

TESIS DOCTORAL:

Cadenas de órbitas periódicas en la
variedad $S^2 \times S^1$.

Alicia Cordero Barbero

12 de diciembre de 2003

Índice General

1	Introducción	5
2	Descomposición en asas redondas	11
2.1	Descomposición de 3-variedades	12
2.1.1	Descomposición prima de 3-variedades	14
2.2	Introducción a la Teoría de Nudos	18
2.2.1	Nudos y cadenas	18
2.3	Variedades Flujo	22
2.3.1	Descomposición en asas redondas	23
2.3.2	Flujo Morse-Smale No Singular	28
2.4	Descomposición en asas redondas de S^3	30
2.4.1	Propiedades de S^3	30
2.4.2	Asas redondas en S^3	32
2.4.3	Cadenas con índice en S^3	45
3	Descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$	51
3.1	Superficies en $S^2 \times S^1$	52
3.1.1	Superficies no separadoras en $S^2 \times S^1$	53
3.2	Descomposición de $S^2 \times S^1$ en asas redondas	59
3.2.1	Lemas previos	60
3.2.2	Clasificación de asas ampliadas en $S^2 \times S^1$	61
4	Cadenas con índices en $S^2 \times S^1$	95
4.1	Lemas previos	95
4.2	Cadenas con índices en $S^2 \times S^1$	97
5	Flujos NMS sobre $S^2 \times S^1$	115
5.1	Espacios lenticulares	116
5.2	Suma conexa de flujos	118
5.3	Flujos asociados a pegadas esenciales	126
5.4	Flujos NMS básicos asociados a cadenas locales	134

6	Sistemas Hamiltonianos integrables	143
6.1	Sistemas Hamiltonianos integrables sobre Q	144
6.1.1	El teorema de Arnold-Liouville	144
6.1.2	Topología de las variedades subyacentes	145
6.1.3	Descomposición en asas redondas de Q	150
6.2	Sistemas Hamiltonianos integrables sobre $S^2 \times S^1$	154
6.2.1	Descomposición en asas redondas	154
6.2.2	Cadenas con índices en un sistema Hamiltoniano integrable sobre $S^2 \times S^1$	155
7	Aplicación a la Mecánica Celeste	157
7.1	Descripción del problema de dos centros fijos	157
7.1.1	Ecuaciones de movimiento	158
7.1.2	Separación del sistema	159
7.2	Descomposición en asas redondas	161
7.2.1	Construcción del espacio de fases completo	161
7.2.2	Descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$	174
7.3	Cadenas con índices en el problema de dos centros fijos	178
7.4	El problema circular restringido de tres cuerpos	184

Capítulo 1

Introducción

Los flujos Morse-Smale constituyen la clase de los flujos más simples entre los estructuralmente estables, además de aparecer con frecuencia en las aplicaciones. El estudio de este tipo de flujos, como el de otros flujos genéricos, está dirigido a su clasificación topológica. En dimensión dos, los grafos de Peixoto asociados a campos vectoriales de tipo Morse-Smale permiten esta clasificación.

En dimensión tres, los flujos Morse-Smale no son densos pero definen un conjunto abierto en el conjunto de los campos vectoriales de clase C^1 sobre una variedad. Su clasificación es un factor clave para analizar la clausura del mencionado abierto. Para generalizar los grafos de Peixoto en tres dimensiones es inevitable la clasificación topológica de las órbitas periódicas y su tipo de nudo asociado, ya que definen invariantes de sistemas conjugados.

La caracterización topológica del conjunto de órbitas periódicas de un sistema Morse-Smale No Singular (NMS) sobre la esfera S^3 ha sido realizada por M. Wada [51]. Aunque esto ha supuesto un paso muy importante en el estudio cualitativo de los sistemas NMS, la variedad sobre la que se estudia es muy restrictiva, por lo que es interesante hacer un estudio análogo, siguiendo los trabajos de T. Kobayashi [37], sobre otras variedades tridimensionales.

Por otra parte, en el campo de los sistemas Hamiltonianos integrables de dimensión $2n$, el teorema de Arnold-Liouville resuelve el problema de integración exigiendo, entre otras condiciones, que las integrales estén en involución y sean funcionalmente independientes. Esto permite que cada una de las integrales disminuya el orden del sistema no en una unidad, sino en dos. Además, bajo estas hipótesis, las superficies de nivel comunes no singulares son uniones de toros, que reciben el nombre de toros de Liouville.

Durante la década de los ochenta, aparecieron algunos artículos de A. T. Fomenko y sus colaboradores ([26],[8]) en los que se demostraba la existencia de importantes restricciones topológicas sobre las 3-variedades que pueden ser

conjuntos de nivel no singulares de sistemas Hamiltonianos Bott integrables (sistemas genéricos entre los integrables, [35]). En dichos artículos se proporciona una clasificación de las variedades mencionadas en términos de los "ladrillos elementales" de los que están construidas, así como una descripción de las bifurcaciones de los toros de Liouville que pueden tener lugar, y se derivan algunas consecuencias, como cotas inferiores para el número de órbitas periódicas dependiendo de la topología de la superficie de nivel.

D. Asimov prueba en [3] que toda variedad flujo compacta de dimensión distinta de 3 que no sea una cinta de Möbius admite un flujo Morse Smale no Singular. Por otra parte, J. W. Morgan [41] demostró que sólo una pequeña clase de 3-variedades puede tener flujos NMS. Su demostración se basa en probar que la clase de variedades antes mencionada puede definirse por la propiedad de tener una descomposición en asas redondas. En particular, probó que las 3-variedades primas y orientables tales que la característica de Euler de cada una de las componentes de la frontera es nula, admiten un flujo NMS si y sólo si son unión de espacios de Seifert no triviales pegados sobre sus fronteras. Además demuestra que, dada una 3-variedad orientable y conexa W tal que la característica de Euler de cada una de las componentes de la frontera es nula y, dada una descomposición prima de la variedad $W = P_1 \# \dots \# P_T$ en la que $P_i \neq S^2 \times S^1$, $i = 1, \dots, T$, puede afirmarse que W admite un flujo NMS si y sólo si cada variedad prima P_i lo admite a su vez.

Así, la clasificación topológica de Morgan se hace en términos de dos puntos de vista diferentes: por una parte, relaciona la propiedad de admisión de un flujo NMS con la de descomposición en asas redondas, completando el trabajo de Asimov para el caso de dimensión 3; por otra parte, considera la clase de 3-variedades que son unión de fibrados de Seifert y prueba que para variedades primas las tres caracterizaciones son equivalentes.

J. Casasayas et. al. [15] muestran que los flujos Hamiltonianos Bott integrables están íntimamente relacionados con los flujos NMS. De hecho, demuestran que toda 3-variedad que sea superficie de nivel no singular de un sistema Hamiltoniano Bott integrable también admite un flujo NMS. Utilizan este punto de vista unificador para ver cómo la mayor parte de la teoría de Fomenko puede deducirse de los trabajos de J. W. Morgan y D. Asimov y entonces, aplicando los resultados de M. Wada [51], obtienen una clasificación de los nudos y cadenas formados por las órbitas periódicas de sistemas Hamiltonianos Bott integrables sobre la 3-esfera S^3 y el toro sólido.

En [37], T. Kobayashi considera un flujo NMS sobre una 3-variedad orientable, simple, cerrada e irreducible. Bajo estas hipótesis, define los conceptos de flujo y cadena primitivos del flujo NMS y demuestra que existe un número finito de tipos de cadenas primitivas. Además, prueba que todo

flujo NMS sobre la variedad puede obtenerse a partir de un flujo primitivo, cambiando el flujo en entornos regulares de órbitas cerradas atractoras o repulsoras.

Sin embargo, la variedad $S^2 \times S^1$ es la excepción de muchos de estos resultados: al no ser irreducible, no puede asegurarse la existencia de un flujo NMS primitivo; del mismo modo, no es aplicable la caracterización de J. W. Morgan de variedades con descomposición prima que admiten un flujo NMS. Todo ello nos lleva a plantearnos un objetivo: utilizar la teoría de nudos para, mediante la descomposición en asas redondas de la variedad, obtener la caracterización topológica del conjunto de órbitas periódicas de un sistema Morse-Smale No Singular sobre $S^2 \times S^1$, completando el trabajo de M. Wada [51] sobre S^3 .

Por otra parte, esta variedad aparece en numerosos casos prácticos de Mecánica Celeste, al estudiar sistemas Hamiltonianos integrables con una integral primera no degenerada, tales como el problema de Dos Centros Fijos, ya que las variedades que aparecen como conjuntos de nivel son, para algunos valores de la energía, $S^2 \times S^1$ y S^3 . Este problema también resulta útil como una primera aproximación en la modelización del movimiento de un satélite en torno a un planeta achatado. Además, el problema de dos centros fijos se enlaza con el problema restringido de tres cuerpos cuando una de las masas es infinitesimal. Por otra parte, en algunos casos integrables del movimiento inercial de un cuerpo rígido tetradimensional con un punto fijo (véase [26]), algunas superficies de nivel de dimensión 3 no singulares son difeomorfas a $S^2 \times S^1$. De modo similar, empleando una factorización apropiada en el caso integrable de Kovalevskaya para un cuerpo sólido tridimensional, ciertas superficies de nivel son también equivalentes a $S^2 \times S^1$.

Para una mejor comprensión de los conceptos y notación utilizados en esta memoria, en el segundo capítulo establecemos dichas nociones básicas. Tras analizar algunas cuestiones de topología de variedades tridimensionales, nos centramos en el estudio de la descomposición en asas redondas de 3-variedades y de las variedades flujo, así como de la teoría de nudos. Estos conceptos serán los pilares sobre los que en el capítulo 3 construiremos la descomposición en asas redondas de la variedad $S^2 \times S^1$ y el estudio de las cadenas de órbitas periódicas asociadas a un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$. En el capítulo 2 centraremos también nuestro interés en los resultados obtenidos por M. Wada [51] y K. Yano [53] en la construcción de la descomposición en asas redondas de la variedad tridimensional S^3 , además de la caracterización de la cadena con índices mediante las operaciones de Wada en términos de suma separada, suma conexas y cableado, partiendo de una cadena generadora: la $(0, 2)$ –cadena de Hopf.

Las diferencias fundamentales de la variedad $S^2 \times S^1$ respecto a S^3 son

analizadas en el capítulo 3, como por ejemplo la existencia de esferas no separadoras. Mientras en S^3 puede afirmarse que una esfera bidimensional es frontera de dos discos D^3 , no puede afirmarse lo mismo de $S^2 \times S^1$, y eso implica dificultades añadidas: no existen cadenas generadoras, aparecen componentes de la frontera no separadoras en la descomposición en asas redondas de la variedad, y se hace necesario distinguir entre cadenas locales y globales en función de si pueden o no sumergirse en un disco D^3 . Estas diferencias afectan, por supuesto, a la caracterización de las cadenas con índices, obtenidas a partir de la descomposición en asas redondas de la variedad, en términos de operaciones, abordada en el cuarto capítulo de la presente memoria.

Del mismo modo que se ha hecho un estudio de los flujos NMS en S^3 con pocas órbitas, [43], nosotros estamos interesados en un estudio similar para el caso de $S^2 \times S^1$. Dicho estudio de los flujos NMS en la variedad $S^2 \times S^1$ son los objetivos del quinto capítulo, en el que asimismo se aborda el flujo inducido por la descomposición en asas redondas de la variedad. Asimismo, se define la suma conexa de flujos, y su relación con la suma conexa de las respectivas variedades sobre las que se definen los flujos, estableciendo así una primera clasificación de flujos como los que provienen de pegadas no esenciales y dan lugar a la suma conexa de flujos sobre la variedad suma conexa y aquellos provenientes de pegadas esenciales.

El estudio de los sistemas Hamiltonianos integrables, ubicado en el capítulo sexto, se divide en dos partes: en la primera presentaremos algunos resultados de A. T. Fomenko sobre la caracterización topológica de 3-variedades Q que son superficies de nivel de un sistema Hamiltoniano integrable mediante una integral de Bott. Asimismo, presentaremos algunos resultados que relacionan las clases de variedades consideradas por Fomenko, Asimov, Morgan, y otros. En un segundo bloque, utilizamos la relación entre dos teorías paralelas (flujos NMS por una parte y sistemas Hamiltonianos integrables por la otra) y los resultados obtenidos en el capítulo 4 para obtener una caracterización completa de los nudos y cadenas de órbitas periódicas de sistemas Hamiltonianos Bott integrables sobre $S^2 \times S^1$.

Por último, en el capítulo 7 aplicamos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores sobre un problema concreto: el problema de dos centros fijos, integrable y con dos grados de libertad. Demostraremos que el espacio de fases global de este problema es, para algunos valores de la energía, la variedad $S^2 \times S^1$. Se estudiarán las operaciones sobre cadena con índices que, de entre las definidas en el capítulo 4, generan las cadenas de órbitas periódicas posibles en este problema y el tipo de flujos a que dan lugar. Además, probaremos que el problema de dos centros fijos pertenece a la misma familia uniparamétrica que el problema circular restringido de tres

cuerpos, no integrable, y al que se pueden extender algunas de las órbitas periódicas obtenidas en el caso integrable.

Capítulo 2

Descomposición en asas redondas

El contenido del presente capítulo se divide en varias partes bien diferenciadas: en primer lugar, la descomposición de variedades tridimensionales en otras más simples que conserven de algún modo las propiedades geométricas y topológicas de la variedad original; a continuación se introducen algunas nociones básicas sobre teoría de nudos y el estudio de las variedades flujo, en particular aquellas que admiten un flujo Morse Smale no Singular. Finalmente, se muestra la aplicación que diferentes autores han hecho de los conceptos introducidos en las secciones previas para el estudio de los sistemas Morse-Smale no Singulares sobre una 3-variedad concreta: S^3 .

El interés de descomponer una 3-variedad como unión de piezas sencillas radica en analizar cómo se pegan dichas piezas en la variedad y así reducir el estudio de la variedad a problemas sobre variedades más sencillas o de dimensión dos. Una forma de hacer esta descomposición es mediante los splittings de Heegaard (véanse [34], [32]), de fácil descripción geométrica y que, junto con la suma conexa, permiten definir una descomposición de la variedad en variedades primas. No obstante, nosotros emplearemos otro método: la descomposición en asas redondas, que nos inducirá, de forma natural, un estudio posterior sobre el conjunto de órbitas periódicas de tipo NMS en la variedad. Esta técnica, cuyos elementos básicos definiremos en el presente capítulo, será el eje fundamental que permitirá más adelante construir una clasificación de las variedades obtenidas al pegar asas redondas en la variedad M en la que están sumergidas, de manera que M puede reconstruirse mediante una sucesión de 3-variedades, cada una de ellas obtenida pegando un asa redonda sobre la anterior (véanse [3], [41]). Estudiaremos en el presente capítulo el caso concreto de los resultados obtenidos por diferentes autores sobre S^3 . En capítulos posteriores realizaremos nuestras propias

aportaciones sobre la variedad $S^2 \times S^1$.

Por otra parte, si una variedad compacta y conexa tiene asociado un campo vectorial, éste separa la frontera de la variedad en regiones diferenciadas no necesariamente conexas, en función de si el campo vectorial es tangente a la región o la atraviesa, y en éste último caso, en función del sentido en el que el campo vectorial la atraviesa. El conjunto formado por la variedad y la componente de la frontera por la que el campo vectorial entra en la variedad define una variedad flujo (Reinhart, [45]). En particular, estudiaremos las propiedades de un tipo concreto de variedades flujo: aquellas que admiten un flujo de tipo Morse-Smale No Singular, directamente relacionados con las descomposiciones en asas redondas de una variedad.

Finalmente, y en un segundo bloque del capítulo, aplicaremos los conceptos previamente definidos para obtener, siguiendo los pasos de M. Wada [51] y K. Yano [53], la descomposición en asas redondas de S^3 y la caracterización de las cadenas de órbitas periódicas con índice de esta variedad.

2.1 Descomposición de 3-variedades

La idea de cortar una 3-variedad alrededor de una 2-esfera fue introducida en 1929 por H. Kneser [36], en el que parece ser su único artículo en variedades de dimensión tres, aunque su influencia fue extremadamente importante. Kneser considera la operación de cortar una 3-variedad cerrada M a lo largo de una 2-esfera S sumergida en M , y cerrar cada una de las componentes resultantes de la frontera con una 3-celda, obteniendo una 3-variedad M_1 (posiblemente desconexa). El llamó reducción a este proceso. Si la esfera S es entorno de una 3-celda en M , entonces M_1 es una copia de M junto con una copia de S^3 , y la reducción es trivial. Una variedad es irreducible si admite únicamente reducciones triviales. Para justificar el término "reducción", Kneser afirma que M_1 debería ser en algún sentido más simple que M , pero no hay ningún invariante topológico que permita probar esto. Sin embargo, demuestra el siguiente teorema:

"Asociado a cada 3-variedad M existe un entero k con la siguiente propiedad: si se efectúan $k+1$ reducciones sucesivas sobre M , entonces al menos una de ellas es trivial. Mediante k (o menos) reducciones no triviales M puede ser transformado en una variedad irreducible."

Para la demostración de este teorema es necesario un resultado de J.W. Alexander [1]. El teorema de Alexander afirma que toda 2-esfera en S^3 separa a esta 3-variedad en dos regiones, cuya clausura es, en ambos casos,

una 3-celda. En particular, S^3 es irreducible. La afirmación correspondiente a una dimensión menos, que cada circunferencia en S^2 la separa en dos componentes cuyas clausuras son discos, es el teorema clásico de Schönflies, pero no necesita hipótesis adicionales. J.W. Alexander también prueba que cualquier toro (poliédrico) en S^3 es frontera de un toro sólido, un hecho que fue conjeturado por H. Tietze [49]. Más tarde, R. H. Fox [28] demostró que el argumento de Alexander se generaliza para probar que cualquier superficie cerrada en S^3 es compresible.

Dadas dos 3-variedades M_1 y M_2 se puede elegir un punto en el interior de cada variedad, quitar el interior de una pequeña 3-celda alrededor de cada uno de los puntos elegidos y pegar las 2-esferas de la frontera mediante algún homeomorfismo. La 3-variedad resultante es una suma conexa de ambas variedades.

Definición 1 Sean M , M_1 y M_2 variedades conexas de dimensión 3, $B_i \subset \text{int}(M_i)$, $i = 1, 2$, 3-celdas sumergidas en M y $h_i : (M_i - \text{int}(B_i)) \rightarrow M$ embebimientos tales que

$$h_1(M_1 - \text{int}(B_1)) \cap h_2(M_2 - \text{int}(B_2)) = h_1(\partial B_1) = h_2(\partial B_2)$$

y

$$M = h_1(M_1 - \text{int}(B_1)) \cup h_2(M_2 - \text{int}(B_2))$$

Entonces decimos que M es la suma conexa de M_1 y M_2 , y lo denotamos por $M_1 \# M_2$.

Si construimos M a partir de M_1 y M_2 , podemos elegir a voluntad las 3-celdas $B_i \subset \text{int}(M_i)$, y notamos que existen dos formas diferentes de identificar ∂B_1 con ∂B_2 . Si M , M_1 y M_2 son orientables, exigiremos que los embebimientos h_i , $i = 1, 2$, preserven la orientación (o equivalentemente, que la identificación de ∂B_1 con ∂B_2 invierta las orientaciones inducidas). Además, en este caso se verifican las propiedades asociativa y conmutativa de la suma conexa, con S^3 actuando como elemento identidad.

Definición 2 Una aplicación $f : E \rightarrow B$ recibe el nombre de **fibrado** con fibra F si cada punto de B tiene un entorno U y un homeomorfismo $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ para el que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow f & \swarrow \text{proyección} \\ & & U \end{array}$$

E y B reciben el nombre de espacio total y espacio base, respectivamente. Cada conjunto $f^{-1}(b)$, $b \in B$ es la fibra en b y es homeomorfo a F .

Definición 3 Dado un fibrado $f : E \rightarrow B$ y los caminos $\mu(t)$ y $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ de E y B , respectivamente, decimos que $\mu(t)$ es una elevación de $\gamma(t)$ en B si $f(\mu(t)) = \gamma(t)$.

Lema 4 Sea $f : E \rightarrow B$ un fibrado y $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ un camino diferenciable a trozos en B . Entonces existe en E una elevación $\mu(t)$ del camino $\gamma(t)$ que se define sin ambigüedad por uno de sus puntos $\mu(t_0) \in E$, donde $f(\mu(t_0)) = \gamma(t_0)$.

Consideremos un punto de la base $b \in B$ del fibrado. Sea γ un camino cerrado en B con origen y fin en b , que representa un elemento del grupo de homotopía $\pi_1(B, b)$. En virtud del lema 4, construimos un camino $\mu(t)$ en E que es una elevación del camino $\gamma(t)$ en B . Partiendo de un punto x_j de la fibra F , se sigue el camino $\mu(t)$ que termina en un cierto punto $x_{\sigma(j)} = \mu(1)$ de la misma fibra F . Se obtiene así la correspondencia $\gamma \mapsto \sigma(\gamma)$ en la que $\sigma(\gamma)$ es una transformación sobre la fibra F :

$$\sigma(\gamma) : x_j \mapsto x_{\sigma(j)}$$

La transformación $\sigma(\gamma)$ depende de la clase de homotopía; además, es evidente que $\sigma(\gamma^{-1}) = \sigma(\gamma)^{-1}$ y $\sigma(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \sigma(\gamma_1) \circ \sigma(\gamma_2)$. Por tanto, σ es un homomorfismo del grupo fundamental $\pi_1(B, b)$ en el grupo de las transformaciones de los puntos de la fibra F , y recibe el nombre de **mo-nodromía**. Su imagen, $\sigma(\pi_1(B, b))$, recibe asimismo el nombre de grupo de la monodromía.

En general, trabajaremos con fibrados en los que el espacio base es S^1 y, abusando de la notación, asociaremos el espacio total E con el fibrado, denotándolo por $F \times_{\sigma} S^1$, donde σ es la monodromía del fibrado.

Lema 5 (Haken, [33]) Sea M una variedad de dimensión 3 y S una 2-esfera sumergida en M que no separa a M , entonces $M = M_1 \# S^2 \times_{\varphi} S^1$, siendo φ cualquier monodromía.

2.1.1 Descomposición prima de 3-variedades

En 1928 H. Kneser [36] probó que toda 3-variedad orientable y compacta podía descomponerse como suma conexa de 3-variedades tales que ellas mismas sólo pueden descomponerse en la forma trivial, aunque la unicidad de dicha descomposición fue probada por J. Milnor [39].

El objeto de la presente sección es la presentación del teorema de Descomposición Prima para variedades tridimensionales cerradas y orientables, para lo que es necesario introducir el concepto de splitting de Heegaard, así como algunos resultados intermedios. Existen generalizaciones que pueden aplicarse a 3-variedades compactas en general, orientables o no, con o sin frontera ([39], [40], [50]). Para obtener la unicidad en el caso no orientable es necesario tener una "forma normal" para la descomposición.

Tal y como se ha establecido previamente, el interés de la variedad $S^2 \times S^1$ radica, no sólo en su reiterada aparición como conjunto de nivel en sistemas Hamiltonianos integrables, sino también como excepción en numerosos resultados acerca de topología de 3-variedades. A continuación introduciremos los conceptos de variedad prima e irreducible. Milnor [39] probó que dichos conceptos son equivalentes en variedades tridimensionales con las excepciones de S^3 , $S^2 \times S^1$ y $S^2 \times_{\varphi} S^1$.

Definición 6 *Una variedad tridimensional M es no trivial si no es homeomorfa a S^3 .*

Definición 7 *Una 3-variedad M es prima si toda 2-esfera separadora es entorno de una 3-celda.*

Proposición 8 *Una 3-variedad no trivial M es prima (con respecto a la suma conexa) si M no puede descomponerse como suma conexa de manera no trivial.*

Al ser S^3 una variedad trivial respecto a la suma conexa, no es posible aplicarle este resultado; sin embargo, en S^3 todas las esferas son separadoras y entorno de 3-celdas, por lo que podemos afirmar que S^3 es una variedad prima. Del mismo modo, se puede probar que $S^2 \times S^1$ es una variedad prima, aunque no todas sus 2-esferas sean separadoras.

Otra aproximación al estudio de las 3-variedades se sirve de superficies incompresibles. La idea consiste en sumergir una superficie en una 3-variedad tal que la superficie sea lo más sencilla posible y conserve la información geométrica y algebraica.

Definición 9 *Una variedad N está propiamente sumergida en M si $N \cap \partial M = \partial N$.*

Definición 10 *Una superficie F propiamente sumergida en una 3-variedad M (o sumergida en ∂M) es compresible en M si se verifica una de las siguientes condiciones:*

- i) $F = S^2$ y F es entorno de una 3-celda en M , o
- ii) existe un disco $D \subset M$ tal que $D \cap F = \partial D$ y ∂D es no trivial en F .

De otro modo decimos que F es incompresible en M .

Por ejemplo, una 2-esfera S^2 que no separa la 3-variedad M es incompresible en M .

Definición 11 Una 3-variedad en la que toda 2-esfera es compresible recibe el nombre de irreducible.

En particular, las variedades S^3 y \mathbb{R}^3 son irreducibles, pero no $S^2 \times S^1$.

Lema 12 (Haken, [33]) Si M es una 3-variedad prima y no es irreducible, entonces M es un fibrado de 2-esferas sobre S^1 .

Proposición 13 (Milnor, [39, Lemma 1]) Una variedad es prima si y solamente si es irreducible, excepto las variedades $S^2 \times S^1$ y $S^2 \times_{\varphi} S^1$, con φ invirtiendo la orientación en S^2 .

Definición 14 Una 3-variedad M que contiene a un conjunto de discos bidimensionales $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ sumergidos propiamente en M y disjuntos dos a dos, tales que el resultado de cortar M a lo largo de $\cup D_i$ es un disco tridimensional recibe el nombre de cubo con n asas. Es decir, un n -cubo con asas es una variedad de dimensión 3 con n agujeros.

Nótese que la frontera de un cubo con n asas es una superficie cerrada de característica de Euler $2 - 2n$ que será orientable si y solo si M es orientable.

Definición 15 Sea M una 3-variedad cerrada y conexa. Una superficie F inmersa en M , cerrada y conexa determina un *splitting* de Heegaard de M si F separa a M y la clausura de cada componente del complementario $M - F$ es un cubo con asas. Si la superficie F determina un *splitting* de Heegaard de la variedad tridimensional cerrada y orientable M , denotaremos por $(M; F)$ al *splitting* de Heegaard de M .

Teorema 1 (Hempel, [32]) Toda 3-variedad M cerrada y conexa admite un *splitting* de Heegaard.

Definición 16 El género del *splitting* de Heegaard $(M; F)$ es por definición el género de la superficie F . El género de la variedad M es el mínimo de los géneros de todos los *splitting* de Heegaard posibles de M , es decir, el mínimo número n de asas en que se puede romper la variedad.

La caracterización del splitting de Heegaard de género mínimo en una 3-variedad arbitraria es un problema abierto. Sin embargo, en 1939 Reidemeister [44] consiguió clasificar las 3-variedades que poseen superficies de Heegaard de género 1. En particular, los espacios lenticulares, entre los que están incluidos S^3 y $S^2 \times_{\varphi} S^1$ (incluyendo $\varphi \equiv id$), admiten splittings de Heegaard de género uno (véase [49]).

Teorema 2 (Reidemeister, [44]) *Sea M una 3-variedad. Si M admite un splitting de Heegaard de género uno, entonces $M \cong S^3$, $M \cong S^2 \times_{\varphi} S^1$ (incluyendo $\varphi \equiv id$) o M es irreducible. En particular, una 3-variedad de género uno es prima.*

Definición 17 *Un arco α propiamente sumergido en una 2-variedad T es no esencial en T si existe un arco $\beta \subset \partial T$ tal que $\alpha \cup \beta$ es la frontera de un disco en T . De otro modo, α es esencial en T (véase fig. 2.1).*

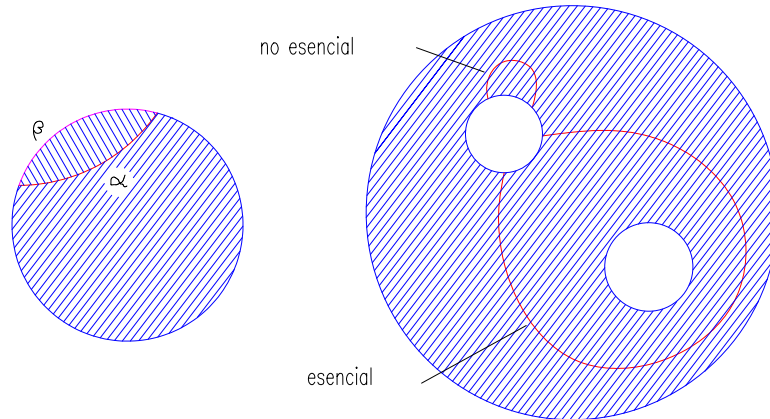


Fig. 2.1: Arcos esencial y no esencial.

Definición 18 *Una curva cerrada simple α en T es no esencial en T si es contractible en T . En otro caso, α es esencial.*

El siguiente resultado establece la existencia y unicidad de una descomposición en factores primos de una 3-variedad compacta. La existencia puede demostrarse (véase [34]) por inducción sobre el género del splitting de Heegaard de la variedad.

Teorema 3 (Descomposición Prima, Kneser [36], Milnor [39]) *Sea M una variedad tridimensional compacta. Entonces M puede decomponerse en la forma*

$$M = M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_n$$

donde cada M_i es primo. Además, la descomposición de M es única salvo homeomorfismo.

2.2 Introducción a la Teoría de Nudos

Comenzaremos con algunas definiciones y propiedades fundamentales en la teoría de nudos (véanse [10] y [24]) para relacionarlos después con las órbitas periódicas en los sistemas dinámicos. Todo ello nos permitirá definir sistemas y órbitas periódicas de tipo Morse-Smale No Singulares en la siguiente sección del presente capítulo.

2.2.1 Nudos y cadenas

Definición 19 *Sea h una aplicación de V en W variedades diferenciables de dimensión n y m respectivamente con $n < m$. Dado un embebimiento de S^1 en \mathbb{R}^3 , llamaremos nudo a $h(S^1)$ o a la propia aplicación. Además, diremos que un nudo está orientado cuando introducimos un sentido de recorrido.*

Sea E un dominio de un plano de \mathbb{R}^3 . Sea $E \times I$ el fibrado obtenido al asociar a cada punto q de E un segmento, centrado en q , de la normal al plano que contiene a E . Sea (x, y, z) un sistema de coordenadas sobre $E \times I$, con $(x, y, 0) \in E$. Denotamos por $p : E \times I \rightarrow E$ a la **proyección**: $(x, y, z) \rightarrow (x, y, 0)$. En esta definición, podemos sustituir E por una hipersuperficie difeomorfa E' y $E \times I$ por un fibrado normal isomorfo sobre E' .

Definición 20 *Sea k un nudo contenido en $E \times I$ y $p(k)$ su proyección. Un punto $P \in p(k)$ es un punto múltiple de la proyección si su antiimagen mediante la proyección contiene más de un punto (véase fig. 2.2).*

Por otra parte, una **proyección** p de un nudo k es **regular** si:

- 1) Existe sólo un número finito de puntos múltiples y todos ellos son puntos dobles (cruces).
- 2) Si recorremos el borde de una bola suficientemente pequeña incluida en E , alrededor del punto de cruce, encontramos alternativamente cada una de las ramas que se cruzan.

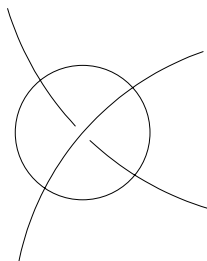


Fig. 2.2: Entorno de un punto de cruce en la proyección de un nudo k .

Sean $q_1 = (x, y, z_1)$ y $q_2 = (x, y, z_2)$ las dos antiimágenes de un cruce. Diremos que la rama o arco que contiene a q_1 es superior a la rama que contiene a q_2 si $z_1 > z_2$.

Definición 21 *La representación o diagrama de un nudo k se obtiene mediante una proyección regular especificando en cada cruce cuál es la rama superior, mediante línea continua, y cuál la inferior, mediante línea discontinua.*

Definición 22 *Una cadena es un embebimiento de n circunferencias en \mathbb{R}^3 , es decir, un conjunto de n nudos que pueden estar separados o entrelazados. Cada uno de estos nudos recibe el nombre de componente, y de este modo podemos redefinir un nudo como una cadena formada por una sola componente.*

Diremos además que dos **cadena**s son **equivalentes** si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que conserva la orientación y transforma una cadena en otra. Es condición necesaria y suficiente para la equivalencia de dos nudos en \mathbb{R}^3 o S^3 que podamos pasar de la representación de uno a la del otro mediante alguno de los movimientos de Reidemeister (véase fig. 2.3). Dichos movimientos se han de llevar a cabo localmente sin haber más arcos presentes que los implicados en dicho movimiento.

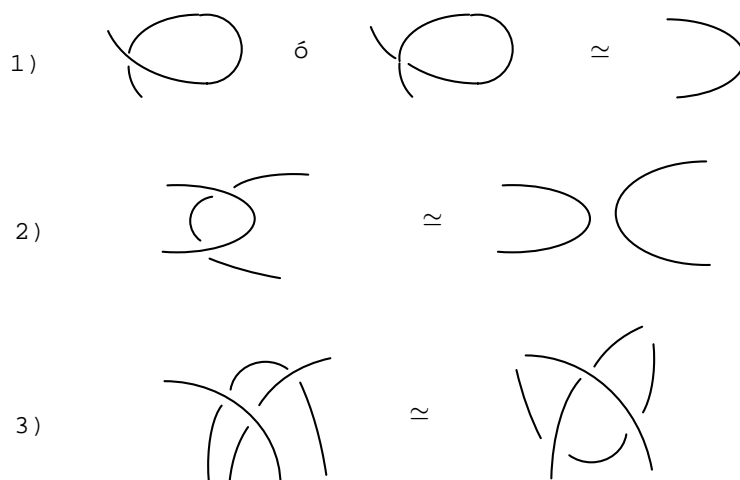


Fig. 2.3: Movimientos de Reidemeister.

En adelante denotaremos por T^2 a una variedad homeomorfa a $S^1 \times S^1$ y por toro sólido a una variedad homeomorfa a $D^2 \times S^1$; diremos que T^2 es un **toro estándar** si para un sistema de referencia adecuado puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= (a + \rho \cos \theta) \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y &= (a + \rho \cos \theta) \sin \varphi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z &= \rho \sin \theta & 0 < \rho < a, \text{ con } \rho \text{ fijo} \end{aligned}$$

Si en lugar de fijar ρ , lo hacemos variar desde 0 hasta r : $0 \leq \rho \leq r < a$, se obtiene un **toro sólido estándar**. Es decir, un toro sólido estándar es un fibrado de discos normales sobre una circunferencia (analítica).

Sea TS un toro sólido cualquiera. Un homeomorfismo h de un toro sólido estándar en TS , $h: D^2 \times S^1 \rightarrow TS$, se denomina **referencia** del toro sólido. Sobre un toro sólido pueden definirse dos tipos de curvas esenciales (con distinto tipo de homotopía): un **paralelo** de TS es cualquier curva simple en ∂TS de la forma $h(p \times S^1)$, para alguna referencia h y para algún punto $p \in \partial TS$; un **meridiano** de TS es una curva cerrada simple en ∂TS que es homóloga a 0 en TS pero no lo es sobre ∂TS . Asimismo, el **núcleo o centro** de TS es la curva $h(0 \times S^1)$, siendo 0 el origen de D^2 .

Por otra parte, un **entorno tubular** o regular de un nudo k en una variedad M es un toro sólido T^3 de centro k , y se denota por $N(k, M)$.

Definición 23 Un nudo k_2 es un (p, q) -cable de k_1 si al tomar un entorno tubular de k_1 , el nudo k_2 da p vueltas longitudinales y q transversales sobre el borde de dicho entorno. Si k_2 es un (p, q) -cable de k_1 , diremos que k_1 es el nudo base de dicho cable.

Definición 24 Diremos que un nudo es (p, q) -toroidal si es equivalente a un nudo situado sobre un toro, donde p y q son primos entre sí. Los nudos toroidales se caracterizan por el número de vueltas p que dan al toro en sentido longitudinal y el número de vueltas q que dan en sentido transversal.

Dado un nudo k , supongamos que corta a un plano π en dos únicos puntos P y Q . El arco de k desde P hasta Q se cierra por un arco en π obteniéndose el nudo k_1 ; el otro arco desde Q hasta P se cierra del mismo modo obteniéndose el nudo k_2 . Diremos que el nudo k es la **suma conexa** (o el producto) de k_1 y k_2 y lo denotamos $k_1 \# k_2$ (véase fig.2.4). Dados dos nudos k_1 y k_2 , su suma conexa $k_1 \# k_2$ es el nudo construido este modo.

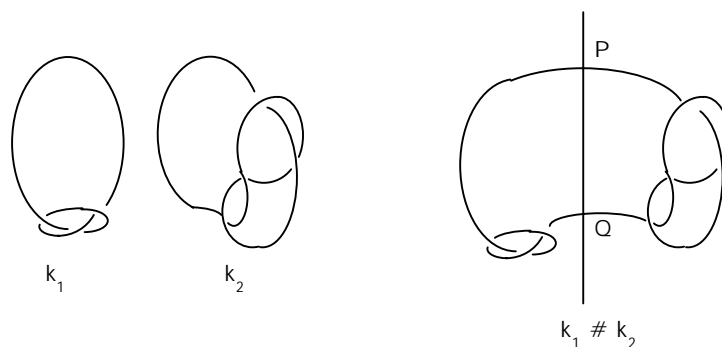


Fig. 2.4: Suma conexa de nudos.

Si en la anterior introducción sustituimos \mathbb{R}^3 por S^3 obtenemos las definiciones básicas de nudos sobre la esfera S^3 . Sin embargo, en posteriores capítulos llevaremos a cabo la caracterización de las órbitas periódicas de un sistema NMS sobre la variedad $S^2 \times S^1$, por lo que resulta imprescindible trasladar los conceptos definidos en esta sección a dicha 3-variedad. Emplearemos la descomposición trivial $S^2 \times S^1 = S^2 \times S^1 \# S^3$, de modo que los nudos definidos en S^3 pueden considerarse sumergidos en la 3-celda de $S^2 \times S^1$ definida por la suma conexa. Así, llamaremos **locales** a este tipo de nudos sumergidos en una 3-celda y definiremos a los nudos propios de $S^2 \times S^1$ como **nudos globales**. Estos conceptos serán introducidos en el capítulo 3.

Por último, la relación existente entre los nudos y las órbitas periódicas es evidente: toda órbita periódica de un sistema dinámico sobre una variedad

de dimensión tres es una curva cerrada sin autointersecciones, por lo que se le puede asociar un nudo. Los trabajos iniciales sobre la aplicación de la teoría de nudos a las órbitas periódicas de un sistema dinámico fueron llevados a cabo por J. Birman y R. Williams; ambos desarrollaron una herramienta muy útil en el análisis del comportamiento de las órbitas anudadas de los flujos hiperbólicos, sobre todo en aquellos sistemas en los que el caos hace aparición: las plantillas o "templates" (véanse [4], [5] y [52]). R. Ghrist, P. Holmes y M. Sullivan proporcionan en [29] una amplia visión de la relación existente entre los sistemas dinámicos y la teoría de nudos.

2.3 Variedades Flujo

Estudiaremos en esta sección las variedades flujo, como un determinado tipo de variedades sobre las que se define un campo vectorial, y algunas de las propiedades que verifican, demostradas por D. Asimov [3] y B. L. Reinhart [45]. Además, tras definir los conceptos de asas redondas y asas ampliadas, y enunciar algunos resultados previos, estableceremos una relación directa entre las variedades flujo y la descomposición en asas redondas de la variedad: ésta será posible si y solamente si la variedad admite un tipo especial de flujo: Morse-Smale No Singular (Morgan [41], Asimov [3]).

Definición 25 *Sea W una variedad compacta, orientable y conexa. Sea V un campo vectorial sobre W continuo y no singular (sin puntos de equilibrio). Definimos, de forma intuitiva, la frontera negativa de una variedad, y la denotamos por $\partial_- W$, como la subvariedad de ∂W donde el campo vectorial V está dirigido hacia la parte interior de W . Por otra parte, definimos la frontera positiva de la variedad, y denotamos por $\partial_+ W$, como $\partial_+ W = \partial W - \partial_- W$. Llamamos variedad flujo al par $(W, \partial_- W)$.*

Es decir, supondremos que en todos los puntos de la frontera de la variedad el campo vectorial es transversal a la variedad, por lo que su dirección será hacia dentro o hacia fuera de éste.

Proposición 26 *Los bordes positivo $\partial_+ W$ y negativo $\partial_- W$ están en componentes conexas distintas.*

Este resultado se prueba por reducción al absurdo: supongamos que ambos bordes no están separados y consideremos un arco que una un punto del borde positivo con otro del borde negativo, sean $x \in \partial_- W$ y $x' \in \partial_+ W$. Si en x el campo vectorial está en una parte del plano tangente a la variedad y podemos pasar con continuidad a x' donde el campo vectorial está

por el otro lado del plano tangente, existirá un punto x_0 de la trayectoria $S \subset \partial W$ donde el campo vectorial está sobre el plano tangente, es decir, $x_0 \in \partial W - (\partial_- W \cup \partial_+ W) = \emptyset$. Por tanto, podemos afirmar que ambos bordes son subvariedades separadas.

Ejemplo 27 *El disco de la figura 2.5 no es una variedad flujo, ya que existen dos puntos en los que el flujo es tangente a la variedad, por lo que las fronteras positiva y negativa no están separadas. Sin embargo, la corona de la figura 2.5 sí es una variedad flujo.*

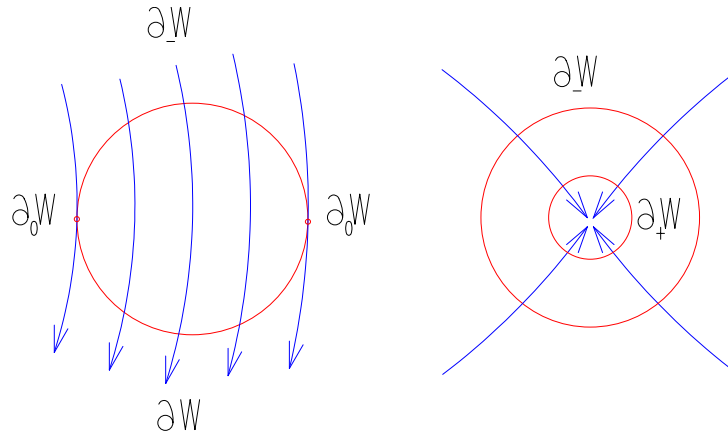


Fig. 2.5: Campos vectoriales.

Proposición 28 (Reinhart, [45]) *Sea $(W, \partial_- W)$ una 3-variedad flujo. Entonces $\aleph(W) = \aleph(\partial_- W) = \aleph(\partial_+ W) = 0$.*

2.3.1 Descomposición en asas redondas

El concepto de asa redonda se revela tremendamente útil a la hora de establecer una clasificación de variedades tridimensionales, ya que, entre otras cosas, permite establecer una conexión directa entre las variedades que admiten una descomposición en asas redondas y aquellas que admiten un flujo Morse-Smale No Singular (que estudiaremos en la sección siguiente). De este modo, se convierte en una herramienta inestimable en el estudio de los sistemas dinámicos, ya que pueden estudiarse en paralelo y relacionarse posteriormente sus características topológicas y algebraicas.

Definición 29 *Una asa redonda de dimensión n es*

$$R_k = D^k \times D^{n-k-1} \times S^1$$

donde $k < n$. Definimos las fronteras positiva y negativa de un asa como:

$$\begin{aligned}\partial_+ R_k &= D^k \times \partial D^{n-k-1} \times S^1 \\ \partial_- R_k &= \partial D^k \times D^{n-k-1} \times S^1\end{aligned}$$

En el caso orientable podemos considerar un asa R_k como un espacio fibrado donde la base es S^1 y la fibra un producto de discos $D^k \times D^{n-k-1}$. Así, decimos que un asa redonda de dimensión n es un fibrado de discos sobre S^1 .

En dimensión $n = 3$, veamos cómo son las k -asas redondas, teniendo en cuenta que una k -asa es homeomorfa a un toro sólido

$$R_k = D^k \times D^{n-k-1} \times S^1 \cong D^2 \times S^1$$

Si $k = 0$, el asa es de la forma $R_0 = \{p\} \times D^2 \times S^1$ siendo $\{p\}$ un punto y $\partial_- R_0 = \emptyset$, ya que el borde de un punto es el conjunto vacío. De este modo, una 0-asa es un toro sólido tal que todo el flujo sale por la frontera del asa, es decir, $\partial_+ R_0 = \partial R_0$.

Cuando $k = 1$, el asa viene definida por $R_1 = D^1 \times D^1 \times S^1$ siendo $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ los puntos del borde del primer y segundo disco D^1 , respectivamente (ver figura 2.6). Las fronteras negativa (por donde entra el flujo) y positiva (por donde sale el flujo) son:

$$\begin{aligned}\partial_- R_1 &= \{a, b\} \times D^1 \times S^1 = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \{a\} \times D^1 \times S^1 \\ \{b\} \times D^1 \times S^1 \end{matrix} \\ \partial_+ R_1 &= D^1 \times \{c, d\} \times S^1 = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ D^1 \times \{c\} \times S^1 \\ D^1 \times \{d\} \times S^1 \end{matrix}\end{aligned}$$

De hecho, R_1 no es una variedad flujo, ya que el flujo es tangente a R_1 en parte de su frontera, concretamente en $\partial_+ R_1 \cap \partial_- R_1 = \{c, d\} \times \{a, b\} \times S^1$.

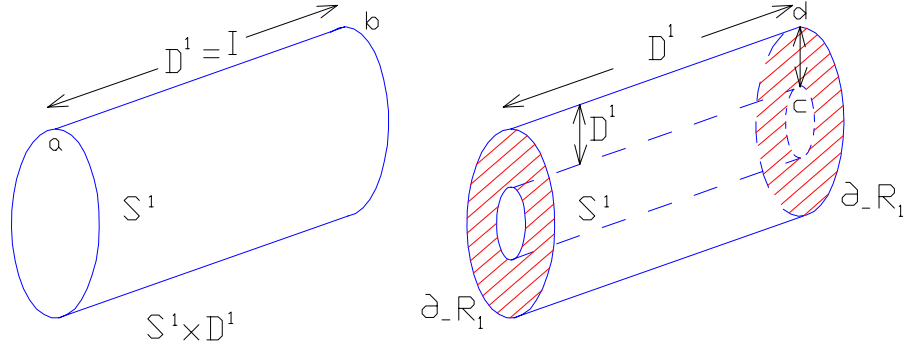


Fig. 2.6: 1-Asa redonda.

Si $k = 2$, el asa es $R_2 = D^2 \times \{p\} \times S^1$, siendo sus fronteras positiva y negativa:

$$\begin{aligned} \partial_+ R_2 &= \emptyset \\ \partial_- R_2 &= \partial D^2 \times \{p\} \times S^1 \cong S^1 \times S^1 = T^2 \end{aligned}$$

por lo que podemos concluir que una 2-asa es un toro sólido tal que todo el flujo entra por la frontera del asa.

Definición 30 La suma de Whitney de dos fibrados (E, p, B) y (E', p', B) es otro fibrado $(E \oplus E', p \oplus p', B)$ con la misma base donde la fibra en cada punto $b \in B$ es la suma directa de las fibras $E_b \oplus E'_b$.

En el fibrado definido por la suma de Whitney, el espacio total $E \oplus E'$ es homeomorfo al conjunto de pares $(e, e') \in E \times E'$ de modo que $p(e) = p'(e)$.

Definición 31 Sea Y una 3-variedad. Decimos que la 3-variedad X se obtiene a partir de Y pegándole una k -asa redonda R_k si:

1. existen dos fibrados sobre S^1 , E_s^k y E_u^{2-k} , y
2. existe un embebimiento $\varphi : E_s^k \times \partial E_u^{2-k} \rightarrow \partial Y$ tal que

$$X = Y \underset{\varphi}{\text{Si}} E_s^k \oplus E_u^{2-k}$$

En el caso particular en que $Y = D^3$, al pegar un asa redonda se obtiene un toro sólido al que se le ha quitado una 3-celda (fig. 2.7).

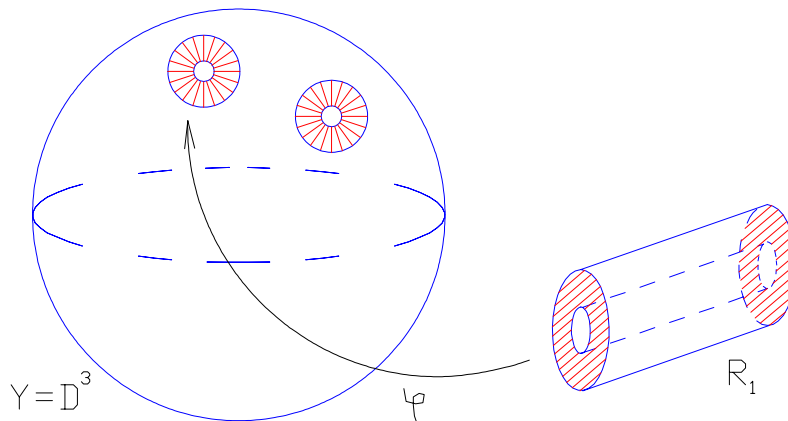


Fig. 2.7: 1-Asa R_1 pegada sobre D^3 .

Definición 32 Una descomposición en asas redondas de una 3-variedad M es una sucesión:

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \subset M_N = M$$

donde cada M_{i+1} se obtiene de M_i añadiendo un R_k .

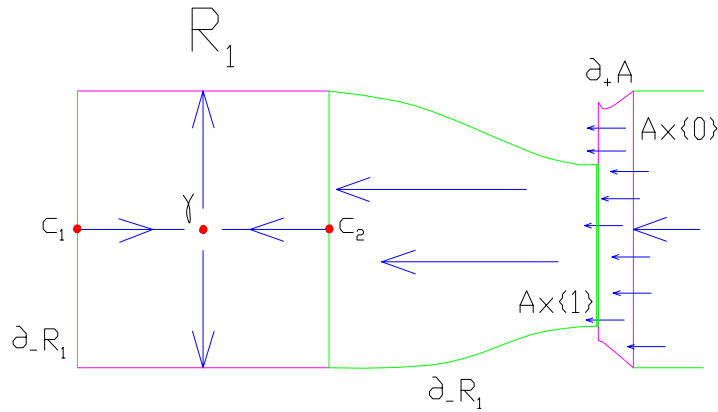


Fig. 2.8: Sección de un asa ampliada.

Teorema 4 (Morgan, [41]) Sea M una variedad compacta, orientable e irreducible, cuya frontera es vacía o unión disjunta de toros. Supongamos que M tiene una descomposición en asas redondas

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \subset M_N = M$$

entonces ∂M_i está formada por toros.

Definición 33 Consideremos el borde negativo de la 1-asa, $\partial_- R_1$. Identificando la frontera negativa de la 1-asa con la frontera positiva de otro asa A , obtenemos un asa redonda engordada o ampliada (véase fig. 2.8). Denotamos por γ al centro de una sección de R_1 . Asociaremos el asa ampliada con la terna $(C, \partial_- C, \gamma)$. Nótese que $(C, \partial_- C, \gamma)$ es una variedad flujo.

$$C = A \times [0, 1] \begin{matrix} \lceil \\ \partial_- R_1 \end{matrix} R_1$$

De este modo, C podrá pegarse con el asa siguiente por su borde negativo, $\partial_- C = A \times \{0\}$. Un asa ampliada C , por tanto, no es otra cosa que la variedad resultante de pegar, de la forma anteriormente descrita, un asa R_1 a una variedad bidimensional A . En la figura 2.9 vemos cómo la frontera negativa de una 1-asa está formada por los dos coronas que limitan la sección. Las circunferencias c_1 y c_2 están en distintas componentes conexas de la frontera negativa de la 1-asa.

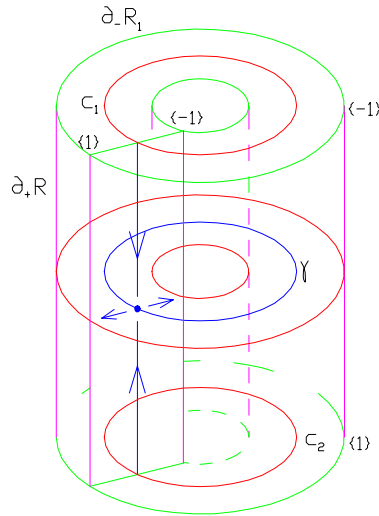


Fig. 2.9: 1-Asa R_1 con las órbitas c_1 y c_2 sobre $\partial_- R_1$.

Por tanto, dada una descomposición en asas ampliadas de la variedad W ,

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \dots \subset M_N = M$$

donde

$$W_i = \sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} C_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

cada C_j es, o bien una 0 ó 2-asa, o bien es un asa ampliada de la forma

$$C_j = A \times [0, 1] \sum_{\varphi} B_s \oplus B_u$$

donde A es unión de componentes de ∂W_j , $B_s \oplus B_u$ es la suma de Whitney de B_s y B_u , fibrados de D^1 sobre S_1 , y la imagen de la aplicación por la que pegamos el asa

$$\varphi : B_s \oplus (\partial B_u) \rightarrow A \times \{1\}$$

intersecta cada componente de $A \times \{1\}$. Sea $\partial_- C_j = A \times \{0\}$ y consideremos C_j junto con $\partial_- C_j$ y el centro γ_j como la 0-sección de $B_s \oplus B_u$.

Notemos que la componente C_j asociada a una 0 ó 2-asa es un toro sólido.

2.3.2 Flujo Morse-Smale No Singular

Dentro del campo de las variedades flujo, trabajaremos con un tipo concreto de variedades: aquellas que admiten un flujo del tipo Morse-Smale no Singular (NMS). Definiremos a continuación estas variedades, para seguidamente establecer, mediante resultados de J. W. Morgan [41] y D. Asimov [3], la equivalencia entre variedades flujo que admiten un flujo NMS y aquellas sobre las que se puede establecer una descomposición en asas redondas. Previamente, recordaremos algunos conceptos básicos de Sistemas Dinámicos y flujos NMS (véase [46]).

Definición 34 *Dado un sistema dinámico (M, φ) , diremos que $x \in M$ es un punto no errante si para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $t > 0$, existe $T > t$ tal que $d(\varphi(x, T), x) < \varepsilon$.*

Definición 35 *Sea x_0 un punto de la órbita periódica $\gamma(x)$ y Σ una hipersuperficie que corta transversalmente a $\gamma(x)$ en x_0 . Entonces, en un entorno O de x_0 , $O \subseteq \Sigma$, está definida la función de clase C^1 que a cada $y \in O$ le hace corresponder el mínimo tiempo $\sigma(y)$ tal que $\varphi(y, \sigma(y)) \in O$, siendo $\sigma(x_0)$ el periodo de γ . A la aplicación $P : O \rightarrow O$ definida por $P(y) = \varphi(y, \sigma(y))$ se le denomina aplicación de Poincaré. Por extensión, al entorno O se le denomina sección de Poincaré.*

Definición 36 *Una órbita es hiperbólica si los valores propios de la parte lineal de la aplicación de Poincaré asociada a dicha órbita tienen módulo distinto de la unidad.*

Definición 37 *Llamaremos índice de una órbita periódica hiperbólica a la dimensión de su variedad estable restringida a una sección de Poincaré.*

Definición 38 *Un flujo Morse-Smale (MS) es un flujo que verifica:*

1. *El conjunto de puntos no errantes consta de un número finito de elementos críticos*
2. *Dichos elementos críticos son órbitas periódicas y puntos de equilibrio hiperbólicos.*

3. *Dados dos elementos críticos c_1 y c_2 cualesquiera, la variedad inestable de c_1 interseca transversalmente la variedad estable de c_2 .*

Definición 39 *Un flujo Morse-Smale No Singular (NMS) es un flujo Morse-Smale sin puntos de equilibrio.*

A continuación expondremos algunos resultados que relacionan una variedad con el flujo que pueda estar definido sobre ella: concretamente, se establece una relación entre aquellas variedades que admiten una descomposición en asas redondas y aquellas que admiten un flujo NMS.

Proposición 40 (Asimov, [3]) *Si $(M, \partial_- M)$ es una variedad flujo tridimensional con una descomposición en asas redondas,*

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \subset M_N = M$$

entonces M admite un flujo NMS, cuyas órbitas cerradas son exactamente las del flujo y éste se dirige hacia fuera de ∂M_j .

Proposición 41 (Morgan, [41]) *Sea $(M, \partial_- M)$ una 3-variedad que posee un flujo NMS. Entonces M tiene una descomposición en asas redondas tal que las curvas situadas en los centros de los toros son las órbitas periódicas del flujo.*

Nótese que, en una descomposición en asas redondas de una variedad compacta, orientable e irreducible, todas las fronteras son toroidales (teorema 4), por lo que puede afirmarse que la variedad es unión de fibrados sobre S^1 . Asociamos el centro de cada fibrado, tal y como ha sido definido en la sección 2.2.1, con una órbita periódica del flujo.

De este modo, es equivalente una descomposición en asas redondas de una 3-variedad y una descomposición en asas ampliadas, simplemente completando la variedad mediante la pegada de toros sólidos (entornos de órbitas periódicas), a las componentes de la frontera. Debido a dicha equivalencia, al referirnos en adelante a una descomposición en asas de una variedad, se entenderá que se han empleado asas ampliadas en su obtención.

Estos resultados nos permiten afirmar que todas las variedades tridimensionales que admiten un flujo NMS admiten una descomposición en asas redondas y a la inversa. Las proposiciones 40 y 41 nos dicen que las órbitas periódicas del flujo están en el centro de los toros de la descomposición en asas redondas sin ampliar. Una vez probada la equivalencia entre ambas descomposiciones, podemos afirmar que las órbitas cerradas del flujo son los centros de los toros sólidos que corresponden a las asas redondas y, en cuanto

a las asas ampliadas, las órbitas periódicas están situadas en el centro de las componentes (del complementario en la variedad) equivalentes a $D^2 \times S^1$.

Esta afirmación se utiliza para clasificar el tipo de órbitas periódicas que aparecen en las 3-variedades. En particular, en la siguiente sección se reproduce el estudio topológico, realizado por M. Wada [51], del tipo de nudos que se pueden encontrar en la esfera S^3 . En los capítulos 3 y 4 realizamos un estudio similar sobre la variedad $S^2 \times S^1$.

2.4 Descomposición en asas redondas de S^3

Comenzaremos esta sección con algunas de las propiedades más significativas de S^3 . A continuación estudiaremos su descomposición en asas redondas, que agruparemos en el lema de clasificación de asas ampliadas de Wada. En este lema se describen todas las formas posibles de pegar un asa redonda a un toro o a dos toros en S^3 .

A continuación el teorema de Wada [51] nos proporcionará una caracterización de las cadenas de órbitas periódicas con índice en la variedad, en términos de operaciones sobre una cadena generadora: la $(0, 2)$ -cadena de Hopf.

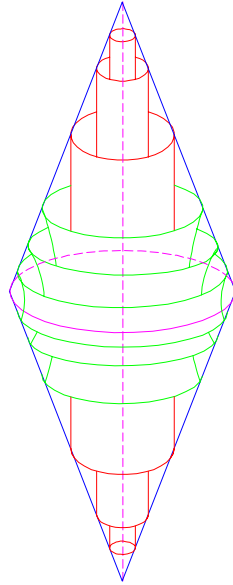
2.4.1 Propiedades de S^3 .

La variedad con la que vamos a trabajar es la esfera de dimensión tres, S^3 , variedad difeomorfa a la definida por $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$ en \mathbb{R}^4 . La esfera S^3 es equivalente a la compactificación de Alexandrov de \mathbb{R}^3 . Representamos S^3 mediante un complejo simplicial en el que pegamos dos conos por sus bases e identificamos la parte superior con la inferior (véase fig. 2.10). También puede considerarse S^3 como la unión de dos toros sólidos, $D_1 \times S^1$ y $D_2 \times S^1$, pegados por sus fronteras identificando los círculos transversales de un toro con los longitudinales del otro:

$$S^3 = D_1 \times S^1 \underset{\psi}{\sqcup} D_2 \times S^1$$

donde $\psi : \partial D_1 \times S^1 \rightarrow \partial D_2 \times S^1$ es un homeomorfismo que preserva la orientación, tal que

$$D_1 \times S^1 \cap D_2 \times S^1 = \partial D_1 \times S^1 = \partial D_2 \times S^1$$

Fig. 2.10. Foliación de S^3

A continuación, y basándonos en los conceptos introducidos en la sección anterior, deduciremos algunas propiedades topológicas de la variedad S^3 , tales como:

Definición 42 *Un subconjunto $X \subset Y$ está bicollarizado en Y si existe un embebimiento $b : X \times [-1, 1] \rightarrow Y$ tal que $b(x, 0) = x$, $x \in X$. La aplicación b , o su imagen, es el bicollar en sí. En el caso en que X e Y son, respectivamente, $(n - 1)$ y n -variedades (sin frontera), el bicollar es un entorno de X en Y .*

Teorema 5 (generalizado de Schönflies, [47]) *Sea K^{n-1} una esfera de dimensión $(n - 1)$ bicollarizada en \mathbb{R}^n . Entonces la clausura de su dominio complementario acotado es homeomorfo a la n -celda D^n .*

En particular, para $n = 3$, los siguientes resultados obtenidos por J. W. Alexander [1] y D. Rolfsen [47], respectivamente, concluyen no sólo la existencia de dos discos D^3 en el complementario de una esfera separadora en S^3 , sino también la existencia de un toro sólido en el complementario, respecto a S^3 , de un toro bidimensional.

Teorema 6 (Alexander, [1]) *Una 2-esfera diferenciable en S^3 subdivide el espacio en dos 3-celdas.*

Teorema 7 (del toro sólido en S^3 , Rolfsen [47]) *Todo toro diferenciable en S^3 es frontera de un toro sólido, al menos por uno de sus lados.*

2.4.2 Asas redondas en S^3

Si lo que pretendemos es encontrar una descomposición de S^3 en asas redondas, habremos de clasificar en primer lugar las asas ampliadas en esta variedad, (C, ∂_-C, γ) , donde γ es el núcleo de una sección de la 1-asa asociada al asa ampliada C ; es decir, hemos de estudiar de qué distintas formas podemos pegar una asa redonda R_1 a un toro o unión disjunta de toros.

El siguiente resultado, aun siendo original de M. Wada [51], fue obtenido de manera independiente por K. Yano, en [53] y [54]. Dado que las demostraciones aportadas por ambos autores son extremadamente esquemáticas, optamos por incluir una prueba detallada del mismo, encontrando además algunas diferencias. Además, en el capítulo 3 emplearemos algunos detalles de la misma para clasificar las asas ampliadas en $S^2 \times S^1$.

Lema 43 *Consideremos una descomposición en asas redondas de S^3 ,*

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = S^3$$

donde cada M_i es unión de 0-asas y 2-asas redondas y 1-asas ampliadas. El triplete (C, ∂_-C, γ) asociado a un 1-asa redonda ampliada corresponde a uno de los siguientes tipos:

- a) $C \cong T_1 \times [0, 1] \# T_2 \times [0, 1]$, donde T_1 y T_2 son toros bidimensionales, $\partial_-C = T_1 \times \{0\} \cup T_2 \times \{0\}$ y γ es un nudo trivial en C .
- b) $C \cong T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$, $\partial_-C = T^2 \times \{0\}$ o $\partial_-C = T^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$ y γ es un nudo trivial en C .
- c) $C \cong D_1 \times S^1 \# D_2 \times S^1$, donde $\partial_-C = \partial D_1 \times S^1$ y γ es un nudo trivial en C .
- d) $C \cong F_{p+1} \times S^1$, donde F_{p+1} es un disco con $p \geq 1$ agujeros, ∂_-C es una componente o unión de dos componentes de ∂C y $\gamma = \{*\} \times S^1$ para algún punto $\{*\}$ de $\text{int}(F_p)$.
- e) $C \cong T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$, donde $\partial_-C = T^2 \times \{0\}$, $N(k)$ es un entorno regular de un nudo no trivial k y $\gamma = \{*\} \times S^1$ para algún punto $\{*\}$ de una sección transversal de C .
- f) $C \cong D^2 \times S^1 - \text{int } \overline{W}^{\mathbb{C}}$, donde \overline{W} es un entorno tubular del $(2, 1)$ -cable de $\{0\} \times S^1$ en $D^2 \times S^1$, $\partial_-C = \partial \overline{W}$ y $\gamma = \{0\} \times S^1$.

Demostración. Consideremos la órbita de tipo silla γ en el centro de una 1-asa redonda R_1 , junto con la aplicación de pegada

$$\varphi : B_s \underset{S^1}{\mathbb{L}} (\partial B_u) \rightarrow A \times \{1\}$$

donde B_s y B_u son fibrados sobre S^1 y A es la 2-variedad sobre la que se pega R_1 , $A = T^2$ o $A = T_1^2 \cup T_2^2$.

Si R_1 es orientable, es difeomorfa a $[-1, 1]_s \times [-1, 1]_u \times S^1$, donde $\partial_- R_1 = [-1, 1] \times \{\pm 1\} \times S^1$ y las curvas de pegada $c_i = \{0\} \times \{\pm 1\} \times S^1$, $i = 1, 2$, dividen cada componente en dos coronas:

$$\begin{aligned} A_{n_0} &= [-1, 0] \times \{\pm 1\} \times S^1 \\ A_{n_1} &= [0, 1] \times \{\pm 1\} \times S^1 \end{aligned}$$

Si la curva de pegada no es esencial, define la frontera de un disco D^2 sobre $A \times \{1\}$ y se estudian diferentes casos en función de si $A_{n_0} \subset D^2$ o $A_{n_1} \subset D^2$.

Cuando la 1-asa no es orientable, es difeomorfa a una cinta de Möbius engordada, $R_1 \cong MB \times [0, 1]$; en este caso, R_1 se pega sobre un toro empleando la curva de pegada $c = \varphi(\partial_+ R_1 \oplus \{0\})$, donde $\partial_+ R_1$ y también $\partial_- R_1$, son fibrados no orientables de D^1 sobre S^1 .

I. Supongamos R_1 orientable. Analizaremos las diferentes formas de pegar la 1-asa sobre A dependiendo del tipo de homotopía de las curvas de pegada.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, aparecen los siguientes casos:

1. Consideremos en primer lugar que $A = T^2$:

(a) Cuando las curvas de pegada c_i son no esenciales, existe un disco $D_i^2 \subset A \times \{1\}$ tal que $\partial D_i^2 = c_i$, $i = 1, 2$, y $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ ó 1.

i. Si $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$, entonces una componente de la frontera del asa ampliada es la 2-esfera S (véase fig. 2.11).

$$S = D_1 \cup \{0\} \times [-1, 1] \times S^1 \cup D_2 \cong S^2$$

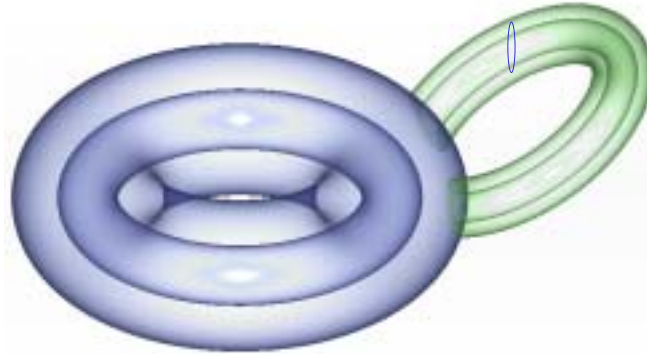


Fig. 2.11: Asa ampliada $B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$ no admisible en S^3 .

La frontera del asa ampliada tiene dos componentes no toroidales: un bitoro BT^2 y una esfera S^2 . Así, $C \cong B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$, donde denotamos por $B\tau$ a un bitoro sólido y por W a un toro sólido tal que $\partial W = A \times \{0\}$. Sin embargo, el teorema de Poincaré-Hopf asegura la existencia de un punto de equilibrio en la 3-celda cuya frontera es la esfera antes mencionada, lo que no es compatible con un flujo NMS.

- ii. Si $j = 0$ para $i = 1$ y $j = 1$ para $i = 2$ (o viceversa), entonces podemos asumir que $D_2^2 \subset D_1^2$, ya que de otro modo sería necesaria la existencia de superficies no separadoras en S^3 . La frontera del asa ampliada tiene componentes toroidales: $A \times \{0\}$, $A \times \{1\}$ y $(D_1 - \text{int}(D_2)) \cup (\{0\} \times [-1, 1] \times S^1)$ (fig. 2.12); nótese que esta última componente está contenida en la 3-celda de frontera

$$S = D_1 \cup \{0\} \times [-1, 1] \times S^1 \cup D_2 \cong S^2$$



Fig. 2.12: Asa ampliada $T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$

(aunque dicha esfera no es componente de ∂C),

$$T^2 \cong \overset{i}{D}_1^2 - \overset{i}{int} \overset{i}{D}_2^2 \overset{\mathbb{C}\mathbb{C}}{\cup} \overset{i}{\{0\}} \times [-1, 1] \times S^1 \overset{\mathbb{C}}{\subset} S$$

En torno a esta esfera, puede determinarse de forma unívoca dicho asa ampliada como la suma conexa $T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$ (figura 2.13). En este caso, la órbita de tipo silla γ es un nudo trivial en el asa ampliada y el borde negativo de C es $\partial_- C = A \times \{0\}$.

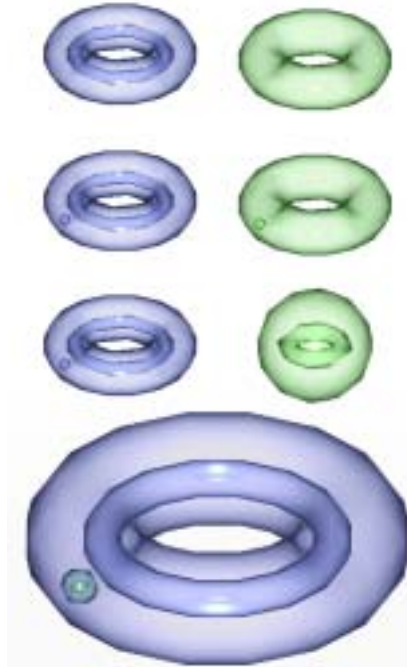


Fig. 2.13: Suma conexa $T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$.

- (b) Supongamos que las curvas de pegada son c_1 no esencial y c_2 esencial, y consideremos el disco $D_1^2 \subset A \times \{1\}$ tal que $\partial D_1^2 = c_1$. Además, por continuidad, c_2 debe ser un meridiano o un paralelo. En este caso, existe una 2-esfera S sumergida en el asa ampliada tal que $A \times \{0\} \subset \overline{S}$, a partir de la cual puede construirse la suma conexa $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$ (véase la figura 2.14):

$$S = \overset{i}{T^2} \times \{1\} - \overset{\mathbb{C}}{E} \cup \overset{i}{\{\pm 1\}} \times [-1, 1] \times S^1 \overset{\mathbb{C}}{\cup} D_1' \cup D_2' \cong S^2$$

donde $E \cong [-1, 1] \times \{\pm 1\} \times S^1$ es la corona sobre $T^2 \times \{1\}$ que se identifica con una componente de la frontera negativa de R_1

y D'_i es un 2-disco contenido en $T^2 \times \{1\}$ tal que $D_1^2 \subset D'_i$ y $\partial D'_i = \{\pm 1\} \times \{-1\} \times S^1$, $i = 1, 2$.

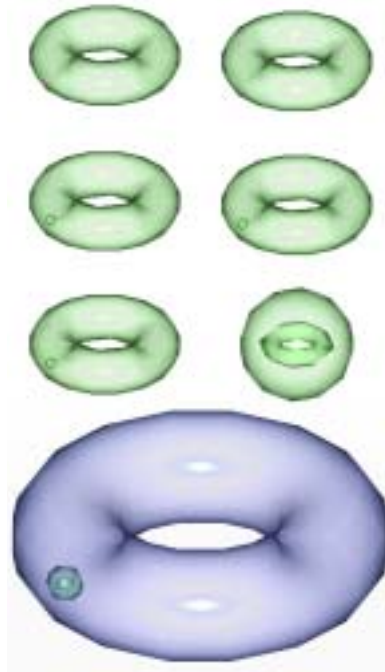


Fig. 2.14: Suma conexa de dos toros sólidos

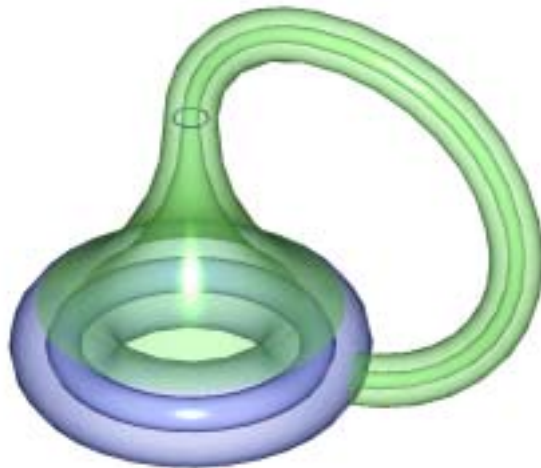


Fig. 2.15: Pegada esencial (paralelo) y no esencial de un asa orientable sobre un toro

- (c) Así, el asa ampliada es $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$, el borde negativo de C es la frontera de un toro sólido $\partial_- C = A \times \{0\} \cong \partial D_1^2 \times S^1$ y la órbita de tipo silla γ es un nudo trivial en C (figuras 2.15 y 2.16).

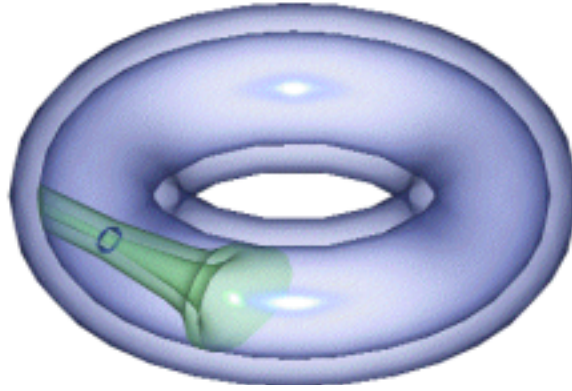


Fig. 2.16: Pegada esencial (meridiano) y no esencial de un asa orientable sobre un toro: $C \cong D_1 \times S^1 \# D_2 \times S^1$

- (d) Consideremos que ambas curvas c_i son esenciales. En la siguiente construcción asumiremos que son meridianos, aunque de forma totalmente análoga puede establecerse un resultado similar si las curvas de pegada son paralelos. El caso mixto (c_1 meridiano y c_2 paralelo, o viceversa) no es admisible, ya que el asa se auto-intersectaría. Sea E_1 la corona sumergida en $A \times \{1\}$ cuya frontera son las curvas $\{1\} \times \{-1\} \times S^1$ y $\{1\} \times \{1\} \times S^1$ y sea asimismo E_2 la corona sumergida en $A \times \{1\}$ cuya frontera está formada por $\{-1\} \times \{-1\} \times S^1$ y $\{-1\} \times \{1\} \times S^1$. Exigiendo además que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dichas coronas quedan completamente determinadas. Así, las componentes de la frontera del asa ampliada son toroidales: $A \times \{0\}$, $E_1 \cup ([-1, 1] \times \{1\} \times S^1)$ y $E_2 \cup ([-1, 1] \times \{-1\} \times S^1)$. Supondremos, por el momento, que todas ellas son frontera de toros sólidos, de manera que $N = C \cup N_1 \cup N_2$ sea un toro sólido, donde $\partial C = \partial N \cup \partial N_1 \cup \partial N_2$.

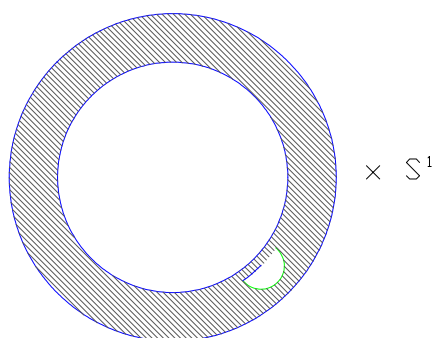


Fig. 2.17: Disco con dos agujeros para c_i $i = 1, 2$ meridianos.



Fig. 2.18: Asa ampliada $C \cong F_2 \times S^1$ con dos curvas de pegada esenciales (meridianos).

Si la pegada de la 1-asa es longitudinal pero las curvas c_i no son paralelos, una de las componentes de la frontera del asa ampliada es un 2-toro cuyo núcleo es un (p, q) -cable del correspondiente núcleo de $T^2 \times \{0\}$. En este caso, el asa engordada es $F_{p+1} \times S^1$, $p \geq 1$, $\partial_- C = A \times \{0\}$ y la órbita de tipo silla es $\gamma = \{*\} \times S^1$, donde $\{*\} \in F_{p+1}$.

En los casos restantes, el asa ampliada resultante es, por tanto, $C \cong F_2 \times S^1$ (véanse las figuras 2.17, 2.18 y 2.19 para el caso en que las curvas de pegada sean meridianos y paralelos de A), la órbita de tipo silla es $\gamma = \{*\} \times S^1$, donde $\{*\} \in F_2$ y $\partial_- C = A \times \{0\}$.

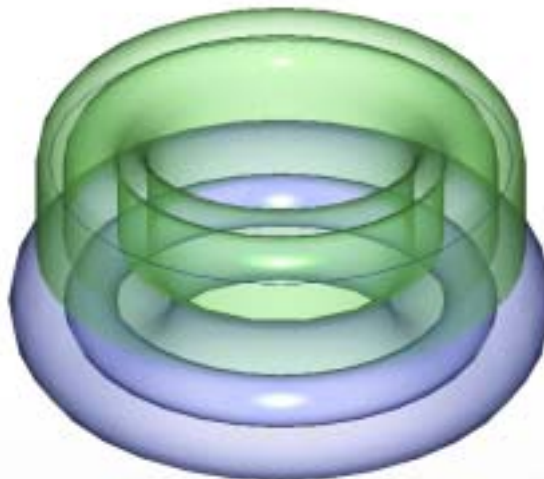


Fig. 2.19: Asa ampliada $C \cong F_2 \times S^1$ con dos curvas de pegada esenciales (paralelos).

Si al menos una componente de ∂C , por ejemplo ∂N_2 , no es borde de un toro sólido sumergido en N , el asa ampliada es equivalente a $T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$, donde $N(k)$ es un entorno regular del nudo no trivial k , $\partial_- C = A \times \{0\}$ y $\gamma = \{*\} \times S^1$ es un nudo trivial en $S^2 \times S^1$, para algún punto $\{*\}$ de una sección transversal de C (figura 2.20).



Fig. 2.20: Asa ampliada $C \cong T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$

2. Supongamos que pegamos la 1-asa sobre la unión de dos toros, $A = T_1^2 \cup T_2^2$:

(a) Sean las curvas de pegada c_i no esenciales. Denotamos por D_1^2 y D_2^2 a los 2-discos tales que $D_i^2 \subset T_i^2 \times \{1\}$ y $c_i = \partial D_i^2$. Distinguiremos los siguientes casos:

- i. Si $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$, (véase la figura 2.21), el asa ampliada es $C \cong B\tau \# D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$, donde $B\tau$ es un bitoro sólido y $\partial W_i = T_i^2 \times \{0\}$. Dado que una de las componentes de la frontera es una esfera S^2 , aplicando el teorema de Poincaré-Hopf, existe un punto de equilibrio en la 3-celda cuya frontera es la esfera S^2 , lo que no es compatible con un flujo NMS.

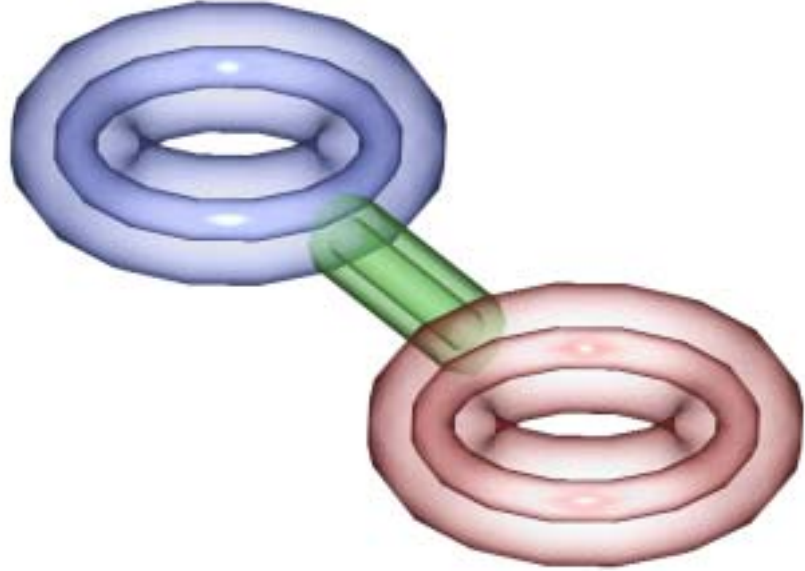


Fig. 2.21: Asa ampliada $C \cong B\tau \# D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$

- ii. Si $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y $j = 1$ para $i = 2$ (o viceversa), la frontera del asa ampliada tiene componentes toroidales: $T_1^2 \times \{0\}$, $T_2^2 \times \{0\}$, $\partial D^2 \times S^1 \cong T_1^2 \times \{1\}$ y $D_1^2 \cup (\{0\} \times [-1, 1] \times S^1) \cup T_2^2 \times \{1\}$. Esta última componente está sumergida en la 3-celda de frontera $S = D_1 \cup (\{0\} \times [-1, 1] \times S^1) \cup D_2$. De este modo, el asa ampliada es equivalente a la suma conexas: $T^2 \times [0, 1] \# T^2 \times [0, 1]$ (como

puede observarse en las figuras 2.22 y 2.23). La órbita de tipo silla γ es un nudo trivial de C y $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$.

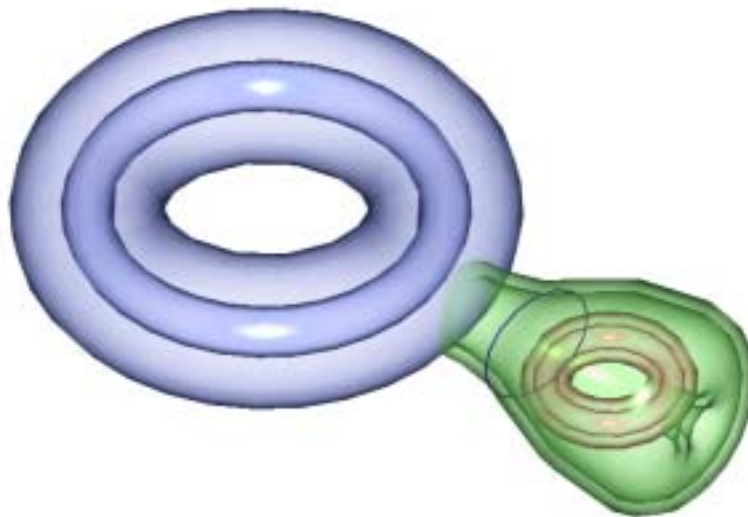


Fig. 2.22: Asa ampliada $T_1^2 \times [0, 1] \# T_2^2 \times [0, 1]$

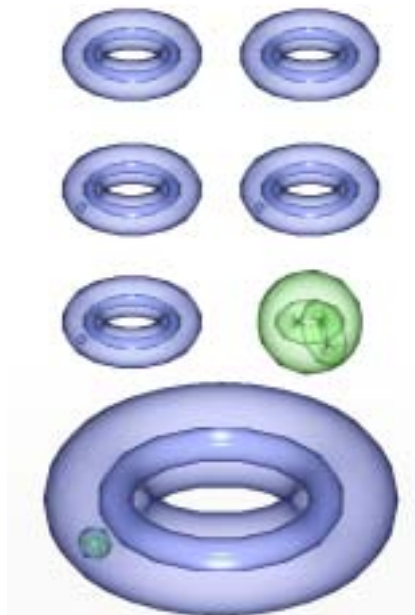


Fig. 2.23: Suma conexas de dos toros $T^2 \times [0, 1]$

- (b) Supongamos que c_1 es curva no esencial de T_1^2 y c_2 es curva esencial de T_2^2 ; entonces existe un disco $D_1^2 \subset T_1^2 \times \{1\}$ tal que $\partial D_1^2 = c_1$. Además, por continuidad, la curva esencial c_2 debe ser un meridiano o un paralelo de T_2 .

Notemos que la pegada esencial del asa sobre T_2^2 separa la superficie $T_2^2 \times \{1\}$ en dos coronas: $E \cong [-1, 1] \times \{1\} \times S^1$ y su complementario, de manera que E se identifica con una de las dos componentes de la frontera negativa del asa. Así, la 2-esfera:

$$S = \overset{i}{T_2^2 \times \{1\}} - E \overset{\zeta}{\cup} \overset{i}{\{\pm 1\} \times [-1, 1] \times S^1} \overset{\zeta}{\cup} D_1'$$

es frontera de una 3-celda sumergida en el asa ampliada tal que $T_2^2 \times \{0\} \subset \bar{S}$, donde D_1' es un disco tal que $D_1 \subset D_1' \subset T_1^2 \times \{1\}$ y $\partial D_1' = \{1\} \times \{-1\} \times S^1$. De este modo, el asa ampliada resultante es $C \cong T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$ (véanse figuras 2.24 y 2.25 para c_2 meridiano y paralelo de T_2 , respectivamente), γ es un nudo trivial de C y la frontera negativa del asa ampliada será $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$.

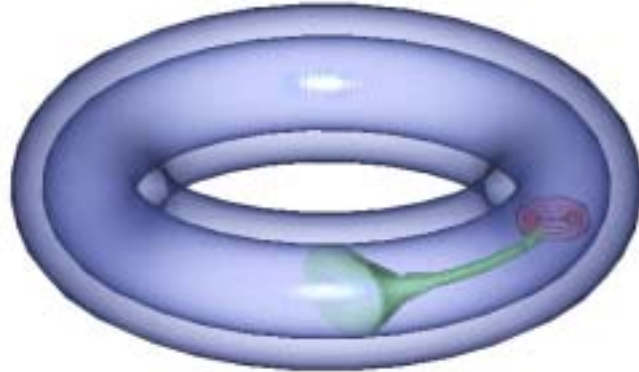


Fig. 2.24: Asa ampliada $T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$ con curva esencial meridiano.

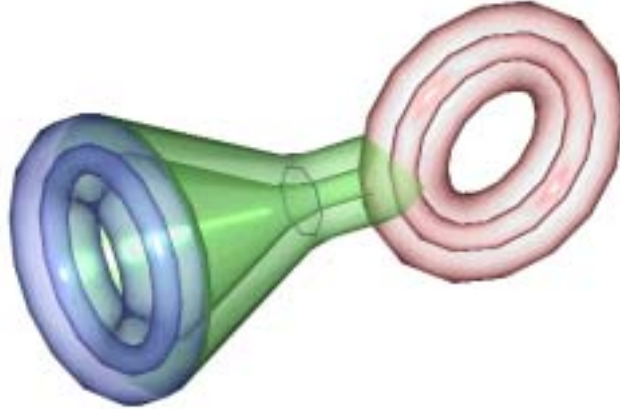


Fig. 2.25: Asa ampliada $T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$ con curva esencial paralelo.

- (c) Si c_1 y c_2 son esenciales, han de ser ambas paralelos, o bien paralelo y meridiano por la continuidad de la 1-asa al ser pegada a ambos toros. En ambos casos, las componentes del asa ampliada son toroidales: $T_1^2 \times \{0\}$, $T_2^2 \times \{0\}$ y $\partial D^2 \times S^1 \cong (T_1^2 \times \{1\} - E_1) \cup (\{\pm 1\} \times [-1, 1] \times S^1) \cup (T_2^2 \times \{1\} - E_2)$, donde E_i son sendas coronas sobre $T_i^2 \times \{1\}$, $E_i \cong [-1, 1] \times \{1\} \times S^1$, tales que cada corona se identifica con una de las componentes de la frontera negativa de R_1 . Así, el asa ampliada es $C \cong F_2 \times S^1$, de manera que $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{1\}$ y $\gamma = \{*\} \times S^1$ para algún punto $\{*\} \in \text{int}(F_2)$.

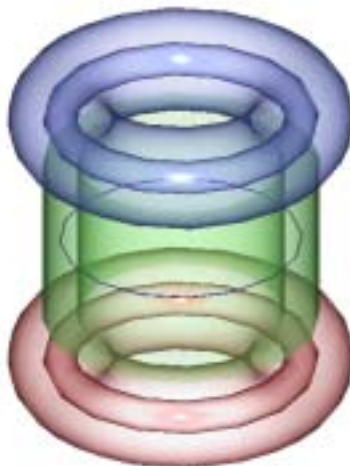


Fig. 2.26: Asa ampliada $C \cong F_2 \times S^1$ obtenida al pegar R_1 sobre $A = T_1 \cup T_2$ mediante dos paralelos.

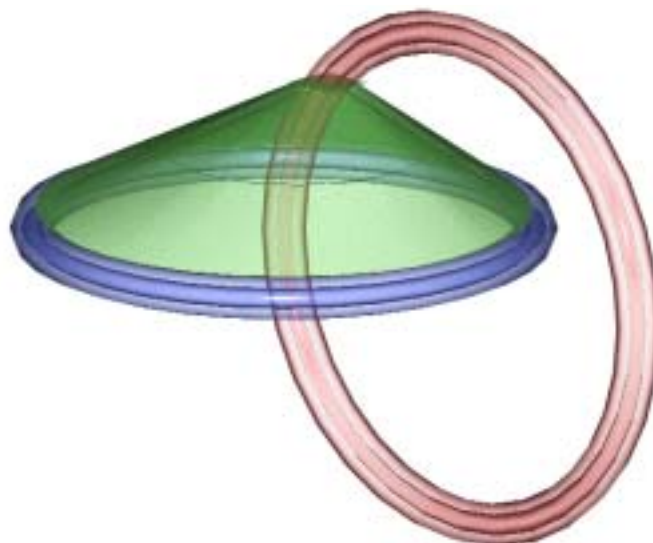


Fig. 2.27: Asa ampliada $C \cong F_2 \times S^1$ obtenida al pegar R_1 sobre $A = T_1 \cup T_2$ mediante un meridiano y un paralelo.

En las figuras 2.26 y 2.27 puede verse el asa ampliada en aquellos casos en que las curvas de pegada son, respectivamente, paralelos o meridiano y paralelo, respectivamente.

II. Supongamos R_1 no es orientable. Distinguiremos dos casos en función del tipo de homotopía de la curva de pegada c :

1. Si c es no esencial en $T^2 \times \{1\}$, es frontera de un disco D^2 , entonces $D^2 \cup (MB \times \{0\}) \subset C$ sería un plano proyectivo sumergido en S^3 , con lo que llegamos a una contradicción (véase [9]).
2. Supongamos que c es esencial en $T^2 \times \{1\}$; $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ es la frontera del entorno tubular \overline{W} de un $(2, 1)$ -cable de $\{0\} \times S^1$ en $D^2 \times S^1$ y $\gamma = \{0\} \times S^1$, lo que demuestra $C \cong D^2 \times S^1 - \text{int}^1 \overline{W}$ (véase fig. 2.28).

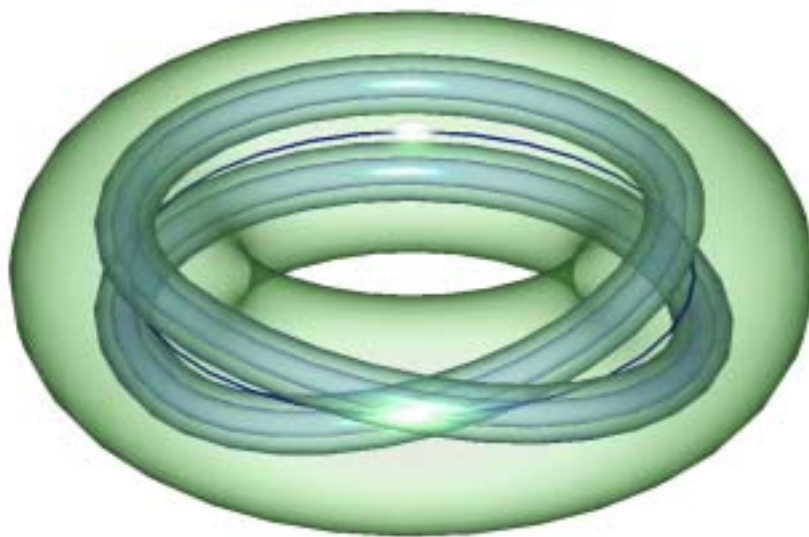


Fig. 2.28: Asa ampliada $C \cong D^2 \times S^1 - \text{int } \overline{W}^c$.

■

2.4.3 Cadenas con índice en S^3

Siguiendo los resultados previos, es posible caracterizar el conjunto de cadenas con índice formado por las órbitas cerradas de un flujo NMS sobre S^3 en términos de un generador y seis operaciones.

Según los resultados de M. Wada, las cadenas en S^3 deben ser nudos toroidales iterados o suma conexa de nudos iterados (según la notación de Fomenko ([26]), nudos generalizados). Esto invalida el siguiente resultado de J.W. Morgan [41]:

Teorema 8 (J.W. Morgan, [41]) (a) Si $K \subset S^3$ es una órbita periódica atractora de un flujo NMS sobre S^3 , entonces K es un nudo toroidal iterado.
 (b) Si $K \subset \tau$ es una órbita periódica atractora de un flujo NMS sobre τ , entonces K es un nudo toroidal iterado en τ .

En el siguiente teorema, Wada [51] proporciona la caracterización de las cadenas con índice mediante seis operaciones, que define en términos de suma separada, suma conexa y cableado, partiendo de una cadena generadora: la $(0, 2)$ -cadena de Hopf.

Tal y como se definió en la sección 2.2, la suma conexa de dos cadenas ($l_1 \# l_2$) se obtiene componiendo una componente k_1 de l_1 y una componente k_2 de l_2 , ambas con índices 0 ó 2. El índice de la componente $k_1 \# k_2$ será igual al índice de k_1 o al de k_2 . Además, dadas dos cadenas con índice, l_1 y l_2 , denotamos por $l_1 \cdot l_2$ a la suma separada de l_1 y l_2 (es decir, la unión de dos cadenas de manera que existe una esfera S^2 que las separa).

Teorema 9 (M. Wada, [51]) *Toda cadena con índices formada por las órbitas cerradas de un flujo NMS sobre S^3 se obtiene a partir de la $(0, 2)$ -cadena de Hopf aplicando las seis operaciones siguientes:*

1. $I(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2 \cdot u$, donde u es un nudo trivial con índice 1.

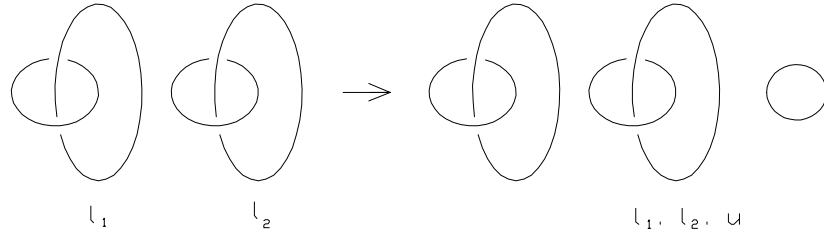


Fig. 2.29: Operación I de Wada aplicada sobre dos cadenas de Hopf.

2. $II(l_1, l_2) = l_1 \cdot (l_2 - k_2) \cdot u$, donde k_2 es una componente de l_2 con índice 0 ó 2.

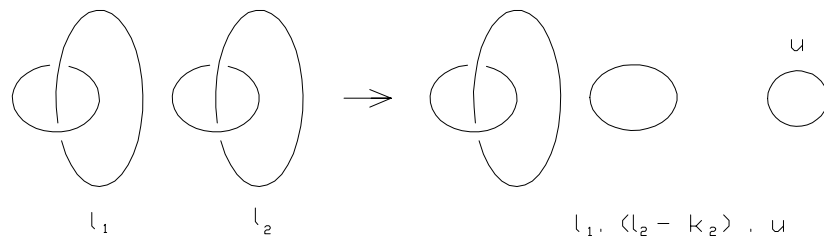


Fig. 2.30: Operación II de Wada aplicada sobre dos cadenas de Hopf.

3. $III(l_1, l_2) = (l_1 - k_1^\alpha) \cdot (l_2 - k_2^{2-\alpha}) \cdot u$, donde k_1 es una componente de l_1 con índice α y k_2 es una componente de l_2 con índice $2 - \alpha$, donde α toma los valores 0 ó 2.

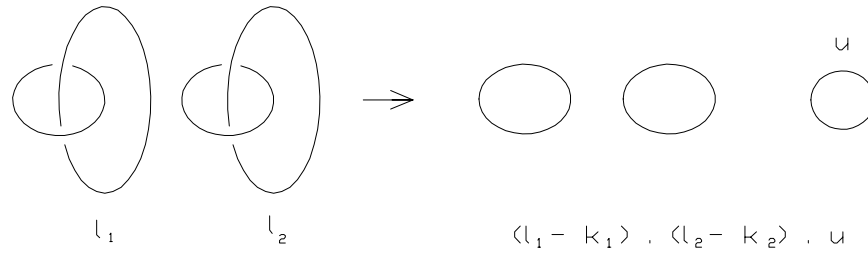


Fig. 2.31: Operación III de Wada aplicada sobre dos cadenas de Hopf.

4. $IV(l_1, l_2) = (l_1 \# l_2) \cup m$, donde m es un meridiano de $k_1 \# k_2$ con índice 1.

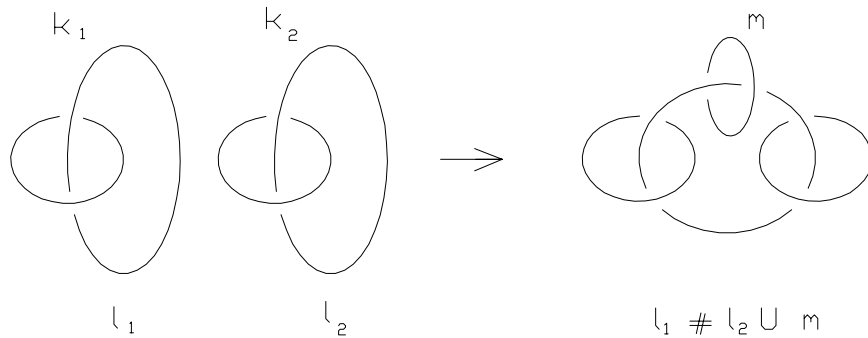


Fig. 2.32: Operación IV de Wada aplicada sobre dos cadenas de Hopf.

5. $V(l) = l \cup c^\alpha \cup c^1$. La operación V sobre una cadena l consiste en elegir una componente k de l , con índice 0 ó 2, y reemplazar $N(k, S^3)$ por $D^2 \times S^1$ conteniendo tres círculos con índice; $\{0\} \times S^1$, c^α y c^1 ; c^α y c^1 son (p, q) -cables paralelos sobre $\partial N(\{0\} \times S^1, D^2 \times S^1)$, siendo p el número de vueltas longitudinales y q el número de vueltas transversales.

Los índices de $\{0\} \times S^1$ y c^α son 0 ó 2, con uno de ellos igual al de k . El índice de c^1 es 1.

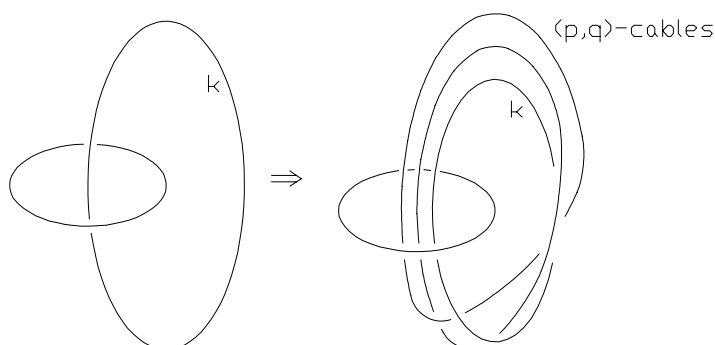


Fig. 2.33: Operación V de Wada aplicada sobre dos cadenas de Hopf.

6. $VI(l) = l \cup c^\alpha$. La operación VI sobre una cadena l consiste en elegir una componente k de l con índice $\alpha = 0$ ó 2 , y reemplazar $N(k, S^3)$ por $D^2 \times S^1$ conteniendo dos círculos con índice; $\{0\} \times S^1$ y el $(2, q)$ -cable c^α de $\{0\} \times S^1$. El índice de $\{0\} \times S^1$ es 1, y el índice de c^α es igual al índice de k .

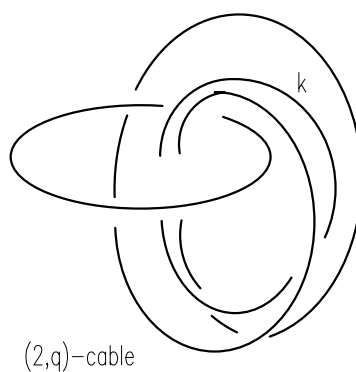


Fig. 2.34: Operación VI de Wada aplicada sobre una cadena de Hopf.

La primera implicación del teorema anterior permite afirmar que toda cadena con índices formada por las órbitas cerradas de un flujo NMS sobre S^3

puede obtenerse aplicando las operaciones descritas, llamadas **operaciones de Wada**, sobre la $(0, 2)$ -cadena de Hopf. La base de la demostración de este resultado es un proceso de inducción sobre el número de órbitas periódicas de índice 1. En este proceso, se comprueba que cada una de las posibles asas ampliadas asociadas a una órbita de tipo silla proporciona una descomposición en asas redondas de S^3 . En cada uno de los casos, la cadena de órbitas periódicas formada por los centros de los toros de dicha descomposición corresponde a una de las operaciones definidas en el enunciado.

Capítulo 3

Descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$

En el estudio de un sistema dinámico hemos de fijar nuestra atención en el conjunto de sus órbitas periódicas. La estructura de este conjunto puede ser muy compleja; sin embargo, si el espacio de fases es una variedad tridimensional y hay un número finito de órbitas periódicas, es posible caracterizar el conjunto de todas las órbitas periódicas como una cadena. Un paso previo para dicha caracterización es la descomposición en asas redondas del espacio de fases, ya que es en el centro de los toros de dicha descomposición donde están situadas las órbitas periódicas del sistema.

A continuación consideraremos flujos NMS sobre una 3-variedad simple, cerrada y orientable: $S^2 \times S^1$. El interés de esta variedad reside, en primer lugar, en que es una variedad prima, dado que el Teorema de la Descomposición Prima (teorema 3, sección 2.1.1) proporciona la descomposición de toda 3-variedad compacta en términos de suma conexa de variedades primas. Asimismo, es relevante el papel que juega esta variedad en la clasificación de las 3-variedades compactas y orientables que admiten difeomorfismos Morse-Smale (sin puntos o curvas heteroclínicos), obtenida por Bonatti et. al. en [7]: la variedad M es difeomorfa a la 3-esfera S^3 o a la suma conexa de un número finito de copias de $S^2 \times S^1$. Además, es la excepción en numerosos resultados previos (Kobayashi [37], Morgan [41]), en los que la atención se centra sobre variedades irreducibles o primas con $S^2 \times S^1$, por lo que no se ha estudiado la descomposición en asas redondas de esta variedad. Siguiendo los trabajos de T. Kobayashi [37] y M. Wada [51], se estudiará a continuación el conjunto de órbitas periódicas de tipo NMS en esta variedad.

Comenzaremos con un análisis de las características específicas de $S^2 \times S^1$; en particular, la existencia de superficies bidimensionales no separadoras y la pegada de asas sobre superficies bidimensionales.

Posteriormente centraremos nuestra atención en la descomposición en asas redondas de la variedad. Esta descomposición se obtiene tras el estudio de las asas ampliadas resultantes de la pegada de 1-asas redondas sobre superficies bidimensionales. Las características especiales de $S^2 \times S^1$ respecto a S^3 , objeto del estudio realizado en [51], [53], [54],... hacen que aparezcan nuevos tipos de asas ampliadas (con componentes de la frontera no toroidales) características de $S^2 \times S^1$.

Por último, y basándonos en los resultados obtenidos, estableceremos la descomposición en asas redondas de la variedad junto con el análisis de las superficies bidimensionales que pueden formar parte de la frontera en dicha descomposición (véase [22]).

3.1 Superficies en $S^2 \times S^1$

El comportamiento de un sistema dinámico depende en gran parte de la variedad en que está definido el sistema. Dado que en esta memoria estudiamos flujos de tipo NMS sobre la variedad $S^2 \times S^1$, estamos interesados en aquellas subvariedades en las que el flujo es transversal a sus fronteras. Por tanto, nos interesa conocer las características de las superficies sumergidas en $S^2 \times S^1$, ya que éstas condicionarán el comportamiento del flujo.

En la figura 3.1 representamos una triangulación de una 2-esfera en la que S^2 se obtiene identificando las líneas superiores con las inferiores. De este modo, la variedad $S^2 \times S^1$ puede considerarse como el producto de este romboide por un intervalo cuyos extremos están identificados.

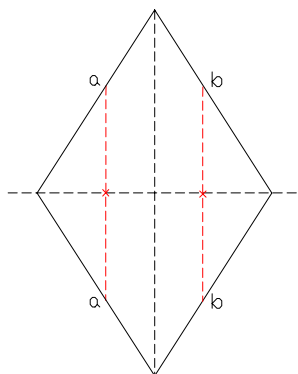


Fig. 3.1: Representación de S^2 .

Asimismo, puede considerarse $S^2 \times S^1$ como la unión de dos toros sólidos $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$ identificando sus fronteras, $D_1^2 \times S^1 \cap D_2^2 \times S^1 = \partial D_1^2 \times S^1 =$

$\partial D_2^2 \times S^1$ de manera que los paralelos de un toro quedan identificados con los del otro; es decir, $S^2 \times S^1$ es el espacio lenticular $L(0, 1)$. De este modo, la variedad puede ser foliada en toros, como se muestra en la figura 3.2.

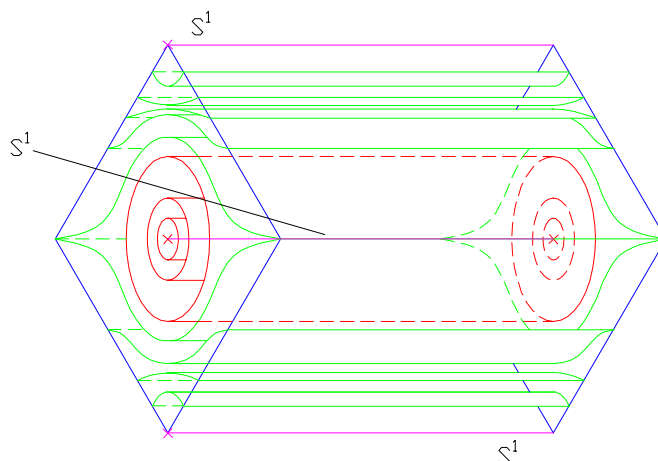


Fig. 3.2: $S^2 \times S^1$ foliado por toros.

Por otra parte, es conocido que una 3-variedad es prima si cada 2-esfera que separa a la variedad es entorno de una 3-celda D^3 . J. Milnor establece en [39] que $S^2 \times S^1$ verifica dicha propiedad. Además, es necesario tener en cuenta que en $S^2 \times S^1$ el complementario de un disco D^3 no es otra 3-celda, al contrario de lo que ocurre en la esfera tridimensional S^3 .

3.1.1 Superficies no separadoras en $S^2 \times S^1$

La más simple de las superficies no separadoras orientables es la esfera no separadora, cuya existencia es la razón por la que $S^2 \times S^1$ no es irreducible (véase sección 2.1). Otras variedades no separadoras orientables pueden obtenerse pegando asas sobre esferas no separadoras, como es el caso de toros y bitoros no separadores.

Por otra parte, G. E. Bredon y J. W. Wood prueban en [9] que el espacio proyectivo no puede sumergirse en una variedad del tipo $M^2 \times S^1$ (siendo M^2 orientable), aunque sí la cinta de Möbius. Además, la botella de Klein no admite ser sumergida en $M^2 \times S^1$ excepto precisamente en el caso $M^2 = S^2$.

Esferas no separadoras

Denotaremos en adelante a las esferas no separadoras por \mathfrak{S}^2 . En la figura 3.3 pueden verse distintas esferas bidimensionales en $S^2 \times S^1$; nótese que no

todas ellas son fronteras de 3-celdas sumergidas en la variedad. Además, $\pi_2(S^2 \times S^1) = Z$, pudiendo considerar como generador del grupo Z una 2-esfera no separadora del tipo $\mathfrak{B}^2 \times \{*\}$.

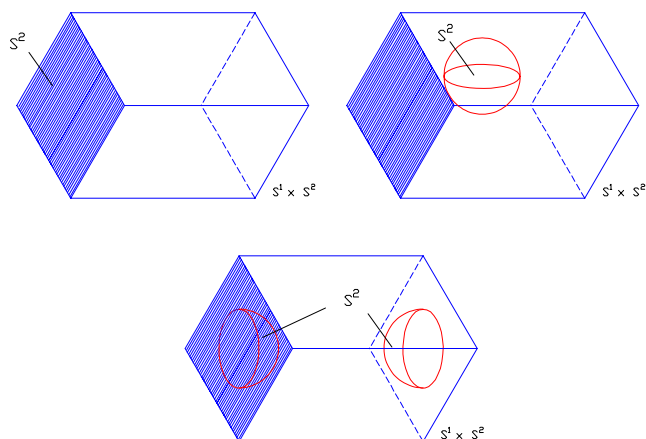


Fig. 3.3: Tres formas diferentes de considerar una 3-bola en $S^2 \times S^1$.

La existencia de esferas no separadoras en $S^2 \times S^1$ es fundamental en el siguiente resultado:

Proposición 44 (Hatcher, [31]) *La única 3-variedad prima, orientable, compacta y conexa que no es irreducible es $S^2 \times S^1$.*

De esta propiedad se deduce que no pueden aplicarse sobre $S^2 \times S^1$ ciertos resultados relativos a la descomposición en asas redondas de 3-variedades, tales como el teorema 4 (Morgan, [41]), según el cual la frontera de la descomposición en asas redondas de una variedad compacta, irreducible y orientable está compuesta por uniones de toros. En la sección 3.2 establecemos el tipo de variedades que aparecen en una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$.

Definición 45 *Un asa es una superficie de la forma $h = S^2 - (D_1^2 \cup D_2^2)$, donde S^2 es una 2-esfera y D_i^2 , $i = 1, 2$, son 2-discos. Si S^2 es una esfera separadora, también lo será el asa. Del mismo modo, diremos que el asa h es no separadora si la esfera es no separadora, y la denotaremos por \mathfrak{A} .*

Lema 46 *Un asa separadora pegada sobre dos esferas no separadoras genera una 2-esfera separadora.*

Demostración. Al pegar un asa h sobre dos esferas, es obvio que se obtiene otra esfera. Además, por definición del asa h , ésta es separadora:

$$\mathfrak{B}_1^2 - D_1^2 \cup \mathfrak{B}_2^2 - D_2^2 \cup h = S^2$$

■

Toros no separadores

Hemos visto que, en $S^2 \times S^1$, hay 2-esferas que no son frontera de 3-celdas. Además, se hace necesario distinguir el carácter de un toro sólido en función de su posible submersión en una 3-celda.

Definición 47 Dado un toro sólido $D^2 \times S^1$ en la variedad $S^2 \times S^1$, diremos que es local si está sumergido en una bola D^3 . En otro caso, diremos que es un toro global.

Esta propiedad de los toros sólidos puede extenderse de forma evidente a las órbitas periódicas situadas en el centro de los 2-toros separadores.

Dado que toda órbita periódica de un sistema dinámico sobre una 3-variedad tiene un nudo asociado, podemos asociar también características de los nudos en $S^2 \times S^1$ a sus órbitas periódicas correspondientes, y viceversa. En general, un nudo en $S^2 \times S^1$ es global si su clase de homotopía contiene al elemento unidad del grupo $Z = \pi_1(S^2 \times S^1)$. Así, diremos que una órbita periódica es local o global en $S^2 \times S^1$ si lo es su nudo asociado.

Por otra parte, como corolario del lema 46, pueden obtenerse toros separadores partiendo de la definición de asa y de dos esferas no separadoras:

Corolario 48 $T^2 = \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + h_1 + h_2$.

Utilizaremos a continuación estos resultados para construir un toro T^2 mediante la suma de una 2-esfera S y un asa h . Pueden darse los siguientes casos, dependiendo del carácter separador o no, tanto de la esfera como del asa:

1. $\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{h} = T^2$.

Por definición del asa,

$$h \cap \mathfrak{B}^2 = \{c_1, c_2\} \text{ tales que } \exists D_1^2, D_2^2 \subset \mathfrak{B}^2, c_i = \partial D_i^2, i = 1, 2$$

Estos dos discos nos permiten cerrar el asa y obtener otra esfera no separadora:

$$h \cup D_1^2 \cup D_2^2 \cong \mathfrak{B}^2$$

Nuevamente por definición del asa, el toro resultante T es separador (véase corolario 48).

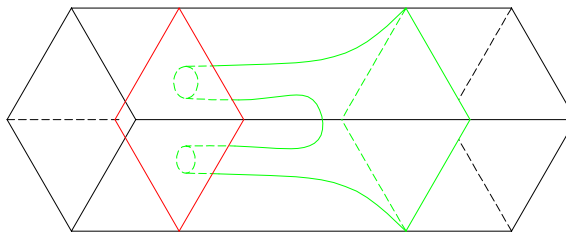


Fig. 3.4: Toro separador (asa no separadora)

2. $\mathfrak{b}^2 + h = \mathfrak{p}^2$.

Si el asa es separadora, también lo es la esfera $S^2 = h \cup D_1^2 \cup D_2^2$, siguiendo la notación del caso anterior. Por definición de asa, el toro obtenido al pegar h sobre \mathfrak{b}^2 es no separador, y lo denotaremos por \mathfrak{p}^2 . Es evidente que un toro no separador no puede sumergirse en una 3-celda, por lo que los toros no separadores son globales en $S^2 \times S^1$ (véase fig. 3.5).

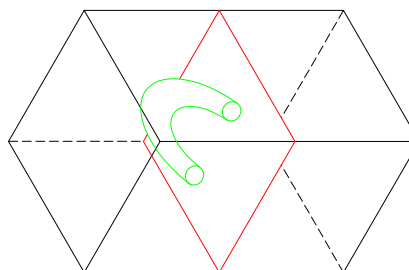


Fig. 3.5: Toro no separador (asa separadora).

3. $S^2 + h = T^2$.

Si pegamos sobre S^2 un asa separadora, el resultado será, obviamente, un 2-toro separador T^2 .

4. $S^2 + \mathfrak{h} = \mathfrak{p}^2$.

Si el asa es no separadora, el 2-toro resultante es no separador, \mathfrak{p}^2 y es equivalente al caso 2 (véase fig. 3.6).

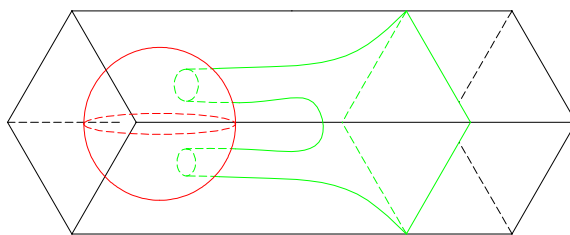


Fig. 3.6: Toro no separador (asa no separadora).

Como consecuencia de los conceptos previamente definidos, puede establecerse el siguiente resultado:

Lema 49 (a) $\mathfrak{S}^2 * T^2$; (b) $\mathfrak{P}^2 * T^2$.

Demostración. Si el toro separador es global, entonces intersecta con cualquier 2-esfera no separadora, por lo que ni \mathfrak{S}^2 ni \mathfrak{P}^2 pueden sumergirse en el toro separador.

Si el toro separador es local, podrá considerarse sumergido en una 3-celda, la cual no puede contener a ninguna superficie no separadora. ■

Sin embargo, es posible probar que, dado un 2-toro separador en $S^2 \times S^1$, siempre encontraremos un toro sólido, al menos por uno de sus lados.

Teorema 10 (del toro sólido en $S^2 \times S^1$. Bonatti et. al., [6]) Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ un 2-toro separador y sea $h : T^2 \rightarrow S^2 \times S^1$ una submersión diferenciable tal que el homomorfismo $h_* : Z^2 \rightarrow Z$ inducido por h en los correspondientes primeros grupos de homotopía no sea trivial. Entonces existe una submersión diferenciable $H : D^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$ tal que $H(\partial D^2 \times S^1) = T^2$.

Botellas de Klein

Sabemos que la botella de Klein, que denotaremos en adelante por K^2 , puede sumergirse en $S^2 \times S^1$. Al igual que en el caso de los toros no separadores, puede obtenerse mediante la suma de un asa h y una esfera no separadora \mathfrak{S}^2 (véase la fig. 3.7).

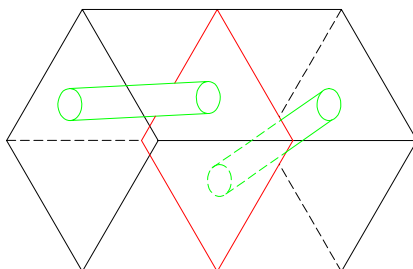


Fig. 3.7: Botella de Klein en $S^2 \times S^1$

Como veremos en el teorema 11, es posible obtener dicha superficie como variedad invariante al estudiar las asas ampliadas en $S^2 \times S^1$. Para representar en $S^2 \times S^1$ dicha superficie hacemos uso de la no irreducibilidad de la variedad mediante una "abertura" no separadora de la frontera. Podemos apreciar en la figura 3.8 una representación de $K^3 = K^2 \times I$ sumergida en la variedad.

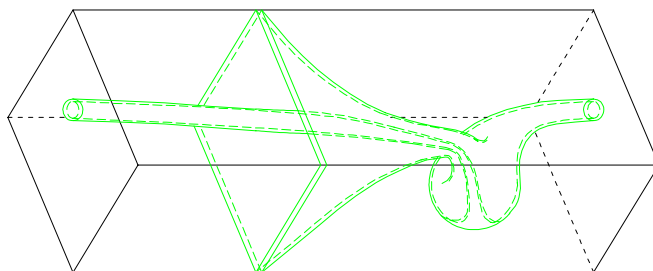
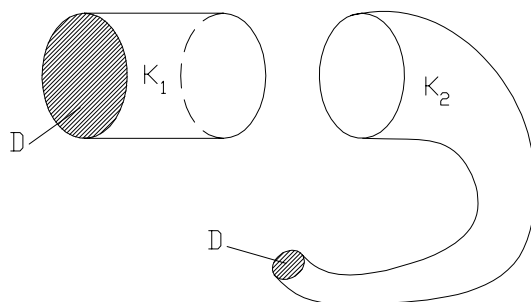


Fig. 3.8: $K^2 \times I$ en $S^2 \times S^1$.

Además, por ser la botella de Klein una 2-superficie global y no separadora, puede probarse que no es posible encontrar en la variedad dos botellas de Klein distintas:

Lema 50 *En $S^2 \times S^1$ cualesquiera dos botellas de Klein se intersectan.*

Demostración. Basta con demostrar que $S^2 \times S^1 - K^2$ no puede contener una botella de Klein: en primer lugar, toda variedad que contenga a K^2 tiene asociada una esfera no separadora S^2 . La figura 3.9 representa K^2 si identificamos D con D a través de K_1 y pegamos las otras circunferencias separadas.

Fig. 3.9: Representación de una botella de Klein K^2 .

La identificación obliga a que la esfera resultante de cerrar K_1 añadiendo dos discos límite sea no separadora.

Por otra parte, en una submersión de K^2 en $S^2 \times S^1$, ésta ha de ser global, ya que de otro modo podría considerarse sumergida en S^3 ($S^2 \times S^1 \cong S^2 \times S^1 \# S^3$). Por ello toda esfera sección de la variedad queda dividida por K^2 en discos y el grupo de homotopía del complementario de los discos en esta esfera no es trivial. Así, $S^2 \times S^1 - K^2$ no admite una esfera no separadora y no puede contener a otra botella de Klein. ■

El siguiente resultado establece que, en $S^2 \times S^1$, todas las botellas de Klein son difeomorfas a una botella de Klein estándar, denotada por K .

Proposición 51 (Bonatti et.al., [7]) *Dada una botella de Klein K' sumergida de forma diferenciable en $S^2 \times S^1$, existe un difeomorfismo que conserva la orientación $\phi \in \text{Diff}_+(S^2 \times S^1)$ tal que $\phi \circ K' = K$. Además, puede elegirse ϕ tal que $\phi_* : \pi_1(S^2 \times S^1) \rightarrow \pi_1(S^2 \times S^1)$ sea la identidad.*

Nótese que, a pesar de que K^2 sea una superficie no separadora, la frontera de K^3 es un toro separador T^2 .

3.2 Descomposición de $S^2 \times S^1$ en asas redondas

En el capítulo 2 se estudiaron algunos conceptos básicos sobre asas redondas, asas ampliadas y descomposición en asas que nos serán útiles en esta sección. Previamente se ha definido el carácter global o local de los nudos asociados a las asas redondas en la descomposición de una variedad. Por tanto, es necesario analizar cómo afecta dicho carácter al pegar un 1-asa sobre variedades bidimensionales que pueden ser, a su vez, globales o locales.

3.2.1 Lemas previos

A continuación demostraremos algunos resultados necesarios para el estudio de las asas ampliadas en $S^2 \times S^1$, centrados en el carácter global o local de los nudos asociados a las asas en la descomposición de $S^2 \times S^1$.

Lema 52 *Una 1-asa redonda sobre $S^2 \times S^1$ asociada a un nudo global no puede pegarse sobre toros locales.*

Demostración. Supongamos que la 1-asa es orientable y denotemos por $c_1 = \varphi(\{0\} \times \{-1\} \times S^1)$ y $c_2 = \varphi(\{0\} \times \{1\} \times S^1)$ a las dos curvas de pegada, cerradas y simples.

Las curvas c_i , $i = 1, 2$, son homotópicamente equivalentes al centro del asa, ya que pueden considerarse como la intersección de la variedad estable de la órbita periódica de tipo silla con la frontera del asa y el flujo define la homotopía. Así, si la 1-asa está asociada a un nudo global, las curvas de pegada son también esenciales en $S^2 \times S^1$. Por otra parte, todas las curvas cerradas sobre un toro local son triviales en $S^2 \times S^1$, por lo que no pueden ser identificadas con c_i , $i = 1, 2$.

Si la 1-asa es no orientable ha de pegarse esencialmente, ya que, en otro caso, tendríamos un plano proyectivo sumergido en $S^2 \times S^1$, lo que nos llevaría a una contradicción [9]. Así, la curva de pegada ha de ser esencial en la variedad. ■

Lema 53 *Si γ es un nudo local asociado a una 1-asa redonda en $S^2 \times S^1$, dicha 1-asa redonda puede pegarse de manera esencial a un toro global sólo mediante círculos transversales.*

Demostración. Si γ es un nudo local, puede pegarse de manera esencial mediante círculos transversales a un toro sólido global ya que este tipo de curvas son topológicamente equivalentes a curvas triviales. Obviamente, éste no es el caso de las curvas esenciales longitudinales sobre $S^2 \times S^1$. ■

Siguiendo un razonamiento análogo, se prueba el siguiente resultado:

Lema 54 *La pegada no esencial de una 1-asa implica una órbita de tipo silla local.*

Demostración. La órbita de tipo silla γ es homotópicamente equivalente a las curvas de pegada, así que una curva de pegada no esencial induce el tipo de homotopía trivial sobre γ . ■

Es fácil observar que:

Lema 55 *Dado m un (p, q) -cable de un nudo k esencial en un toro sólido, la variedad obtenida al considerar un entorno toroidal del nudo k y del (p, q) -cable m , es el fibrado sobre S^1 , $F_{p+1} \times S^1$, donde F_{p+1} es un disco con $p + 1$ agujeros.*

Basándonos en este resultado, concluiremos en la siguiente sección que el asa ampliada generada al pegar una 1-asa sobre un toro por medio de dos nudos (p, q) -toroidales es el fibrado sobre S^1 , $F_{p+1} \times S^1$.

3.2.2 Clasificación de asas ampliadas en $S^2 \times S^1$

A continuación, y basándonos en los resultados anteriores, construiremos la descomposición en asas redondas de la variedad, encontrando todas las posibles formas de generar un asa ampliada en $S^2 \times S^1$.

Consideremos una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$,

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \subset M_N = S^2 \times S^1$$

$$M_i = \bigcup_{j=1}^i C_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Cada asa ampliada C_j es de la forma

$$C_j = A \times [0, 1] \underset{\varphi}{\Big[} E_s \oplus E_u$$

donde A es unión de componentes de ∂M_j , $E_s \oplus E_u$ es la suma de Whitney de los discos E_s y E_u sobre S_1 y la imagen de la aplicación por la que pegamos el asa

$$\varphi : E_s \oplus (\partial E_u) \rightarrow A \times \{1\}$$

intersecta cada componente de $A \times \{1\}$. Sea $\partial_- C_j = A \times \{0\}$ y consideremos C_j junto con $\partial_- C_j$ y el centro γ como la 0-sección de $E_s \oplus E_u$. Sabemos, además, que la componente C_j asociada a una 0 ó 2-asa es un toro sólido.

En lo sucesivo consideraremos que pegamos el 1-asa R_1 sobre $A \times \{1\} \subset \partial_+ C_j$. No obstante, es posible hacer un razonamiento análogo considerando que el 1-asa se pega sobre $\partial_- C_j = A \times \{0\}$, obteniéndose el mismo asa ampliada. Sin embargo, en el capítulo próximo, veremos que al considerar las cadena con índices asociadas a la descomposición en asas el flujo NMS es el inverso.

62CAPÍTULO 3. DESCOMPOSICIÓN EN ASAS REDONDAS DE $S^2 \times S^1$

Con el objetivo de obtener la descomposición en asas redondas de S^3 , Wada [51] y Yano [53] analizaron el tipo de asas ampliadas que podían encontrarse en dicha variedad. Ambos emplearon un resultado de Morgan [41], según el cual toda variedad con frontera vacía, compacta, orientable e irreducible que admita una descomposición en asas redondas verifica que todas las componentes de la frontera de la descomposición son toroidales. Basándose en la aplicación sobre S^3 de este resultado, concluyeron que la construcción de asas ampliadas sólo podía tener lugar al pegar 1-asas sobre uniones de toros bidimensionales. Sin embargo, sabemos que dicho resultado no es aplicable a $S^2 \times S^1$, ya que esta variedad no es irreducible. De hecho, veremos a continuación cómo aparecen en la descomposición en asas de $S^2 \times S^1$ componentes no toroidales de la frontera, tales como bitoros y esferas no separadoras. Estas superficies no separadoras son las componentes de la frontera de la suma conexas de un bitoro sólido y una 3-celda, que denotaremos por $B\tau \# D^3$. Además, denotaremos por W al entorno toroidal de una órbita periódica y por \overline{W} al entorno toroidal de un $(2, q)$ -cable.

Teorema 11 *Sea γ una órbita periódica de tipo silla en el centro de una 1-asa redonda R_1 . El asa ampliada asociada C en $S^2 \times S^1$ es equivalente a uno de los siguientes casos:*

1. $C \cong B\tau \# D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$ es global, donde $\partial_- C = \partial W_1 \cup \partial W_2 = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$, T_i locales, $i = 1, 2$, y la órbita de tipo silla γ es un nudo trivial local.
2. $C \cong B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$ es global, donde $\partial_- C = \partial W = T^2 \times \{0\}$, T^2 local y γ es un nudo trivial local.
3. $C \cong T_1^2 \times [0, 1] \# T_2^2 \times [0, 1]$, donde $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$, T_2^2 es local y la órbita γ es un nudo trivial local.
4. $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, donde $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$ o $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ y γ es un nudo trivial local.
5. $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$, donde $\partial_- C = \partial D^2 \times S^1$ y γ es un nudo trivial local.
6. $C \cong S^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ es global, donde $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ y γ es un nudo trivial local.
7. $C \cong T^2 \times [0, 1] - N(k') \cong F_{p+1} \times S^1$, $p \geq 1$, donde k' y γ son (p, q) -cables de una componente $k = \{*\} \times S^1$ con $\{*\} \in \text{int}(F_{p+1})$ y $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$ o $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$.

8. $C \cong T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$ es local, donde $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$, $N(k)$ es un entorno regular de un nudo no trivial k y $\gamma = \{*\} \times S^1$ para algún punto $\{*\}$ de una sección transversal de C .
9. $C \cong K^3 - \text{int}(W)$ es global, donde W es un toro sólido global de frontera $\partial W = \partial_- C = T^2 \times \{0\}$ y γ es un nudo trivial global.
10. $C \cong D^2 \times S^1 - \text{int} \overset{\mathbb{C}}{\overline{W}}$, donde \overline{W} es un entorno tubular del $(2, q)$ -cable de $\{0\} \times S^1$ en $D^2 \times S^1$, $\partial_- C = \partial \overline{W}$ y $\gamma = \{0\} \times S^1$.

Demostración. Consideremos la aplicación mediante la cual se pegan las asas redondas:

$$\varphi : E_s \underset{S^1}{\text{L}} (\partial E_u) \rightarrow A \times \{1\}$$

donde A es la superficie sobre la que se pega la 1-asa: en primer lugar consideraremos que A es un toro o unión de toros. El posterior análisis de la frontera de las asas ampliadas resultantes determinará qué tipo de superficies no toroidales pueden definir A .

Utilizando la notación definida en el lema 43, obtendremos las distintas asas ampliadas distinguiendo en primer lugar si R_1 es orientable o no, para considerar a continuación el tipo de homotopía de las curvas de pegada. Además, en $S^2 \times S^1$ la 1-asa puede ser no separadora, por lo que se estudiará también esta posibilidad en cada caso.

I. Consideremos en primer lugar que R_1 es orientable:

1. Supongamos que $A = T^2$. Pueden darse los siguientes casos:

(a) Sean c_1 y c_2 curvas triviales. Sabemos que existe un disco D_i^2 sobre $A \times \{1\}$ cuya frontera coincide con c_i y que contiene a una de las coronas limitadas por c_i , $A_{n_j}^i$.

a.1. Si $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$, entonces, al igual que en el caso correspondiente del lema 43, una componente de la frontera del asa ampliada es la 2-esfera S .

Pueden darse dos casos en función de si la 1-asa es, o no, separadora:

i) Si R_1 es separadora, entonces el 1-asa encerrará una 3-celda, cuya componente asociada en la frontera es S (véase la figura 3.10 para A global). Aplicando el teorema de Poincaré-Hopf será necesaria la existencia de puntos de equilibrio en dicha 3-celda y por tanto el flujo no será NMS.

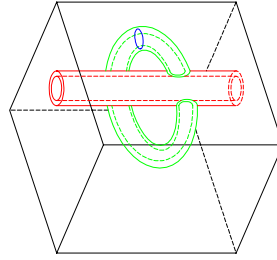


Fig. 3.10: Caso no admisible de pegada no esencial sobre un toro global

ii) Si, la 1-asa y , por tanto, la esfera S es no separadora, A deberá ser un toro local (si fuese global intersectaría con S). El asa ampliada resultante será equivalente a $B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$, donde S define la suma conexas y W es un toro sólido de frontera $\partial W = T^2 \times \{0\}$ (figura 3.11), que corresponde al caso (2) del enunciado. La órbita de tipo silla γ es un nudo trivial local y la frontera negativa del asa ampliada es $\partial_- C = \partial W$ local ($\partial_+ C = B\mathfrak{b}^2 \cup \mathfrak{b}^2$).

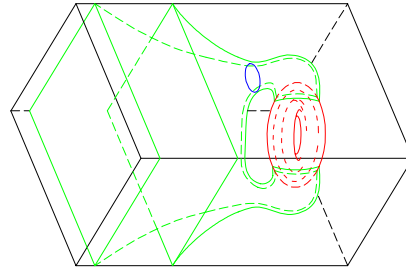


Fig. 3.11: $C \cong B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$

a.2. Si se verifica $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$ y $D_2^2 \subset D_1^2$ (o $D_1^2 \subset D_2^2$), distinguiremos entre asa separadora y asa no separadora:

i) Consideremos R_1 separadora. De forma análoga a lo demostrado para el caso correspondiente en S^3 , el asa ampliada es equivalente a la suma conexas $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, donde $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ y γ es un nudo trivial local (caso (4) del enunciado). Tanto el asa ampliada como su frontera negativa serán globales si y sólo si A es global (véase la figura 3.12).

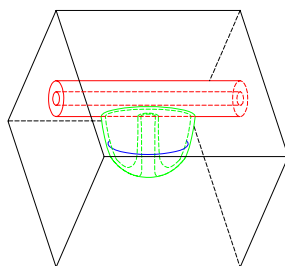


Fig. 3.12: $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ global, R_1 separadora

ii) Si R_1 es no separadora, por ser triviales las curvas de pegada, ésta no puede tener lugar sobre un toro global, ya que ambos se intersectarían. Al pegar la 1-asa no separadora sobre un toro local, generamos un asa ampliada local cuya frontera tiene tres componentes toroidales y locales, dos de ellas no separadoras y una tercera, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$, separadora (figura 3.13). Además, la órbita de tipo silla asociada a la 1-asa es un nudo trivial local en C . También en este caso el asa ampliada es del tipo (4), equivalente a la suma conexa $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, aunque la esfera sumergida en C que genera dicha suma conexa es no separadora.

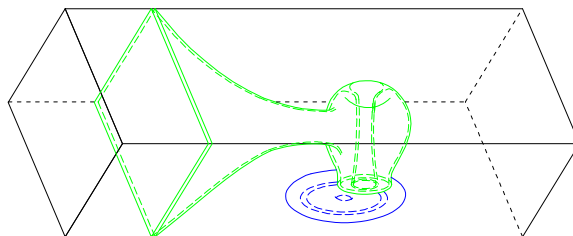


Fig. 3.13: $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ local, R_1 no separadora

- a.3. Si se verifica $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$ y además $D_2^2 \cap D_1^2 = \emptyset$, entonces la frontera de C está compuesta por dos toros separadores locales. La órbita de tipo silla es asimismo local, mientras que el asa ampliada resultante es global, de manera que su complementario en $S^2 \times S^1$ son dos toros sólidos locales enlazados. De este modo, $C \cong S^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ corresponde al caso (6) del enunciado (figura

3.14).

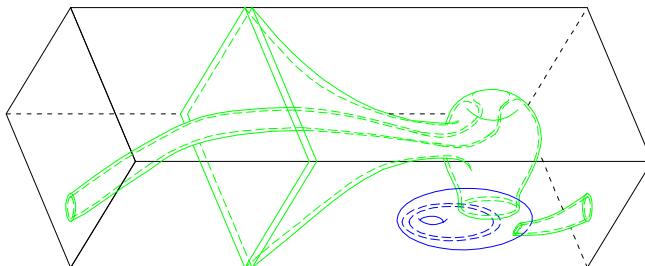


Fig. 3.14: $C \cong S^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ local

(b) Supongamos c_1 trivial y c_2 esencial. Consideremos el 2-disco $D_1^2 \subset A \times \{1\}$ tal que $\partial D_1^2 = c_1$. Por continuidad, c_2 debe ser un meridiano o un paralelo. Pueden darse dos casos:

b.1. Consideremos, en primer lugar que la 1-asa es separadora. Si A es global, aplicando el lema 53, la órbita de tipo silla asociada al asa no puede ser global y eso descarta que la curva esencial sea un paralelo (figura 3.15). De forma análoga al caso correspondiente en S^3 , podemos encontrar una 2-esfera S tal que $S \subset A \times \{0\}$ y define la suma conexa $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$ tal que $\partial_- C = \partial D_1^2 \times S^1$, ambas globales en $S^2 \times S^1$ (caso (5) del enunciado).

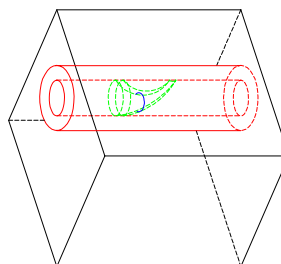


Fig. 3.15: $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$, $\partial_- C = \partial D_1^2 \times S^1$ global, R_1 separadora

Por otra parte, si pegamos R_1 a un toro local empleando una curva esencial y una trivial, el asa ampliada puede ser global (figura 3.16), o local y de nuevo C es equivalente a $D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$, siendo la órbita de tipo silla γ local y $\partial_- C = \partial D_1^2 \times S^1$ local.

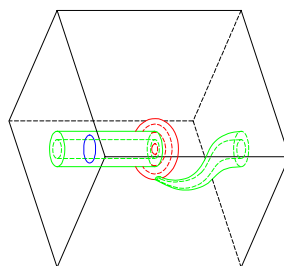


Fig. 3.16: $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$, $\partial_- C = \partial D_1^2 \times S^1$ local, R_1 separadora

- b.2. Si R_1 es un asa no separadora, podremos pegarla a un toro global o local. Denotemos por S la 2-esfera:

$$S = \overset{i}{T^2} \times \{1\} - E \overset{c}{\cup} \overset{i}{\{\pm 1\}} \times [-1, 1] \times S^1 \overset{c}{\cup} D'_1 \cup D'_2$$

donde $E \cong [-1, 1] \times \{+1\} \times S^1$ es la corona sobre $T^2 \times \{1\}$ que se identifica con una componente de $\partial_- R_1$ y $D'_i, i = 1, 2$, son dos 2-discos contenidos en $A \times \{1\}$ tales que $D_1^2 \subset D'_i$ y $\partial D'_i = \{\pm 1\} \times \{-1\} \times S^1$. Si A es un toro global, la frontera del asa ampliada tiene dos componentes: un toro global y otro local, ambos separadores y enlazados entre sí (fig. 3.17). Nótese que el toro local es del tipo $\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{b}_2^2 + h_1 + h_2$. La 3-celda de frontera S contiene a la componente local de la frontera del asa ampliada y el asa ampliada es del tipo (5), suma conexa de dos toros sólidos $D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$.

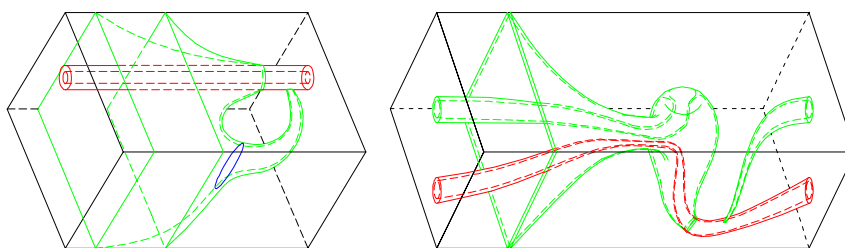


Fig. 3.17: $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$, $\partial_- C = \partial D_1^2 \times S^1$ global, R_1 no separadora

Si el asa no separadora se pega sobre un toro local, la frontera de C está compuesta por dos toros separadores, al menos uno

68CAPÍTULO 3. DESCOMPOSICIÓN EN ASAS REDONDAS DE $S^2 \times S^1$

de ellos local del tipo $\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{b}_2^2 + h_1 + h_2$ (figura 3.18). La esfera S verifica $A \times \{0\} \subset \overline{S}$, por lo que genera una suma conexa. De nuevo el asa ampliada es local y equivalente a $D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$.

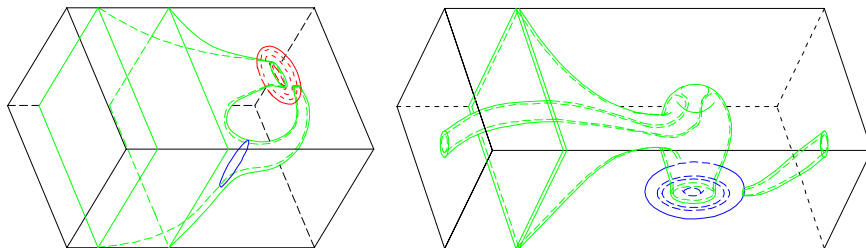


Fig. 3.18: $C \cong D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$ local, $\partial_- C = \partial D_1^2 \times S^1$, R_1 no separadora

(c) Supongamos que c_1 y c_2 son curvas esenciales. Las curvas de pegada han de ser necesariamente meridianos cuando la pegada sea transversal al toro (para evitar autointersecciones de la 1-asa), pero si la pegada es longitudinal, dichas curvas no tienen por qué ser paralelos, sino que pueden ser cualquier tipo de curva esencial no trivial en el toro. Así, pueden darse dos casos:

c.1. Cuando el asa es separadora, el toro sobre el que se pega R_1 puede ser global o local. Del mismo modo que en el lema 43, las componentes de la frontera del asa ampliada son toroidales. Supondremos, por el momento, que todas ellas son frontera de toros sólidos, de manera que $N_0 = C \cup N_1 \cup N_2$ sea un toro sólido, donde N_0 , N_1 y N_2 son las componentes conexas del complementario del asa ampliada en $S^2 \times S^1$ y $\partial C = \partial N_0 \cup \partial N_1 \cup \partial N_2$.

Supongamos en primer lugar que las curvas de pegada son meridianos o paralelos. Si $A = T^2$ es global, la órbita periódica de tipo silla γ es global para una pegada longitudinal y local cuando la pegada es transversal. En este caso el asa ampliada es del tipo (7), $C \cong F_2 \times S^1$, donde F_2 es un disco con dos agujeros y $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ global (véase la figura 3.19).

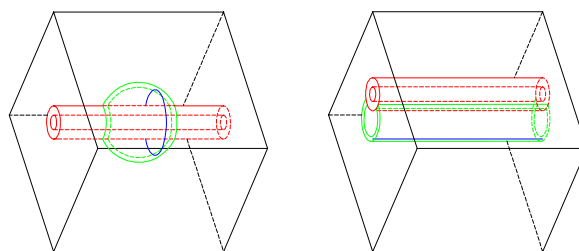


Fig. 3.19: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T^2 \times [0, 1]$, R_1 separadora

Si, por el contrario, el toro sobre el que se pega el asa es local, también lo será la órbita de tipo silla γ (figura 3.20), aunque el asa ampliada resultante puede ser global o local, respectivamente. También en este caso, el asa ampliada es equivalente a la variedad $C \cong F_2 \times S^1$ y $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$. En segundo lugar, si la pegada es longitudinal pero las curvas c_i no son paralelos, una de las componentes de la frontera positiva del asa ampliada es un toro cuyo núcleo es un (p, q) -cable del núcleo de $T^2 \times \{0\}$. En este caso, el asa ampliada es $C \cong F_{p+1} \times S^1$ (véase el lema 55) global o local en función del carácter del toro A , donde F_{p+1} es un disco con $p + 1 \geq 2$ agujeros y $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$. Nótese que en el caso particular en que $p = 1$ y $q = 0$, se obtiene de nuevo el asa ampliada $F_2 \times S^1$.

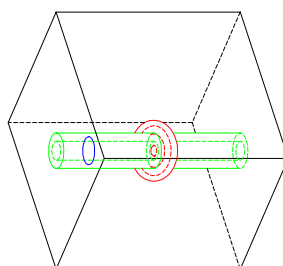


Fig. 3.20: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T^2 \times [0, 1]$ local, R_1 separadora

Finalmente, si al menos una de las componentes de la frontera del asa ampliada no es borde de un toro sólido sumergido en N_0 , el asa ampliada puede ser local o global. Si C es local, es equivalente a $T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$, (véase la figura 2.25), donde $N(k)$ es un entorno regular del nudo local no trivial k , $\partial_- C = A \times \{0\}$, que corresponde al caso (8) del enunciado, y

la órbita de tipo silla $\gamma = \{*\} \times S^1$, para algún punto $\{*\}$ de una sección transversal de C , es un nudo trivial en $S^2 \times S^1$. Si, por el contrario, el asa ampliada es global (figura 3.21), de nuevo $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ y k es un nudo trivial en $S^2 \times S^1$.

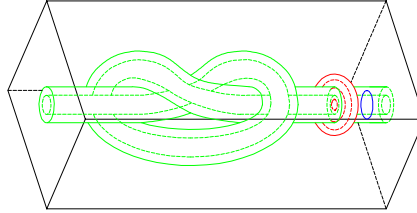


Fig. 3.21: $C \cong F_2 \times S^1$ global con A local cuando una de las componentes de ∂C no es borde de un toro sólido.

c.2. Supongamos que R_1 es un asa no separadora. Dicha 1-asa puede pegarse sobre un toro local o global.

Cuando el asa ampliada resultante es local, su frontera tiene tres componentes: dos de ellas no separadoras y una tercera componente separadora enlazada con una de las anteriores. Así, el asa ampliada C es equivalente a $F_2 \times S^1$ (figura 3.22). Por otra parte, la órbita de tipo silla asociada es $\gamma = \{*\} \times S^1$, $\{*\} \in F_2$.

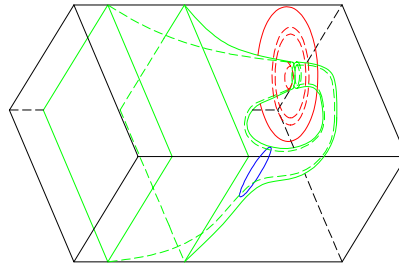


Fig. 3.22: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T^2 \times [0, 1]$ local, R_1 no separadora

Cuando C es global, su frontera necesariamente tiene dos componentes. Si A es local y las curvas de pegada son longitudinales sobre el $A = T^2$ (figura 3.23), el complementario del asa ampliada tiene dos componentes conexas: dos toros sólidos, uno local y otro global cuyo núcleo es un $(2, 1)$ -cable. Así se obtiene $C \cong K^3 - \text{int}(W)$, donde W es el toro sólido del com-

plementario de C cuya frontera es $T^2 \times \{0\}$ y γ es una órbita local. En esta variedad, la unión de las variedades invariantes de la órbita de tipo silla y la propia órbita forman una botella de Klein, $K^2 = W^s \cup W^u$. Al ser locales tanto la órbita de tipo silla γ como una de las componentes de ∂C (frontera a su vez del entorno regular de una órbita periódica), la topología de la botella de Klein fuerza un número impar de inversiones de la orientación sobre las órbitas periódicas. Dado que el campo vectorial es continuo, el flujo debe anularse en algún punto. Sin embargo, sabemos que un flujo NMS no es singular, por lo que este caso no es admisible.

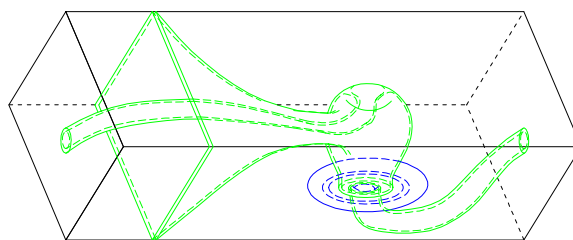


Fig. 3.23: $C \cong K^3 - \text{int}(W)$ no admisible

Si A es global y R_1 se pega sobre A usando dos curvas transversales, por continuidad de la 1-asa, A debe dar dos vueltas longitudinales a $S^2 \times S^1$. La frontera del asa ampliada resultante tiene como componentes a un toro separador local y al toro global no trivial $A \times \{0\}$. Así, el asa ampliada es equivalente a $K^3 - \text{int}(W)$, donde $K^2 \times [0, 1]$, W es un toro sólido local y la frontera de la botella de Klein engordada es $A \times \{0\}$ (véase la figura 3.24). En este caso, al igual que ocurre para A local, la topología de la botella de Klein fuerza un número impar de inversiones de la orientación sobre las órbitas periódicas, por lo que el flujo debe anularse en algún punto. Nuevamente, el asa ampliada no es admisible.

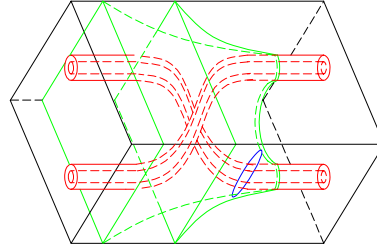


Fig. 3.24: $C \cong K^3 - \text{int}(W)$ no admisible

Si R_1 se pega sobre un toro global mediante dos curvas de pegada esenciales y longitudinales, la 1-asa es topológicamente equivalente a la unión de dos bandas de Möbius engordadas globales de manera que cada curva de pegada está en la frontera de una cinta de Möbius. Las componentes de la frontera del asa engordada son dos toros separadores; además, el nudo en el centro del toro sobre el que se pega la 1-asa debe ser del mismo tipo de homotopía que las curvas de pegada, por lo que éste debe ser global (figura 3.25). De este modo se obtiene nuevamente el asa ampliada $C \cong K^3 - \text{int}(W)$, donde W es un toro sólido tal que $\partial W = A \times \{0\}$, y la órbita de tipo silla γ es global (caso (9) del enunciado).

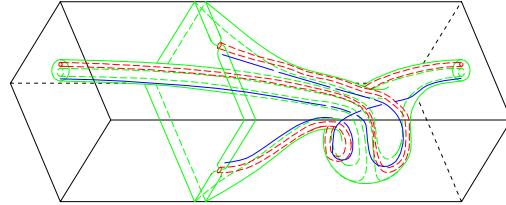


Fig. 3.25: $C \cong K^3 - \text{int}(W)$

2. Consideremos que c_1 y c_2 están sobre componentes distintas de $A = T^2 \cup T^2$, donde $c_j \subset T_j^2$, $j = 1, 2$. Aparecen diferentes casos en función del tipo de homotopía de las curvas de pegada y de si la 1-asa es, o no, separadora:
 - (a) Supongamos que c_1 y c_2 son curvas triviales. Existe un disco D_j^2 sobre cada $T_j^2 \times \{1\}$ tal que $\partial D_j^2 = c_j$, $j = 1, 2$ y que contiene a

una de las coronas limitadas por c_i .

a.1. Si $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$, una componente de la frontera del asa ampliada es la esfera S , definida del mismo modo que en el caso $A = T^2$. Pueden darse dos casos:

i) Si la 1-asa es separadora, también lo será la esfera S y aplicando el teorema de Poincaré-Hopf concluimos que no es compatible con un flujo NMS.

ii) Supongamos que R_1 es un asa no separadora: ninguno de los dos toros que componen A puede ser global, ya que intersectarían con la 1-asa, dado el carácter trivial de las curvas de pegada. En este caso la esfera S es no separadora y el asa ampliada es equivalente a la suma conexa $B\tau \# D - \bigcup_{i=1}^{\mu} \text{int}(W_i)$

definida por S , correspondiente al caso (1) del enunciado. Además, la frontera negativa del asa ampliada es $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$, ($\partial_+ C = B\mathbb{P}^2 \cup \mathfrak{b}^2$) y la órbita de tipo silla γ es local en C (figura 3.26).

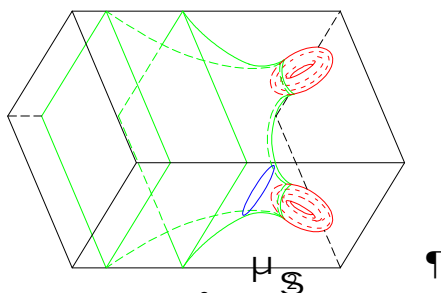


Fig. 3.26: $C \cong B\tau \# D^3 - \bigcup_{i=1}^{\mu} \text{int}(W_i)$

a.2. Supongamos que $A_{n_j}^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$; distinguiremos entre 1-asa separadora y no separadora:

i) Si R_1 es una 1-asa separadora, con la misma notación que en el caso correspondiente en el lema 43, la 3-celda de frontera S contiene a $T_1^2 \times [0, 1]$ (o, respectivamente, a $T_2^2 \times [0, 1]$) y el asa ampliada C es equivalente a la suma conexa $T_1^2 \times [0, 1] \# T_2^2 \times [0, 1]$, por lo que se corresponde con el caso (3) del enunciado (figura 3.27). La frontera negativa del asa ampliada es $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$.

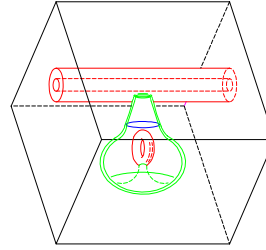


Fig. 3.27: $C \cong T_1^2 \times [0, 1] \# T_2^2 \times [0, 1]$, global,
 $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$.

Nótese que no es admisible pegar de este modo la 1-asa sobre dos toros globales, ya que por definición no puede sumergirse un toro global en una 3-celda. Así, uno de los toros sobre los que se pega el asa es local, y el otro puede ser local o global. En el caso en que ambos toros sea locales, el asa ampliada puede sumergirse por completo en una 3-celda, y por tanto C será un asa ampliada local.

ii) Si R_1 es un asa no separadora, los toros que componen A deben ser locales y las componentes de la frontera del asa engordada (véase fig. 3.28) son dos toros separadores locales, que componen la $\partial_- C$, y dos no separadores. El asa ampliada es nuevamente del tipo (3), $C \cong T_1 \times [0, 1] \# T_2 \times [0, 1]$, aunque en este caso es local.

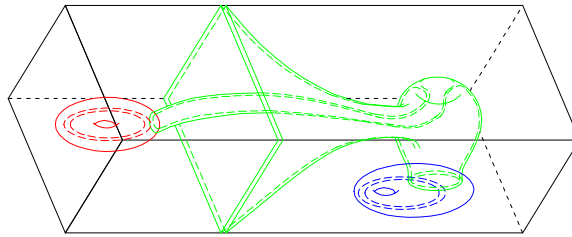


Fig. 3.28: $C \cong T_1^2 \times [0, 1] \# T_2^2 \times [0, 1]$, local,
 $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$.

- (b) Supongamos c_1 trivial y c_2 esencial. De nuevo existe un disco $D_1^2 \subset T_1^2 \times \{1\}$ tal que $\partial D_1^2 = c_1$ y por continuidad, la curva esencial debe ser meridiano o paralelo. Así pues, distinguimos dos casos:

b.1 Supongamos R_1 separadora. Del mismo modo que en el caso

correspondiente del lema 43, podemos encontrar una esfera S que defina al asa ampliada como $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ (caso (4) del enunciado) y $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$. Dado que $T_2 \times \{0\} \subset \bar{S}$ ambos toros no pueden ser globales. Por tanto, uno de los toros debe ser local, mientras que el otro puede ser global o local. Así, el lema 53 nos permite afirmar que el 1-asa redonda está pegada de forma esencial al toro local o esencialmente al toro global mediante una círculo transversal (figura 3.29). En ambos casos, la órbita de tipo silla γ asociada a la 1-asa es local. Si ambos toros son locales, el asa ampliada puede sumergirse por completo en una 3-celda, y por tanto C es un asa ampliada local.

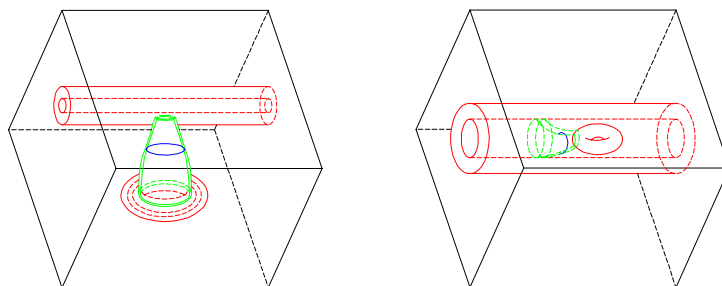


Fig 3.29: $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$,
 $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$

- b.2. Supongamos que R_1 es no separadora: al ser una de las curvas de pegada no esencial, no es posible pegar el asa a dos toros globales, ya que uno de ellos la intersectaría. Por otra parte, tanto si uno de los toros es global como si ambos son locales (figura 3.30), la frontera del asa ampliada está compuesta por tres toros, todos ellos separadores. Además, si la pegada esencial de la 1-asa tiene lugar sobre un toro global por el lema 53 ésta debe efectuarse sobre círculos transversales, mientras que si dicha pegada esencial tiene lugar sobre un toro local, la correspondiente curva de pegada ha de ser un paralelo. En cualquier caso, la esfera S definida en el caso separador genera la suma conexas que define el asa ampliada: $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ que es global si $T^2 \times [0, 1]$ también lo es.

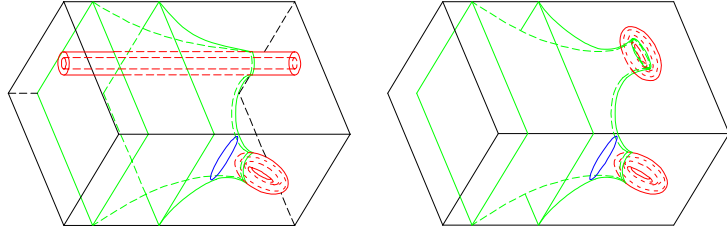


Fig. 3.30: $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ global y local, resp., con R_1 no separadora.

(c) Supongamos que c_1 y c_2 son curvas esenciales; entonces han de ser ambas paralelos o bien meridiano y paralelo, respectivamente, por la continuidad del asa al ser pegada a ambos toros. Pueden darse dos casos:

c.1. Cuando R_1 es separadora, dos casos son admisibles: si la pegada de la 1-asa tiene lugar sobre dos toros globales mediante curvas esenciales longitudinales, γ es global (figura 3.31); si la 1-asa esta pegada a un toro local y otro global (o equivalentemente a dos toros globales mediante dos curvas esenciales transversales, aplicando el lema 53), γ es local (figura 3.32); En todos los casos la frontera del asa ampliada está compuesta por tres toros separadores: $T_1^2 \times \{0\}$, $T_2^2 \times \{0\}$ y

$$i T_1^2 \times \{1\} - E_1 \cup i \{\pm 1\} \times [-1, 1] \times S^1 \cup i T_2^2 \times \{1\} - E_2$$

donde E_1 y E_2 son las coronas de pegada: $E_1 = [-1, 1] \times \{-1\} \times S^1$ y $E_2 = [-1, 1] \times \{+1\} \times S^1$ y el asa ampliada es del tipo (7) del enunciado, $C \cong F_2 \times S^1$ y $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$. Si ambos toros son locales el asa ampliada es local en $S^2 \times S^1$; en otro caso, C es global.

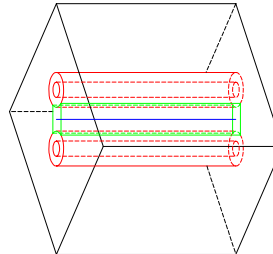


Fig. 3.31: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T_1 \times \{0\} \cup T_2 \times \{0\}$, γ global.

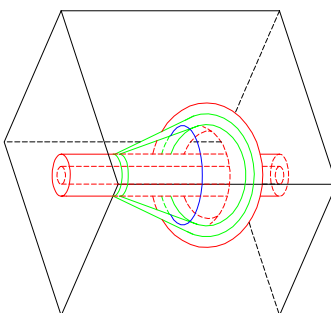


Fig. 3.32: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T_1 \times \{0\} \cup T_2 \times \{0\}$, γ local.

c.2. Al ser ambas curvas de pegada esenciales, un asa no separadora puede pegarse tanto a dos toros globales, como a un toro global y uno local (véanse ambos casos en la figura 3.33), o a dos toros locales (figura 3.34). En los dos primeros casos, las componentes de la frontera son tres toros separadores, $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$ es la unión de dos toros separadores globales, mientras que la frontera positiva de C es local en el primer caso y global en el segundo.

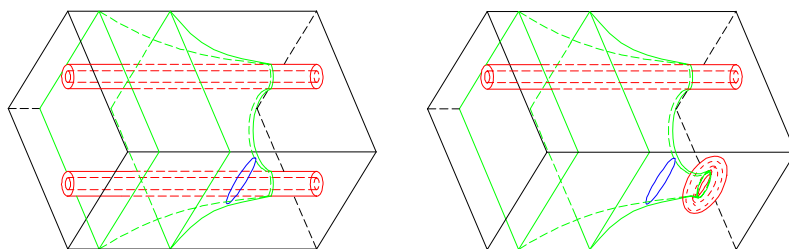


Fig. 3.33: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$ global.

Finalmente, si la 1-asa se pega sobre dos toros locales, los tres toros que forman la frontera del asa ampliada son separadores y locales.

En todos los casos descritos la órbita de tipo silla es local y el asa ampliada es equivalente a $C \cong F_2 \times S^1$, siendo global en los dos primeros casos y local en el tercero.

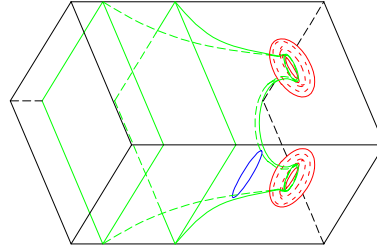


Fig. 3.34: $C \cong F_2 \times S^1$, $\partial_- C = T_1^2 \times \{0\} \cup T_2^2 \times \{0\}$ local.

Consideremos a continuación las componentes de la frontera no toroidales que han aparecido en algunos de los casos anteriormente descritos:

3. Consideraremos en primer lugar que $A = B\mathbb{P}^2$. Denotemos por σ , σ_1 y σ_2 a tres de los generadores del grupo de homotopía del bitoro, que se muestran en la figura 3.35. Nótese que las curvas esenciales del tipo de homotopía $\sigma_1 \circ \sigma_2$ no son admisibles como curvas de pegada, ya que el bitoro se obtiene partiendo de pegadas no esenciales sobre toros, por lo que la variedad estable de la órbita de tipo silla presentará un punto crítico al dirigirse el flujo a órbitas cuyo tipo de homotopía es σ_i , $i = 1, 2$.

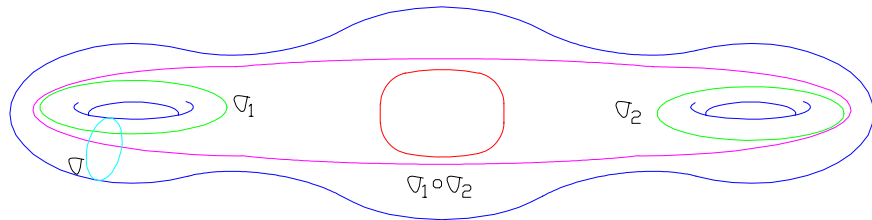


Fig. 3.35: Generadores del grupo $\pi_1(BT^2)$

- (a) Sean $c_1, c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ triviales, $c_i = \partial D_i^2$, $D_i \subset B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$.
 - a.1. Supongamos que $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$. Si la 1-asa es separadora, la frontera del asa ampliada resultante contiene, de nuevo, una esfera separadora. Aplicando el teorema de Poincaré-Hopf, el flujo asociado no es NMS.

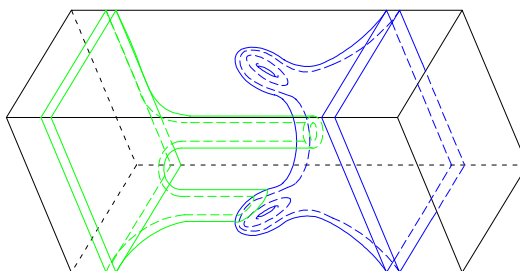


Fig. 3.36: Pegada no esencial de R_1 no separadora con $c_i \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ (o $j=1$) para $i=1,2$

Si, por el contrario, la 1-asa es no separadora, la frontera positiva de C contiene a un tritoro separador (véase la figura 3.36) y su característica de Euler es no nula:

$$\aleph(\partial_+ C) = \aleph \overset{3}{B\mathbb{P}^2} + \aleph \overset{1}{TriT^2} \neq 0$$

De este modo podemos afirmar que C no es una variedad flujo y, por tanto, no es un asa ampliada admisible.

- a.2. Si $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$, el asa ampliada C posee una frontera positiva con una componente toroidal (separadora si y sólo si R_1 lo es) y un bitoro no separador si R_1 es separadora, y viceversa, (véase la figura 3.37).

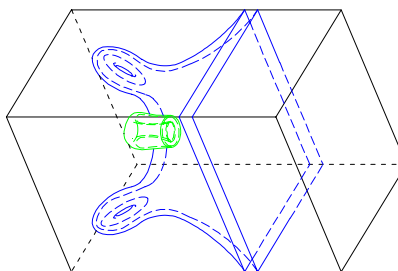


Fig. 3.37: Pegada no esencial de R_1 separadora con $c_i \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ para $i=1$ y con $j=1$ para $i=2$

Así, la característica de Euler de C , considerada como variedad flujo, es:

$$\aleph(\partial_+ C) = \aleph \overset{3}{B\mathbb{P}^2} + \aleph \overset{1}{T^2} \neq 0$$

por lo que este caso no es admisible.

- (b) Supongamos que c_1 es trivial y c_2 esencial, $c_2 \in \sigma_1$ (resp. $c_2 \in \sigma_2$, ya que no es posible pegar con continuidad la 1-asa para c_1 trivial y $c_2 \in \sigma$) y $c_1, c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$; las componentes de la frontera positiva del asa ampliada C son $B\mathbb{P}^2 \times \{0\}$ y un bitoro que es separador si R_1 no lo es, y viceversa (véase la figura 3.38). La característica de Euler de C nuevamente es distinta de cero, por lo que esta posibilidad queda también descartada.

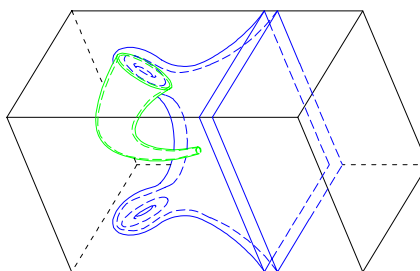


Fig. 3.38: Asa ampliada con $c_1 \in \sigma_1$ y $c_i \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$

- (c) Si ambas curvas de pegada son esenciales, pueden ser de dos tipos de homotopía distintos, o del mismo:

- c.1. Supongamos que $c_i \in \sigma$, $i = 1, 2$. En este caso, la frontera positiva del asa ampliada está compuesta por un bitoro no separador y un toro separador si R_1 es su vez separadora, o a la inversa, $\partial_+ C = BT^2 \cup \mathbb{P}^2$ si R_1 es no separadora (figura 3.39). Sin embargo, independientemente de si la 1-asa es o no separadora, la característica de Euler de la frontera positiva de C es no nula, por lo que el asa ampliada no es una variedad flujo.

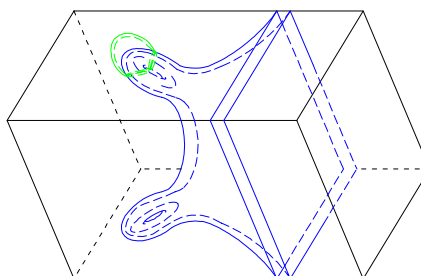


Fig. 3.39: Pegada esencial de R_1 separadora con $c_1, c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $c_i \in \sigma, i = 1, 2$.

- c.2. Supongamos ahora que $c_i \in \sigma_1$, $i = 1, 2$, (o equivalentemente, $c_i \in \sigma_2$, $i = 1, 2$). De nuevo, la frontera positiva del asa ampliada está formada por un toro y un bitoro (ambos separadores si R_1 es separadora, figura 3.40, y no separadores si R_1 es no separadora). Obviamente, el asa ampliada no es admisible, ya que $\aleph(\partial_+ C) \neq 0$.

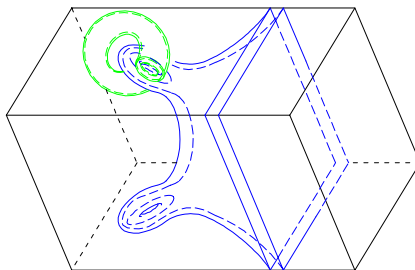


Fig. 3.40: Pegada esencial de R_1 separadora con $c_1, c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $c_i \in \sigma_1$, $i = 1, 2$.

- c.3. Si, por el contrario, $c_1 \in \sigma_1$ y $c_2 \in \sigma_2$, la única componente de la frontera positiva de C es un bitoro no separador si R_1 es separadora o un bitoro separador si no lo es R_1 (véase la figura 3.41 para el caso R_1 separadora). Llegamos, por tanto, a un asa ampliada cuya frontera tiene característica de Euler distinta de cero, por lo que no es una variedad flujo.

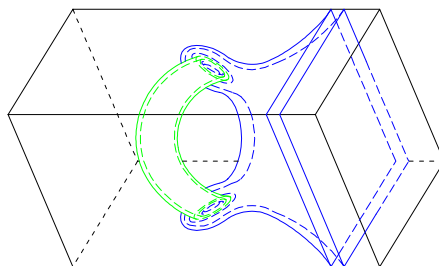


Fig. 3.41: Pegada esencial de R_1 separadora con $c_1, c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $c_1 \in \sigma_1$, $c_2 \in \sigma_2$.

4. Supongamos ahora que $A = \mathfrak{b}^2$. Debido al tipo de homotopía de las curvas de pegada, únicamente pueden efectuarse pegadas no esenciales sobre A . Consideremos los 2-discos $D_j \subset \mathfrak{b}^2 \times \{1\}$ tales que $\partial D_j = c_j$, $j = 1, 2$. Al ser A una esfera, la 1-asa únicamente puede pegarse de

82CAPÍTULO 3. DESCOMPOSICIÓN EN ASAS REDONDAS DE $S^2 \times S^1$

forma no esencial, por lo que pueden darse dos casos:

- (a) Si $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$ y el asa es separadora, aparece nuevamente una esfera separadora entre las componentes de la frontera, con lo que no resulta un asa ampliada admisible. Sin embargo, si el asa es no separadora (fig. 3.42), las componentes de la frontera positiva son:

$$\partial_+ C = \mathfrak{b}^2 \cup T^2$$

por lo que el asa ampliada no es una variedad flujo y, por tanto, no es admisible.

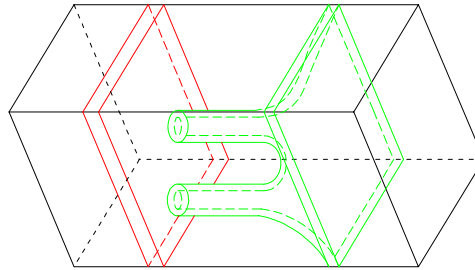


Fig. 3.42: Pegada no esencial de R_1 no separadora con $c_i \in \mathfrak{b}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ (o $j=1$) para $i=1,2$

- (b) Si $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$, el asa debe ser separadora ya que de otro modo aparece una esfera separadora en la frontera positiva de C , con lo que el asa ampliada no es una variedad flujo, aplicando el teorema de Poincaré-Hopf. Así, la 1-asa genera una componente toroidal no separadora en la frontera (fig. 3.43). En este caso la característica de Euler de la frontera es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\partial_+ C) &= \mathfrak{N} \begin{matrix} 3 & \nearrow \\ \mathfrak{b}^2 & \\ 3 & \searrow \end{matrix} = 0 \\ \mathfrak{N}(\partial_- C) &= \mathfrak{N} \mathfrak{b}^2 \neq 0 \end{aligned}$$

y el asa ampliada no es una variedad flujo, siguiendo el mismo razonamiento que en casos previos.

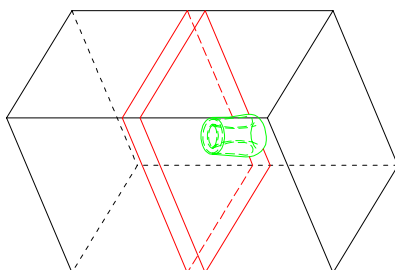


Fig. 3.43: Pegada no esencial de R_1 separadora con $c_1, c_2 \in \mathbb{B}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ para $i=1$ y con $j=1$ para $i=2$

5. Supongamos ahora que $A = B\mathbb{P}^2 \cup T^2$. Notemos que dicho toro ha de ser local, puesto que, de otro modo, intesectaría con $B\mathbb{P}^2$. En función del tipo de homotopía de las curvas de pegada pueden darse los casos siguientes:

(a) Consideremos $c_i, i = 1, 2$, no esenciales, $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$. Distinguiremos dos casos en función de las coronas generadas en la frontera negativa de la 1-asa:

a.1. Si $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$ y la 1-asa es separadora, por ser ambas curvas de pegada triviales, se genera una esfera separadora S como componente de la frontera del asa ampliada (véase la figura 3.44), por lo que el flujo asociado no es NMS (teorema de Poincaré-Hopf).

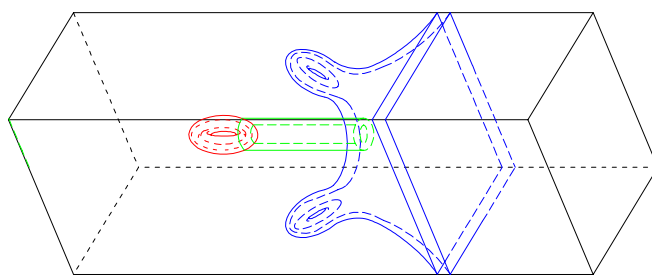


Fig. 3.44: Pegada no esencial de R_1 separadora con $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ (o $j=1$) para $i=1,2$

Si el asa es no separadora, la frontera positiva del asa ampliada está formada por una esfera no separadora y un tri-toro separador $TriT^2$ (figura 3.45). La característica de Euler

de dicha frontera positiva es no nula y, por tanto, el asa ampliada resultante no es una variedad flujo.

$$\partial_+ C = \mathfrak{b}^2 \cup \text{Tri}T^2$$

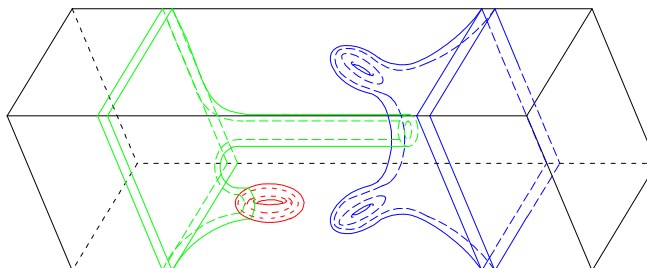


Fig. 3.45: Pegada no esencial de R_1 no separadora con $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ (o $j=1$) para $i=1,2$

- a.2. Si $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ para $i=1$ y con $j=1$ para $i=2$, pueden darse dos casos: cuando R_1 es separadora, la frontera positiva del asa ampliada obtenida al pegar la 1-asa está formada por un bitoro (separador si R_1 es no separadora, y al contrario) y un toro, que es separador si y sólo si lo es la 1-asa. De este modo, tampoco en este caso el asa ampliada C es una variedad flujo (fig. 3.46).

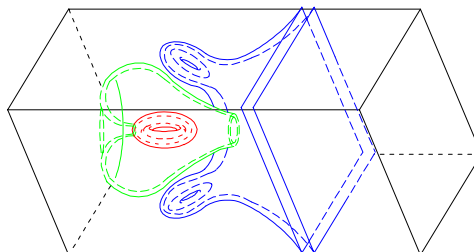


Fig. 3.46: Pegada no esencial de R_1 no separadora con $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ para $i=1$ y con $j=1$ para $i=2$

- (b) Consideremos que una de las curvas de pegada es esencial; en función de si se encuentra sobre el toro o sobre el bitoro, pueden darse los diferentes casos, pero en todos ellos la curva esencial debe ser longitudinal, por continuidad de la 1-asa.
- b.1. Sean $c_1 \in T^2 \times \{1\}$ esencial y $c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ trivial. Tanto si R_1 es separadora como si no, las componentes de la frontera

positiva del asa ampliada C son $B\mathbb{P}^2$ y \mathfrak{b}^2 (véase la figura 3.47 para el caso de una 1-asa separadora), mientras que la frontera negativa está formada por el bitoro $B\mathbb{P}^2 \times \{0\}$ y $T^2 \times \{0\}$. La característica de Euler de C es, de nuevo, no nula, por lo que el asa ampliada no es admisible.

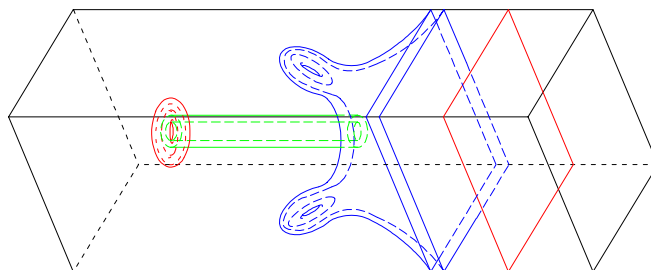


Fig. 3.47: Pegada esencial sobre $T^2 \times \{1\}$ y no esencial sobre $B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ de R_1 separadora.

b.2. Si c_1 es trivial, y c_2 es esencial, la frontera del asa ampliada C está compuesta por:

$$\begin{aligned} \partial_+ C &= B\mathbb{P}^2 \\ \partial_- C &= B\mathbb{P}^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

tanto en el caso de una 1-asa separadora (fig. 3.48), como si ésta es no separadora. Así, el asa ampliada resultante no es admisible, ya que la característica de Euler de ∂C es no nula.

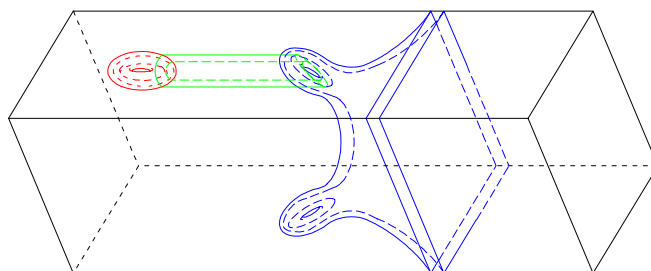


Fig. 3.48: Pegada esencial sobre $B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ y no esencial sobre $T^2 \times \{1\}$ de R_1 separadora.

(c) Si las curvas de pegada son esenciales, tanto si la 1-asa es separadora (en este caso, el toro y el bitoro pueden estar enlazados) como si no lo es, el asa ampliada C no es una variedad flujo, ya

que las componentes de la frontera son, en todos los casos,

$$\begin{aligned} \partial_+ C &= B\mathbb{P}^2 \\ \partial_- C &= B\mathbb{P}^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

y por tanto $\mathfrak{N}(\partial C) \neq 0$. En la figura 3.49 podemos observar el asa ampliada obtenida mediante un asa no separadora.

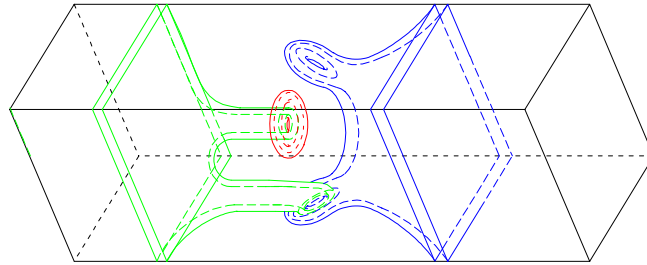


Fig. 3.49: Pegada esencial de R_1 no separadora con $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$.

6. Consideremos $A = \mathfrak{B}^2 \cup T^2$.

(a) Sean las curvas de pegada triviales sobre A , $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in \mathfrak{B}^2 \times \{1\}$, pueden darse los siguientes casos:

a.1. Consideremos que $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$ y que la 1-asa es separadora. Aplicando el teorema de Poincaré-Hopf, el flujo no es NMS, ya que aparece una esfera separadora en la frontera del asa ampliada.

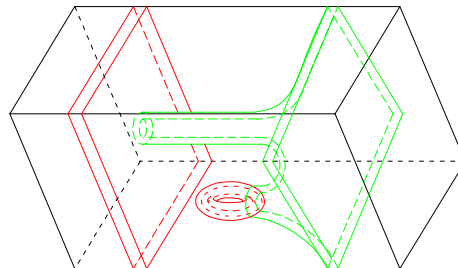


Fig. 3.50: Pegada no esencial de R_1 no separadora con $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in \mathfrak{B}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$

Si la 1-asa es no separadora, la frontera positiva de C está

formada por:

$$\partial_+ C = T^2 \cup \mathfrak{B}^2$$

Dado que $\mathfrak{N}(\partial_+ C) \neq 0$, el asa ampliada resultante (véase la figura 3.50) no es admisible.

- a.2. Supongamos que $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$. Cuando 1-asa es separadora, el asa ampliada tiene como componentes de la frontera positiva a (véase la figura 3.51):

$$\begin{aligned} \partial_+ C &= \mathfrak{P}^2 \\ \partial_- C &= \mathfrak{B}^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

Dado que la frontera negativa tiene característica de Euler no nula, el asa ampliada no es admisible.

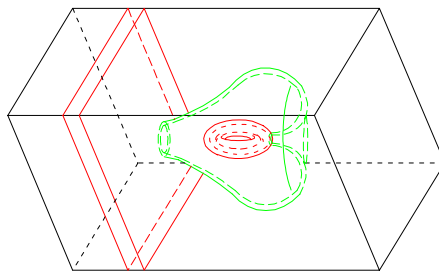


Fig. 3.51: Pegada no esencial de R_1 separadora con $c_1 \in T^2$ y $c_2 \in \mathfrak{B}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$

Si la 1-asa es no separadora, la frontera positiva de C está formada por $\partial_+ C = \mathfrak{P}^2 \cup S^2$ y, aplicando el teorema de Poincaré-Hopf, el flujo asociado a C no es NMS.

- (b) Si una de las curvas de pegada es esencial, necesariamente debe estar sobre la componente toroidal: $c_1 \in T^2 \times \{1\}$ esencial, y $c_2 \in \mathfrak{B}^2 \times \{1\}$ trivial. La única componente de la frontera positiva del asa ampliada C es una esfera no separadora, independientemente de que R_1 sea o no separadora, mientras que la frontera negativa está formada por la esfera no separadora $\mathfrak{B}^2 \times \{0\}$ y $T^2 \times \{0\}$ (véase la figura 3.52 para el caso de una 1-asa separadora). El asa ampliada resultante no es admisible, ya que la característica de Euler de ∂C es, de nuevo, no nula.

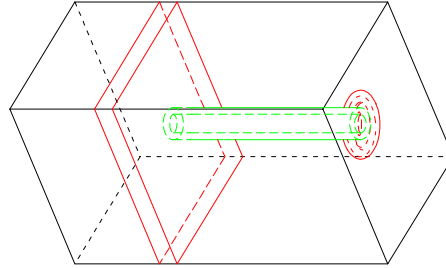


Fig. 3.52: Pegada esencial sobre $T^2 \times \{1\}$ y no esencial sobre $\mathfrak{b}^2 \times \{1\}$ de R_1 separadora.

7. Finalmente, supongamos que $A = B\mathfrak{p}^2 \cup \mathfrak{b}^2$.

(a) Consideremos c_i , $i = 1, 2$, no esenciales y los discos $D_1^2 \subset B\mathfrak{p}^2 \times \{1\}$, $D_2^2 \subset \mathfrak{b}^2 \times \{1\}$ tales que $\partial D_j^2 = c_j$, $j = 1, 2$.

a.1. Si las coronas A_j^i en que las curvas de pegada separan cada componente de $\partial_- R_1$ verifican $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$, al pegar el asa se genera una esfera S como componente de la frontera del asa ampliada (véase la figura 3.53). Si la 1-asa es no separadora no puede pegarse a la esfera $\mathfrak{b}^2 \times \{1\}$ y al bitoro $B\mathfrak{p}^2 \times \{1\}$ al mismo tiempo, ya que están en componentes conexas distintas. Si R_1 es separadora, la esfera S será separadora y, por tanto, el flujo asociado no es NMS, ya que se hace necesaria la existencia de puntos de equilibrio en la 3-celda de frontera S .

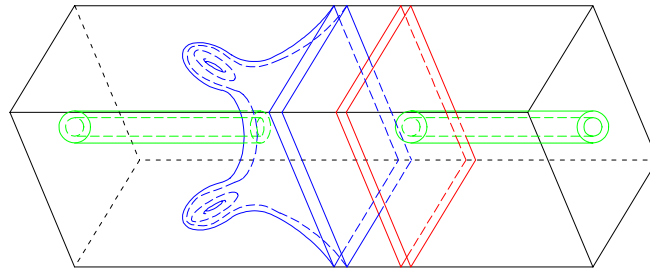


Fig. 3.53: Pegada no esencial de R_1 separadora con $c_1 \in B\mathfrak{p}^2 \times \{1\}$ y $c_2 \in \mathfrak{b}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ (o $j = 1$) para $i = 1, 2$

- a.2 Por otra parte, si $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$, la 1-asa no puede ser separadora, ya que en ese caso englobaría a una esfera no separadora; y si la 1-asa es no separadora, nuevamente aparece una esfera separadora como componente de la frontera del asa ampliada (fig. 3.54).

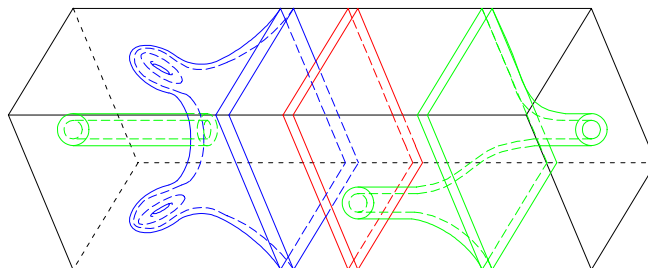


Fig. 3.54: Pegada no esencial de R_1 no separadora con $c_1 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ y $c_2 \in \mathfrak{b}^2 \times \{1\}$, $A_j^i \subset D_i^2$ con $j=0$ para $i=1$ y con $j=1$ para $i=2$

- (b) Si sólo una de las curvas de pegada es esencial, necesariamente debe ser del tipo de homotopía σ_1 ó σ_2 , y R_1 debe ser separadora, ya que la misma 1-asa separa $B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ y $\mathfrak{b}^2 \times \{1\}$ en dos componentes conexas diferentes. Asumimos que $c_1 \in \sigma_1$ (resp. $c_1 \in \sigma_2$), $c_1 \in B\mathbb{P}^2 \times \{1\}$ y $c_2 \in \mathfrak{b}^2 \times \{1\}$, con la pegada de la 1-asa obtenemos un toro separador como componente de la frontera del asa ampliada (véase la figura 3.55). Así, el asa ampliada C es del tipo (2) del enunciado, topológicamente equivalente a $B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$, donde $W = \partial_+ C = T^2$ y las fronteras positiva y negativa de C son:

$$\begin{aligned} \partial_+ C &= T^2 \\ \partial_- C &= B\mathbb{P}^2 \times \{0\} \cup \mathfrak{b}^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

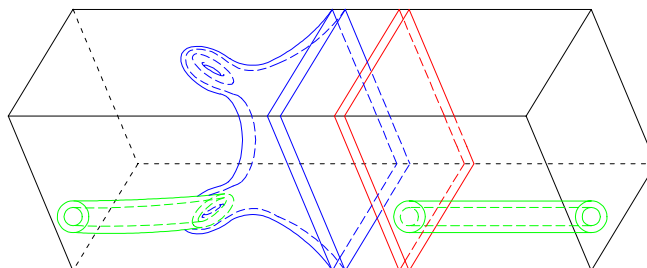


Fig. 3.55: $C \cong B\mathfrak{b} \# D^3 - \text{int}(W)$, $\partial_- C = B\mathbb{P}^2 \times \{0\} \cup \mathfrak{b}^2 \times \{0\}$

II. Consideraremos, finalmente, que R_1 es no orientable. En este caso, $\partial_- R_1$ y $\partial_+ R_1$ son fibrados no orientables de D^1 sobre S^1 y la 1-asa no orientable se pega empleando una única curva de pegada $c = \varphi(\partial_+ R_1 \oplus \{0\})$ sobre A ; la 1-asa es difeomorfa a una cinta de Möbius gruesa, $R_1 \cong MB \times I$, y puede ser local o global. La curva de pegada puede ser trivial o esencial:

1. Si $c = \partial D^2 \subset T^2 \times \{1\}$ es no esencial, $D \cup (MB \times \{0\}) \subset C$ es un plano proyectivo sumergido en $S^2 \times S^1$, y llegamos a una contradicción (véase [9]).
2. Si la curva de pegada $c = \varphi(\partial_+ R_1 \oplus \{0\})$ es esencial, no puede pegarse sobre $A = \mathcal{B}^2$. Si $A = B\mathcal{P}^2$, no es posible asociar con continuidad una curva esencial del tipo σ ó σ_i , $i = 1, 2$, a la curva de pegada c , por lo que ésta tampoco es una situación admisible. Finalmente, cuando $A = T^2$, se obtiene el caso (10) del enunciado, $C \cong D^2 \times S^1 - \text{int } \overline{W}^{\mathbb{C}}$, donde \overline{W} es un toro sólido global, la órbita de tipo silla $\gamma = \{0\} \times S^1$ está en el centro de la banda, $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ y T^2 es un $(2, 1)$ -toro (figura 3.56). El asa ampliada será global o local en función del carácter global o local del toro sobre el que se pega la 1-asa. El complementario de este asa engordada es equivalente a $K^3 - \text{int}(W)$ (caso (9) del enunciado), obtenida al pegar la unión de dos bandas de Möbius globales engordadas (de manera que cada curva de pegada está en la frontera de una cinta de Möbius) sobre el entorno toroidal de una órbita atractora, ya que el flujo NMS asociado a ambas asas ampliadas es el inverso.

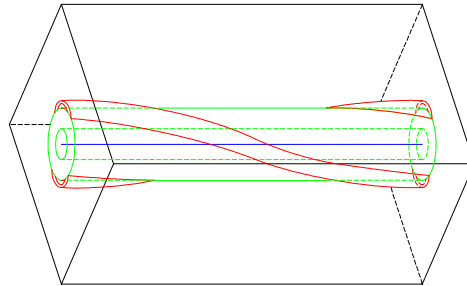


Fig. 3.56: $C \cong D^2 \times S^1 - \text{int } \overline{W}^{\mathbb{C}}$ global

■

Por otra parte, puede establecerse el siguiente resultado:

Proposición 56 *Toda cadena de órbitas periódicas sobre $S^2 \times S^1$ puede obtenerse como resultado de una descomposición en asas redondas en la que no haya botellas de Klein.*

Demostración. Basta con probar el resultado con una cadena de órbitas periódicas proveniente de una pegada de asas en forma de botella de Klein. En este caso sabemos, por el lema 11 (de clasificación de variedades) que el asa ampliada es $C \cong K^3 - \text{int}(W)$. Podemos afirmar que C admite una descomposición en asas redondas interna debido a que K^3 es topológicamente equivalente a pegar un toro sólido sobre un fibrado no trivial de un disco con dos agujeros F sobre S^1 , que denotaremos por A^3 . Consideraremos como toro sólido un entorno regular de la órbita repulsora (o atractora, invirtiendo el flujo). La clausura del complementario de este toro respecto de K^3 es el asa ampliada A^3 que contiene a la órbita de tipo silla. Además, sabemos que, salvo pegadas reiteradas sobre el mismo toro, C es única por el lema 50. Por tanto, esta descomposición se añade a la del complementario de C en $S^2 \times S^1$ definiendo la descomposición del enunciado. ■

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 11, aunque proporcionamos una demostración completamente independiente, basada en un proceso de inducción sobre el número de esferas no separadoras que forman parte de la frontera en una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$.

Corolario 57 *Consideremos una descomposición en asas redondas asociada a un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$.*

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_N = S^2 \times S^1$$

Entonces todas las componentes de la frontera son toros o parejas de bitoros $B\mathbb{P}^2$ y esferas \mathbb{S}^2 no separadores.

Demostración. Es conocido que $S^2 \times S^1$ admite un flujo NMS (proposición 40), por lo que, como variedad flujo (véase sección 2.3), su característica de Euler verifica:

$$\aleph^i S^2 \times S^1 \stackrel{\text{C}}{=} 0$$

Además, cada M_i es asimismo una variedad flujo con componentes de la frontera disjuntas entre sí, por lo que, aplicando la proposición 28

$$\aleph(M_i) = \aleph(\partial_- M_i) = \aleph(\partial_+ M_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Sabemos además que la única variedad de dimensión 2 que tiene característica de Euler nula es un toro, por tanto las componentes separadoras de la frontera

serán toros ([41, Teorema 6]), ya que una esfera separadora en la frontera estaría en contradicción con un flujo NMS.

Consideremos ahora la existencia de componentes no toroidales de la frontera, que además sean no separadoras: son necesarias al menos dos componentes no separadoras para delimitar una región conexa en $S^2 \times S^1$ y, por tanto, una variedad flujo. Nótese que un razonamiento análogo al del lema 50 nos permite descartar la simultaneidad de botellas de Klein y bitoros o toros no separadores; además, por el corolario 56, no es necesario tener en cuenta a las variedades del tipo $K^3 - \text{int}(W)$ en una descomposición en asas redondas.

Además, es fácil ver que las asas ampliadas con toros no separadores como componentes de la frontera son incompatibles con las que tienen bitoros y esferas no separadores en la frontera.

Sea M_i tal que su frontera tiene componentes que no son toroidales ni separadoras. La frontera no tiene toros globales entre sus componentes, ya que se intersectarían con las componentes no separadoras. Es conocido que, por ser la característica de Euler aditiva, se verifica:

$$\aleph(A \cup B) = \aleph(A) + \aleph(B) - \aleph(A \cap B)$$

Como M_i es una variedad flujo, si algunas componentes de la frontera no son toroidales y existen componentes no separadoras, debe haber alguna esfera no separadora entre ellas, ya que la esfera es la única 2-variedad con característica de Euler positiva. Demostraremos por inducción sobre el número de esferas no separadoras que las únicas componentes no separadoras y no toroidales de la frontera son pares de esferas y bitoros.

- Supongamos que existe una única esfera no separadora \mathfrak{b}^2 entre las componentes de la frontera de M_i . Para que M_i sea variedad flujo, su frontera debe contener otra componente no separadora tal que su característica de Euler sea opuesta a la de \mathfrak{b}^2 : un bitoro $B\mathfrak{p}^2$, siendo el resto de las componentes de la frontera toros.
- Supongamos que existen en ∂M_i dos copias de \mathfrak{b}^2 . Para que se anule su característica de Euler hay dos posibilidades:
 1. Existen en ∂M_i dos copias de $B\mathfrak{p}^2$, cada una de ellas asociada a una esfera no separadora.
 2. En ∂M_i existe un tetratoro no separador. Sin embargo, dos de estas tres componentes de ∂M_i separan una región conexa de $S^2 \times S^1$ y por tanto definen una variedad flujo, cuya característica de Euler debe anularse. Esto nos lleva a una contradicción.

Del mismo modo que dos esferas no separadoras definen una sección de $S^2 \times S^1$, n esferas delimitan otras tantas secciones de la variedad, en cada una de las cuales debe existir un bitoro para que M_i sea una variedad flujo.

■

A partir de estos resultados podemos hablar de la descomposición en asas redondas asociada al flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$ y de las cadenas de órbitas a que dan lugar. Nos hemos centrado hasta el momento en la descomposición en asas de la variedad, mientras que las cadena con índices y su flujo NMS asociado sobre la variedad $S^2 \times S^1$ serán objeto de estudio en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Cadenas con índices en $S^2 \times S^1$

A partir de la descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ podemos caracterizar el conjunto de cadenas con índices que se obtiene al estudiar las órbitas cerradas de un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$ en términos de las operaciones suma separada, suma conexa y cableado de cadenas sobre cadenas globales y locales, similares a las operaciones obtenidas por M. Wada [51]. Aplicando los resultados de Asimov y Morgan enunciados en las proposiciones 40 y 41, las cadenas con índices situadas en los centros de los toros en una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ nos permiten enlazar dicha descomposición con su flujo NMS asociado.

Nótese que, según la proposición 56, toda cadena de órbitas periódicas sobre $S^2 \times S^1$ puede obtenerse como resultado de una descomposición en asas redondas en la que no aparezca el asa ampliada $K^3 - \text{int}(W)$. Así, en el estudio de las cadenas de órbitas periódicas de tipo NMS sobre $S^2 \times S^1$ podemos restringirnos a éste último caso.

El objetivo de este capítulo es el estudio de las cadenas con índices provenientes de un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$; emplearemos para ello la descomposición en asas redondas de la variedad, obtenida en el capítulo anterior. Distinguiremos entre cadenas y nudos locales o globales, denotando los primeros mediante letras minúsculas. Las mayúsculas denotarán cadenas o nudos que puedan ser locales o globales.

4.1 Lemas previos

Sabemos que dos toros sólidos globales $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$ proporcionan una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$. Una cadena L que satisfaga $L = L_1 \cup L_2$, siendo cada L_i , $i = 1, 2$, el centro de $D_i^2 \times S^1$ con índices 0 y 2 respectivamente, es una cadena de un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$. Esta

cadena L es global, ya que las órbitas periódicas situadas en el centro de estos toros no pueden ser aisladas por 2-esferas. Denotaremos en lo sucesivo a la cadena resultante por **(0, 2)-cadena de Hopf global**. En el siguiente resultado probamos que esta cadena corresponde al flujo NMS más simple en $S^2 \times S^1$.

Lema 58 *Consideremos un flujo NMS sobre la variedad $S^2 \times S^1$. Si dicho flujo no contiene ninguna órbita de tipo silla, la cadena de órbitas periódicas es la (0, 2)-cadena de Hopf global.*

Demostración. En este caso, los conjuntos límite de toda órbita no periódica son los mismos; de otro modo sería necesaria una separatriz, es decir, una órbita periódica de tipo silla. Los entornos regulares de cada órbita límite proporcionan una descomposición de $S^2 \times S^1$. Si alguna órbita periódica no fuese un nudo trivial global, sería necesaria la existencia de al menos una órbita de tipo silla. Así, cada una de esas órbitas periódicas, que no pueden aislarse empleando 3-celdas, son órbitas triviales enlazadas. Por tanto, la cadena de órbitas periódicas asociada al flujo en $S^2 \times S^1$ es la (0, 2)-cadena de Hopf global. ■

Por otra parte, dada una cadena que conste de una órbita global y una local, la existencia de esferas no separadoras en $S^2 \times S^1$ hace posible que siempre podamos encontrar una esfera separadora S , construida uniendo dos esferas no separadoras mediante un asa, tal que S separa la órbita local y la global. Por tanto, para que la cadena sea no separable, deben existir al menos dos órbitas globales en dicha cadena.

Lema 59 *Sea L una cadena global que contiene una órbita local y una órbita global triviales. Entonces L es separable.*

Demostración. Supongamos que hay dos órbitas en la cadena L : una global Λ y otra local α y consideremos los entornos regulares de cada una de ellas, $N(\Lambda)$ y $N(\alpha)$. Por ser α local, existe una 3-celda D^3 tal que su frontera es del tipo $S^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}^2 + h_1 + h_2$ tal que $N(\alpha) \subset D^3$ y $N(\Lambda) \cap D^3 = \emptyset$ (véase la figura 4.1)

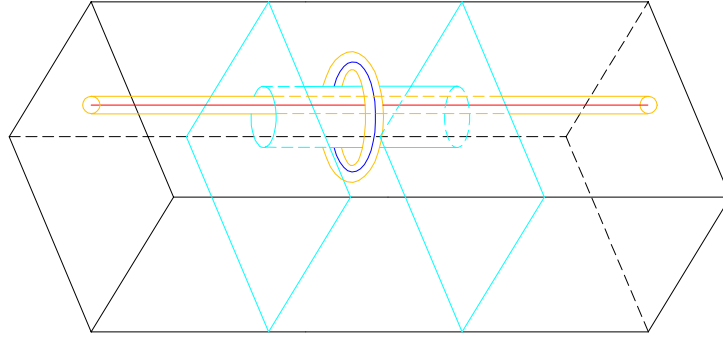


Fig. 4.1: Esfera separadora tal que $N(\alpha) \subset D^3$ y $N(\Lambda) \cap D^3 = \emptyset$

■

4.2 Cadenas con índices en $S^2 \times S^1$

Las operaciones sobre cadenas de órbitas periódicas están asociadas a las asas ampliadas descritas en el teorema 11 del capítulo 3. De hecho, si la descomposición en asas de la variedad tiene componentes de la frontera no separadoras, son necesarias al menos dos asas ampliadas para reconstruir $S^2 \times S^1$ e implican cadenas de órbitas periódicas que contienen dos órbitas de tipo silla y que definen el flujo NMS asociado sobre la variedad. Sin embargo, cuando las componentes de la frontera de un asa ampliada son separadoras, es posible completar la variedad únicamente con toros sólidos, lo que proporciona cadenas de órbitas periódicas con una órbita de tipo silla asociadas al flujo NMS.

Teorema 12 *Toda cadena con índices proveniente de un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$ puede obtenerse aplicando las siguientes operaciones:*

1. $O_1(l_1, L_2) = l_1 \cdot L_2 \cdot u$ donde u es un nudo trivial local de índice 1.
2. $O_2(l_1, L_2) = l_1 - k_1^{(\alpha)} \cdot L_2 \cdot u$ o $O_2(l_1, L_2) = l_1 \cdot L_2 - K_2^{(\alpha)} \cdot u$ donde $k_1^{(\alpha)}$ respectivamente, $K_2^{(\alpha)}$ es una componente de l_1 (resp., L_2) de índice α (0 ó 2) y u es un nudo trivial local de índice 1.
3. $O_3(l_1, L_2) = l_1 - k_1^{(\alpha)} \cdot L_2 - K_2^{(2-\alpha)} \cdot u$ donde $k_1^{(\alpha)}$ es una componente de l_1 de índice α (0 ó 2), $K_2^{(2-\alpha)}$ es una componente de L_2 de índice $2 - \alpha$ y u es un nudo trivial local de índice 1.

4. $O_4(l_1, L_2) = (l_1 \# L_2) \cup m$. La suma conexa $l_1 \# L_2$ se obtiene mediante la composición de un nudo K_2 de L_2 y otro k_1 de l_1 cada uno de los cuales tiene índice 0 ó 2. El índice de la componente resultante es el índice del nudo K_2 , m es un meridiano de $k_1 \# K_2$ y su índice es 1.
5. $O_5(L)$. Se elige una componente K_1 de L de índice 0 ó 2 y se reemplaza el entorno $N(K_1, S^2 \times S^1)$ por $D^2 \times S^1$ que a su vez contiene tres curvas con índice: $\{0\} \times S^1$, K_2 y K_3 . Aquí, K_2 y K_3 son (p, q) -cables de $\partial N(\{0\} \times S^1, D^2 \times S^1)$. Los índices de $\{0\} \times S^1$ y K_2 son 0 ó 2 y uno de ellos es igual al índice de K_1 . El índice de K_3 es 1.
6. $O_6(L)$. Se elige una componente K_1 de L de índice 0 ó 2 y se reemplaza $N(K_1, S^2 \times S^1)$ por $D^2 \times S^1$. Hay dos cadenas con índices: $\{0\} \times S^1$ y el $(2, q)$ -cable K_2 de $\{0\} \times S^1$, el índice de $\{0\} \times S^1$ es 1 y $\text{ind}(K_1) = \text{ind}(K_2)$.
7. $O_7(l) = l \cdot u$, donde u es un nudo local trivial de índice 1.

donde l_i denota una cadena local admisible y L_i es una cadena admisible local o global.

Demostración. Sea

$$S^2 \times S^1 = \bigsqcup_{j=1}^n C_j$$

una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ y denotemos por L la cadena con índices compuesta por los centros de esta descomposición.

Consideremos una componente $C = C_j$ asociada a una 1-asa. El asa ampliada C debe ser equivalente a una de las variedades descritas en el teorema de clasificación de asas ampliadas (teorema 11).

Si C es local, las componentes de su frontera son necesariamente toroidales; para completar la variedad obviamente son necesarias otras asas ampliadas, resultando descomposiciones en asas redondas de $S^2 \times S^1$ cuyo flujo asociado se caracteriza por una cadena de órbitas periódicas con dos o más órbitas de tipo silla. Este es el caso, en particular, del asa ampliada del tipo (8) en el teorema 11, $C \cong T_1 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$, ya que únicamente puede darse como asa ampliada local.

Veamos el caso en que C es global en $S^2 \times S^1$:

A.- Consideremos en primer lugar que todas las componentes de ∂C sean separadoras:

1. Si $C \cong T_1 \times [0, 1] \# T_2 \times [0, 1]$, la suma conexa (véase el teorema 11) está definida por la 2-esfera:

$$S = D_1^2 \cup^i [-1, 1] \times \{1\} \times S^1 \cup^c D_2^2$$

Dicha esfera S separa la variedad en una 3-celda $B_1 = S \cup C_1^+ \cup C_1^- \cup (T_1 \times [0, 1])$ por uno de sus lados y en su complementario en $S^2 \times S^1$, B_2 . Denotemos por $C_1^-, C_1^+, C_2^-, C_2^+$ las cuatro componentes del complementario de C en $S^2 \times S^1$; concretamente, $C_1^- = T_1 \times \{0\}$ local y $C_2^- = T_2 \times \{0\}$ global (véase fig. 4.2).

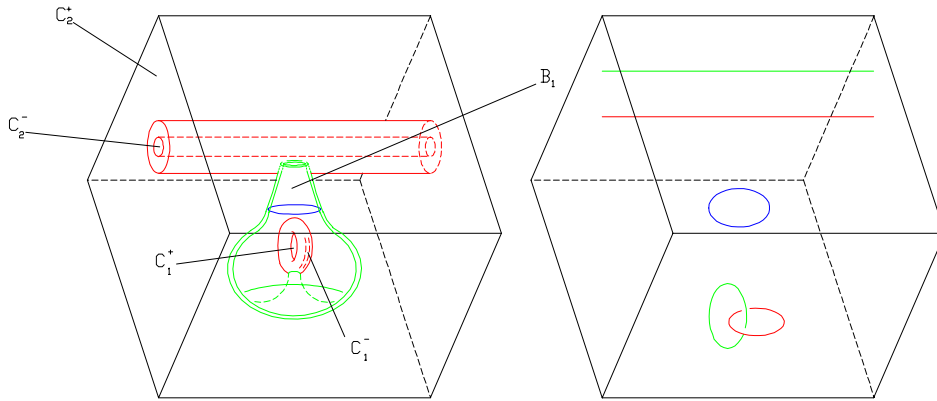


Fig. 4.2: Asa ampliada y cadena asociadas a la operación O_1

Es claro que:

$$S^2 \times S^1 - (C \cup B_2) = C_1^- \cup C_1^+ \cong S^3$$

con lo que $C_1^- \cup C_1^+$ proporciona una descomposición de S^3 en asas redondas.

De forma similar,

$$S^2 \times S^1 - (C \cup B_1) = C_2^- \cup C_2^+ \cong S^2 \times S^1$$

y teniendo en cuenta que $S^2 \times S^1 = S^2 \times S^1 \# S^3$, se obtiene una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$.

Denotemos por l_1 y L_2 las cadenas (local y global, respectivamente) formadas por los centros de las asas redondas en dichas descomposiciones. Dado que la esfera bidimensional S separa $C_1^- \cup C_1^+$ de $C_2^- \cup C_2^+$, las cadenas correspondientes a la bola D^3 y su complementario en $S^2 \times S^1$ están separadas. Además, en el ecuador de la esfera S la suma conexa define la órbita de tipo silla. Así, la cadena L asociada al asa ampliada se obtiene de l_1 y L_2 mediante la operación O_1 , cuya cadena de órbitas periódicas asociada puede observarse también en la figura 4.2.

$$L = O_1(l_1, L_2) = l_1 \cdot L_2 \cdot u$$

2. Si $C \cong T^2 \times [0, 1] \# D^2 \times S^1$, existen dos posibilidades: C se ha obtenido pegando una 1-asa separadora sobre un toro global $A = T^2$ empleando dos curvas de pegada triviales o bien pegando una 1-asa a un toro global y otro local usando una curva de pegada no esencial y otra esencial.

2.1 Si $A = T^2$, la esfera $S = D_1^2 \cup ([-1, 1] \times \{1\} \times S^1) \cup D_2^2$ define la suma conexa y separa la variedad en una 3-celda B_1 y su complementario en $S^2 \times S^1$, que denotaremos por B_2 . Asimismo, denotamos por C_1 , C_2^- y C_2^+ a las componentes del complementario de C en $S^2 \times S^1$ (véase fig. 4.3), tales que $C_2^- = T^2 \times \{0\}$, $C_2^+ = T^2 \times \{1\}$ y $C_1 \subset B_1$.

Del mismo modo que en el caso anterior,

$$S^2 \times S^1 \sim (C \cup B_1) = C_2^- \cup C_2^+ \cong S^2 \times S^1$$

Además, $C_1 = D^2 \times S^1$ es local, por lo que, C_1 , junto a una 0-asa $(D^2 \times S^1, k_1)$ forman una descomposición en asas redondas de S^3 . La suma conexa de ambas descomposiciones en asas proporciona una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$.

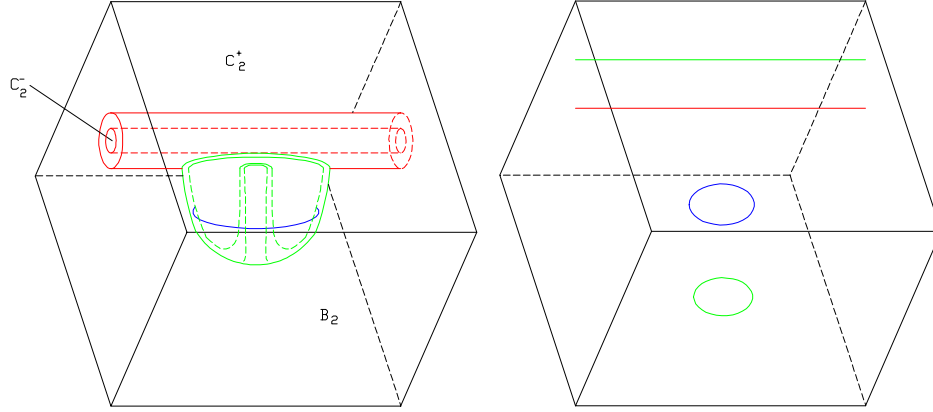


Fig. 4.3: Asa redonda y cadena asociadas a la operación O_2 .

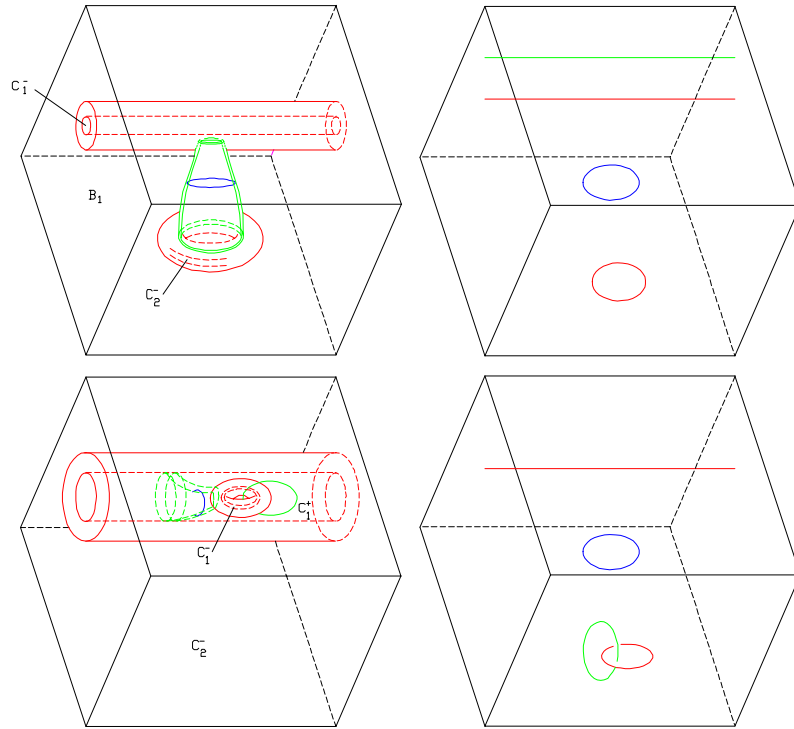
Denotando por l_1 y L_2 las cadenas (local y global, respectivamente) formadas por los centros de las asas redondas en dichas descomposiciones, la construcción del asa ampliada induce que l_1 pierda una componente k_1 de índice 0. Además, por ser el asa ampliada una suma conexa, la órbita de tipo silla en el ecuador de S está separada del resto de componentes de la cadena.

$$L = O_2(l_1, L_2) = (l_1 - k_1) \cdot L_2 \cdot u$$

2.2 Si $A = T^2 \cup T^2$, la esfera que define la suma conexa es (véase el teorema 11),

$$S = \overset{i}{T}_2^2 \times \{1\} - E \overset{\zeta}{\cup} \overset{i}{\{\pm 1\}} \times [-1, 1] \times S^1 \overset{\zeta}{\cup} D'_1$$

que nuevamente separa la variedad. Denotaremos por B_1 a la 3-celda de frontera S y por B_2 a su complementario en $S^2 \times S^1$. Asimismo, denotaremos por C_i^- , $i = 1, 2$, a las componentes del complementario de C , cuyas fronteras son $\partial C_i^- = T_i \times \{0\}$, $i = 1, 2$, y por C_1^+ a la restante componente conexa del complementario del asa ampliada C , $C_1^+ = S^2 \times S^1 \sim \overset{i}{C} \cup C_1^- \cup C_2^-$, (véase la figura 4.4).

Fig. 4.4: Asas ampliadas y cadenas asociadas a la operación O_2

Nótese que C_1^- y C_1^+ son globales si la pegada esencial de la 1-asa tiene lugar sobre el toro local (en cuyo caso $C_2^- \subset B_1$). De este modo, $C \cup B_1 = T^2 \times [0, 1]$, luego

$$S^2 \times S^1 \sim (C \cup B_1) = C_1^- \cup C_1^+ \cong S^2 \times S^1$$

con lo que $C_1^- \cup C_1^+$ forma una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$.

De forma similar al caso 2.1, C_2^- junto con una 2-asa $(D^2 \times S^1, k_1)$ forman una descomposición en asas redondas de S^3 , por lo que obtenemos una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$.

Si denotamos por l_1 y L_2 las cadenas local y global, respectivamente formadas por los centros de las asas redondas en dichas descomposiciones, por construcción del asa ampliada l_1 pierde una componente k_1 . Además, la órbita de tipo silla está separada del resto de componentes de la cadena, por definición de suma conexas. Así, deducimos que la cadena L (véase fig 4.4) se obtiene de l_1 y L_2 mediante la operación:

$$L = O_2(l_1, L_2) = (l_1 - k_1) \cdot L_2 \cdot u$$

donde el índice de k_1 es 2.

Si, por el contrario, la pegada trivial se efectúa sobre el toro local, C_1^- y C_1^+ son ambos locales, $C_1^- \subset B_1$ y C_2^- es global. En este caso, $C \cup B_1 = D^2 \times S^1$ global que, junto con una 2-asa $(D^2 \times S^1, K_2)$ constituye una descomposición en asas de $S^2 \times S^1$. Además, $C_1^- \cup C_1^+ \cong S^3$ y la suma conexa de ambas descomposiciones es a su vez una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$, de donde podemos deducir que la cadena l se obtiene de l_1 y L_2 mediante la operación

$$L = O_2(l_1, L_2) = l_1 \cdot (L_2 - K_2) \cdot u$$

donde K_2 es una componente global de índice 2 (figura 4.4).

3. Cuando $C \cong D^2 \times S^1 \# D^2 \times S^1$, el asa ampliada puede provenir de pegar una 1-asa sobre un toro global usando una curva de pegada esencial y otra no esencial, o bien pegando sobre un toro local una 1-asa separadora empleando las mismas curvas de pegada. Denotaremos por C_1^- y C_1^+ a las componentes del complementario de C en $S^2 \times S^1$ (figura 4.5), donde $\partial C_1^- = T^2 \times \{0\}$

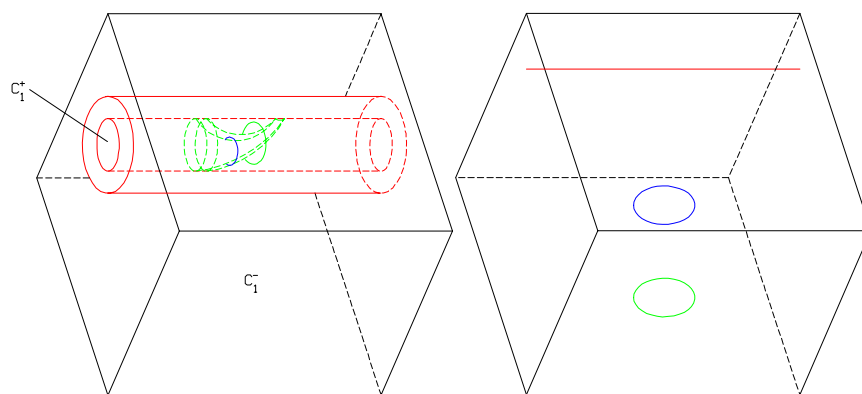


Fig. 4.5: Asa ampliada y cadena asociadas a la operación O_3

En todos los casos la esfera

$$S = i T^2 \times \{1\} - E^{\mathbb{C}} \cup i \{\pm 1\} \times [-1, 1] \times S^1 \mathbb{C} \cup D'_1 \cup D'_2$$

define la suma conexa de dos toros sólidos (teorema 11). Nuevamente, denotamos por B_1 a la 3-celda de frontera S y por B_2 a su complementario en la variedad. Entonces,

$$C \cup B_1 = D^2 \times S^1$$

donde $D^2 \times S^1$ es un toro sólido global y, por tanto,

$$S^2 \times S^1 - (C \cup B_1) = D^2 \times S^1$$

de modo que podemos reconstruir $S^2 \times S^1$ pegando una 2-asa ($D^2 \times S^1, K_2$) sobre C_1^- . Denotemos por L_2 a la cadena con índices que consiste en los centros de esta descomposición en asas redondas.

Por otra parte,

$$C_1^+ = S^2 \times S^1 - (C \cup B_2) = D^2 \times S^1$$

es un toro sólido local sumergido en B_1 , con lo que obtendremos nuevamente una descomposición en asas de S^3 pegando a C_1^+ una 0-asa ($D^2 \times S^1, k_1$); denotamos por l_1 a la cadena con índices resultante.

En este caso la cadena que representa el flujo de la variedad está definida por la operación O_3 (véase la figura 4.5).

$$L = O_3(l_1, L_2) = (l_1 - k_1^{(\alpha)}) \cdot L_2 - K_2^{(2-\alpha)} \cdot u$$

donde $\alpha = 0$ ó 2 y la órbita de tipo silla es un nudo separado de la cadena, por definición de suma conexa.

4. Si $C \cong S^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ el asa ampliada proviene de pegar una 1-asa no separadora sobre un toro local empleando curvas de pegada c_i no esenciales de manera que las coronas que limitan cada $c_i = \partial D_i^2$ verifican $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$, $j = 1$ para $i = 2$ y $D_1^2 \cap D_2^2 = \emptyset$. Denotemos por B_1 a la 3-celda de frontera la esfera S que define la suma conexa (véase el teorema 11) y por C_1^- y C_1^+ a las componentes del complementario de C en $S^2 \times S^1$. Nótese que ambas componentes son locales, $C_1^- = T^2 \times \{0\}$ y $C_1^- \cup C_1^+ \subset B_1$ (figura 4.6).

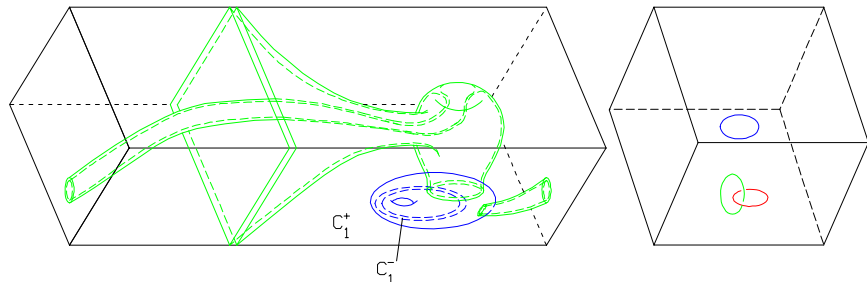


Fig. 4.6: Asa ampliada y cadena asociadas a la operación O_7

De hecho, $C_1^- \cup C_1^+ \cong S^3$ y dado que $C \cup C_1^- \cup C_1^+ \cong S^2 \times S^1$, concluimos que esta es una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ tal que los centros de las asas forman la cadena local l , separada de la órbita de tipo silla que aparece en el ecuador de la esfera S de la suma conexa (fig. 4.11). Así, el flujo en la variedad es descrito por la operación:

$$O_7(l) = l \cdot u$$

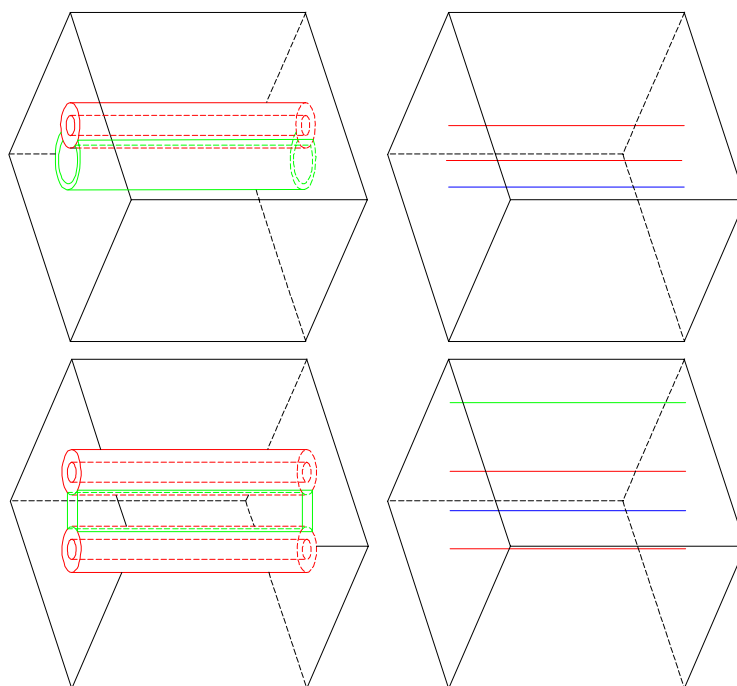
5. Supongamos ahora que $C \cong F_{p+1} \times S^1$. Distinguiremos dos casos en función de si la frontera de C contiene únicamente toros globales o si una de sus componentes es un toro local.

- 5.1 Supongamos que todas las componentes de la frontera de C son toros globales y denotemos por C_1 , C_2 y C_3 a las componentes conexas del complementario de C en $S^2 \times S^1$.

Esta asa ampliada puede obtenerse pegando una 1-asa separadora sobre $A = T^2$ empleando curvas esenciales longitudinales o bien sobre $A = T^2 \cup T^2$ empleando dos paralelos como curvas de pegada. En este último caso, $p = 1$.

Cuando la 1-asa se pega sobre un único toro (véase la figura 4.7), $\partial C_1 = T^2 \times \{0\}$ y $C \cup C_1 \cup C_2 \cong D^2 \times S^1$ global, por lo que $D^2 \times S^1$ junto con C_3 forman una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$. Además, la órbita periódica en el centro de C_2 y la órbita de tipo silla son (p, q) -cables del centro de C_1 , por lo que la cadena que define el flujo NMS se describe mediante la operación O_5 .

Si $A = T_1^2 \cup T_2^2$, $\partial C_1 = T_1^2 \times \{0\}$ y $\partial C_2 = T_2^2 \times \{0\}$ (fig. 4.13); de forma análoga al caso anterior, $C \cup C_1 \cup C_2 \cong D^2 \times S^1$ es global y junto con C_3 forman una descomposición en asas de $S^2 \times S^1$. La órbita en el centro de C_2 junto con la órbita de tipo silla son $(1, 0)$ -cables de la órbita en el centro de C_1 , describiéndose la cadena asociada al flujo NMS por la operación O_5 con $p = 1$.

Fig. 4.7: Asas ampliadas y cadenas asociadas a la operación O_5 .

5.2 Consideremos ahora que una de las componentes de la frontera de C es un toro local: el asa ampliada proviene entonces de pegar una 1-asa separadora sobre $A = T^2$ (global o local) empleando para ello como curvas de pegada dos meridianos si A es global o dos paralelos cuando A es local. También podemos encontrar esta asa ampliada pegando una 1-asa separadora sobre la unión de dos toros enlazados, uno de ellos local, empleando como curvas de pegada un meridiano y un paralelo (figura 4.8), o bien pegando una 1-asa no separadora sobre $A = T_1^2 \cup T_2^2$, donde al menos uno de los toros debe ser global.

Las componentes del complementario de C en $S^2 \times S^1$ son tres, que denotaremos por C_1 , C_2 y C_3 ; cuando $A = T^2$, $\partial C_1 = T^2 \times \{0\}$ y si $A = T_1^2 \cup T_2^2$, entonces $\partial C_1 = T_1^2 \times \{0\}$ y $\partial C_2 = T_2^2 \times \{0\}$. En cualquier caso, $C \cup C_1 \cup C_2 \cong D^2 \times S^1$ puede reemplazarse por un asa $(D^2 \times S^1, K_1)$, que junto con (C_3, K_2) forman una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ en la que la órbita de tipo silla y el centro de C_2 son meridianos de la órbita periódica situada en el centro de C_1 (aplicando el lema 59) y el índice de K_1 depende de si $\partial C_2 \subset \partial_- C$. Así, la operación asociada al flujo NMS en este caso es O_4 .

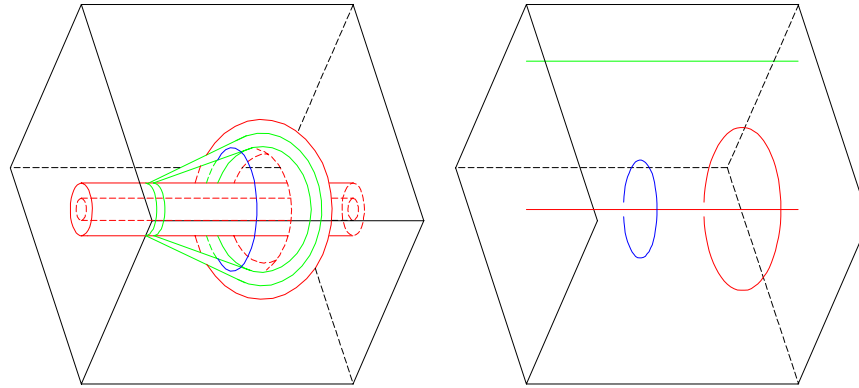


Fig. 4.8: Asa ampliada y cadena asociadas a la operación O_4

6. Por último, si $C \cong K^3 - int(W)$ o $C \cong D^2 \times S^1 - int \overline{W}^c$, denotemos por $P = C - int(N(U, C))$ donde U es la órbita de índice 1. Entonces, $P \cong F_2 \times S^1$. Sea C_2 la componente del complementario de C en $S^2 \times S^1$ tal que ∂C_2 es un $(2, 1)$ -toro. Obtenemos así $P \cup C_2 \cong T^2 \times [0, 1]$.

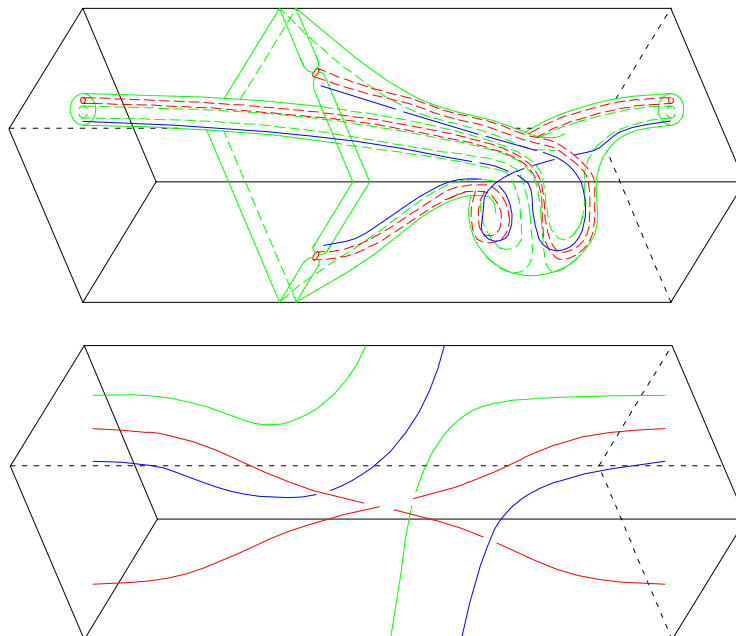


Fig. 4.9: Asa ampliada y cadena asociadas a la operación O_6

De este modo, $C \cup C_2$ es equivalente a $D^2 \times S^1$ con dos nudos con índice: $U \equiv \{*\} \times S^1$ de índice 1 que estará en el centro de una banda de Möbius (formada por la variedad estable de la órbita silla en el caso $C \cong K^3 - \text{int}(W_0)$ (fig. 4.9) o por la variedad inestable en el caso $D^2 \times S^1 - \text{int}(W)$) y K_2 , el $(2, q)$ -cable de U de índice α , donde $i = 0$ ó 2 dependiendo de si $\partial_0 \subset \partial_- C$ o no. Podemos construir una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ reemplazando $C \cup C_2$ por un α -asa redonda $(D^2 \times S^1, K_1)$. Denotando por L_1 la cadena con índices consistente en los centros de esa descomposición en asas redondas, L se obtiene a partir de L_1 mediante la operación O_6 .

B.- Supongamos ahora que la frontera de C tiene componentes no separadoras.

Consideraremos en primer lugar las asas ampliadas con componentes no toroidales en su frontera. Nótese que el complementario en $S^2 \times S^1$ de estas asas ampliadas es, salvo unión de toros sólidos locales, otra asa ampliada cuya frontera tiene un bitoro y una esfera no separadores como componentes (véase la figura 4.10).

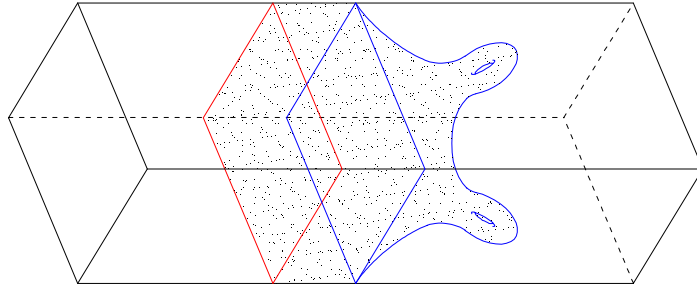


Fig. 4.10: $S^2 \times S^1 - B\tau \# D^3 \cong B\tau \# D^3$

Así, es posible construir una descomposición en asas redondas de la variedad identificando las fronteras no separadoras de dos asas ampliadas de los tipos descritos en el teorema 11. Nótese que las asas ampliadas cuyas componentes de la frontera son bitoros y esferas son incompatibles con aquellas que tienen toros no separadores. Veremos que al efectuar diferentes combinaciones entre dichas asas engordadas, se obtienen distintas cadenas.

1. Supongamos $C \cong B\tau \# D^3 - \bigcup_{i=1}^n \text{int}(W_i)$. Denotemos por τ_1 y τ_2 dos toros sólidos tales que $\partial\tau_i = \partial W_i$, $i = 1, 2$. Nótese que

$$C \cup \tau^1 \cup \tau^2 \cong B\tau \# D^3 = S^2 \times S^1 - C'$$

Así, dependiendo de la variedad C' , pueden darse dos casos:

- 1.1 Si $C' \cong B\tau \# D^3 - \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathfrak{S} \int_{int(W'_i)} \mathfrak{N} \cup \tau^1 \cup \tau^2 \cong B\tau \# D^3$, la cadena de órbitas periódicas asociada al flujo NMS estará formada por la suma separada de las cadenas formadas por $W_i \cup W'_i$, $i = 1, 2$, (ya que cada $W_i \cup W'_i$ puede aislarse en una 3-celda) y de dos órbitas de tipo silla, asimismo locales, u_i (figura 4.11), correspondientes a las asas ampliadas C y C' :

$$l_1 \cdot l_2 \cdot u_1 \cdot u_2$$

que se puede obtener a partir de la operaciones anteriores:

$$O_2(l_2, O_2(l_1, h)) = l_1 \cdot l_2 \cdot u_1 \cdot u_2$$

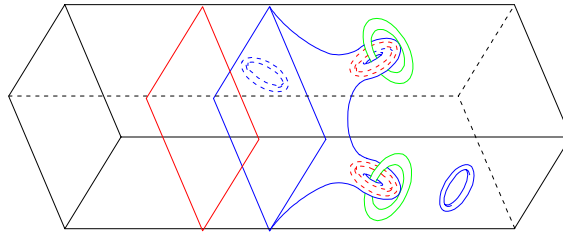


Fig. 4.11: $C \cong B\tau \# D^3 - \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathfrak{S} \int_{int(W_i)} \mathfrak{N}$, $C' \cong Q \cup \tau^1 \cup \tau^2$

- 1.2 Sea $C' \cong [B\tau \# D^3 - int(W')] \cup \tau$, donde τ es un toro sólido tal que $\partial\tau = \partial W$. Nótese que $W_1 \cup W' \cong S^3$ y W_2 junto con un toro local asociado al nudo k de índice 2 forma asimismo una descomposición en asas redondas de S^3 ; dado que S^3 es trivial respecto a la suma conexas, la cadena de órbitas periódicas asociada estará formada por la suma separada de las cadenas aisladas en las 3-celdas descritas (figura 4.12), y dos órbitas de tipo silla u_i , $i = 1, 2$,

$$l_1 \cdot (l_2 - k) \cdot u_1 \cdot u_2$$

que se puede obtener como:

$$O_3(l_2, O_2(l_1, h)) = l_1 \cdot (l_2 - k) \cdot u_1 \cdot u_2$$

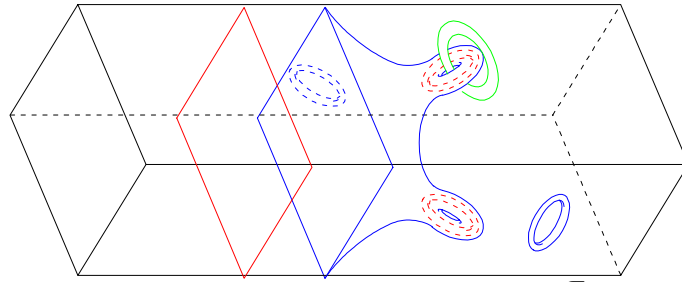


Fig. 4.12: $C \cong B\tau \# D^3 \sim \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathfrak{S} \int_{\mathfrak{A}}$ $int(W_i)$,
 $C' \cong [B\tau \# D^3 - int(W')] \cup \tau$

2. Consideremos ahora que $C \cong B\tau \# D^3 - int(W)$; en este caso, la frontera de C está compuesta por el bitoro $B\mathbb{P}^2$, la 2-esfera \mathfrak{S}^2 y un toro separador que corresponde al entorno regular de una órbita repulsora. Como en el caso anterior,

$$C \cup \tau \cong B\tau \# D^3 = S^2 \times S^1 - C'$$

Así, dependiendo de la variedad complementaria, pueden darse dos casos:

- 2.1 Si $C' \cong B\tau \# D^3 - \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathfrak{S} \int_{\mathfrak{A}} int(W'_i) \cup \tau^1 \cup \tau^2$, la cadena de órbitas periódicas asociada al flujo estará formada de nuevo por

$$l_1 \cdot (l_2 - k) \cdot u_1 \cdot u_2$$

donde k es la componente de la cadena de Hopf local l_2 con índice 0, (figura 4.13).

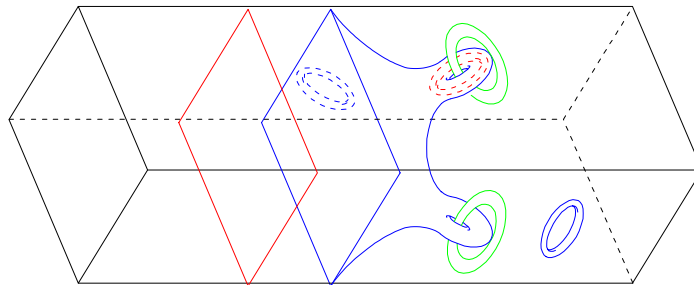


Fig. 4.13: $C \cong B\tau \# D^3 \sim \int_{\mathfrak{A}} \mathfrak{S} int(W)$,
 $C' \cong B\tau \# D^3 - \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathfrak{S} int(W'_i) \cup \tau^1 \cup \tau^2$

2.2 Si $C' \cong [B\tau \# D^3 - \text{int}(W)] \cup \tau$, por ser W y W' locales (figura 4.14), podemos encontrar dos 3-celdas tales que W y W' estén sumergidas en ellas y junto con los toros locales $(D_1^2 \times S^1, k_1)$, $(D_2^2 \times S^1, k_2)$ de índices α y $2 - \alpha$, respectivamente forman sendas descomposiciones de S^3 en asas redondas. Así, las cadenas en los centros de dichas descomposiciones junto con las órbitas de tipo silla forman la cadena asociada al flujo NMS:

$$l_1 - k_1^{(\alpha)} \cdot l_2 - k_2^{(2-\alpha)} \cdot u_1 \cdot u_2$$

que puede obtenerse como:

$$O_3(l_2, O_3(l_1, h)) = (l_1 - k_1) \cdot (l_2 - k) \cdot u_1 \cdot u_2$$

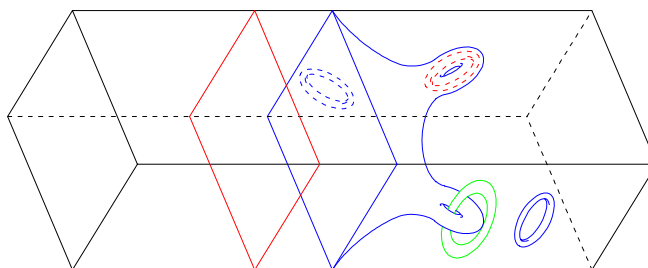


Fig. 4.14: $C \cong B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$, $C' \cong [B\tau \# D^3 - \text{int}(W')] \cup \tau$

3. Si $C \cong T_1 \times [0, 1] \# T^2 \times [0, 1]$ se obtiene pegando una 1-asa no separadora sobre dos toros locales, utilizando curvas triviales, de manera que las coronas que limitan cada c_i verifican $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$.

Las componentes de la frontera de C son dos toros separadores y dos no separadores, por lo que para completar la variedad hemos de utilizar otra asa ampliada C' con dos componentes de la frontera toroidales, tales que puedan identificarse con las de C . Existen dos posibilidades:

- 3.1 Si $C' \cong C \cong T_1 \times [0, 1] \# T^2 \times [0, 1]$ es local, entonces las componentes separadoras de las fronteras de ambas asas ampliadas quedan enlazadas y, por ser locales, es posible encontrar sendas 3-celdas tales que contengan cada una de ellas una descomposición de S^3 . De este modo, la cadena asociada al flujo NMS es, en este caso,

$$l_1 \cdot l_2 \cdot u_1 \cdot u_2$$

3.2 Si $C' \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ es local, al identificar las componentes no separadoras de su frontera con las correspondientes de C , la única componente separadora de $\partial C'$ queda enlazada con una de las respectivas componentes toroidales separadoras de la frontera de C . Denotemos por C_1 y C_2 a las componentes conexas de $S^2 \times S^1 - C$ con frontera separadora y por C'_1 a la componente conexa de $S^2 \times S^1 - C'$ con borde separador. Así, es posible encontrar sendas 3-celdas B_i , $i = 1, 2$, en $S^2 \times S^1$ tales que $C_1 \cup C'_1 \cong S^3 \subset B_1$ y $C_2 \cup (D^2 \times S^1, k_2) \subset B_2$, donde $D^2 \times S^1$ es un asa de índice 2, y definen la suma conexa $S^2 \times S^1 \cong S^2 \times S^1 \# S^3 \# S^3$. La cadena de órbitas periódicas asociada al flujo es, por tanto,

$$l_1 \cdot (l_2 - k) \cdot u_1 \cdot u_2$$

4. Si $C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, se obtiene pegando una 1-asa no separadora sobre un toro local, utilizando curvas triviales, de manera que las coronas que limitan cada c_i verifican $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$ y con $j = 1$ para $i = 2$ y $D_2^2 \subset D_1^2$ (o $D_1^2 \subset D_2^2$). Las componentes de la frontera son dos toros no separadores y un toro separador local. Del mismo modo que en el caso anterior, es necesario pegar a C otra asa ampliada C' identificando las componentes no separadoras de sus fronteras para completar la variedad. Hay dos posibilidades:

4.1 Si $C' \cong C \cong D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$, las dos componentes de la frontera toroidales y separadoras pueden aislarse mediante sendas 3-celdas en $S^2 \times S^1$. Empleando razonamientos análogos a los expuestos en casos anteriores, podemos afirmar que la cadena asociada al flujo en este caso es

$$l_1 - k_1^{(\alpha)} \cdot l_2 - k_2^{(2-\alpha)} \cdot u_1 \cdot u_2$$

4.2 Para $C' \cong T_1 \times [0, 1] \# T^2 \times [0, 1]$, la descomposición en asas redondas asociada ha sido ya descrita en el caso 3.2, siendo la cadena resultante

$$l_1 \cdot (l_2 - k) \cdot u_1 \cdot u_2$$

5. Si $C \cong F_2 \times S^1$, se obtiene pegando una 1-asa no separadora sobre un toro local empleando curvas de pegada esenciales longitudinales; Las componentes de la frontera de C son dos toros no separadores enlazados y un toro separador local. Obviamente, para completar la variedad es

necesario utilizar otra asa ampliada C' con dos componentes de la frontera no separadoras y enlazadas, para poder efectuar la identificación; esto deja una sólo posibilidad: $C \cong C'$. Las componentes separadoras de $\partial C \cup \partial C'$ pueden sumergirse en 3-celdas disjuntas, de manera que siguiendo razonamientos análogos a los desarrollados en casos anteriores, la cadena asociada al flujo NMS es

$$l_1 - k_1^{(\alpha)} \cdot l_2 - k_2^{(2-\alpha)} \cdot u_1 \cdot u_2$$

■

Además, en el capítulo siguiente, veremos que la composición de los flujos NMS descritos por estas cadenas es a su vez un flujo NMS, obteniéndose que es posible recomponer la variedad $S^2 \times S^1$ a partir de un número par de asas ampliadas cuyas componentes no separadoras de la frontera sean bitoros y esferas. Si las componentes no separadoras de la frontera de las asas ampliadas son toroidales, también es posible recomponer $S^2 \times S^1$, aunque el número de asas ampliadas no es necesariamente par.

Los resultados obtenidos permiten resumir el tipo de nudo de las órbitas silla. Así, las órbitas locales de tipo silla u que pueden aislarse del resto de la cadena mediante una 3-celda provienen de las operaciones O_1, O_2, O_3, O_7 ; si no pueden aislarse del resto de la cadena mediante una 3-celda pero son asimismo locales, se han obtenido mediante la operación O_4 y, finalmente, si las órbitas de tipo silla u son todas globales, podemos afirmar que la cadena proviene de la aplicación de las operaciones O_5 y O_6 .

Capítulo 5

Flujos NMS sobre $S^2 \times S^1$

En este capítulo llevaremos a cabo un estudio de los flujos NMS, con distintos intereses: por un lado, demostramos de forma unívoca que las únicas 3-variedades que admiten un flujo NMS con 0 ó 1 órbitas periódicas de tipo silla son los espacios lenticulares (sección 5.1); en particular, $S^2 \times S^1$. Veremos además que en algunos casos este flujo es una suma conexa de flujos (sección 5.2) sobre una variedad que es, a su vez, suma conexa de variedades ([13]). En esta sección dibujaremos el flujo completo para los sistemas NMS en $S^2 \times S^1$ con una órbita de tipo silla que son suma conexa de flujos, comprobando lo enunciado anteriormente.

En la sección siguiente también estudiaremos los flujos de sistemas NMS provenientes de asas ampliadas construidas mediante pegadas esenciales. Estos flujos son especialmente interesantes para el caso de sistemas Hamiltonianos (capítulo 6).

Por otra parte, recordemos que, en el caso específico en que el asa ampliada es del tipo $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$ o $B\tau\#D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$, la descomposición en asas redondas (que incluya a una de las anteriores) más simple que podemos encontrar de $S^2 \times S^1$ consta de dos asas ampliadas (teorema 12). Para estos casos, describiremos en la sección 5.4 el flujo NMS asociado a dicha descomposición, teniendo en cuenta que dicho flujo está determinado por la existencia de un número par de órbitas de tipo silla.

Finalmente, veremos que los flujos NMS asociados a las cadenas de tipo $l \cdot u$ son propios de $S^2 \times S^1$ si l es una cadena con una única componente conexa (proposición 62).

5.1 Espacios lenticulares

Los espacios lenticulares fueron definidos en primer lugar por Tietze [49], como los ejemplos más simples posibles entre las 3-variedades obtenidas identificando caras de un poliedro. A. Hatcher proporciona, en [31], una clasificación de los espacios lenticulares, entre los que figura la variedad objeto de nuestro estudio, $S^2 \times S^1$. A continuación proporcionaremos la definición de espacio lenticular y mostraremos, en líneas generales, dichos resultados.

Definición 60 Sean $D_1 \times S^1$ y $D_2 \times S^1$ dos toros sólidos y sean $m_i = \{x_i\} \times \partial D^2$ y $l_i = S^1 \times \{y_i\}$ los meridianos y paralelos, respectivamente, de los toros sólidos $D_i \times S^1$, $i = 1, 2$. Llamamos espacio lenticular, y lo denotamos por $L(p, q)$, a una 3-variedad que se obtiene a partir de $D_1 \times S^1$ y $D_2 \times S^1$ identificando sus fronteras de manera que el difeomorfismo

$$\varphi : \partial D_1 \times S^1 \rightarrow \partial D_2 \times S^1$$

identifica un meridiano m_i a una curva de pendiente p/q , es decir, que rodea el factor S^1 girando p veces en torno a un meridiano y q veces en torno a un paralelo.

Asumimos la convención de que un meridiano tiene pendiente ∞ y un paralelo tiene pendiente 0. El cociente p/q determina $L(p, q)$ completamente, ya que las circunferencias en $\partial D \times S^1$ están determinadas, salvo isotopía, por sus pendientes, y una vez el disco meridiano del segundo toro sólido se ha pegado al primero, sólo existe una forma de pegar la 3-celda restante.

Hasta el momento hemos estudiado dos variedades que pueden construirse como la unión de dos toros sólidos $D_1 \times S^1$ y $D_2 \times S^1$ tales que

$$i_{D_1 \times S^1}^{\natural} \cap i_{D_2 \times S^1}^{\natural} = \partial D_1 \times S^1 = \partial D_2 \times S^1$$

Dependiendo de la manera en que identifiquemos, una a una, las curvas esenciales en la frontera de los toros, la variedad obtenida puede ser $S^3 \cong L(0, 1)$ o $S^2 \times S^1 \cong L(1, 0)$.

En particular, $\pi_1(L(p, q)) = Z_q$. Esto puede deducirse directamente de la definición de $L(p, q)$ ya que el disco meridiano del segundo toro sólido se pega a $D^2 \times S^1$ a lo largo de una circunferencia que rodea el factor S^1 q veces, por lo que la siguiente pegada de la 3-celda no tienen efecto sobre π_1 . Debido a que $\pi_1(L(p, q)) = Z_q$, q está determinado de forma única por $L(p, q)$, ya que siempre consideramos $q \geq 0$.

Sin embargo, existe cierta ambigüedad respecto a p . En primer lugar, podemos reelegir el paralelo en $D^2 \times S^1$ añadiendo un cierto número de giros

en torno al meridiano. Esto cambia la pendiente de la variedad en un número entero, tal que $L(p, q) = L(p', q)$ si $p' \equiv p \pmod{q}$. Asimismo, cambiar la orientación de $D^2 \times S^1$ cambia el signo de los giros, por lo que $L(-p, q) = L(p, q)$ (nótese que no especificamos la orientación de $L(p, q)$). Finalmente, podemos intercambiar los papeles de los toros sólidos en la definición de $L(p, q)$, reemplazando φ por φ^{-1} .

Nuestro interés en este tipo de espacios radica en que son las 3-variedades que admiten un flujo NMS con una o ninguna órbita de tipo silla (véase [13]).

Teorema 13 *Sea M una 3-variedad orientable, simple, compacta y sin frontera. Si M admite un flujo NMS con 0 ó 1 órbitas de tipo silla, entonces M es un espacio lenticular.*

Demostración. Bajo la hipótesis de la existencia de un flujo NMS y aplicando la proposición 41 de Morgan [41], M admite una descomposición en asas redondas. Además, por hipótesis, esta descomposición tendrá como máximo un asa ampliada, ya que hay en ella 0 ó 1 órbitas de tipo silla.

Denotemos por r el número de órbitas periódicas de tipo silla de la variedad.

Si no hay ninguna órbita de tipo silla, la variedad se construye pegando una 0-asa redonda y una 2-asa redonda. Por definición, M es en este caso, un espacio lenticular.

Si hay más órbitas periódicas atractoras y repulsoras, es necesaria una separatriz entre las respectivas regiones de atracción. De este modo, deberá existir, al menos, una órbita de tipo silla.

Por otra parte, si hay una órbita de tipo silla, ésta proviene de pegar una 1-asa redonda a un toro o a una unión de toros.

Cuando la 1-asa redonda es orientable puede pegarse mediante círculos esenciales o no esenciales, mientras que si la 1-asa redonda es no orientable, sólo puede pegarse mediante círculos esenciales a un toro, como se ha demostrado en el lema 43 y el teorema 11. Además, debido a la existencia de una única órbita de tipo silla, quedan descartadas las asas ampliadas de los tipos (1), (2) y (8) en el teorema 11, ya que en estos casos son necesarias al menos dos asas ampliadas para completar la variedad. De esta forma eliminamos aquellos casos en los que, en la frontera de una descomposición en asas redondas de M pueden existir componentes no toroidales.

Pegamos la 1-asa a toros repulsivos sobre la variedad estable de la órbita de tipo silla. De este modo, el asa ampliada resultante se comporta como un toro repulsor. Para completar la variedad, identificamos las componentes del complementario con 0-asas, si su borde pertenece a $\partial_- C$; asimismo, identificamos cada una de las restantes componentes del complementario con una

2-asa, hasta obtener un toro sólido que se comporta como un toro repulsor global, que denotaremos por $D_1 \times S^1$. Por tanto, sobre él puede pegarse una 2-asa, que denotaremos por $D_2 \times S^1$, para completar el flujo NMS. La variedad M se reconstruye pegando sobre sus fronteras dos toros sólidos: un toro repulsor, obtenido a partir del asa ampliada, y otro atractor. Así, podemos afirmar que M es un espacio lenticular $L(p, q)$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ dependen del homeomorfismo que identifica las fronteras de ambos toros. ■

Nótese que, se encuentran descomposiciones de $S^2 \times S^1$ con componentes no toroidales de la frontera de las asas ampliadas; esta descomposición exige un número par de órbitas de tipo silla, ya que el complementario de la variedad en estos casos es necesariamente otra asa ampliada con las mismas componentes no toroidales de la frontera.

Dado que la existencia de una descomposición en asas redondas de la variedad es condición necesaria y suficiente para que dicha variedad admita un flujo NMS, resulta interesante conocer cómo es el flujo NMS asociado a las asas ampliadas que definen la descomposición. En las secciones siguientes estudiaremos los flujos básicos en $S^2 \times S^1$ con una o dos órbitas de tipo silla, entendiendo como básico aquel flujo obtenido a partir de una descomposición en asas redondas de la variedad con el mínimo número de asas ampliadas posible.

5.2 Suma conexa de flujos

La suma conexa de toros se obtiene al pegar una 1-asa redonda por medio de una o dos curvas no esenciales (K. Yano [53], M. Wada [51], etc). En el lema 43 y el teorema 11 se han clasificado las diferentes sumas conexas en función del tipo de pegada empleado. A continuación definiremos la suma conexa de flujos (véase [42]), y veremos que el flujo asociado a la suma conexa de toros corresponde a la suma conexa de los flujos de cada uno de los toros.

Definición 61 Sean φ_1 y φ_2 flujos NMS sobre las variedades tridimensionales M_1 y M_2 , respectivamente. Sean $D_i^3 \subset M_i$, $i = 1, 2$, las 3-celdas tales que φ_i es transversal a ∂D_i^3 excepto en los puntos de las circunferencias σ_i situadas sobre el ecuador. Sea $B_i^+ \cup B_i^-$ la parte de la frontera a través de la cual las trayectorias de φ_i entran (salen) de ∂D_i^3 . Dejando a un lado los círculos máximos σ_i denotamos los flujos modificados por $\hat{\varphi}_i$.

Identifiquemos las fronteras de las variedades $M_1 - D_1^3$ y $M_2 - D_2^3$ con un homeomorfismo que invierta la orientación, $h : \partial D_1^3 \rightarrow \partial D_2^3$, tal que

$$h \upharpoonright B_1^+ = B_2^-, \quad h \upharpoonright B_1^- = B_2^+, \quad h(\sigma_1) = \sigma_2$$

Así los flujos $\hat{\varphi}_1$ y $\hat{\varphi}_2$ proporcionan un flujo φ sobre $M_1 \# M_2$ con una órbita tipo silla en σ_i . El flujo φ recibe el nombre de suma conexa de los flujos φ_1 y φ_2 .

A continuación mostraremos los flujos NMS sobre $S^2 \times S^1$ correspondientes a las asas engordadas obtenidas en el teorema 11 que son suma conexa de variedades y demostraremos que sus correspondientes flujos son también suma conexa de flujos.

Suma conexa $T_1 \times [0, 1] \# T_2 \times [0, 1]$

Esta asa ampliada se obtiene al pegar una 1-asa redonda a dos toros disjuntos mediante dos círculos no esenciales (caso (3) del teorema 11). Denotemos por φ_1 y φ_2 los flujos correspondientes a cada $T_i \times [0, 1]$, $i = 1, 2$, tales que $\partial_- C = T_1 \times \{0\} \cup T_2 \times \{0\}$. Consideremos dos discos D_i^3 sumergidos en $T_i \times [0, 1]$, $i = 1, 2$, transversalmente a los flujos respectivos. Tal y como se ha visto en la definición de flujo conexo, al definir una aplicación h que invierta la orientación entre las fronteras ∂D_i^3 , el ecuador de la resultante ∂D^3 se convierte en una órbita de tipo silla separada del resto de órbitas periódicas de la variedad. Las componentes del complementario son toros sólidos en cuyos centros hay órbitas atractoras o repulsoras de acuerdo con la dirección del flujo en la frontera. Dichas componentes son tres: una de ellas es incompresible en la variedad, cuya frontera es precisamente $T_1 \times \{0\}$, y las otras dos están enlazadas entre sí y están sumergidas en la 3-celda D^3 . Nótese que una de estas componentes enlazadas tiene como frontera a $T_2 \times \{0\}$.

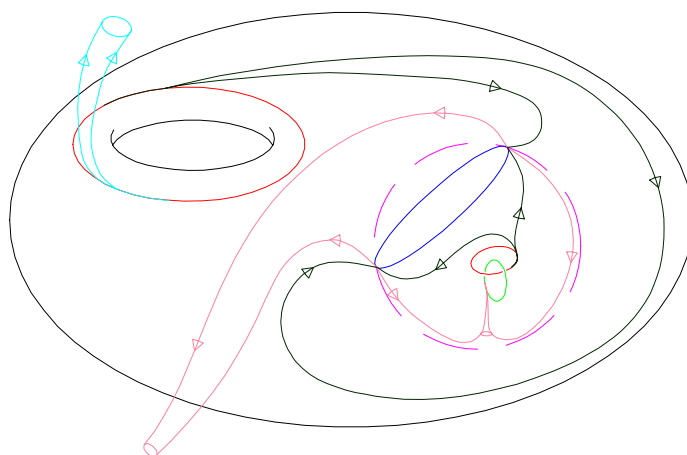


Fig. 5.1: Flujo NMS conexo de $T_1 \times [0, 1] \# T_2 \times [0, 1]$.

Para obtener el flujo conexo es necesario tener en cuenta que el asa redonda se ha pegado de forma trivial a los toros, así que el comportamiento del flujo debe ser no esencial; es decir, las variedades estable e inestable de la órbita silla deben ser triviales respecto de las órbitas atractoras y repulsoras, ya sean locales o globales. El flujo conexo resultante puede verse de forma genérica en la figura 5.1.

Para tener un flujo NMS sobre $S^2 \times S^1$ uno de los toros debe ser global (sea $T_1 \times [0, 1]$), por lo que tendremos una órbita periódica global repulsora. Dado que $T_2 \times [0, 1]$ está sumergido en una 3-celda D^3 , las órbitas periódicas de su interior serán locales y estarán enlazadas, obteniéndose una $(0, 2)$ -cadena de Hopf local. Por supuesto, la órbita de tipo silla en el ecuador de ∂D^3 es también local. Como hemos visto, para recomponer $S^2 \times S^1$ se necesita un órbita global atractora en el complementario (figura 5.2).

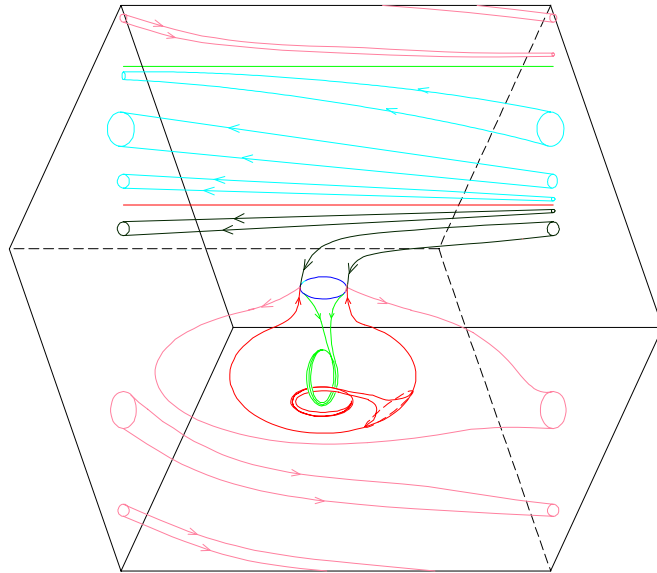


Fig. 5.2: Flujo NMS conexo de $T_1 \times [0, 1] \# T_2 \times [0, 1]$ en $S^2 \times S^1$.

Suma conexa $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ Denotaremos por φ_1 y φ_2 los flujos sobre $M_1 = D^2 \times S^1$ y $M_2 = T^2 \times [0, 1]$, respectivamente. Consideremos además las 3-celdas $D_1^3 \subset M_1$ y $D_2^3 \subset M_2$ tales que φ_1 y φ_2 son transversales a sus fronteras. Sabemos que $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ o bien $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$, por lo que M_1 puede ser una 2-asa o una 0-asa, respectivamente.

En el primer caso, el asa ampliada ha sido obtenida pegando una 1-asa sobre un toro mediante dos curvas triviales (véase el teorema 11). Para con-

servar el tipo de homotopía de las curvas, las variedades estable e inestable de la órbita silla deben ser triviales respecto de las órbitas atractoras y repulsoras (figura 5.3).

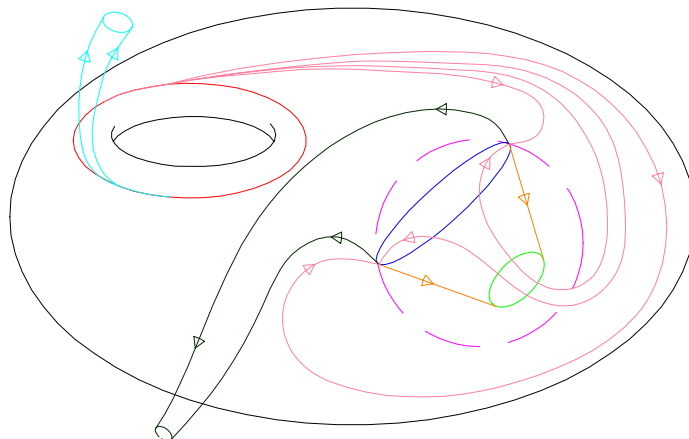


Fig. 5.3: Flujo NMS conexo de $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$

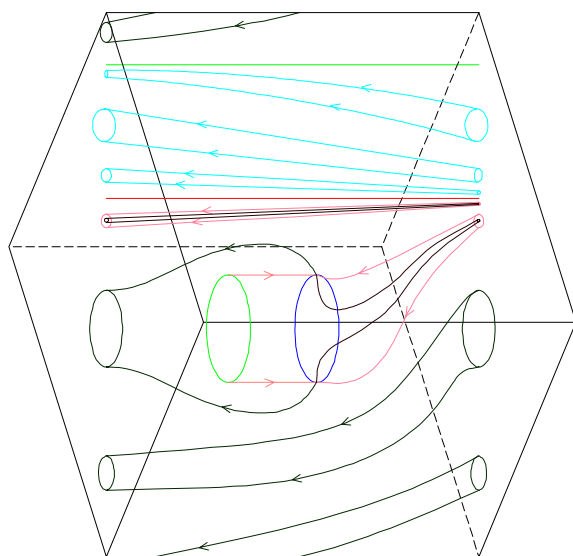


Fig. 5.4: Flujo NMS conexo de $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$ sobre $S^2 \times S^1$

Por otra parte, para estudiar el flujo conexo φ en $S^2 \times S^1$ ha de tenerse en cuenta el carácter local o global de las órbitas periódicas. En nuestro caso, el

disco D^3 contiene a una órbita atractora y a una de tipo silla, cuyo carácter local se hace evidente. Así, M_2 , situado en $S^2 \times S^1 - D^3$, es global en $S^2 \times S^1$ y, consiguientemente, tanto la órbita repulsora como la órbita atractora, en el complementario de la variedad, son ambas globales. Puede observarse el flujo resultante en la figura 5.4.

Si $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$ el asa ampliada resulta de pegar una 1-asa sobre dos toros repulsivos mediante una curva esencial y otra trivial (véase teorema 11). Una de las componentes de la variedad estable de u debe acercarse de modo esencial a la órbita repulsora situada en el complementario del asa ampliada, y de modo trivial a la órbita repulsora situada en el interior de la 3-celda (o a la inversa). Puede observarse el flujo conexo φ en las figuras 5.5 (curva esencial paralelo) y 5.6 (curva esencial meridiano).

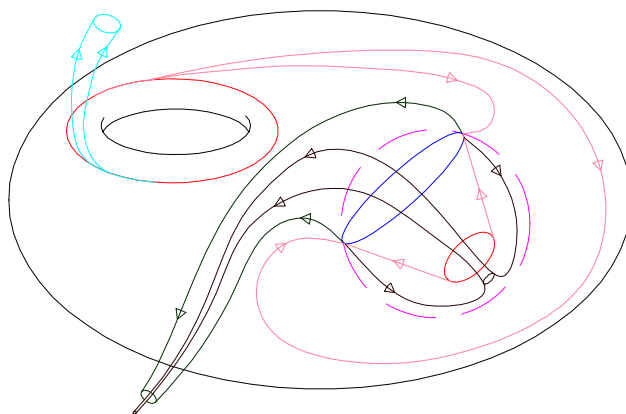


Fig. 5.5: Flujo NMS conexo de $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$

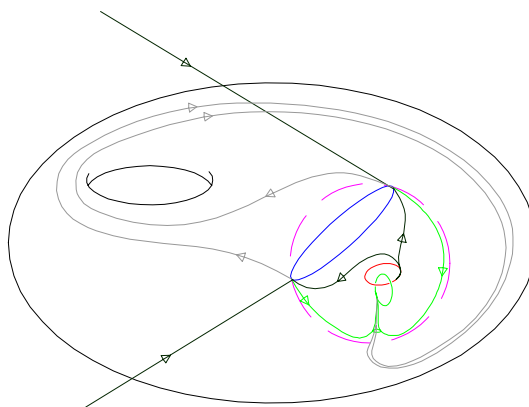


Fig. 5.6: Flujo NMS conexo de $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times S^1$

Al estudiar el flujo conexo sumergido en $S^2 \times S^1$, destaca el carácter local de la $(0, 2)$ -cadena de Hopf cuando la curva de pegada esencial es un meridiano, y global cuando dicha curva es un paralelo, así como de la órbita de tipo silla. Por otra parte, la variedad M_1 es global en el primer caso y local en el segundo, y por tanto la órbita repulsora en el complementario del asa ampliada será global o local, respectivamente (véanse las figuras 5.7 y 5.8).

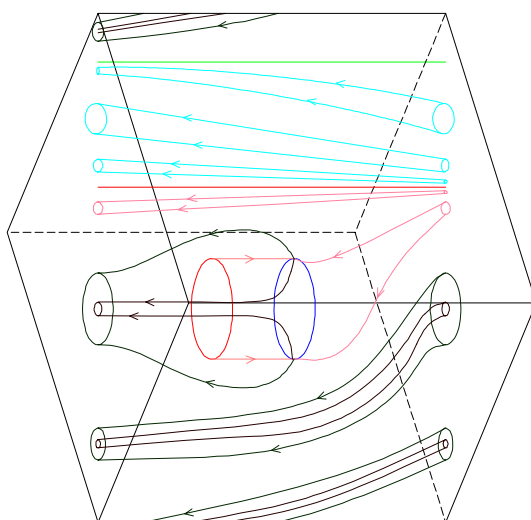


Fig. 5.7: Flujo NMS conexo de $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ (a) en $S^2 \times S^1$.

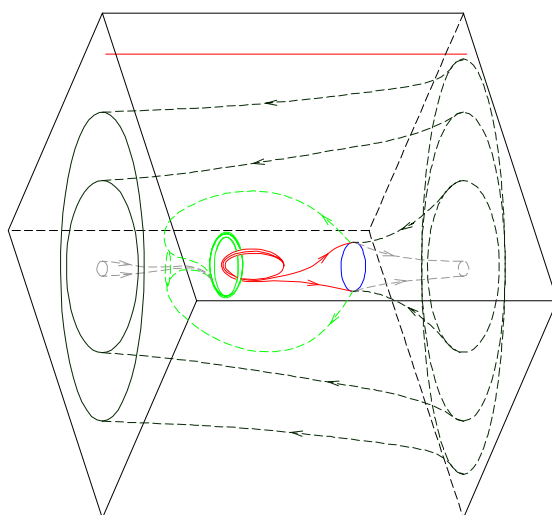


Fig. 5.8: Flujo NMS conexo de $D^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ (b) en $S^2 \times S^1$.

Suma conexa $D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$ Esta variedad es topológicamente equivalente al asa engordada obtenida al pegar una 1-asa redonda a un toro T^2 mediante una curva esencial y una trivial (caso (5) del teorema 11).

Denotamos por φ_1 y φ_2 a los flujos sobre $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$, respectivamente. Entonces uno de ellos, φ_1 , será el flujo de una 0-asa redonda, y φ_2 será el flujo asociado a una 2-asa redonda, ambos transversales a la frontera de cada toro sólido, pero en sentidos opuestos. Consideremos además dos bolas D^3 , $i = 1, 2$, inmersas en $D_i^2 \times S^1$, respectivamente, siendo la frontera de cada una de ellas transversal al flujo.

Identificamos las fronteras de $D_i^2 \times S^1 - D_i^3$, $i = 1, 2$, mediante el homeomorfismo h . Como en los casos anteriores, las variedades estable e inestable de la órbita de tipo silla se acercarán esencial o trivialmente a las correspondientes órbitas periódicas. El flujo resultante puede observarse en la figura 5.9.

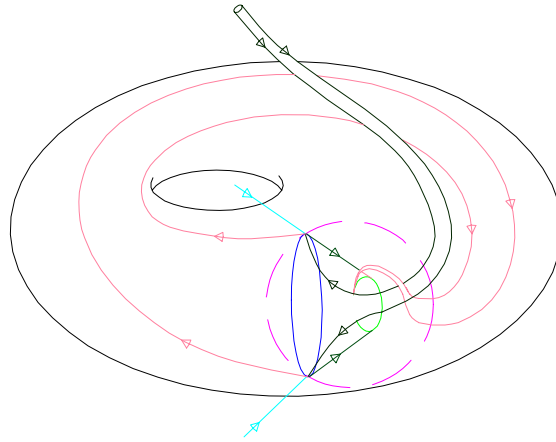


Fig. 5.9: Flujo NMS conexo de $D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$

Asimismo, las componentes conexas del complementario de C tendrán carácter global o local dependiendo de la construcción del asa ampliada. El flujo NMS en $S^2 \times S^1$ puede verse en la figura 5.10.

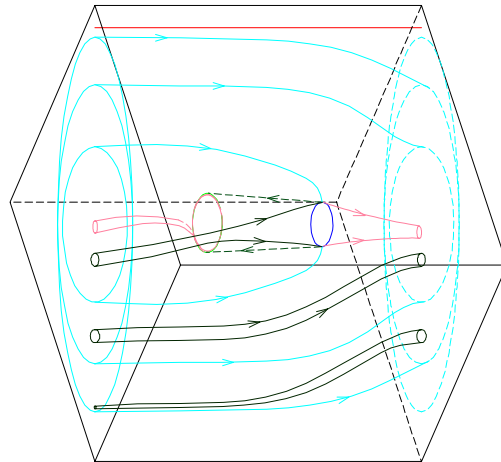


Fig. 5.10: Flujo NMS conexo de $D_1^2 \times S^1 \# D_2^2 \times S^1$ en $S^2 \times S^1$.

Suma conexas $S^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ Esta variedad se obtiene, como se demostró en el teorema 11, pegando una 1-asa sobre un toro local empleando curvas triviales c_i tales que las coronas que limitan cada $c_i = \partial D_i^2$ verifican $A_j^i \subset D_i^2$ con $j = 0$ para $i = 1$, $j = 1$ para $i = 2$ y $D_1^2 \cap D_2^2 = \emptyset$. En este caso, las dos componentes conexas de $S^2 \times S^1 - C$ están sumergidas en la 3-celda cuya frontera define la suma conexas. Identificaremos dichas componentes conexas con una 0-asa y una 2-asa locales. Al igual que en los casos anteriores, el carácter no esencial de las curvas de pegada se refleja en las variedades invariantes de la órbita de tipo silla asociada a la 1-asa (fig. 5.11).

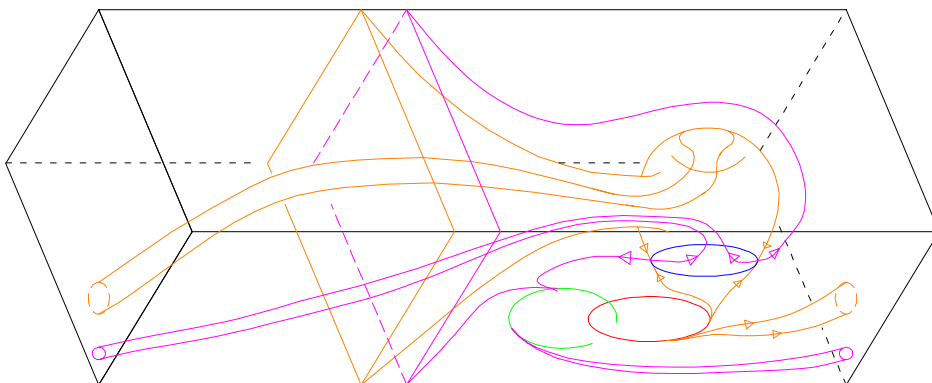


Fig. 5.11: Flujo NMS conexo de $S^2 \times S^1 \# T^2 \times [0, 1]$ en $S^2 \times S^1$.

5.3 Flujos asociados a pegadas esenciales

Para completar el estudio, incluiremos también los flujos correspondientes a la variedad $F_{p+1} \times S^1$ y a las variedades $D^2 \times S^1 - \text{int} \overline{W}$ y $K^3 - \text{int}(W)$. Veremos que tenemos distintos flujos correspondientes a la variedad $F_{p+1} \times S^1$ dependiendo de las distintas formas de pegar la 1-asa, mientras que los flujos correspondientes a $D^2 \times S^1 - \text{int} \overline{W}$ y $K^3 - \text{int}(W)$ son equivalentes, invirtiendo la orientación.

- a) Si se ha obtenido el asa ampliada $F_{p+1} \times S^1$ pegando la 1-asa redonda mediante dos curvas esenciales longitudinales a uno o dos toros globales, las componentes conexas del complementario del asa ampliada son una 0-asa y dos 2-asas, en el caso $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$, o bien el complementario de C está formado por dos 0-asas y una 2-asa en el caso $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{0\}$. Además, en el primer caso, la órbita periódica situada en el centro de una de las 2-asas, junto con la órbita de tipo silla son (p, q) -cables de la órbita situada en el centro de la 0-asa.

Dado que es necesario conservar el tipo de homotopía de las curvas, las variedades estable e inestable de la órbita de tipo silla tienden de forma esencial a las órbitas. Podemos observar el flujo descrito en las figuras 5.12 y 5.13.

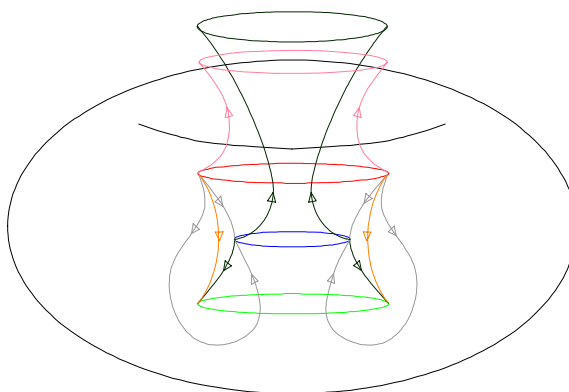


Fig. 5.12: Flujo NMS de $F_{p+1} \times S^1$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$, $p = 1$

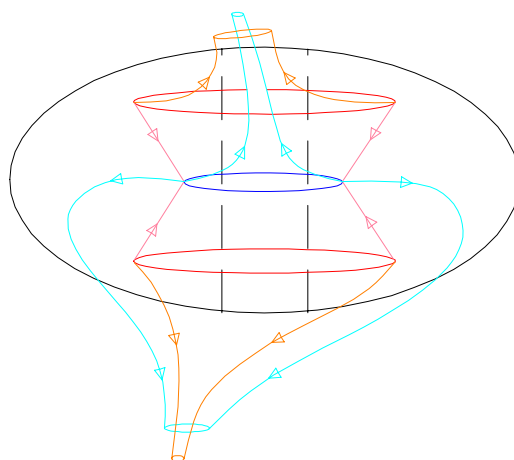


Fig. 5.13: Flujo NMS de $F \times S^1$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{0\}$

Si analizamos el flujo del asa sumergida en la variedad $S^2 \times S^1$, notamos que el asa ampliada se comporta como un toro repulsor global y que todas las órbitas son globales y están enlazadas. El flujo resultante en $S^2 \times S^1$ se muestra en las figuras 5.14 y 5.15.

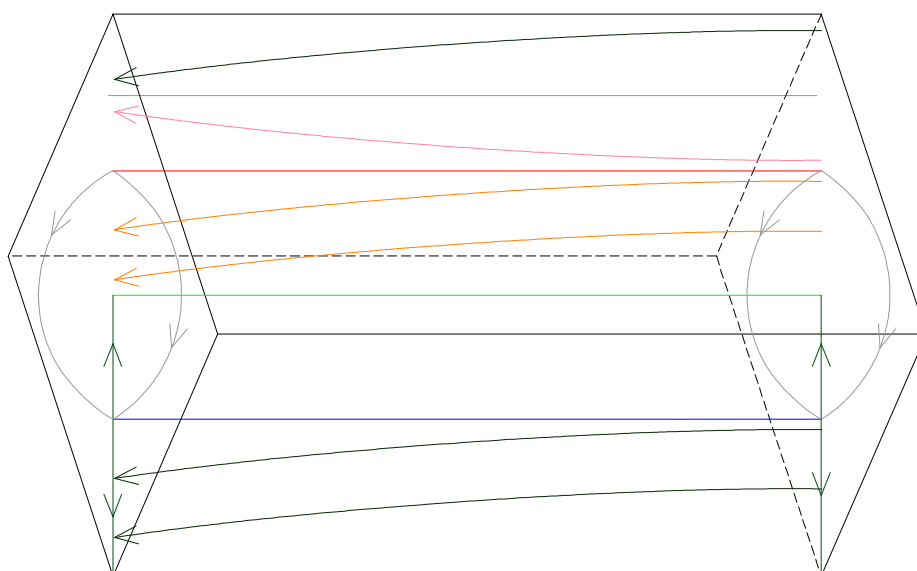


Fig. 5.14: Flujo NMS de $F_{p+1} \times S^1$ con $\partial_- C = T^2 \times \{0\}$, $p = 1$ en $S^2 \times S^1$

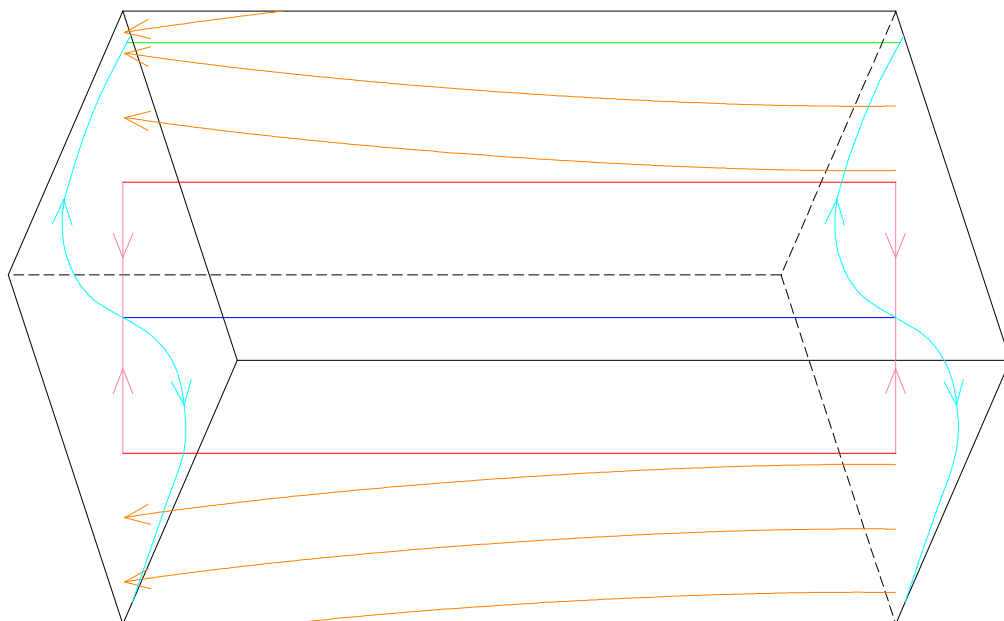
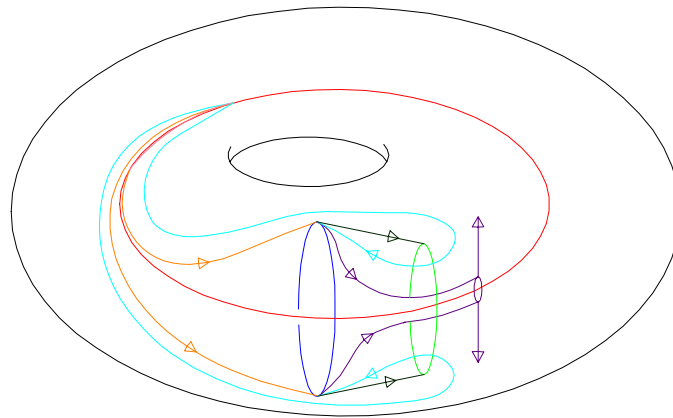
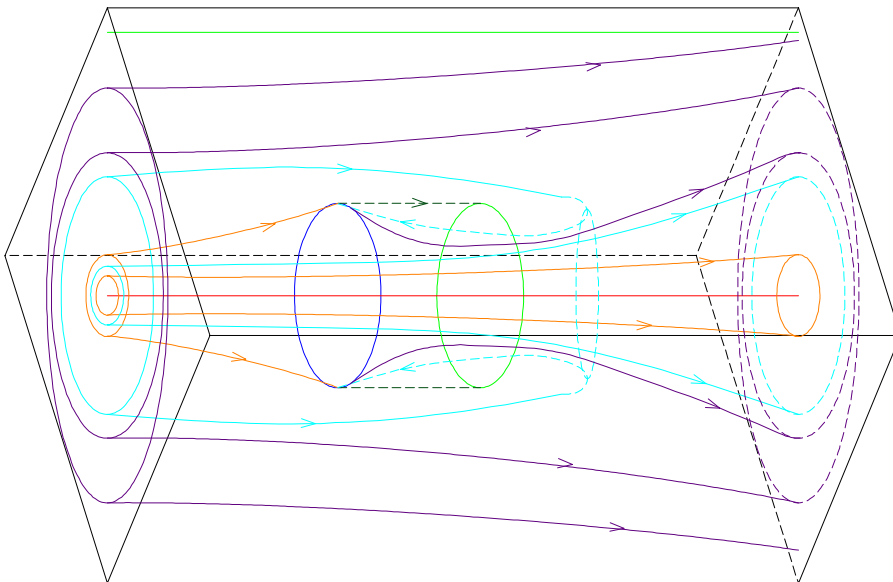


Fig. 5.15: Flujo NMS de $F \times S^1$ con $\partial \bar{C} = T^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{0\}$, en $S^2 \times \bar{S}^1$

- b) Supongamos que se ha obtenido $F_2 \times S^1$ pegando la 1-asa redonda mediante dos curvas esenciales transversales a un toro global o longitudinales sobre un toro local. Las componentes conexas del complementario son una 0-asa local y dos 2-astas en el primer caso y dos 0-astas y una 2-asa local en el segundo; la órbita de tipo silla es asimismo local. Como además la pegada es esencial en ambos casos, el flujo es inverso uno respecto al otro (véase la figura 5.16). Por otra parte, dado que el asa ampliada se ha construido pegando una 1-asa mediante dos curvas esenciales, las variedades estable e inestable de la órbita de tipo silla han de comportarse de modo esencial respecto de las órbitas periódicas.

Fig. 5.16: Flujo NMS de $F_2 \times S^1$ (b)

El comportamiento de esta asa ampliada en $S^2 \times S^1$ es el de un toro repulsor (atractor) global y el flujo resultante se muestra en la figura 5.17.

Fig. 5.17: Flujo NMS de $F_2 \times S^1$ (b) en $S^2 \times S^1$

- c) Si una 1-asa se pega de forma esencial a un toro local y otro global, enlazados entre sí, y se emplea para ello una curva longitudinal sobre el toro local y otra transversal sobre el toro global, el asa ampliada se comporta como un toro repulsor. Las componentes conexas de su complementario son dos 0-asa, una de ellas incompresible en C , y una 2-asa, tales que la órbita de tipo silla y el centro de la 0-asa local son meridianos del centro de la 0-asa global. Además el comportamiento de las variedades invariantes de la órbita de tipo silla es esencial respecto a las órbitas de la cadena. Puede observarse el flujo sobre el asa ampliada en la figura 5.18.

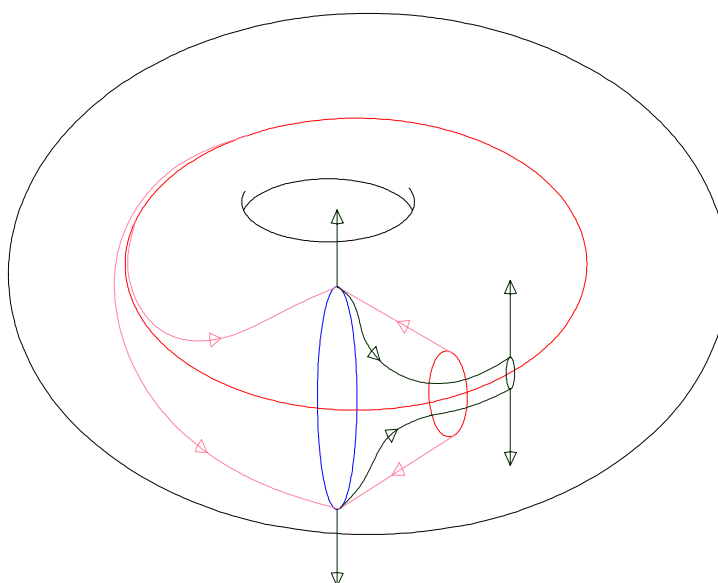
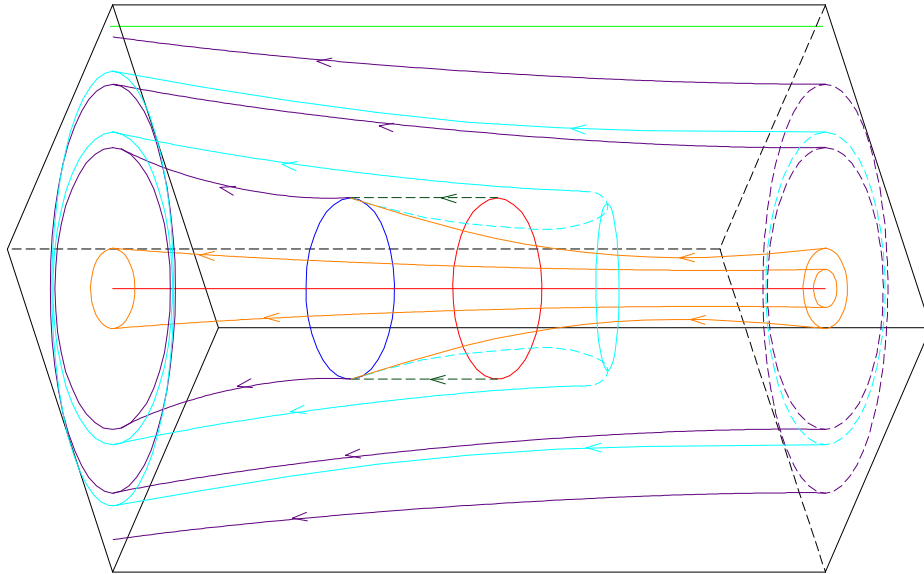


Fig. 5.18: Flujo NMS de $F_2 \times S^1$ (c)

Consideremos dicha asa ampliada sumergida en $S^2 \times S^1$: la órbita repulsora incompresible en el asa ampliada es global, así como la órbita atractora del complementario. Las restantes órbitas son locales, ya que al ser meridianos de la primera, pueden sumergirse en una 3-celda. El flujo resultante se muestra en la figura 5.19.

Fig. 5.19: Flujo NMS de $F_2 \times S^1$ (c) en $S^2 \times S^1$

- d) El flujo NMS asociado al asa ampliada $D^2 \times S^1 - \text{int } i\overline{W}^c$, es equivalente al asociado a $K^3 - \text{int}(W)$ invirtiendo la orientación. En ambos casos, el complementario del asa ampliada tiene dos componentes conexas: una de ellas, de frontera $T^2 \times \{0\}$, es una 0-asa y la restante es una 2-asa, ambas globales.

El centro de la 0-asa es, en el caso $D^2 \times S^1 - \text{int } i\overline{W}^c$, un $(2, q)$ -cable de la órbita de tipo silla u ; respectivamente, la 2-asa es un $(2, q)$ -cable de la órbita de tipo silla en $K^3 - \text{int}(W)$.

Al igual que en los casos anteriores, dado que la curva de pegada de la 1-asa es esencial, las variedades estable e inestable de la órbita de tipo silla han de comportarse asimismo de manera esencial respecto a las órbitas atractora y repulsora.

Al considerar tanto el asa ampliada como su flujo asociado sumergidos en $S^2 \times S^1$, observamos que dicha asa engordada se comporta como un toro repulsor global, siendo todas las órbitas descritas globales en la variedad. En las figuras 5.20 y 5.21 se muestra el flujo resultante.

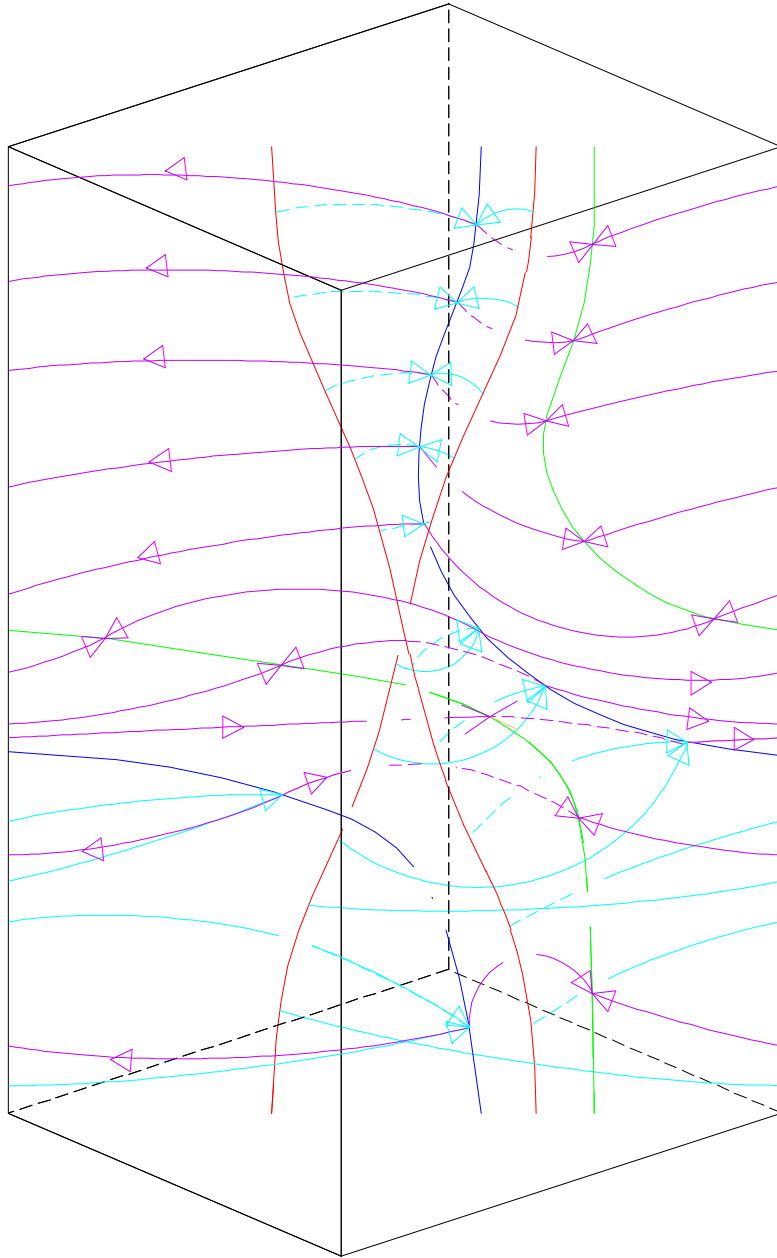


Fig. 5.20: Flujo NMS de $D^2 \times S^1 - \text{int } \overline{W}^{\mathbb{C}}$ en $S^2 \times S^1$

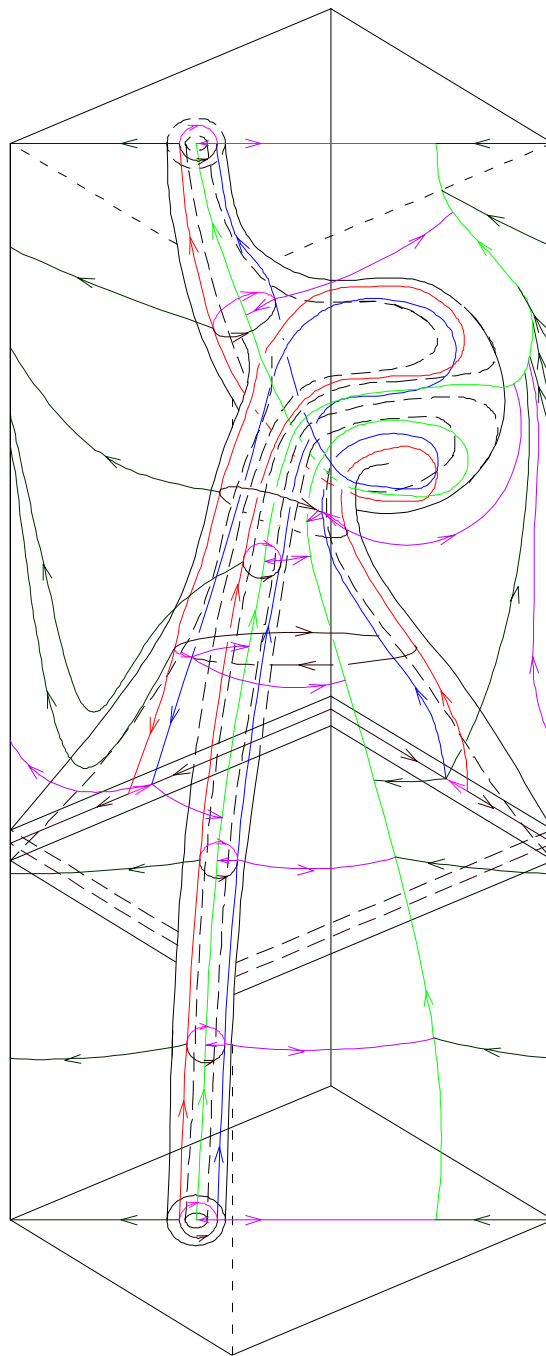


Fig. 5.21: Flujo NMS de $K^3 - \text{int}(W)$ en $S^2 \times S^1$

5.4 Flujos NMS básicos asociados a cadenas locales

En esta sección mostraremos los flujos correspondientes a las descomposiciones en asas redondas con componentes de la frontera no separadoras. Dichas asas ampliadas fueron obtenidas en el teorema 11, y se caracterizan por tener componentes de la frontera no toroidales, como bitoros $B\mathbb{P}$ y esferas \mathfrak{S}^2 no separadores o toros no separadores \mathfrak{T}^2 . Como se demostró en el teorema 12, para completar el flujo en $S^2 \times S^1$ es necesario construir una descomposición en asas redondas con al menos dos asas ampliadas tales que puedan identificarse la componentes no separadoras de sus respectivas fronteras. Dichas descomposiciones dan lugar a cadenas locales con dos órbitas de tipo silla como mínimo; además, si las componentes no separadoras de la frontera de las asas ampliadas son no toroidales, el número de órbitas de tipo silla tiene que ser par (proposición 62).

Teniendo en cuenta que las asas ampliadas han sido obtenidas pegando de forma trivial una 1-asa no separadora sobre uno o dos toros, las variedades invariantes de la órbita de tipo silla deberán comportarse asimismo de forma no esencial respecto de las órbitas periódicas situadas en el centro de las 0-asas y 2-asas.

Flujo asociado a dos asas ampliadas del tipo $B\tau\#D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$

Consideremos dos asas ampliadas del tipo $B\tau\#D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$, que denotaremos por A_1 y A_2 , de manera que las componentes conexas del complementario son dos parejas de 0-asas y 2-asas locales enlazadas entre si.

En la figura 5.22 representamos el flujo sobre las variedades $M_i = B\tau_i\#D_i^3$. En esta figura las componentes de la frontera serán aparentemente separadoras y el flujo pasará de una componente de $S^2 \times S^1$ a la otra atravesando, tanto la frontera del bitoro, como la del disco D^3 .

Para visualizar este flujo en $S^2 \times S^1$, hemos de tener en cuenta que las componentes no separadoras de la frontera son identificadas entre si. Nótese que, dado el carácter no separador de algunas componentes de la frontera, una componente de las variedades estable e inestable de cada órbita de tipo silla (cuatro componentes en total) han de "abrirse" para seguir las trayectorias definidas sobre las componentes A_1 y A_2 . El flujo NMS completo puede observarse en la figura 5.23.

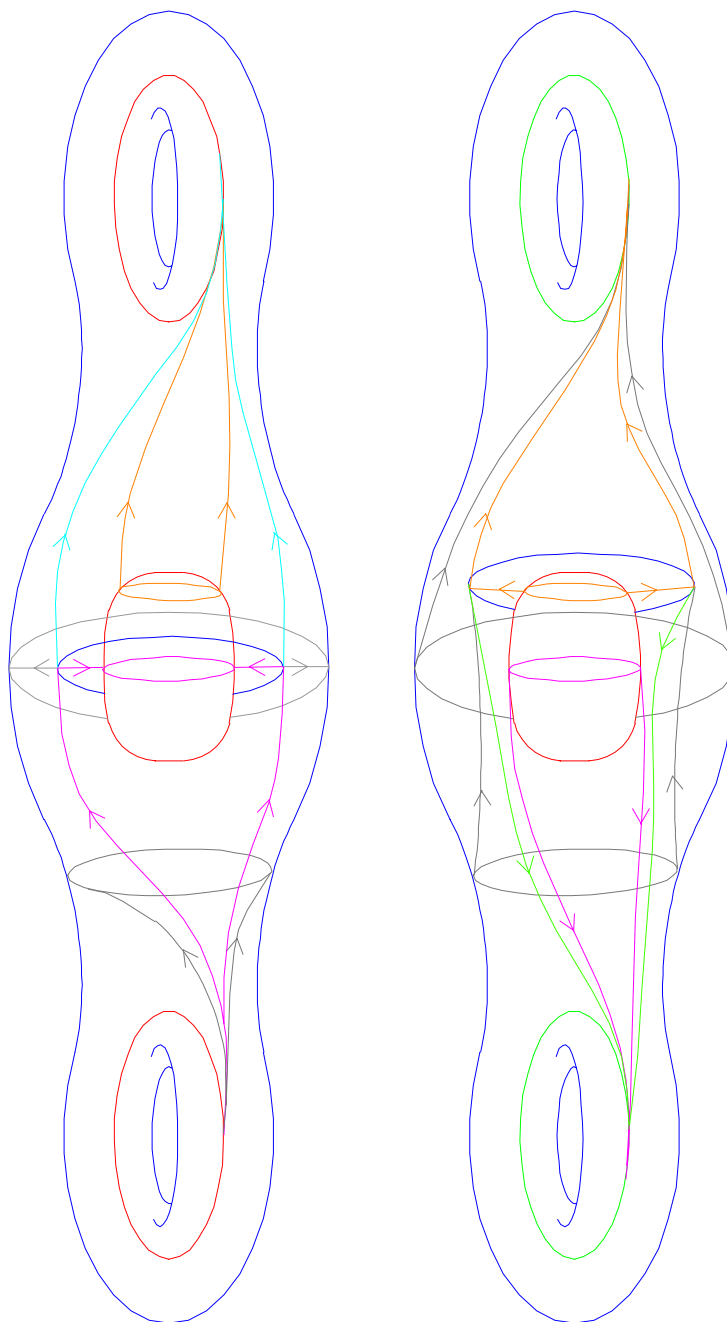


Fig. 5.22: Flujo NMS básico asociado a dos asas ampliadas del tipo $B\tau \# D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$.

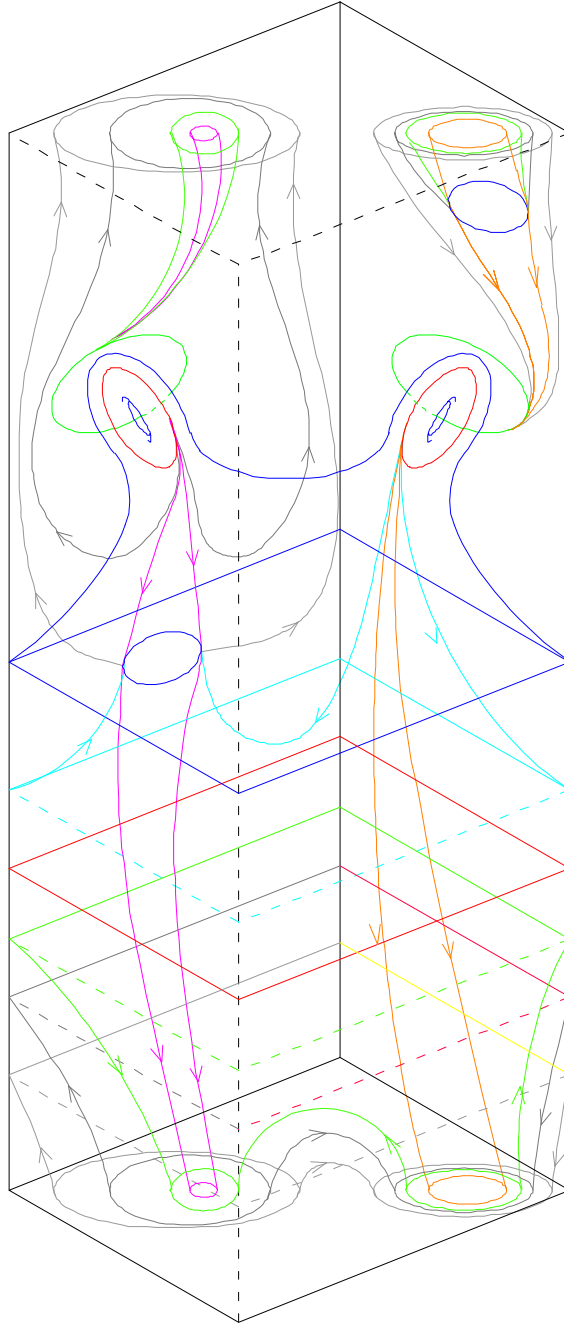


Fig. 5.23: Flujo NMS básico asociado a dos asas ampliadas del tipo $B\tau\#D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$ sobre $S^2 \times S^1$.

Flujo básico asociado a asas ampliadas de los tipos $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$ y $B\tau\#D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$

Del mismo modo que en el caso anterior, sea A_1 el asa ampliada $B\tau\#D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$ y A_2 el asa $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$. Así, las componentes del complementario de dicha unión en $S^2 \times S^1$ son una 0-asa y una 2-asa locales enlazadas entre sí y un asa redonda de índice 0 ó 2.

Supongamos que A_1 contiene a la órbita de tipo silla u_1 y a las órbitas repulsoras r_1 y r_2 , centros de las respectivas 0-asas mientras que A_2 contiene a la órbita de tipo silla u_2 y a la órbita atractora a centro de una 2-asa. En otro caso el flujo es equivalente, pero invirtiendo la orientación. En la figura 5.24 se puede observar el flujo sobre ambas componentes de la variedad.

Nuevamente son cuatro las componentes de las variedades estable e inestable de ambas órbitas de tipo silla las que han de "abrirse" para seguir las trayectorias definidas sobre las componentes A_1 y A_2 . El flujo NMS completo puede observarse en la figura 5.25.

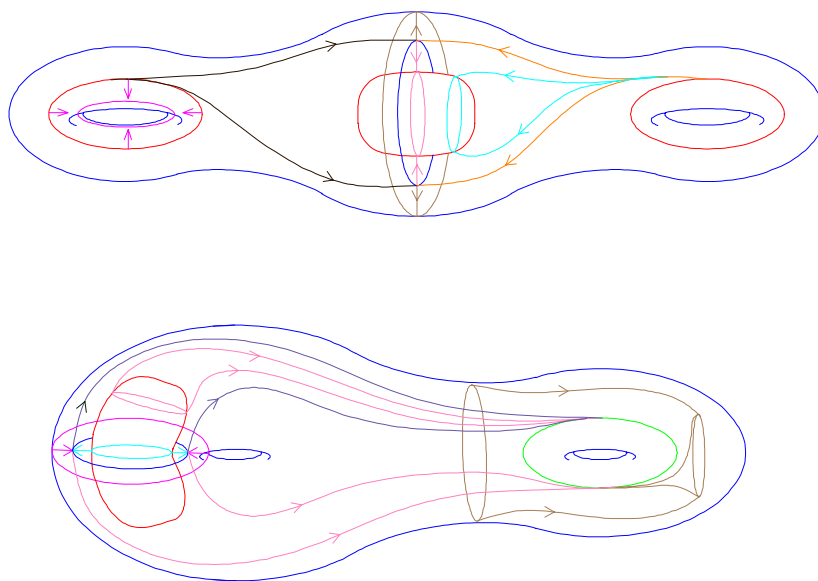


Fig. 5.24: Flujo NMS básico asociado a asas ampliadas de los tipos $B\tau\#D^3 - (\text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2))$ y $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$



Fig. 5.25: Flujo NMS básico asociado a asas ampliadas de los tipos $B\tau\#D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$ y $B\tau\#D^3 - int(W)$ sobre $S^2 \times S^1$.

Flujo básico asociado a dos asas ampliadas del tipo $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$

Consideremos dos asas ampliadas del tipo $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$. Las componentes conexas del complementario de su unión son una 0-asa y una 2-asa separadas cuyos centros, junto con las órbitas de tipo silla, generan el flujo NMS. En la figura 5.26 se puede observar el flujo sobre ambas componentes de la variedad.

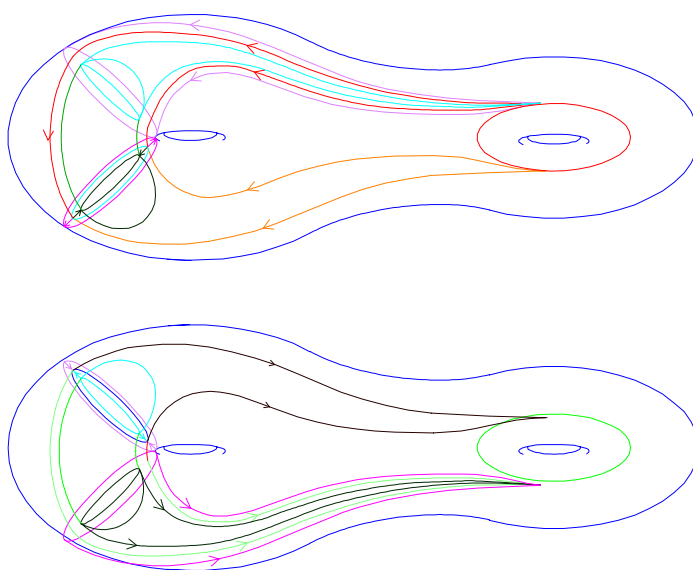


Fig. 5.26: Flujo NMS básico asociado a dos asas ampliadas del tipo $B\tau\#D^3 - \text{int}(W)$

Del mismo modo que en el caso anterior, visualizaremos este flujo en la variedad $S^2 \times S^1$: son dos las componentes de las variedades estable e inestable de ambas órbitas de tipo silla las que "se abren" para seguir las trayectorias definidas sobre las componentes no separadoras de la frontera (véase la figura 5.27).

Además, es fácil ver que $S^2 \times S^1$ puede recomponerse pegando por las fronteras no separadoras un número par de asas ampliadas de los tipos anteriores. En la figura 5.28 puede verse una composición de flujos asociados a una descomposición de $S^2 \times S^1$ del tipo descrito.

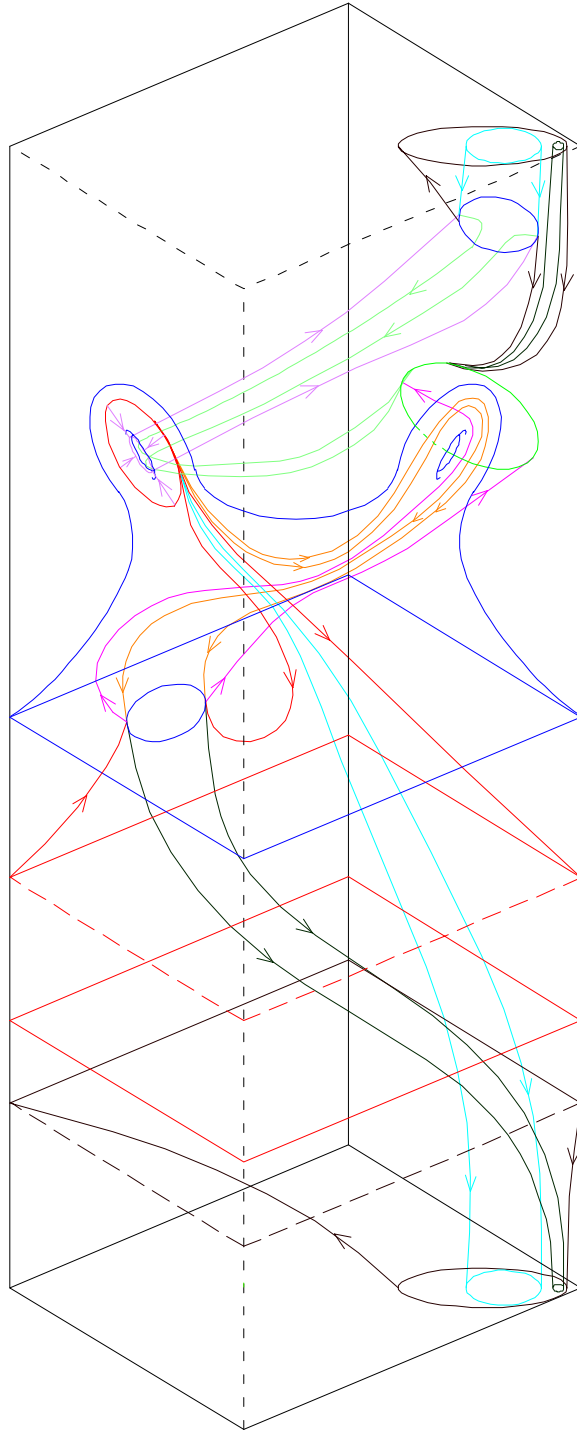


Fig. 5.27: Flujo NMS básico asociado a dos asas ampliadas del tipo $B\tau \# D^3 - \text{int}(W)$ sobre $S^2 \times S^1$.

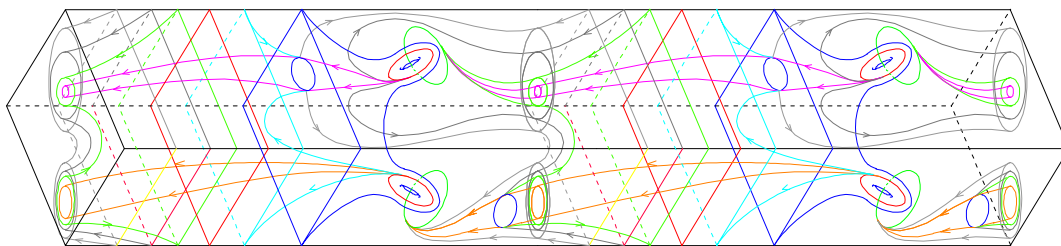


Fig. 5.28: Flujo NMS asociado a asas ampliadas del tipo
 $B\tau\#D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$

Proposición 62 *Las cadenas compuestas sólo por nudos locales son propias de $S^2 \times S^1$ sólo si tienen un número par de nudos triviales de índice 1 o si son de la forma $l \cdot u$, siendo l una cadena con una única componente conexa.*

Demostración. Dada una descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$ con un número par de asas ampliadas de los tipos $B\tau\#D^3 - int(W)$ y $B\tau\#D^3 - (int(W_1) \cup int(W_2))$, se obtienen cadenas locales con un número par de órbitas de tipo silla. Como hemos visto, estas asas ampliadas son propias de $S^2 \times S^1$.

Si tenemos una cadena de la forma $l \cdot u$, siendo l una cadena con una única componente conexa, esta cadena no es propia de S^3 ya que para ello l tiene que provenir de las operaciones *I*, *II* y *III* (véase [12]), por lo que l tendría más de una componente conexa. ■

Capítulo 6

Sistemas Hamiltonianos integrables

Comenzaremos con el estudio de los sistemas Hamiltonianos integrables y la topología de las variedades subyacentes. Dividiremos el análisis de los sistemas Hamiltonianos integrables en dos partes: en la primera presentaremos los resultados de Fomenko sobre la caracterización topológica de 3-variedades Q que son superficies de nivel de un sistema Hamiltoniano integrable mediante una integral de Bott. La idea subyacente es que si un sistema Hamiltoniano es integrable sobre una superficie de nivel Q y la segunda integral satisface ciertas condiciones sobre no degeneración, entonces Q admite una descomposición en bloques elementales que son 3-variedades relativamente simples pegadas entre sí por sus fronteras. Describiremos asimismo la relación entre el trabajo de Fomenko y sus colaboradores ([25], [26], [27]) y el de Asimov, Morgan, Wada y otros que recientemente han contribuido al estudio topológico de variedades que admiten flujos NMS. Asimismo, presentaremos algunos resultados que relacionan las clases de variedades consideradas por dichos autores.

En un segundo bloque, utilizamos la relación entre dos teorías paralelas (flujos NMS por una parte y sistemas Hamiltonianos integrables por la otra) y los resultados obtenidos en el capítulo 4 sobre la caracterización topológica de cadenas de órbitas periódicas en $S^2 \times S^1$ para obtener una caracterización completa de los nudos y cadenas de órbitas periódicas de sistemas Hamiltonianos sobre $S^2 \times S^1$ (véase [23]).

6.1 Sistemas Hamiltonianos integrables sobre Q

Si, dado un campo vectorial v de una variedad N -dimensional M , pueden encontrarse r integrales independientes f_1, \dots, f_r , entonces el orden del correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales decrece en un entero r . Geométricamente esto corresponde a que las trayectorias integrales del sistema v se mueven sobre superficies de nivel comunes de las integrales f_1, \dots, f_r que, en general, son $(N - r)$ -subvariedades diferenciables en M . Entonces, para una integración completa del sistema necesitamos $N - 1$ integrales independientes. Así, sus superficies de nivel comunes serían de dimensión 1 y coincidirían con las trayectorias integrales del sistema.

Sin embargo, a menudo no puede encontrarse un conjunto completo de integrales o dicho conjunto simplemente no existe. En esos casos hemos de conformarnos con diferentes tipos de "integrabilidad parcial". Para ello han de verificarse ciertos requisitos: hemos de encontrar un conjunto de integrales independientes f_1, \dots, f_r tales que sus superficies de nivel comunes sean suficientemente simples, por ejemplo, que todas ellas sean difeomorfos a la misma variedad simple. Además, es también deseable que el sistema inicial, restringido a la superficie de nivel común, sea transformado en un sistema organizado de forma sencilla, es decir, en el que las trayectorias integrales admitan una descripción simple.

6.1.1 El teorema de Arnold-Liouville

Para algunos sistemas Hamiltonianos existe una integrabilidad parcial extremadamente aconsejable, para la cual la superficie de nivel común de las integrales es un toro y la restricción a éste del sistema inicial establece un movimiento a lo largo del toro condicionalmente periódico. Nos referiremos a este caso como **integrabilidad conmutativa** y la estudiaremos a continuación con detalle.

Diremos que dos **funciones** f y g están **en involución** sobre una variedad simpléctica M de dimensión $2n$ si su corchete de Poisson es nulo. En los sistemas Hamiltonianos es suficiente encontrar únicamente n integrales en involución para que la descripción del movimiento de las trayectorias integrales sea lo bastante completo. En este caso, cada integral "vale por dos", es decir, cada una de estas integrales permite disminuir el orden del sistema no en una unidad, como en el caso general, sino en dos. El teorema de Arnold-Liouville (véase [26]) demuestra que, dado un conjunto de integrales independientes f_1, \dots, f_n en una variedad simpléctica $2n$ -dimensional, las su-

perfiles de nivel comunes no singulares son uniones de toros, que llamaremos en adelante **toros de Liouville**.

Definición 63 Sea M una variedad diferenciable 4-dimensional, compacta y simpléctica. Decimos que el sistema Hamiltoniano sobre M asociado al Hamiltoniano H es integrable Liouville sobre una única superficie de nivel Q si existe una función f real diferenciable definida en un entorno U de Q en M tal que:

- a) f y H son independientes,
- b) el corchete de Poisson $\{f, H\} : U \rightarrow \mathfrak{R}$ depende sólo de la energía, es decir, existe una función $\lambda : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\{f, H\} = \lambda \circ H$,
- c) si $h = H(Q)$ entonces $\lambda(h) = \lambda'(h) = 0$.

Una función f con dichas propiedades recibe el nombre de **integral del sistema Hamiltoniano** sobre Q . Nótese que esta propiedad es más débil que la de integrabilidad global sobre la variedad tetradimensional M pero, en particular, cada sistema globalmente integrable será a su vez integrable en cada nivel de energía.

Del teorema de Arnold-Liouville se deduce que todas las superficies de nivel no singulares de f en Q son toros de Liouville. Por tanto la variedad Q estará foliada en toros en un entorno de todo $f^{-1}(a)$, siendo a un valor regular de f . Las subvariedades críticas de f estarán asociadas a posibles bifurcaciones sobre toros de Liouville. Diremos que una **integral** f es **orientable** si todas sus superficies de nivel lo son. En particular si un sistema admite una integral no orientable también admitirá una integral orientable (véase [26]).

Decimos que una integral f es una **integral Bott** sobre Q si el conjunto de los puntos críticos de f sobre Q es la unión de subvariedades críticas no degeneradas y disjuntas, es decir, si el Hessiano de f sobre los planos normales a sus subvariedades críticas es no degenerado. De hecho, V. V. Kalashnikov prueba en [35] que los sistemas Hamiltonianos Bott integrables son genéricos.

6.1.2 Topología de las variedades subyacentes

A la pregunta de si las superficies de energía constante no singulares de los sistemas Hamiltonianos integrables poseen características que las distingan del resto de 3-variedades diferenciables, Fomenko [25] respondió con una clasificación completa de este tipo de superficies de nivel empleando variedades más

simples (llamadas "ladrillos elementales") tales que al combinarlas pegándolas por sus fronteras podía generarse cualquier superficie isoenergética de un sistema Hamiltoniano integrable.

Casasayas et. al. [15], [16] demostraron la equivalencia entre la clase de variedades que admitían una descomposición en ladrillos elementales y la clase de las que admite un flujo NMS, siguiendo la teoría de Morse. Reproduciremos a grandes rasgos estos razonamientos para, en la sección siguiente, aplicarlos a la variedad $S^2 \times S^1$ como superficie de nivel de un sistema Hamiltoniano Bott integrable.

Para establecer el resultado principal de Fomenko consideraremos los siguientes cuatro tipos de 3-variedades o "ladrillos elementales":

- I.* El toro sólido $D^2 \times S^1$;
- II.* El toro grueso $T^2 \times [0, 1]$;
- III.* Los "pantalones" $F \times S^1$, donde F es un 2-disco con dos agujeros;
- IV.* Los "pantalones no orientables", es decir, el espacio fibrado de Seifert cuya variedad de órbitas es el anillo y que tiene una fibra excepcional de multiplicidad 2.
- V.* La botella de Klein "gruesa" $K^2 \times I$, cuya frontera es un toro T^2 .

De entre estos cinco tipos de variedades, sólo las tres primeras son independientes desde el punto de vista topológico, ya que las dos últimas pueden descomponerse en combinaciones de las variedades *I*, *II* y *III*.

$$\begin{aligned} A^3 &= i D^2 \times S^1 \mathbb{C} + i F \times S^1 \mathbb{C} \\ K^3 &= K^2 \times I = 2 i D^2 \times S^1 \mathbb{C} + i F \times S^1 \mathbb{C} \end{aligned}$$

A continuación mostramos el teorema de clasificación topológica para superficies de nivel tridimensionales de sistemas integrables, debido a Fomenko.

Teorema 14 (Fomenko [26]) *Sea M una 4-variedad diferenciable y simpléctica (compacta o no) y sea $v = \text{sgrad}H$ un campo vectorial Hamiltoniano sobre M , donde H es una función hamiltoniana diferenciable. Supongamos que el sistema es integrable Liouville sobre una superficie de nivel tridimensional, no singular y compacta Q de H , con una integral de Bott f . Sea m el número de soluciones periódicas del sistema sobre Q sobre las cuales f tiene un máximo o mínimo local (luego las soluciones son estables). Sea p el número de 2-toros críticos de la integral f (el máximo o mínimo de la integral); q el*

número de curvas críticas de la integral (trayectorias inestables del sistema) con un diagrama de separatriz orientable; s es número de curvas críticas de f con un diagrama de separatriz no orientable y r el número de botellas de Klein críticas. Esta es una lista exhaustiva de todas las variedades críticas posibles de f sobre Q . Entonces Q se puede representar pegando ladrillos elementales mediante difeomorfismos de toros de la frontera:

$$\begin{aligned} Q &= m' \cdot I + p' \cdot II + q' \cdot III \\ &= m \cdot I + p \cdot II + q \cdot III + s \cdot IV + r \cdot V \\ &= m \cdot D^2 \times S^1 + p \cdot T^2 \times S^1 + q \cdot F \times S^1 + s \cdot A^3 + r \cdot K^3 \end{aligned}$$

Si la integral f es orientable, entonces $r = 0$.

Nótese que, si f es una integral no orientable sobre Q , entonces $\pi_1(Q) \neq 0$ y el grupo $\pi_1(Q)$ contiene a un subgrupo de orden 2. Si $Q \cong S^3$, entonces toda integral Bott de f sobre Q es orientable. Sin embargo, si $Q \cong S^2 \times S^1$, dado que $\pi_1(Q) = \mathbb{Z}$ y contiene al subgrupo de los enteros impares (de orden 2, ya que al sumar dos enteros impares, nos da un par), una integral Bott f sobre $S^2 \times S^1$ puede ser orientable o no orientable. Si f es orientable, entonces $r = 0$, es decir, el número de subvariedades críticas de f sobre Q homeomorfas a la botella de Klein es cero.

En muchos sistemas integrables las superficies isoenergéticas son a menudo difeomorfas a la esfera S^3 , al espacio proyectivo RP^3 , al espacio lenticular $L(p, q)$ o a la variedad $S^2 \times S^1$. En [26] se prueba que, en un sistema Hamiltoniano integrable mediante una integral Bott f sobre superficies de nivel Q homeomorfas a una de las 3-variedades anteriores, si la integral f es orientable, el número m de soluciones periódicas estables del sistema sobre Q es $m \geq 2$, mientras que si la integral f es no orientable, entonces para S^3 $m \geq 2$, mientras que para RP^3 , $L(p, q)$ o $S^2 \times S^1$ tenemos $m \geq 1$.

En la sección 6.2 efectuaremos un estudio exhaustivo del comportamiento de las órbitas periódicas en un sistema Hamiltoniano cuya superficie de nivel sea $S^2 \times S^1$.

La botella de Klein K^2 como subvariedad crítica de f sobre Q

Consideremos la representación de la botella de Klein K^2 de la figura 6.1, de modo que identifiquemos los lados superior e inferior manteniendo la orientación, mientras que al identificar los lados izquierdo y derecho, ésta se invierte.

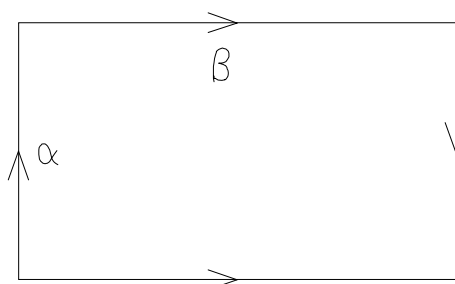


Fig. 6.1: Botella de Klein K^2 .

Denotamos por α y β los dos tipos de homotopía de las curvas sobre K^2 . El grupo de homotopía $\pi_1(K^2)$ está generado por α y β con la relación $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$. Según Godbillón [30], una curva cerrada en K^2 que no sea contractible a un punto está representada por uno de los siguientes elementos (véase fig.6.2) :

$$\alpha, \alpha^{-1}, \beta^2, \beta^{-2} \text{ o } \beta^{-1}\alpha^n, n \in \mathbb{Z}$$

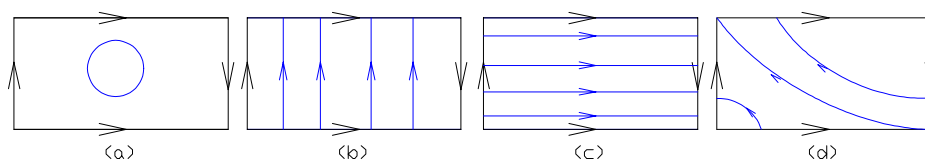


Fig. 6.2: (a) curva trivial en K^2 ; (b) foliación α ; (c) foliación β^2 ; curvas $\beta^{-1}\alpha$

El siguiente resultado establece, no sólo el tipo de órbitas periódicas que se pueden encontrar sobre una superficie crítica del tipo K^2 de un sistema Hamiltoniano Bott integrable, sino que además todas las trayectorias sobre K^2 son cerradas, i.e., órbitas periódicas.

Proposición 64 *En una botella de Klein K^2 crítica de un sistema Hamiltoniano Bott integrable no singular sobre la superficie de nivel Q todas las órbitas son periódicas del tipo $\beta^{\pm 2}$ o $\beta^{-1}\alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Si la trayectoria sobre K^2 es cerrada, es una órbita periódica. Si, por el contrario, es abierta, su clausura es un conjunto de dimensión dos ([26], pag.70). Sobre K^2 se verifica el teorema de Poincaré-Bendixon, en el sentido de que si un conjunto límite no contiene un punto de equilibrio es un ciclo ([38]). Por ello es incompatible que la clausura de una trayectoria sea de dimensión dos con la exigencia de un flujo no singular. De este modo, todas las órbitas son periódicas sobre K^2 .

Respecto a la segunda afirmación, basta con descartar las curvas cerradas triviales o las foliaciones del tipo $\alpha^{\pm 1}$. La región limitada por una curva trivial debe contener un punto de equilibrio, de forma similar a como ocurre en el plano, lo que contradice la hipótesis de no singularidad. En una foliación de tipo α , la topología de la botella de Klein obliga a invertir el sentido de la orientación de estas órbitas un número impar de veces. Por la continuidad del campo esto no es posible sin que el campo se anule en algún punto (basta considerar, por ejemplo, el mínimo de la función que define el campo sobre cada órbita periódica) entrando de nuevo en contradicción con la no singularidad del flujo. ■

Como consecuencia de esta propiedad, el flujo es transversal a una curva de tipo α , definiendo un homeomorfismo que invierte la orientación sobre esa curva. Todo homeomorfismo sobre S^1 que invierte la orientación tiene dos puntos fijos que corresponden a dos órbitas periódicas del flujo. En la figura 6.2 se representan, entre otras, éstas órbitas de periodo 1. Ello nos permite ampliar el concepto de órbita de tipo NMS.

Definición 65 *Dado un Hamiltoniano integrable H sobre un conjunto de nivel no singular Q por medio de una integral Bott f y dada una órbita periódica γ , diremos que es una órbita NMS si $f(\gamma)$ no es un valor regular de f , si γ no está en un toro crítico de f o si γ es una de las órbitas periódicas de periodo 1 descritas en el párrafo anterior.*

Lema 66 (Fomenko [26]) *Los puntos críticos de una integral Bott diferenciable f sobre una superficie de nivel no singular Q llenan curvas críticas diferenciables aisladas o toros bidimensionales diferenciables o botellas de Klein.*

De la demostración de este lema se deduce que el flujo del sistema es denso en una botella de Klein o en un toro crítico, es decir, dada una trayectoria integral no degenerada del campo vectorial v que parte de un punto crítico de la integral f , si la trayectoria es abierta, su clausura es un subconjunto conexo bidimensional formado por puntos críticos de la integral. Por este motivo, ambas superficies no pueden ser entornos regulares de órbitas periódicas.

Lema 67 (Fomenko [26]) *Las curvas críticas de la integral f sobre Q pueden tener índice 0, 1 ó 2, mientras que los toros críticos o las botellas de Klein sólo pueden tener índice 0 ó 1.*

Sin embargo, las superficies de energía no singulares de una integral f y Q son compactos y por el teorema de Liouville son localmente homeomorfos a T^2 .

Fomenko prueba que, sin pérdida de generalidad, podemos restringirnos únicamente al estudio de las integrales orientables. Es decir, considerando la superficie Q bajo un doble recubrimiento siempre podemos asumir que la integral f es integrable.

Proposición 68 *Una órbita atractora y otra repulsora definen un flujo NMS sobre K^2 .*

Demostración. Un flujo no singular sobre la botella de Klein es transversal a las órbitas de tipo α . Además, K^2 se obtiene identificando dos curvas de tipo α invirtiendo la orientación y dos curvas de tipo β mediante un homeomorfismo que conserva la orientación. Es fácil ver cómo en este caso, el flujo sobre K^2 va de la órbita atractora a la repulsora. ■

6.1.3 Descomposición en asas redondas de Q

Morgan [41] y Asimov[3] probaron que una 3-variedad compacta y orientable admite una descomposición en asas redondas si y sólo si admite a su vez un flujo NMS (véase las proposiciones 40 y 41). Sabemos además que las subvariedades críticas de f sobre Q son homeomorfas a T^2 . Al variar f , mientras no pasemos por un valor regular, obtenemos un subconjunto de Q homeomorfo a $T^2 \times I$. El siguiente resultado ha sido obtenido también por J. Casasayas [15].

Lema 69 (Campos [11]) *Si Q es una superficie de nivel compacta y no singular de un sistema Hamiltoniano integrable Liouville con una integral Bott f , entonces Q admite una descomposición en asas redondas.*

Demostración. Consideremos el campo vectorial $v = \text{sgrad } f$ definido sobre Q . Bastará construir un campo vectorial NMS \bar{v} sobre Q tan próximo a v como queramos.

El teorema de Liouville nos asegura que cada uno de los subconjuntos $T^2 \times I$ de Q está foliado por toros invariantes. Sea $(S^1 \times I_1) \times I$ una referencia para $T^2 \times I$. En $(S^1 \times I_1) \subset D^2$ podemos considerar un sistema de coordenadas polares (r, θ) . Sea η el campo equivalente a v restringido a la referencia. Modificamos η a $\bar{\eta}$ añadiéndole una componente radial arbitrariamente pequeña. Sea ahora \bar{v} el campo correspondiente a $\bar{\eta}$ deformado de v . Entonces, \bar{v} sobre $T^2 \times I$ ya no tiene ninguna órbita periódica completa y los toros límite serán cruzados hacia fuera o hacia dentro por dicho campo, según el signo de la componente radial añadida.

Según Fomenko [26], variando f , los toros invariantes de los sistemas considerados pueden sufrir alguna de las siguientes modificaciones:

1. Un toro T^2 se contrae al círculo axial del toro sólido y después desaparece: $T^2 \rightarrow S^1 \rightarrow \emptyset$.
2. Dos toros T^2 se acercan a lo largo de un cilindro, juntándose en un solo toro que después desaparece: $2T^2 \rightarrow T^2 \rightarrow \emptyset$.
3. Un toro T^2 desdobra en dos toros manteniendo un círculo común (silla orientada), cuando ambos están sobre la superficie de nivel de la integral f : $T^2 \rightarrow 2T^2$.
4. Un toro T^2 da dos vueltas alrededor de otro toro T^2 , siguiendo la topología de una silla no orientada, estando sobre la superficie de nivel de la integral f : $T^2 \rightarrow T^2$.
5. Un toro T^2 se transforma en una botella de Klein (cubriéndola dos veces) y después desaparece: $T^2 \rightarrow K^2 \rightarrow \emptyset$.

Analicemos en cada caso cómo construimos el flujo modificado \bar{v} .

1. Hacemos tender la componente radial añadida c , diferenciablemente a cero según nos acercamos al centro del toro sólido. La variedad crítica S^1 pasará de ser una órbita elíptica a una atractora o repulsora.
2. Sea c_1 la constante radial correspondiente al $T^2 \times I$ exterior. Asignemos al $T^2 \times I$ interior junto con el toro crítico un incremento radial igual a c_1 . El resultado de pegar los conjuntos de toros es equivalente al $T^2 \times I$ inicial con \bar{v} .
3. El S^1 crítico corresponde a una órbita hiperbólica, siendo los toros de lo que es la frontera común, sus variedades invariantes. Modificamos esta configuración mediante un cambio arbitrariamente pequeño del campo en un entorno de $T^2 \xrightarrow{S^1} T^2$ y asignamos a los conjuntos de toros invariantes 2 y 3 (véase la figura 6.3) un c_i de signo compatible con la modificación.

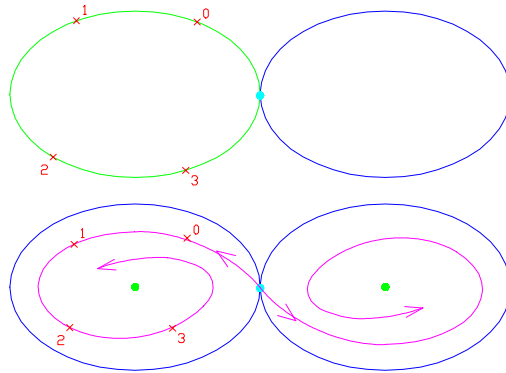


Fig. 6.3: Flujo modificado en un entorno de $T^2 \times_{S^1} T^2$

Extendemos diferencialmente el campo \bar{v} sobre los conjuntos de toros 1, 2 y 3 a la modificación hecha sobre un entorno de $T^2 \times_{S^1} T^2$.

Observemos que el signo de c puede ser arbitrario, por lo que no existen problemas de compatibilidad al modificar v a \bar{v} en este caso y la órbita periódica se mantiene como tal.

4. Este último caso es una variante, en su tratamiento, del caso 3. Los iterados sucesivos p_0, p_1, p_2, \dots saltan alternativamente de un toro invariante al otro (figura 6.4). Salvo ésto, los detalles son similares.

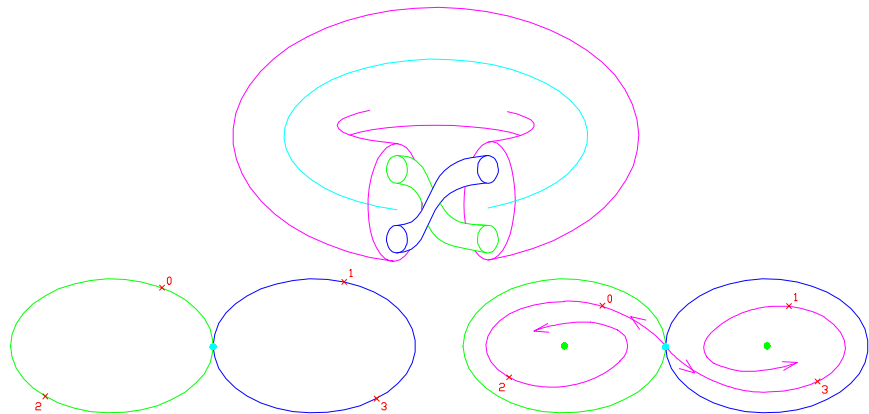


Fig. 6.4: Flujo modificado en un entorno de $T^2 \times_{S^1} T^2$

5. En la última bifurcación de los toros de Liouville, se deforma el flujo dentro de K^2 de modo que una de las dos órbitas de periodo 1 sea atractora y la otra repulsora. Al considerar el sistema completo con la

modificación radial descrita, una de las órbitas 1-periódicas se convertirá en atractora y la otra en una órbita de tipo silla (figura 6.5).

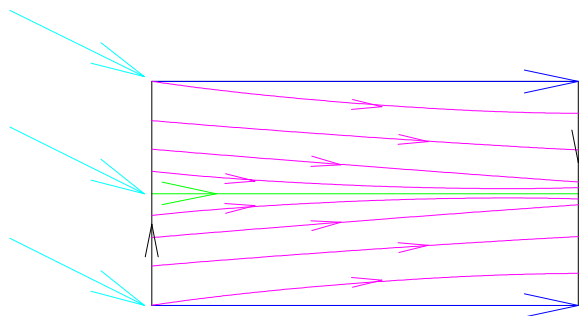


Fig. 6.5: Órbitas NMS atractora y de tipo silla sobre K^2 .

Como Q es compacta, tras un número finito de modificaciones de v , en la forma descrita, obtenemos un campo \bar{v} arbitrariamente próximo a v pero que es de tipo NMS.

Para ver que la variedad Q admite un flujo NMS tendríamos que comprobar que no hay conexiones silla-silla. Si existiesen, podemos eliminarlas mediante una pequeña perturbación en un entorno de la conexión silla-silla. De este modo se obtiene la tesis del lema. ■

Además, dado que hemos relacionado los sistemas Hamiltonianos con los sistemas NMS, podemos afirmar que los primeros también admiten una descomposición en asas redondas. Los siguientes resultados nos dicen, sin embargo, que las descomposiciones en asas redondas admisibles en un sistema hamiltoniano son las que se obtienen de pegadas esenciales. El resultado se deduce del hecho de que si cualquier entorno de la órbita k de índice 1 que está en el centro de la 1-asa redonda intersecta con un toro de Liouville a lo largo de los anillos rodeados por círculos triviales, entonces habría un disco invariante hacia delante o hacia atrás sobre ese toro. Esto es una contradicción, ya que el flujo sobre los toros de Liouville es conjugado a un flujo lineal.

Lema 70 (Casasayas [15]) *En la descomposición en asas redondas asociada a la superficie de nivel no singular Q de un sistema Hamiltoniano integrable con una integral Bott f , las 1-asas redondas se pegan a los toros de la frontera mediante curvas esenciales.*

6.2 Sistemas Hamiltonianos integrables sobre $S^2 \times S^1$

En esta sección utilizaremos los resultados de las secciones precedentes para proporcionar una descripción de los nudos y cadenas de órbitas periódicas de los sistemas Hamiltonianos Bott integrables sobre $S^2 \times S^1$.

6.2.1 Descomposición en asas redondas

Consideremos $S^2 \times S^1$ como superficie isoenergética de un sistema Hamiltoniano Bott integrable (con una integral de Bott f orientable). Al aplicar sobre $S^2 \times S^1$ el lema 69, concluimos que dicho sistema admite una descomposición en asas redondas y, por tanto, un flujo NMS. Así, serán válidos para este sistema Hamiltoniano los resultados obtenidos en capítulos anteriores sobre flujos Morse-Smale no Singulares sobre $S^2 \times S^1$.

Además, por el lema 70 asumimos que existe una descomposición en asas redondas en la que no todas las asas ampliadas son válidas, sino sólo aquellas obtenidas mediante pegadas esenciales de 1-asas redondas. Según el teorema 11 de clasificación de asas ampliadas en $S^2 \times S^1$, dichas asas ampliadas son de los tipos $T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$ local, $F \times S^1$, $D^2 \times S^1 \sim \text{int } \overline{W}$ y $K^3 \sim \text{int}(W)$, donde W es un entorno tubular de una órbita periódica repulsora y \overline{W} es un entorno tubular de un $(2, 1)$ -cable.

Proposición 71 *La botella de Klein K^2 es una superficie invariante de las asas ampliadas $D^2 \times S^1 \sim \text{int } \overline{W}$ y $K^3 \sim \text{int}(W)$.*

Demostración. En el asa ampliada $K^3 \sim \text{int}(W)$ la 1-asa no separadora se pega sobre un toro global mediante dos curvas longitudinales; la órbita de tipo silla y la repulsora r deben ser, por tanto del mismo tipo de homotopía. En el centro de K^3 se encuentra la botella de Klein $K^2 = W^s(u) \cup r$.

Respecto al asa ampliada $D^2 \times S^1 \sim \text{int } \overline{W}$, se obtiene pegando a un toro global una 1-asa no orientable; en este caso, las variedades estable e inestable de la órbita de tipo silla siguen una cinta de Möbius, con dicha órbita de tipo silla en el centro de la banda. La órbita atractora es un nudo trivial paralelo a la órbita silla u ; de este modo la reconstrucción del flujo equivale a pegar dos cintas de Möbius con las órbitas en su centro, por sus fronteras. Así, obtenemos la botella de Klein como variedad inestable de la silla, junto con la órbita atractora, $K^2 = W^u(u) \cup a$. ■

6.2.2 Cadenas con índices en un sistema Hamiltoniano integrable sobre $S^2 \times S^1$

Sabemos por la proposición 64 que en una botella de Klein K^2 crítica de un sistema Hamiltoniano Bott integrable no singular sobre Q todas las órbitas son periódicas, del tipo $\beta^{\pm 2}$ o $\beta^{-1}\alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, las asas ampliadas $D^2 \times S^1 \sim \text{int}^1 \overline{W}$ y $K^3 \sim \text{int}(W)$ de un sistema NMS sobre $S^2 \times S^1$ sabemos que aparecen también en la descomposición en asas redondas de un sistema Hamiltoniano sobre $S^2 \times S^1$. Se ha probado (proposición 71) que la variedad inestable (estable) de la órbita de tipo silla, junto con la órbita atractora (repulsora), forman una botella de Klein invariante K^2 en $D^2 \times S^1 \sim \text{int}^1 \overline{W}$ (resp. en $K^3 \sim \text{int}(W)$) y se comprueba que tanto la órbita de tipo silla como las órbitas repulsora y atractora son del tipo $\beta^{\pm 2}$.

Según el teorema 12, cada tipo de asa ampliada tiene asociada en $S^2 \times S^1$ determinado tipo de operaciones sobre cadenas de órbitas periódicas locales y globales de la variedad. En el teorema siguiente estudiaremos qué tipo de operaciones sobre cadenas de órbitas periódicas en $S^2 \times S^1$ pueden darse en los sistemas Hamiltonianos integrables. Denotaremos por P el conjunto de órbitas de tipo NMS de H en Q .

Teorema 15 *Sea $Q \simeq S^2 \times S^1$ una superficie de nivel no singular de un Hamiltoniano H integrable sobre Q mediante una integral de Bott orientable f . La cadena con índices formada por las órbitas de P puede obtenerse partiendo de cadenas globales y locales aplicando las operaciones O_4 , O_5 y O_6 del teorema 12.*

Demostración. La primera implicación de este teorema puede obtenerse fácilmente repitiendo los argumentos de la demostración del teorema 12 teniendo en cuenta que, como indica el lema 70, las únicas asas ampliadas que pueden aparecer en la descomposición son las que corresponden a las operaciones O_4 (para $T^2 \times [0, 1] - (S^3 - N(k))$ local y $F_2 \times S^1$), O_5 (para $F_{p+1} \times S^1$) y O_6 (para $D^2 \times S^1 \sim \text{int}(W)$ y $K^3 \sim \text{int}(W)$). ■

De este teorema y de la demostración del teorema 12 se deducen los siguientes resultados inmediatos.

Corolario 72 *Sea H un Hamiltoniano asociado a un sistema integrable sobre $Q \simeq S^2 \times S^1$ mediante una integral de Bott orientable f . Si k es una órbita periódica de H entonces k se obtiene a partir de $(0, 2)$ -cadenas de Hopf globales y cadenas locales mediante sumas conexas y cableados.*

Demostración. Este resultado es inmediato a partir del teorema 15 y del hecho que las operaciones de cableado y suma conexa de nudos y cadenas

son las operaciones básicas con las que se definen las operaciones O_4 , O_5 y O_6 (véase el teorema 12). ■

Definición 73 *Una cadena L es separable en $S^2 \times S^1$ si existe una 2-esfera separadora inmersa en la variedad que es disjunta con L y además separa las componentes de L en subcadenas. De otro modo, diremos que L es no separable.*

Corolario 74 *Sea H un Hamiltoniano asociado a un sistema integrable sobre $Q \cong S^2 \times S^1$ mediante una integral de Bott orientable f . Entonces, el conjunto P de órbitas de tipo NMS de H en Q forma una cadena no separable.*

Demostración. Por la forma en que están definidas, las operaciones de cableado y suma conexa de nudos y cadenas con las que se definen las operaciones O_4 , O_5 y O_6 no dejan ninguna componente de las cadenas separada. ■

De este modo quedan caracterizadas las cadenas de órbitas periódicas de tipo NMS que pueden darse en un sistema Hamiltoniano H integrable sobre la superficie de nivel $Q \cong S^2 \times S^1$. En el capítulo siguiente aplicaremos estos resultados sobre un problema de la Mecánica Celeste cuyo espacio de fases es, bajo determinadas condiciones, la variedad $S^2 \times S^1$.

Capítulo 7

Aplicación a la Mecánica Celeste

La variedad $S^2 \times S^1$ aparece al estudiar el espacio de fases de problemas clásicos de la Mecánica Celeste, en particular en el problema de dos centros fijos.

Una breve descripción del problema nos llevará a la construcción del espacio de fases global para cada uno de los rangos posibles de la energía. Una vez reconstruido dicho espacio de fases global, estaremos en condiciones de aplicar sobre él los conocimientos que sobre la descomposición en asas redondas de la variedad $S^2 \times S^1$ hemos adquirido en el capítulo 3. De este modo seremos capaces de identificar por una parte, qué tipo de asas ampliadas aparecen en la descomposición en asas redondas de la variedad y por otra, qué tipo de operaciones generan las cadenas con índices globales en cada caso.

7.1 Descripción del problema de dos centros fijos

Consideramos el movimiento de un planeta de masa m_0 atraído por dos astros fijos con masas m y m' , respectivamente. Sean además r y r' las distancias respectivas del planeta a m y m' (véase la figura 7.1).

El Hamiltoniano de este problema puede expresarse como:

$$H = \frac{1}{2}m_0(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \gamma m_0 \left[\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} \right]$$

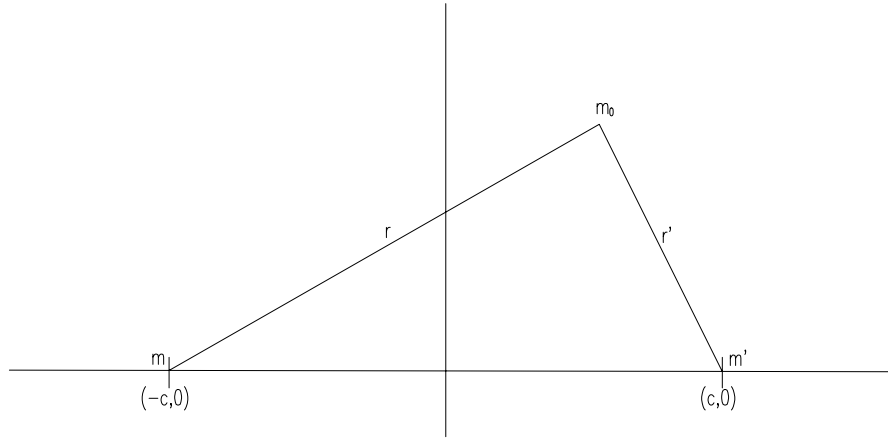


Fig. 7.1: Problema de dos centros fijos.

Para regularizar este problema aplicamos las coordenadas hiperbólicas y lo resolvemos de forma separada:

$$\begin{aligned} x &= \cosh \xi \cos \eta & -\infty < \xi < \infty \\ y &= \sinh \xi \sin \eta & 0 \leq \eta \leq 2\pi \end{aligned}$$

omitiendo el factor positivo m_o , se obtiene:

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \left(p_\xi^2 + p_\eta^2 \right) - \frac{k \cosh \xi + k' \cos \eta}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}$$

donde $k = \gamma m_o (m + m')$ y $k' = \gamma m_o (m - m')$. Supondremos además que $m > m'$ y $c = 1$, por lo que $k > k' > 0$.

7.1.1 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones que describen el movimiento del sistema son:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \cdot p_\xi \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \cdot p_\eta \\ \dot{p}_\xi &= \frac{2 \cdot \cosh \xi \cdot \sinh \xi}{(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^2} \left(\frac{1}{2} p_\xi + \frac{1}{2} p_\eta - k \cosh \xi - \cos \eta \right) + \frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \cdot k \sinh \xi \\ \dot{p}_\eta &= \frac{2 \cdot \cos \eta \cdot \sin \eta}{(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^2} \left(\frac{1}{2} p_\xi + \frac{1}{2} p_\eta - k \cosh \xi - \cos \eta \right) + \frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \cdot k' \sin \eta \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas de forma separable mediante el cambio de variables: $t\tilde{A} \tau / \frac{dt}{d\tau} = \cosh^2 \xi - \cos^2 \eta$ de este modo, y para un valor dado del Hamiltoniano $H = h$, las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= p_\xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= p_\eta \\ \frac{\partial p_\xi}{\partial \tau} &= 2h \cdot \cosh \xi \cdot \sinh \xi + k \cdot \sinh \xi \\ \frac{\partial p_\eta}{\partial \tau} &= 2h \cdot \cos \eta \cdot \sin \eta + k' \sin \eta\end{aligned}$$

Si a este resultado unimos las expresiones de los momentos generalizados, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{F + k \cosh \xi + h \cosh^2 \xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{G + k' \cos \eta - h \cos^2 \eta}\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento admiten el escalado:

$$p_\xi = a \cdot p_{\xi_1} \quad p_\eta = a \cdot p_{\eta_1} \quad k = a^2 \cdot k_1 \quad k' = a^2 \cdot k'_1 \quad \tau = \frac{\tau_1}{a^2}$$

El hecho de que las ecuaciones de movimiento permanezcan invariantes bajo el cambio de escala indica que podemos fijar una de las constantes y considerar sólo los casos $k' = 1$ (luego $k > 1$) y $k' = 0$ (estudiaremos de forma separada la singularidad $m = m'$). Abusaremos de la notación en lo sucesivo, denotando:

$$p_\xi \equiv p_{\xi_1} \quad p_\eta \equiv p_{\eta_1} \quad k \equiv k_1$$

7.1.2 Separación del sistema

Según los resultados obtenidos en [19], para un valor dado del Hamiltoniano $H = h$, aparecen dos nuevas funciones:

$$\begin{aligned}F(\xi, p_\xi) &= \frac{p_\xi^2}{2} - k \cosh \xi - h \cosh^2 \xi \\ G(\eta, p_\eta) &= \frac{p_\eta^2}{2} - \cos \eta + h \cos^2 \eta\end{aligned}$$

que definen un nuevo sistema Hamiltoniano, dependiendo de un parametro h cuya función Hamiltoniana es $K(h) = F(h) + G(h)$, tal que:

$$H = \frac{F + G}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} + h$$

Así, para el valor concreto $H = h$ se verifica $F = -G$.

Es posible resolver estas ecuaciones de forma separada para, posteriormente, estudiar la solución global del sistema original empleando la condición $F = -G$ para cada valor de la energía h . Así, se estudian las soluciones para los momentos:

$$p_\xi = \pm \sqrt{2(F + k \cosh \xi + h \cosh^2 \xi)}, \quad p_\eta = \pm \sqrt{2(G + \cos \eta - h \cos^2 \eta)}$$

para todos los valores posibles de la energía ([17]).

Si la energía es negativa, las soluciones en el espacio de fases (ξ, p_ξ) pueden verse en las figuras 7.2 y 7.3.

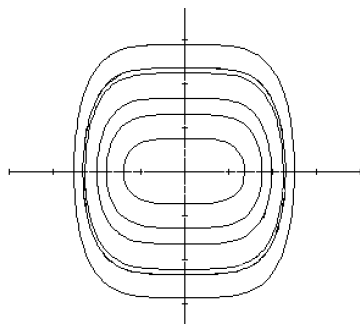


Fig. 7.2: E.f. (ξ, p_ξ) para $h \leq -\frac{k}{2}$

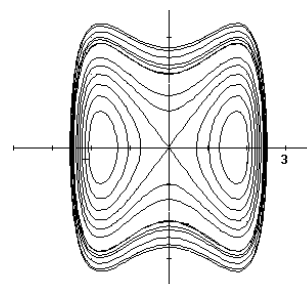


Fig. 7.3: E.f. (ξ, p_ξ) para $h > -\frac{k}{2}$

Las soluciones en el espacio de fases (η, p_η) pueden verse en las figuras 7.4 y 7.5.

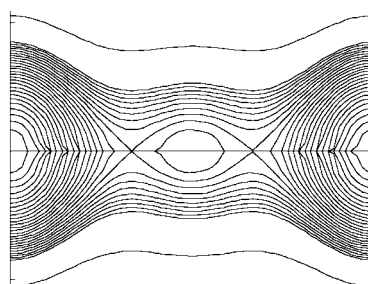


Fig. 7.4: E.f. (η, p_η) para $h < -\frac{1}{2}$

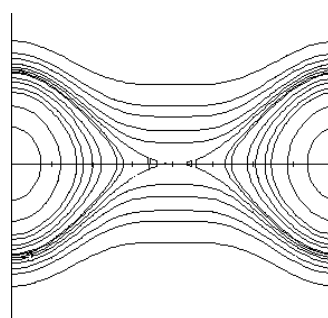


Fig. 7.5: E.f. (η, p_η) para $h \geq -\frac{1}{2}$

La combinación de los espacios de fases separados 7.3 y 7.5 sólo se da en el problema de Kepler, en el que la masa de uno de los dos astros se considera nula. Nuestras hipótesis de partida exigen masas $m > m' > 0$, por lo que ésta no es una posibilidad admisible.

7.2 Descomposición en asas redondas

A continuación se obtiene el espacio de fases global en todos los rangos de la energía, pudiéndose observar en cada caso la estructura de las órbitas NMS en $S^2 \times S^1$ para cada uno de los rangos de h [18]. Partiendo de estos resultados, se estudiará la descomposición en asas redondas de cada uno de ellos (véase [20], [21])

7.2.1 Construcción del espacio de fases completo

Encontraremos tres estructuras diferentes del espacio de fases global, en otros tantos rangos de la energía h . Además, analizaremos algunos casos límite cuyo espacio de fases global no es $S^2 \times S^1$, sino dos copias de la esfera S^3 . En el siguiente diagrama (figura 7.6) mostramos, coloreadas, las regiones del espacio (k, h) en las que el espacio de fases del sistema es $S^2 \times S^1$ o S^3 , distinguiendo los casos en función de la energía del sistema y de la relación entre ésta y k , como se detalla a continuación. Esta distinción se basa en el estudio de la región de Hill asociada a cada rango de la energía: según si dicha región es conexa o no tenemos una o dos copias del espacio de fases, y según sea esta región un disco o una corona obtenemos como espacio de fases S^3 o $S^2 \times S^1$.

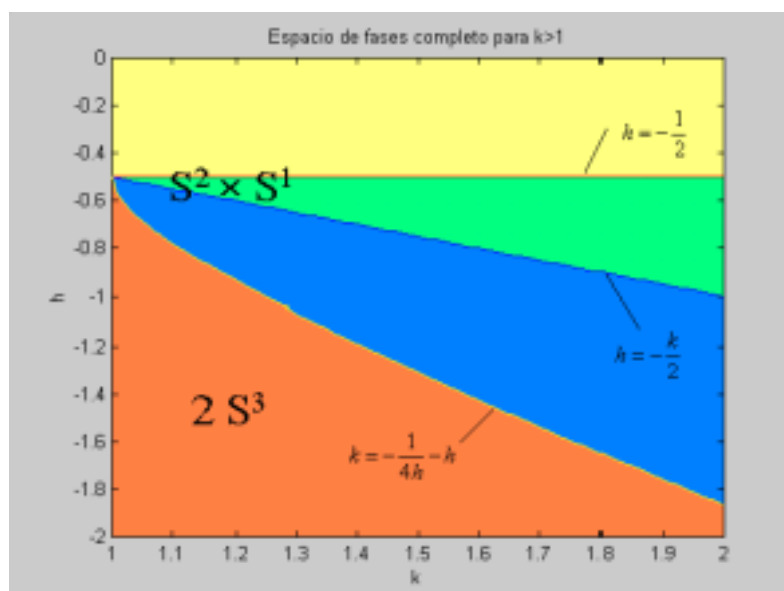


Fig. 7.6: Espacio de fases $S^2 \times S^1$ en función de k y h

Caso 1: $h \geq -\frac{1}{2}$

Para valores de la energía $h \geq -\frac{1}{2}$ se verifica necesariamente que $G = -\frac{k^2}{4h} > h + 1$ (por ser $k > 1$), cuyos espacios de fases separados son 7.3 y 7.5, en los que representamos las curvas de nivel correspondientes a las funciones hamiltonianas separadas:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p_\xi^2 - k \cosh \xi - h \cosh^2 \xi &= F \\ \frac{1}{2}p_\eta^2 - \cos \eta + h \cos^2 \eta &= G\end{aligned}$$

provenientes de la función hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \left[\frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) - k \cosh \xi - \cos \eta \right]$$

Consideramos en primer lugar la proyección del espacio de fases completo (tetradimensional) para $\eta = 0$. Para un valor concreto de la energía $H = h$, consideramos la expresión del hamiltoniano como la circunferencia

$$\begin{aligned}p_\xi^2 + p_\eta^2 &= r^2 \\ &= 2h (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) + k \cosh \xi + \cos \eta\end{aligned}$$

siendo $r = r(\xi)$.

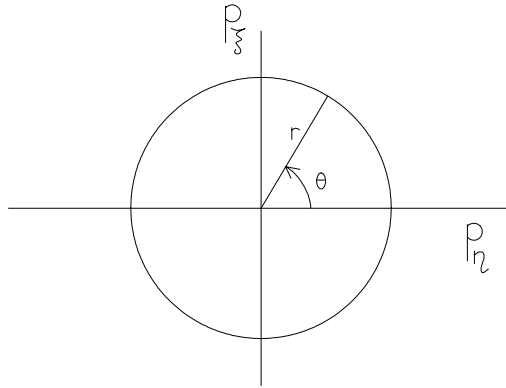


Fig. 7.7: Coordenadas polares en la circunferencia descrita por los momentos.

Estudiando las coordenadas polares sobre esta circunferencia (véase figura 7.7), encontramos la coordenada angular $\theta = \theta(p_\xi, p_\eta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Esta coordenada angular θ nos proporciona la relación entre ambos momentos cinéticos y, por tanto, entre los espacios de fases separados.

La proyección de S^2 donde dibujaremos el espacio de fases completo para $\eta = 0$ es la siguiente: partimos de la esfera S^2 ; sobre un diámetro contenido en

el ecuador de la esfera situamos el eje sobre el que mediremos la coordenada ξ . Para un valor determinado de esta coordenada tenemos definida una circunferencia $p_\xi^2 + p_\eta^2 = r^2$ con centro en este valor de ξ .

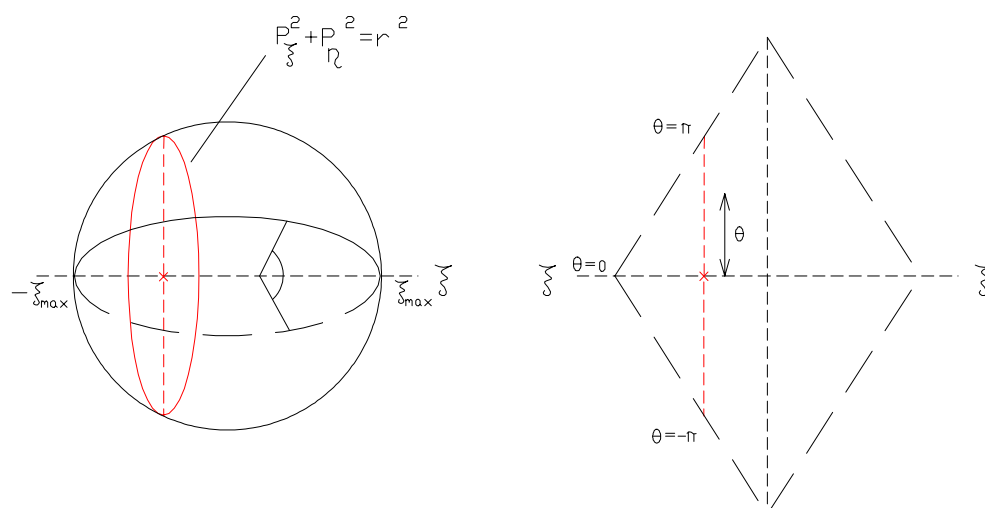


Fig. 7.8: Coordenadas (θ, ξ) sobre S^2

Cortamos la esfera por el ecuador hasta alcanzar el eje ξ y separamos ambos trozos de esfera, deformándola hasta obtener la representación plana final (véase la figura 7.8), en la que la circunferencia $p_\xi^2 + p_\eta^2 = r^2$ queda representada por un segmento perpendicular a dicho eje con sus extremos identificados. Sobre este segmento se representa la coordenada angular θ de manera que toma valor $\theta = 0$ en su intersección con el eje ξ , $\theta = \pi$ en el extremo superior y $\theta = -\pi$ en el inferior.

Partiendo de esta base procederemos a pegar sobre esta representación las curvas de nivel de ambos espacios de fases separados, identificándolas mediante el valor que sobre ellas toman las funciones hamiltonianas, ya que se verifica $F = -G$.

Consideremos en primer lugar el mínimo valor de F para el que aparecen curvas de nivel (concretamente dos puntos de equilibrio) en el espacio de fases (ξ, p_ξ) , $F = \frac{k^2}{4h}$. En el espacio (η, p_η) al valor $G = -\frac{k^2}{4h}$ corresponde la más exterior de las curvas de nivel, topológicamente equivalente a una circunferencia. Sin embargo, para $\eta = 0$ tenemos dos puntos cuyos momentos cinéticos son opuestos (figura 7.9).

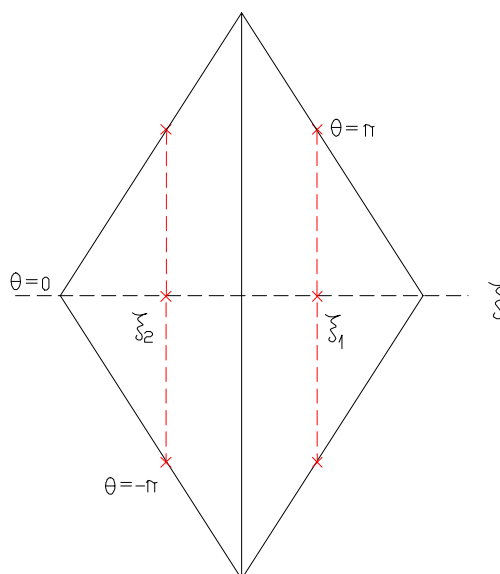


Fig. 7.9: Puntos de equilibrio correspondientes a $F = \frac{k^2}{4h}$ para $\eta = 0$.

Sobre los puntos de equilibrio correspondientes a $F = \frac{k^2}{4h}$, sabemos que $p_\xi = 0$; esto corresponde a los valores $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ de la coordenada angular sobre la circunferencia definida por los momentos cinéticos. De este modo, al multiplicarlos por los puntos de (η, p_η) obtenemos, para $\theta = 0$ dos puntos sobre el eje ξ y para $\theta = \pi$ dos puntos sobre los extremos superior e inferior de cada uno de los segmentos correspondientes a cada uno de los puntos de equilibrio del espacio (ξ, p_ξ) .

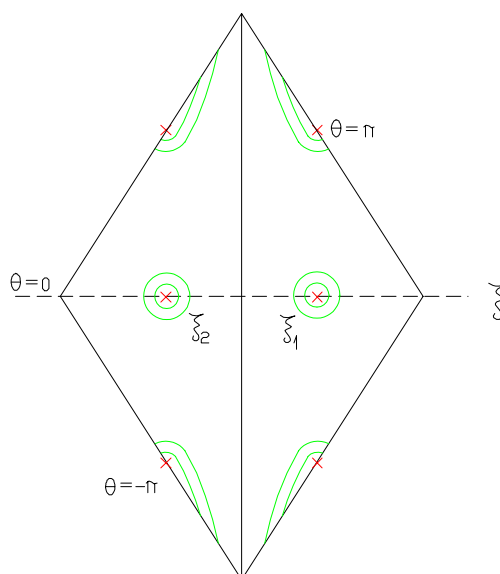
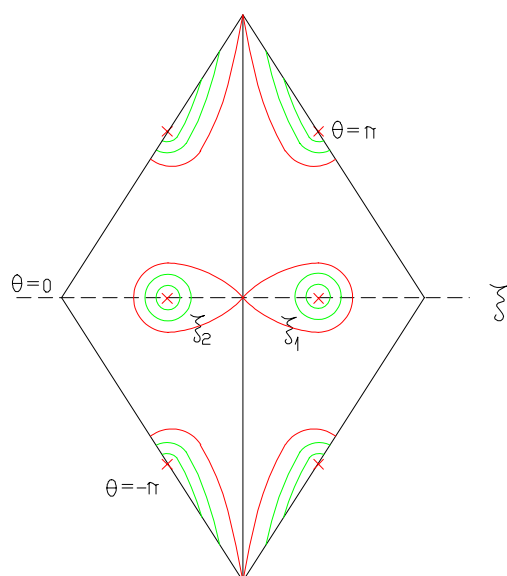
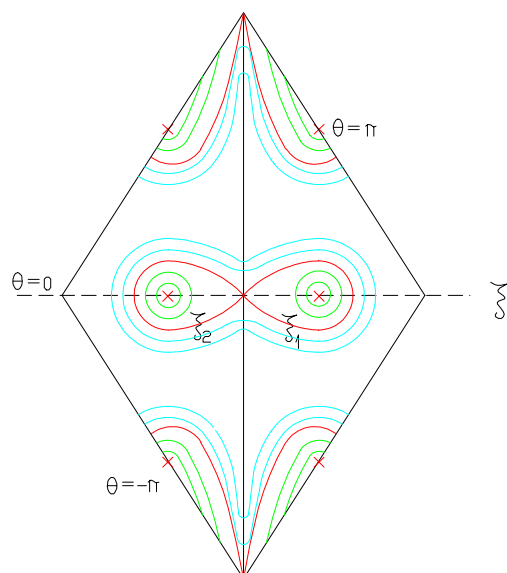


Fig. 7.10: Curvas de nivel correspondientes a $\frac{k^2}{4h} < F < -h - k$

Fig. 7.11: Curvas de nivel correspondientes a $F \leq -h - k$

Al aumentar el valor de F en el espacio (ξ, p_ξ) , las curvas de nivel son circunferencias en torno a los anteriores puntos de equilibrio, para las que p_ξ toma valores próximos a cero. Estas circunferencias tienen asociadas en (η, p_η) curvas de nivel exteriores, que no tocan en ningún momento al eje $p_\eta = 0$, por lo que los dos puntos correspondientes a $\eta = 0$ tienen momento no nulo. Por todo ello, la coordenada angular θ tomará valores próximos a cero, tanto positivos como negativos, así como valores próximos a π (fig. 7.10).

Fig. 7.12: Curvas de nivel correspondientes a $F \leq -h - 1$

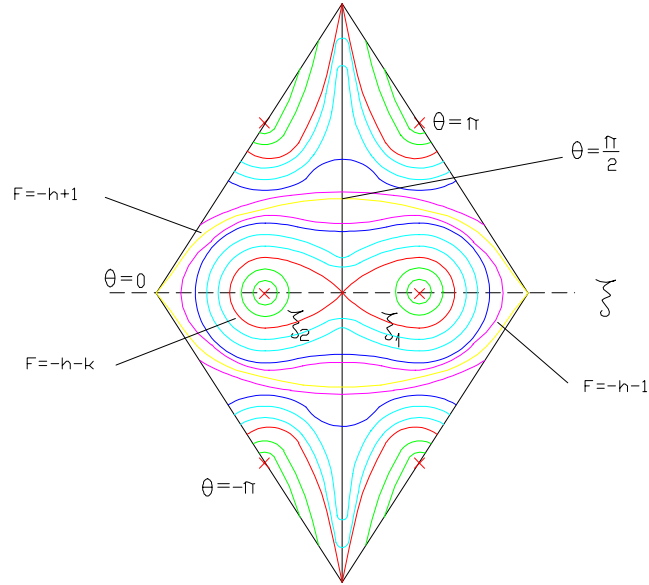


Fig. 7.13: Curvas de nivel correspondientes a $F \leq -h + 1$

Cuando $F = -h - k$, estamos en (ξ, p_ξ) sobre la curva crítica en forma de ocho (fig. 7.11). El punto de equilibrio en el origen, al ser de momento cinético nulo, tendrá una posición en la proyección de S^2 con valor angular $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. Asimismo, los demás puntos de la curva crítica corresponden a valores nulos o próximos a cero del momento p_ξ , por lo que sobre nuestra proyección, serán valores de θ cercanos o iguales a cero (o a π).

Cuando $F = -h - 1$ (fig. 7.12) aparece una órbita crítica en el espacio de fases (η, p_η) que sí interseca al eje $p_\eta = 0$, pero no en $\eta = 0$, sino en $\eta = \pi$, por lo que no es una curva crítica en nuestra proyección de S^2 , siendo simplemente una curva cerrada en torno a $\xi = 0$.

Esta situación no cambia hasta llegar al punto de equilibrio y mínimo de la función hamiltoniana G en el espacio (η, p_η) , $F = -h + 1$ (fig. 7.13). En este caso, $p_\eta = 0$ por lo que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y en esta posición se obtiene una circunferencia, surgida de multiplicar el punto de equilibrio de (η, p_η) por su circunferencia asociada en (ξ, p_ξ) . Esta es la proyección de S^2 para $\eta = 0$ (fig. 7.14). Si aumentamos el valor de la coordenada angular η , la estructura de la proyección seguirá siendo la misma hasta llegar a $\eta = \pi$, valor crítico en el que aparece un punto de equilibrio correspondiente a la curva $F = -h - 1$. Mientras tanto, la única diferencia consiste en que, para cada valor de F , los puntos del espacio (η, p_η) por los que multiplicamos la curva de nivel de (ξ, p_ξ) tienen como segunda coordenada un momento p_η menor en valor absoluto que el que le correspondía para $\eta = 0$. Esto significa que, como veremos a continuación, en nuestra proyección la coordenada angular θ está cada vez más cerca de $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$, por lo que las circunferencias tienden

a ser más grandes y la curva crítica $F = -h + 1$ desaparece puesto que para este valor de F no sólo no hay ningún punto de equilibrio, sino que ni siquiera hay curvas de nivel en (η, p_η) (nótese que para este valor concreto de η , el máximo valor que puede tomar la función hamiltoniana es precisamente $F = -h - 1$ y $F = -h - 1 < -h + 1$).

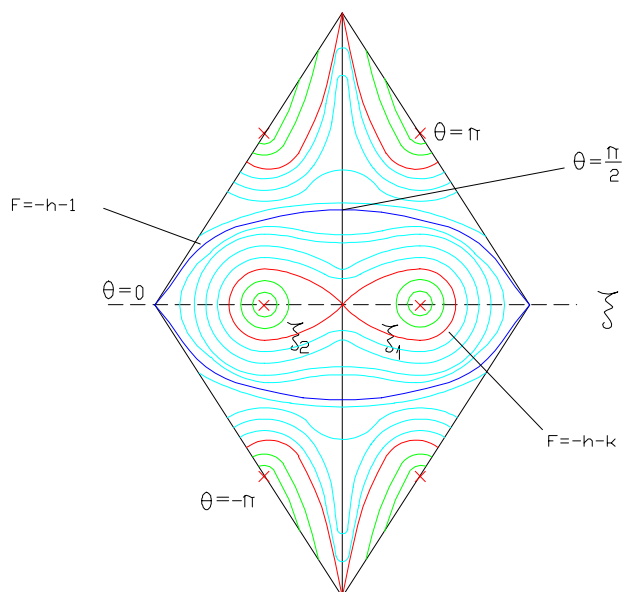


Fig. 7.14: Sección de $S^2 \times S^1$ para $\eta = 0$

Al llegar a $\eta = \pi$, la construcción de la proyección de S^2 es análoga a la anterior hasta llegar a la curva $F = -h - 1$, para la que obtenemos un único punto en el espacio (η, p_η) y por tanto una única circunferencia sobre la proyección de S^2 , correspondiente a $\theta = \frac{\pi}{2}$, (ya que $p_\eta = 0$) y además para este valor de η , $F = -h - 1$ es el mayor de los valores de F para los que existen curvas de nivel, por lo que ya no aparecen las circunferencias correspondientes a $F \in [-h - 1, -h + 1]$ que aparecían para valores $\eta \leq \pi$. Lo que ha ocurrido es que, como ya se ha comentado antes, al movernos en el espacio (η, p_η) hacia valores de η más grandes, las distintas circunferencias que obteníamos en torno a $F = -h - k$ se abren cada vez más, hasta unirse las dos curvas correspondientes a $F = -h - 1$, colapsándose todas las demás en ella (aquellas para las que $-h - 1 < F < -h + 1$). El proceso se repite a la inversa cuando nos movemos de $\eta = \pi$ hacia $\eta = 2\pi$. Si representamos el proceso completo con tres valores de η : 0 , π y 2π , podemos hacernos una idea de cuál es el comportamiento de las curvas de nivel y las órbitas periódicas (NMS) en el espacio de fases completo: $S^2 \times S^1$ (véase figura 7.15).

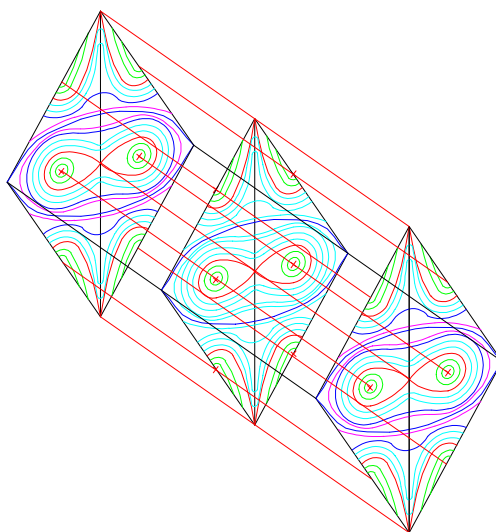


Fig. 7.15: Espacio de fases completo ($S^2 \times S^1$) en el caso $h \geq -\frac{1}{2}$.

Caso 2: $-\frac{k}{2} < h < -\frac{1}{2}$

Los espacios de fases separados se corresponden con las figuras 7.3 y 7.4. La construcción del espacio de fases completo es similar a la del caso anterior, salvo que la estructura del espacio (η, p_η) es más compleja y por tanto también lo será la del espacio global. Existen cuatro puntos de equilibrio en el espacio de fases separado (η, p_η) , dos de ellos de tipo silla (concretamente los puntos situados en las coordenadas $\eta = \pm \arccos \frac{1}{2h}$, $p_\eta = 0$) y la curva límite $G = -\frac{1}{4h}$ delimita tres regiones de comportamiento diferentes para las curvas de nivel. Estos puntos de equilibrio darán lugar a las órbitas periódicas de tipo NMS locales.

Debido precisamente a la complejidad de este espacio, en la figura 7.17 aparecen únicamente secciones del espacio de fases completo correspondientes a valores de la coordenada angular pertenecientes al intervalo $[0, \pi]$. Por supuesto, la estructura del espacio de fases completo es simétrica respecto a la sección $\eta = \pi$ y esto permite visualizar fácilmente la estructura general sin necesidad de incluir todas las secciones en una misma figura, lo que dificultaría su comprensión.

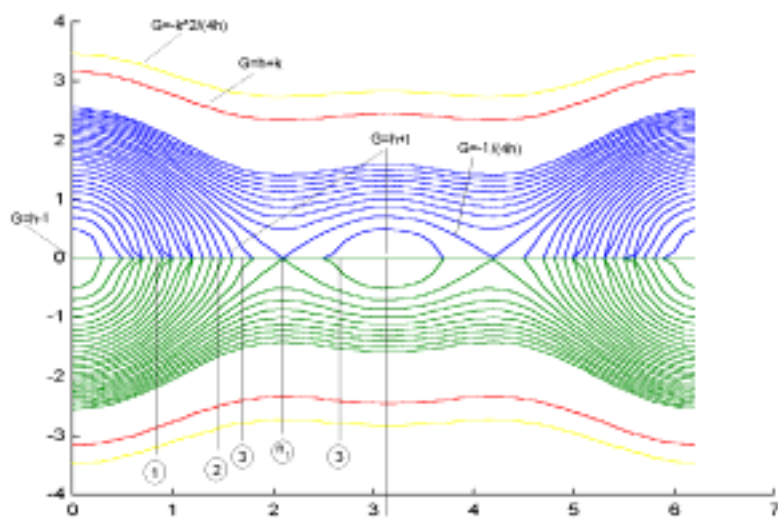


Fig. 7.16: Identificación de las secciones del espacio de fases.

En la figura 7.16 podemos ver sobre el espacio separado (η, p_η) los valores de η para los que se han obtenido las secciones del espacio de fases completo.

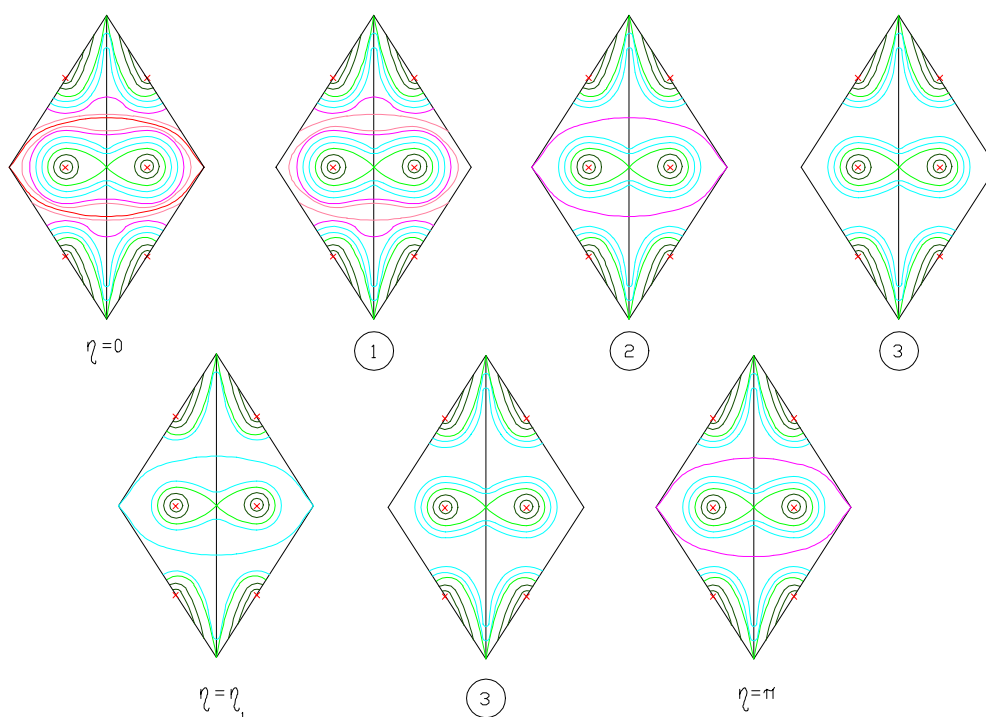


Fig. 7.17: Secciones del espacio de fases completo para $-\frac{k}{2} < h < -\frac{k'}{2}$.

Las órbitas periódicas de tipo NMS que aparecen en el espacio de fases completo para este rango de valores de h son seis globales, de las cuales dos son de tipo silla (correspondientes al punto de equilibrio del origen en el espacio separado (ξ, p_ξ)) y cuatro locales, dos de las cuales son también silla.

Caso 3: $h \leq -\frac{k}{2}$

Los espacios de fases separados son, en este caso, los correspondientes a las figuras 7.2 y 7.4. Al ser la estructura del espacio (ξ, p_ξ) más simple que en el caso precedente (un único punto de equilibrio en el origen que dará lugar a dos órbitas NMS globales), también lo será la estructura orbital en el espacio de fases completo. Sin embargo, se mantiene el espacio separado (η, p_η) del caso anterior, por lo que continúa siendo conveniente mostrar secciones del espacio de fases global en lugar de su estructura completa. Dichas secciones, que se pueden observar en la figura 7.18, corresponden a los mismos valores de la coordenada angular que en el caso anterior, mostrados en la figura 7.17.

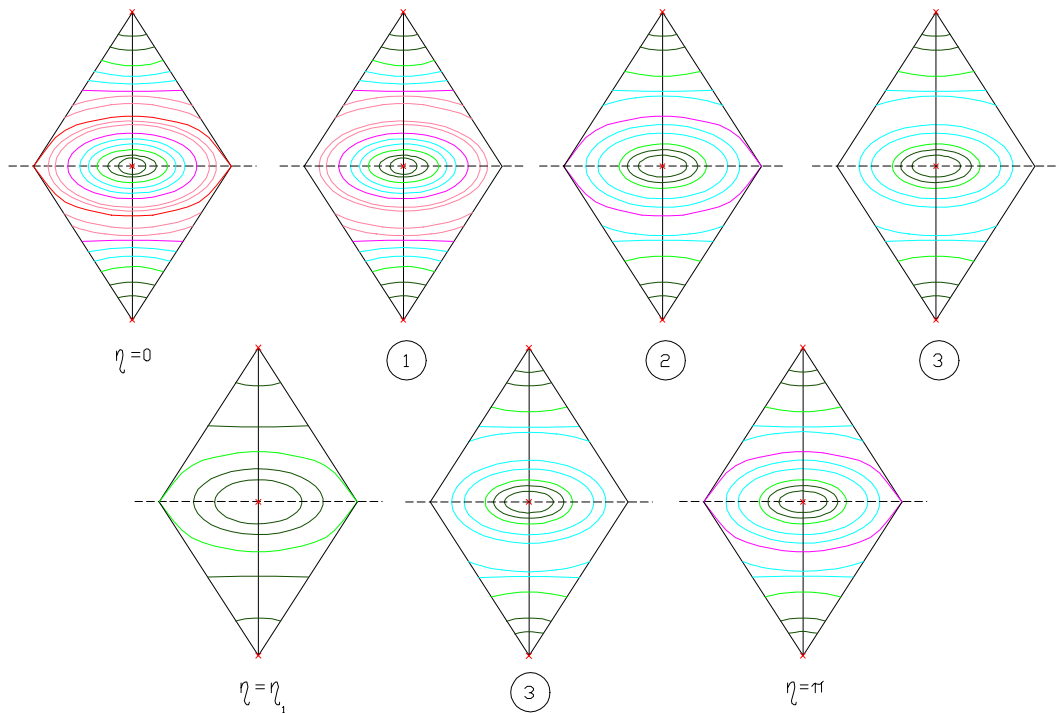


Fig. 7.18: Secciones del espacio de fases completo para $h < -\frac{k}{2}$.

Si $h = -\frac{k}{2}$, para todo $k > 1$ se verifica la desigualdad $k > -\frac{1}{4h} - h$ y los espacios de fases separados aparecen tal y como han sido descritos. En el caso

particular $h < -\frac{k}{2}$, pueden darse circunstancias especiales que modifican la estructura del espacio separado (η, p_η) en función de cierta relación entre k y h .

1. $k > -\frac{1}{4h} - h$: esta desigualdad define una estructura de los espacios separados totalmente análoga a la descrita anteriormente.
2. $k = -\frac{1}{4h} - h$: en este caso el valor máximo que puede tomar la función Hamiltoniana G es el correspondiente a la curva límite, $G = -\frac{1}{4h}$, por lo que las curvas de nivel de este espacio de fases separado son únicamente aquellas para las que $G \leq -\frac{1}{4h}$ y eso descarta a las sinusoides exteriores a la curva límite. Esta circunstancia tiene como consecuencia que el espacio de fases completo ya no es $S^2 \times S^1$, ya que para los valores $\eta = \pm \arccos \frac{1}{2h}$ dicho espacio de fases se reduce a un único punto. En la figura 7.19 se muestra la estructura del espacio de fases global, dos copias de S^3 unidas mediante dos puntos, a través del mecanismo de las secciones antes descrito.

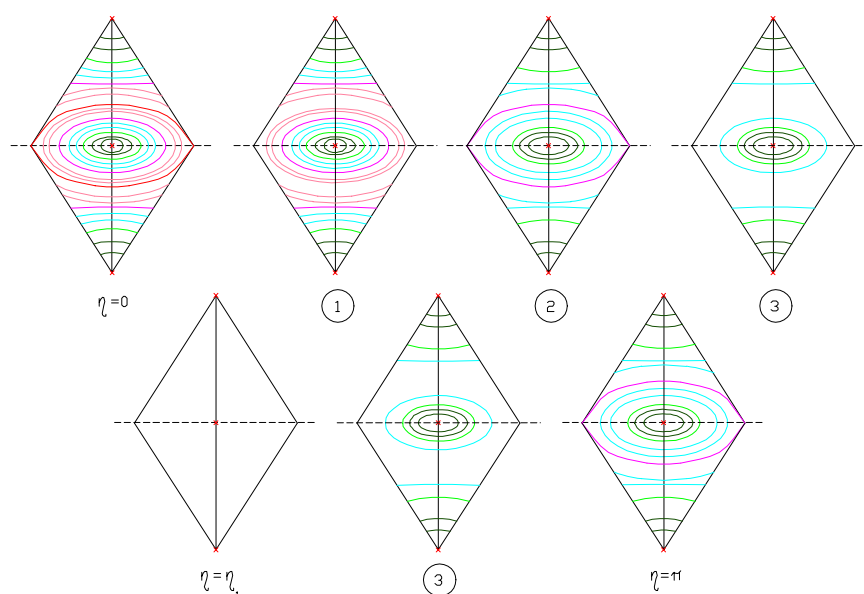


Fig. 7.19: Secciones del espacio de fases completo para $h < -\frac{k}{2}$ (caso 2).

3. $1 < k < -\frac{1}{4h} - h$: cuando el valor máximo que alcanza la función Hamiltoniana G es menor que el valor correspondiente a la curva crítica, $G < -\frac{1}{4h}$, el espacio separado (η, p_η) es la unión de dos discos disjuntos, centrados en $\eta = 0$ y $\eta = \pi$, respectivamente, como puede observarse en la figura 7.20.

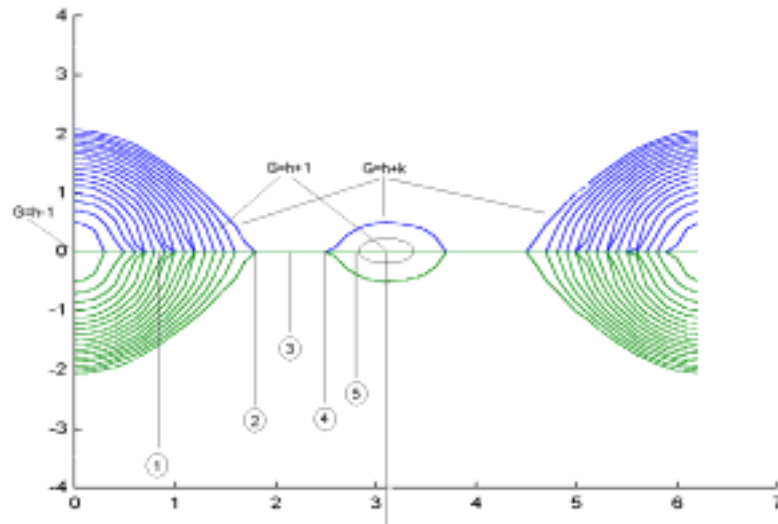


Fig. 7.20: Espacio (η, p_η) para $h = -\frac{k}{2}$ (caso 3)

Precisamente por no ser conexo el espacio (η, p_η) , el espacio de fases completo tampoco es la variedad $S^2 \times S^1$, sino dos copias disjuntas de S^3 , y sus secciones pueden observarse en la figura 7.21.

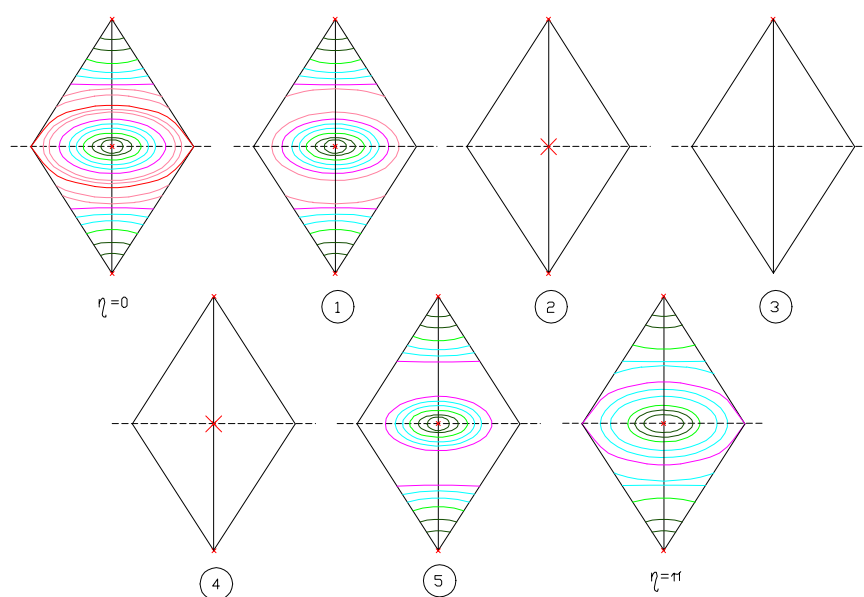


Fig. 7.21: Secciones del espacio de fases completo para $h = -\frac{k}{2}$ (caso 3).

4. $k = 1$: esta posibilidad corresponde al problema de Kepler, es decir, al caso en que la masa m' sea nula. Por definición de nuestro problema, esta no es una posibilidad admisible. Para un estudio detallado de este problema, véase [19].

Los resultados anteriormente expuestos, e ilustrados en la figura 7.6, pueden resumirse en los siguientes teoremas.

Teorema 16 *El espacio de fases del problema de dos centros fijos (en coordenadas hiperbólicas), para $h < 0$, es:*

1. $S^2 \times S^1$ cuando $h \geq -\frac{k}{2}$ o bien cuando $h < -\frac{k}{2}$, para $k > -\frac{1}{4h} - h$.
2. Dos copias de S^3 cuando $h < -\frac{k}{2}$,
 - (a) unidas mediante dos puntos si $k = -\frac{1}{4h} - h$, o
 - (b) disjuntas si $k < -\frac{1}{4h} - h$.

Teorema 17 *El espacio de fases del problema de dos centros fijos (en coordenadas hiperbólicas), para masas idénticas de los primarios ($k' = 0$) y $h < 0$, es:*

1. $S^2 \times S^1$ para $h > -k$;

2. *Dos copias de S^3 ,*

(a) *unidas mediante dos puntos si $h = -k$, o*

(b) *disjuntas si $h < -k$.*

7.2.2 Descomposición en asas redondas de $S^2 \times S^1$

Una vez obtenida la estructura orbital del espacio de fases completo es posible reconstruir dicho espacio y su correspondiente flujo NMS utilizando las herramientas de descomposición en asas redondas de una variedad descritas en el capítulo 2. Es decir, para los casos en los que el espacio de fases completo es $S^2 \times S^1$, es posible obtener la descomposición en asas redondas de la variedad.

Caso 1: $h \geq -\frac{1}{2}$

En este caso, si observamos la estructura orbital del espacio de fases completo generado en la sección anterior (figura 7.15), encontramos ocho órbitas de tipo NMS: seis de ellas globales y otras dos locales.

Recordemos que la variedad $S^2 \times S^1$ puede obtenerse de la unión de dos toros sólidos $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$ tales que $D_1^2 \times S^1 \cap D_2^2 \times S^1 = \partial D_1^2 \times S^1 = \partial D_2^2 \times S^1$. Comparando esta descripción con el caso particular del flujo NMS para $h \geq -\frac{1}{2}$, de entre las órbitas NMS globales, encontramos tres de ellas en cada uno de los dos toros sólidos cuya unión genera la variedad. En cada trío encontramos dos órbitas que pueden ser atractoras o repulsoras, situadas en el centro de los toros interiores a la superficie bidimensional generada por la curva límite en forma de ocho. El punto de cruce en dicha curva límite en forma de ocho es un punto de equilibrio que genera una órbita periódica de tipo silla en la variedad.

Nótese que en esta representación de $S^2 \times S^1$ es necesario identificar las líneas superiores con las inferiores, de manera que las órbitas NMS situadas por encima y por debajo del toro central $D_1^2 \times S^1$ son las mismas y están situadas en el centro del otro toro sólido, $D_2^2 \times S^1$.

Las dos órbitas NMS locales pueden considerarse en uno de los toros sólidos que generan la variedad, por ejemplo $D_1^2 \times S^1$. Estas órbitas aparecen para valores concretos de la coordenada angular η : en los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ del espacio de fases separado (η, p_η) . La órbita NMS local que corresponde a $\eta = \pi$ es una órbita de tipo silla, como se deduce al observar la figura 7.5. La otra órbita NMS local puede ser atractora o repulsora. Veremos a continuación como las órbitas NMS, tanto globales como locales, pueden considerarse como resultado de pegar asas redondas.

Supongamos que el asa ampliada se ha construido pegando la 1-asa redonda a un solo toro por medio de dos curvas esenciales (caso (7) del teorema 11). Puede deducirse por el lema 53 que este toro debe ser global en $S^2 \times S^1$, por lo que el asa engordada obtenida puede observarse en la figura 7.22. Nótese en esta gráfica que aparecen dos órbitas d_1 y d_2 (una será atractora y la otra repulsora) en los centros de ambos toros: el original y el generado por el asa, respectivamente. También aparece una órbita u_1 de tipo silla en la 1-asa, que puede ser considerada en la intersección de los dos toros. Esta estructura se puede reconocer con facilidad en el centro de los dos toros sólidos que general la variedad $S^2 \times S^1$ en el flujo NMS que estamos reconstruyendo.

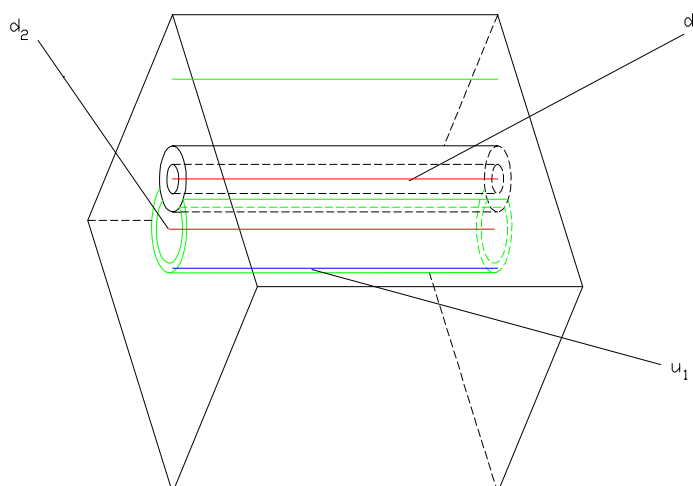


Fig. 7.22: Asa ampliada con dos curvas esenciales globales sobre un toro

Por otra parte, las dos órbitas NMS locales que se muestran en la figura 7.15 (y que denotaremos por d_3 y u_2), aparecen al pegar una 1-asa a dos toros mediante dos curvas locales esenciales (caso (7) del teorema 11). En este caso, uno de esos dos toros es el asa engordada obtenida en el paso anterior de esta construcción, como puede observarse en la figura 7.23.

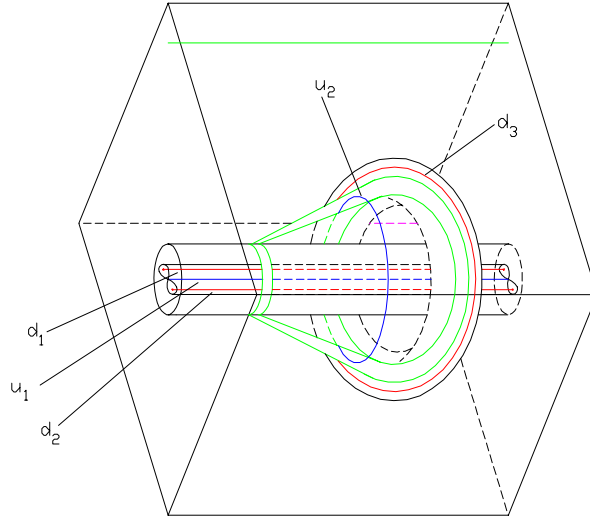


Fig. 7.23: Asa ampliada con dos curvas locales esenciales sobre dos toros (caso 1).

Las dos asas ampliadas que acabamos de construir, y que se muestran en las figuras 7.22 y 7.23 son topológicamente equivalentes a dos toros sólidos, que denotamos de nuevo por $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$, respectivamente. Si se pegan estos toros por sus fronteras de manera que

$$D_1^2 \times S^1 \cap D_2^2 \times S^1 = \partial D_1^2 \times S^1 = \partial D_2^2 \times S^1$$

se obtiene nuevamente la estructura de $S^2 \times S^1$ mostrada en la figura 7.15.

Caso 2: $-\frac{k}{2} < h < -\frac{1}{2}$

Si se observa la figura 7.17, es fácil encontrar las órbitas periódicas de tipo NMS del sistema: seis de ellas son globales (de éstas, dos son de tipo silla) y otras cuatro son locales. Para reconstruir el espacio de fases global partimos de dos toros (cada uno de ellos con una órbita atractora o repulsora en su centro) a cada uno de los cuales se pega un asa mediante dos curvas esenciales globales, del mismo modo que se muestra en la figura 7.21. De este modo surgen dos toros sólidos, $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$, cada uno de los cuales contiene a las tres órbitas NMS globales del sistema.

Sobre uno de estos toros (por ejemplo, $D_1^2 \times S^1$) pegamos dos veces y de forma consecutiva una 1-asa empleando la técnica de la figura 7.23, obteniendo una variedad topológicamente equivalente a un toro sólido en cuyo interior hay tres órbitas NMS globales (d_1, d_2 y u_1) y cuatro locales enlazadas con éstas, d_3, d_4, u_2 y u_3 (véase la figura 7.24). Denotaremos este toro sólido por $\overline{D_1^2} \times S^1$.

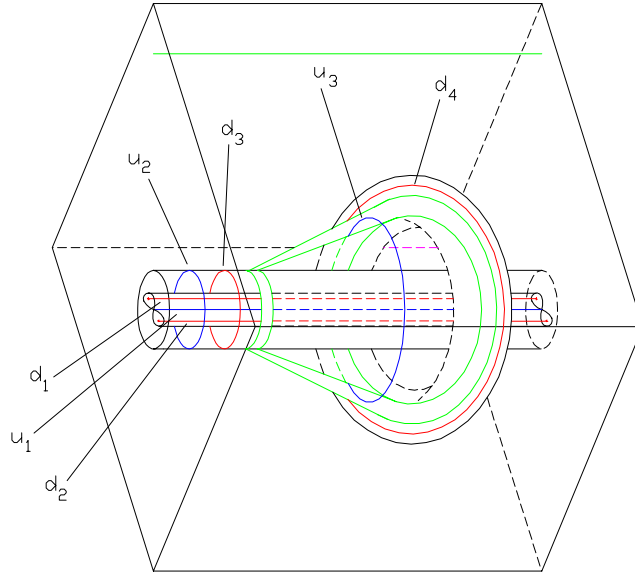


Fig. 7.24: Asa ampliada obtenida pegando dos veces un 1-asa con dos curvas locales esenciales sobre dos toros (caso 2).

Recordemos que $\overline{D_1^2 \times S^1}$ se ha obtenido a partir de una de las asas ampliadas "gemelas" que hemos generado al comienzo: queda pues, en este momento $D_2^2 \times S^1$, es decir, un toro sólido con tres órbitas NMS globales en su centro y por otra parte $\overline{D_1^2 \times S^1}$, el asa generada pegando dos asas de forma sucesiva. Si pegamos estos dos toros sólidos por sus fronteras

$$\overline{D_1^2 \times S^1} \cup D_2^2 \times S^1 \quad / \quad \overline{D_1^2 \times S^1} \cap D_2^2 \times S^1 = \partial \overline{D_1^2 \times S^1} = \partial D_2^2 \times S^1$$

se obtiene nuevamente la estructura de $S^2 \times S^1$ mostrada en la figura 7.17.

Caso 3: $h \leq -\frac{k}{2}$

Para este rango de valores de la energía sólo cabe la reconstrucción del espacio de fases global mediante la descomposición en asas redondas en el caso general $h = -\frac{k}{2}$ y en el caso $h \leq -\frac{k}{2}$, $k > -\frac{1}{4h} - h$, en que los espacios de fases separados (ξ, p_ξ) y (η, p_η) están completos y por tanto el espacio global es $S^2 \times S^1$.

En este caso (véase la figura 7.18) existen dos órbitas NMS globales, que pueden ser atractoras o repulsoras, y cuatro órbitas NMS locales, dos de ellas de tipo silla, enlazadas con una de las órbitas globales.

Las órbitas NMS globales son centros de dos toros sólidos $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$. Si sobre uno de estos toros, $D_1^2 \times S^1$, y otro toro auxiliar, $D_3^2 \times S^1$ enlazado con $D_1^2 \times S^1$ pero de forma disjunta, pegamos de forma consecutiva

dos 1-asas redondas mediante dos curvas esenciales (una sobre cada toro), obtenemos el asa ampliada $\overline{D_1^2 \times S^1}$ (véase la figura 7.25).

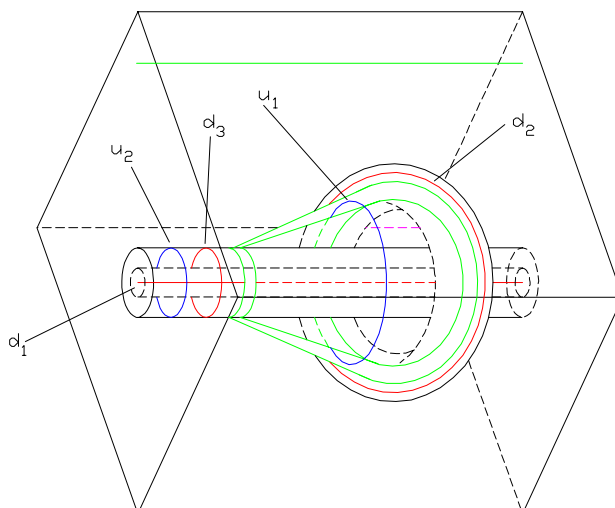


Fig. 7.25: Asa ampliada obtenida pegando dos veces un 1-asa con dos curvas locales esenciales sobre dos toros (caso 3).

Basta pegar por sus fronteras el asa ampliada $\overline{D_1^2 \times S^1}$ (topológicamente equivalente a un toro sólido) y el toro sólido $D_2^2 \times S^1$

$$\overline{D_1^2 \times S^1} \cup D_2^2 \times S^1 \quad / \quad \overline{D_1^2 \times S^1} \cap D_2^2 \times S^1 = \partial \overline{D_1^2 \times S^1} = \partial D_2^2 \times S^1$$

para obtener nuevamente la estructura de $S^2 \times S^1$ mostrada en la figura 7.18.

Una vez redefinidos todos los casos posibles en el problema de dos centros fijos en términos de descomposición en asas redondas, se hace necesario el estudio de las cadenas de órbitas periódicas asociadas al flujo NMS, teniendo en cuenta el índice de las órbitas que los componen. De este modo es posible aplicar los resultados que sobre operaciones con cadena con índices se han definido en el capítulo 3, así como las conclusiones del capítulo 5 sobre sistemas Hamiltonianos.

7.3 Cadenas con índices en el problema de dos centros fijos

A continuación analizaremos cuáles son las operaciones que se han de efectuar sobre cadenas básicas para reconstruir la variedad, según las distintas

7.3. CADENAS CON ÍNDICES EN EL PROBLEMA DE DOS CENTROS FIJOS 179

descomposiciones en asas redondas encontradas en la sección anterior (véase [21]).

En la sección 6.2 se demostró que, dada $S^2 \times S^1$ como superficie de nivel no singular de un Hamiltoniano H Bott integrable, la cadena de órbitas con índice del sistema puede obtenerse partiendo de cadenas globales y locales aplicando las operaciones O_4 , O_5 y O_6 del teorema 12. En el siguiente teorema se proporcionan los anidamientos que, partiendo de estas operaciones, dan lugar a cadenas de órbitas periódicas asociadas al problema de dos centros fijos.

Teorema 18 *Cuando el espacio de fases del problema de dos centros fijos es $S^2 \times S^1$ el conjunto de órbitas periódicas satisface una de las siguientes afirmaciones:*

1. *La cadena de órbitas periódicas, cuando $h \geq -\frac{1}{2}$, puede caracterizarse por*

$$O_5(O_4(O_5(H), h))$$

2. *La cadena de órbitas periódicas, para $-\frac{k}{2} < h < -\frac{1}{2}$, puede caracterizarse por*

$$O_5(O_4(O_4(O_5(H), h), h))$$

3. *La cadena de órbitas periódicas puede caracterizarse por*

$$O_4(O_4(H, h), h)$$

$$\text{si } h = -\frac{k}{2} \text{ ó } h \leq -\frac{k}{2} \text{ para } k > -\frac{1}{4h} - h,$$

donde H denota a la $(0, 2)$ – cadena de Hopf global y h a una $(0, 2)$ –cadena de Hopf local.

Demostración. Distinguiremos en la prueba entre los diferentes rangos de la energía:

1. Energía $h \geq -\frac{1}{2}$

Como se ha visto en la sección 7.2, la cadena asociada a este rango de valores de la energía consta de seis nudos globales (cuatro hiperbólicos y dos tipo silla) y dos locales (uno hiperbólico y otro de tipo silla).

La estructura orbital de tipo NMS del sistema para este rango de valores de la energía corresponde a la figura 7.28 donde se distinguen en azul

las órbitas de tipo silla (índice 1), en rojo las órbitas repulsoras (índice 0) y en verde las atractoras (índice 2). Así, los haces triples de órbitas globales corresponden a las órbitas centrales de los dos toros sólidos que generan la variedad y estarán por tanto enlazadas entre sí; por otra parte, las órbitas de menor tamaño enlazadas en la figura con uno de los haces triples son las órbitas locales resultado de haber pegado la 1-asa en la forma descrita en el apartado anterior para este caso y en realidad están encadenadas con los dos haces triples.

Recordemos que en la sección anterior denotamos por $D_1^2 \times S^1$ y $D_2^2 \times S^1$ a los toros sólidos que pegamos por sus fronteras para generar a $S^2 \times S^1$. Para reconstruir el flujo en la variedad, $D_1^2 \times S^1$ (figura 7.15) ha de comportarse como atractor y $D_2^2 \times S^1$ como repulsor. Así, las dos órbitas de índice distinto de la unidad en $D_1 \times S^1$ han de ser atractoras, mientras que $D_2^2 \times S^1$ se comporta como un toro sólido repulsor al tener todas sus órbitas de índice 1 ó 0.

Si queremos traducir la estructura orbital NMS del sistema para $h \geq -\frac{1}{2}$ en términos de operaciones sobre cadenas predefinidas en $S^2 \times S^1$ (véase el teorema 12), la primera dificultad reside en identificar la triple cadena.

Denotemos por H_1 a una $(0, 2)$ -cadena de Hopf global y obtengamos en primer lugar aplicando la operación O_5 sobre H_1 :

$$L'_1 = O_5(H_1)$$

Sobre L'_1 aplicamos la operación O_4 de manera que:

$$L''_1 = O_4(L'_1, h_1) = (L'_1 \# h_1) \cup m_1$$

donde h_1 es una $(0, 2)$ -cadena de Hopf local.

La cadena global L resulta de aplicar la operación O_5 nuevamente (fig. 7.26).

7.3. CADENAS CON ÍNDICES EN EL PROBLEMA DE DOS CENTROS FIJOS 181

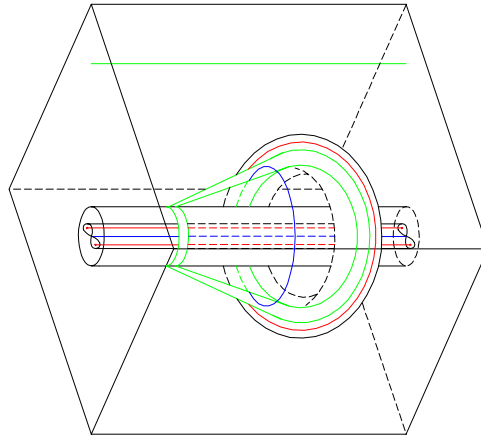


Fig. 7.26: Cadena asociada a la operación $O_4(O_5(H))$

La cadena obtenida será:

$$\begin{aligned}
 L &= O_5 L_1'' \\
 &= O_5(O_4(L_1', h_1)) \\
 &= O_5(O_4(O_5(H_1), h_1))
 \end{aligned}$$

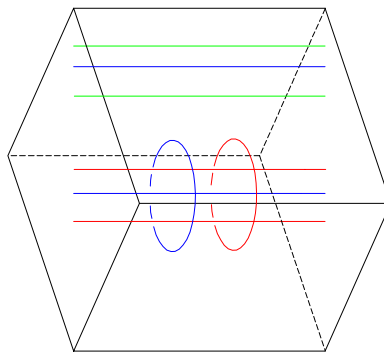


Fig. 7.27: Cadena de órbitas periódicas NMS para $h \geq -\frac{k'}{2}$.

2. Energía $-\frac{k}{2} < h < -\frac{1}{2}$

Como se ha visto en la sección 7.2, la cadena asociada a este rango de valores de la energía consta de seis nudos globales (cuatro hiperbólicos y dos tipo silla) y cuatro locales (dos hiperbólicos y dos tipo silla). La estructura orbital de tipo NMS del sistema para este rango de valores de la energía corresponde a la figura 7.28 donde la clave de colores empleada es la misma que en el caso anterior.

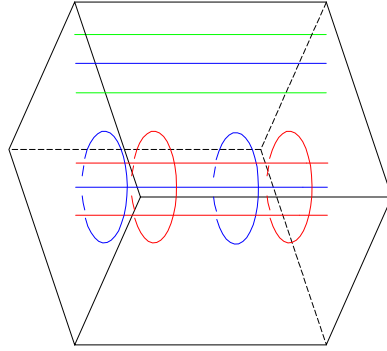


Fig. 7.28: Cadena de órbitas periódicas NMS para $-\frac{k}{2} < h < -\frac{k'}{2}$.

Recordemos que en la sección anterior denotamos por $\overline{D_1^2 \times S^1}$ y $D_2^2 \times S^1$ a los toros sólidos que pegamos por sus fronteras para generar a $S^2 \times S^1$. Para reconstruir el flujo en la variedad, $D_2^2 \times S^1$ (figura 7.15) ha de comportarse como atractor y $\overline{D_1^2 \times S^1}$ como repulsor. Así, las dos órbitas de índice distinto de la unidad en $D_2^2 \times S^1$ han de ser atrayentes, mientras que $\overline{D_1^2 \times S^1}$ se comporta como un toro sólido repulsor al tener todas sus órbitas de índice 1 ó 0.

Para traducir la estructura orbital NMS del sistema en términos de operaciones sobre cadenas predefinidas en $S^2 \times S^1$ el procedimiento es, en este caso, totalmente análogo al llevado a cabo en el caso anterior: consideremos $H_1(0, 2)$ -cadena de Hopf global sobre la que se aplica la operación O_5 .

$$L'_1 = O_5(H_1)$$

Sobre L'_1 aplicamos dos veces consecutivas la operación O_4 de manera que:

$$L''_1 = [(L'_1 \# h_1) \cup m_1] \# h_2 \cup m_2$$

donde h_1 y h_2 son $(0, 2)$ -cadenas de Hopf locales.

La cadena global L resulta de aplicar nuevamente la operación O_5 .

$$\begin{aligned} L &= O_5 L''_1 \\ &= O_5([(L'_1 \# h_1) \cup m_1] \# h_2 \cup m_2) \end{aligned}$$

3. Energía $h \leq -\frac{k}{2}$

La cadena asociada a este valor de la energía tiene dos nudos globales hiperbólicos y cuatro locales, dos hiperbólicos y dos tipo silla. La

7.3. CADENAS CON ÍNDICES EN EL PROBLEMA DE DOS CENTROS FIJOS 183

cadena representativa de la estructura orbital NMS en este rango de valores de la energía se muestra en la figura 7.29.

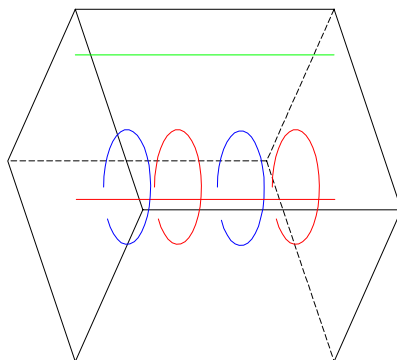


Fig. 7.29: Cadena de órbitas periódicas NMS para $h \leq -\frac{k}{2}$.

Si, como en la sección anterior denotamos por $\overline{D_1 \times S^1}$ y $D_2 \times S^1$ a los toros sólidos que pegamos por sus fronteras para generar a $S^2 \times S^1$. Para reconstruir el flujo en la variedad, $D_2^2 \times S^1$ (figura 7.18) es atractor y $\overline{D_1^2 \times S^1}$ se comporta como repulsor, por lo que la única órbita contenida en $D_2^2 \times S^1$ es atractora, mientras que $\overline{D_1^2 \times S^1}$ tiene todas sus órbitas con índice 1 ó 0.

La estructura orbital NMS del sistema en términos de operaciones sobre cadenas predefinidas en $S^2 \times S^1$ tiene una estructura más simple que en casos anteriores: denotamos por H_1 a una $(0, 2)$ -cadena de Hopf global y por h_1 y h_2 a dos $(0, 2)$ -cadenas de Hopf locales.

Le aplicamos dos veces consecutivas la operación O_4 a H y a h_1 y h_2 , respectivamente, de manera que la cadena global queda:

$$L = [(H \# h_1) \cup m_1] \# h_2 \cup m_2$$

donde m_1 y m_2 son meridianos de L con índice unidad.

■

Como conclusión de este capítulo resaltamos que en las secciones precedentes se ha analizado la estructura orbital NMS en el problema de dos centros fijos para valores negativos de la energía y se ha traducido esta información en términos de operaciones sobre cadenas predefinidas. Como ya se comentó en el capítulo anterior, esta información resulta útil no sólo en

sí misma, sino como herramienta para trasladar parte de estos datos a problemas no integrales próximos y analizar su estructura orbital, o al menos la parte de esta que pueda ser deducida a partir del problema integrable asociado.

7.4 El problema circular restringido de tres cuerpos

A continuación enlazaremos el problema restringido de tres cuerpos, con dos masas iguales, con el problema de dos centros fijos. Consideramos el problema restringido circular y plano de tres cuerpos de modo que los primarios estén situados a una unidad de distancia del origen del sistema de coordenadas en rotación. En este problema se consideran dos primarios que giran alrededor de su centro de gravedad siguiendo órbitas circulares. Otro cuerpo de masa infinitesimal se mueve bajo la influencia de los dos primarios, pero sin afectar a su movimiento. Si se considera un sistema de referencia con la misma velocidad angular que los dos primarios, la posición de éstos pasa a ser fija. En esta sección veremos que el problema restringido de tres cuerpos pertenece, en éste caso, a la misma familia uniparamétrica de sistemas Hamiltonianos que el problema de dos centros fijos.

Además, el espacio de fases en coordenadas hiperbólicas del problema circular restringido de tres cuerpos es también $S^2 \times S^1$ para algunos valores de la energía. Así, algunas órbitas periódicas NMS obtenidas en el problema de dos centros fijos pueden, en principio, continuarse a órbitas periódicas del problema circular restringido de tres cuerpos.

Para lograr este objetivo, consideramos el problema circular restringido de tres cuerpos con masas iguales en ambos primarios, situadas a distancia unidad del origen de coordenadas. Bajo estas condiciones, el Lagrangiano del sistema (véase [48]) puede expresarse como

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\gamma\alpha}{4} (xy - yx) + \frac{\gamma\alpha}{8} (x^2 + y^2) + \gamma\alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)$$

donde α es la masa de los primarios y γ es el parametro gravitacional.

Fijando unidades de manera que $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \varepsilon (xy - yx) + \frac{\varepsilon^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$$

corresponde al problema circular restringido de tres cuerpos para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y también al problema de dos centros fijos para $\varepsilon = 0$, $k = 2$ y $k' = 0$.

7.4. EL PROBLEMA CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS 185

Empleando coordenadas hiperbólicas, se obtiene la función Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^2} \frac{h}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) - \varepsilon (\cos \eta \sin \eta \cdot p_\xi + \cosh \xi \sinh \xi \cdot p_\eta) - 2 \cosh \xi$$

Mediante un cambio apropiado de la variable temporal incluyendo al término $\frac{1}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}$, las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$\begin{aligned} \xi' &= p_\xi - \varepsilon \cos \eta \sin \eta \\ \eta' &= p_\eta - \varepsilon \cosh \xi \sinh \xi \\ p_\xi' &= 2 \cosh \xi \sinh \xi \cdot H + \varepsilon (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi) p_\eta + 2 \sinh \xi \\ p_\eta' &= 2 \cos \eta \sin \eta \cdot H + \varepsilon (\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) p_\xi \end{aligned}$$

Teorema 19 Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existen valores $H_1 < H_2 < 0$ tales que para $H_1 < h < H_2$ la variedad de energía constante del problema circular restringido de tres cuerpos es $S^2 \times S^1$.

Demostración. Cuando $\varepsilon > 0$ se obtiene la siguiente expresión para un valor dado del Hamiltoniano $H = h$

$$\begin{aligned} p_\xi - \frac{\varepsilon \sin(2\eta)}{2} + p_\eta - \frac{\varepsilon \sinh(2\xi)}{2} &= \\ = \frac{\varepsilon^2 (\sin^2(2\eta) + \sinh^2(2\xi))}{4} + 4 \cosh \xi + \frac{2h}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \end{aligned}$$

Buscamos aquellos valores de h tales que

$$\frac{\varepsilon^2 (\sin^2(2\eta) + \sinh^2(2\xi))}{4} + 4 \cosh \xi + \frac{2h}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \geq 0$$

define una corona.

En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se ha obtenido numéricamente que $H_1 = -2$ y $H_2 = -1.728398112043076472\dots$. Para este rango de valores de la energía el espacio de fases del problema de dos centros fijos corresponde a $h < -\frac{k}{2}$.

De este modo, puede concluirse que la variedad de energía constante de ambos problemas es $S^2 \times S^1$ (véase el teorema 16). ■

Finalmente, vemos que las órbitas periódicas que pueden ser continuadas del problema de dos centros fijos al problema circular restringido de tres cuerpos son, en particular, las órbitas de colisión.

1. $\xi = p_\xi = 0$: órbita de colisión entre los dos primarios.
2. $\eta = 0, \pi, p_\eta = 0$: para este punto de equilibrio se obtienen órbitas de colisión sobre uno de los primarios.

En consecuencia, algunas de las órbitas periódicas del problema de dos centros fijos pueden ser continuadas y obtener así órbitas periódicas de tipo NMS del problema restringido de tres cuerpos. Además, algunos de los toros invariantes del problema de dos centros fijos se mantendrán en el problema no integrable.

Bibliografía

- [1] Alexander, J.W. *On the subdivision of 3-space by a polyhedron*. Proc. Nat. Acad. Sci. **10** (1924) 6-8.
- [2] Alexellis, A., Athanassopoulos, K. *Chain recurrence in flows on the Klein bottle*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **127** (1999) 83, 83-91.
- [3] Asimov, D. *Round handles on non-singular Morse-Smale flows*. Annals of Mathematics, **102** (1975) 41-54.
- [4] Birman, J. and R.F. Williams. *Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations*. Topology **22** (1983) 47-82.
- [5] Birman, J. and R.F. Williams. *Knotted periodic orbits in dynamical systems II: knot holders for fibered knots*. Cont. Math. **20** (1983) 1-60.
- [6] Bonatti, C., Grines, V. Z., *Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms on the sphere S^3* . J. Dynam. Control Syst. **6** (2000) 579-602
- [7] Bonatti, C., Grines, V. Z., Pecou, E. *Two dimensional links and diffeomorphisms on 3-manifolds*. Ergod. Th. & Dynam. Syst. **22** (2002) 687-710
- [8] Brailov, A. V., Fomenko, A.T., *The topology of integrable manifolds of completely integrable Hamiltonian systems*. Math. USSR Sbornik **62** (1989) 373-383.
- [9] Bredon, G. E., Wood, J. W. *Non-Orientable Surfaces in Orientable 3-Manifolds*. Inventiones Math. **7** (1969) 83-110.
- [10] Burde, G., Zieschang, H. *Knots*. Studies in Mathematics 5. Ed. Walter de Gruyter, 1985.
- [11] Campos, B., Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *Bifurcations of links of periodic orbits in Non-Singular Morse-Smale Systems on S^3* . Nonlinearity **10** (1997) 1339-1355.

- [12] Campos, B., Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *Topology of Bifurcations on symmetric integrable Hamiltonian Systems on S^3* . International Conference on Differential Equations, **2** World Sci. Publishing (2000) 1467–1469.
- [13] Campos, B., Cordero, A., Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *NMS flows on Three-Dimensional Manifolds with One Periodic Saddle Orbit*. Aceptado para su publicación en Acta Mathematica Sinica.
- [14] Carter, J.S. *How surfaces intersect in space*. World Scientific, 2000.
- [15] Casasayas, J., Martínez Alfaro, J. Nunes. A. *Knots and Links in Integrable Hamiltonian Systems*. J. of Knot Theory and its Ramifications **7**, No 2 (1998) 123-153.
- [16] Casasayas, J. Nunes. A. *Integrable Hamiltonian on simple, irreducible, 3-manifolds*. New trends for Hamiltonian systems and celestial mechanics (Cocoyoc, 1994), Adv. Ser. Nonlinear Dynam., **8**, World Sci. Publishing (1996) 73–79.
- [17] Cordero, A., J. Martínez Alfaro and P. Vindel. *NMS Periodic Orbits of the Two Fixed Centres Problem*. Proceedings of the Forth International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics Ed. A. López et al., (1998) 95-100.
- [18] Cordero, A., Martínez Alfaro, J. and Vindel P. *Study of the Orbits in the Two Fixed Centres Problem*. Proceedings of the Fourth International Workshop on Positional Astronomy and Celestial-Mechanics. Ed. A. López et al., (1998) 87-94.
- [19] Cordero, A. *Estudio analítico y geométrico del problema de Dos Centros Fijos*. Tesis de Licenciatura, Universidad Jaime I de Castellón, 1997.
- [20] Cordero, A.; Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *Orbital structure of the Two Fixed Centres Problem*. Impact of Modern Dynamics in Astronomy. Proceedings of the IAU Colloquium 172. Kluwer Academics Publishers, 1999 463-464.
- [21] Cordero, A.; Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *Topology of the Two Fixed Centres Problem*. Celestial Mechan. Dynam. Astr. **82** (2002) 203-223.
- [22] Cordero, A.; Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *Round Handle Decomposition of $S^2 \times S^1$* . Enviado para su publicación.

- [23] Cordero, A.; Martínez Alfaro, J. and Vindel, P. *Bott Integrable Hamiltonian Systems on $S^2 \times S^1$* . Enviado para su publicación.
- [24] Crowell, R.H., Fox, R.H. *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag, 1963.
- [25] Fomenko, A. T. *The topology of surfaces of constant energy in Integrable Hamiltonian Systems, and obstructions to integrability*. Math. USSR Izvestiya **29**, No. 3 (1987) 629-658.
- [26] Fomenko, A.T. *Integrability and Non integrability in Geometry and Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [27] Fomenko, A.T. & Nguyen, T.Z. *Topological Classification on Integrable Non Degenerate Hamiltonians on the Isoenergy Three-dimensional Sphere*. Advances in Soviet Math. **6** (1991) 267-297.
- [28] Fox, R.H. *On the imbedding of polyhedra in 3-space*. Ann. of Math. **49** (1948) 462-470.
- [29] Ghrist, R.W., P.J. Holmes and M.C. Sullivan. *Knots and Links in Three-Dimensional Flows*. Lecture Notes in Mathematics **1654**. Ed. Springer-Verlag, 1997.
- [30] Godbillon, C. *Dynamical systems on surfaces*. Springer-Verlag, 1983.
- [31] Hatcher, A. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Disponible en la página web: <http://math.cornell.edu/~hatcher>.
- [32] Hempel, J. *3-manifolds*. Ann. of Math. Studies 86. Princeton University Press, 1976.
- [33] Haken, W. *Some results on surfaces in 3-manifolds*. Studies in Mathematics, Vol. 5, Studies in Modern Topology, Ed. P.J. Hilton, Published by the Mathematical Association of America, 39-98.
- [34] Jaco, W. *Lectures on three manifold topology*. CBMS Regional Conf. Series in Math. **43** (1980)
- [35] Kalashnikov, V. V. *On the generic character of Bott integrable Hamiltonian systems*. Russian Acad. Sci. Sb. Math. **81** no.1 (1995) 87-99.
- [36] Kneser, H. *Geschlossen Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, **38** (1929) 248-260.

- [37] Kobayashi, T. *Primitive links of Non-singular Morse-Smale flows on the special seifert fibered manifolds*. *Topology and its Applications* **20** (1985) 67-78
- [38] Markley, N. *The Poincaré-Bendixon theorem for the Klein bottle*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **135** (1969) 159-165.
- [39] Milnor, J. *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*. *Amer. J. Math.* **84** (1962) 1-7.
- [40] Milnor, J. *Differentiable structures*. Lectures by J. Milnor, Spring 1961.
- [41] Morgan, J.W. *Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds*. *Topology* **18** (1978) 41-53.
- [42] Nikolaev, I., E. Zhuzhoma. *Flows on 2-dimensional Manifolds*. *Lectures Notes in Mathematics* **1705**. Springer, 1999.
- [43] Sasano, K. *Links of closed orbits of non-singular Morse-Smale flow*. *Proc. A.M.S.* **88** (1983) 727-734.
- [44] Reidemeister, K. *Homotopieringe und Linsenräume*. *Abh. Math. Sem. Hambg.* **11** (1935) 102-109.
- [45] Reinhart, B.L. *Cobordism and the Euler number*. *Topology* **2** (1963) 173-177.
- [46] Robinson, C. *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, 1999.
- [47] Rolfsen, D. *Knots and links*. *Mathematics Lecture Series* **7**. Publish or Perish, 1990.
- [48] Szebehely, V. *Theory of Orbits*. Academic Press, 1967.
- [49] Tietze, H. *Über die topologischen invarianten mehrdimensionaler mannigfaltigkeiten*. *Monatsh. Math. Phys.* **19** (1908) 1-118.
- [50] Trace, B. *Two comments concerning the uniqueness of prime factorizations for 3-manifolds*. *Bull. London Math. Soc.* **19** (1987) 75-77.
- [51] Wada, M. *Closed orbits of non-singular Morse-Smale flows on S^3* . *J. Math. Soc. Japan* **41** (1989) 405-413.
- [52] Williams, R. *The structure of Lorenz attractors*. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50** (1979) 73-79.

- [53] Yano, K. *A note on non-singular Morse-Smale flows on S^3* . Proc. Japan Acad. **58** (1982) 447-450.
- [54] Yano, K. *The homotopy class of Non-singular Morse-Smale vector fields on 3-manifolds*. Invent. Math. **80** (1985) 435-451.