

# Apéndice

## A.1. Definición y notaciones.

Los polinomios de Zernike son un conjunto infinito de funciones polinómicas, ortogonales en el círculo de radio unidad. Son muy útiles para representar la forma del frente de onda en sistemas ópticos. Su uso está muy extendido y son muy comunes distintas notaciones, normalizaciones y criterios en la asignación de signos. A lo largo de este trabajo se siguen las recomendaciones de la OSA (*Optical Society of America*) [Thibos *et al.*, 2000].

Los polinomios de Zernike pueden expresarse en coordenadas polares, siendo  $\rho$  la coordenada radial cuyo intervalo de variación es  $[0,1]$  y  $\theta$  la componente azimutal cuyo intervalo de variación es  $[0,2\pi]$ . Distinguimos tres componentes: el factor de normalización, la dependencia radial y la dependencia azimutal. La dependencia radial es polinómica y la azimutal es armónica. Se identifica al polinomio con dos índices “n” y “m”, donde “n” indica la potencia más alta (orden) en la componente polinómica radial y “m” es la frecuencia azimutal en la componente armónica. Los polinomios se definen mediante las siguientes expresiones analíticas son:

$$Z_n^m(\rho, \theta) = N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta) \quad m \geq 0,$$

$$Z_n^m(\rho, \theta) = -N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sen(m\theta) \quad m < 0,$$

(A.1-1)

$$R_n^{|m|}(r) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+|m|)/2 - s]! [(n-|m|)/2 - s]!} \rho^{n-2s},$$

$$N_n^m = \sqrt{2(n+1) \delta_{m0}}.$$

También es posible identificar a cada uno de los polinomios por medio de un único indexado “j” obtenido a partir de los índices “n” y “m” por medio de la siguiente relación:

$$j = \frac{n(n+2) + m}{2} \tag{A.1-2}$$

En la Tabla A.1 se muestran los polinomios de Zernike hasta orden 7:

<b>j = Índice</b>	<b>n = orden</b>	<b>m = frecuencia</b>	<b><math>Z_n^m(\rho, \theta)</math></b>
0	0	0	1
1	1	-1	$2 \rho \sin \theta$
2	1	1	$2 \rho \cos \theta$
3	2	-2	$\sqrt{6} \rho^2 \sin 2\theta$
4	2	0	$\sqrt{3} (2\rho^2 - 1)$
5	2	2	$\sqrt{6} \rho^2 \cos 2\theta$
6	3	-3	$\sqrt{8} \rho^3 \sin 3\theta$
7	3	-1	$\sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$
8	3	1	$\sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$
9	3	3	$\sqrt{8} \rho^3 \cos 3\theta$
10	4	-4	$\sqrt{10} \rho^4 \sin 4\theta$
11	4	-2	$\sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$
12	4	0	$\sqrt{5} (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$
13	4	2	$\sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$

14	4	4	$\sqrt{10} \rho^4 \cos 4\theta$
15	5	-5	$\sqrt{12} \rho^5 \sin 5\theta$
16	5	-3	$\sqrt{12} (5\rho^5-4\rho^3) \sin 3\theta$
17	5	-1	$\sqrt{12} (10\rho^5-12\rho^3+3\rho) \sin \theta$
18	5	1	$\sqrt{12} (10\rho^5-12\rho^3+3\rho) \cos \theta$
19	5	3	$\sqrt{12} (5\rho^5-4\rho^3) \cos 3\theta$
20	5	5	$\sqrt{12} \rho^5 \cos 5\theta$
21	6	-6	$\sqrt{14} \rho^6 \sin 6\theta$
22	6	-4	$\sqrt{14} (6\rho^6-5\rho^4) \sin 4\theta$
23	6	-2	$\sqrt{14} (15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2) \sin 2\theta$
24	6	0	$\sqrt{7} (20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1)$
25	6	2	$\sqrt{14} (15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2) \cos 2\theta$
26	6	4	$\sqrt{14} (6\rho^6-5\rho^4) \cos 4\theta$
27	6	6	$\sqrt{14} \rho^6 \cos 6\theta$
28	7	-7	$4 \rho^7 \sin 7\theta$
29	7	-5	$4 (7\rho^7-6\rho^5) \sin 5\theta$
30	7	-3	$4 (21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3) \sin 3\theta$
31	7	-1	$4 (35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho) \sin \theta$
32	7	1	$4 (35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho) \cos \theta$
33	7	3	$4 (21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3) \cos 3\theta$
34	7	5	$4 (7\rho^7-6\rho^5) \cos 5\theta$
35	7	7	$4 \rho^7 \cos 7\theta$

**Tabla A.1.** Listado de polinomios de Zernike hasta 7º orden, notación estándar de la OSA.

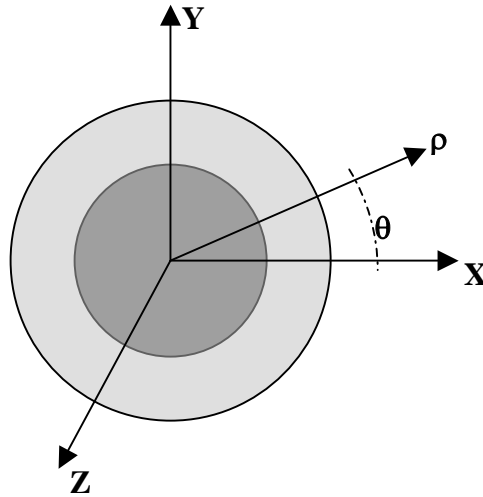
## A.2. Representación de las aberraciones.

La función aberración de onda  $W(\rho, \theta)$  puede expresarse como combinación lineal de los polinomios de Zernike:

$$W = \sum_{j=1 \dots N} C_j Z_j \quad (\text{A.2-1})$$

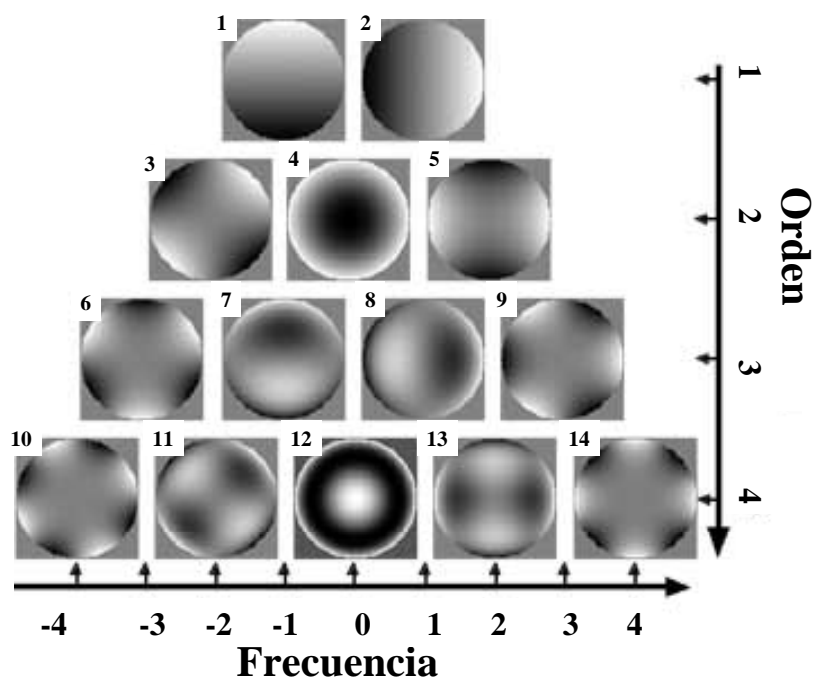
donde  $C_j$  son los Coeficientes de Zernike que se expresan en micras y miden el valor de las distintas aberraciones presentes en el sistema.

Para describir las aberraciones oculares se toma como sistema de referencia un triedro a derechas con origen en la pupila de entrada del ojo, el semieje positivo Y apuntando hacia arriba, el X apuntando hacia la izquierda del sujeto y Z apuntando en dirección emergente al ojo. Al usar coordenadas polares  $\theta$  se mide respecto del semieje positivo X y  $\rho$  es la distancia respecto del origen medida en unidades normalizadas al radio pupilar.



**Figura A.1.** Sistema de referencia para la descripción de la aberración ocular en función de los polinomios de Zernike. Se muestra vista frontal del ojo. Los semiejes positivos se toman de la misma manera en ambos ojos.

La Figura A.2 muestra la forma del frente de onda representado por cada polinomio de Zernike, la aberración total se expresa como combinación lineal de esos patrones característicos.



**Figura A.2.** Visualización los 14 primeros polinomios de Zernike en escala de grises (color claro para adelante de fase y oscuro para retraso). Cada patrón se identifica con su índice  $j$ , cada fila corresponde a un orden  $n$  y cada columna a una frecuencia  $m$ .

Las aberraciones de bajo orden vienen representadas por los polinomios de ordenes  $n = 0, 1$  y  $2$ . Para  $n = 0$  tenemos un único polinomio de valor constante unidad y para  $n = 1$  encontramos dos polinomios denominados “tilts” (ver Tabla A.1). Estos tres polinomios representan traslaciones y rotaciones respectivamente del sistema de referencia, que pueden ser compensadas de forma natural con los movimientos del ojo y no deterioran la imagen retiniana. Bien distinto es el caso de las aberraciones de 2º orden descritas por los 3 polinomios de Zernike correspondientes a  $n = 2$  (ver Tabla A.1). Estos polinomios representan el desenfoque ( $j=4$ ) y astigmatismo ( $j=3$  y  $5$ ). Las aberraciones de alto orden vienen representadas por los polinomios de Zernike de orden  $n \geq 3$ . Son de tercer orden el astigmatismo triangular ( $j = 6$  y  $9$ ) así como el coma vertical y el coma horizontal ( $j = 7$  y  $8$ ) mientras que la aberración esférica ( $j=12$ ) es de cuarto orden.

El valor conjunto de todas las aberraciones se puede cuantificar con el promedio cuadrático:  $RMS = (\sum_{i=3,4...20} (C_i)^2)^{1/2}$  siendo  $C_i$  los sucesivos coeficientes de Zernike (excluyendo los términos correspondientes a  $n= 1$  y  $2$ ) y el impacto de cada

coeficiente  $C_i$  en la aberración total por medio del porcentaje:  $100 \times (C_i^2 / (\sum_{i=3,4,\dots,20} (C_i)^2))$ .

Existen diferentes métricas que nos permiten calcular la refracción expresada en los términos ordinarios de esfera y cilindro en Dioptrías, a partir del tamaño pupilar y de la medida en micras de los diferentes coeficientes [Thibos *et al.*, 1997]. Una de las más comunes es mediante el uso del ajuste a una superficie esfero-cilíndrica de referencia, a partir de la cual se obtienen las siguientes expresiones [Atchison, 2004]:

$$\begin{aligned}
 C &= -2\sqrt{J_{180}^2 + J_{45}^2} \\
 S &= M - C/2 \\
 \alpha &= (\tan^{-1}(J_{45} / J_{180})) / 2
 \end{aligned}
 \tag{A.2-2}$$

donde C y S son el cilindro y la esfera expresados en dioptrías y  $\alpha$  es el ángulo correspondiente al eje de astigmatismo. M,  $J_{180}$  y  $J_{45}$  se calculan empleando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 M &= -(4\sqrt{3}C_2^0 - 12\sqrt{5}C_4^0 + 24\sqrt{7}C_6^0 - 40\sqrt{9}C_8^0 + 60\sqrt{11}C_{10}^0 - \dots)/R^2 \\
 J_{180} &= -(2\sqrt{6}C_2^2 - 6\sqrt{10}C_4^2 + 12\sqrt{14}C_6^2 - 20\sqrt{18}C_8^2 + 30\sqrt{22}C_{10}^2 - \dots)/R^2 \\
 J_{45} &= -(2\sqrt{6}C_2^{-2} - 6\sqrt{10}C_4^{-2} + 12\sqrt{14}C_6^{-2} - 20\sqrt{18}C_8^{-2} + 30\sqrt{22}C_{10}^{-2} - \dots)/R^2
 \end{aligned}
 \tag{A.2-3}$$