Índice general

Introducción

El estudio de la relación entre propiedades de un anillo R y propiedades de un anillo de matrices infinitas, digamos B, consiste en resolver dos problemas:

Primero. Dada una clase de anillos $\mathcal{C}$ y un anillo $R \in \mathcal{C}$ encontrar la clasificación, en términos de la teoría de anillos, de B.

Segundo. Dada una clase de anillos $\mathcal{C}$, determinar cuándo R pertenece a dicha clase, en términos de B.

La investigación sobre estas cuestiones y más en general, del punto de vista algebraico en el estudio de los anillos de matrices infinitas fue iniciada alrededor de 1940 con las contribuciones de Baer, Jacobson, Amitsur, Mackey y otros (véase [22]). Durante 20 años estuvieron en el mismo plano tanto el anillo de matrices de filas finitas $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ (véase más adelante la notación) como (algunos de) sus subanillos "densos" (respecto de la topología finita); es decir, aquellos subanillos que contienen al conjunto de todas las matrices con un número finito de entradas no nulas.

En 1964, N. Jacobson en su libro *Structure of Rings* [22], hizo un recuento sistemático y organizado sobre el estudio y clasificación de los anillos, y en particular, una recopilación de las principales técnicas y resultados sobre el estudio de los anillos de matrices infinitas.

Ese libro es nuestro punto de partida. Su objeto central de estudio, que constituye el marco teórico para la clasificación de los anillos, son los anillos con "condición minimal"; o sea, con zócalo distinto de cero, pero sin condiciones de finitud (en principio), con particular interés en los anillos primitivos con zócalo no cero. Con objeto de dar un teorema de densidad, se introduce el concepto de par dual de espacios vectoriales y se estudia su realización como anillo de matrices, a través de la matriz asociada en el sentido habitual. Otros temas son estudiados, pero nosotros nos quedamos con tres ideas básicas que usaremos como punto de partida.

La primera se refiere a cómo se pueden interpretar los anillos de matrices infinitas en términos de endomorfismos de espacios vectoriales, o, actualmente, de módulos libres. Dado un espacio vectorial de dimensión infinita, o bien un módulo libre, se trata de describir en términos de la teoría de módulos los elementos de aquellos subanillos de endomorfismos tales que, dada una base fija, resulten isomorfos a los subanillos de matrices "densos" mencionados anteriormente.

Para lograr esto, tomamos el concepto de par dual de espacios vectoriales y la noción de N-topología. La definición formal se puede encontrar más adelante. Esencialmente, un par dual está formado por un par de espacios vectoriales V y N sobre un anillo de división, D, junto con una forma bilineal $V \times N \to D$, que es no degenerada. De hecho, N siempre puede verse como subespacio del espacio dual, V^*. Para construir la N-topología, primero se considera el espacio dual de N. Ahora consideramos la topología finita de N^*; es decir, la topología generada por la subbase de vecindades del cero formada por los anuladores (en N^*) de subconjuntos finitos de N. Finalmente, como el par dual es no degenerado, se tiene que V se sumerge en N^*, y como tal, hereda la topología finita. A dicha restricción la llamamos la N-topología. Después se considera el subanillo del anillo de endomorfismos de V, que consiste en aquellos endomorfismos que, vistos como aplicaciones del espacio topológico V, son continuos. Finalmente, se consideran aquellos casos donde la elección de N y la topología que determina hace que el anillo de los endomorfismos continuos sea isomorfo a un subanillo de matrices denso.

En el libro de Jacobson se consideran, entre otros, dos tipos de pares duales (V, N) que nos interesan. Uno es cuando N es el propio V^* y otro es el subespacio generado por la base dual de V. En el primer caso, tenemos a $\mathrm{RFM}_\alpha(D)$ y en el otro a $\mathrm{RCFM}_\alpha(D)$.

También se aborda una descripción alternativa, más aritmética, de los homomorfismos continuos; a saber, la noción de noción de homomorfismo con adjunto. En anillos generales, se puede probar que todo homomorfismo con adjunto es continuo, sin embargo, el recíproco no es cierto, por eso la noción de continuidad se ha perdido. De hecho, algunos trabajos definen homomorfismo continuo como aquél que tiene adjunto.

La segunda idea se refiere al llamado "problema del isomorfismo", que se puede plantear del siguiente modo: dados dos anillos de matrices sobre ciertos anillos de división, de tal manera que los anillos de matrices son isomorfos, encontrar una relación entre los anillos base. Este estudio, en general, es determinante para saber a qué tipo de resultados podemos aspirar cuando se trata el problema de las relaciones entre propiedades de R y sus anillos de matrices. El resultado principal del libro es que dos anillos de endomorfismos continuos son isomorfos si y sólo si entre los pares duales de espacios vectoriales de quienes proceden existe un isomorfismo semilineal, que además, es continuo.

La tercera es la relación entre el anillo base y el anillo de matrices; es decir, nuestro tema de trabajo, ahora en un contexto más amplio. El resultado más notable del libro en este tema es que un anillo B es primitivo con zócalo distinto de cero si y sólo si existe un par dual de espacios vectoriales tal que B es isomorfo al anillo de endomorfismos continuos. Si los espacios son de dimensión numerable, entonces B es además isomorfo a un anillo de matrices de filas y columnas finitas. Éste último anillo es uno de los ejemplo más estudiados y recurridos de dicho libro.

Vamos ahora a comentar la situación actual de estos temas.

Sobre los pares duales sólo conocemos un trabajo muy notable en la literatura de álgebra asociativa. En 1959, D. Ornstein introdujo la noción de (α, β)-par dual, para α y β cardinales infinitos, con objeto de clasificar en términos de la teoría de anillos, otros subanillos densos de matrices, y de hecho ésos son todos los que se conocen.

En cuanto al problema del isomorfismo, hasta donde sabemos, el resultado más general aparece en [30] (véase también [8]), donde se prueba que para cualesquiera dos anillos R_1 y R_2, si (V_1, N_1) y (V_2, N_2) son (α, β) pares duales con anillos de endomorfismos continuos (con adjunto) isomorfos entonces los anillos R_1 y R_2 son equivalentes de Morita y la equivalencia relaciona los pares duales, de tal manera que se puede establecer el recíproco.

Este tipo de resultados, aunque son cruciales a la hora de decidir las propiedades que podremos relacionar, no se usan directamente en ninguno de nuestros resultados ni tampoco ocurre que las técnicas desarrolladas en estos trabajos se usen siquiera indirectamente; de hecho, existen resultados sobre relaciones entre propiedades de un anillo y sus anillos de matrices infinitas que son anteriores al desarrollo general del problema del isomorfismo, como por ejemplo [32].

Sobre la relación entre propiedades de un anillo y sus anillos de matrices infinitas existe una gran cantidad de literatura, pero la mayoría de los trabajos no se refieren a los subanillos densos en general sino exclusivamente a anillos del tipo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$. La historia es que la noción de par dual y el estudio de los endomorfismos continuos se abandonó por más de 20 años en los que el estudio de las matrices infinitas se centró exclusivamente en las matrices de filas (o columnas) finitas y sus ideales.

Esta situación coincide, y posiblemente aquí encontremos la explicación a este fenómeno, con la aparición del lenguaje y las técnicas de las categorías. Como muestra, se puede comprobar al revisar los trabajos sobre relaciones entre propiedades de un anillo R y el anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, que casi todos tienen como ingrediente la poderosa herramienta de la adjunción entre Hom y $\otimes$, con la notabilísima excepción de los resultados sobre el radical de Jacobson de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ (véase [33]).

En el caso de los subanillos "densos" de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ no se conoce un funtor (o más bien, una adjunción) que nos ayude a establecer un "tránsito claro", lo cual hace que las relaciones que se establecen no tengan una técnica común y requieran en cada caso de ideas particulares sobre aritmética de matrices y teoría de anillos y módulos.

La reaparición de los subanillos densos de matrices infinitas, o más bien, algunas familias muy restringidas de ellos, y los pares duales en la teoría de anillos se debe principalmente a los trabajos sobre representaciones de álgebras numerable dimensionales que involucran al anillo de matrices de filas y columnas finitas, $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ (véase [20]). A partir de los resultados sobre representaciones, algunas propiedades de las álgebras numerable dimensionales, como la propiedad de intercambio, ser anillo de Baer, ser regular de von Neumann, coherente, etcétera, se plantean sobre los anillos de matrices de filas y columnas finitas y posteriormente, más en general, en los anillos de matrices que provienen de los pares duales definidos por D. Ornstein.

Es este el contexto en que se desarrolla nuestro trabajo. Sabiendo que la relación entre propiedades de un anillo R y su anillo de matrices $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es un tema muy importante en la teoría de anillos (véase [29]) y considerando la importancia de otros subanillos densos como $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$, nos propusimos dos tareas: la primera fue llenar algunos huecos en los resultados para anillos de matrices de filas finitas y segundo, dar los primeros pasos en el estudio de estas relaciones para los anillos de matrices de filas y columnas finitas.

El primer capítulo está dedicado a establecer la herramienta básica sobre los anillos de matrices; empezando por su propia definición. Establecemos la notación y aprovechamos para repasar la aritmética básica. Como hemos comentado, el estudio de la relación entre un anillo R y su anillo de matrices $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ utiliza como base la adjunción $\mathrm{Hom}, \otimes$. Eso es posible porque $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es isomorfo al anillo de endomorfismos de un R-módulo libre de rango α, a través, como siempre, de construir la matriz asociada a una base ordenada. La relación entre $\mathrm{End}({}_RF)$ y $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es bien conocida y no haría falta en absoluto repasarla si no fuera porque vamos a relacionar algunos subanillos de $\mathrm{End}({}_RF)$ y $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, a través de la restricción del isomorfismo anterior. Así que dedicamos algunas líneas a comentar el isomorfismo entre los dos anillos anteriores.

A continuación introducimos el concepto de par dual, que hemos comentado en párrafos anteriores, así como la noción de homomorfismo (semilineal) continuo y con adjunto. Estudiaremos la relación entre endomorfismos continuos y adjuntos que nos permite pasar del punto de vista topológico al aritmético, para poder describir en un contexto general, los subanillos de matrices asociadas a los endomorfismos con adjunto en términos exclusivamente del lenguaje de las matrices.

Finalmente, repasaremos la descripción y algunas propiedades del radical de Jacobson en anillos de matrices infinitas.

En el segundo capítulo estudiamos la relación entre propiedades de un anillo R y su anillo de matrices $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$. Como comentamos anteriormente, existe mucha literatura a este respecto y no es nuestro propósito hacer un recuento de ella. Nos limitamos a presentar los resultados necesarios para tener un contexto adecuado; para mostrar nuestras aportaciones sobre todo en un caso que, sorprendentemente, no aparece en la literatura. Nos referimos a cuando el anillo R es artiniano.

Para ello, partimos del caso básico: los anillos artinianos semisimples. Después, presentamos una caracterización para cuando el anillo R es noetheriano y nos pasamos a los anillos perfectos. En este caso, partimos de una caracterización conocida que dice que un anillo R es perfecto a la izquierda si y sólo si el anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es semirregular (véase más adelante la definición). Por la definición de semirregular tenemos entonces que comprobar si los idempotentes se levantan en las matrices módulo el radical. Nuestro acierto es que logramos eliminar la condición del levantamiento de idempotentes, a través del estudio del radical de Jacobson en matrices. La idea global para llegar después a los anillos artinianos es que la relación entre R y $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ se establece a partir del hecho de que los anillos artinianos se caracterizan por ser perfectos y noetherianos.

El tercer capítulo contiene los resultados más importantes de nuestro trabajo. Es el inicio del estudio de las relaciones entre un anillo R y las matrices $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

Comenzamos con el caso básico; los anillos artinianos semisimples. Después, usamos estos resultados para relacionar el anillo de los enteros con sus matrices de filas y columnas finitas. Probaremos que en $\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathbb{Z})$ todos los anuladores de los ideales finitamente generados son proyectivos y cíclicos aunque no necesariamente sumandos directos (luego este anillo no es de Baer, pero está muy cerca); así, tenemos nuevos ejemplos de anillos coherentes, donde además, se pueden calcular dimensiones proyectivas. En esa sección, también incluiremos algunos resultados de otros autores sobre anillos noetherianos para completar el panorama.

Después estudiaremos las relaciones para anillos perfectos y semiprimarios, avanzando en las propiedades del radical de Jacobson de $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$. Finalmente, con la idea de ofrecer un panorama completo, mencionaremos una caracterización reciente para anillos artinianos.

Preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados generales de la teoría de anillos y módulos que serán directamente usados para resolver los problemas que nos ocupan. La naturaleza del problema que estudiamos nos obliga a incluir un amplio espectro de nociones y resultados sobre todo sobre anillos e ideales, pero también de la teoría de módulos. Antes de presentar los resultados de los siguientes capítulos, es conveniente familiarizarnos con las definiciones de los elementos que vamos a manejar, y enunciar las propiedades y relaciones más significativas para nuestro trabajo.

Sabiendo que los objetos de matemáticas con los que trabajamos tienen distintas caracterizaciones, y cada una de ellas puede ser usada como definición, es importante advertir al lector de que la lista de nociones que presentamos tiene una perspectiva sesgada hacia el uso que tienen en los resultados y técnicas empleadas en nuestro trabajo; así que algunos conceptos pueden no aparecer en su forma más "conocida" o "clásica" ni en forma amplia, como ocurre con la definición, por citar un ejemplo, de ideal puro en un anillo (véase la Definición 2.1.2).

Así que ésta es sólo una lista de "nociones para consultar", con el criterio (siempre subjetivo) de que "tal vez no las recuerde todo mundo". Otras nociones y resultados que consideramos del nivel "todos las recuerdan", como semisimple, artiniano, Teorema de Estructura de Wedderburn, etc. han sido omitidas. Pedimos disculpas al lector afectado por nuestro criterio.

A lo largo de todo este trabajo "anillo" significará "anillo asociativo con identidad" y los módulos sobre un anillo serán módulos unitarios. Para un anillo R, denotamos la categoría de los R-módulos con $R-Mod$. Por ideales de un anillo entenderemos ideales biláteros. Los endomorfismos actuarán, salvo indicación explícita, siempre como escalares opuestos.

Definición 0.0.1.

Sea R un anillo y M un R-módulo libre por la izquierda con base B, cuyos elementos tiene índices en un conjunto (normalmente bien ordenado). Para un elemento x de M, llamamos ***soporte*** *de x respecto a B, al conjunto formado por los índices, para los que los coeficientes de la expresión de x*

como combinación lineal de elementos de la base B no es nulo. Denotamos a este conjunto por $supp_B(x)$.

En la definición anterior, cuando los elementos ya estén expresados en coordenadas o no haya posible confusión, no escribiremos la base, B.

Definición 0.0.2.
*Sean R y R' anillos y σ un isomorfismo de anillos de R en R'. Sean ${}_RE$ un R-módulo por la izquierda y ${}_{R'}E'$ un R'-módulo por la izquierda. Diremos que $f : E \to E'$ es un **homomorfismo σ-semilineal** si cumple*

1. *Para todo $a, b \in E$ se cumple que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.*

2. *Para todo $r \in R$ y para todo $a \in E$ se cumple que $f(ra) = \sigma(r) f(a)$.*

Definición 0.0.3.
*Sea R un anillo. Diremos que R tiene **número de base simple** si $R \cong R^2$.*

Definición 0.0.4.
*Sea R un anillo. Diremos que un ideal a la izquierda I de R es **superfluo** si para todo ideal a la izquierda J de R, tal que $I+J = R$ se tiene que $J = R$.*

Definición 0.0.5.
*Sea R un anillo y sea I un ideal (bilátero) de R. Diremos que I **levanta idempotentes** o que los idempotentes se **levantan módulo** I, si para todo idempotente f en R/I existe un idempotente e en R tal que la clase de e en R/I es f.*

Definición 0.0.6.
*Diremos que un anillo es **primo** si el producto de dos de sus ideales no nulos es no nulo.*

Definición 0.0.7.
*Sea R un anillo. Diremos que un ideal I es un ideal **primo** si R/I es un anillo primo.*

Definición 0.0.8.
*Diremos que un anillo es **semiprimo** si la intersección de sus ideales primos es cero.*

Definición 0.0.9.
*Diremos que un anillo R es **coherente** a la izquierda si todo ideal a la izquierda finitamente generado es finitamente presentado.*

Definición 0.0.10.

Sea R un anillo, $r \in R$ y $X \subset R$ un subconjunto del anillo. Llamaremos ***anulador*** *por la izquierda de r al ideal (por la izquierda) $l_R(r) = \{s \in R \mid sr = 0\}$. Análogamente llamaremos anulador por la derecha de r al ideal (por la derecha) $r_R(r) = \{s \in R \mid rs = 0\}$. Llamaremos anulador de X por la izquierda de r al ideal por la izquierda $l_R(X) = \cap_{r \in R} l_R(r)$. Análogamente llamaremos anulador de X por la derecha de r al ideal por la derecha $r_R(X) = \cap_{r \in R} r_R(r)$.*

Definición 0.0.11.

Sea R un anillo. Diremos que R es de ***Baer*** *si para todo conjunto $X \subset R$, los ideales $l_R(X)$ y $r_R(X)$ son sumandos directos.*

Proposición 0.0.12.

Sea R un anillo tal que todo anulador por la izquierda (respectivamente derecha) es sumando directo. Entonces R es anillo de Baer.

Proposición 0.0.13.

Sea R un anillo de Baer y $e \in R$ idempotente. Entonces eRe es de Baer.

Definición 0.0.14.

Sea I un ideal por la izquierda de un anillo R. Diremos que I es ***nilpotente*** *si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$.*

Definición 0.0.15.

Sea I un ideal por la izquierda de un anillo R. Diremos que I es ***T-nilpotente*** *por la izquierda, si dada una familia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de I, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 x_2 ... x_n = 0$.*

Definición 0.0.16.

Sea R un anillo. Un ideal I por la izquierda o por la derecha de R se dice que es un ***ideal nil****, si para todo elemento $a \in I$, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$.*

Definición 0.0.17.

Sea R un anillo, llamaremos ***radical de Jacobson*** *de R, a la suma de los ideales superfluos a la izquierda o derecha de R. Denotaremos a dicho ideal por $\mathrm{J}(R)$.*

Existen muchas caracterizaciones del radical de Jacobson. Nosotros usamos la siguiente.

Proposición 0.0.18.

Sea R un anillo. El radical de Jacobson R es el ideal formado por aquellos elementos $a \in R$ tales que, para cualesquiera $x, y \in R$, el elemento $1 - xay$ es invertible.

Proposición 0.0.19.

Sea R un anillo, $\mathrm{J}(R)$ su radical y $e \in R$ un idempotente no nulo de R. Entonces $\mathrm{J}(eRe) = e\mathrm{J}(R)e$.

Aún mas, si $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente o nilpotente entonces $\mathrm{J}(eRe)$ también lo es.

Definición 0.0.20.

*Sea R un anillo y $\mathrm{J}(R)$ su radical de Jacobson. Diremos que R es un anillo **semilocal** si $R/\mathrm{J}(R)$ es un anillo semisimple artiniano.*

Definición 0.0.21.

*Sea R un anillo y $\mathrm{J}(R)$ su radical de Jacobson. Diremos que R es un anillo **semiprimario** si R es un anillo semilocal y $\mathrm{J}(R)$ un ideal nilpotente.*

Definición 0.0.22.

*Sea R un anillo y $\mathrm{J}(R)$ su radical de Jacobson. Diremos que R es **perfecto** por la izquierda si R es semilocal y $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente por la izquierda.*

Definición 0.0.23.

*Sea R un anillo artiniano por la izquierda y por la derecha. Diremos que R es **quasi-Frobenius** si $\mathrm{r}_R(\mathrm{l}_R(I)) = I$ para todo ideal por la derecha de R y $\mathrm{l}_R(\mathrm{r}_R(J)) = J$ para todo ideal por la izquierda de R.*

Proposición 0.0.24.

Sea R un anillo noetheriano por la izquierda o por la derecha y auto-inyectivo por la izquierda o por la derecha. Entonces R es quasi-Frobenius.

Definición 0.0.25.

*Sea R un anillo. Diremos que R es **regular von Neumann** si para todo $x \in R$ existe $y \in R$ tal que $xyx = x$.*

Proposición 0.0.26.

Un anillo R es regular de von Neumann si y sólo si todo ideal por la izquierda (respectivamente derecha) finitamente generado es sumando directo.

Proposición 0.0.27.

Sea R un anillo regular von Neumann y $e \in R$ un elemento idempotente. Entonces eRe es un anillo regular von Neumann.

Proposición 0.0.28.

Sea R un anillo. Si R es regular von Neumann y noetheriano por la izquierda entonces es semisimple artiniano.

Proposición 0.0.29.

Sea R un anillo. Si R cumple ACC (condición de cadena ascendente) en sumandos directos y es regular von Neumann entonces es semisimple artiniano.

Teorema 0.0.30 (Hopkins)**.** *Sea R un anillo. R es artiniano por la izquierda si y sólo si R es noetheriano por la izquierda y semiprimario.*

Teorema 0.0.31 (Levitzki)**.** *Sea R un anillo. Si R es noetheriano por la izquierda entonces todo ideal nil por algún lado es nilpotente.*

Proposición 0.0.32.

Sea R un anillo. Si R es perfecto por algún lado y noetheriano por la izquierda entonces es artiniano por la izquierda.

Teorema 0.0.33.

Un anillo R es perfecto por la izquierda si y sólo si R satisface DCC (condición de cadena descendente) en ideales por la derecha finitamente generados.

Teorema 0.0.34 (Björk)**.** *Sea R un anillo. Todo R-módulo que satisfaga DCC por algún lado para submódulos cíclicos también satisface la condición para submódulos finitamente generados.*

Definición 0.0.35.

Sea R un anillo y $\mathrm{J}(R)$ su radical de Jacobson. Diremos que R es ***semiregular*** *si $R/\mathrm{J}(R)$ es regular y los idempotentes se levantan módulo $\mathrm{J}(R)$.*

Definición 0.0.36.

Un anillo R decimos que es ***semihereditario*** *por la izquierda, si todo ideal por la izquierda finitamente generado es proyectivo.*

Definición 0.0.37.

Sea R un anillo y ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda. Llamaremos ***resolución proyectiva*** *de M, a una sucesión exacta de la forma*

$$\ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Donde cada P_n es un R-módulo por la izquierda proyectivo. Diremos que la ***longitud de la resolución*** *es $n+1$ si $P_n \neq 0$, y $P_m = 0 \ \forall\ m > n$.*

Definición 0.0.38.

Sea R un anillo y ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda. Llamaremos ***dimensión proyectiva*** *de M a la menor de las longitudes de las resoluciones proyectivas de M.*

Proposición 0.0.39.

Sean M_R, ${}_SN$ módulos y ${}_SW_R$ un bimódulo. Entonces existe un isomorfismo

$$\varphi : Hom_R\left(M, Hom_S\left(W, N\right)\right) \to Hom_S\left(\left(W \otimes_R M\right), N\right)$$

definido por

$$\varphi\left(f\right)\left(w \otimes m\right) = f\left(m\right)\left(w\right).$$

Para todo $f \in Hom_S\left(\left(W \otimes_R M\right), N\right)$ y para todo $w \otimes m \in W \otimes_R M$.

Proposición 0.0.40.

Sean ${}_RN$, ${}_SP$ módulos y ${}_SU_R$ un bimódulo. Si ${}_SP$ es finitamente generado y proyectivo, existe un isomorfismo

$$\varphi : Hom_S\left(P, U\right) \otimes_R N \to Hom_S\left(P, \left(U \otimes_R N\right)\right)$$

definido por

$$\varphi\left(\gamma \otimes_R n\right) : p \mapsto \gamma\left(p\right) \otimes_R n.$$

Proposición 0.0.41.

Sean ${}_SN$, P_R módulos y ${}_SU_R$ un bimódulo. Si P_R es finitamente generado y proyectivo, existe un isomorfismo

$$\varphi : P \otimes_R Hom_S\left(U, N\right) \to Hom_S\left(Hom_R\left(P, U\right), N\right)$$

definido por

$$\varphi\left(p \otimes_R \gamma\right) : \delta \mapsto \gamma\left(\delta\left(p\right)\right).$$

Definición 0.0.42.

*Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías y $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dos funtores covariantes. Una **transformación natural** de F a G, es una familia de morfismos en $\mathcal{B}$, $\nu_M : F\left(M\right) \to G\left(M\right)$, para cada objeto de $M \in \mathcal{A}$ tal que, para todo morfismo $f : M \to N$, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} F\left(M\right) & \stackrel{F(f)}{\to} & F\left(N\right) \\ \nu_M \downarrow & & \nu_N \downarrow \\ G\left(M\right) & \stackrel{G(f)}{\to} & G\left(N\right) \end{array}.$$

*Esta transformación natural será representada por $\nu : F \to G$, y diremos que es un **isomorfismo natural** si para todo $M \in \mathcal{A}$, el morfismo ν_M es un isomorfismo.*

Definición 0.0.43.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías y $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dos funtores covariantes. Diremos que F y G son ***naturalmente isomorfos*** *si existe una transformación natural de F a G que es un isomorfismo natural. Lo representaremos por $F \cong G$.*

Definición 0.0.44.

Sean R y S anillos, $T : R-Mod \to S-Mod$ y $H : S-Mod \to R-Mod$ funtores covariantes (aditivos). Decimos que (T, H) forman un par adjunto si para cada R-módulo M y cada S-módulo, N existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$\phi_{M,N} : Hom_R\left(M, H(N)\right) \to Hom_S\left(T(M), N\right),$$

que es natural en las dos variables.

La siguiente proposición muestra que toda adjunción entre categorías de módulos se realiza a través de Hom y $\otimes$

Proposición 0.0.45.

Sea (T, H) un par adjunto entre las categorías R-Mod y S-Mod y consideremos el bimódulo ${}_SU_R = T\left({}_RR_R\right)$. Entonces $H \cong Hom_S\left(U_R, -\right)$ y $T \cong \left({}_SU \otimes_R -\right)$.

Definición 0.0.46.

Sea F un funtor covariante entre dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Diremos que F es una ***equivalencia categórica*** *entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, si existe otro funtor covariante G de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$ tal que $FG \cong 1_{\mathcal{A}}$ y $GF \cong 1_{\mathcal{B}}$. Diremos entonces que F y G son equivalencias categóricas inversas.*

Definición 0.0.47.

Dos categorías $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son ***equivalentes*** *si existe un funtor covariante de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ que sea una equivalencia entre categorías.*

Definición 0.0.48.

Sean R y S anillos. Diremos que R y S son ***Morita equivalentes****, y lo representaremos por $R \sim S$, si las categorías $R - Mod$ y $S - Mod$ son equivalentes.*

Desde el punto de vista de nuestro problema; es decir, la relación entre propiedades de un anillo y sus anillos de matrices, en el caso de matrices finitas la teoría de Morita constituye una herramienta formidable. La llave es lo que se denomina las propiedades invariantes de Morita. Damos a continuación algunas de éstas:

- Sucesiones exactas.
- Módulos fieles.
- Sumas directas y productos directos.
- Módulos generadores y progeneradores.
- Módulos proyectivos e inyectivos.
- Módulos simples y semisimples.
- Módulos indescomponibles.
- Submódulos superfluos y esenciales.
- Anillos simples.
- Envolturas proyectivas y recubrimientos inyectivos.
- Anillos regulares.
- Módulos finitamente generados y finitamente cogenerados.
- Módulos artinianos y noetherianos.

Capítulo 1.

Anillos de matrices infinitas

Cuando consideremos un cardinal, digamos $\aleph$, nos referiremos a un ordinal-cardinal; es decir, consideraremos el primer ordinal cuyo cardinal es $\aleph$. Sea α un cardinal (a partir de ahora, un ordinal-cardinal). Entonces, α es un conjunto bien ordenado, que además, cuando es infinito, como ordinal, es ordinal límite. Es conocido que siempre podemos interpretar a los ordinales como el conjunto de los ordinales que son estrictamente menores que él, $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Así lo haremos en este trabajo, y de esta manera será entonces más cómodo considerar los conjuntos de índices para manipular matrices infinitas, pues serán únicamente ordinales-cardinales (infinitos). La tradición de no escribir "índices 0" en matrices hace que lo anterior se complique en matrices finitas; pero a nosotros no nos afecta porque las matrices que consideramos son infinitas. Para una exposición detallada sobre cardinales y ordinales, puede consultarse [14]. Como es costumbre, dado un ordinal-cardinal, α, denotamos al *sucesor ordinal-cardinal* con α^+. En esta línea, para la cardinalidad numerable escribiremos ω en vez de $\aleph_0$.

Sea R un anillo, ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda y α un cardinal. Una matriz en M de orden $\alpha \times \alpha$, será una matriz con entradas en el módulo M y cuyos índices recorren α (en el orden obvio). Llamaremos $\mathrm{M}_\alpha(M)$ al conjunto formado por todas las matrices en M de orden $\alpha \times \alpha$. Cuando trabajemos con cardinalidad numerable, obviaremos el cardinal y escribiremos solamente $\mathrm{M}(M)$.

Dada una matriz $a \in \mathrm{M}_\alpha(M)$, la entrada o el elemento que ocupa la fila i y la columna j, se dirá que ocupa la posición ij de la matriz y será denotado por $a(i,j)$. De esta manera, podemos definir una matriz indicando cuáles son sus entradas en cada una de las posiciones. Lo indicaremos escribiendo $a = (a(i,j))_{ij\in\alpha}$.

Siempre se tiene que $\mathrm{M}_\alpha(M)$ es R-módulo a la izquierda con las operaciones habituales.

Sea R un anillo. En el caso de las matrices finitas, sabemos que $\mathrm{M}_n(R)$ tiene estructura de anillo. Sin embargo, cuando queremos extender de forma natural el producto al orden infinito, nos vemos obligados a considerar sumas infinitas, y no podemos asegurar que la operación pueda realizarse. Nótese que un elemento que ocupase la posición ij en un posible producto de dos matrices $a, b \in \mathrm{M}_\alpha(R)$ tendría la forma, $(ab)(i,j) = \sum_{k\in\alpha} a(i,k)\, b(k,j)$ y esto, en general, no sabemos qué significa.

Aquellas matrices que realizan endomorfismos sobre módulos libres no presentan este problema. Siempre podemos asignar un valor a (o "ejecutar") la suma anterior, puesto que ocurre uno de los siguientes casos: dado $i \in \alpha$, $a(i,k)$ es cero, para casi todo valor de $k \in \alpha$, o dado $j \in \alpha$, $b(k,j)$ es cero, para casi todo valor de $k \in \alpha$.

1.1. Aritmética de matrices.

Vamos a presentar con detalle algunos conceptos necesarios para introducirnos en los anillos de matrices infinitas. También vamos a ir presentando la notación que vamos a seguir en el trabajo, así como algunas propiedades que caracterizan a las matrices. Comenzaremos con las matrices de filas o columnas finitas.

Definición 1.1.1.

*Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Dada una matriz a de $\mathrm{M}_\alpha(R)$, diremos que a es una **matriz de filas finitas** si fijado un índice $i \in \alpha$, el conjunto de índices $j \in \alpha$ para los cuales $a(i,j)$ es distinto de cero, es finito, es decir,*

$$\forall\ i \in \alpha, \quad X_i = \{j \in \alpha \mid a(i,j) \neq 0\} \text{ es finito.} \tag{1.1}$$

Denotaremos por $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ al conjunto de las matrices de $\mathrm{M}_\alpha(R)$ de filas finitas.

Definición 1.1.2.

*Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Dada una matriz a de $\mathrm{M}_\alpha(R)$, diremos que a es una **matriz de columnas finitas** si fijado un índice $j \in \alpha$, el conjunto de índices $i \in \alpha$ para los cuales $a(i,j)$ es distinto de cero, es finito, es decir,*

$$\forall\ j \in \alpha\ X_j = \{i \in \alpha \mid a(i,j) \neq 0\} \text{ es finito.} \tag{1.2}$$

Denotaremos por $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$ al conjunto de las matrices de $\mathrm{M}_\alpha(R)$ de columnas finitas.

Si nos quedamos con los conjuntos anteriores, podemos definir la multiplicación de matrices al igual que en el caso finito. Así por ejemplo, dadas dos matrices $a = (a(i,j))_{ij\in\alpha}$ y $b = (b(i,j))_{ij\in\alpha}$, pertenecientes a $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, definimos la multiplicación por

$$ab = \left(\sum_{k\in Y} a(i,k)\, b(k,j)\right)_{ij\in\alpha}, \tag{1.3}$$

donde $Y \subset \alpha$ es un conjunto finito que contiene al conjunto X_i de la Definición 1.1.1. Por comodidad, en general escribiremos

$$ab = \left(\sum_{k\in\alpha} a(i,k)\, b(k,j)\right)_{ij\in\alpha}, \tag{1.4}$$

teniendo claro que en realidad es finita.

De la misma forma, podemos hablar de la multiplicación de matrices en el conjunto $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$.

Es inmediato comprobar que las definiciones anteriores de suma y producto de matrices cumplen los axiomas de anillo con uno. Por lo tanto, podemos hablar del anillo de matrices de filas finitas, $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y del anillo de matrices de columnas finitas, $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$.

Resumiendo, al trabajar sobre las matrices de filas o columnas finitas podemos mantener las mismas operaciones definidas para matrices sobre conjuntos de índices finitos. El siguiente resultado nos muestra, además, que cierta asociatividad se verifica.

Proposición 1.1.3.

Sea R un anillo, L un (R,R)-bimódulo y α un cardinal infinito. Consideremos los anillos $S = \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y $T = \mathrm{CFM}_\alpha(R)$. Entonces $\mathrm{M}_\alpha(L)$, tiene estructura de (S,T)-bimódulo.

Demostración.

Hacemos $M = \mathrm{M}_\alpha(L)$. Es claro que M es un S-módulo por la izquierda y es un T-módulo por la derecha. Así pues, sólo nos queda comprobar que dado $s \in S$, $t \in T$ y $m \in M$ se cumple que $s(mt) = (sm)t$. Denotemos por e_{ij}, a las matrices que tienen a la unidad de R en la posición ij y 0 en las demás entradas, y abreviamos $e_{ii} = e_i$. Ahora bien, primero observaremos que $\forall i \in \alpha$, se cumple que $e_i(sm) = (e_i s)m$ y que $(mt)e_i = m(te_i)$. Vamos a ver que $\forall j \in \alpha$ se tiene que $e_i(sm)e_j = (e_i s)me_j$ y que $e_j(mt)e_i = e_j m(te_i)$. Para demostrar la primera afirmación tengamos en cuenta que:

1. Como $s \in S$, por la definición de S, existe un subconjunto finito $\alpha_i \subset \alpha$ para el cual tenemos que $e_i s = \sum_{k\in\alpha_i} e_i s e_k$.

2. Como el conjunto α_i anterior es finito, entonces $\forall m \in M$ se tiene que $\left(\sum_{k\in\alpha_i} e_i s e_k\right) m = \sum_{k\in\alpha_i} e_i s e_k m$.

3. Al ser $e_k = 0\ \forall k \notin \alpha_i$, entonces $\sum_{k\in\alpha_i} e_i s e_k m e_j = \sum_{k\in\alpha} e_i s e_k m e_j = e_i(sm)e_j$.

De esta manera tenemos que

$$(e_i s)me_j = \left(\sum_{k\in\alpha_i} e_i s e_k\right) me_j = \sum_{k\in\alpha_i} e_i s e_k m e_j = e_i(sm)e_j.$$

Para demostrar la segunda afirmación tengamos en cuenta que:

1. Como $t \in T$, por la definición de T, existe un subconjunto finito $\alpha_i \subset \alpha$ para el cual tenemos que $te_i = \sum_{k\in\alpha_i} e_k t e_i$.

2. Como el conjunto α_i anterior es finito, entonces $\forall m \in M$ se tiene que $m\left(\sum_{k\in\alpha_i} e_k t e_i\right) = \sum_{k\in\alpha_i} m e_k t e_i$.

3. Al ser $e_k = 0\ \forall k \notin \alpha_i$, entonces $\sum_{k\in\alpha_i} e_j m e_k t e_i = \sum_{k\in\alpha} e_j m e_k t e_i = e_j(mt)e_i$.

De esta manera,

$$e_j m(te_i) = e_j m \left(\sum_{k\in\alpha_i} e_k t e_i\right) = \sum_{k\in\alpha_i} e_j m e_k t e_i = e_j(mt)e_i.$$

Para terminar comprobaremos finalmente que $\forall\ i, j \in \alpha$ tendremos que $e_i(s(mt))e_j = e_i((sm)t)e_j$. Utilizando la misma notación, las mismas observaciones y los resultados previos tenemos que

$$e_i(s(mt))e_j = (e_i s)(mt)e_j = (e_i s)m(te_j) = e_i(sm)(te_j) = e_i((sm)t)e_j.$$

□

Un anillo que será objeto de estudio en esta tesis es aquel formado por las matrices infinitas que en cada fila y en cada columna, la cantidad de elementos no nulos es finito. Lo llamaremos el anillo de filas y columnas finitas y lo denotaremos por $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$. Formalmente:

Definición 1.1.4.

Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Dada una matriz a de $\mathrm{M}_\alpha(R)$, diremos que a es una ***matriz de filas y columnas finitas*** *si es a la vez, una matriz de filas finitas y una matriz de columnas finitas.*

Denotaremos por $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ al conjunto de las matrices de $\mathrm{M}_\alpha(R)$ de filas y columnas finitas.

Es decir, $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$, puede ser visto como la intersección de los anillos $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$, y por tanto también es un anillo,

$$\mathrm{RCFM}_\alpha(R) = \mathrm{RFM}_\alpha(R) \cap \mathrm{CFM}_\alpha(R)$$

El estudio de la estructura de los anillos anteriores involucra algunos ideales notables. Empezamos destacando el ideal formado por las matrices que sólo tienen una cantidad finita de entradas no nulas.

Definición 1.1.5.
Sea R un anillo, α un cardinal infinito y a una matriz de $\mathrm{M}_\alpha(R)$. Diremos que a es una ***matriz finita*** *si tiene una cantidad finita de entradas no nulas. Denotaremos por $\mathrm{FM}_\alpha(R)$ al conjunto de las matrices finitas.*

$$\mathrm{FM}_\alpha(R) = \{a \in \mathrm{M}_\alpha(R) \mid a(i,j) = 0 \text{ para casi todo } i,j \in \alpha\}. \tag{1.5}$$

Se puede comprobar fácilmente que $\mathrm{FM}_\alpha(R)$ es un ideal bilátero del anillo $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$, y es ideal a la derecha de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y a la izquierda de $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$.

Definición 1.1.6.
Sea R un anillo, α un cardinal infinito y a una matriz de $\mathrm{M}_\alpha(R)$. Diremos que a es una ***matriz con finitas columnas*** *si tiene una cantidad finita de columnas no nulas. Denotaremos por $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ al conjunto de las matrices con finitas columnas.*

$$\mathrm{FC}_\alpha(R) = \{a \in \mathrm{M}_\alpha(R) \mid \ \exists\ j_0 \in \alpha \mid \ a(i,j) = 0\ \forall\ i \in \alpha\ \forall\ j > j_0\}. \tag{1.6}$$

Definición 1.1.7.
Sea R un anillo, α un cardinal infinito y a una matriz de $\mathrm{M}_\alpha(R)$. Diremos que a es una ***matriz con finitas filas*** *si tiene una cantidad finita de filas no nulas. Denotaremos por $\mathrm{FR}_\alpha(R)$ al conjunto de las matrices con finitas filas.*

$$\mathrm{FR}_\alpha(R) = \{a \in \mathrm{M}_\alpha(R) \mid \ \exists\ i_0 \in \alpha \mid \ a(i,j) = 0\ \forall\ j \in \alpha\ \forall\ i > i_0\}. \tag{1.7}$$

También aquí se puede comprobar que $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ y $\mathrm{FR}_\alpha(R)$ son ideales biláteros de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$, respectivamente.

1.2. Generalidades

Todo lo que vamos a comentar en esta sección es común a los anillos que ya hemos definido; por esto, trabajaremos con un anillo de matrices infinitas, digamos S, que puede ser $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$ o $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

El elemento unidad de S será denotado por I y tiene en la posición ij la delta de Kronecker, es decir, $I(i,j) = \delta_{ij}$.

Si denotamos por e_{ij}, a las matrices que tienen la unidad de R en la posición ij y 0 en las demás entradas, se tiene la siguiente igualdad

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il},$$

Llamaremos a estas matrices **ij-básicas**. A la familia $\{e_{ij}\}_{i,j\in\alpha}$ se la denomina **familia de matrices básicas** de S. Cuando $i = j$, denotaremos $e_i = e_{ii}$. Estas matrices son muy importantes por el papel que juegan en la teoría y su utilidad en el desarrollo de las operaciones aritméticas. Llamaremos a la familia $\{e_i\}_{i\in\alpha}$, **familia de matrices idempotentes básicas** de S.

Algunas propiedades que utilizaremos de forma continua con respecto a las matrices i-básicas y de fácil comprobación son:

- Existe un isomorfismo de anillos entre e_iSe_i y R. Usando este isomorfismo tenemos que:
- Existe un isomorfismo semilineal entre $e_i\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, $e_i\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ y $R^{(\alpha)}$.
- Existe un isomorfismo semilineal entre $\mathrm{CFM}_\alpha(R)\,e_i$, $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)\,e_i$ y $R^{(\alpha)}$.

Sea $X \subseteq \alpha$ un subconjunto de α, denotamos

$$e_X = \sum_{i\in X} e_i.$$

Utilizando esta notación podemos describir al anillo S de una manera efectiva. Así, pues, una matriz a del anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, es aquella para la que, fijado el índice $i \in \alpha$, existe un subconjunto finito de α, digamos X_i, tal que $e_ia = e_iae_{X_i}$. De manera análoga, podemos describir los elementos de $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$, como aquellas matrices para las cuales se tiene que si fijamos el índice $j \in \alpha$, existe un subconjunto finito X_j de α tal que $ae_j = e_{X_j}ae_j$.

Vamos a terminar esta sección con algunas observaciones sobre la asociatividad cuando pretendemos realizar productos entre distintos anillos de matrices.

Es claro que si $x \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ e $y \in \mathrm{CFM}_\alpha(R)$ entonces el producto $x \cdot y$ está definido y, como hemos visto, hay asociatividad en el sentido de la Proposición 1.1.3. En cuanto al otro orden en el producto, aún cuando tuviésemos tres matrices $x \in \mathrm{CFM}_\alpha(R)$, $y \in \mathrm{M}_\alpha(R)$ y $z \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y los productos $(xy)z$ y $x(yz)$ tuviesen sentido (o sea, fuesen ejecutables), no necesariamente se verifica la asociatividad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.1.

Existen tres matrices distintas $x, y, z \in \mathrm{M}(R)$ tales que $x \in \mathrm{CFM}(R)$, $y \in \mathrm{RCFM}(R)$ y $z \in \mathrm{RFM}(R)$, con $xy = yz = 1$. Por tanto $(xy)z = z \neq x = x(yz)$.

$$x = \sum_{i\in\alpha} \sum_{i\le j\in\alpha} e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$y = \sum_{i\in\alpha} \left(e_{ii} - e_{i(i+1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$z = -\sum_{i\in\alpha} \sum_{i> j\in\alpha} e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Si realizamos las multiplicaciones anteriores veremos que

$$\begin{aligned} e_i x y e_j &= e_i \left(\sum_{k\in\alpha} \sum_{k\le l\in\alpha} e_{kl}\right) \left(\sum_{m\in\alpha} \left(e_{mm} - e_{m(m+1)}\right)\right) e_j = \\ &= \sum_{k\in\alpha} \sum_{k\le l\in\alpha} \sum_{m\in\alpha} e_i e_{kl} \left(e_{mm} - e_{m(m+1)}\right) e_j = \\ &= \sum_{i\le l\in\alpha} \sum_{m\in\alpha} e_{il} \left(e_{mm} - e_{m(m+1)}\right) e_j = \\ &= \sum_{i\le l\in\alpha} \left(e_{il} e_j - e_{i(l+1)} e_j\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{i\leq l\in\alpha}\left(e_{il}e_j - e_{i(l+1)}e_j\right) = \begin{cases} 0 & j<i \\ e_{i(j-1)}e_j - e_{ij}e_j + e_{ij}e_j - e_{i(j+1)}e_j = & \\ = -e_{ij}+e_{ij}=0 & i<j \end{cases}$$

y por tanto $e_ixye_j = e_ie_j$, *de donde se obtiene que* $xy=1$.

$$\begin{aligned} e_iyze_j &= e_i\left(\sum_{k\in\alpha}\left(e_{kk}-e_{k(k+1)}\right)\right)\left(-\sum_{l\in\alpha}\sum_{l>m\in\alpha}e_{lm}\right)e_j = \\ &= -\sum_{k\in\alpha}\sum_{l\in\alpha}\sum_{l>m\in\alpha}e_i\left(e_{kk}-e_{k(k+1)}\right)e_{lm}e_j = \\ &= -\sum_{l\in\alpha}\sum_{l>m\in\alpha}\left(e_i-e_{i(i+1)}\right)e_{lm}e_j = -\sum_{i>m\in\alpha}e_{im}e_j + \sum_{i+1>m\in\alpha}e_{im}e_j = \\ &= -\sum_{i>m\in\alpha}e_{im}e_j + \sum_{i>m\in\alpha}e_{im}e_j + e_{ii}e_j = e_ie_j \end{aligned}$$

y por tanto $yz=1$

1.3. Endomorfismos y matrices

Otra línea de trabajo en la que el anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ aparece de forma natural es el estudio de los endomorfismos de módulos libres (operando siempre como escalares opuestos). Recordemos que para el caso finito, independientemente de que se consideren módulos libres a la izquierda o la derecha, existen isomorfismos entre el anillo de endomorfismos de R^n y el anillo de matrices de orden n sobre R. En el caso infinito, hemos de distinguir si consideramos módulos libres a la izquierda o a la derecha, porque están relacionados con anillos diferentes.

Es sabido que si R se un anillo y ${}_RF$ es un R-módulo libre por la izquierda de rango α, entonces $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es isomorfo al anillo $\mathrm{End}({}_RF)$. Vamos a describir el homomorfismo con más detalle.

Sea $B=\{b_i\}_{i\in\alpha}$ una base ordenada para F y sea $\psi: F\to R^{(\alpha)}$ el isomorfismo típico con el que representamos los elementos de F como coordenadas, respecto de la base B. Dado un elemento (genérico) x de F, lo expresamos en términos de B, $x=\sum_{i\in\alpha}x(i)\,b_i$, y $\psi(x)=(x(i))_{i\in\alpha}$.

Vamos a definir los siguientes homomorfismos. Nótese que no son más que una manera muy formal de considerar la matriz asociada en el sentido habitual.

$$
\begin{array}{lccc}
\phi: & \operatorname{End}(F) & \to & \mathrm{RFM}_{\alpha}(R) \\
 & f & \to & \left(f\left(b_i\right)(j)\right)_{ij\in\alpha}
\end{array}
\tag{1.8}
$$

$$
\text{y además,} \quad f\psi^{-1} = \psi\phi(f)
$$

$$
\begin{array}{lccccccc}
\varphi: & \mathrm{RFM}_{\alpha}(R) & \to & \operatorname{End}(F) & & & & \\
 & a & \to & \varphi(a) & : & F & \to & F \\
 & & & & & x & \to & \left(\sum_{i\in\alpha} x(i)\, a(i,j)\right)_{i\in\alpha}
\end{array}
\tag{1.9}
$$

Aún cuando lo anterior es bien conocido, nosotros vamos a definir otras relaciones que no son tan conocidas y haremos mención a este isomorfismo, así que lo dejamos enunciado.

Proposición 1.3.1.
Los homomorfismos definidos en la ecuación 1.8 y 1.9 son isomorfismos de anillos, inversos.

A veces, de tanto usarlo, acabamos identificando el endomorfismo con la matriz asociada. Procuraremos evitar que esta "deformación" cree confusiones al lector.

1.4. Pares duales y homomorfismos con adjunto

Esta sección contiene la base teórica específica de nuestro trabajo. Hemos procurado desarrollarla con algo de detalle y cuidado de tal manera que queden claramente construidos los endomorfismos con adjunto.

Definición 1.4.1.
Sea R un anillo. Un ***par dual****, está formado por un R-módulo a la izquierda ${}_RE$ y un R-módulo a la derecha F_R, junto con una forma bilineal*

$$
{}_RE \times F_R \to R
$$

no degenerada.

De forma genérica representaremos a dicha forma bilineal por $\langle , \rangle$ y al par dual sobre R por (E, F). Cuando queramos resaltar el anillo base, denotaremos la forma bilineal por $\langle , \rangle_R$ y al par dual por ${}_R(E, F)$.

Ejemplos 1.4.2.

1. *Sea α un cardinal infinito y R un anillo. Consideremos $R^{(\alpha)}$, el módulo libre sobre R a la izquierda y la derecha. Fijada la base canónica de $R^{(\alpha)}$, consideramos la forma bilineal $\langle , \rangle$ sobre ${}_R R^{(\alpha)} \times R_R^{(\alpha)}$ más conocida. Dados dos elementos expresados en coordenadas $a = (a_i)_{i\in\alpha}$ y $b = (b_i)_{i\in\alpha}$, $\langle a, b\rangle = \sum_{i\in\alpha} a_i b_i$. Es conocido que esta forma bilineal es no degenerada, y por tanto, $\left({}_R R^{(\alpha)}, R_R^{(\alpha)}\right)$ es un par dual sobre R.*

2. *Sea R un anillo y ${}_R E$ un R-módulo por la izquierda. Consideremos el dual, E^*, junto con la forma bilineal habitual $\langle , \rangle : E \times E^* \to R$ definida por $\langle e, f\rangle = f(e)$. Entonces (E, E^*) es un par dual sobre R.*

Definición 1.4.3.
*Sea R un anillo y (E, F) un par dual sobre R. Sean α y β dos cardinales infinitos. Diremos que el par (E, F) es un (α, β)**-par dual** sobre R , si E es un módulo libre de rango α y además, existe una base S en E de cardinalidad α y tal que $F = \{f : E \to R \mid |S \cap (E - \mathrm{Ker}(f))| < \beta\}$.*

Dicho de otra manera, existe una base en E tal que F está formado por los elementos f, del dual de E, donde el cardinal del conjunto de los elementos de la base que no anulan a f tiene cardinal estrictamente menor que β. A estos pares duales, también los llamaremos **pares duales de Ornstein**. El Ejemplo 1.4.2(1) anterior es un (α, ω)-par dual

Sea R un anillo y sea (E, F) un par dual sobre R. Como comentamos en la Introducción, para construir la F-topología, primero consideramos la topología finita de F^*; es decir, la topología lineal que tiene como (una) subbase de vecindades del cero a los anuladores (en F^*) de subconjuntos finitos de F. Luego, como la definición de par dual implica que la aplicación bilineal es no degenerada, se tiene que E se sumerge en F^*, y como tal, hereda la topología finita. A dicha restricción es que la llamamos la F-topología. Para más detalles podemos consultar [22]. Bajo esta topología, podemos hablar de continuidad, y diremos, por ejemplo, que un endomorfismo de E es continuo si es una función continua bajo la F-topología.

Homomorfismos continuos, adjuntos y matriz asociada

Definición 1.4.4.
*Sean R y R' dos anillos, σ un isomorfismo de anillos de R en R' y ${}_R(E, F)$ y ${}_{R'}(E', F')$ dos pares duales sobre R y R' respectivamente. Diremos que un homomorfismo σ-semilineal de E en E' es un **homomorfismo continuo** si lo es bajo la F-topología sobre E y la F'-topología sobre E'.*

Es fácil comprobar que la suma usual de homomorfismos continuos es nuevamente un homomorfismo continuo y la composición de endomorfismos continuos es también continuo.

Cuando $R = R'$, $\sigma = 1_R$ y ${}_R(E, F) = {}_{R'}(E', F')$ los homomorfismos semilineales son simplemente **endomorfismos** y denotaremos con $\mathrm{End}_R^F(E)$ al anillo de los endomorfismos de E que son continuos.

Definición 1.4.5.

Sean R y R' dos anillos, σ un isomorfismo de anillos de R en R' y ${}_R(E, F)$ y ${}_{R'}(E', F')$ dos pares duales sobre R y R', con formas bilineales "$<, >$" y "$[,]$", respectivamente. Dado un homomorfismo σ-semilineal $f : E \to E'$, diremos que f tiene ***homomorfismo adjunto*** *si existe un homomorfismo σ-semilineal $\overline{f} : F' \to F$ que cumple:*

$$\sigma\left(\left\langle x, \overline{f}(y)\right\rangle\right) = [f(x), y] \qquad \forall\ x \in E, y \in F \tag{1.10}$$

Cuando $R = R'$, $\sigma = 1$, ${}_R(E, F) = {}_{R'}(E', F')$ y f es un endomorfismo, decimos que f es un endomorfismo con adjunto.

Existe una estrecha relación entre homomorfismo σ-semilineal, su homomorfismo dual y los homomorfismos continuos. En el caso de los espacios vectoriales sobre anillos de división se tiene el siguiente resultado. Véase [22, Theorem IV.7.1, Proposition IV.7.2].

Teorema 1.4.6.

Sean D y D' anillos de división, σ un isomorfismo de anillos de D en D' y ${}_D(E, F)$ y ${}_{D'}(E', F')$ dos pares duales sobre D y D', respectivamente. Sea $f : E \to E'$ un homomorfismo σ-semilineal. Son equivalentes:

1. *El homomorfismo f tiene homomorfismo adjunto.*
2. *La restricción del homomorfismo dual sobre F' es un homomorfismo σ^{-1}-semilineal sobre F.*
3. *El homomorfismo f es continuo*

En este caso, el adjunto de f es la restricción del dual sobre F'.

Nótese que, en general, si $f : E \to E'$ es un homomorfismo σ-semilineal entonces $f^* : E'^* \to E^*$ verifica, para $a \in E$ y $x \in E'^*$, que $a \cdot f^*(x) = \sigma^{-1}(a \cdot xf)$.

En el caso de anillos generales, como veremos a continuación, se tiene equivalencia entre las dos primeras condiciones. Además, se puede comprobar que todo endomorfismo con adjunto es continuo, pero el recíproco no necesariamente ocurre.

Dado el desuso del concepto de endomorfismo continuo, muchas veces se identifica endomorfismo continuo y endomorfismo con adjunto.

Proposición 1.4.7.

Sean R y R' dos anillos, (E, F) un par dual sobre R y (E', F') un par dual sobre R'. Sea f un homomorfismo σ-semilineal de E en E'. Entonces f tiene adjunto si y sólo si la imagen de la restricción del dual de f sobre F' está contenida en F. En este caso, el adjunto de f es precisamente la restricción del dual sobre F'.

Demostración.

Como ya hemos comentado anteriormente, F queda sumergido en E^* a través de la forma bilineal del par dual. Llamaremos ϕ a la inmersión de F en E^* y ϕ' a la inmersión de F' en $E^{*\prime}$.

[$\Rightarrow$] Lo que tenemos que ver es que dado un elemento $y \in F'$ la imagen de $\phi'(y)$ a través del dual nos queda en $\phi(F)$. En particular vamos a comprobar que $\forall\, y \in F'$ se tiene que $f^*(\phi'(y)) = \phi\left(\overline{f}(y)\right)$. Sea $x \in E$, veamos que ambas funciones tienen la misma imagen,

$$f^*(\phi'(y))(x) = \sigma^{-1}(\phi'(y)(f(x))) = \sigma^{-1}([f(x), y]) =$$
$$= \langle x, \overline{f}(y)\rangle = \phi\left(\overline{f}(y)\right)(x).$$

Así pues $f^*(\phi'(y)) \in \phi(F)$.

[$\Leftarrow$] Vamos a comprobar que en este caso, la restricción del dual es precisamente el adjunto de f. Por hipótesis, la restricción del dual sobre F' es elemento de $\phi(F)$. Así para cada $y' \in F'$ existe $y \in F$ tal que $f^*(\phi'(y')) = \phi(y)$. Como ϕ es un monomorfismo, podemos considerar el inverso de ϕ sobre su imagen, que (abusando de escritura) denotamos ϕ^{-1}. Entonces $y = (\phi^{-1} \circ f^* \circ \phi')(y')$. Hacemos $\overline{f} = \phi^{-1} \circ f^* \circ \phi'$. Sea $x \in E$ e $y' \in F'$. Vamos a comprobar que $[f(x), y'] = \sigma(\langle x, (\phi^{-1} \circ f^* \circ \phi')(y)\rangle)$. Para ello, sólo tenemos que recordar como actúan ϕ y ϕ' pues

$$[f(x), y'] = \phi'(y')(f(x)) = \sigma(f^*(\phi'(y'))(x)) = \sigma(\phi(y)(x)) =$$
$$\sigma(\langle x, y\rangle) = \sigma\left(\langle x, \overline{f}(y')\rangle\right).$$

$\square$

De lo anterior se desprende de inmediato que dado un par dual, (E, F), el anillo de los endomorfismos con adjunto es un subanillo del anillo de endomorfismos de E y en consecuencia el conjunto de matrices asociadas respecto de cualquier base (o, más formalmente, la imagen de $\mathrm{End}_R^F(E)$ por el isomorfismo definido en la correspondencia 1.8) tendrá estructura de subanillo. Como siempre ocurre, la descripción de dichos subanillos de matrices dependerá de la elección de las bases.

En lo que resta de esta sección, vamos a considerar ciertos pares duales donde podemos encontrar bases para las cuales los subanillos de matrices asociadas a los endomorfismos con adjunto tienen descripciones típicas; es decir, de las formas que hemos definido en las secciones anteriores. Para una exposición más amplia véase el libro de N. Jacobson [22].

Primero vamos a establecer en general una descripción de la imagen de $\mathrm{End}_R^F(E)$ por el isomorfismo definido en la correspondencia (1.8).

Proposición 1.4.8.

Sea R un anillo, α un cardinal infinito y (E,F) un par dual sobre R, con E libre de rango α. Sea g un endomorfismo de E con endomorfismo dual g^* de E^*. Sea B una base para E y $\psi : E \to R^{(\alpha)}$ el isomorfismo típico (tomar coordenadas) dado por B. Sea $\phi : \mathrm{End}_R(F) \to \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ el isomorfismo de anillos definido en (1.8),a partir de ψ. Entonces, g es un endomorfismo con adjunto si y sólo si $\phi(g)\left(\psi^{-1}\right)^*(F) \subset \left(\psi^{-1}\right)^*(F)$.

Demostración.

Es inmediata del hecho de que, para $f \in F$, $g^*(f) \in F$ si y sólo si $\phi(g)\left(\psi^{-1}\right)^*(f) \in \left(\psi^{-1}\right)^*(F)$

□

De lo anterior se desprende el siguiente resultado.

Corolario 1.4.9.

En la situación de la proposición anterior, haciendo $M = \left(\psi^{-1}\right)^*(F)$, el anillo de endomorfismos con adjunto verifica

$$\mathrm{End}_R^F(E) \cong \{a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R) \mid aM \subset M\}$$

bajo la restricción del isomorfismo $\phi : \mathrm{RFM}_\alpha(R) \to \mathrm{End}_R(F)$ definido en la Correspondencia (1.8)

Vamos ahora a describir algunos subanillos; en particular, aquellos que serán nuestros objetos de estudio. Usaremos la notación de los dos resultados anteriores.

1. Sea R un anillo, ${}_RE$ un módulo libre de rango α y sea (E,F) un par dual sobre R donde $F = E^*$, es decir, F es el dual completo. Trivialmente, $F = E^* \cong R^\alpha = M$ y $\mathrm{End}_R^F(E) \cong \mathrm{End}_R(E)$ así que

$$\mathrm{End}_R^F(E) \cong \{a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R) \mid aR^\alpha \subset R^\alpha\} = \mathrm{RFM}_\alpha(R).$$

2. Sea (E, F) un par dual sobre R, donde E es libre con base $B = \{b_i\}_{i\in\alpha}$. Sea $B^* = \{b_i^* \mid b_i^*(b_j) = \delta_{ij}\}$ y $F = \langle B^* \rangle$. En este caso, claramente $F \cong R_R^{(\alpha)}$; y de hecho $M = R_R^{(\alpha)} \subset R_R^\alpha$; luego

$$\mathrm{End}_R^F(E) \cong \left\{a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R) \mid aR_R^{(\alpha)} \subset R_R^{(\alpha)}\right\} = \mathrm{B}_\alpha(R).$$

Se afirma que este último anillo es $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

Es claro que $\mathrm{RCFM}_\alpha(R) \subseteq \mathrm{B}_\alpha(R)$. Para la contención recíproca, considérese cualquier $a \in \mathrm{B}_\alpha(R)$ y cualquier elemento de la base canónica de $R_R^{(\alpha)}$, digamos el i-ésimo, x_i. Entonces ax_i es la i-ésima columna de la matriz a, y como $ax_i \in R_R^{(\alpha)}$ entonces la i-ésima columna de a tiene soporte finito; es decir, un número finito de elementos no nulos. Por tanto $a \in \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

3. Consideremos (E, F) un (α, β) par dual sobre R, con base B. Nosotros no nos ocuparemos de este caso, pero vamos a describir el subanillo de matrices de los endomorfismos continuos para que el lector pueda saber hasta dónde se ha generalizado, pues este caso abarca a todos los anteriores.

De forma directa se puede comprobar que en este caso

$$M = \{x \in R_R^{(\alpha)} \mid |supp(x)| < \beta\}.$$

Es inmediato ver que $R_R^{(\alpha)} \subseteq M$. Considérese ahora una matriz $a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tal que $aM \subset M$.

En principio, es claro que, usando la base canónica de $R_R^{(\alpha)}$, cada columna de a tiene menos que β elementos no nulos; pero esto no es suficiente para describir al subanillo de matrices, como veremos un poco más adelante. Por lo pronto, considérese un elemento $x \in M$ cualquiera y sea $\gamma = |supp(x)|$. Entonces $supp(ax) = \cup_{i\in\gamma} supp(ax_i)$, donde x_i son los elementos de la base canónica de $R_R^{(\alpha)}$. Luego, el cardinal del soporte de una unión menor que β de soportes de a, ha de ser menor que β.

De lo anterior se desprende la siguiente descripción:

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_R^F(E) \cong \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(R) = \{&a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R) \mid \ \forall\ X \subset \alpha \text{ con } |X| < \beta \\ &\exists\ Y \subset \alpha \text{ con } |Y| < \beta \text{ y } e_Y a e_X = a e_X\}\end{aligned}$$

Por ejemplo, $\mathcal{E}_{\alpha,\omega}(R) = \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ y $\mathcal{E}_{\alpha,\alpha^+}(R) = \mathrm{RFM}_\alpha(R)$

Como comentamos anteriormente, el conjunto de las matrices tales que tienen cada columna con soporte de cardinalidad menor que β puede contener propiamente al anillo $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(R)$. De hecho, puede que ni siquiera dicho conjunto sea cerrado bajo producto (y en consecuencia no será anillo), como se muestra en el ejemplo a continuación.

Consideremos la sucesión de cardinales $\aleph_0 < \aleph_1 < ....$ Definimos $\aleph_\omega$ como el límite de los anteriores (véase [14], para una descripción detallada).

Ejemplo 1.4.10.

Sean $\alpha > \aleph_\omega = \beta$*, vistos como ordinales-cardinales. Definimos* $a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *tal que* $a(i,1) = 1$ *para* $1 \leq i \leq \aleph_1$*,* $a(i,2) = 1$ *para* $\aleph_1 < i \leq \aleph_2, \ldots,$ $a(i,j) = 1$ *para* $\aleph_{j-1} < i \leq \aleph_j$*, y* $b \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *tal que* $b(i,1) = 1$ *para todo* $1 \leq i < \aleph_\omega$*. Por la definición de la matriz básica* e_1*, tenemos que* $|supp(abe_1)| = \aleph_\omega$*; así que* $ab \notin \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(R)$*.*

Es importante hacer notar que en todos los ejemplos anteriores hemos construido el par dual a partir de una base dada para el módulo libre a la izquierda. Así, de inmediato surge la pregunta de cuándo, dado un par dual, podemos construir bases (y no partir de ellas) de tal manera que la descripción del módulo a la derecha y el subanillo de matrices sea "explícita". Sobre esto sabemos muy poco. En el caso más simple, o sea cuando el par dual está formado por el dual completo, la base elegida no interviene. Aparte de éste, sólo se conoce un caso más, y es cuando el par dual está formado por dos espacios vectoriales de dimensión numerable.

El argumento es largo y lo desarrollaremos en varios pasos. Comenzamos extendiendo la Definición 0.0.10.

Definición 1.4.11.

Sea R *un anillo y* ${}_R(E,F)$ *un par dual sobre* R*. Sea* x *un elemento de* E*. Llamaremos* ***anulador*** *de* x *en* F *al submódulo* $\mathrm{r}_F(x) = \{y \in F \mid \langle x,y\rangle = 0\}$*. Dado un conjunto* $X \subset E$*, llamaremos anulador de* X *en* F *al submódulo* $\mathrm{r}_F(X) = \{y \in F \mid \langle x,y\rangle = 0 \;\forall\; x \in X\}$*.*

De forma análoga se define el anulador sobre E de un elemento de F, al igual que sobre los subconjuntos de F. Nótese que $\mathrm{r}_F(X) = \cap_{x\in X}\mathrm{r}_F(x)$.

Aún cuando no es difícil probar el siguiente resultado, creemos interesante destacarlo pues lo usaremos repetidamente.

Lema 1.4.12.

Sea D *un anillo de división y* (E,F) *un par dual. Sea* $X = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *un conjunto generador para* E*. Dado un elemento* f *no nulo de* F*, existe el menor índice* $i_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\langle x_i, f\rangle = 0 \;\forall\; i < i_0$ *mientras que* $\langle x_{i_0}, f\rangle \neq 0$*.*

Demostración.

Inmediata.

□

Definición 1.4.13.

Sea R un anillo y (E,F) un par dual sobre R con $B=\{e_i\}_{i\in\alpha}$ una base de E y $B'=\{f_i\}_{i\in\alpha}$ una base de F. Diremos que B y B' son bases ***biortogonales*** *si $\langle e_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$ para cualquier par de índices $i,j\in\alpha$.*

Por ejemplo, en todo (α,ω)-par dual (E,F), donde se ha fijado una base B para construirlo, ocurre que $F=<B^*>$ y así se tienen bases biortogonales.

El siguiente resultado podemos consultarlo en [24]. Nótese que el siguiente par dual no parte de una base dada.

Proposición 1.4.14.

Sea D un anillo de división y (E,F) un par dual, donde E y F son espacios de dimensión numerable. Existen bases $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de F de tal manera que $\langle e_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$ para cualquier par de índices $i,j\in\mathbb{N}$.

Demostración.

Haremos inducción sobre los índices de la familia que queremos construir. Sabemos que existen conjuntos generadores $X=\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $Y=\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E y F respectivamente. Sea $f_1=y_1$. Por el Lema 1.4.12, existe μ_1 el menor índice para el cual $\langle x_{\mu_1},f_1\rangle\neq 0$. Como D es anillo de división entonces todo elemento no nulo tiene inverso y podemos considerar el elemento $e_1=\langle x_{\mu_1},f_1\rangle^{-1}x_{\mu_1}$. Claramente se tiene que $\langle e_1,f_1\rangle=1$. Supongamos que ya tenemos una familia $\{e_1,\ldots,e_k\}\subset E$ y $\{f_1,\ldots,f_k\}\subset F$ tal que $\langle e_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$ $\forall\ i,j\leq k$.

Ahora vamos a quitar todos los elementos que estando en los conjuntos generadores iniciales X e Y, ya se encuentran en el subespacio generado por los nuevos conjuntos que estamos definiendo. Pero tenemos que hacerlo de forma ordenada, pues será muy importante luego poder determinar dentro de qué subespacio se encuentra cada uno de los generadores iniciales. Para ello, tenemos que diferenciar dos posibles casos sobre la paridad del valor de k.

Si k es un número par, vamos a fijar el menor índice n_k, para el cual, el elemento $y_{n_k}\notin f_1D+\ldots+f_kD$ y consideraremos el elemento

$$f_{k+1}=y_{n_k}-\left(f_k\langle e_k,y_{n_k}\rangle+\ldots+f_1\langle e_1,y_{n_k}\rangle\right).$$

Para el índice n_k fijado anteriormente, y por el Lema 1.4.12, existe μ_{n_k} el menor índice que cumple $\langle x_{\mu_{n_k}},f_{k+1}\rangle\neq 0$. Entonces hacemos

$$e_{k+1}=\langle x_{\mu_{n_k}},f_{k+1}\rangle^{-1}\left(x_{\mu_{n_k}}-\langle x_{\mu_{n_k}},f_k\rangle e_k-\ldots-\langle x_{\mu_{n_k}},f_1\rangle e_1\right).$$

Si k es un número impar, fijemos entonces el menor índice n_k para el cual $x_{n_k} \notin De_1 + \cdots + De_k$ y consideremos el elemento

$$e_{k+1} = x_{n_k} - (\langle x_{n_k}, f_k\rangle e_k + \ldots + \langle x_{n_k}, f_1\rangle e_1),$$

Para este elemento e_{k+1} y por el Lema 1.4.12, existe el menor índice γ_{n_k} que cumple $\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle \neq 0$. Ahora hacemos

$$f_{k+1} = \left(y_{\gamma_{n_k}} - f_k\langle e_k, y_{\gamma_{n_k}}\rangle - \ldots - f_1\langle e_1, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\right) \langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1}.$$

Vamos a comprobar la ortogonalidad de los elementos e_{k+1} y f_{k+1} con respecto al resto de elementos e_i y f_i para cada índice i menor o igual a k. Primero veamos que ocurre si k es par:

$$\begin{aligned}\langle e_i, f_{k+1}\rangle &= \langle e_i, y_{n_k} - f_k\left(\langle e_k, y_{n_k}\rangle + \ldots + f_1\langle e_1, y_{n_k}\rangle\right)\rangle = \\ &= \langle e_i, y_{n_k}\rangle - \langle e_i, f_k\rangle\langle e_k, y_{n_k}\rangle - \ldots - \langle e_i, f_1\rangle\langle e_1, y_{n_k}\rangle = \\ &= \langle e_i, y_{n_k}\rangle - \langle e_i, y_{n_k}\rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_{k+1}, f_i\rangle &= \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}} - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_k\rangle e_k - \ldots - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_1\rangle e_1, f_i\rangle = \\ &= \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}}, f_i\rangle - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}}, f_k\rangle\langle e_k, f_i\rangle - \\ &- \ldots - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}}, f_1\rangle\langle e_1, f_i\rangle = \\ &= \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\left(\langle x_{\mu_{n_k}}, f_i\rangle - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_i\rangle\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_{k+1}, f_{k+1}\rangle &= \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}} - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_k\rangle e_k - \ldots - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_1\rangle e_1, f_{k+1}\rangle = \\ &= \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_{\mu_{n_k}}, f_k\rangle\langle e_k, f_{k+1}\rangle - \\ &= - \ldots - \langle x_{\mu_{n_k}}, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_\mu, f_1\rangle\langle e_1, f_{k+1}\rangle = \\ &= \langle x_\mu, f_{k+1}\rangle^{-1}\langle x_\mu, f_{k+1}\rangle = 1\end{aligned}$$

Ahora veamos que ocurre cuando k es impar:

$$\begin{aligned}\langle e_i, f_{k+1}\rangle &= \langle e_i, \left(y_{\gamma_{n_k}} - f_k\langle e_k, y_{\gamma_{n_k}}\rangle - \ldots - f_1\langle e_1, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\right)\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1}\rangle = \\ &= \langle e_i, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} - \langle e_i, f_k\rangle\langle e_k, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} - \\ &- \ldots - \langle e_i, f_1\rangle\langle e_1, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} = \\ &= \left(\langle e_i, y_{\gamma_{n_k}}\rangle - \langle e_i, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\right)\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_{k+1}, f_i\rangle &= \langle x_{n_k} - (\langle x_{n_k}, f_k\rangle e_k + \ldots + \langle x_{n_k}, f_1\rangle e_1), f_i\rangle = \\ &= \langle x_{n_k}, f_i\rangle - \langle x_{n_k}, f_k\rangle\langle e_k, f_i\rangle - \ldots - \langle x_{n_k}, f_1\rangle\langle e_1, f_i\rangle = \\ &= \langle x_{n_k}, f_i\rangle - \langle x_{n_k}, f_i\rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_{k+1}, f_{k+1}\rangle &= \langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}} - f_k\langle e_k, y_{\gamma_{n_k}}\rangle - \ldots - f_1\langle e_1, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} = \\ &= \langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} - \langle e_{k+1}, f_k\rangle\langle e_k, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} - \\ &= - \ldots - \langle e_{k+1}, f_1\rangle\langle e_1, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} = \\ &= \langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle\langle e_{k+1}, y_{\gamma_{n_k}}\rangle^{-1} = 1\end{aligned}$$

Vamos a ver que los dos conjuntos $A = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $B = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son bases de E y F respectivamente. Primero, para comprobar que es un conjunto generador, vamos a ver que todo elemento de X está en A. Consideremos un elemento $x_i \in X$. Por construcción el índice μ_i cumple que es el menor para el cual $x_{\mu_i} \notin De_1 + \cdots + De_i$ y se tiene que $i \leq n_{\mu_i} < n_{\mu_i+1}$, así que $x_i \in De_i + \ldots De_{i+1}$, demostrando así que A es un conjunto generador.

Ahora vamos a ver que A es linealmente independiente. Para ello, consideremos una combinación lineal igualada a 0,

$$0 = \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i e_i.$$

Fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$0 = \langle \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i e_i, f_k\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i\langle e_i, f_k\rangle = d_k,$$

por tanto para cualquier índice k se tiene que $d_k = 0$, demostrando finalmente que A es un conjunto linealmente independiente.

El mismo razonamiento nos permite comprobar que B es también una base.

□

Como consecuencias directas tenemos.

Definición 1.4.15.

Sean R y R' anillos. Sea ${}_R(E, F)$ un par dual sobre R y ${}_{R'}(E', F')$ un par dual sobre R'. Diremos que estos pares son ***pares duales equivalentes****, si existe un isomorfismo con adjunto o continuo entre ellos.*

Corolario 1.4.16.

Sea D un anillo de división, E un D-espacio vectorial numerablemente generado, y sean F_1 y F_2 subespacios de E^* tales que ambos son numerablemente generados. Entonces los pares duales (E, F_1) y (E, F_2) son equivalentes.

Corolario 1.4.17.

Sea D un anillo de división y (E, F) un par dual sobre D con E, F de dimensión numerable. Entonces los pares (E, F) y $\left(D^{(\mathbb{N})}, D^{(\mathbb{N})}\right)$ son equivalentes.

Así que un par dual (E, F) sobre un anillo de división D con E, F espacios de dimensión numerable, siempre se tiene que es un (ω, ω)-par dual y por tanto su anillo de endomorfismos es $\mathrm{RCFM}(D)$

Hasta donde nosotros sabemos, estos resultados sólo se han podido generalizar a ciertos pares duales sobre dominios de ideales principales. Vamos a enunciar sólo el resultado final, para no extendernos demasiado con cuestiones técnicas. Para una exposición clara y detallada, véase [14, Capítulo XI]. Aunque está hecha en los enteros, la versión original de S. Chase [12] considera dominios de ideales principales.

Sólo necesitamos recordar que si R es un dominio de ideales principales.

Definición 1.4.18.

Sea R un dominio de ideales principales. Decimos que un submódulo N de M es puro si $rN = rM \cap N$ para todo $r \in R$.

Más adelante, daremos la noción de ideal puro sobre un anillo general. El siguiente resultado es una adaptación de [14, Theorem XI.3.5]

Teorema 1.4.19.

Sea R un dominio de ideales principales y (E, F) un par dual sobre R donde E es un módulo libre de rango numerable. Entonces E es submódulo puro y denso en F^* si y sólo si el par dual tiene bases biortogonales.

En este caso, F es también puro y denso en E^* con la E-topología.

Aunque no es objeto de esta tesis y sólo hay que comprobar detalles, queremos hacer notar que más en general, se tiene que todo (α, ω)-par dual sobre un anillo R es equivalente al par $\left(R^{(\alpha)}, R^{(\alpha)}\right)$ junto con las bases canónicas tomadas como biortogonales, y todo (α, α^+)-par dual sobre un anillo R es equivalente al par $\left(R^{(\alpha)}, R^{\alpha}\right)$.

1.5. El radical de Jacobson

En esta sección, vamos a ver una caracterización del radical de Jacobson para los anillos $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y para $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$. Como siempre, si R es un anillo, $\mathrm{J}(R)$ será el radical de Jacobson de dicho anillo.

Definición 1.5.1.

*Sea R un anillo e $\{I_i\}_{i\in\alpha}$ una familia de ideales por la izquierda de R. Diremos que la **familia se desvanece** por la izquierda en R, si para cualquier subconjunto numerable de índices (distintos) $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para cualquier colección $\{a_{i_n}\in I_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_{i_1}\ldots a_{i_k}=0$.*

Definición 1.5.2.

*Sea R un anillo y A una matriz de $\mathrm{M}_\alpha(R)$. Diremos que la **matriz se desvanece** por la izquierda en R, si la familia $\{R^{(\alpha)}Ae_i\}_{i\in\alpha}$, vistos como ideales a la izquierda de R, se desvanece por la izquierda en $R^{(\alpha)}$. De forma análoga diremos que A se desvanece por la derecha en R, si la familia $\{e_iAR^{(\alpha)}\}_{i\in\alpha}$, vistos como ideales a la derecha de R, se desvanece por la derecha en $R^{(\alpha)}$. Diremos que una matriz se desvanece si desvanece por la izquierda y por la derecha.*

Vamos ahora a caracterizar el radical de Jacobson de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$. El siguiente resultado es original de Sexauer y Warnock [33], pero hemos reescrito la demostración, tomando el argumento dado en [39] para el caso más general de los anillos de endomorfismos de módulos proyectivos, y simplificando al caso de los módulos libres.

Teorema 1.5.3.

Sea R un anillo y α un cardinal infinito. El radical de Jacobson de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es el conjunto de matrices en $\mathrm{RFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ que se desvanecen por la izquierda en R.

Demostración.

Para simplificar la notación, llamaremos $E=\mathrm{RFM}_\alpha(R)$.

[$\subseteq$] Por la Proposición 0.0.19 se tiene la inclusión

$$\mathrm{J}(E)\subset\mathrm{RFM}_\alpha(\mathrm{J}(R)).$$

Ahora, sea $A=(a_{ij})\in\mathrm{J}(E)$ y X una familia numerable de índices de α. Para cada $k\in X$ tomamos $0\neq c_k\in R^{(\alpha)}Ae_k$ y formamos la colección eliminando el caso trivial. Para cada $k\in X$, existe al menos un elemento $p_k\in R^{(\alpha)}$ tal que $c_k=p_kAe_k$. Llamaremos p_{ki} al elemento que ocupa la posición i-ésima en el vector p_k. Así pues tenemos que

$$c_k=\sum_{j\in\alpha}p_{kj}a_{jk},$$

donde la suma anterior es finita. Podemos suponer, SPG, que $p_{kj}=0$ si $a_{jk}=0$. Llamemos B a la matriz, $B=(b_{ij})$ donde $b_{ij}=p_{ij}$ si $i\in X$

y cero en el resto. Entonces la diagonal del producto BA en los índices $k \in X$ es

$$BA\,(k,k) = \sum_{j\in\alpha} b_{kj}a_{jk} = \sum_{j\in\alpha} p_{kj}a_{jk} = c_k.$$

Claramente, podemos reordenar las columnas de A de tal manera que $X = \{1, 2, \dots\}$. También es inmediato ver que como A tiene filas finitas y $p_{kj} = 0$ si $a_{jk} = 0$, la matriz B es una matriz de filas y columnas finitas. (Este hecho es la llave para caracterizar el radical en filas y columna finitas.)

Vamos a construir una sucesión $n_1 < n_2 < \dots$ en X, tal que $e_{n_i}BAe_{n_j} = 0$ si $j > i$.

Hacemos $n_1 = 1$. Como $supp\,(e_{n_1}B)$ (el soporte de $e_{n_1}B$, visto como vector. Definición 0.0.1) es finito, existe $n_2 > n_1$; $n_2 \in X$, el primero tal que $e_{n_1}BAe_k = 0$ para todo $k \geq n_2$, $k \in X$. Elegimos, pues, n_2. Entonces $e_{n_1}BAe_{n_2} = 0$.

Supongamos ahora que hemos definido $n_1 < \dots < n_r$, con $e_{n_i}BAe_{n_j} = 0$, para todo $0 < i < j \leq r$. Entonces, existe $n_{r+1} \in X$, el primero tal que $n_r < n_{r+1}$ y $\left(\sum_{i=1}^{r} e_{n_i}\right) BAe_k = 0$ para todo $k \geq n_{r+1}$, lo cual implica que $e_{n_i}BAe_{n_{r+1}} = 0$ para $i = 1, \dots, r$, porque $e_{n_i} = e_{n_i}\sum_{i=1}^{r} e_{n_i}$

Consideremos las matrices $P = \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} e_{m\,n_m}\right) B$ y $F = \sum_{m\in\mathbb{N}} e_{n_m m}$ que sirven para juntar las filas de B y las columnas de A, seleccionadas, y el resto hacerlo 0.

Entonces es fácil ver que:

a) $e_mPAFe_m = c_{n_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

b) $e_iPAFe_j = 0$ para todo $i < j$.

Por tanto, $PAF \in \mathrm{J}\,(E)$ es una matriz triangular inferior con la diagonal formada por los elementos c_{n_k}.

Vamos a multiplicar esta matriz por elementos arbitrarios del anillo. Aunque ahora parece extraño luego veremos su utilidad. Consideremos $r_1, \dots, r_n, \dots$ elementos arbitrarios del anillo y D la matriz diagonal con $D\,(n,n) = r_n$. Entonces $PAFD$ es una matriz triangular inferior que cumple $PAFD\,(m,m) = c_{n_m}r_m$.

Ahora vamos desplazar las columnas de esta nueva matriz un lugar a la derecha. Sea $G = \sum_{m\in\mathbb{N}} e_{m\,m+1}$. Entonces

$$PAFDG = \begin{pmatrix} 0 & c_{n_1}r_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & . & c_{n_2}r_2 & 0 & \dots & \\ 0 & . & . & c_{n_3}r_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

Donde los puntos representan elementos del anillo cuyo valor no nos interesa. Consideremos la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -c_{n_1}r_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & -c_{n_2}r_2 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & -c_{n_3}r_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz $PAFDG + H$ es una matriz con el primer bloque numerable triangular inferior donde los elementos de la diagonal tienen inverso, y luego sólo diagonal con 1. Por tanto, $PAFDG + H$ tiene inverso. Sea U dicho inverso. Entonces $PAFDGU + HU = 1$ o lo que es lo mismo, $HU = 1 - PAFDGU$.

Como $\mathrm{J}(E)$ es un ideal bilátero, $PAFDGU \in \mathrm{J}(E)$ y por tanto $1 - PAFDGU$ tiene inversa. Así, HU tiene inversa por la derecha, y por tanto H tiene inversa por la derecha. Por ([2], ejercicio 28.1) se tiene que el inverso de B es de la forma :

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_{n_1}r_1 & c_{n_1}r_1c_{n_2}r_2 & \dots & \\ 0 & 1 & -c_{n_2}r_2 & c_{n_2}r_2c_{n_3}r_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Nótese que, para que la matriz anterior pueda pertenecer a E, tiene que tener por fila, una cantidad finita de elementos no nulos; es decir, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con $k_0 > k$ tal que

$$c_{n_k}r_k \dots c_{n_j}r_j = 0 \text{ para todo } j \geq k_0.$$

Tomando $k = 1$ tendremos que $c_{n_1}r_1 \dots c_{n_{k_0}}r_{k_0} = 0$. Y esto lo hemos demostrado para cualquier valor de los elementos r_n, en particular, tomando $r_k = 1$ si $c_{n_{k+1}} = c_{n_k+1}$ y $r_k = c_{n_k+1} \dots c_{n_{k+1}-1}$ en caso contrario. Tenemos así que existe un que índice k_0 tal que

$$c_1c_2 \dots c_{k_0} = 0.$$

y por tanto la matriz A se desvanece por la izquierda.

[$\supseteq$] Sea $a \in E$ tal que se desvanece por la izquierda y tiene entradas en $J(R)$. Nótese que entonces, para toda familia $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de matrices en E y todo subconjunto de índices $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{j=1}^{n} e_{i_j} r_j a e_{i_{j+1}} = 0$. De acuerdo con nuestra definición de radical de Jacobson (Definición 0.0.17), queremos probar que Ea es superfluo. Sea I un ideal tal que $Ea + I = E$. Denotamos $\overline{x} = x + I \in E/Q$.

Sea $r_1 \in E$ tal que $\overline{1} = \overline{r_1 a}$. Hacemos entonces

$$\overline{e_1} = \sum_{i_1 \in A_1} \overline{e_1 r_1 a e_{i_1}}$$

Advertimos al lector de tener cuidado con el abuso de escritura que haremos con los índices.

Ahora, para cada i_1 hacemos

$$\overline{e_{i_1}} = \sum_{i_2 \in A_2} \overline{e_{i_1} r_1 a e_{i_2}}.$$

Se afirma que podemos suponer SPG, sustituyendo r_1 por r_2, que en la suma anterior $i_1 \notin A_2$. Supongamos que sí. entonces

$$\overline{e_{i_1}} = \overline{e_{i_1} r_1 a e_{i_1}} + \sum_{i_1 \neq i_2 \in A_2} \overline{e_{i_1} r_1 a e_{i_2}}.$$

Ahora, $e_{i_1}(1 - r_1 a) e_{i_1}(i_1, i_1)$ es invertible, así que, multiplicando por la siguiente matriz diagonal d tal que $d(i_1 i_1) = (e_{i_1}(1 - r_1 a) e_{i_1}(i_1, i_1))^{-1}$ y $d(i,i) = 1$ para todo $i \neq i_1$ se tiene que, haciendo $r_2 = dr_1$

$$\overline{e_{i_1}} = \sum_{i_2 \in A_2} \overline{e_{i_1} r_2 a e_{i_2}}$$

con $i_1 \notin A_2$.

Así, por recurrencia, podemos expresar, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{e_1} = \sum_{A_1} \cdots \sum_{A_n} \overline{e_1 r_1 a e_{i_1}} \cdot \overline{e_{i_1} r_2 a e_{i_2}} \cdots \overline{e_{i_{n-1}} r_n a e_{i_n}}.$$

Finalmente (en [39] se menciona el teorema de la base de Konig), es fácil ver (por ejemplo, interpretando los sumandos como un árbol) que si la suma anterior no es cero entonces existe $\left\{e_{i_j} r_j a e_{i_{j+1}}\right\}$ tal que $\prod_{j=1}^{n} e_{i_j} r_j a e_{i_{j+1}} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, contradiciendo que a se desvanece por la izquierda. Luego $\overline{e_1} = 0$. Así procedemos con todos los $\overline{e_i}$, hasta obtener que $\overline{1} = \overline{0}$. Por tanto $I = E$.

□

Los siguientes corolarios aparecen también en [33]. Aquí cabe señalar que también ha habido aportaciones y soluciones parciales anteriores al trabajo de Sexauer y Warnock, que incluyen algunos de los resultados a continuación. Para un recuento de todos ellos puede consultarse [39].

Corolario 1.5.4.
Sea R un anillo y α un cardinal infinito.

$$\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha\left(R\right)\right) = \mathrm{RFM}_\alpha\left(\mathrm{J}\left(R\right)\right)$$

si y sólo si $\mathrm{J}(R)$ *es T-nilpotente por la izquierda.*

Corolario 1.5.5.
Sea R un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El ideal* $\mathrm{J}(R)$ *es nilpotente.*
2. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es T-nilpotente a la izquierda y a la derecha.*
3. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es nilpotente.*
4. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(\mathrm{RFM}_\alpha(R)))$ *es igual a* $\mathrm{RFM}_\alpha(\mathrm{RFM}_\alpha(\mathrm{J}(R)))$.

Pasemos ahora a caracterizar el radical de Jacobson para el anillo de filas y columnas finitas. Estos resultados pueden consultarse en [35].

Proposición 1.5.6.
Sea R un anillo. El radical de Jacobson de $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ *es el conjunto de las matrices en* $\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ *que se desvanecen en R.*

Demostración.
Para simplificar la notación llamaremos $B = \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$, $E = \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y $F = \mathrm{CFM}_\alpha(R)$.

Al igual que en el caso del anillo de matrices de filas finitas, se tiene la inclusión $\mathrm{J}(B) \subset \mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$.

[$\supseteq$] Supongamos que tenemos una matriz $\gamma \in B$ cuyas columnas forman una familia de ideales por la izquierda que se desvanecen por la izquierda y cuyas filas forman una familia de ideales por la derecha que se desvanecen por la derecha. Por el Teorema 1.5.3 dicha matriz pertenece a $\mathrm{J}(E)$ y a $\mathrm{J}(F)$. Entonces, para cualesquiera matrices $a, b \in B$, la matriz $1 - a\gamma b$ tiene inverso en E y en F, o sea, existen matrices $x \in E$ y $y \in F$ tal que

$$x(1 - a\gamma b) = (1 - a\gamma b)x = 1 = y(1 - a\gamma b) = (1 - a\gamma b)y.$$

Usando la Proposición 1.1.3, tenemos que $x = y$, lo cual, a su vez, implica que $x = y \in E \cap F = \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ y por tanto $\gamma \in \mathrm{J}(B)$.

[$\subseteq$] Para demostrar la otra inclusión, consideramos $A \in \mathrm{J}(B)$, y basta repetir el argumento de la Proposición 1.1.3 por la izquierda y la derecha. Esto es posible porque A es de filas y columnas finitas y la matriz "B" que se tiene en el argumento de la demostración de dicha proposición, es una matriz de filas y columnas finitas.

□

Obtenemos así la siguiente igualdad:

$$\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)) = \mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R)) \cap \mathrm{J}(\mathrm{CFM}_\alpha(R)).$$

Corolario 1.5.7.

Sea R un anillo, el ideal $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es igual a $\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ si y sólo si $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente a la izquierda y a la derecha.

El siguiente corolario es análogo al resultado obtenido en [33] sobre el radical de Jacobson del anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$.

Corolario 1.5.8.

Sea R un anillo y α un cardinal infinito, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El ideal $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente.*
2. *El ideal $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es T-nilpotente a la izquierda y a la derecha.*
3. *El ideal $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es nilpotente.*
4. *El ideal $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)))$ es igual a $\mathrm{RCFM}(\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R)))$.*

Demostración.

Para simplificar la notación llamaremos $E = \mathrm{RFM}_\alpha(R)$, $F = \mathrm{CFM}_\alpha(R)$ y $B = \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

[$1 \Rightarrow 2$] Si $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente, tanto $\mathrm{J}(E)$ como $\mathrm{J}(F)$ son T-nilpotentes; por tanto, la intersección, $\mathrm{J}(B)$, es T-nilpotente.

[$2 \Rightarrow 1$] Por la Proposición 0.0.19 se tiene que $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente. Supongamos que existe una sucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ y una familia $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{J}(R)$ tales que $a_i^{n_i} = 0$, pero $a_i^k \neq 0$ si $k < n_i$. Consideremos la matriz diagonal A tal que $A(i,i) = a_i$, si $i < \omega$ y 0 el resto. Es obvio que $A \in \mathrm{J}(B)$, pero $A^n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible.

[$1 \Rightarrow 3$] Si $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente, tanto $\mathrm{J}(E)$ como $\mathrm{J}(F)$ son nilpotentes, por tanto, la intersección $\mathrm{J}(B)$ es nilpotente.

[$3 \Rightarrow 1$] Sea $a \in \mathrm{J}(R)$ un elemento, la matriz $A = (a\delta_{ij})_{ij}$ es una matriz de $\mathrm{J}(B)$, que por hipótesis es nilpotente, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$, y por tanto si nos fijamos en la posición $(1,1)$ de la matriz anterior, tendremos que $a^n = 0$. Siendo n independiente del elemento a escogido. Así $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente.

[$1 \Leftrightarrow 4$] Este resultado es inmediato a partir del Corolario 1.5.7.

$\square$

Finalmente, cabe señalar que recientemente también se ha calculado el radical de Jacobson de las matrices $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(R)$ (véase [6]). En este caso, no comentaremos la demostración, porque nosotros no trabajaremos en este anillo de matrices. Sólo incluimos el enunciado para completar la información.

Teorema 1.5.9.

Sea R un anillo y α, β cardinales infinitos tales que $\omega < \beta$. Entonces

$$\mathrm{J}(\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(R)) = \mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R)) \cap \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(R)$$

Capítulo 2.

Propiedades de un anillo R y el anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$

2.1. Anillos semisimples

Comenzamos abordando el caso que intuitivamente debe de ser punto de partida; esto es, cuando el anillo base es semisimple artiniano. El primer resultado sobre este caso se encuentra en el trabajo de K. Wolfson [40], que data de 1953. En él, Wolfson prueba que si el anillo R es semisimple artiniano entonces, para cualquier cardinal α se tiene que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es un anillo regular von Neumann. En principio, este resultado se obtiene de forma "lateral"; es decir, que no es el objetivo principal del artículo, y para probarlo utiliza herramienta "de sobra". El recíproco de este resultado fue probado casi 20 años después independientemente en [32, 38], utilizando ya técnicas categóricas. Nosotros vamos a hacer un argumento de demostración, procurando que sea lo más corto y claro posible, y deje de manifiesto cómo se pueden emplear técnicas categóricas en la relación de propiedades entre un anillo y sus anillos de matrices cuando se trata del anillo completo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$.

Teorema 2.1.1.
Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *R es semisimple artiniano.*

2. $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es un anillo regular von Neumann, para todo cardinal infinito α.*

3. $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es un anillo regular von Neumann, para algún cardinal infinito α.*

Demostración.

[1 ⇒ 2] Comenzamos suponiendo entonces que R es semisimple artiniano. Consideremos un cardinal infinito α. Tenemos que ver que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es regular von Neumann. Para ello, consideremos cualquier elemento $a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$. Claramente, se tiene que $R^{(\alpha)} \cdot a$ es sumando directo de $R^{(\alpha)}$. Ahora, usando el hecho de que $R^{(\alpha)}$ es proyectivo, es inmediato ver que

$$\mathrm{Hom}_R\left(R^{(\alpha)}, R^{(\alpha)}a\right) = \mathrm{Hom}_R\left(R^{(\alpha)}, R^{(\alpha)}\right) a \cong \mathrm{RFM}_\alpha(R)\, a$$

Ahora consideramos la sucesión exacta escindida

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(a) \leftrightarrows R^{(\alpha)} \leftrightarrows R^{(\alpha)}a \to 0$$

Sabemos que, entonces el funtor $\mathrm{Hom}\left(R^{(\alpha)}, -\right)$ nos da una sucesión exacta escindida

$$0 \to \mathrm{Hom}_R\left(R^{(\alpha)}, Ker(a)\right) \leftrightarrows \mathrm{Hom}_R\left(R^{(\alpha)}, R^{(\alpha)}\right) \leftrightarrows$$
$$\mathrm{Hom}_R\left(R^{(\alpha)}, R^{(\alpha)}a\right) \to 0$$

Con lo cual, usando el isomorfismo anterior, se tiene el resultado.

[2 ⇒ 3] Es un caso particular.

[3 ⇒ 1] Ahora suponemos que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es regular von Neumann. Primero, por la Proposición 0.0.27 tenemos que R es, a su vez, un anillo regular von Neumann, y de hecho, basta probar el resultado para $\alpha = \omega$. Vamos a probar a continuación, que, además, R es noetheriano.

Considérese un ideal de R, numerablemente generado, digamos I. Sea $I = \langle x_1, \ldots \rangle$. Ahora construimos la matriz $a \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tal que tiene en la primera columna los generadores; es decir, $a(i,1) = x_i$, para $i < \omega$ y cero el resto. Como $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es regular von Neumann, existe $b \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tal que $a = aba$. Ahora bien, consideremos la primera fila de b. Sabemos que existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $b(1, n+k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Nótese entonces que la matriz ab es de la forma

$$ab = \begin{pmatrix} x_1 b(1,1) & \ldots & x_1 b(1,n) & 0\ldots \\ x_2 b(1,1) & \ldots & x_2 b(1,n) & 0\ldots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

así que

$$aba = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_1 b(1,j)x_j & 0\dots \\ \sum_{j=1}^{n} x_2 b(1,j)x_j & 0\dots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

y como $a = aba$, tenemos que $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Por tanto I es finitamente generado. Luego R es noetheriano. Así que R es noetheriano y regular de von Neumann; luego, por la Proposición 0.0.28, se tiene que R es semisimple artiniano.

□

En lo que sigue, vamos a dar nuestra aportación al estudio del problema de relacionar propiedades de un anillo R y $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$. Para ello, necesitamos un resultado previo.

Recordemos que $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ es el ideal de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ formado por las matrices que tienen sólo una cantidad finita de columnas no nulas, es decir, para todo $a \in \mathrm{FC}_\alpha(R)$, existe $X \subset \alpha$ finito, tal que $a = ae_X$.

Definición 2.1.2.

*Sea R un anillo y sea I un ideal por la izquierda de R. Diremos que I es un ideal **puro** por la derecha en R, si para todo $x \in I$, se tiene que $x \in Ix$.*

La definición anterior coincide con la de submódulo puro en el contexto de los dominios de ideales principales. Los ideales puros, en el contexto de anillos sin uno, se conocen como anillos sin uno, s-unitarios.

El siguiente resultado aparece en 1988 en [17]. Hemos decidido reproducir la demostración para comodidad del lector.

Teorema 2.1.3.

Sea R un anillo. Son equivalentes

1. *R es noetheriano por la izquierda.*
2. *$\mathrm{FC}_\alpha(R)$ es un ideal puro por la derecha de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, para todo cardinal infinito α.*
3. *$\mathrm{FC}_\alpha(R)$ es un ideal puro por la derecha de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$, para algún cardinal infinito α.*

Demostración.

[1 ⇒ 2] Sea α un cardinal infinito. Denotemos con $E_0 = \mathrm{FC}_\alpha(R)$. Sea $x \in E_0$. Por definición, existe un número natural m tal que $x(i,k) = 0$ para todo $k \geq m$. Para cada $i \in \alpha$ sea $x_i = (x(i,1), \dots x(i,m)) \in R^m$. Como R es noetheriano, R^m también lo es, luego el submódulo generado por $\{x_i\}_{i\in\alpha}$, sea M, deberá de ser finitamente generado, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_1, \dots, x_n\}$ genera a M. Sea $\{r_{ij}\}_{i\in\alpha,\, j\in\{1,\dots,n\}}$ los coeficientes de expresar cada x_i como combinación lineal de los $x_1, \dots, x_n$. Definimos la matriz $r \in E_0$ tal que

$$r(i,j) = \begin{cases} r_{ij} & \text{si } i \in \alpha \text{ y } 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}.$$

Es claro que $rx = x$. Luego E_0 es ideal puro por la derecha de E.

[2 ⇒ 3] Es caso particular.

[3 ⇒ 1] Denotemos con $E_0 = \mathrm{FC}_\alpha(R)$. Sea I un ideal a lo más α generado de R y sea $\{x_j\}_{j\in\alpha}$ un conjunto generador para I. Considérese la matriz $x \in E_0$ tal que $x(1,j) = x_j$ y $x(i,j) = 0$ si $i \neq 1$. Como $x \in E_0$ y E_0 es puro por la derecha de E entonces existe $r \in E_0$ tal que $rx = x$. Como $r \in E_0$, existe un número natural n, tal que $r(i,k) = 0$ si $k \geq n$. Luego $x_1, \dots, x_n$ es generador para I, así que R es noetheriano por la izquierda.

□

2.2. Propiedades más generales

Ahora pasamos a nuestras aportaciones. En [40] se demuestra que un anillo R es perfecto a la izquierda si y sólo si el anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es semirregular. La condición de semirregularidad implica por definición el levantamiento de idempotentes, que, tendríamos entonces que verificar cada vez. Sobre este resultado, hemos logrado eliminar la condición del levantamiento de idempotentes.

Proposición 2.2.1.
Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Si $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann entonces $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente por la izquierda.

Demostración.
Consideremos $r_1, r_2, \dots$ una sucesión en $\mathrm{J}(R)$. Vamos a comprobar que existe un natural n tal que $r_1 \dots r_n = 0$. Definimos la matriz diagonal a:

$$a = \sum_{k \in \mathbb{N}} r_k e_k$$

Como $\mathrm{RFM}_\alpha(R) / \mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann, entonces existe una matriz $b \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tal que $a - aba \in \mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$.

Vamos a describir los elementos de esta matriz. Como a es una matriz diagonal, el producto aba es fácil de calcular, y de forma directa podemos comprobar que

$$aba = \begin{cases} r_i b(i,j) r_j & \text{si } i, j < \omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, la matriz $a - aba$ ha de ser de la forma

$$a - aba = \begin{cases} -r_i b(i,j) r_j & \text{si } i \neq j < \omega \\ r_i - r_i b(i,i) r_i & \text{si } i = j < \omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora bien, como cada r_i es elemento del radical, $\mathrm{J}(R)$, entonces dado cualquier elemento de la diagonal de b, digamos $b(i,i) \in R$, el producto $r_i b(i,i)$ también es elemento del radical de R, y en consecuencia se tiene que $1 - r_i b(i,i)$ es invertible; es decir, existe un elemento $x_i \in R$ tal que $x_i(1 - r_i b(i,i)) = 1$. Multiplicando a la derecha por r_i se tiene que $x_i(r_i - r_i b(i,i) r_i) = r_i$.

Consideremos ahora la matriz diagonal $x = \sum_{i<\omega} x_i e_i$. Sabemos que $a - aba \in \mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ y por lo tanto se tiene que $x(a - aba)$ también es elemento del radical de Jacobson de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$. Por el Teorema 1.5.3 ocurre entonces que la matriz $x(a - aba)$ se desvanece por la izquierda. Vamos a aplicar esta propiedad sobre la diagonal de dicha matriz.

Primero calculamos la diagonal. Tomando en cuenta que x es una matriz diagonal con los primeros menores que ω elementos no cero,

$$x(a - aba)(i,i) = x_i(r_i - r_i b(i,j) r_i)$$

Como $x_i(r_i - r_i b(i,i) r_i) = r_i$ entonces se tiene que $\{r_1, r_2, \dots\}$ son los elementos de la diagonal de $x(a - aba)$. Usando ahora el hecho de que la matriz $x(a - aba)$ se desvanece por la izquierda, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 \cdots r_n = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente por la izquierda.

□

Corolario 2.2.2.

Sea R un anillo. El anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es semiregular si y sólo si el anillo cociente* $\mathrm{RFM}_\alpha(R) / \mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es regular von Neumann.*

Demostración.

La condición de necesaria es consecuencia directa de la definición de anillo semiregular. Para la suficiencia, supongamos que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann. Por la proposición anterior, tenemos que el radical de Jacobson de R es T-nilpotente a la izquierda. Por el Corolario 1.5.4, lo anterior implica que el ideal $\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R)) = \mathrm{RFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ y en consecuencia se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R)) \cong \mathrm{RFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R)).$$

Por tanto $\mathrm{RFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ es regular von Neumann y por el Teorema 2.1.1, $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple artiniano. Esto, junto con el hecho de que $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente a la izquierda, implica que R es perfecto por la izquierda. Finalmente, por ([27], Teorema 3.9) $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es semiregular.

$\square$

Teorema 2.2.3.

Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El anillo R es perfecto por la izquierda.*
2. *El anillo* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es regular von Neumann para todo cardinal infinito α.*
3. *El anillo* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es regular von Neumann para algún cardinal infinito α.*

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Si R es un anillo perfecto por la izquierda entonces $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente por la izquierda y $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple artiniano. Por ser $\mathrm{J}(R)$ T-nilpotente por la izquierda tenemos que

$$\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R)) \cong \mathrm{RFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$$

Que es regular von Neumann por ser $R/\mathrm{J}(R)$ semisimple artiniano.

[$2 \Rightarrow 3$] Es un caso particular.

[$3 \Rightarrow 1$] Supongamos que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann para algún cardinal infinito α. Por la Proposición 2.2.1 $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente a la izquierda. Por el Corolario 1.5.4 se tiene que los anillos $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ y $\mathrm{RFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ son isomorfos.

Luego $\mathrm{RFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ es regular von Neumann. Por el Teorema 2.1.1, el anillo $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple. Esto, junto con el hecho de que $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente por la izquierda nos permite concluir que R es perfecto por la izquierda.

$\square$

Teorema 2.2.4.

Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El anillo R es artiniano por la izquierda.*
2. *El anillo* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es regular von Neumann y* $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ *es un ideal puro de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *para todo cardinal infinito α.*
3. *El anillo* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ *es regular von Neumann y* $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ *es un ideal puro de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *para algún cardinal infinito α.*

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Supongamos que R es artiniano por la izquierda. Entonces, por el Teorema 2.2.3, $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann, para cualquier cardinal infinito α, y por el Teorema 2.1.3, $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ es un ideal puro de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ para todo cardinal infinito α.

[$2 \Rightarrow 3$] Es un caso particular.

[$3 \Rightarrow 1$] Por el Teorema 2.1.3, $\mathrm{FC}_\alpha(R)$ es puro en $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ si y sólo R es un anillo noetheriano. Por el Teorema 2.2.3, $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann si y sólo si R es perfecto. Como R es noetheriano y perfecto por la izquierda, la Proposición 0.0.32 nos dice que R es artiniano por la izquierda.

$\square$

Vamos a ver otra caracterización más de los anillos artinianos en términos del anillo de matrices $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$

Proposición 2.2.5.

Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El ideal por la derecha I de R, es finitamente generado.*
2. *El ideal por la derecha* $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$ *de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es cíclico.*

3. *El ideal por la derecha* $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$ *de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es finitamente generado.*

Demostración.

[1 ⇒ 2] Sea pues, I un ideal a la derecha de R, tal que es finitamente generado. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto generador para I.

Hacemos $X = (x_1 \ldots x_n)$ un bloque para una matriz y definimos la matriz a como

$$a = \begin{pmatrix} X & 0 & \ldots & & \\ 0 & X & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \ldots & \\ & & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Nótese que a no necesariamente es una matriz diagonal.

Vamos a probar que la matriz a es un generador para el ideal $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$. Consideremos cualquier elemento $b \in \mathrm{RFM}_\alpha(I)$. Como cada entrada de la matriz b es un elemento del ideal a la derecha I, entonces podemos expresar

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} y_{ij}^{(k)} x_k$$

con $y_{ij}^{(k)} \in R$.

Ahora formamos los bloques de matriz columna

$$Y_{ij} = \begin{pmatrix} y_{ij}^{(1)} \\ \vdots \\ y_{ij}^{(n)} \end{pmatrix}$$

y definimos la matriz en bloques

$$c = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots \\ \ldots & & \end{pmatrix}$$

Entonces es claro que $ac = b$. Por lo tanto, $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$ es un ideal cíclico a la derecha.

[2 ⇔ 3] Inmediato del hecho de que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tiene número de base simple (véase la Definición 0.0.3).

[2 ⇒ 1] Supongamos pues que $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$ es ideal a la derecha cíclico y sea $a \in \mathrm{RFM}_\alpha(I)$ un generador. Como a tiene filas finitas, existe un número natural, digamos $n \in \mathbb{N}$, tal que $a(1, n+k) = 0$; para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se afirma que el conjunto $\{a(1,1), \dots, a(1,n)\}$ es un generador para el ideal por la derecha, I, de R. Sea $r \in I$, un elemento arbitrario. Consideremos la matriz

$$b = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \end{pmatrix}.$$

Como $b \in \mathrm{RFM}_\alpha(I)$ entonces, por hipótesis, existe $c \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ de tal manera que $ac = b$. De aquí se tiene que $\sum_{j=1}^{n} a(1,j)c(j,1) = r$ y por tanto I es finitamente generado.

□

La primera aplicación del resultado anterior es para los anillos noetherianos.

Corolario 2.2.6.
Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *R es un anillo noetheriano por la derecha.*
2. *Para todo ideal por la derecha I, de R, el ideal por la derecha $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$ de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es cíclico.*
3. *Para todo ideal por la derecha I, de R, el ideal por la derecha $\mathrm{RFM}_\alpha(I)$ de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es finitamente generado.*

Demostración.

[1 ⇔ 2] Inmediato del hecho de que todo ideal por la derecha de R es finitamente generado, junto con la proposición anterior.

[2 ⇔ 3] Inmediato del hecho de que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tiene número de base simple.

□

La siguiente aplicación de la proposición anterior es menos obvia. Vamos a relacionar la propiedad de un anillo R de ser artiniano por la derecha. Para ello, usaremos el hecho de que el radical es finitamente generado.

El resultado a continuación aparece como ejercicio en todos los textos que conocemos, pero en ellos (véase por ejemplo [2, Ex. 28.9]), las sugerencias que aparecen para resolverlo no nos resultan claras, así que vamos a probarlo.

Lema 2.2.7.

Sea R perfecto por la izquierda y J su radical de Jacobson. Si J es finitamente generado por la derecha entonces R es artiniano por la derecha.

Demostración.

Sea $a_1, \ldots, a_n$ un conjunto generador para J. Como J es bilátero entonces $J^2 = \left(\sum a_i R\right) J = \sum a_i J = \sum a_i a_j R$, y así sucesivamente se tiene que J^n es finitamente generado. Por el Teorema de Björk 0.0.34 la cadena $J \supseteq J^2 \supseteq \ldots$ se estaciona.

Supongamos que $J^n = J^{n+1} = J \cdot J^n$. Por el Lema de Nakayama [2, Corollary 15.13] se tiene que $J^n = 0$.

Consideremos la serie $R > J > J^2 > \ldots > J^n = 0$. Cada factor J^i/J^{i+1} es entonces finitamente generado a la derecha y semisimple, y por tanto la serie anterior se puede refinar a una serie de composición, ya que los módulos R/J-simples son R-simples. Por lo tanto R es artiniano a la derecha.

$\square$

Teorema 2.2.8.

Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *R es artiniano por la derecha.*

2. *El radical de Jacobson,* $\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$*, visto como ideal por la derecha de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es cíclico y* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$ *es un anillo regular von Neumann para todo cardinal infinito α.*

3. *El radical de Jacobson,* $\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$*, visto como ideal por la derecha de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es cíclico y* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$ *es un anillo regular von Neumann para algún cardinal infinito α.*

4. *El radical de Jacobson,* $\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$*, visto como ideal por la derecha de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es finitamente generado y* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$ *es un anillo regular von Neumann para todo cardinal infinito α.*

5. *El radical de Jacobson,* $\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$*, visto como ideal por la derecha de* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ *es finitamente generado y* $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right)$ *es un anillo regular von Neumann para algún cardinal infinito α.*

En este caso, se verifica que $\mathrm{J}\left(\mathrm{RFM}_\alpha(R)\right) = \mathrm{RFM}_\alpha\left(\mathrm{J}(R)\right)$.

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Como R es artiniano por la derecha entonces $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente y $R/\mathrm{J}(R)$ es anillo semisimple artiniano. Además, por el teorema de Hopkins (véase Teorema 0.0.30) R es noetheriano por la derecha.

Como R es noetheriano por la derecha entonces la Proposición 2.2.6 nos dice que el radical de Jacobson, $\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$, visto como ideal por la derecha de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es cíclico. Como $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente y $R/\mathrm{J}(R)$ es anillo semisimple artiniano entonces R es perfecto por los dos lados; en particular, es perfecto por la izquierda. Luego, por el Teorema 2.2.3, se tiene que el anillo $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es regular von Neumann para todo cardinal infinito α.

[$2 \Rightarrow 3$] Es un caso particular.

[$4 \Rightarrow 5$] Es un caso particular.

[$2 \Leftrightarrow 4$] Inmediato del hecho de que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tiene número de base simple.

[$3 \Leftrightarrow 5$] Inmediato del hecho de que $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ tiene número de base simple.

[$5 \Rightarrow 1$] Sea α un cardinal infinito. Como el radical de Jacobson, $\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$, visto como ideal por la derecha de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ es finitamente generado entonces, por la Proposición 2.2.5, $\mathrm{J}(R)$ es un ideal finitamente generado por la derecha. Como $\mathrm{RFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RFM}_\alpha(R))$ es un anillo regular von Neumann, el Teorema 2.2.3 nos dice que R es perfecto por la izquierda. Finalmente por el Lema 2.2.7 R es artiniano por la derecha.

$\square$

Capítulo 3.

Propiedades de un anillo R y el anillo $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$

3.1. Anillos semisimples

Los resultados de esta sección constituyen la parte principal de esta tesis. Comenzaremos con los anillos artinianos semisimples. Toda esta sección estará dedicada a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1.
Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *R es un anillo artiniano semisimple.*

2. *Para todo cardinal infinito α, $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ es un anillo de Baer.*

3. *Existe un cardinal infinito α tal que $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ es un anillo de Baer.*

Una parte de la demostración de este teorema ($[2 \Rightarrow 1]$ y $[2 \Leftrightarrow 3]$) es la aportación central de nuestro trabajo. La implicación $[1 \Rightarrow 2]$, se realizó entre 1945 y 1959. Hemos creído conveniente reproducir la demostración completa del teorema, para unificar el lenguaje en un resultado completo y por su importancia en esta tesis.

La demostración es demasiado extensa, así que iremos desarrollándola con resultados parciales. Vamos a comenzar considerando un anillo R que sea semisimple. Sabemos que R es Morita equivalente a un producto finito de anillos de división y también sabemos por [21] que dos anillos son Morita equivalentes, si y sólo si, sus anillos de matrices de filas y columnas finitas son isomorfos. Luego, para demostrar $[1 \Rightarrow 2]$, basta probar que para cualquier anillo de división, D, el anillo de las matrices $\mathrm{RCFM}_\alpha(D)$ es un anillo de Baer.

Usaremos las bases establecidas en el Capítulo 1 que relacionan los pares duales y sus endomorfismos con adjunto y el anillo de matrices de filas y columnas finitas.

Recordemos (Definición 1.4.11) que, dado un par dual (E, F) y un subconjunto $X \subset E$ hemos definido el anulador de X en F, que denotamos por $\mathrm{r}_F(X)$. Análogamente, para un conjunto $Y \subset F$ hemos definido el anulador de Y en E, que denotamos por $\mathrm{l}_E(Y)$. Entonces podemos considerar el doble anulador. De ahí la siguiente definición.

Definición 3.1.2.

Sea R un anillo, (E, F) un par dual sobre R y M un submódulo de E (respectivamente de F). Diremos que M es ***cerrado*** *si es igual a su doble anulador; es decir, $M = \mathrm{l}_E(\mathrm{r}_F(M))$ (respectivamente $M = \mathrm{r}_F(\mathrm{l}_E(M))$).*

Las descomposiciones en sumandos directos cerrados están relacionadas con idempotentes de filas y columnas finitas.

Definición 3.1.3.

Sea R un anillo y (E, F) un par dual sobre R. Diremos que el par dual es ***escindible*** *si para todo submódulo cerrado M de E, existe un complemento cerrado N de E tal que $E = M \oplus N$ y $F = \mathrm{r}_F(M) \oplus \mathrm{r}_F(N)$.*

En el Ejemplo 1.4.2(1) vimos que en general para cualquier anillo y en particular para un anillo de división, D, si un par dual es de la forma (simplificando la notación) $\left({}_D D^{(\alpha)}, D_D^{(\alpha)}\right)$ junto con la forma bilineal dada por las bases canónicas, su anillo de endomorfismos con adjunto verifica $End_D^{D^{(\alpha)}}\left(D^{(\alpha)}\right) \cong \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

Luego, estos pares duales son los que nos interesan. Como nuestro objetivo no es el estudio de los pares duales genéricos sino los anillos de matrices, nos vamos a centrar sólo en pares duales expresados de la forma anterior. Esto nos va a permitir simplificar bastante las demostraciones y la exposición (¡sólo quedará en 8 páginas la demostración de [1 ⇒ 2]!). Vamos entonces a ponerles nombre propio y fijar la notación.

Notación 3.1.4.

Sea R un anillo, y consideremos los R-módulos libres ${}_R R^{(\alpha)}$ y $R_R^{(\alpha)}$, junto con las bases canónicas $B = \{x_i\}_{i\in\alpha}$ y $B^* = \{x_i^*\}_{i\in\alpha}$. Consideremos el par dual dado por la pareja $\left({}_R R^{(\alpha)}, R_R^{(\alpha)}\right)$, junto con la forma bilineal del producto de vectores; es decir, para $v \in_R R^{(\alpha)}$ y $w \in R_R^{(\alpha)}$, con $v = \sum_{i\in\alpha} r_i x_i$ y $w = \sum_{i\in\alpha} x_i^* s_i$, $\langle v, w\rangle = \sum_{i\in\alpha} r_i s_i$.

Siempre nos referiremos a este par dual simplemente como ***el par dual*** $\left({}_RR^{(\alpha)}, R_R^{(\alpha)}\right)$.

El siguiente teorema nos muestra por qué debemos estudiar los pares duales escindibles.

Teorema 3.1.5.
Sea R un anillo y α un cardinal infinito. El par dual $\left({}_RR^{(\alpha)}, R_R^{(\alpha)}\right)$ es escindible si y sólo si el anillo $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ es anillo de Baer.

Demostración.
Para simplificar la notación hacemos $B = \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

[$\Rightarrow$] Sea X un conjunto arbitrario de B, consideremos el submódulo cerrado $M = R^{(\alpha)} \otimes \mathrm{l}_B(\mathrm{r}_B(X)) = \mathrm{l}_{R^{(\alpha)}}(\mathrm{r}_B(X))$, donde $\mathrm{l}_{R^{(\alpha)}}(Y)$ es el anulador en el sentido habitual. Como M es cerrado en el par dual, y éste es escindible, existe un submódulo $K \subset R^{(\alpha)}$ tal que ${}_RR^{(\alpha)} = M \oplus K$ y $R_R^{(\alpha)} = \mathrm{r}_{R^{(\alpha)}}(M) \oplus \mathrm{r}_{R^{(\alpha)}}(K)$.

Identificamos a los idempotentes de las descomposiciones con sus matrices asociadas, $f \in \mathrm{RFM}_\alpha(R)$ y $g \in \mathrm{CFM}_\alpha(R)$. Hacemos $R^{(\alpha)}f = M$ y $gR^{(\alpha)} = \mathrm{r}(M)$. Entonces $fg = 0$. Como $R^{(\alpha)}(1-f) = K$ y $(1-g)R^{(\alpha)} = \mathrm{r}_{R^{(\alpha)}}(K)$ entonces $(1-f)(1-g) = 0$. Recordemos que el producto de un elemento de $\mathrm{RFM}_\alpha(R)$ por uno de $\mathrm{CFM}_\alpha(R)$ siempre puede ejecutarse y es asociativo. Como $fg = 0$ entonces $(1-f)g = g$. Como $(1-f)(1-g) = 0$ entonces $(1-f)g = (1-f)$. Luego $g = 1-f$ y por tanto $f \in \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

[$\Leftarrow$] Para demostrar el recíproco, sea M un submódulo cerrado de ${}_RR^{(\alpha)}$. Visto M como subconjunto de B, tenemos que, al ser B anillo de Baer, $\mathrm{l}_B(\mathrm{r}_B(M)) = Bg$ para g un idempotente. Luego $\mathrm{r}_B(M) = (1-g)B$. Es fácil comprobar que $M = R^{(\alpha)}g$ y que si llamamos $N = R^{(\alpha)}(1-g)$ tendremos que ${}_RR^{(\alpha)} = M \oplus N$ y $R_R^{(\alpha)} = \mathrm{r}_{R^{(\alpha)}}(M) \oplus \mathrm{r}_{R^{(\alpha)}}(N)$.

$\square$

Ahora vamos a probar que los pares duales de la forma $\left({}_DD^{(\alpha)}, D_D^{(\alpha)}\right)$, con D, anillo de división, son todos escindibles. Los argumentos originales para (α, β)-pares duales de Mackey y Ornstein podemos consultarlos en [24, 28]. Estos resultados, así como las técnicas utilizadas en las demostraciones, dependen de la cardinalidad de α y β. En nuestro caso, sólo tenemos que considerar $\beta = \omega$, lo que simplifica un poco nuestro trabajo. En [24], G. W. Mackey probó el caso en que $\alpha = \beta = \omega$. Después, D. Ornstein extendió estos resultados a otros cardinales, pero curiosamente su argumento no sustituye a éste, porque lo considera como caso aparte. De hecho, Ornstein probó que el que un (α, β)-par dual sea escindible o no, depende del cardinal β. Vamos a reescribir la demostración del teorema de Mackey.

Nótese que en el caso de la dimensión numerable no tenemos que acudir a ninguna notación especial porque ya sabemos que siempre hay bases biortogonales (véase la Proposición 1.4.14).

Teorema 3.1.6.
Sea D un anillo de división, y (E, F) un par dual sobre D, con E y F espacios de dimensión numerable. Entonces el par dual es escindible.

Demostración.
Sea $M \leq E$ un subespacio cerrado por la izquierda. El anulador, $\mathrm{r}_F\,(M)$ es un subespacio cerrado de F. Para ambos subespacios, existen los complementos directos, $N \leq E$ y $K \leq F$, tales que $E = M \oplus N$ y $F = \mathrm{r}_F\,(M) \oplus K$.

Las distintas restricciones de la forma bilineal nos permiten considerar los pares duales (M, K) y $(N, \mathrm{r}_F\,(M))$. Aplicando la Proposición 1.4.14, existen bases $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$, $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset K$, $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset N$ y $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{r}_F\,(M)$ tal que $\langle m_i, k_j\rangle = \langle n_i, r_j\rangle = \delta_{ij}\ \forall\, i, j \in \mathbb{N}$. Es decir, se tienen bases biortogonales.

Ahora vamos a construir los complementos adecuados. Este argumento está tomado de [25]. Consideremos los elementos

$$x_i = n_i - \langle n_i, k_1\rangle m_1 - \ldots - \langle n_i, k_{i-1}\rangle m_{i-1}$$
$$y_i = k_i - r_1\langle n_1, k_i\rangle - \ldots - r_{i-1}\langle n_{i-1}, k_i\rangle$$

Donde $m_0 = k_0 = r_0 = n_0 = 0$.

Llamaremos X al subespacio generado por $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y llamaremos Y al subespacio generado por $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Primero vamos a comprobar que son complementos directos.

Como cada n_i es una combinación lineal de elementos de X y de M, y éstos son base de N, tendremos que $N = M + X$ y por tanto que $E = M + X$.

Falta ver que la suma es directa. Tomemos un elemento e de la intersección de M y X. Entonces, por pertenecer a M existe una combinación lineal tal que $e = \sum_{i=1}^{\gamma_1} \alpha_i m_i$ donde $\alpha_i \in D$, para $i = 1, \ldots, \gamma_1$, mientras que por pertenecer a X tendremos que $e = \sum_{i=1}^{\gamma_2} \beta_i x_i$ donde $\beta_i \in D$, para $i = 1, \ldots, \gamma_2$. Igualando ambas expresiones tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{\gamma_1} \alpha_i m_i = \sum_{i=1}^{\gamma_2} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{\gamma_2} \beta_i \left(n_i - \langle n_i, k_1\rangle m_1 - \ldots - \langle n_i, k_{i-1}\rangle m_{i-1}\right)$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{\gamma_1} \alpha_i m_i + \sum_{i=1}^{\gamma_2} \beta_i \left(\langle n_i, k_1 \rangle m_1 - \ldots - \langle n_i, k_{i-1} \rangle m_{i-1} \right) = \sum_{i=1}^{\gamma_2} \beta_i n_i$$

Es decir, tenemos un elemento $\sum_{i=1}^{\gamma_2} \beta_i n_i \in M \cap N$. Como $M \cap N = 0$ y $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base, podemos afirmar que los coeficientes $\beta_i = 0$, para $i = 1, \ldots, \gamma_2$ y por tanto que $e = 0$, o sea, que $M \cap X = 0$, demostrando así que la suma es directa. Luego $E = M \oplus X$. Un razonamiento completamente análogo nos permite comprobar que $F = \mathrm{r}_F(M) \oplus Y$.

Ahora vamos a ver que X e Y son subespacios cerrados, y aún más, que cada uno es el anulador del otro. Para ello comenzamos con el siguiente cálculo.

$$\begin{aligned} \langle m_i, y_j \rangle &= \langle m_i, k_j - r_1 \langle n_1, k_j \rangle - \ldots - r_{j-1} \langle n_{j-1}, k_j \rangle \rangle = \\ &= \langle m_i, k_j \rangle - \langle m_i, r_1 \rangle \langle n_1, k_j \rangle - \ldots - \langle m_i, r_{j-1} \rangle \langle n_{j-1}, k_j \rangle = \\ &= \langle m_i, k_j \rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \langle n_i, y_j \rangle &= \langle n_i, k_j - r_1 \langle n_1, k_j \rangle - \ldots - r_{j-1} \langle n_{j-1}, k_j \rangle \rangle = \\ &= \langle n_i, k_j \rangle - \langle n_i, r_1 \rangle \langle n_1, k_j \rangle - \ldots - \langle n_i, r_{j-1} \rangle \langle n_{j-1}, k_j \rangle = \\ &= \begin{cases} \langle n_i, k_j \rangle - \langle n_i, k_j \rangle = 0 & i < j \\ \langle n_i, k_j \rangle & i \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

Así pues, la forma bilineal aplicada sobre los dos elementos que acabamos de construir, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle x_i, y_j \rangle &= \langle n_i - \langle n_i, k_1 \rangle m_1 - \ldots - \langle n_i, k_{i-1} \rangle m_{i-1}, y_j \rangle = \\ &= \langle n_i, y_j \rangle - \langle n_i, k_1 \rangle \langle m_1, y_j \rangle - \ldots - \langle n_i, k_{i-1} \rangle \langle m_{i-1}, y_j \rangle = \\ &= \begin{cases} \langle n_i, y_j \rangle - \langle n_i, k_j \rangle = \langle n_i, k_j \rangle - \langle n_i, k_j \rangle = 0 & i \geq j \\ \langle n_i, y_j \rangle = 0 & i < j \end{cases} \end{aligned}$$

De aquí se desprende que, $X \subset \mathrm{l}_E(Y)$ y que $Y \subset \mathrm{r}_F(X)$.

Para ver la inclusión contraria, si consideramos un elemento $a \in \mathrm{l}_E(Y)$, podemos expresarlo como suma de $a = m + x \in M \oplus X$. Por tanto $0 = \langle a, y_i \rangle = \langle m, y_i \rangle + \langle x, y_i \rangle = \langle m, y_i \rangle$, siendo esta igualdad válida para todo índice. Esto nos dice que $m \in \mathrm{l}_E(Y)$, siendo por tanto $m \in \mathrm{l}_E(\mathrm{r}_F(M)) \cap \mathrm{l}_E(Y) = 0$. Así pues, la componente sobre M se anula, lo cual implica que

$a \in X$ y por tanto que $\mathrm{l}_E(Y) \subset X$. Con un razonamiento análogo se tiene que $\mathrm{r}_F(X) \subset Y$.

Así, tenemos que $\mathrm{l}_E(Y) = X$ y $\mathrm{r}_F(X) = Y$. Esto implica que $E = M \oplus X$ y que $F = \mathrm{r}_F(M) \oplus \mathrm{r}_F(X)$, lo cual demuestra que el par dual (E, F) es escindible.

$\square$

Ahora vamos a abordar el caso en que el cardinal α es más que numerable. Como ya hemos comentado, en [28] Ornstein probó que los (α, β) pares duales pueden o no ser escindibles, dependiendo del cardinal β. En nuestro caso, sólo consideramos $\beta = \omega$, donde resulta que el par dual es escindible. Vamos a reescribir los argumentos centrándonos sólo en nuestro caso y con la Notación 3.1.4.

Vamos a introducir un concepto que nos va a ayudar a simplificar la notación y a tener una visualización más clara de la idea que subyace en el desarrollo de los siguientes resultados.

Definición 3.1.7.

*Sea R un anillo y M un R-módulo libre por la izquierda con base B. Dado un elemento x de M, llamaremos **longitud** de x respecto a B, al cardinal del soporte de x.*

La idea de los siguientes resultados es: sea D un anillo de división, y $\left(D^{(\alpha)}, D^{(\alpha)}\right)$ un par dual, donde, recordemos, ya hemos fijado las bases canónicas. Dado un subespacio cerrado $S \leq_D D^{(\alpha)}$, se construirá una base de S tal que determine una partición, $\{C_j\}$ en la base canónica, cuyas clases de equivalencia serán numerables. Después, se hará la intersección de los subespacios generados por los C_j con el subespacio S, formando una familia independiente de subespacios cerrados cuya suma será el propio S. Luego se considerarán los anuladores de las sumas $\sum_{k \neq j} C_k$, digamos A_j y como $\langle C_j \rangle$ y A_j forman pares duales de dimensión numerable, podremos obtener el resultado final usando el argumento de Mackey y sumando los espacios cerrados. Aún cuando la suma de subespacios cerrados no es cerrada, en este caso, se comprueba fácilmente que sí lo es.

Se comienza entonces construyendo la base S.

Lema 3.1.8.

Sea D un anillo de división y $\left(D^{(\alpha)}, D^{(\alpha)}\right)$ un par dual. Sea S un subespacio cerrado de ${}_D D^{(\alpha)}$. Denotamos con $\{x_i\}_{i\in\alpha}$ la base canónica de ${}_D D^{(\alpha)}$. Entonces, existe una base $\{b_j\}$ de S tal que, para cada x_i,

$$|\{b_j \quad | \quad i \in supp\,(b_j)\}| < \omega$$

Demostración.

En general, al considerar cualquier base de S, podemos construir la matriz de coeficientes (como filas) en el sentido habitual (respecto de la base canónica), aunque la matriz sea infinita. Como los espacios son por la izquierda, es evidente que dicha matriz está en $\mathrm{RFM}_\alpha(D)$, pero no podemos decir nada sobre el soporte de las columnas. La idea de la demostración es construir una base muy concreta de filas y columnas finitas. Para ello, iremos agrupando los elementos de la misma longitud, para extraer conjuntos linealmente independientes, hasta finalizar en una base cuya matriz de coeficientes respecto de la base canónica tenga columnas con soporte a lo más numerable (no tiene que ser finito).

Vamos a empezar por formar el conjunto de los elementos de S con longitud igual a 1, tenemos:

$$S_1 = \{s \in S \mid |supp\,(s)\,| = 1\}.$$

Llamaremos $\Upsilon_1 = \{X \subset S_1 \mid X \text{ es linealmente independiente}\}$. Si Υ_1 no es un conjunto vacío, por el lema de Zorn, existe un subconjunto maximal $\overline{B_1} = B_1$ de Υ_1; si Υ_1 es un conjunto vacío, tomaremos $\overline{B_1} = B_1 = \emptyset$.

Hacemos

$$S_2 = \{s \in S \mid |supp\,(s)\,| \leq 2\},$$
$$\Upsilon_2 = \{\overline{B_1} \subseteq X \subset S_2 \mid X \text{ es linealmente independiente}\}.$$

Sea $\overline{B_2}$ un elemento maximal de Υ_2 (si es no vacío) y

$$B_2 = \left\{s \in \overline{B_2} \quad\middle|\quad |supp\,(s)| = 2\right\}.$$

De forma recurrente, hacemos:

$$S_n = \{s \in S \mid |supp\,(s)\,| \leq n\}.$$
$$\Upsilon_n = \{\overline{B_{n-1}} \subseteq X \subset S_n \mid X \text{ es linealmente independiente}\}.$$

$\overline{B_n}$ un maximal de Υ_n y $B_n = \{s \in \overline{B_n} \mid |supp\,(s)\,| = n\}$.

Como todos los elementos de S tienen longitud finita, todos los elementos de S pertenecen a algún conjunto S_n que, a su vez, claramente está generado por los elementos de $B_1, \ldots, B_n$. Hemos formado así, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una familia de conjuntos, cuya intersección es vacía dos a dos y que, como su unión es linealmente independiente (por construcción), forma una base de S. Consideremos la matriz C de la base $B = \cup B_n$, que ordenamos considerando primero todos los elementos de B_1, ordenados de cualquier forma fija, después todos los elementos de B_2, etc., de tal manera que si $B = \{b_1, \ldots, b_i, \ldots\}$

(de cardinalidad α), tendremos que para cada par de índices $i < j$ ocurre $|supp\,(b_i)\,| \leq |supp\,(b_j)\,|$.

Vamos a comprobar que la matriz C tiene todas sus columnas con soporte a lo más numerable. Supongamos que no; es decir, que tenemos un índice α_1 para el cual, el cardinal de los elementos no nulos de la columna Ce_{α_1} (visto como columna, o bien, $C \cdot x^*_{\alpha_1}$) es $\delta > \omega$. Consideremos U el conjunto de todos los elementos de B cuyo soporte tiene al índice α_1, es decir,

$$U = \{b \in B \mid \alpha_1 \in supp\,(b)\}.$$

Este conjunto U tiene cardinalidad δ.

Una característica importante de U, es que para todo subconjunto X de U, se cumple que $\cap_{b\in X} supp(b)$ es no vacío, pues α_1 siempre pertenece a dicha intersección.

Como la cardinalidad de U es la suma numerable de las cardinalidades de $U \cap B_n$, y $\delta > \omega$, existe al menos un conjunto cuyo cardinal es $\omega < \gamma \leq \delta$. Vamos a llamar n a algún índice para el cual, $|U \cap B_n| = \gamma > \omega$. Como la longitud de los elementos de B_n es n, podemos asegurar que dado un conjunto $X \subset U \cap B_n$, se tiene que $1 \leq |\cap_{b\in X}\, supp\,(b)\,| \leq n$.

Vamos a considerar el máximo de los cardinales anteriores para todos los subconjuntos de U con cardinalidad γ, llamaremos

$$m = max\,\{|\cap_{b\in X}\, supp\,(b)\,| \mid X \subset U \cap B_n, |X| = \gamma\}\,.$$

Luego existe un conjunto X con cardinalidad γ incluido en $U \cap B_n$ donde $\cap_{b\in X} supp\,(b) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, con $m \leq n$. Como X es infinito, entonces $m < n$ ya que, en otro caso, X no podría tener más de n elementos linealmente independientes.

Nótese que si $Y \subset U \cap B_n$ e $|Y| = \gamma$ entonces $|\cap_{b\in Y}\, supp(b)| \leq m$.

Consideremos el espacio $\check{S} = S + \langle x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_m}\rangle$. En general, la suma de espacios cerrados no es cerrado; pero la suma de un espacio cerrado y uno finitamente generado sí lo es. Es fácil ver esto. En el caso que nos ocupa, consideramos $S + \langle x_i\rangle$ cualquiera, con $x_i \notin S$. Como los anuladores estarán sobre los libres, no escribimos los índices. Sea $K = \mathrm{r}(S)$ y $K_1 = \mathrm{r}\,(S + \langle x_i\rangle)$. Entonces $K = K_1 \oplus C$ y como $x \in C$ implica que $x_i x \neq 0$ entonces se tiene que $\dim_D C = 1$. Análogamente $\mathrm{l}\,(\mathrm{r}\,(S + \langle x_i\rangle)) = \mathrm{l}(K) + C'$, con $\dim_D C' = 1$. Como $\mathrm{l}(K) = S$, entonces $S + C' = S + \langle x_i\rangle$.

Vamos a demostrar que si $\langle \check{S}, f\rangle = 0$ entonces $\langle x_{\alpha_1}, f\rangle = 0$, donde $f \in F$. Esto significará que $x_{\alpha_1} \in \check{S}$.

Supongamos que $\langle x_{\alpha_1}, f\rangle \neq 0$. Nótese que $\langle x_{\alpha_i}, f\rangle = 0$, para $i = 2, \ldots, m$.

Ahora consideremos $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ el soporte de f. Donde $\beta_1 = \alpha_1$. Nótese que $\beta_p \neq \alpha_r$, para $p = 1, \ldots, q$ y $r = 2, \ldots, m$. Aún más, si $j \neq \alpha_i$, con

$i = 1, \dots, m$, entonces $Y = \{b \in X \mid x_j \in supp(b)\}$ tiene cardinalidad $|Y| < \gamma$ porque si ocurriese que $|Y| = \gamma$, entonces se tendría que $\{\{x_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{x_j\}\} \subset \cap_{b \in Y} supp(b)$, y por tanto $| \cap_{b\in Y} |supp(b)| = m + 1$, lo cual es imposible.

Así, se tiene que $Y_{\beta_p} = \left\{b \in X \mid \left\langle b, x_{\beta_p}^* \right\rangle \neq 0\right\}$ tiene cardinalidad $|Y_{\beta_p}| < \gamma$, si $\beta_p \neq \alpha_1$. Aún más, $| \cup_{\beta_p \neq \alpha_1} Y_{\beta_p}| < \gamma$ porque la unión es finita. Esto implica que $X \setminus \cup_{\beta_p \neq \alpha_1} Y_{\beta_p} \neq \emptyset$. Elegimos un elemento arbitrario $b_i \in X \setminus \cup_{\beta_p \neq \alpha_1} Y_{\beta_p}$.

Entonces $\left\langle b_i, x_{\beta_1}^* \right\rangle \neq 0$ y $\left\langle b_i, x_{\beta_p}^* \right\rangle = 0$, para $p = 2, \dots, q$. Como $b_i \in X \subset \check{S}$ entonces $\langle b_i, f\rangle = 0$. Supongamos que $f = \sum_{p=1}^q x_{\beta_p}^* d_p$. Entonces

$$0 = \langle b_i, f\rangle = \left\langle b_i, x_{\beta_1}^* d_1 \right\rangle + \sum_{p=2}^{q} \left\langle b_i, x_{\beta_p}^* d_p \right\rangle .$$

Pero $\left\langle b_i, x_{\beta_p}^* \right\rangle = 0$, para $p = 2, \dots, q$. Por tanto $\left\langle b_i, x_{\beta_1}^* \right\rangle = 0$, lo cual es absurdo. Esto significa que $\langle x_{\alpha_1}, f\rangle = 0$ y por tanto $x_{\alpha_1} \in \check{S}$.

Como $\check{S} = S + \langle x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_m}\rangle$ entonces $x_{\alpha_1} = u + \sum_{i=2}^m d_i x_{\alpha_i}$, con $u \in S$ y $d_i \in D$; o bien, $u = x_{\alpha_1} - \sum_{i=2}^m d_i x_{\alpha_i}$.

Sea $v \in X$, un elemento arbitrario. Entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset supp(v)$, digamos que $v = r_1 x_{\alpha_1} + \cdots + r_m x_{\alpha_m} + c$, con $r_i \neq 0$. Entonces $w = v - r_1 u$ tiene, claramente, longitud menor que n. Además, u tiene longitud $m < n$, por tanto w y u pertenecen a S y tienen longitud menor que n; así que pertenecen al subespacio generado por $\overline{B_{n-1}}$ y por tanto, v también. Pero esto es imposible porque $v \in X \subset B_n$.

Luego todas la columnas de la matriz C tienen soporte a lo más numerable.

□

Ahora se construye la partición sobre la base original.

Proposición 3.1.9.
Sea D un anillo de división, $\left(D^{(\alpha)}, D^{(\alpha)}\right)$ un par dual y S un subespacio cerrado de ${}_D D^{(\alpha)}$. Entonces existe una base $\{s_i\} \subset S$ y una partición $\{C_j\}$ de la base canónica de ${}_D D^{(\alpha)}$ tal que $|C_j| \leq \omega$ para todo j, y para cada índice $i \in \alpha$, existe j tal que $s_i \in \langle C_j\rangle$.

Demostración.
Sea $\{x_i\}$ la base canónica de ${}_D D^{(\alpha)}$ y $\{s_k\}$ una base para S, como en el Lema 3.1.8. Definamos la siguiente relación de equivalencia sobre la base canónica. Dados dos índices $i, j \in \alpha$, definimos la relación $x_i \sim x_j$ si y sólo si existe un conjunto finito de elementos $a_1, \dots, a_n \in \{s_k\}$ tal que $i \in supp(a_1)$,

$j \in \mathit{supp}(a_m)$ y para cada par de elementos a_i, a_{i+1} con $i < n$, tenemos que $\mathit{supp}(a_i) \cap \mathit{supp}(a_{i+1}) \neq \emptyset$. Es inmediato ver que la relación anterior es de equivalencia.

Sea $\{C_i\}$ la partición asociada a la relación de equivalencia anterior. Para cada s_k se tiene una expresión $s_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_{k_j}$. Esto implica que $x_{k_1} \sim \cdots \sim x_{k_n}$ y por tanto, existe un conjunto C_{j_k} tal que $\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}\} \subset C_{j_k}$ y por tanto $s_k \in \langle C_{j_k} \rangle$.

Ahora bien, dado $x_i \in C_{j_k}$ sabemos que $|\{s_j | i \in \mathit{supp}\,(s_j)\}| < \omega$, luego hay una cantidad a lo más numerable de cadenas $a_1, \ldots, a_n$ donde x_i ocurre en a_1. Por cada cadena $a_1, \ldots, a_n$ sólo hay un número finito de elementos de la base, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ tales que $x_i \sim x_{i_k}$, así que x_i tiene a lo más ω elementos asociados. Con esto probamos que $|C_j| \leq \omega$.

$\square$

Así llegamos al paso final. Vamos a construir familias de pares duales de dimensión numerable y, cubriendo a los espacios originales, probaremos que el par es escindible.

Teorema 3.1.10.
Si D un anillo de división entonces el par dual $\left(D^{(\alpha)}, D^{(\alpha)}\right)$ es escindible.

Demostración.
Hacemos $E =_D D^{(\alpha)}$ y $F = D_D^{(\alpha)}$. Sea S un subespacio cerrado de E. Construimos, como en la Proposición 3.1.9 una base $\{s_k\}$ de S y la partición $\{C_j\}$. Recordemos que cada C_j es a los más numerable.

Sea $S_j = S \cap \langle C_j \rangle$. De la proposición anterior se tiene que la familia S_j es independiente y además, $S = \oplus S_j$.

Consideremos los subespacios cerrados

$$A_j = \mathrm{r}_F \left(\sum_{k \neq j} \langle C_k \rangle \right) = \mathrm{r}_F \left(\bigcup_{k \neq j} C_k \right).$$

Es inmediato comprobar que $\{A_j\}$ es familia independiente de subespacios cerrados cuya suma (directa) es igual a F. De hecho, nótese que, abusando de la notación, se tiene $A_j = \left\langle C_j^* \right\rangle$.

Como C_j es a lo más numerable, entonces los subespacios $\langle C_j \rangle$, A_j y los S_j son de dimensión a lo más numerable. Aún más, de la definición de A_j se puede comprobar directamente que $\langle C_k \rangle$ y A_j forman un par dual y, respecto de él, S_j es un subespacio cerrado de $\langle C_j \rangle$.

Ahora usamos el hecho de que en el caso (a lo más) numerablemente generado los subespacios cerrados tienen un complemento cerrado. Entonces existe R_i tal que $S_i + R_i = \langle C_i \rangle$ y que sus anuladores $\mathrm{r}_{A_i}(S_i) = S'_i$ y $\mathrm{r}_{A_i}(R_i) = R'_i$ cumplen que $S'_i + R'_i = A_i$.

Es inmediato comprobar que $S = \sum S_i$, que $R = \sum R_j$ son cerrados, y $S + R = E$. Es igualmente directo comprobar que $\sum S'_i = S' = \mathrm{r}_F(S)$, $\sum R'_i = R' = \mathrm{r}_F(R)$ y que $S' + R' = F$. Pero vamos a hacer al menos una comprobación por si hay alguna confusión. Vamos a ver, por ejemplo, que $\mathrm{r}_F S \subseteq S'$. Sea $y \in F$, tal que $\langle S, y \rangle = 0$. Como $\sum A_j = F$ existen índices $k_1, \ldots, k_n$ tales que $y = \sum_{i=1}^n t_{k_i} + u_{k_i}$, donde $t_{k_i} \in S'_{k_i}$ y $u_{k_i} \in R'_{k_i}$. Si, digamos, $u_{k_1} \neq 0$ entonces, existe $s \in S_{k_1}$ tal que $\langle s, u_{k_1} \rangle \neq 0$, porque están en un par dual escindido. Además, por la construcción de los A_j, $\langle s, u_{k_i} \rangle = 0$ para $i \neq 1$ y $\langle s, t_{k_i} \rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Así que $\langle s, y \rangle \neq 0$, lo cual es imposible.

Así pues tenemos que $S = \sum S_i$, que $R = \sum R_j$ es cerrado, que $S + R = E$ y que $S' + R' = F$.

□

Con esto hemos probado que si D es un anillo de división entonces $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ es anillo de Baer.

Ahora vamos a presentar nuestros resultados que llevan a probar el recíproco; es decir, veremos que si R es un anillo tal que $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ es anillo de Baer entonces R es artiniano semisimple.

Vamos a hacer la primera reducción importante. Nótese que como la propiedad de Baer se preserva por esquinas, tenemos que $\mathrm{RCFM}_\omega(R) = \mathrm{RCFM}(R)$ también ha de ser anillo de Baer. Aún más, el propio R ya es anillo de Baer. Vamos a probar, también en varios pasos que si $\mathrm{RCFM}(R)$ es anillo de Baer entonces R es semisimple

Comenzaremos viendo que R satisface ciertas condiciones de finitud.

Proposición 3.1.11.

Sea R un anillo con $\mathrm{RCFM}(R)$ de Baer. Entonces R no admite una familia numerable de idempotentes no nulos ortogonales dos a dos.

Demostración.

Sea $B = \mathrm{RCFM}(R)$ y $E = \mathrm{RFM}(R)$. Consideremos $\{e_{ij}\}$ la familia de las matrices elementales donde $e_{ii} = e_i$. Supongamos que existe una familia numerable de idempotentes no nulos y ortogonales dos a dos $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset R$. Consideremos la siguiente matriz en E

$$a = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{i \geq j \in \mathbb{N}} \alpha_i e_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & & \\ \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \ldots & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & \ldots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que la matriz a es idempotente.

Observemos ahora que aún cuando $a \notin B$, $\mathbf{r}_B\,(B \cap Ea) = \mathbf{r}_B\,(a)$, así que, usando el hecho de que B es anillo de Baer, podemos asegurar que $\mathbf{r}_B\,(a)$ es un sumando directo de B. Para comprobar la igualdad anterior nótese que $e_i a \in B$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{r}_B\,(a) = \cap_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{r}_B\,(e_i a)$. Para simplificar la notación, definiremos para cada par de índices $i \leq j \in \mathbb{N}$, el producto $\beta_{ij} = (1-\alpha_i)(1-\alpha_{i+1})\dots(1-\alpha_j)$.

Nuestra primera afirmación es que $\mathbf{r}_B\,(a) \neq 0$. Esto es fácil de ver ya que la matriz

$$b = \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ii} e_i - e_{(i+1)i} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & & \\ -1 & \beta_{22} & 0 & \dots & \\ 0 & -1 & \beta_{33} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix} \in B,$$

cumple

$$\begin{aligned} ab &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{i\geq j\in\mathbb{N}} \alpha_i e_{ij}\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ii} e_i - e_{(i+1)i}\right) = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{i\geq j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_i \beta_{kk} e_{ij} e_k - \alpha_i e_{ij} e_{(k+1)k} = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{i\geq j\in\mathbb{N}} \alpha_i \beta_{jj} e_{ij} - \sum_{i\geq k+1\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_i e_{ik} = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{i> j\in\mathbb{N}} \alpha_i e_{ij} - \sum_{i> k\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_i e_{ik} = 0 \end{aligned}$$

Existe por tanto un idempotente no trivial $f \in B$ tal que $\mathbf{r}_B\,(a) = fB$. Por lo tanto $fb = b$. Consideremos la matriz en $\mathrm{CFM}\,(R)$

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(e_{i(i+1)} + \sum_{i<j\in\mathbb{N}} \beta_{(i+1)j} e_{i(j+1)}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \beta_{33} & \beta_{34} & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \beta_{44} & \dots \\ & & & \vdots & 0 & \ddots \\ & & & & \vdots & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $f, b \in B$ tenemos que $f(bc) = (fb)c$ y por tanto $f(bc) = bc$. Ahora, si calculamos $bc \in \mathrm{CFM}(R)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
bc &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ii}e_i - e_{(i+1)i}\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(e_{i(i+1)} + \sum_{i<j\in\mathbb{N}} \beta_{(i+1)j}e_{i(j+1)}\right)\right) = \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ii}e_ie_{j(j+1)} + \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{j<k\in\mathbb{N}} \beta_{ii}\beta_{(j+1)k}e_ie_{j(k+1)} - \\
&- \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} e_{(i+1)i}e_{j(j+1)} - \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{j<k\in\mathbb{N}} \beta_{(j+1)k}e_{(i+1)i}e_{j(k+1)} = \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ii}e_{i(i+1)} + \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{i<k\in\mathbb{N}} \beta_{ii}\beta_{(i+1)k}e_{i(k+1)} - \\
&- \sum_{i\in\mathbb{N}} e_{(i+1)} - \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{i<k\in\mathbb{N}} \beta_{(i+1)k}e_{(i+1)(k+1)} = \\
&= \beta_{11}e_{12} + \sum_{1<i\in\mathbb{N}} \beta_{ii}e_{i(i+1)} + \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{i<k\in\mathbb{N}} \beta_{ik}e_{i(k+1)} - \\
&- \sum_{i\in\mathbb{N}} e_{(i+1)} - \sum_{1<i\in\mathbb{N}}\sum_{i\leq k\in\mathbb{N}} \beta_{ik}e_{i(k+1)} = \\
&= \beta_{11}e_{12} + \sum_{1<i\in\mathbb{N}} \beta_{ii}e_{i(i+1)} + \sum_{1<k\in\mathbb{N}} \beta_{1k}e_{1(k+1)} + \sum_{1<i\in\mathbb{N}}\sum_{i<k\in\mathbb{N}} \beta_{ik}e_{i(k+1)} - \\
&- \sum_{i\in\mathbb{N}} e_{(i+1)} - \sum_{1<i\in\mathbb{N}} \beta_{ii}e_{i(i+1)} - \sum_{1<i\in\mathbb{N}}\sum_{i<k\in\mathbb{N}} \beta_{ik}e_{i(k+1)} = \\
&= \beta_{11}e_{12} + \sum_{1<k\in\mathbb{N}} \beta_{1k}e_{1(k+1)} - \sum_{i\in\mathbb{N}} e_{(i+1)} = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_{1k}e_{1(k+1)} - \sum_{i\in\mathbb{N}} e_{(i+1)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\beta_{1i}e_{1(i+1)} - e_{(i+1)}\right) = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $f \in B$, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $e_{n+k}fe_1 = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $e_{n+k}f = e_{n+k}f(1 - e_1)$. También tenemos que $(1 - e_1)bc = (e_1 - 1)$.

Así pues,

$$e_{n+k}fbc = e_{n+k}f(1 - e_1)bc = e_{n+k}f(e_1 - 1) = -e_{n+k}f.$$

Por otro lado tenemos que $e_{n+k}fbc = e_{n+k}bc = -e_{n+k}$ para todo $k > 0$. Entonces $e_{n+k}f = e_{n+k}$ para todo $k > 0$. Más aún, como $f \in B$ entonces existe $m > n$ tal que $(e_1 + \cdots + e_n)\, fe_{m+k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto finito $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ con $i_j > n$ tal que $e_{i_j}fe_{m+k} \neq 0$. Como e_{m+k} pertenece al conjunto se tiene que $fe_{m+k} = (e_{i_1} + \cdots + e_{i_n})\, fe_{m+k} = e_{m+k}$.

Finalmente, se tiene que $af \neq 0$ ya que $afe_{m+k} = ae_{m+k} \neq 0$. Contradiciendo el que f sea un anulador por la derecha de a.

□

Corolario 3.1.12.

Sea R un anillo. Si $\mathrm{RCFM}\,(R)$ *es de Baer, entonces R cumple ACC sobre anuladores por la izquierda y por la derecha.*

Demostración.

Sea $Re_1 < Re_2 < \ldots$ un cadena estrictamente creciente de anuladores por la izquierda, con los e_i idempotentes. Estos anuladores pueden tomarse de esta forma porque R es de Baer.

Claramente si $i < j$ entonces $e_ie_j = e_i$. Consideremos la siguiente familia $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2\,(1 - e_1)$, $\ldots$, $f_n = e_n\,(1 - e_{n-1}) \cdots (1 - e_1)$. Se afirma que $\{f_i\}$ es una familia infinita de idempotentes ortogonales.

Primero vamos a ver que cada $f_n \neq 0$. Supongamos que $f_n = 0$. Como $f_n = e_n\,(1 - e_{n-1}) \cdots (1 - e_1)$, se tiene que $e_n\,(1 - e_{n-1}) \cdots (1 - e_2) \in Re_1 < Re_2$, así que $e_n\,(1 - e_{n-1}) \cdots (1 - e_2) = 0$. Así sucesivamente continuamos hasta llegar a que $e_n\,(1 - e_{n-1}) = 0$, lo cual implica que $Re_n = Re_{n-1}$. Pero esto es imposible.

Ahora veremos que los elementos de la familia son ortogonales dos a dos. Primero nótese que si $i < j$ entonces

$$(1 - e_i)\, e_j\, (1 - e_{j-1}) = (e_j - e_i)\,(1 - e_{j-1}) = e_j\,(1 - e_{j-1})\,,$$

porque $e_ie_{j-1} = e_i$. Ahora vamos a calcular, f_if_j, con $i < j$.

$$f_if_j = e_i\,(1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_1)\, e_j\,(1 - e_{j-1}) \cdots (1 - e_1)$$

así que

$$f_if_j = e_ie_j\,(1 - e_{j-1}) \cdots (1 - e_1) = e_i\,(1 - e_{j-1}) \cdots (1 - e_1) = 0$$

porque $e_ie_{j-1} = e_i$.

Ahora calculamos el otro producto, f_jf_i.

$$f_jf_i = e_j\,(1 - e_{j-1}) \cdots (1 - e_1)\, e_i\,(1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_1)$$

así que

$$f_j f_i = e_j (1 - e_{j-1}) \cdots (1 - e_i) e_i (1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_1) = 0.$$

Así que $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia infinita de idempotentes ortogonales; pero esto no es posible por la proposición anterior. Así que la cadena original se estaciona.

De forma completamente análoga, se tiene el resultado para anuladores por la derecha.

□

Obviamente, cumplir ACC sobre anuladores por la derecha implica cumplir DCC sobre anuladores por la izquierda. Así, del resultado anterior se desprende de inmediato.

Corolario 3.1.13.

Sea R un anillo. Si $\mathrm{RCFM}(R)$ es de Baer entonces R cumple DCC sobre anuladores por al izquierda y sobre anuladores por la derecha.

Demostración.

Inmediata

□

Ahora vamos a probar que R es producto directo de anillos de Baer primos, con DCC en anuladores. Con esto, podremos considerar anuladores minimales, lo cual nos llevará a ver que R es producto de dominios. Nótese también que todo anillo de Baer es semihereditario (Definición 0.0.36); eso nos llevará a los dominios de Prüfer (dominios semihereditarios). En una parte de la literatura se reserva este nombre para dominios conmutativos. Nosotros, en todo caso, aclaramos que se trata de dominios semihereditarios no conmutativos. Éste es el primer avance de estructura.

Proposición 3.1.14.

Sea R un anillo. Si $\mathrm{RCFM}(R)$ es un anillo de Baer, entonces R es un producto directo finito de anillos primos.

Demostración.

En vista de la Proposición 3.1.11 es suficiente comprobar que si R no tiene idempotentes centrales no triviales entonces R es primo. Sea R un anillo sin elementos idempotentes centrales no triviales. Supongamos que R no es primo. Entonces existen elementos $a, b \in R$ tal que $aRb = 0$. Sea $r \in R$

un idempotente no trivial tal que $Rr = \mathbf{l}_R\,(Rb)$. Como anillos, se tiene que $rR \subseteq Rr$ y por tanto,

$$R \cong \begin{pmatrix} rRr & 0 \\ (1-r)\,Rr & (1-r)\,R\,(1-r) \end{pmatrix}.$$

Entonces existe un isomorfismo de anillos

$$\mathrm{RCFM}\,(R) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{RCFM}\,(rRr) & 0 \\ \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,Rr) & \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,R\,(1-r)) \end{pmatrix}.$$

Para simplificar, identificaremos los anillos isomorfos anteriores. Ahora vamos a ver que $\mathrm{RCFM}\,(R)$ tiene matrices estrictamente triangulares; es decir, no diagonales. Primero nótese que como $rR\,(1-r) = 0$ entonces deberá ocurrir que $(1-r)\,Rr \neq 0$, ya que, en caso contrario r sería central, contradiciendo el hecho de que R no tiene idempotentes centrales no triviales.

Sea pues, $s \in (1-r)\,Rr$ tal que $s \neq 0$. Definimos ahora las siguientes matrices:

- Sea $\sigma \in \mathrm{RFM}\,((1-r)\,Rr) \setminus \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,Rr)$ la matriz definida por $\sigma\,(i,j) = s$ si $j \leq i$ y $\sigma\,(i,j) = 0$ en otro caso, es decir, una matriz triangular inferior con término constante s.
- Sea $\sigma' \in \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,Rr)$ la matriz diagonal con término constante s.
- Sea $\delta \in \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,R\,(1-r))$ la matriz diagonal con término constante $(1-r)$.
- Sea $\gamma \in \mathrm{RCFM}\,(rRr)$ tal que $\gamma\,(i,j) = r$ si $i = j$, $\gamma\,(i,j) = -r$ si $i = j+1$ y $\gamma\,(i,j) = 0$ en otro caso. La matriz γ verifica, además, que para todo $x \in \mathrm{RCFM}\,(rRr)$, $x\gamma = 0$ implica que $x = 0$.
- Sea γ' la matriz triangular inferior con término constante r.

Nótese que $\sigma\gamma = \sigma'$ y $\delta\sigma' = \sigma'$, en vista de que $s \in (1-r)\,Rr$ y $s \neq 0$. Consideremos las matrices

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -\sigma' & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $fx = 0$, y como por hipótesis tenemos que $\mathrm{RCFM}\,(R)$ es un anillo de Baer, podemos afirmar que existe un idempotente $g \in \mathrm{RCFM}\,(R)$ tal que $l_{\mathrm{RCFM}(R)}(x) = \mathrm{RCFM}\,(R)\,g$.

Aún cuando $f \notin \mathrm{RCFM}\,(R)$, es claro que para cada matriz básica e_i el producto $ef \in \mathrm{RCFM}\,(R)$; de hecho, es un elemento de $\mathrm{FM}\,(R)$; así que $e_i f = e_i fg$. Como esto ocurre para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene entonces que $f = fg$ (es obvio que para toda matriz x, $e_i x = 0$ para todo i, implica $x = 0$).

Por tanto $gx = 0$, $fg = f$ y $g^2 = g$.

Viendo entonces a R y $\mathrm{RCFM}\,(R)$ como anillos matrices triangulares se tiene que

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathrm{RCFM}\,(rRr)$, $b \in \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,Rr)$ y la matriz c verifica que $c \in \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,R\,(1-r))$.

Como $gx = 0$ entonces $a\gamma = 0$ y $b\gamma - c\sigma' = 0$, pero si $a\gamma = 0$ entonces $a = 0$, ya que, como hemos visto en la definición de γ, $x\gamma = 0$ implica $x = 0$.

Como $fg = f$ entonces $\sigma a + \delta b = \sigma$ y $\delta = \delta c = c$ (para la última igualdad, nótese que $1-r$ es una identidad a la izquierda para los valores de c), y en vista de que $a = 0$, se tiene que $\delta b = \sigma$.

Como $g^2 = g$ entonces $ba + cb = b$, y como $a = 0$, como acabamos a ver, entonces $cb = b$.

Como $cb = b$ y $c = \delta$ (véase arriba) entonces $b = \delta b$. Luego $\delta b = \sigma$ y por tanto $b = \sigma$. Pero esto no puede ocurrir porque $\sigma \in \mathrm{RFM}\,((1-r)\,Rr) \setminus \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,Rr)$ y $b \in \mathrm{RCFM}\,((1-r)\,Rr)$.

Luego $\mathrm{RCFM}\,(R)$ no puede ser anillo de Baer. Esto implica que R tiene que ser primo.

□

A continuación, el siguiente resultado sobre la estructura de R.

Teorema 3.1.15.

Sea R un anillo primo. Si $\mathrm{RCFM}\,(R)$ *es de Baer entonces R admite una descomposición indescomponible $R = Ru_1 \oplus \cdots \oplus Ru_n$, donde cada Ru_i es un anulador por la izquierda minimal. Además, u_i es primitivo, u_iRu_i es un dominio de Prüfer, y cada* $\mathrm{RCFM}\,(u_iRu_i)$ *es anillo de Baer.*

Demostración.

Sea u_1 un idempotente tal que Ru_1 sea un anulador por la izquierda minimal. Entonces $R = Ru_1 \oplus K_1$. Por la proposición anterior existe un anulador por la izquierda minimal Ru_2' tal que $K_1 = R\,(1-u_1)\,u_2 \oplus K_2$, esto es, u_1 y $u_2 = (1-u_1)\,u_2'$ son idempotentes ortogonales. Como R no tiene una cantidad infinita de idempotentes ortogonales dos a dos, este proceso debe detenerse. Así que $R = Ru_1 \oplus \cdots \oplus Ru_n$.

Ahora vamos a probar que u_iRu_i es un dominio. Como Ru_i es un anulador por la izquierda minimal entonces no tiene sumandos directos, y por tanto u_iRu_i no puede tener idempotentes no triviales. Finalmente, por ser un anillo de Baer, tenemos que u_iRu_i es un dominio.

□

El problema se ha reducido ahora a demostrar que si R es un dominio con $\mathrm{RCFM}\,(R)$ anillo de Baer entonces R de hecho es un anillo de división. Para probar esto, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.1.16.

Sea R un anillo y sea $d \in R$, consideremos la matriz $a \in \mathrm{RCFM}\,(R)$

$$a = \sum_{i \in \mathbb{N}} de_{(2i-1)i} + e_{(2i)i} + e_{(2i)(i+1)}$$

es decir,

$$a = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & d & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}.$$

Sea $\{a_i\}$ el conjunto de la filas de la matriz a vistas como elementos de $R^{(\mathbb{N})}$. Hacemos $B = \mathrm{RCFM}\,(R)$. Si Ba es un B-módulo por la izquierda proyectivo, entonces existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ y un sumando directo K de $R^{(\mathbb{N})}$, tal que $R^{(\mathbb{N})}a = Ra_1 \oplus K$ y además $a_{j_0+k} \in K$ para todo $K \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Hacemos $B = \mathrm{RCFM}\,(R)$ y $E = \mathrm{RFM}\,(R)$. Como Ba es proyectivo como B-módulo por la izquierda, existe un idempotente $g \in B$ tal que $Ba \cong Bg$. Consideremos las matrices $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_{n,(4n-2)}$ y $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_{(2n-1),n}$ (incluimos coma en el subíndice de los e, para que no se confunda con un producto).

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
xay = {} & \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} e_{n(4n-2)}\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} de_{(2i-1)i}+e_{(2i)i}+e_{(2i)(i+1)}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} e_{(2n-1)n}\right) = \\
&= \sum_{n,i,m\in\mathbb{N}} de_{n(4n-2)}e_{(2i-1)i}e_{(2m-1)m} + \sum_{n,i,m\in\mathbb{N}} e_{n(4n-2)}e_{(2i)i}e_{(2m-1)m} + \\
&+ \sum_{n,i,m\in\mathbb{N}} e_{n(4n-2)}e_{(2i)(i+1)}e_{(2m-1)m} = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} de_{n(4n-2)}e_{(2(2m-1)-1)m} \\
&+ \sum_{n,m\in\mathbb{N}} e_{n(4n-2)}e_{(2(2m-1))m} + \sum_{n,m\in\mathbb{N}} e_{n(4n-2)}e_{(4m)(m+1)} = \\
&= 0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n + 0 = I_B
\end{aligned}
$$

Por tanto, como B-módulos, Ba y Bg contienen una copia de B como sumando directo.

Aplicando el funtor $R^{(\mathbb{N})} \otimes -$ tenemos que $R^{(\mathbb{N})}g$ tiene una copia de $R^{(\mathbb{N})}$ como sumando directo y por [31, vol. 2, Remark 5.1.62], $R^{(\mathbb{N})}g$ es un R-módulo libre por la izquierda. Así pues E es isomorfo a Eg como E-módulos por la izquierda. Por [35, Proposition 2.2], esto implica que B es isomorfo a Bg, vistos como B-módulos. Y por tanto que B es isomorfo a Ba también.

Sea $\theta : Ba \to B$ un isomorfismo de B-módulos.

Consideremos el elemento $b = \theta^{-1}(1) \in Ba$. Es claro que las filas de b, que también denotamos $\{b_i\}$, forman una base en $R^{(\mathbb{N})}a$ y por tanto las ecuaciones $Xa = b$ y $Yb = a$ tienen solución en B. Sea pues una matriz $c \in B$ tal que $cb = a$.

Sea $a_1 \in \sum_{i=1}^{n} Rb_i$. Como $c \in B$ existe un índice $j_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que $(e_{j_0+k})\, c\,(\sum_{i=1}^{n} e_i) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_{j_0+k} \in \sum_{i>n} Rb_i$.

Llamemos $M = \sum_{i=1}^{n} Rb_i$ y $T = \sum_{i>n} Rb_i$. Tenemos entonces la descomposición $R^{(\mathbb{N})}a = M \oplus T$ y un índice j_0 tal que $a_1 \in M$ y que $a_{j_0+k} \in T$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Nótese que las filas de a forman una base de $R^{(\mathbb{N})}$, así que Ra_1 es sumando directo de $R^{(\mathbb{N})}a$.

Como $a_1 \in M$ y Ra_1 es un sumando directo de M, podemos considerar M' un submódulo de M tal que $M = Ra_1 \oplus M'$. Hacemos $K = M' \oplus T$ y tenemos que $R^{(\mathbb{N})}a = Ra_1 \oplus K$ y además, se cumple que $a_{j_0+k} \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

Proposición 3.1.17.

Sea D un dominio tal que $\mathrm{RCFM}\,(D)$ *es un anillo de Baer. Entonces D es un anillo de división.*

Demostración.
Usaremos la notación del lema anterior con $D = R$, $d \in D$, con $d \neq 0$, y $a \in \mathrm{RCFM}\,(D)$.

Como $\mathrm{RCFM}\,(D)$ es un anillo de Baer entonces $\mathrm{RCFM}\,(D)\,a$ es proyectivo así que se cumplen las hipótesis del lema anterior. Luego existe un D-módulo, K, tal que $D^{(\mathbb{N})}a = Da_1 \oplus K$ y además $a_{j_0+k} \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Recordemos que $\{a_i\}$ denota las filas de la matriz a, vistas como elementos de $D^{(\mathbb{N})}$; en particular, $a_1 = (d, 0, \dots)$.

Consideremos $\phi : D^{(\mathbb{N})}a \to Da_1$ la proyección de la descomposición $D^{(\mathbb{N})}a = Da_1 \oplus K$, con $a_{j_0+k} \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $x_i \in D$ tal que $\phi\,(a_i) = x_i a_1$. Como $a_{j_0+k} \in K$ para todo $k \in K$, entonces $x_{j_0+k} = 0$ para todo $k \in K$.

En general, se tiene la igualdad,

$$da_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\phi\,(da_{2n}) = \phi\,(a_{2n-1}) + \phi\,(a_{2n+1})$ implica que $dx_{2n}a_1 = x_{2n-1}a_1 + x_{2n+1}a_1$, pero como D es un dominio tenemos que $dx_{2n} = x_{2n-1} + x_{2n+1}$.

Vamos a ver que d es unidad. Primero, $x_1 = 1$, ya que $\phi(a_1) = a_1$. Ahora, $dx_2 = x_1 + x_3$; así que, como $x_1 = 1$, se tiene que $x_2 \neq 0$ o $x_3 \neq 0$. Si $x_3 = 0$ entonces $dx_2 = 1$, de donde se tiene que d es unidad y ya terminamos. Si $x_3 \neq 0$ entonces $x_3 = -1 + dx_2$, donde puede ser $x_2 = 0$.

Ahora procedemos por inducción. Supongamos que $x_{2r+1} \neq 0$ y $x_{2r+1} = \pm 1 + dm_r$, para algún $m_r \in D$. Como $dx_{2(r+1)} = x_{2r+1} + x_{2(r+1)+1}$ entonces

$$x_{2(r+1)+1} = dx_{2(r+1)} - x_{2r+1} = dx_{2r} - (\pm 1 + dm_r) = \pm 1 + dm_{r+1}$$

Pero ya sabemos que a partir de cierto índice j_0 se tiene que $x_{j_0+k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto a partir de dicho índice se tiene que $0 = x_{2j_0+1} = 1 - dm_{j_0}$ así que $1 = dm_{j_0}$ y por tanto podemos afirmar que d es una unidad en D.

□

Con esto hemos desarrollado todos los resultados que se requieren para probar nuestro resultado principal. Vamos a hacer, pues, la demostración.

Demostración del Teorema 3.1.1

[1 ⇒ 2] Son los Teoremas 3.1.5, 3.1.6 y 3.1.10.

[2 ⇒ 3] Es caso particular.

[3 ⇒ 1] Proviene del hecho de que la propiedad de Baer se preserva por esquinas junto con la Proposición 3.1.14, el Teorema 3.1.15 y la Proposición 3.1.17.

3.2. Los enteros

Como hemos visto, al no ser $\mathbb{Z}$ un anillo de división, el anillo $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ no puede ser anillo de Baer. Sin embargo, vamos a ver que todo anulador por la izquierda de un subconjunto de $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ es un ideal por la izquierda proyectivo y principal.

Proposición 3.2.1.
Para todo subconjunto X del anillo $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$, existe un elemento $a \in \mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$, tal que los anuladores por la izquierda verifican $\mathrm{l}_{\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})}(X) = \mathrm{l}_{\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})}(a)$.

Demostración.
Denotaremos por $B = \mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ y $\overline{B} = \mathrm{RCFM}(\mathbb{Q})$. Por el Teorema 3.1.1 el anillo $\overline{B}$ es de Baer. Consideremos el conjunto X como subconjunto de $\overline{B}$. Entonces existe un elemento $f \in \overline{B}$ tal que $1 - f$ genera el anulador por la izquierda de X en $\overline{B}$, es decir, $\mathrm{l}_{\overline{B}}(X) = \mathrm{l}_{\overline{B}}(f)$. Como los elementos $f(i,j)$ de la matriz f están en $\mathbb{Q}$, existe para cada uno de ellos un número entero (adecuado) d_{ij}, tal que $f(i,j)\, d_{ij} \in \mathbb{Z}$ (si $f(i,j) = 0$ hacemos $d_{ij} = 1$). Consideremos la matriz diagonal

$$d = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\prod_{j \in \mathbb{N}} d_{ij} \right) e_i$$

es decir,

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} \dots d_{n_1 1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & d_{12} \dots d_{n_2 2} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & d_{1j} \dots d_{n_j j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La matriz d está definida pues los productos son siempre finitos. Primero vamos a comprobar que $a = fd \in B$ y después que el anulador por la izquierda de a en B es el mismo que el anulador por la izquierda en B de X.

Para demostrar la primera afirmación, sólo tenemos que realizar la multiplicación, dados dos índices, tenemos que

$$(fd)(i,j) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(i,k)\, d(k,j) = f(i,j)\left(\prod_{k\in\mathbb{N}} d_{kj}\right) = \\ = \left(f(i,j)\, d_{ij}\right)\left(\prod_{i\neq k\in\mathbb{N}} d_{kj}\right) \in \mathbb{Z}$$

Para demostrar la segunda afirmación, sólo debemos darnos cuenta que, al ser d una matriz diagonal, es invertible en $\overline{B}$ y que por tanto, el anulador por la izquierda de fd en $\overline{B}$ es el mismo que el anulador por la izquierda de f en $\overline{B}$, así pues tenemos

$$\mathrm{l}_B(X) = B \cap \mathrm{l}_{\overline{B}}(X) = B \cap \mathrm{l}_{\overline{B}}(f) = B \cap \mathrm{l}_{\overline{B}}(fd) = \mathrm{l}_B(fd).$$

□

Observación 1.

Como consecuencia de la proposición anterior, junto con el hecho de que $\mathbb{Z}$ *es hereditario, tenemos que para todo subconjunto* X *de* $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$*, su anulador por la izquierda en* $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ *es un sumando directo de* $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$*. Esto también se desprende de un teorema de Baer y Specker (véase [15, Theorem 19.2]) junto con la proposición anterior.*

Lema 3.2.2.

Sea X *un subconjunto de* $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ *y* M *el anulador por la izquierda de* X *en* $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$*. Definimos,* $M_1 = M$ *y, para* $1 < i \in \mathbb{N}$*,*

$$F_i = \left\{x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \mid x(j) = 0\ \forall\, j < i\right\} \quad y \quad M_i = M \cap F_i.$$

Si M *no es finitamente generado entonces para cada* $i \in \mathbb{N}$*,* $M_i \neq 0$*, y para cada* $i, t \in \mathbb{N}$*,* M_{i+t} *es sumando directo de* M_i*.*

Demostración.

Hacemos $B = \mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ y $\overline{B} = \mathrm{RCFM}(\mathbb{Q})$. Primero vamos a probar que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $j \leq i$ tal que $M_j \neq 0$. Vamos a usar el hecho de que $\overline{B}$ es anillo de Baer de la siguiente manera. Como $\overline{B}$ es anillo de Baer entonces $l_{\overline{B}}(X) = \overline{B}f$ para algún idempotente $f \in \overline{B}$. Como M no es finitamente generado entonces el anulador de X en $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ tampoco es finitamente generado y por tanto f tiene rango infinito. Sea d la matriz obvia, diagonal e invertible en $\overline{B}$, tal que $df \in B$. Ahora esta matriz, al tener rango infinito nos garantiza que $M_i \neq 0$, porque sus filas generan un submódulo esencial en M.

Para probar la segunda parte, es decir que para cada $i, t \in \mathbb{N}$, M_{i+t} es sumando directo de M_i, basta ver que cada cociente M_i/M_{i+t} es finitamente generado y libre de torsión (por tanto, libre). Nótese que, para ver que M_i/M_{i+t} es finitamente generado, basta ver que cualquier cociente M/M_i es finitamente generado. Vamos a probar esto último. Consideremos una base $\{m_n\}$ para M. Si el cociente es cero, el caso es trivial. En otro caso, hacemos $m'_n = (m_n(1), \ldots, m_n(i)) \in \mathbb{Z}^i$; es decir, tomamos las primeras i coordenadas. Entonces existe un subconjunto $\{m'_{n_k}\}_{k=1}^r$ de $\{m'_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que ambos generan el mismo submódulo de $\mathbb{Z}^i$. Ahora consideramos $m_{n_1}, \ldots, m_{n_r}$ (ya completos) en M. Entonces se tiene que, para todo $m \in M$, existen coeficientes adecuados $c_1, \ldots, c_r$ tales que $\left(m - \sum_{i=1}^r c_i m_{n_i}\right)(j) = 0$, para $j = 1, \ldots, i$. De aquí es inmediato que M/M_i es finitamente generado para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego M_i/M_{i+t} también lo es.

Finalmente, para ver que M_i/M_{i+t} es libre de torsión, primero nótese que M y F_j son sumandos directos de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ (véase la Observación 1) para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto, $M \cap F_j$ es puro (Definición 1.4.18 en $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 3.2.3.

Para todo conjunto $X \subset \mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$*, su anulador por la izquierda en* $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ *es un ideal cíclico y proyectivo de* $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$*.*

Demostración.

Hacemos $B = \mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ y $\overline{B} = \mathrm{RCFM}(\mathbb{Q})$. Denotaremos por M al anulador por la izquierda de X en B Recordemos que M es sumando directo de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Si M es finitamente generado, trivialmente existe un idempotente $f \in B$ tal que $M = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} f$, así que es cíclico y proyectivo.

Supongamos entonces que M no es finitamente generado. Definimos como en el Lema 3.2.2, la familia M_i. Ahora, por inducción, vamos a construir una familia independiente $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de sumandos directos de M finitamente generados tal que

1. $M = \oplus_{i\in\mathbb{N}} K_i$.
2. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq n_i$ y $M_i = \oplus_{n_i \leq j} K_j$.

Sea $j_1 = 1$ y $M_1 = M$. Consideremos cualquier base $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para M_1. Sea $d_1 = \mathrm{mcd}\{b_{1n} \neq 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ y b'_1 el elemento de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tal que $d_1 b'_1 = b_1$. Claramente $b'_1 \in M$. Existe un elemento c_1 de $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}^{(\mathbb{N})}$, que visto como un vector columna cumple que $b'_1 c_1 = 1$, con el producto escalar usual. De hecho, $M = \mathbb{Z} b'_1 \oplus C_1$, donde C_1 es el núcleo de la aplicación definida por el producto interior por c_1. Como $c_1 \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, existe un número natural j_2, tal que $M_{j_2} \subset C_1$. Por el Lema 3.2.2, M_{j_2} es un sumando directo de C_1 con un complemento C_1' finitamente generado. Por tanto $M = M_{j_1} = \mathbb{Z}b_1' \oplus C_1' \oplus M_{j_2}$. Hacemos $K_1 = \mathbb{Z}b_1' \oplus C_1'$. Entonces $M_{j_1} = K_1 \oplus M_{j_2}$ con $b_1 \in K_1$.

Supongamos que ya tenemos construidos los submódulos de la familia $K_1, \ldots K_{n-1}$, de tal manera que $M_{j_i} = K_i \oplus M_{j_{i+1}}$ y $b_1, \ldots, b_r \in K_1 \oplus \cdots \oplus K_{n-1}$ con $r \geq n-1$. Sea $s > r$ el primer índice para el cual $b_s \notin K_1 \oplus \cdots \oplus K_{n-1}$. Como $M = K_1 \oplus \cdots \oplus K_{n-1} \oplus M_{j_n}$ entonces $b_s = k_s + m_s$ donde $k_s \in K_1 \oplus \cdots \oplus K_{n-1}$ y $m_s \in M_{j_n}$. Sea $d = \mathrm{mcd}\{m_{sn} \neq 0\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $m_s' \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tal que $dm_s' = m_s$. Claramente $m_s' \in M_{j_n}$. También es claro que existe un elemento $c \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}^{(\mathbb{N})}$, que visto como un vector columna cumple que $m_s'c = 1$. Así tenemos que $M_{j_n} = \mathbb{Z}m_s' \oplus C$, donde C es el núcleo de la aplicación definida por el producto interior por c. Como $c \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ y $b \in B$, existe un número natural j_{n+1}, tal que $M_{j_{n+1}} \subset C$. De hecho, por el Lema 3.2.2, $M_{j_{n+1}}$ es un sumando directo de C con un complemento C' finitamente generado. Por tanto $M_{j_n} = \mathbb{Z}m_s' \oplus C' \oplus M_{j_{n+1}}$. Hacemos $K_n = \mathbb{Z}m_s' \oplus C'$. Entonces $M_{j_n} = K_n \oplus M_{j_{n+1}}$ con $b_s \in K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$, cumpliéndose la primera condición.

Para probar la segunda condición, vamos a considerar un submódulo de la familia, digamos M_n cualquiera. Como $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ existe un índice $r \in \mathbb{N}$ tal que $M_{j_r} \supseteq M_n \supsetneq M_{j_{r+1}}$. Vamos a demostrar que $M_n \subset \oplus_{t \geq r} K_t$. Consideremos un elemento $x \in M_n$, sabemos que existe un índice $s \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_1 \oplus \cdots \oplus K_s$. Como $(K_1 \oplus \cdots \oplus K_{r-1}) \cap M_{j_r} = 0$ sabemos que $s \geq r$. Por tanto $x = k + l$ donde $k \in K_1 \oplus \cdots \oplus K_{r-1}$ y $l \in K_r \oplus \cdots \oplus K_s$. Como $M_j = K_r \oplus \cdots \oplus K_s \oplus M_{j_{r+1}}$, entonces $k = 0$, porque $k = x - l \in M_{j_r} \cap (K_1 \oplus \cdots \oplus K_{r-1}) = 0$, ya que $M_{j_r} = \oplus_{t \geq r} K_t$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Ahora, cada K_i tiene rango finito. Elegimos una base para cada K_i y las vamos colocando como filas en una matriz $K \in B$ (por construcción de los M_i). Por la Propiedad (2) anterior, las filas de k visto como vectores constituyen una base de M.

Vamos a comprobar que $\mathrm{l}_B(X) = Bk$. Consideremos a un elemento de $\mathrm{l}_B(X)$. Consideremos las filas de a, $\{e_j a\}_{j \in \mathbb{N}}$ como vectores de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Como ya vimos, las filas de k son base de M, por tanto la ecuación matricial $Yk = a$ tiene solución única en $\mathrm{RFM}(\mathbb{Z})$.

Vamos a ver que $Y \in B$. Consideremos j_0 un índice, considerando Ye_{j_0} como vector (columna), denotaremos por $Y(i, j_0)$ el coeficiente de k_{j_0} cuando escribimos a_i como combinación lineal de los elementos k_j. Ahora, el elemento k_{j_0} pertenece a algún K_t, y existe un índice $r \in \mathbb{N}$ tal que $K_t \cap M_r = 0$. Por otro lado, como $a \in B$ existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que $a_{s+n} \in M_r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto $Y(s+n, j_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así, $Y \in B$.

Finalmente, como k es base para M, tenemos que $Bk \cong B$ como B-módulos por la izquierda.

$\square$

Corolario 3.2.4.

El anillo $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ *es coherente por la izquierda y por la derecha.*

Demostración.

Inmediato de la definición de anillo coherente y del teorema anterior.

$\square$

Corolario 3.2.5.

Todo ideal por la derecha o por la izquierda, finitamente generado de $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ *tiene dimensión proyectiva menor o igual a* 2.

Demostración.

Inmediato del hecho de que, por el teorema anterior, todo anulador de $\mathrm{RCFM}(\mathbb{Z})$ es proyectivo.

$\square$

Existe una generalización muy reciente [13] de estos resultados para los anillos noetherianos. Las técnicas de demostración son muy diferentes de las que aquí hemos expuesto. Sólo vamos a comentar los resultados para completar porque ya no forman parte de nuestro trabajo.

Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Para cada índice $i \in \alpha$, vamos a considerar la aplicación $\pi_i : \mathrm{RCFM}_\alpha(R) \to R^{(\alpha)}$, la cual, asocia a cada matriz a de $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ la i-ésima columna de la matriz, visto como un elemento de $R^{(\alpha)}$. Sea I un ideal por la izquierda de $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$, como $\pi_i(a) = \pi_j(e_{ji}a)$ y ambas matrices están en I, podemos hablar de $\pi(I)$ sin especificar el índice.

Definición 3.2.6.

Sea R un anillo y α un cardinal infinito, diremos que un ideal I por la izquierda de $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ *es* ***cerrado*** *si para cada elemento* $a \in \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ *que cumpla que $\pi_i(a) \in \pi(I)$ para todo $i \in \alpha$ se tiene que $a \in I$.*

Teorema 3.2.7.

Sea R un anillo Noetheriano por la izquierda. Para todo conjunto $X \subset$ $\mathrm{RCFM}(R)$ *el anulador por la izquierda* $\mathrm{l}_{\mathrm{RCFM}(R)}(X)$ *es un ideal principal de* $\mathrm{RCFM}(R)$.

Corolario 3.2.8.

Si R es un anillo noetheriano por la izquierda entonces $\mathrm{RCFM}(R)$ *es un anillo coherente por la izquierda.*

Teorema 3.2.9.
Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. *El anillo R es noetheriano por la izquierda.*

2. *Todo ideal por la izquierda cerrado de* $\mathrm{RCFM}(R)$ *es finitamente generado.*

3. *Todo ideal por la izquierda cerrado de* $\mathrm{RCFM}(R)$ *es cíclico.*

3.3. Propiedades más generales

Ahora vamos a usar el Teorema 3.1.1, junto con la caracterización que conocemos del radical de Jacobson de $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ para obtener algunos resultados sobre anillos más generales. Al igual que hicimos en el capítulo anterior, se trata de aprovechar los resultados anteriores para relacionar propiedades de anillos tales que módulo el radical son semisimples, con sus anillos de matrices de filas y columnas finitas.

La aplicación más directa, es decir, casi sin hacer más cuentas, se tiene en el caso de los anillos semiprimarios, como veremos a continuación.

Teorema 3.3.1.
Sea R un anillo. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. *El anillo R es semiprimario.*

2. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es T-nilpotente por la izquierda y por la derecha y el anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer para cualquier cardinal infinito α.*

3. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es nilpotente y para cualquier cardinal infinito α, el anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer.*

4. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es T-nilpotente por la izquierda y por la derecha y el anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer para algún cardinal infinito α.*

5. *El ideal* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es nilpotente y para algún cardinal infinito α, el anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer.*

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Es consecuencia directa del Corolario 1.5.8 y el Teorema 3.1.1, junto con el hecho de que, en este caso, los anillos $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ y $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ son isomorfos.

[$2 \Rightarrow 3$] Por hipótesis, $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es T-nilpotente por la izquierda y por la derecha, luego el Corolario 1.5.8 nos da directamente el resultado.

[$2 \Rightarrow 4$] Es un caso particular.

[$3 \Rightarrow 5$] Es un caso particular.

[$4 \Rightarrow 5$] Es análogo a [$2 \Rightarrow 3$].

[$5 \Rightarrow 1$] Por el Teorema 3.1.1 y los Corolarios 1.5.7 y 1.5.8, junto con el hecho de que, en este caso, los anillos $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ y $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ son isomorfos, se tiene que $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple artiniano y que $\mathrm{J}(R)$ es nilpotente. Luego R es semiprimario.

$\square$

A continuación, vamos a probar un resultado análogo al establecido en el capítulo anterior sobre la condición de levantamiento de idempotentes módulo el radical de Jacobson. A diferencia de los anillo regulares von Neumann, no existe la definición de anillo Semi Baer. Eso no quiere decir que no haya generalizaciones muy interesantes como lo anillos quasi-Baer, Riccart y otros.

Proposición 3.3.2.
Sea R un anillo y α un cardinal infinito. Si el anillo $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$ *módulo* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es un anillo de Baer entonces* $\mathrm{J}(R)$ *es un ideal T-nilpotente por la izquierda y por la derecha.*

Demostración.
Llamaremos $B = \mathrm{RCFM}_\alpha(R)$. Consideremos una familia de elementos $r_1, \dots \in \mathrm{J}(R)$. Consideremos la matriz diagonal $r \in B$ definida por $r(i,i) = r_i$ para todo $i < \omega$ y cero en el resto. Como $B/\mathrm{J}(B)$ es de Baer entonces el anulador por la derecha de $r + \mathrm{J}(B) \in B/\mathrm{J}(B)$ está generado por un idempotente. Sea $b \in B$ la matriz tal que $\overline{b} = b + \mathrm{J}(B)$ es dicho generador. Recordemos que $\overline{b}$ es idempotente.

Para todo $a \in B$ tenemos que $ra \in \mathrm{J}(B)$ implica $(1-b)a \in \mathrm{J}(B)$. En particular para cada $i \in \alpha$, por construcción de r y por la caracterización del radical, tenemos que $re_i \in \mathrm{J}(B)$ y por tanto que $(1-b)\,e_i \in \mathrm{J}(B)$ para todo $i \in \alpha$. Luego $(1-b)(i,i) = 1 - b(i,i) \in \mathrm{J}(R)$, y por tanto $b(i,i)$ tiene inverso en R. Sea c_i dicho inverso y c la matriz diagonal definida por $c(i,i) = c_i$ para todo índice $i < \omega$ y cero en el resto. Como $rbc \in \mathrm{J}(B)$ tiene como elemento diagonal

$$(rbc)(i,i) = \sum_j \sum_k r(i,j)\, b(j,k)\, c(k,i) =$$
$$r(i,i)\, b(i,i)\, c(i,i) = r_i b(i,i)\, c_i = r_i$$

y por la caracterización de radical (Proposición 1.5.6), existe un índice n tal que $r_1, \ldots, r_n = 0$.

□

Teorema 3.3.3.
Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El anillo R es perfecto por la izquierda y por la derecha.*
2. *El anillo cociente* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer para todo cardinal infinito α.*
3. *El anillo cociente* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer para algún cardinal infinito α.*

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Como R es perfecto por la izquierda y por la derecha, sabemos que $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)) = \mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ y por tanto tenemos un isomorfismo de anillos entre $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ y $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$. Usando el Teorema 3.1.1 tenemos que $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es un anillo de Baer.

[$2 \Rightarrow 3$] Un caso particular.

[$3 \Rightarrow 1$] Por la Proposición 3.3.2, $\mathrm{J}(R)$ es T-nilpotente por la izquierda y por la derecha y por Corolario 1.5.7, $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es igual a $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ el cual es isomorfo, visto como anillo, a $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$. Luego éste último anillo es un anillo de Baer. Por el Teorema 3.1.1 $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple y por tanto R es perfecto por la izquierda y por la derecha.

□

Una variante del teorema anterior que puede resultar de interés se tiene en el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4.
Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El anillo R es perfecto por la izquierda y por la derecha.*
2. *El radical de Jacobson verifica* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)) = \mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ *y el anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ *es de Baer para todo cardinal infinito α.*
3. *El radical de Jacobson verifica* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)) = \mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ *y el anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ *es de Baer para algún cardinal infinito α.*

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Como R es perfecto por ambos lados entonces el radical de R, $\mathrm{J}(R)$, es T-nilpotente también por ambos lados. Por el Corolario 1.5.7, se tiene entonces que $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)) = \mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$. Como R es perfecto por ambos lados entonces $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple artiniano, así que, por el Teorema 3.1.1 el anillo $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ es anillo de Baer.

Finalmente, la igualdad $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R)) = \mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ implica que $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ es isomorfo a $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$, como anillo, lo cual nos da el resultado buscado.

[$2 \Rightarrow 3$] Es un caso particular.

[$3 \Rightarrow 1$] Por el Corolario 1.5.7, la igualdad entre los radicales, $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ y $\mathrm{RCFM}_\alpha(\mathrm{J}(R))$ implica que el radical de Jacobson de R, es T-nilpotente por ambos lados.

Por hipótesis, $\mathrm{RCFM}_\alpha(R/\mathrm{J}(R))$ es de Baer, lo cual, por el Teorema 3.1.1, implica que $R/\mathrm{J}(R)$ es semisimple artiniano. Luego R es perfecto por ambos lados.

□

Vamos a terminar presentando otra aportación (véase [13]), que puede resultar de mucho interés. Nos referimos a la relación entre un anillo R artiniano y su anillo de matrices de filas y columnas finitas.

Teorema 3.3.5.
Un anillo R es artiniano por la izquierda si y sólo si para cualquier cardinal infinito α, se cumple que:

1. *El anillo* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)/\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es de Baer.*
2. *El radical de Jacobson* $\mathrm{J}(\mathrm{RCFM}_\alpha(R))$ *es cíclico como ideal por la izquierda de* $\mathrm{RCFM}_\alpha(R)$.

Bibliografía

[1] G. Abrams y J. Haefner, “Picard groups and infinite matrix rings”, *Trans. A.M.S.* **350** 1998, 2737-2752.

[2] F.W. Anderson y K.R. Fuller, Rings and Categories of Modules, 2ed., Graduate Texts in Mathematics (Volume 13), Springer - Verlag, New York, 1992.

[3] P.N. Ánh y L. Márki, “Morita equivalence for rings without identity”, *Tsukuba J. Math.* **11** 1987, 1-16.

[4] L. Bonami, “Morita equivalent rings are isomorphic”, *Arch. Math.* **34** 1980, 108-110.

[5] M. Bolla, “Isomorphisms between infinite matrix rings”, *Lin. Alg. App.* **69** 1985, 239-247.

[6] C. Busqué y J. J. Simón, “Relating properties of a ring with properties of matrix rings coming from Ornstein dual pairs”, *J. Algebra*, **264** 2003, 199-210.

[7] Bo Stenstrm, “Rings of quotients”, *Springer-Verlag, Berlin* 1975.

[8] V. Camillo, “Morita equivalence and infinite matrix rings”, *Proc. A.M.S.* **90** 1984, 186-188.

[9] V. Camillo, F. J. Costa-Cano y J. J. Simón, “Relating properties of a ring and its ring of row and column finite matrices”, *J. Algebra* **244** 2001, 435-449.

[10] F. J. Costa Cano, Relaciones entre las propiedades de un anillo y su anillo de matrices infinitas, Tesina de licenciatura, Universidad de Murcia, 1998.

[11] F. J. Costa Cano y J. J. Simón, “On semiregular infinite matrix rings”, *Comm. Alg.*, **27** (1999), 5737-5740

[12] Chase S.U., "Function topologies on abelian groups", Illinois J. Math, 7, 1963, 593-608.

[13] Á. del Río y J. J. Simón, "Finitenes conditions and infinite matrix rings", *Proc. AMS*, por aparecer.

[14] P. C. Exlof y A. H. Mekler, Almost Free Modules, *North-Holland*, Amsterdam, 1990.

[15] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups (Volume II), Academic Press, New York, 1972.

[16] J.L. García, "The characterization problem for endomorphism rings", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **50** 1991, 116-137.

[17] J.L. García, "The finite column matrix ring of a ring", *Proceedings of the first Spanish-Belgian week on Algebra and Geometry* Eds. J. L. Bueso, M. I. Segura y A. Verschoren, R.U.C.A., Antwerpen, 1988, 64-74.

[18] J.L. García y J.J. Simón, "Morita equivalence for idempotent rings", *J. Pure App. Alg.* **76** 1991, 39-56.

[19] J.L. García y J.J. Simón, "Automorphisms of subrings of RFM(R)", *Arch. Math.* **62** 1994, 116-125.

[20] K. R. Goodearl, J. Moncasi, P. Menal, "Free and residually artinian regular rings" J. Algebra 156(2) 1993, 407-432.

[21] J. Haefner, A. del Río, y J.J. Simón, "Isomorphisms of row and column finite matrix rings", *Proc. A.M.S.* **125** 1997, 1651-1658.

[22] N. Jacobson, The Structure of Rings, American Mathematical Society Publishers, Providence, R.I., 1968.

[23] I. Kaplansky, Rings of Operators, Benjamin, N. Y., 1968.

[24] G. W. Mackey, "On infinite-dimensional linear spaces", *Trans. AMS,* **57**(1945), 155-207.

[25] G. W. Mackey, "Note on a theorem of Murray", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 322-325.

[26] K. Morita, "Duality for modules and its application to the theory of rings with minimum condition", *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Ser. A* **6** 1958, 83-142.

[27] W. K. Nicholson, “Semiregular modules and rings”, *Can. J. Math.* 1976, 1105-1120.

[28] D. Ornstein, “Dual vector spaces”, *Ann. Math.* **69** 1959, 520-534.

[29] B. L. Osofsky, “Some properties of rings reflected in endomorphism rings of free modules”, *Cont. Math.* **13** 1982, 179-181.

[30] A. del Río y J.J. Simón, “Intermediate rings between matrix rings and Ornstein dual pairs”, preprint.

[31] L. H. Rowen, *Ring Theory,* vols. 1 and 2, Academic Press, Boston, 1988.

[32] R. F. Shanny, “Regular endomorphism rings of free modules” *J. London Math. Soc.* **2**(4) 1971, 353-354.

[33] N. E. Sexauer y J. E. Warnock, “The radical of the row-finite matrices over an arbitrary ring”, **Trans. A.M.S. 139** 1969, 287-295.

[34] J.J. Simón, “Morita equivalent row finite matrix rings are isomorphic”, *J. Alg.* **173** 1995, 390-393.

[35] J.J. Simón, “Finitely generated projective modules over row and column finite matrix rings”, *J. Algebra* **208** 1998, 165-184.

[36] W. Stephenson, “Characterization of rings and modules by means of lattices”, Ph.D. thesis, Bedford College, University of London, 1965.

[37] W. Stephenson y G. Tsukerman, “Rings of endomorphism of projective modules”, *Siberian Math. J.* **11** 1970, 181-184.

[38] R. Ware, “Endomorphism rings of projective modules”, Trans. AMS, **155**(1)(1971).

[39] R. Ware y J. Zelmanovitz, “The Jacobson radical of the endomorphism ring of a projective module”, *Proc. A.M.S.* **26** (1970), 15-20.

[40] K. Wolfson, “An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations”, *Amer. J. Math.* **75**(1953), 358-386.

[41] J. Zelmanovitz, “On the Jacobson density theorem”, *Contemporary Math.* AMS **13**(1982) 155-162.

Índice alfabético