.
Para obtener la previsión del número de usuarios de la población 10,5 años desde el inicio, se sustituye 10,5 en t.
Es decir: $X(t) = X_0 \cdot e^{R \cdot 10,5}$

Trimestre 2	Sesión 2	Grupo 3

Primera pregunta:

Las ecuaciones diferenciales son aquellas ecuaciones en las que intervienen derivadas de una o más funciones. Se pueden clasificar de dos formas:

Según tipo:

1. Ordinarias: Tienen una única variable independiente.
2. Parciales: Tienen más de una variable independiente.

Según orden (orden máximo de derivación):

1. Primer orden.
2. Segundo orden.
3. Orden superior.

Dentro de estos diversos tipos de ecuaciones diferenciales, podíamos encontrar tres distintas soluciones:

1. Solución general.
2. Solución particular.
3. Solución singular.

Concluimos en que nuestra ecuación diferencial se trataba de una ordinaria de primer orden y de tipo lineal, ya que la máxima potencia de la función x(t) y de su derivada era 1.

Segunda pregunta:

Partíamos de la siguiente ecuación: $r=\frac{x'(t)}{x(t)}$

Con esta fórmula, primero poníamos el símbolo de integración en cada lado, luego poníamos la x'(t) a multiplicar y le poníamos en su lugar un numerador 1 a la x(t), luego veíamos que al ser r un número real, su integral es únicamente r · t, y al otro lado tenemos una integral de tipo semi inmediata que nos da como resultado el logaritmo neperiano de x(t):

$r \cdot t + C = \ln(x(t))$

Una vez resuelto la integral tenemos que aislar x(t), para conseguirlo aplicamos la exponencial en base el número e a ambas partes de la igualdad, eliminando así el logaritmo neperiano y quedándonos en una parte x(t) y en la otra el número e elevado a r · t + C:

$x(t)=e^{r\cdot t+C}$

Sabemos, que r es un número real, pero no lo tenemos, ni nos lo dan. A partir de los valores que nos facilitan a cada grupo sobre el número de usuarios de esta red social durante los 6 primeros años, tenemos que calcular la tasa media de variación entre años consecutivos, luego sumarlos y dividirlos entre el número de datos, así encontramos el valor r.

Por último nos queda encontrar la constante C, para realizarlo, hemos de saber nuestra población en el año 0 (condición inicial), entonces sabremos que cuando la t sea 0 la x(t) será el nº de usuarios con que se abrió la red social. De esta forma obtendremos C. Nos quedaría un modelo de este tipo:

$x(t)= e^{0.1457\cdot t+5.86363}$

Posteriormente, en clase, estuvimos estudiando los diferentes promedios, ya que en muchos casos, entre los diferentes valores había alguno que sobresalía excesivamente por encima o por debajo de los demás. Estas situaciones podrían estar provocadas por un error en la recolección de los datos, como por ejemplo que el nº de usuarios de un determinado año tome un valor negativo (no era nuestra situación). Si el error es claro, podríamos hacer el promedio sin tener en cuenta ese valor, ya que si no li hiciéramos, ese valor nos modificaría excesivamente el crecimiento de nuestra promedio, tanto a la baja como a la alza.

Por último se dictaron las propuestas para el seminario siguiente:

1. Escribir la ecuación diferencial relacionada con el modelo continuo para recursos limitados.
2. Clasificar la ecuación diferencial obtenida y resolverla paso a paso.

   Después de dictarnos las preguntas, hizo especial énfasis, en que las siguientes propuestas al final del trabajo estuvieran más relacionadas con posibles variaciones que se podrían aplicar a nuestro modelo, hipótesis o condiciones aun no estudiadas, o situaciones a las cuales podamos exponer nuestro modelo y que aún no se hayan propuesto. Aun así se pueden hacer propuestas de otro tipo.

Trimestre 2	Sesión 3	Grupo 1

En esta sesión partimos del concepto y la clasificación de la ecuación diferencial encontrada en la sesión anterior, también sabemos sus características y sus tipos: ordinarias y parciales.
Grado: es el mayor exponente de la derivada de orden mayor de la función (para ecuaciones diferenciales polinómicas).
Orden: es el orden de derivación mayor de la función.
Nuestra ecuación diferencial es ordinaria, de grado 1, de orden 1 y NO lineal. x (t) = $\frac{x\prime(t)}{r(t)}$

<u>Pregunta 1</u>: Encontrar la ecuación diferencial que debe cumplir el modelo continuo x(t) de recursos limitados.
Como el modelo es de recursos limitados tenemos que establecer un máximo (M), este modelo debe cumplir que a medida que la población x(t) aumenta, r(t) disminuye, es decir, mantienen una relación inversamente proporcional.
Para que la r(t) cumpla esto, la tenemos que modificar, ya que antes era una constante:
$r_i \rightarrow r(t)$ r(t) = -A · x(t)+B B= A·M ; A= $\frac{B}{M}$
Para simplificarlo, sustituimos B, y sacamos factor común a la A:
r(t) = -A · x(t) + A · M → **r(t) = A · (-x(t) + M)**
Sustituimos **r** por **r(t)** en el modelo de recursos ilimitados y nos queda la siguiente ecuación diferencial:
x(t) = $\frac{x\prime(t)}{A\cdot(-x(t)+M)}$

<u>Pregunta 2</u>: Clasificar la ecuación diferencial planteada en el apartado anterior y resolverla.
La ecuación encontrada en el apartado anterior la clasificamos de manera que decimos que es una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 y orden 1, para resolverla tenemos que integrarla, esto nos sirve para eliminar la derivada x'(t).
Lo primero que hacemos es aislar el parámetro A y la arreglamos para que sea más fácil integrar,
x(t) = $\frac{x\prime(t)}{A\cdot(-x(t)+M)}$ → $A \cdot (-x(t) + M)$= $\frac{x\prime(t)}{x(t)}$ → A= $\frac{x\prime(t)}{x(t)\cdot(-x(t)+M)}$
Para continuar resolviéndola integramos ambas partes de la ecuación: $\int A\, dt = \int \frac{x\prime(t)}{x(t)\cdot(-x(t)+M)}$ dt
Cuando integramos la parte izquierda de la integral vemos que es una integral inmediata de una constante ($\int A\, dt = A \cdot t + C$), cuando integramos la parte derecha de la integral vemos que no es ni una inmediata ni una semi inmediata, llegados a este punto vemos que nuestro denominador podría ser el denominador común de una suma de fracciones, así que separamos nuestra fracción en una suma de fracciones: A = $\frac{\#}{x(t)} + \frac{\#}{-x(t)+M}$
El siguiente paso es encontrar el numerador de nuestra suma de fracciones de manera que cumpla que cuando hagamos denominador común sea x'(t). Si les damos valor 1 llegamos a la conclusión de que en nuestro numerador quedará M, así hacemos la siguiente transformación sin que cambie la ecuación planteada: $\frac{x\prime(t)}{M} \cdot (\frac{M}{x(t)\cdot(-x(t)+M)})$
Arreglando esta función nos queda: A = $\frac{1}{M} \cdot (\frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{x'(t)}{-x(t)+M})$
Ahora integramos la función: $\int A\, dt = \frac{1}{M}\int \frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{1}{M}\int \frac{-x'(t)}{-x(t)+M}\, dt$; la parte izquierda es la integral inmediata de una constante la parte derecha tenemos dos semi inmediatas, integrando y arreglando nos queda la siguiente fórmula:
A · M · t + C = ln $|x(t)| - ln\, |-x(t) + M|$ → A · M · t + C = ln$\left(\frac{x(t)}{-x(t)+M}\right)$
El método que utilizamos para eliminar el logaritmo es el número "e", sabiendo ya su uso para la eliminación del logaritmo, y dejando aislado x(t) y resolviendo la función una vez hemos utilizado el número "e" nos queda la siguiente y definitiva función: **x(t) =** $\boldsymbol{\frac{e^{A\cdot t\cdot M}\cdot M\cdot K}{1+e^{A\cdot t\cdot M}\cdot K}}$ siendo K=e^C

Trimestre 2	Sesión 3	Grupo 2

1. **Ecuación diferencial que debe cumplir el modelo continuo de recursos limitados X(t).**

Empezamos con la siguiente función: $R(t) = -A * X(t) + B$

De la última sesión obtuvimos: $R(t) = \frac{X\prime(t)}{X(t)}$. Sustituimos: $\frac{X\prime(t)}{X(t)} = -A * X(t) + B$

Finalmente al pasar la parte derecha a la izquierda nos queda la siguiente ecuación diferencial:

$\frac{X\prime(t)}{X(t)*(-A*X(t)+B)} = 1$

2. **Clasificar la ecuación diferencial y resolverla.**

Según la ecuación que hemos obtenido podemos decir que es una ecuación diferencial:

- ordinaria →1 sola variable "t" independiente
- 1º orden→ ya que solo aparece derivada una vez la función X(t)
- 1º grado→ es una ecuación diferencial polinómica. Ya que el grado depende de la potencia de la derivada de orden mayor y en este caso es 1.
- no lineal→ ya que para ser lineal la función X(t) y sus derivadas tienen que estar elevadas como máximo a potencia 1 y sus coeficientes deben depender únicamente de la variable independiente t.

Nos encontrábamos con dos problemas para resolver la ecuación:

- INTEGRAR (ya que no sabemos quien es X(t))
- El parámetro B

Al integrar nos encontrábamos con lo siguiente después de aislar B: $\frac{1}{B}\int \frac{B*X\prime(t)}{X(t)*(-A*X(t)+B)} dt = \int 1\, dt$

Entonces veíamos que si conseguíamos separar la fracción en suma de dos, nos encontrábamos con dos integrales semi-inmediatas: $\frac{1}{B}\int \frac{B*X\prime(t)}{X(t)}\, dt \rightarrow \frac{1}{B}\int \frac{B*X\prime(t)}{(-A*X(t)+B)}\, dt$

Por lo tanto iniciamos un proceso inverso del denominador común: $X'(t) * \frac{1}{X(t)*(-A*X(t)+B)} = 1$

Teníamos que conseguir esto: $X'(t) * (\frac{1}{X(t)} + \frac{A}{(-A*X(t)+B)}) = 1$

Pero nos dimos cuenta de que la parte entre paréntesis tenía que tener en el numerador el valor 1, de forma que multiplicamos toda la ecuación por B: $X'(t) * (\frac{1}{X(t)} + \frac{A}{(-A*X(t)+B)}) = B$

Ahora ya podíamos integrar: $\frac{1}{B}\int \frac{X'(t)}{X(t)} dt - \frac{1}{B}\int \frac{-A*X\prime(t)}{-A*X(t)+B} dt = \int 1\, dt \rightarrow \frac{\ln(\, X(t))}{B} - \frac{\ln(-A*X(t)+B)}{B} = t + C$

$$\ln\left(\frac{X(t)}{-A*X(t)+B}\right) = B*(t+C)$$

Cancelamos el logaritmo aplicando exponenciales a ambos lados y nos queda: $\frac{X(t)}{-A*X(t)+B} = e^{B(t+C)}$

Entonces usamos la propiedad distributiva y despejamos X(t): $X(t) = \frac{B\cdot e^{B(t+C)}}{1+e^{B(t+C)}*A}$

Entonces para encontrar los parámetros A y B utilizamos Solver (tal y como se hizo en el primer trimestre):

Sabemos que cuando t=0; X(t)= nº inicial según los datos de cada grupo

Igualamos el número inicial a X(t), desarrollamos, factorizamos y encontramos el valor de C.

Trimestre 2	Sesión 3	Grupo 3

Introducción

En la pasada sesión, estudiamos las ecuaciones diferenciales.

Podemos deducir que habían dos tipos de ecuaciones diferenciales: *ordinarias*, como la nuestra en la que la función incógnita dependía de una única variable independiente, y *parciales*.

En el modelo discreto de los recursos ilimitados se cumplía: $R_n= (P_{n+1}-P_n)/P_n$

En el seminario anterior pasamos la R_n al caso continuo: $R(t)= x'(t)/x(t)$ donde R es constante (el nº de usuarios no tiene limitación)

Resolviendo la ecuación diferencial anterior mediante la integración obtuvimos: $x(t)= e^{R\cdot t} \cdot e^{C}$

R→ tasa relativa de variación (promedio)

Este modelo no es el más indicado ya que no creemos posible considerar que haya un número ilimitado de usuarios.

Encontramos el valor de C (constante de integración), despejándola e imponiendo la condición del primer año 2004 (t=0): $\ln x(t)= R * t + C \rightarrow C= \ln (x(t)) – R \cdot t$

Nos daba una predicción que crecía más rápidamente que los datos reales.

1. Escribir la ecuación diferencial relacionada con el modelo continuo para recursos limitados (plantearla).

Siendo x(t) → modelo continuo de recursos limitados. Tenemos que traducir el modelo de recursos ilimitados al modelo de recursos limitados. A partir del modelo discreto limitado, encontraremos el modelo continuo limitado

Modelo discreto:

$P_{n+1}= P_n (1+A*k-A*P_n)$

$B= A*k$

$A= B/k$

$R_n= -A*P_n+B$

Modelo continuo (instantes):

$R(t)= A * k –A * x(t)$

Ecuación diferencial → $x'(t) = R(t) * x(t)$

$x'(t)= [A*k-A*x(t)]*x(t)$

$dx/dt= A(k*x(t)-x^2(t))$

2. Clasificar la ecuación diferencial obtenida (ordinaria, parcial, lineal, etc.) y resolverla (solución particular).

Clasificación:

Ordinaria (una única variable independiente) de primer orden porque solo aparece derivada de orden uno x'(t).

Grado (potencia de la derivada de orden mayor siempre y cuando fuera una ecuación diferencial polinomial) 1 por que la derivada de orden mayor está elevada a 1.

No es lineal. Linealidad→Consiste en que tanto la función x(t) como sus derivadas consecutivas no estén elevadas a ninguna potencia mayor que 1 y que los coeficientes de estas funciones solo dependan de t.

Resolución de la función:

$dx'(t)= A(k*x(t)-x^2(t)) \rightarrow x'(t)/(A*[-x(t)+k]*x(t))= 1 \rightarrow x'(t)/([-x(t)+k]*x(t))= A \rightarrow x'(t)*[1/([-x(t)+k]*x(t))]= A$

$[1/(-x(t)+k)] + [1/x(t)] \rightarrow (x(t)- x(t) +k)/([-x(t)+k]*x(t))$ (No es lo mismo que $[1/([-x(t)+k]*x(t))]$

$x'(t)*k/([-x(t)+k]*x(t))= A* k \rightarrow -\int [-x'(t)/(-x(t)+k)]dt + \int[x'(t)/x(t)] dt =\int A*kdt \rightarrow -\ln (–x(t)+ k)+\ln(x(t))= A*k*t + C$

$\ln [x(t)/(-x(t)+k)] = A * k * t + C \rightarrow x(t)/ (-x(t) + k) = e^{A * k * t + C} \rightarrow x(t)= e^{A * k * t + C} \cdot [-x(t) + k]$

$x(t) + e^{A * k * t +C} \cdot x(t) = e^{A * k * t + C}\cdot k \rightarrow x(t) * (1 + e^{A * k * t + C})= e^{A * k * t + C*}\cdot k$

$x(t)= e^{A * k * t + C}\cdot k/(1+ e^{A * k * t + C})$ → solución final

¿Cómo encontramos A? Utilizando como plantilla el modelo que usamos para calcular A en el trimestre pasado pero con los nuevos valores reales.

¿Cómo encontramos C? Imponiendo que en 2004 x(0) sea el primer dato de los datos que se nos ha dado al principio de este trimestre.

El gráfico ha de crecer y cuando se llegue al máximo debe ser estable.

Conclusiones

Cuando veíamos las oscilaciones en el modelo continuo nos parecía ilógico. En este seminario hemos comprobado como pasándolo a modelo discreto estas oscilaciones desaparecían y cuando llegaba a k el modelo se estabilizaba.

Propuestas

Considerar que el número de invitaciones crece y luego decrece. Igualdad de individuos hasta ahora. Si hacemos grupos de usuarios, el número de invitaciones será diferente. En el informe individual, tendremos que comprobar que nuestro modelo tiende al valor k:Haciendo una tabla y una gráfica en Excel. Calculando limite cuando t tiende a infinito: $t\rightarrow\infty$, $x(t)\rightarrow k$

Tercer trimestre

Cuestiones Sesión 1

1) Predecir la evolución del tamaño de la población de usuarios estructurada en estos tres grupos de un mes n al mes siguiente n+1.
2) Si durante este mes existen 1000 usuarios Basic, 2250 usuarios Medium y 1750 usuarios Premium, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 meses?
3) En la situación del apartado anterior, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 50 meses?

Cuestiones Sesión 2

Q1. ¿Se puede destacar alguna característica de las trayectorias generadas X(n)? Donde X(n) es el número de usuarios de cada tipo dentro de n meses. $X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}$

Q2. Hacer el estudio a largo plazo mediante la simulación numérica. ¿Hay alguna característica que se mantenga mes a mes en todos los tipos de usuarios? A largo plazo. (Se debe de hacer numéricamente (Excel o Wiris) no de manera teórica).

Q3. ¿Es posible determinar el instante (mes) a partir del cual se cumple la característica anterior? Determinar el mes a partir del cual se cumple la característica a largo plazo.

Q4. ¿Qué pasaría si cambiáramos la situación inicial pero manteniendo el total de usuarios iniciales? Es decir, que en lugar de 1000, 2250, 1750 fueran otros números pero que sumaran 5000 igualmente.

Cuestiones Sesión 3:

Q1. Calcular analíticamente (sin hacer la simulación numérica, es decir a priori) el valor de α para el que se cumple P(n+1) = α * P(n)   L*P(n) = α * P(n)

Q2. Calcular analíticamente (sin hacer el estudio a largo plazo) el instante de tiempo n_e. Instante de tiempo (mes) que se “estabiliza” el crecimiento relativo.

Q3. Propuestas

Trimestre 3	Sesión1	Grupo 1

Nos dicen que durante este trimestre los usuarios se dividirán en tres rangos (Basic, Medium y Premium) en función de la antigüedad como usuario de la red social, de manera que al cabo de un periodo mensual un usuario ya existente puede mantenerse en su rango, pasar a un rango superior o dejar de ser usuario de la red. Cada uno de ellos con diferentes funciones y privilegios. Cada uno de los grupos trabaja con sus propios datos.
Este seminario se podía plantear de dos formas (con matrices en Wiris o con las funciones de Excel)

Nos preguntaban:

1) Predecir la evolución del tamaño de la población de usuarios estructurada en estos tres grupos de un mes n al mes siguiente n+1.

CADA GRUPO CON SUS PROPIOS DATOS

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0{,}65 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

La primera fila es B, la segunda es M y la tercera es P.

$$A \cdot X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0{,}65 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B \\ M \\ P \end{pmatrix}$$

<u>Excel:</u>
$B_{n+1} = 4 \cdot M_n + 6 \cdot P_n$
$M_{n+1} = 0{,}65 \cdot B_n + 0{,}25 \cdot M_n$
$P_{n+1} = 0{,}55 \cdot M_n + 0{,}5 \cdot P_n$

2) Si durante este mes existen 1000 usuarios Basic, 2250 usuarios Medium y 1750 usuarios Premium, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 meses?

1 mes: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0{,}65 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1000 \\ 2250 \\ 1750 \end{pmatrix}$ = (resultado)

2 meses: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0{,}65 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 19500 \\ 1212{,}5 \\ 2112{,}5 \end{pmatrix}$ = (resultado)

3 meses: exactamente igual, lo vas haciendo respectivamente hasta llegar al quinto mes.

<u>Excel:</u>
$B_{n+1} = 4 \cdot 2250 + 6 \cdot 1750$
$M_{n+1} = 0{,}65 \cdot 1000 + 0{,}25 \cdot 2250$
$P_{n+1} = 0{,}55 \cdot 2250 + 0{,}5 \cdot 1750$

3) En la situación del apartado anterior, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 50 meses?

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0{,}65 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{50} * \begin{pmatrix} 1000 \\ 2250 \\ 1750 \end{pmatrix} = (resultado)$$

En el segundo mes → A · población mes 1 = A · A · X(0) = $A^2 \cdot X(0)$
En el tercer mes → A · población mes 2 = A · A · A · X(0) = $A^3 \cdot X(0)$
En el mes n → A · población mes n = A · A · … · A · X(0) = $A^n \cdot X(0)$
<u>Excel:</u> Coges la fórmula del apartado anterior, la pones en Excel y lo arrastras hasta llegar al mes 50.

NUEVAS PROPUESTAS:

1 **¿Se puede destacar alguna característica de las trayectorias generales X(n)?**
2 **¿Es posible encontrar el instante "n" a partir del cual se cumple la característica del apartado anterior?**
3 **¿Qué sucedería si cambiáramos la situación inicial?**
4 **Propuestas**

Trimestre 3	Sesión1	Grupo 2

En esta primera sesión de seminario del tercer trimestre tratábamos con un nuevo aspecto. Éste era que se introducía 3 tipos diferentes de usuarios (población) de la red social, clasificados de tres formas distintas: Basic, Medium y Premium.
Se nos planteaba la **primera pregunta** a resolver: **Predecir la evolución del tamaño de la población de usuarios estructurada en estos tres grupos de un mes n al mes siguiente n+1.**

Con los datos que se nos daba a cada grupo del repartimiento de la población de una forma determinada, lo que hacíamos era una asociación:
B_n=población Basic en el mes n, B_{n+1}= población del mes siguiente Basic,
M_n= población Medium en el mes n, M_{n+1}= población del mes siguiente Medium
P_n= población Premium en el mes n, P_{n+1}= población del mes siguiente Premium

Se tiene que tener en cuenta que hay la posibilidad de darse de baja de la red y en el caso que no aparezca el tanto por ciento en los datos que se nos dan, quiere decir que se ha ido el usuario de la red social, es decir, que el usuario se ha dado de baja de la red. Si no dice que se quedan es que se han ido de la red.

Con los datos que se nos dan para cada grupo, se crean las diferentes ecuaciones para cada tipo de usuario, y a partir de aquí podemos calcular el número de usuarios de un mes n al mes siguiente n+1. Por ejemplo:
$B_{n+1}=2*M_n+3*P_n$
$M_{n+1}=0,75*B_n$
$P_{n+1}=P_n* (1-0,50)+0,80*M_n$

Se nos plantea la **segunda pregunta: Si durante este mes existen 1000 usuarios Basic, 2250 usuarios Medium y 1750 usuarios Premium, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 meses?**
Se nos da la información siguiente: B_0=1000, M_0=2250, P_0=1750. Si la resolvemos utilizando Excel, lo que debemos hacer es una tabla en Excel con la siguiente información: Poniendo cada mes con la fórmula correspondiente encontrada en la pregunta 1:

Meses	fórmula de B_{n+1}	fórmula de M_{n+1}	fórmula de P_{n+1}
0	1000	2250	1750
1			
2			
3			
4			
5			

Si aplicamos cada fórmula para cada mes, obtendremos los usuarios de cada mes, y solo tendremos que arrastrar hacia abajo en Excel para conocer los usuarios de los 5 meses siguientes.

En la **tercera pregunta: En la situación del apartado anterior, ¿cuál se prevé que será la distribución de usuarios dentro de 50 meses?:**
Si lo resolvemos con la utilización de matrices, sabemos que ésta debe ser una matriz 3x3. Las columnas serán el mes anterior (arriba) y las filas serán el mes posterior (izquierda)
Ahora sabemos cómo es la cantidad inicial de la matriz X(0): $x_1(0)$ = 1000, $x_2(0)$=2250, $x_3(0)$=1750
Si multiplicamos la matriz hecha antes por esta matriz de X(0)→1000,2250,1750, qué es una 3x1 y pertenece al resultado del mes anterior, sabremos que la matriz resultante será un 3x1 y será el resultado del mes posterior, por lo tanto, X(1)=T*X(0) // X(2)=T*X(1) dónde: T*T*X(0)→X(2) y por lo tanto: $X(50)= T*X(49)=T^{50}*X(0)$→ la T es la matriz encontrada y la X(0) es la matriz de 1000, 2250 y 1750.
Si utilizamos el Excel para hacer este cálculo, ya que se nos hará más fácil, porque solo debemos de arrastrar las fórmulas que habíamos introducido en la pregunta dos hasta los 50 meses y así obtendremos los usuarios des del mes 0 hasta el mes 50. Tenemos que conocer todos los meses intermedios antes del 50 para poder llegar a calcular el mes 50. Si nos pidiera el mes 1000, lo que deberíamos hacer es no utilizar fórmulas en Excel porque serían demasiado grandes los valores. Para poder resolver esto, introduciríamos la herramienta de las matrices.
Una vez tenemos esta tabla hecha, si hacemos un gráfico, podemos ver que tiene forma exponencial. El número de invitaciones es constante y esto es lo que hace que tenga forma exponencial y que no tenga un límite y siempre aumente, evolucione de manera positiva. A largo plazo los tres grupos (Basic, Medium y Premium) aumentan demasiado rápido, aunque los usuarios de Basic crezcan, lo hacen de una forma muy determinada y pronunciada a corto plazo.
La **cuarta pregunta** eran las **propuestas planteadas por los distintos grupos**:

- ¿Cómo afectaría si introdujéramos un límite en la población? Establecer un máximo (K) para cada tipo de usuarios.
- ¿Podríamos conseguir que la población disminuyese y aumentase de forma cíclica?
- ¿Seríamos capaces de introducir una nueva variable como por ejemplo la edad de los usuarios para introducir más tarde restricciones de edad en los usuarios de nuestra red?

Trimestre 3	Sesión1	Grupo 3

Hasta el momento, tratamos a todos los usuarios de la red social LunaticWorld por igual, sin distinción entre ellos.
A partir de ahora los clasificamos según su antigüedad como usuarios registrados, distinguimos tres niveles: usuarios Basic, Medium y Premium.
Los diferentes niveles se distinguen en cuanto a número de invitaciones y capacidad de memoria disponible, los Basic no gozan de ningún tipo de privilegio ya que son los usuarios noveles.
Cada grupo de seminario trabaja con unos datos distintos (disponibles en la plataforma Blackboard).
Para poder calcular la población mes a mes, lo hacemos mediante un producto de matrices, partimos de la situación inicial, definida por **X(0).**
X(0)→ situación inicial (mes 0), cada subíndice se corresponde a uno de los tres grupos de usuarios

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Z→ matriz (en la que colocamos por columnas los movimientos del mes anterior al mes siguiente)
Para calcular la población en el mes 1: $\mathbf{X(1) = X(0)^T \cdot Z^T}$ o bien $\mathbf{X(1) = Z \cdot X(0)}$
Para el mes 2: $\mathbf{X(2) = Z \cdot X(1) \rightarrow X(2) = Z^2 \cdot X(0)}$
Y así consecutivamente, para el mes 3 , $\mathbf{X(3) = Z^3 \cdot X(0)}$
Para calcular la población en el mes 50, $X\mathbf{(50)= Z^{50} \cdot X(0)}$
Si queremos calcular la población en el mes 50 mediante Microsoft Excel, tendremos que calcular todos los meses intermedios.
Establecemos una notación, que utilizaremos hasta haber finalizado el taller de modelización del tercer trimestre.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccc} B & M & P \end{array}}^{\text{Mes Anterior}} \\ \text{Mes Posterior}\left[\begin{array}{c} B \\ M \\ P \end{array}\right. & \begin{pmatrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Mes Anterior}\left[\begin{array}{c} B \\ M \\ P \end{array}\right. \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix} \qquad \text{Mes Posterior}\left[\begin{array}{c} B \\ M \\ P \end{array}\right. \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$$

A largo plazo, si representamos los datos calculados con Excel (usando la función =MMULT), observamos unas ondulaciones debido a que hay una movilidad mes a mes y no se acumulan los datos, aunque puede observarse que el nivel Basic es el que crece más rápido.

Trimestre 3	Sesión 2	Grupo 1

PREGUNTA 1: Saber si a largo plazo alguna característica del crecimiento de los usuarios Basic, Medium y Premium se mantiene estable.

Cogemos la matriz dada elevada al número de meses transcurridos y la multiplicamos por la situación inicial para encontrar el total de usuarios. Resultado evolución total exponencial.
Tasa media de variación (variación de usuarios de un mes respecto el mes anterior) siempre oscila y a medida que pasa el tiempo se estabiliza (en el caso del grupo que expone esto sucede a partir del mes n_e y el valor en el que se estabiliza es el 1,44). El crecimiento porcentual de usuarios desde que se estabiliza siempre sería el mismo. A partir del mes n_e la población aumenta (para cada grupo de usuarios) en un 144%.
La repartición porcentual de usuarios en cada categoría también se mantiene constante a largo plazo (los porcentajes son distintos para cada categoría).

PREGUNTA 2: Buscar si es posible encontrar el instante n_e a partir del cual se cumplen las características del apartado anterior.

La tasa de variación no varía a partir de n_e. El porcentaje de la población Basic, Medium y Premium respecto al total de la población de la red social, siempre sería el mismo a partir de n_e. Solo observando la tabla se puede ver a simple vista el mes a partir del cual la tasa relativa de variación y los porcentajes de la población se estabilizan.
Conclusiones: a partir del mes n_e (siempre que elijamos un mes superior a éste) se cumplirán las características del apartado anterior. Llegan a la estabilidad cuando coinciden todos los porcentajes (para cada grupo dependerá de su propia matriz).

P.D.: El número de decimales coincidente será un factor determinante encontrar n_e , en este caso han estudiado dos decimales que ya son suficientes porque trabajamos en usuarios totales (en unidades).

PREGUNTA 3: ¿Qué ocurriría si cambiáramos la población inicial?

Han cambiado la población inicial en Excel y han observado los resultados que se presentan. Aparentemente, en función de que población ponías se estabiliza antes o después que lo que habíamos calculado anteriormente. Si no cambiamos la matriz inicial (matriz de Leslie) siempre se dan los mismos resultados (crecimiento relativo y porcentajes de cada grupo de usuarios) a largo plazo.

Dudas que han surgido a lo largo de la semana:
Si consideramos la situación inicial: 1000 Basic, 0 Medium, 0 Premium: La red social sí evolucionaría ya que los usuarios de Basic pasarían a Medium y luego a largo plazo a Premium. En consecuencia a partir del segundo mes ya habrían nuevas invitaciones. La única situación que no tiene sentido es el 0 usuarios Basic, 0 Medium y 0 Premium. Las demás son correctamente consideradas.

Propuestas planteadas por el grupo que expone:

- ¿Sería posible conseguir que la TRV se estabilizaría en un mes previstamente seleccionado?
- ¿Podría ocurrir que la distribución de usuarios se centrara en tan solo usuarios Basic? ¿Y en Medium? ¿Y en Premium?
- ¿Podría suceder que la distribución de la población entre usuarios Basic, Medium y Premium nunca se estabilizara?

Conclusiones:
Primera pregunta hemos encontrado características, en la segunda el punto donde se dan y en la tercera el efecto en la respuesta si cambiamos la situación inicial.
Aparentemente el resultado no cambia si cambiamos el total inicial de usuarios.

ANOTACIONES:
*****A partir de un mes determinado se estabiliza n_e, se cumple que la TRV es constante
$X(n+1)= X(n)\cdot r + X(n) \rightarrow X(n+1)= (1+r)\, X(n) \rightarrow X(n+1)= \alpha \cdot X(n) \rightarrow L\cdot X(n)= \alpha \cdot X(n)$ Si $n > n_e$
L es la matriz de Leslie.

Trimestre 3	Sesión 2	Grupo 2

Introducción
Habiendo encontrado un modelo que asemejaba si no en su totalidad, en gran parte a la realidad, cambiamos de rama de estudio. Hablamos de lo propuesto para la realización del primer informe del tercer trimestre. Se introduciría así pues un **nuevo criterio** de pertenencia a la red. Al dividir nuestra población en tres rangos cuya movilidad venía definida por las características propuestas, encontraríamos los siguientes resultados:

- Tras la búsqueda de las tres ecuaciones que expresarían el total de la población
  Bn+1=0,1*Bn+2*Mn+2*Pn / Mn+1=0,9*Bn+0,2*Mn / Pn+1=0,5*Mn+0,755*Pn
  Llegamos a deducir que se trata de una matriz (sin dejar de ser opcional su traducción o bien en forma de matriz o bien en forma de tres ecuaciones).
- Una vez mencionado que nuestros resultados pueden ser también una matriz, nos dispusimos como en el resto de casos a hacer un estudio tanto a corto como a largo plazo del crecimiento de nuestra población según este modelo.

En definitiva nuestro objetivo en este informe era entrar más en detalle en este punto de estudio.

Primera cuestión: ¿Se puede destacar alguna característica de las trayectorias generadas en X (h)?
Presentamos en primer lugar la matriz a partir de los datos proporcionados (grupo 3):

	B	**M**	**P**
B	0,1	2	2
M	0,9	0,2	0
P	0	0,5	0,755

En la sesión de corrección de este informe encontramos tres características:

- **Repartición en un mes entre las tres categorías**
  Presentamos en primer lugar una tabla con los valores numéricos de la evolución de la población a partir de este nuevo método de búsqueda:

Meses	B	M	P	X(t)
0	1000	2250	1750	5000
1	8100	1350	2446,25	11896,25
2	8402,5	7560	2521,91875	18484,4188
3	21004,0875	9074,25	5684,04866	35762,3862
4	31617,0061	20718,5288	8828,58174	61164,1165
5	62255,9216	32599,0112	17024,8436	111879,776
6	105473,302	62550,1317	29153,2625	197176,696
7	193954,119	107435,998	53285,779	354675,895
8	340838,966	196045,906	93948,7621	630833,634
9	614073,233	345964,25	168954,269	1128991,75
…	…	….	…	…

A modo de resumen sobre lo que podemos observar en la tabla anterior, la columna de los totales se encuentra mediante la función suma, es la suma de los tres rangos.
Tras obtener estos resultados, buscábamos una característica que se mantuviese de mes a mes y a largo plazo, por ello calculamos el porcentaje de ocupación de cada rango.

B	20%	68%	45%	59%	52%	56%	53%	55%	54%	54%	54%	54%	54%
M	45%	11%	41%	25%	34%	29%	32%	30%	31%	31%	31%	31%	31%
P	35%	21%	14%	16%	14%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%

Destacamos que es una repartición porcentual **no equitativa** (dato que observamos cuando los porcentajes se estabilizan y lo que es más importante se mantienen). De todas formas nos sirve para poder fomentar la entrada de usuarios en aquellos rangos cuyo porcentaje sea flojo.

- **Estabilización relativa a largo plazo**
  Esta segunda característica se encontraba añadiendo una columna a la primera tabla presentada, calculando la tasa relativa de variación (tendremos así pues, los valores de la tasa de decrecimiento de los usuarios de cada rango). Lo que obtenemos es una estabilidad a largo plazo. Cabe destacar que esa estabilización se encuentra para cada rango en un punto diferente y de la misma manera que en términos totales no existía pero en términos porcentuales sí. Si tuviéramos en cuenta todos los decimales que hay, encontraríamos la respuesta en el infinito pero al trabajar con una determinada precisión de tiempo, la encontramos antes. Para escoger el número de decimales que intervendrán, tenemos en cuenta los datos iniciales (trabajamos en miles por lo que intervienen 3 decimales), tiene como objetivo no olvidar a ningún usuario.
- **Oscilaciones al principio,** esta tercera característica es la que menos tuvimos en cuenta en la sesión.
  En la tabla hay valores negativos, hay más gente que se da de baja que de alta, por lo que interpretamos que la población decrece. A largo plazo es un crecimiento rápido y porcentualmente constante, es decir que crecen porcentualmente todos de la misma manera. Cambiando la situación inicial, las oscilaciones varían por falta de patrón por eso no la tenemos muy en cuenta.

2. **Segunda cuestión: ¿Es posible determinar el mes (instante) a partir del cual se cumple la característica anterior?**
   Sí que existe un mes en el que se cumple la primera característica mencionada. En función de los decimales es antes o después. Se comentó también la opción de trabajar con números enteros para adquirir una mayor veracidad y no dividir a un usuario.

Meses	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1000	8100,00	8402,50	21004,09	31617,01	62255,92	105473,30	193954,12	340838,97
M	2250	1350,00	7560,00	9074,25	20718,53	32599,01	62550,13	107436,00	196045,91
P	1750	2446,25	2521,92	5684,05	8828,58	17024,84	29153,26	53285,78	93948,76
X(t)	5000,00	11896,25	18484,42	35762,39	61164,12	111879,78	197176,70	354675,90	630833,63
Porcentaje población									
B	20%	68%	45%	59%	52%	56%	53%	55%	54%
M	45%	11%	41%	25%	34%	29%	32%	30%	31%
P	35%	21%	14%	16%	14%	15%	15%	15%	15%

Es a partir del mes 8 donde logramos la estabilidad de la repartición del total de usuarios.

Tercera cuestión: ¿Qué pasaría si cambiáramos la situación inicial pero manteniendo el total de usuarios iniciales?

- Solo hay una situación que no se puede considerar (todo ceros por no haber movilidad).
- Si mantenemos los 5000 pero cambiamos la distribución llegaremos al mismo punto.
- Si mantenemos el total, no varía.
- Si cambiamos el total, la estabilidad es diferente y se da en un punto diferente.

Meses	**B**	**M**	**P**	**X(t)**	**%B**	**%M**	**%P**
0	2500	500	2000	5000	50%	10%	40%
1	5250	2350	1760	9360	56%	25%	19%
2	8745	5195	2503,8	16443,8	53%	32%	15%
3	16272,1	8909,5	4487,869	29669,469	55%	30%	15%
4	28421,948	16426,79	7843,0911	52691,8291	54%	31%	15%
5	51381,957	28865,1112	14134,9288	94381,997	54%	31%	15%
6	91138,2757	52016,7835	25104,4268	168259,486	54%	31%	15%
7	163356,248	92427,8048	44962,234	300746,287	54%	31%	15%
8	291115,702	165506,184	80160,3891	536782,276	54%	31%	15%
9	520444,717	295105,369	143274,186	958824,272	54%	31%	15%
…	…	…	…	…	…	…	…

Lo único que se ve modificado es el mes en el que se estabiliza la población.

Trimestre 3	Sesión2	Grupo 3

INTRODUCCIÓN:
Conclusiones primera sesión:
- Obtener fórmulas para cada grupo y hallar las matrices.
- La población Basic del mes siguiente viene determinada por el porcentaje de usuarios Basic del mes anterior que se mantienen en su categoría, por las invitaciones de los Medium del mes anterior y por las invitaciones de los Premium del mes anterior, etc…, explicación del repartimiento porcentual de los usuarios en los tres grupos.
- Calcular el crecimiento de cada grupo de población a corto plazo y a largo plazo (en meses).
- Comentario sobre la oscilación y el repartimiento del crecimiento de cada categoría de usuarios y de todos a la vez.

PROPUESTAS SEGUNDA SESIÓN:
1ª Características a destacar sobre las trayectorias generadas por X(n) de la población por los distintos grupos de usuarios a largo plazo:
La primera característica es la movilidad de un grupo a otro en porcentaje y de la situación inicial. A partir de un mes determinado vemos que el crecimiento relativo de la población se estabiliza, es decir, a partir de este momento que hemos llamado n_e el crecimiento porcentual de los grupos de usuarios es constante y el mismo para todos ellos). Desde este punto siempre aumenta en términos relativos la población. En el total de usuarios de cada mes, a largo plazo la repartición porcentual de cada grupo se mantiene constante cada mes.

2º ¿Es siempre posible encontrar el instante de tiempo (mes) a partir del cual se cumplen las características encontradas en el apartado anterior?
La respuesta es positiva pero a continuación se detallan y argumentan los matices:
Que se mantengan las características iniciales, es decir, que las trayectorias a partir de un instante (mes) sean estables en cuanto a la continuidad de su crecimiento relativo, depende de los decimales en los que nos fijamos y que queremos que sean coincidentes de un mes para otro, porque solo es una aproximación (si realmente observamos todos los decimales podemos comprobar que la estabilización tiende a infinito), entonces diremos que tendemos a la estabilidad hacia el infinito. Y sí, siempre se puede encontrar ese instante cuando asumimos un cierto grado de error (precisión). Luego, obviamente, también gracias a las TIC que utilizamos para estudiar las trayectorias, crecimientos, etc., (Excel, Wiris) podemos estudiar y encontrar esta respuesta.

3ª Cambiar situación inicial por otra distinta manteniendo el total inicial de usuarios, observar y razonar el cambio:
Observamos que siempre se terminan cumpliendo las características, aunque aparentemente pueda costar más o menos llegar a la estabilidad pero terminan cogiendo los mismos valores en cuanto al crecimiento relativo.
Tarda más o menos en estabilizarse el crecimiento relativo pero (con más o menos oscilaciones en las trayectorias) se obtiene el mismo resultado.
Se llega a una estabilidad a largo plazo en el crecimiento relativo, si marcamos una precisión en cuanto los decimales la veremos antes o luego (cuantos más decimales más tarde). A largo plazo la estabilidad siempre es la misma por mucho que cambiemos la situación inicial siempre (¿qué pasaría si cambiamos el total de usuarios inicial?).

CONCLUSIONES E INFORMACIÓN
Sabemos que $\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1}\,(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{x_2}\,(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{x_3}\,(\mathbf{0}) \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x1}} \longrightarrow \qquad \boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1000} \\ \mathbf{2250} \\ \mathbf{1750} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x1}}$

L $\longrightarrow$ Matriz de Leslie: Matriz que estamos estudiando, es la matriz que indica el repartimiento porcentual de los individuos de un grupo a otro en meses consecutivos. Sacamos una fórmula final para analizar el crecimiento:

$$\boldsymbol{X(n) = L^n * X(0)}$$

Existe un mes determinado n_e a partir del cual:
(1+r) = α, índice relativo de crecimiento :$\mathbf{X(n+1) = X(n) + X(n) * r = (1+r) * X(n)} \rightarrow X(n+1) = \alpha * \mathrm{X(n)}$

$\rightarrow \boldsymbol{L * X(n) = \alpha * \mathrm{X}(n)}$: $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x3}} * \ \boldsymbol{X(n)} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x1}} = \alpha * \mathrm{X}(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x1}}$

α (escalar (nº real)) $\quad * \ \mathrm{X}(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x1}}$ resultado matriz $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x1}}$

Trimestre 3	Sesión 3	Grupo 1

Es esta última sesión se nos pedía buscar información sobre la matriz de Leslie y concluimos que su principal característica era que la población no era cerrada sino que contemplaba la entrada y la salida de los usuarios.

Recuperando el seminario anterior, obtenemos la siguiente ecuación donde α es el índice relativo de variación (tasa relativa + 1): $X(t+1) = L \cdot X(t) = \propto \cdot X(t)$ cuando t es lo su ficientemente grande.

En este caso podemos deducir que α es un valor propio de L que representa el índice relativo de variación e identificamos como uno de los valores propios.

Buscamos información teórica sobre las matrices de Leslie y vimos que este valor "α" era un valor propio de la matriz L, expresado como "λ" en términos matemáticos.

Para calcular α buscamos los valores propios de la matriz (vaps de L):(-0.93244, -0.42916, 2.1116)

Recordando la primera sesión, rescatamos la ecuación: $X(t) = L^t \cdot X(0)$

Esta nos indicó que la matriz L no se podría elevar a "t" sin saber el mes concreto. Para ello introdujimos el concepto de diagonalización. Este concepto nos sirve para hacer un cambio de base en la matriz para obtenerla expresada en forma de producto de una matriz diagonal D y la matriz de cambio de base P y su inversa P^{-1}.

$L = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Con la ayuda de la calculadora Wiris calculamos los vectores propios de la matriz L que nos permiten calcular la matriz diagonal ya que conforman los valores de la diagonal de la nueva matriz:

$$D = P^{-1} \cdot L \cdot P = \begin{pmatrix} -0.93244 & 0 & 0 \\ 0 & -0.42916 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1116 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz resultante si podíamos elevarla al mes "t" ya que sólo tenemos que elevar los números de la diagonal principal (por ser diagonal).

Introdujimos la matriz anterior, que nos permite hacer el cálculo de la predicción.

Fijándonos vimos que cuando multiplicábamos entre si la expresión "t" veces las P se cancelaban con las P^{-1}.

Con todo ello nos fijamos en que de los valores de la diagonal los dos primeros cuando la $t \to \infty$ tendían a 0 mientras suficientemente que el otro tendía a ∞ a medida que transcurría el tiempo. Por lo tanto únicamente el última valor influía en la evolución de los usuarios de la red a largo plazo.

Finalmente, calculamos "t" cuando se asume la estabilidad igualando los dos valores propios (tomados en valor absoluto) a 0.001 (el error) y deducimos que en el mes 99 se llega a la estabilidad.

Trimestre 3	Sesión 3	Grupo 2

En este último seminario se planteó buscar analíticamente (sin simulación numérica) el índice relativo de variación y el mes en que éste se estabiliza, es decir, el valor de α y el mes n que se llega a la estabilización. Estos valores tenían que coincidir con lo hallados mediante la simulación numérica (sesión 2). A través de la teoría encontrada en Internet se llegó a la siguiente expresión para llegar a la matriz diagonal.

$D = P^{-1} * L * P$ (Matriz P = matriz veps)

Para poder diagonalizar la matriz L ésta debe ser cuadrada (la matriz de Leslie) y la matriz de paso P debe ser invertible. Para encontrar la diagonal se calculan los valores propios, éstos corresponden a parte de la diagonal principal. La matriz de Leslie guarda relación con la diagonal mediante la siguiente fórmula

$L = P * D * P^{-1}$

Lo que demuestra que las matrices están relacionadas entre ellas.

De los tres valores que aparecen en la diagonal uno de ellos hace referencia al valor α. Para determinar qué valor era el índice relativo de variación partimos de la siguiente expresión. $\alpha = 1 + r$

Para determinar qué valor era α, restamos una unidad a los tres valores, el que quedó entre cero y uno determinamos que era la tasa relativa. Se determinó que al elevar cada vap a n, observamos que los que estaban entre 0 y 1 en valor absoluto, tienden a cero, en cambio el valor propio que corresponde a α al ir elevando a n cada vez es mayor. Al trabajar con una red social cuyo nº de usuarios aumenta, solo tiene sentido el valor que hace que crezca.

Un valor propio de nuestra matriz para ser el valor de la α debe ser mayor a uno, i en cambio la población disminuyese la α tendría que estar entre cero y uno.

Un caso en el que α sea negativa la descartaremos siempre.

Para hallar el periodo en el que se llega a la estabilidad, escogeremos un valor propio en valor absoluto de los que estén entre cero y uno y sea mayor de los dos. Se elimina el símbolo negativo del valor propio (si es necesario) ya que al calcular mediante los logaritmos no tendría resultado. Este valor se debe igualar a un número muy cercano a cero (precisión).

Para hallar estos utilizamos la siguiente expresión. Ln(vap^n)=ln(precisión) Una vez resuelta esta expresión podemos llegar a encontrar el mes n.

En algunos casos esta estabilidad no llega a coincidir con la hallada mediante la simulación, este error se explica ya que en el otro caso interviene el total de usuarios y en este caso no, por lo que sabemos que manteniendo el total de usuarios si varían de grupos la estabilidad obtenida es la misma pero varía el periodo en la que se alcanza, por lo que un cambio de distribución deja la misma tasa relativa de variación, pero modifica el mes en el que se llega a la estabilidad.

Si se cambia el total inicial, el porcentaje de crecimiento se mantendrá, es decir la tasa relativa de crecimiento se mantendrá igual, en matriz de transición tenderá a cero, en la matriz de Leslie será superior a uno (en nuestro caso).

L(matriz de Leslie)=L*X(n)=α*X(n)
n→mes de estabilidad

Anexo 4.3. Cuestionario

Valora del 1 al 5 las siguientes cuestiones:								
1.	Número sesiones:	(pocas)	1	2	3	4	5	(demasiadas)
2.	Duración de las sesiones:	(cortas)	1	2	3	4	5	(largas)
3.	Contenido teórico:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(demasiado)
4.	Contenido práctico:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(demasiado)
5.	Dificultad:	(muy poca)	1	2	3	4	5	(demasiada)
6.	Cantidad de trabajo hecho en clase:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(demasiado)
7.	Cantidad de trabajo hecho fuera de clase:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(demasiado)
8.	Peso del seminario dentro de la nota global (35%):	(muy poco)	1	2	3	4	5	(demasiado)
9.	Reparto de responsabilidades:	(muy fácil	1	2	3	4	5	(muy complejo)
10.	Ambiente de trabajo:	(muy malo)	1	2	3	4	5	(muy bueno)
11	Facilidad para quedar fuera de clase:	(muy poca)	1	2	3	4	5	(mucha)
12.	Me cuesta adaptarme al trabajo en grupo	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
13.	El resultado es mejor al trabajar en grupo que solo/a:	(desacuerdo)	1	2	3	4	5	(acuerdo)
14.	Interés del problema fuera de las matemáticas:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
15.	Relación con los con los contenidos del curso :	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
16.	Dificultad global del problema:	(muy poca)	1	2	3	4	5	(mucha)
17.	Permite entender mejor la teoría:	(desacuerdo)	1	2	3	4	5	(acuerdo)
18.	Muestra el lado práctico de la materia:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
19.	Me cuesta redactar los informes:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
20.	Me cuesta tener una visión global del problema:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
21.	Las puestas en común sirven...	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
22.	Las profesoras nos guían...	(muy poco)	1	2	3	4	5	(demasiado)
23.	Las correcciones de los informes me ayudan...	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
24.	Me siento cómodo/a trabajando con el ordenador:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
25.	Usar las TIC facilita el trabajo en matemáticas:	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
26.	He aprendido a usar mejor el ordenador	(muy poco)	1	2	3	4	5	(mucho)
27.	Indica un aspecto negativo del seminario:							
28.	Indica otro aspecto positivo del seminario:							
29.	Indica un aspecto negativo del seminario:							
30.	Indica otro aspecto negativo del seminario:							
31.	Comentarios generales:							
32.	Dni:							
33.	Número de grupo:							
34.	Trimestre:							

Anexo 4.4. Comentarios generales

- No se ha marcado estrictamente lo que se pedía y por ello las notas han sido tan bajas.
- El seminario de matemáticas es una buena idea pero únicamente añadiría una buena explicación metodológica o un ejemplo para que a los alumnos les sirva como guía para iniciar la investigación.
- Me parece un taller muy interesante, que nos ayuda a ver las utilidades de las matemáticas.
- No me gusta que el seminario sea tan seguido, pero así nos habituamos. A veces ante distintas opiniones no nos ponemos de acuerdo porque no partimos de unos apuntes iguales.
- Es una materia nueva que nos permite y nos aprende a saber trabajar en grupo, que para la carrera que estamos estudiando es muy importante.
- Los seminarios nos ayudan bastante y a la vez aprendemos, por otra parte, nos quita tiempo para dedicar a otras materias.
- Para no ir tanto al despacho de la profesora, que se explicara más en clase las dudas generales.
- Podrían añadir una clase más de seminario para resolver dudas sino demasiado trabajo en casa.
- Muy satisfecho con la asignatura aunque a mi parecer la dificultad de ésta es poca, demasiado fácil.
- Me parece muy útil el seminario, porque gracias a este realmente aprendo más y me ayuda a complementar la base teórica, además de que es muy útil para encontrar un sentido económico, cosa que nunca imaginé que fuese tan sencillo.
- Pienso que el informe individual es una pérdida de tiempo ya que es repetir lo que ya hemos hecho.
- Quizás sería muy útil colgar teoría en la blackboard.
- Está muy bien aplicar la práctica pero previamente tiene que estar estudiada en clase. Estaría bien que se nos entregaran los seminarios corregidos.
- Es muy difícil hacer un informe individual sin copiar los seminarios anteriores. Es un trabajo que considero innecesario. Si el seminario es un trabajo en grupo, debería serlo de principio a fin.
- Entregar el informe individual el mismo días que el examen trimestral nos afecta muy negativamente.
- Yo creo que los seminarios serían más efectivos si los hiciéramos después de dar la materia.
- Hubiera estado bien si hubieran habido ganas por parte de todos. Al final más que disfrutar ha sido una tortura.
- No creo que nos vaya del todo bien aprendemos la teoría por nuestra cuenta para los seminarios aunque así aprendemos a buscar información, la teoría nunca queda clara hasta después de las entregas y perjudica mucho la nota.
- Los grupos se hacen escoger demasiado pronto.
- La idea de un secretario es indispensable.
- Tengo poca costumbre en redactar y comentar las matemáticas.
- Veo poca relación del seminario con las matemáticas. Es más de redactar y una presentación bonita.
- El seminario sirve para aprender a pensar y razonar los problemas pero a veces es necesario más tiempo y más indicaciones.
- Creo que los seminarios tendrían que contener menos volumen de trabajo para proporcionar más tiempo al resto de la materia.

- Es un trabajo complejo, que requiere una continuidad.
- Ponerlos en común ayuda, y realizar un caso al trimestre ayuda a ganar constancia en el trabajo.
- No creo que los seminarios sirvan realmente de mucho, dedicamos muchas horas que luego no son recompensadas.
- Estoy muy contenta con el seminario. Me ayuda a entender la teoría y a encontrarle una utilidad práctica a las matemáticas en la carrera que estamos estudiando.
- Me ha parecido una buena manera de estudiar las matemáticas.
- No encuentro correcto que además de puntuar un 30% respecto a la nota global, puntúe un 30% más dentro del examen final. Creo que esto no debería entrar y centrarnos en lo hecho en clase para el examen.
- Los exámenes no tienen nada que ver con los ejercicios realizados en clase. Son mucho más difíciles.
- Creo que si el seminario pretende ser una forma de trabajar en equipo, no lo consigue, porque al final se divide el trabajo, cada uno hace su parte y luego se junta.
- Pese a los dolores de cabeza es más dinámico que las clases teóricas.
- Creo que es una nueva forma de aprender nuevos conocimientos y lograr un mejor trabajo en equipo.
- Aunque nos costaba llegar muchas veces al resultado, creo que con las puestas en común aclaramos y entendimos los problemas.
- Los haría más dirigidos al contenido de clase. Utilizaría la semana para hacer ejercicios y resolverlos en clase. Ejercicios breves con lo aprendido en clase
- Debería enseñarse algún concepto antes de pedir un trabajo sobre este
- Me ha servido para dar una visión más práctica a las matemáticas.
- Es una buena herramienta de trabajo, dado el porcentaje final de la asignatura, mejora la nota a aquellos que tengan dificultades.
- Se ponen en práctica las matemáticas en casos reales más que en ejercicios prácticos, y es una forma de utilizar las matemáticas de una manera diferente.
- Trabajar con hechos que sean reales facilita para entender lo que se está trabajando.

Anexo 4.5. Guión entrevista a alumnos

Sobre el funcionamiento y organización del taller:

- *Opinión de la cuestión inicial:* ¿es interesante?, ¿realista?, ¿aplicada?, ¿abierta?, ¿larga?, ¿relacionada con la teoría?
- *Información necesaria*: ¿dónde buscar?, ¿Quién les ha ayudado?, ¿dificultades?
- *Trabajo en grupo*: ¿adaptación?, ¿participación igualitaria?, ¿discusiones?, ¿cambios de grupo?, ¿reparto de funciones?, ¿trabajo fuera del aula?, ¿evolución a lo largo del curso?
- *Informes en grupo*: ¿dificultades organizativas o de redacción?, ¿papel de las correcciones?, ¿importancia?, ¿evolución?, ¿ayudas de la profesora?
- *Informes individual*: ¿dificultades?, ¿ayuda a preparar el examen?, ¿resta tiempo a preparar el examen?
- *Secretario de la semana*: ¿es útil?
- *Trabajo en grupo dentro del aula*: ¿se aprovecha?, ¿existe mucha dependencia de la profesora?, ¿se tiene que esperar demasiado tiempo a ser atendido?, ¿es mejor que trabajar fuera?
- *Presentaciones orales de los grupos en clase*: ¿son útiles?
- *Sistema de evaluación*: ¿es justo? ¿cambios?

Sobre la función del taller en la asignatura:

- *Sistema de evaluación*: ¿es justo? ¿cambios?
- Relación con la teoría: ¿están conectados?, ¿ayuda a entender la teoría?
- Relación con el examen: ¿el taller sirve?, ¿el taller quita tiempo para estudiar para el examen?

Diferencias entre los contenidos del taller de cada trimestre:

- Opinión sobre cada trimestre, dificultades de cada uno, interés con los estudios de economía, permite ver la utilidad de las matemáticas para la economía.
- Mismo problema: ¿Cansa?, ¿es forzado usar el mismo hilo conductor?
- Simulaciones numéricas: ¿útil?, ¿interesante?

Relación con las matemáticas en general:

- ¿Relación con la economía?, ¿consigue dar autonomía en el proceso de estudio?, ¿se consigue ver la utilidad?, ¿desconcierta no tener una única respuesta correcta?, ¿cambios respecto secundaria?

Gestión del taller por parte de la profesora:

Lo mejor/peor