



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

*EL ANILLO MÍNIMO DE UN CUERPO CONVEXO. ALGUNOS  
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN*

Pedro José Herrero Piñeyro

2006





UNIVERSIDAD  
DE MURCIA

---

DPTO. DE MATEMÁTICAS

EL ANILLO MÍNIMO DE UN CUERPO CONVEXO. ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Don Pascual Lucas Saorín, Catedrático de Universidad del Área de Geometría y Topología y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA: Que la Tesis Doctoral titulada “EL ANILLO MÍNIMO DE UN CUERPO CONVEXO. ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN”, ha sido realizada por D. Pedro José Herrero Piñeyro, bajo la inmediata dirección y supervisión de D<sup>a</sup> María de los Ángeles Hernández Cifre, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a 22 de Septiembre de 2006

Fdo: Pascual Lucas Saorín





UNIVERSIDAD  
DE MURCIA

---

DPTO. DE MATEMÁTICAS

EL ANILLO MÍNIMO DE UN CUERPO CONVEXO. ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

D<sup>a</sup> María de los Ángeles Hernández Cifre, Profesora Titular de Universidad del Área de Geometría y Topología en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZA: La presentación de la Tesis Doctoral titulada “EL ANILLO MÍNIMO DE UN CUERPO CONVEXO. ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN”, realizada por D. Pedro José Herrero Piñeyro, bajo mi inmediata dirección y supervisión, en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 22 de Septiembre de 2006

Fdo: María de los Ángeles Hernández Cifre



Mi sincero agradecimiento a la profesora M<sup>a</sup> Ángeles Hernández Cifre, que me admitió como atípico estudiante de doctorado y me ayudó a abrir las puertas del fascinante mundo de la Geometría Convexa. Su esfuerzo, sus indicaciones y correcciones, han sido imprescindibles para realizar esta memoria.

Mi reconocimiento se extiende a Luis Alías, Pascual Lucas, Miguel Ángel Meroño y José A. Pastor, compañeros del área de Geometría y Topología, por su apoyo y acogida. Deseo hacer una mención especial para Ángel Ferrández, que me acogió en el grupo y ha mantenido un constante interés. Agradezco el ánimo de otros compañeros del Departamento y de la Facultad, destacando a Manuel Pintado y Antonio Linero. Un recuerdo para el profesor Bernardo Cascales con quien empecé en la investigación.

Una tesis doctoral a los cuarenta y seis años de edad, no es lo habitual. La ilusión, el esfuerzo y el trabajo, adquieren un significado y una importancia distinta, que resulta con frecuencia, difícil de comunicar y que no todos comprenden. Hay que empezar casi desde cero, para situarse en posición de poder hacer algo, modestamente, en el campo de la investigación matemática. Obligaciones irrenunciables, asumidas voluntariamente, como la familia, hijos... limitan y condicionan, a la vez que enriquecen y dan una nueva dimensión. Para el final queda reconocer el apoyo y comprensión de mi familia, sobre todo el de Toñi, mi mujer, mi compañera y amiga.



*A Toñi*

*Con una mención especial a mis hijos Esperanza y Guillermo, a mi hermano Miguel Ángel, a mi madre Mary Luz y al recuerdo imborrable de mi padre Perico “el Chuquel”*



# Índice general

Índice de Figuras	xvi
Introducción	xvii
<b>1. Conceptos y resultados básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Algunas definiciones y notación . . . . .	1
1.1.1. Medidas asociadas a un conjunto convexo . . . . .	2
1.2. El anillo mínimo. Un poco de historia . . . . .	3
1.2.1. El origen del anillo mínimo . . . . .	4
Las propiedades clásicas del anillo mínimo . . . . .	5
1.2.2. El anillo mínimo en otros contextos más generales . . . . .	7
1.3. El estudio de las desigualdades geométricas . . . . .	8
1.3.1. Desigualdades relacionando dos magnitudes geométricas . . . . .	9
1.3.2. Desigualdades relacionando tres magnitudes geométricas . . . . .	10
<b>2. El anillo mínimo y las seis magnitudes geométricas clásicas</b>	<b>13</b>
2.1. Algunos resultados previos . . . . .	14
2.2. El área y el perímetro . . . . .	22
2.3. El diámetro y la anchura . . . . .	23
2.4. El circunradio . . . . .	27
2.5. El inradio . . . . .	30
<b>3. El anillo mínimo y el circunradio</b>	<b>31</b>
3.1. Anillo mínimo, circunradio, y área (o perímetro) . . . . .	31
3.2. Anillo mínimo, circunradio y diámetro . . . . .	37

3.3. Anillo mínimo, circunradio y anchura . . . . .	49
3.4. Anillo mínimo, circunradio e inradio . . . . .	56
<b>4. El anillo mínimo y el inradio</b>	<b>61</b>
4.1. Anillo mínimo, inradio y área (o perímetro) . . . . .	61
4.2. Anillo mínimo, inradio y diámetro . . . . .	66
4.3. Anillo mínimo, inradio y anchura . . . . .	70
4.4. Anillo mínimo, inradio y circunradio . . . . .	76
<b>Índice de Resultados</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>
<b>Índice de Símbolos</b>	<b>87</b>

# Índice de figuras

1.	Anillos de un conjunto convexo . . . . .	XVII
2.	El conjunto convexo que minimiza el déficit isoperimétrico. . . . .	XVIII
3.	El conjunto $\text{conv}\{c_r, A, B\}$ (izquierda) y el trapecio circular $K^T$ (derecha). . . . .	XXI
1.1.	El diámetro, la anchura mínima, el circunradio y el inradio de $K$ . . . . .	3
1.2.	Conjunto convexo que minimiza el déficit isoperimétrico. . . . .	4
1.3.	Conjunto no convexo, que no cumple las propiedades <b>(P1)</b> y <b>(P3)</b> . . . . .	6
1.4.	Algunos de los conjuntos extremales más usuales. . . . .	9
1.5.	El circuncírculo, el incírculo y los círculos del anillo mínimo. . . . .	12
2.1.	Existen puntos cuyo ángulo central es mayor o igual que $2 \arccos(r/R)$ . . . . .	14
2.2.	Posiciones de rectas soporte a $c_r$ en puntos de $\partial c_r \cap \partial K$ . . . . .	15
2.3.	$K$ está contenido en un segmento del círculo $C_R$ . . . . .	15
2.4.	Existen, al menos, dos puntos $P$ y $Q$ en $\partial K \cap \partial C_R$ . . . . .	16
2.5.	El ángulo central de $A, B \in \partial C_R \cap \partial C_K$ es mayor o igual que $2 \arccos(r/R)$ . . . . .	17
2.6.	Existen puntos de $\partial K$ en los arcos de circunferencia de $\partial K^c$ . . . . .	18
2.7.	(a) $c_r \equiv c_K$ ; (b) $\text{card}(\partial c_r \cap \partial c_K) = 2$ ; (c) $\text{card}(\partial c_r \cap \partial c_K) = 1$ ; (d) $c_r \cap c_K = \emptyset$ . . . . .	19
2.8.	Un conjunto $K^{2c}$ contenido en el cuerpo $K$ , con igual anillo mínimo e inradio. . . . .	19
2.9.	El ángulo central $\alpha$ que forman $P', Q' \in \partial K \cap \partial c_r$ verifica $\alpha = 2 \arccos(r/R)$ . . . . .	20
2.10.	Construcción del conjunto $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\} \subset K$ . . . . .	21
2.11.	Un 2-cap-body y un segmento de círculo con anillo mínimo dado. . . . .	22
2.12.	Notación para el segmento del círculo $C_R$ . . . . .	23
2.13.	Conjuntos convexos con anillo mínimo $A(c, r, R)$ y anchura máxima. . . . .	24
2.14.	Conjuntos convexos con anillo mínimo $A(c, r, R)$ y diámetro mínimo. . . . .	25

2.15. Diámetro de $K^c$ cuando $R \leq 5r/3$ . . . . .	26
2.16. (a) $s = (R^2 + 3r^2)/(4r)$ si $R \leq r\sqrt{5}$ . (b) $R = r\sqrt{5}$ . (c) $s = \sqrt{R^2 - r^2}$ si $R \geq r\sqrt{5}$ . . .	27
2.17. Conjuntos con anillo $A(c, r, R)$ y circunradio (a) $(R^2 + 3r^2)/(4r)$ y (b) $\sqrt{R^2 - r^2}$ . . .	28
2.18. Minimalidad de los dos valores posibles para $R_K$ . . . . .	29
2.19. Conjuntos convexos con anillo mínimo $A(c, r, R)$ y circunradio mínimo. . . . .	29
2.20. Conjuntos convexos con anillo mínimo prefijado e inradio máximo. . . . .	30
3.1. El 2-cap-body $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$ tiene área y perímetro mínimos. . . . .	32
3.2. Construcción de un 2-cap-body con anillo mínimo y circunradio dados. . . . .	33
3.3. Trapecio circular $K^T$ . . . . .	34
3.4. Maximizando área y perímetro: conjunto $K_1 \supset K$ con igual anillo y circunradio. . .	35
3.5. Para maximizar el área y el perímetro de $K_1$ , basta considerar los conjuntos $K_2$ . . .	35
3.6. $A$ y $p$ son máximos cuando $\ell_E, \ell_D$ son perpendiculares a $cx_0$ y $A \equiv A', B \equiv B'$ . . .	36
3.7. El trapecio circular $K^T$ tiene diámetro máximo para $A(c, r, R)$ y $R_K$ fijos. . . . .	37
3.8. Un cap-body $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$ con diámetro mínimo $D = R + r$ . . . . .	38
3.9. Un cap-body $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$ con diámetro mínimo $D = \sqrt{3}R_K$ . . . . .	38
3.10. Conjuntos $\text{conv}\{c_r, A, B, N'(Z)\}$ con diámetro mínimo $D = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . . . . .	39
3.11. Casos $R_K = R$ y (a) $R < (1 + \sqrt{3})r/2$ , (b) $R = (1 + \sqrt{3})r/2$ , (c) $R > (1 + \sqrt{3})r/2$ . .	41
3.12. Conjunto extremal cuando $R_K = R$ y $R \geq 2r$ . . . . .	42
3.13. Los puntos $P$ y $Q$ de $\partial K \cap \partial C_R$ . . . . .	43
3.14. Los puntos $X, Y, Z \in \partial C_K \cap \partial K$ forman un triángulo acutángulo. . . . .	43
3.15. Basta considerar $L = \text{conv}\{c_r, P, Q, X, Y, Z\}$ , donde $\overline{XZ}$ o $\overline{YZ}$ corta a $c_r$ . . . . .	44
3.16. $L$ tiene diámetro $R + r$ si $R_K \leq \sqrt{(R + r)^3/(8r)}$ . . . . .	45
3.17. Caso en que $d(A, N') = d(B, N') > R + r$ . . . . .	45
3.18. $L$ tiene diámetro $R + r$ si $R_K \geq \sqrt{(R + r)^3/(8r)}$ ; $\sqrt{3}R_K$ si $R_K \geq (R + r)/\sqrt{3}$ . . . .	46
3.19. $L$ tiene diámetro $\sqrt{3}R_K$ si $5r/3 \leq R \leq 2r$ y $R_K \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ . . . . .	47
3.20. $L$ tiene diámetro $2\sqrt{R^2 - r^2}$ si $5r/3 \leq R \leq 2r$ y $R_K \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ . . . . .	48
3.21. $L$ tiene diámetro $2\sqrt{R^2 - r^2}$ si $2r \leq R$ . . . . .	49
3.22. $K^T$ tiene anillo mínimo $A(c, r, R)$ , circunradio $R_K$ y anchura $\omega = 2r$ . . . . .	50
3.23. Cuña circular asimétrica $K^\angle$ . . . . .	50

3.24. La cuña circular asimétrica  $K^\angle$  tiene anchura máxima. . . . . 51

3.25. Maximizando la anchura: conjunto  $K_1 \supset K$  con igual anillo mínimo y circunradio. . . 52

3.26. Para maximizar la anchura de  $K_1$ , basta considerar los conjuntos  $K_2$ . . . . . 53

3.27. Conjunto  $K_2$  cuando  $P \equiv S \equiv A$ . . . . . 54

3.28. La cuña circular asimétrica  $K^\angle$  tiene máxima anchura para  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  fijos. . . 54

3.29. El conjunto  $K_2$  cuando  $R = r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$  y  $R_K = \sqrt{R^2 - r^2}$ . . . . . 55

3.30. Situaciones posibles del punto  $T \in \partial C_K$  cuando  $2r \leq R \leq r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$ . . . . . 55

3.31. El trapecio circular tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , circunradio  $R_K$  e inradio  $r$ . . . . . 56

3.32. La cuña circular asimétrica  $K^\angle$  tiene inradio máximo. . . . . 57

3.33. Maximizando el inradio: conjunto  $K_1 \supset K$  con igual anillo mínimo y circunradio. . . 57

3.34. Para maximizar el inradio de  $K_1$ , basta considerar los conjuntos  $K_2$ . . . . . 58

3.35. (a)  $K_2$  con  $P \equiv S \equiv A$ . (b)  $K^\angle$  tiene inradio máximo para  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  fijos. . . 59

4.1. Segmentos de  $C_R$  con anillo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y área y perímetro máximos. . . . . 62

4.2. El conjunto  $K_d = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N\}$ . . . . . 63

4.3.  $\text{conv}\{K_d, M\}$  tiene área y perímetro mínimos para  $A(c, r, R)$  y  $r_K$  fijos. . . . . 63

4.4. El problema se reduce a estudiar el área y el perímetro de los conjuntos  $K^{2c}$ . . . . . 64

4.5. Construcción del conjunto  $\text{conv}\{K_d, M\}$  con área y perímetro mínimos. . . . . 65

4.6. El conjunto  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo e inradio fijos, y diámetro máximo  $D = 2R$ . . . 67

4.7. Conjuntos  $\text{conv}\{K_d, M\}$  con anillo mínimo e inradio fijos, y diámetro mínimo. . . . . 67

4.8. La distancia de  $M$  a  $N$  es independiente de cómo estén situados  $c_r$  y  $c_K$ . . . . . 68

4.9. La distancia de  $N$  a la recta tangente a  $\partial c_K$  es mínima si  $d(y_0, c) = R(r_K - r)/r$ . . . 69

4.10. Conjuntos con diámetro mínimo según el valor de  $r_K$ . . . . . 69

4.11. El conjunto  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y anchura  $\omega = 2r_K$ . . . . . 70

4.12. Máxima anchura cuando (a)  $R \leq 2r$ , y (b)  $R \geq 2r$  y  $r_K \geq 2r(R - r)/R$ . . . . . 71

4.13. Conjunto con máxima anchura cuando  $R \geq 2r$  y  $r_K \leq 2r(R - r)/R$ . . . . . 71

4.14.  $K^B$  tiene máxima anchura si (a)  $R \leq 2r$ , o (b)  $R \geq 2r$  y  $r_K \geq 2r(R - r)/R$ . . . . . 72

4.15. El segmento  $\overline{M'M''}$  no corta a  $c_K$  cuando  $R \geq 2r$  y  $r_K \leq 2r(R - r)/R$ . . . . . 73

4.16. El problema se reduce a estudiar los conjuntos (a)  $K^s \cap T_{XYZ}$  o (b)  $C_R \cap T_{XYZ}$ . . . 74

4.17. Acercando el incentro  $y_0$  hacia  $c$  se obtiene el conjunto  $K'$  de máxima anchura. . . . . 75

- 4.18. El conjunto  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo e inradio fijos, y circunradio máximo  $R_K = R$ . . . 77
- 4.19. La cuña circular asimétrica  $K^{\angle}$  tiene circunradio mínimo. . . . . 77

# Introducción

Se define un *anillo* con centro  $c \in \mathbb{R}^n$  y radios  $0 \leq r \leq R$  como el conjunto cerrado

$$A(c, r, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq d(x, c) \leq R\};$$

es decir, el formado por los puntos comprendidos entre las esferas (concéntricas) de centro  $c$  y radios  $r$  y  $R$ , valores que se denominan, respectivamente, *radio interior* y *radio exterior* del anillo. Análogamente, las bolas que lo delimitan reciben el sobrenombre de *interior* ( $C_r$ ) y *exterior* ( $C_R$ ). El *espesor* de un anillo  $A(c, r, R)$  es la diferencia  $R - r$  entre sus radios exterior e interior.

Si  $K$  es un compacto del plano euclídeo (no necesariamente convexo), siempre se puede asegurar la existencia de un anillo  $A(c, r, R)$  con centro un punto  $c \in K$ , que contiene a la frontera  $\partial K$ , y con espesor  $R - r$  mínimo (se dará un argumento en el capítulo 1 de esta memoria). Dicho anillo se denomina *anillo mínimo* de  $K$ . Además, si el compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  es convexo (lo que se conoce como *cuerpo convexo*), entonces el anillo mínimo es único.

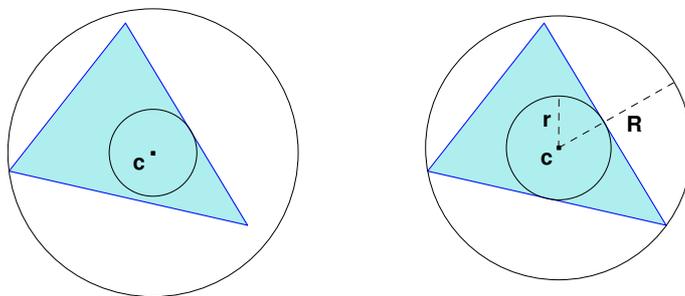


Figura 1: Un anillo cualquiera que contiene a un conjunto convexo (izquierda) y su anillo mínimo (derecha).

Aunque no vamos a detallar aquí la historia de este objeto geométrico (a ello dedicaremos un apartado en el primer capítulo), mencionar que la primera referencia conocida en la literatura sobre el mismo data de 1884 (D'Ocagne, [5]). Sin embargo, no es hasta 1924 cuando queda patente su interés: Bonnesen [2] lleva a cabo un estudio exhaustivo del anillo mínimo, realizando una exposición sistemática de ciertas propiedades que lo caracterizan, con la idea de afinar la famosa desigualdad isoperimétrica clásica en el plano euclídeo. Recordemos que ésta nos dice que la figura de perímetro  $p$  dado que encierra mayor área  $A$  es el círculo; o lo que es lo mismo, que

$$p^2 \geq 4\pi A,$$

alcanzándose la igualdad para el círculo. Bonnesen consideró entonces lo que se conoce como el *déficit isoperimétrico*, esto es, la relación  $p^2/(4\pi) - A$ , y demostró que el mínimo de este funcional se alcanza para el cuerpo convexo que se muestra en la figura 2.

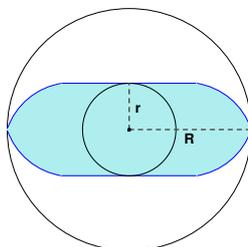


Figura 2: El conjunto convexo que minimiza el déficit isoperimétrico.

Las propiedades fundamentales del anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$  a las que nos referimos son las siguientes:

- (P1) Cada una de las circunferencias  $\partial c_r$  y  $\partial C_R$  toca la frontera  $\partial K$  en, al menos, dos puntos.
- (P2) Los conjuntos  $\partial c_r \cap \partial K$  y  $\partial C_R \cap \partial K$  no pueden separarse.
- (P3) El anillo mínimo asociado a un cuerpo convexo es único.
- (P4) El anillo mínimo de  $K$  es el único anillo que contiene a  $\partial K$  y que verifica las propiedades (P1) y (P2) anteriores.

La mencionada generalización de la desigualdad isoperimétrica se conoce en la actualidad como la *desigualdad de Bonnesen*:

$$p^2 - 4\pi A \geq 4\pi(R - r)^2.$$

En definitiva, Bonnesen obtuvo una relación entre el anillo mínimo de un conjunto convexo, su área y su perímetro, relación que se traduce en una desigualdad geométrica. Así pues, resulta natural plantearse cuáles serían las posibles relaciones entre el anillo mínimo y otras medidas geométricas de un conjunto. Algunas aportaciones a este problema se deben al propio Bonnesen [2, 3], a Favard [7, 8] y a Vincze [26].

En general, el estudio de las desigualdades geométricas ha sido siempre un tema de creciente interés en muy diversas ramas de las matemáticas, principalmente en la Geometría o en el Análisis. Las desigualdades juegan un papel importante, no sólo por el interés que presentan en sí mismas, sino por su aplicación y su contribución a la comprensión de muy diversos aspectos geométricos.

Así, durante muchos años, los matemáticos han estado interesados en el estudio de las desigualdades que relacionan las distintas magnitudes geométricas de un conjunto convexo (área –volumen, perímetro –área de superficie, diámetro, anchura mínima, circunradio, inradio...), y teniendo especial interés, en la mayoría de los casos, la determinación de sus *conjuntos extremales*, es decir, aquellos conjuntos para los que se alcanza la igualdad.

Si se consideran dos medidas geométricas, digamos  $X$  e  $Y$ , y se pretende maximizar (minimizar)  $Y$  para cada valor fijo de  $X$ , el problema consiste en determinar una función  $\phi(X)$  de forma que la desigualdad  $Y \leq \phi(X)$  (respectivamente,  $Y \geq \phi(X)$ ) siempre se verifique, y de manera que, para cada valor de  $X$  positivo, exista un conjunto convexo para el que se alcance la igualdad.

Las desigualdades que relacionan más de dos magnitudes son, lógicamente, más difíciles de obtener, siendo uno de los problemas más estudiados encontrar los conjuntos convexos que maximizan o minimizan una magnitud  $Z$ , cuando se fijan otras dos medidas, digamos  $X$  e  $Y$ . Desde luego, la solución a una pregunta de este tipo se expresa por medio de desigualdades de la forma

$$\phi(X, Y) \leq Z \leq \varphi(X, Y).$$

Pero en este caso, el problema adquiere un mayor interés cuando la igualdad, para una cierta desigualdad  $Z \leq \varphi(X, Y)$ , no se alcanza para una única figura, sino para una familia continua de conjuntos; en tal caso, la desigualdad  $Z \leq \varphi(X, Y)$ , llamada *óptima*, establece cuál es el máximo (o el mínimo) valor de  $Z$  para *cada par* de valores posibles que pueden tomar  $X$  e  $Y$ . Es precisamente este tipo de desigualdades óptimas las que han acaparado nuestro interés.

Podríamos decir, a grandes rasgos, que esta memoria está dedicada al estudio de la relación existente entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo con su circunradio y su inradio, y más concretamente, a la determinación de las desigualdades óptimas cuando, claro está, una de las medidas que entra en juego es el (espesor del) anillo mínimo, y la otra el circunradio o el inradio. A continuación vamos a proceder a describir el contenido específico de cada uno de los cuatro capítulos en que se ha estructurado este trabajo.

La memoria comienza con un *primer capítulo* introductorio, en el que se establece la notación a seguir y se presentan brevemente los conceptos y resultados que serán fundamentales en el posterior desarrollo de los contenidos, tanto de convexidad general, como del anillo mínimo en particular. Así, en una primera sección, se recuerdan nociones importantes como soporte y separación, y se definen las medidas geométricas que van a entrar en juego: el área  $A$ , el perímetro  $p$ , el diámetro  $D$ , la anchura mínima  $\omega$ , el circunradio  $R_K$  y el inradio  $r_K$ . A continuación, se estudia con detalle el anillo mínimo de un conjunto: su definición, historia y propiedades, así como el interés que despierta actualmente. Finalmente, se presentan las desigualdades geométricas y los conjuntos extremales: qué son, cómo se estudian y algunos ejemplos de las y los que, para el trabajo que vamos a desarrollar, serán más representativos.

El *segundo capítulo* está dedicado al estudio de las relaciones existentes entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo plano con cada una de las seis magnitudes geométricas clásicas. Antes de abordar este problema, en una primera sección, se demuestra una serie de propiedades del anillo mínimo de un cuerpo convexo, que completan las cuatro ya conocidas, y que serán de gran utilidad, tanto en este segundo capítulo como en posteriores: si  $K$  es un cuerpo convexo plano con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces

- (a) existen puntos  $P, Q \in \partial C_R \cap \partial K$  tales que el ángulo  $\alpha = \angle(PcQ)$  que determinan junto con el centro  $c$  del anillo verifica

$$\alpha \geq 2 \arccos \frac{r}{R},$$

- (b)  $K$  contiene el conjunto formado por la envoltura convexa de dos puntos de  $\partial C_R \cap \partial K$  y el círculo  $c_r$ , cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ , y
- (c)  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  determinado por dos rectas soporte a  $c_r$ , cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ .

También se prueba una serie de propiedades del anillo mínimo de un cuerpo convexo en relación con su circunradio (o su circuncírculo) y su inradio (o su incírculo); por ejemplo, que  $r \leq r_K \leq R_K \leq R$ , cuáles son las únicas posiciones relativas de estas circunferencias, qué les ocurre a sus puntos de contacto, etc. Estas propiedades serán muy útiles en las demostraciones de los resultados que involucran estas dos medidas.

En las secciones restantes de este segundo capítulo se desarrolla propiamente el estudio de las desigualdades antes mencionadas; de forma más precisa, se determinan *todas* las cotas posibles (superiores e inferiores) para, el área, el perímetro, el diámetro, la anchura mínima, el circunradio y el inradio de un cuerpo convexo, cuando se supone fijo su anillo mínimo.

Obsérvese, por otro lado, que si el circuncírculo y el incírculo de un cuerpo convexo  $K$  son concéntricos, desde luego éstos determinan el anillo mínimo del conjunto; es lo que ocurre, por ejemplo, con los conjuntos de anchura constante. Sin embargo, no siempre tiene por qué ocurrir tal cosa. Es por ello que hemos prestado una atención especial al comportamiento del circuncírculo y el incírculo de un cuerpo convexo con respecto a los círculos de su anillo mínimo. Así, en los *capítulos 3 y 4* de esta memoria se entra ya de lleno en la parte principal del estudio que nos hemos propuesto: la relación existente entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo, su circunradio y su inradio. En esta parte, jugarán un papel clave las propiedades, demostradas en el capítulo 2, que relacionan  $A(c, r, R)$  con  $R_K$  y  $r_K$ .

A lo largo de todo el *capítulo 3*, tanto el anillo mínimo de un cuerpo convexo como su circunradio están fijos y, bajo tales hipótesis, se obtienen *todas* las cotas, superiores e inferiores, en términos de dichos valores, para las cinco magnitudes geométricas clásicas restantes:  $A$ ,  $p$ ,  $D$ ,  $\omega$  y  $r_K$ . Las desigualdades resultantes son las *óptimas* (en el sentido antes mencionado), quedando determinados los correspondientes conjuntos extremales para cada una de ellas.

Del mismo modo, en el *capítulo 4* se determinan *todas* las desigualdades *óptimas* que relacionan el anillo mínimo y el inradio con el resto de medidas geométricas del conjunto, obteniéndose también los conjuntos extremales.

A modo de ejemplo, para dar una idea del tipo de desigualdades sobre las que estamos hablando, el resultado obtenido para el área, cuando se fijan el anillo mínimo y el circunradio, es el siguiente:

**Teorema.** Si  $K$  es un cuerpo convexo con circunradio  $R_K$  y anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces su área  $A$  verifica

$$A \geq 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right),$$

$$A \leq R_K^2 \left( \arcsen \frac{\rho}{R_K} + \arcsen \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + \rho \sqrt{R^2 - r^2} + (2r - \rho) \sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho},$$

donde  $\rho = \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}$ . La igualdad se alcanza, en la primera desigualdad, si, y sólo si,  $K$  es el conjunto  $\text{conv}\{c_r, A, B\}$ , con  $\{A, B\} = C_R \cap C_K$ ; en la segunda, para el trapecio circular  $K^T$  (véase la figura 3, donde el circuncírculo aparece representado con una circunferencia punteada).

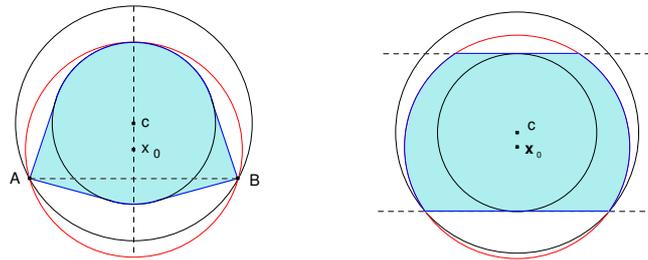


Figura 3: El conjunto  $\text{conv}\{c_r, A, B\}$  (izquierda) y el trapecio circular  $K^T$  (derecha).

La siguiente tabla da una idea de cuáles son los resultados, en términos de los conjuntos extremales, que se han obtenido en estos dos últimos capítulos. Como puede observarse, todos los casos posibles han sido resueltos, lo que cierra completamente el problema que nos habíamos planteado.

Medida	$A(c, r, R)$ y $R_K$ fijos		$A(c, r, R)$ y $r_K$ fijos		Medida
	Máximo para	Mínimo para	Máximo para	Mínimo para	
$A$					$A$
$p$					$p$
$D$					$D$
$\omega$					$\omega$
$r_K$					$R_K$

Los resultados originales que se encuentran recogidos en esta memoria pueden encontrarse en los trabajos [9], [10] y [11].

Antes de entrar de lleno en el primer capítulo de la Memoria, nos gustaría comentar tan sólo que en su parte final se han incluido dos Apéndices, con la intención de facilitar en la medida de lo posible su lectura; en el primero de ellos se presenta una relación ordenada de todas las desigualdades geométricas principales que aparecen en la Memoria, y en el segundo, una lista dispuesta alfabéticamente de las notaciones y símbolos utilizados.

# Capítulo 1

---

## Conceptos y resultados básicos

---

A lo largo de esta memoria vamos a estudiar en profundidad la relación existente entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo, su circunradio y su inradio, lo que se traducirá en desigualdades en las que intervendrán, además de las ya mencionadas, las cuatro magnitudes geométricas clásicas restantes: el área, el perímetro, el diámetro y la anchura mínima. Es por ello que comenzamos este capítulo estableciendo la notación que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo, así como las definiciones básicas que necesitaremos. A continuación presentaremos una rápida introducción histórica sobre el anillo mínimo, desde su definición y estudio de sus propiedades básicas, hasta los resultados más actuales. Finalmente, en la última sección de este primer capítulo, hablaremos brevemente sobre el estudio general de las desigualdades geométricas y de los conjuntos extremales.

### 1.1. Algunas definiciones y notación

Sea  $K$  un cuerpo convexo (esto es, un conjunto convexo, compacto y con interior no vacío) del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Mediante  $\partial K$  representaremos su frontera, y con  $\text{int } K$  su interior.

Dado un conjunto convexo  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , se dice que un hiperplano  $H$  (recta  $\ell$ , en el caso plano) *soporta*  $K$  en un punto  $x \in K$ , si  $x \in K \cap H$  y además  $K$  queda contenido en uno de los dos semiespacios  $H^+$  o  $H^-$  que dicho hiperplano determina. Así, diremos que  $H$  es un *hiperplano soporte a*  $K$  si  $H$  soporta  $K$  en algún punto  $x$ , el cual será, necesariamente, un punto de su frontera. Si además  $K$  es compacto, entonces, para cada dirección dada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , existen dos hiperplanos soporte a  $K$  (no necesariamente distintos) ortogonales a  $u$ . Dichos hiperplanos determinan la banda de menor anchura, perpendicular a la dirección  $u$ , que contiene al conjunto  $K$ ; tal distancia (entre dichos hiperplanos) se denomina *anchura de  $K$  en la dirección  $u$* , y se representa por  $\omega(K, u)$ .

Otro concepto importante en convexidad, y muy en particular para el trabajo que vamos a desarrollar en esta memoria, es el de separación de conjuntos. Sean  $K$  y  $L$  dos subconjuntos cualesquiera de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que un hiperplano  $H$  *separa*  $K$  y  $L$ , si  $K \subset H^-$  y  $L \subset H^+$ , o viceversa (en el sentido más general, es decir, pudiendo incluso estar uno de los conjuntos contenido en el propio hiperplano).  $H$  se denomina entonces *hiperplano de separación* de  $K$  y  $L$ . Un estudio minucioso de éstos y otros conceptos y resultados básicos en convexidad puede consultarse en [24].

### 1.1.1. Medidas asociadas a un conjunto convexo

Existen muy diversas magnitudes que miden características geométricas de los conjuntos, aunque las medidas más estudiadas clásicamente son el *volumen* (*área*, en el caso del plano), el *área de superficie* (*perímetro* en  $\mathbb{R}^2$ ), el *diámetro*, la *anchura mínima*, el *inradio* y el *circunradio*. Recordemos brevemente cómo se definen estas medidas.

- El volumen  $V(K)$  ( $A(K)$  para el área) es la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional del conjunto.
- El área de superficie  $S(K)$  ( $p(K)$  para el perímetro) es el límite de las áreas de superficie de cualquier sucesión de politopos convexos (esto es, la envoltura convexa de un número finito de puntos) que converjan al conjunto  $K$ , siendo el área de superficie de un politopo la suma de las medidas  $(n-1)$ -dimensionales de sus caras. Esta definición tiene perfecto sentido, pues es un hecho conocido que cualquier conjunto convexo puede aproximarse (en el sentido de la métrica de Hausdorff) por politopos.
- La anchura mínima  $\omega(K)$  es el mínimo de las distancias entre dos hiperplanos soporte a  $K$  paralelos, es decir,  $\omega(K) := \min\{\omega(K, u) : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .
- El diámetro  $D(K)$  es el máximo de las distancias entre dos puntos cualesquiera de  $K$ , esto es,  $D(K) := \max\{d(x, y) : x, y \in K\}$ . Es fácil ver que  $D(K) = \max\{\omega(K, u) : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .
- Entre todas las bolas que contienen a un conjunto convexo  $K$ , existe una (única) que tiene radio mínimo denominada *circumbola* (*circuncírculo* en el caso plano) de  $K$ , cuyo radio recibe el nombre de circunradio de  $K$ . En lo que sigue, representaremos por  $C_K$  el circuncírculo de  $K$ , por  $R_K$  su circunradio y por  $x_0$  su *circuncentro* (esto es, el centro de  $C_K$ ).
- Entre todas las bolas contenidas en un conjunto convexo  $K$ , aquéllas que tienen radio máximo se denominan *imbolas* (*incírculos* en el caso plano) de  $K$ . Tal valor del radio recibe el nombre de inradio de  $K$ . De ahora en adelante, siempre representaremos por  $c_K$  el (cualquier) incírculo de  $K$ , por  $r_K$  su inradio y por  $y_0$  su *incentro* (esto es, el centro de  $c_K$ ).

Una propiedad importante y extremadamente útil de los conjuntos convexos es que los puntos comunes a la frontera de  $K$  y a su circumbola se distribuyen en la superficie de la misma de tal modo que no están situados todos ellos en el mismo hemisferio (véase [4, p. 59]); es decir, el circuncentro pertenece a la envoltura convexa de tales puntos. Y recíprocamente; una bola que contenga al

conjunto  $K$  y que verifique la propiedad anterior va a ser, necesariamente, la circumbola de  $K$ . En el caso del plano, esta propiedad se traduce en que  $\partial K$  debe contener, o bien dos puntos de  $\partial C_K$  diametralmente opuestos, o bien tres puntos de  $\partial C_K$  que forman un triángulo acutángulo.

Para las imbolas ocurre algo similar: los puntos comunes a la frontera de  $K$  y a cualquiera de sus imbolas se distribuyen en su superficie de tal modo que no están situados en el mismo hemisferio (véase [4, p. 59]); es decir, el correspondiente incentro pertenece a la envoltura convexa de tales puntos. Y aún más, una bola verificando esta propiedad, y que esté contenida en  $K$ , es una imbola de  $K$ . De nuevo, en dimensión 2, esta propiedad se traduce en que  $\partial K$  contiene, o bien dos puntos de  $\partial c_K$  diametralmente opuestos, o bien tres puntos de  $\partial c_K$  que forman un triángulo acutángulo.

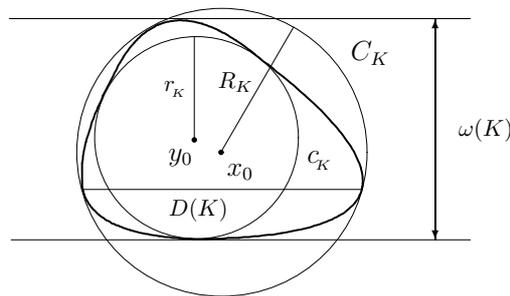


Figura 1.1: El diámetro, la anchura mínima, el circunradio y el inradio de  $K$ .

Dado que nosotros vamos a desarrollar todo nuestro trabajo en el plano, a partir de este momento hablaremos siempre de área, perímetro, circuncírculo e incírculo.

Finalmente, un último apunte sobre la notación que seguiremos. Dados dos puntos  $P$  y  $Q$  del plano euclídeo, representaremos por  $PQ$  la recta que éstos determinan; por  $\overline{PQ}$  el segmento de recta que los une; y por  $\widehat{PQ}$  cualquier arco de circunferencia que tenga a  $P$  y  $Q$  como extremos. Además, si  $P$  y  $Q$  se sitúan sobre una circunferencia (centrada en un cierto punto  $c$ ), denominaremos *ángulo central* para  $P$  y  $Q$  al ángulo que éstos determinan respecto a su centro, es decir, al ángulo  $\angle(PcQ)$ .

## 1.2. El anillo mínimo. Un poco de historia

Se define un *anillo* con centro  $c \in \mathbb{R}^n$  y radios  $0 \leq r \leq R$  como el conjunto cerrado

$$A(c, r, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq d(x, c) \leq R\};$$

es decir, el formado por los puntos comprendidos entre las esferas (concéntricas) de centro  $c$  y radios  $r$  y  $R$ , valores que se denominan, respectivamente, *radio interior* y *radio exterior* del anillo. Análogamente, las bolas que lo delimitan reciben el sobrenombre de *interior* y *exterior*, y las representaremos por  $c_r$  y  $C_R$ , respectivamente. Además, llamaremos *espesor* o *anchura* de un anillo  $A(c, r, R)$  a la diferencia  $R - r$  entre sus radios exterior e interior.

Si  $K$  es un compacto del plano euclídeo (no necesariamente convexo) y  $x \in K$ , es conocido que, entre todos los círculos de centro  $x$  contenidos en  $K$ , existe uno que tiene radio máximo  $r_x$  (véase, por ejemplo, [4, p. 59–60]); de la misma forma, entre todos los círculos de centro  $x$  que contienen a  $K$ , existe uno con radio mínimo  $R_x$ . Así pues, para cada  $x \in K$ , siempre existe un anillo  $A(x, r_x, R_x)$  con espesor mínimo que contiene a  $\partial K$ . Por otro lado, es evidente que el conjunto de los números reales  $\{R_x - r_x\}_{x \in K}$  está acotado inferiormente; en consecuencia, como  $K$  es compacto, podemos asegurar la existencia de un punto  $c \in K$  donde la función  $R_x - r_x$  alcanza su mínimo:

$$R - r := R_c - r_c = \min\{R_x - r_x : x \in K\}.$$

Así pues,  $A(c, r, R)$  es el anillo que, centrado en un punto de  $K$ , contiene a  $\partial K$  y tiene espesor mínimo. Este anillo se denomina *anillo mínimo* de  $K$ . Una de las medidas geométricas en la que estamos interesados es, precisamente, el *espesor del anillo mínimo*, aunque, obviamente, fijar el espesor es equivalente a fijar el propio anillo (salvo dilataciones).

Si el compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  es además convexo, entonces el anillo mínimo es único (volveremos sobre esta propiedad en breve, véase [3]). Así, de ahora en adelante, y salvo que se indique expresamente lo contrario, representaremos por  $A(c, r, R)$  el anillo mínimo de un cuerpo convexo plano  $K$ , donde  $c$ ,  $r$  y  $R$  denotarán, respectivamente, su centro, radio del círculo interior y radio del círculo exterior.

### 1.2.1. El origen del anillo mínimo

Para conjuntos planos formados por una cantidad finita de puntos, el anillo mínimo fue considerado por primera vez por D'Ocagne en 1884 (véase [5]), siendo ésta la primera referencia conocida en la literatura sobre dicho objeto. En 1921, Lebesgue (véase [14]) utilizó este concepto a la hora de resolver cierto problema relacionado con aproximaciones de Tchebychev.

Pero en lo que a curvas planas arbitrarias se refiere, el anillo mínimo fue introducido por Bonnesen en 1924, en su trabajo [2], donde estudió ciertas propiedades del mismo (que estableceremos a continuación) con la idea de afinar la desigualdad isoperimétrica clásica en el plano euclídeo. De manera más precisa, demostró que el mínimo del déficit isoperimétrico  $p^2/(4\pi) - A$  se alcanza para el cuerpo convexo que se muestra en la figura 1.2:

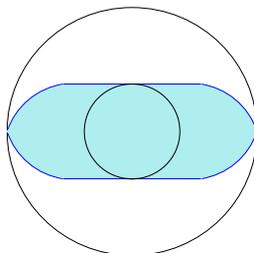


Figura 1.2: Conjunto convexo que minimiza el déficit isoperimétrico.

esto es, el conjunto formado por dos segmentos de recta paralelos, soportes al círculo interior, y cuatro arcos de circunferencia congruentes, de radio adecuado, que tocan la frontera del círculo exterior. A partir de este resultado, Bonnesen dedujo la siguiente versión de la desigualdad isoperimétrica, conocida como la *desigualdad de Bonnesen*:

$$p^2 - 4\pi A \geq 4\pi(R - r)^2. \quad (1.1)$$

Respecto a la cota superior, Favard demostró en 1929 (véase [8]) que el déficit isoperimétrico se maximiza para un cierto polígono circunscrito al círculo interior del anillo mínimo, y cuyos vértices, excepto a lo sumo uno, se encuentran sobre la frontera del círculo exterior.

En 1927, Kritikos (véase [13]) había extendido el concepto de anillo mínimo al espacio tridimensional, estudiando nuevas propiedades, válidas también para el plano.

### Las propiedades clásicas del anillo mínimo

En [3, p. 45–52], Bonnesen realiza una exposición sistemática de las propiedades mencionadas anteriormente que caracterizan el anillo mínimo de un cuerpo convexo, tanto en el plano como en el espacio, incorporando los trabajos de Kritikos y de Lebesgue. A continuación, enunciaremos y comentaremos tales propiedades.

**(P1)** *Cada una de las circunferencias  $\partial C_r$  y  $\partial C_R$  toca la frontera  $\partial K$  en, al menos, dos puntos.*

En [28] y [29], Zucco estudia el “tamaño”, en el sentido de las categorías de Baire, de la familia de los conjuntos convexos cuya frontera toca, exactamente, a  $(n + 2)/2$  puntos en cada una de las circunferencias del anillo mínimo. Recordemos que un conjunto es *de primera categoría de Baire* (también llamado *magro*), si es una unión numerable de conjuntos nunca-densos (un conjunto es *nunca-denso* si su clausura tiene interior vacío). Se dice entonces que *la mayoría* de los cuerpos convexos verifican una cierta propiedad, si el conjunto de elementos que no la cumplen es de primera categoría. Todas estas definiciones tienen sentido en el contexto de los conjuntos convexos ya que el espacio de los cuerpos convexos con la llamada *métrica de Hausdorff* es un espacio de Baire. No entramos aquí en más detalles, dado que no vamos a hacer uso alguno de estos conceptos a lo largo de la memoria. Para un estudio más exhaustivo de la métrica de Hausdorff y sus propiedades puede consultarse [24].

Zucco demuestra en [28] que la mayoría de los cuerpos convexos planos tienen en común con cada una de las circunferencias  $\partial C_r$  y  $\partial C_R$ , exactamente, dos puntos. En [29], generaliza el resultado anterior a dimensión arbitraria, concluyendo así que la mayoría de los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$  tocan la frontera de su anillo mínimo en, exactamente,  $n + 2$  puntos.

**(P2)** *Los conjuntos  $\partial C_r \cap \partial K$  y  $\partial C_R \cap \partial K$  no pueden separarse.*

La formulación original de esta propiedad se realizó en términos de la distribución que debían presentar las proyecciones de los puntos de  $\partial K \cap \partial C_R$ , en el círculo interior. Concretamente,

en [3] se demuestra que “el conjunto  $A$  de aquellos puntos de la frontera del cuerpo que están en la esfera exterior, y el conjunto  $I$  de los puntos de la frontera del cuerpo que están en la esfera interior, verifican la siguiente propiedad: la proyección de  $A$ , respecto al centro del anillo mínimo, sobre la esfera interior, es un conjunto de puntos que no puede separarse de  $I$  mediante ningún hiperplano”. La demostración de esta propiedad proviene de [13].

**(P3)** *El anillo mínimo asociado a un cuerpo convexo es único.*

La unicidad del anillo mínimo cuando se asume la hipótesis de convexidad fue demostrada por Bonnesen en el caso del plano (véanse [2] y [3]), y por Kritikos en  $\mathbb{R}^3$  (véase [13]). Hay que esperar hasta 1988 para encontrar una prueba de este hecho en el espacio euclídeo de dimensión arbitraria (Bárány, [1], donde se caracteriza además el centro del anillo mínimo en términos geométricos), lo que nos da una idea de la dificultad que conlleva el estudio del anillo mínimo en  $\mathbb{R}^n$ .

El anillo mínimo de un conjunto no convexo (compacto), no es, en general, único, ni el conjunto tiene necesariamente dos puntos de contacto con cada una de las circunferencias que forman el anillo. Así pues, la hipótesis de convexidad es fundamental, tanto en ésta, como en la propiedad **(P1)**. En [3], Bonnesen construye algunos contraejemplos a este respecto. Veamos uno de ellos. Consideremos el conjunto  $U$  formado por la unión de dos círculos con igual radio, tangentes exteriormente en un punto (véase la figura 1.3). Claramente,  $U$  no es convexo. Además, cualquier punto del segmento que une los centros de dichos círculos (excepto el punto medio, donde se tocan ambas circunferencias) es centro de un anillo mínimo de  $U$  (evidentemente, todos ellos de igual espesor: el diámetro de cualquiera de los círculos que componen  $U$ ; véase la figura 1.3).

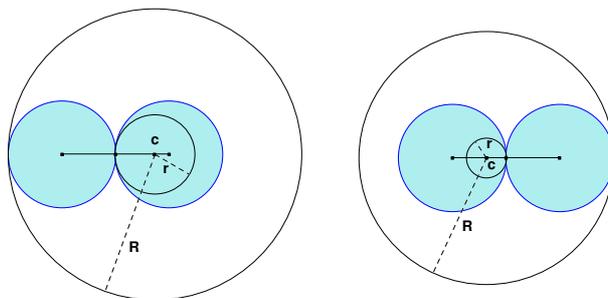


Figura 1.3: Un conjunto plano  $U$  no convexo, cuyo anillo mínimo no es único y que no cumple la propiedad **(P1)**.

Obsérvese además que, salvo que  $c$  coincida con el centro de uno de los círculos de  $U$ , la frontera  $\partial U$  sólo tiene un punto en común con la circunferencia exterior del anillo, y otro con la circunferencia interior, por lo que tampoco se verifica la propiedad **(P1)**.

**(P4)** *El anillo mínimo de un cuerpo convexo es el único anillo que contiene a  $\partial K$  y que verifica las propiedades **(P1)** y **(P2)** anteriores.*

Además, Bonnesen señala en la citada obra que, en el plano (respectivamente, en el espacio), el anillo mínimo es también el anillo con menor área (respectivamente, volumen) entre todos los que contienen a  $\partial K$ ; en 1974, Vincze (véase [26]) concluye que el anillo mínimo también es el único que minimiza la razón  $R/r$ .

### 1.2.2. El anillo mínimo en otros contextos más generales

Recientemente, han aparecido trabajos de gran interés, en los cuales se estudia el anillo mínimo de un cuerpo convexo en contextos más amplios. A continuación, vamos a exponer brevemente el tipo de resultados que se obtienen en los mismos.

Por ejemplo, Peri y Zucco introducen en [20], para el plano euclídeo, el concepto más general de *anillo convexo mínimo*, el cual se construye sustituyendo el círculo por un cuerpo plano  $L$ , estrictamente convexo, con frontera diferenciable, y con el origen como un punto interior; así, dados  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ , definen un *anillo convexo* asociado a  $L$  como la región comprendida entre  $x + \lambda_1 \partial L$  y  $x + \lambda_2 \partial L$ , y el *anillo convexo mínimo* de un cuerpo  $K$  como el anillo convexo que contiene a  $K$ , tal que la diferencia  $\lambda_2 - \lambda_1$  es mínima. En el citado trabajo, demuestran que este nuevo anillo mínimo existe y es único (propiedad **(P3)**), así como la veracidad de la propiedad **(P1)**. Finalmente, prueban que, al igual que en el caso del círculo, la mayoría de los cuerpos convexos planos tienen en común, con cada componente de la frontera del anillo convexo mínimo, exactamente, dos puntos.

En [18] y [19], Peri y Vassallo obtienen nuevas propiedades del anillo convexo mínimo de un cuerpo convexo plano, definido en [20]. Por ejemplo, demuestran que este anillo no tiene, necesariamente, área mínima, aunque sí minimiza otros funcionales.

En [16], Peri extiende el concepto de anillo convexo mínimo introducido en [20] a  $\mathbb{R}^n$ , y demuestra análogos resultados: las propiedades **(P1)**, **(P2)** y **(P3)**, así como el hecho de que la mayoría de los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$  tocan la frontera de su anillo convexo mínimo en, exactamente,  $n + 2$  puntos. Por tanto, se generalizan los trabajos de Kritikos [13], Bárány [1] y Zucco [29].

Al igual que Bonnesen trabaja con el anillo mínimo y sus propiedades para afinar la desigualdad isoperimétrica clásica, Peri, Wills y Zucco utilizan en [21] el anillo convexo mínimo y los resultados obtenidos en [20] con la intención de mejorar la conocida desigualdad

$$A(K) - 2A(K, L)t + A(L)t^2 \leq 0, \quad t \in [r(K, L), R(K, L)], \quad (1.2)$$

generalización de Blaschke de la famosa desigualdad de Bonnesen (1.1) (aquí,  $A(K, L)$  es el área mixta,  $r(K, L)$  el inradio relativo y  $R(K, L)$  el circunradio relativo); cuando  $L$  es un círculo, (1.2) se transforma en

$$A(K) - p(K)t + \pi t^2 \leq 0, \quad r \leq t \leq R,$$

equivalente a (1.1).

Todo el trabajo de [17] se desarrolla en la Geometría de Minkowski: dado un cuerpo convexo  $K$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas, se considera  $\mathbb{R}^n$  equipado con la norma  $\|\cdot\|_K$  asociada a  $K$ ;  $K$  es entonces la bola unidad en el espacio de Minkowski  $n$ -dimensional. El propósito de dicho trabajo es caracterizar el anillo convexo mínimo asociado a la bola  $K$  desde otros puntos de vista, resultados que se utilizarán para estudiar desigualdades de tipo Bonnesen en la Geometría de Minkowski.

Los últimos trabajos conocidos relacionados con el anillo mínimo se deben a Moszyńska, [15], y Juhnke y Sarges, [12]. En el primero de ellos se discute la relación existente entre el anillo mínimo de una suma directa y el anillo mínimo de los sumandos. En el segundo, se caracterizan propiedades del anillo mínimo de cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ , utilizando el concepto de función soporte para reformular el problema geométrico como un problema de optimización lineal semi-infinita.

### 1.3. El estudio de las desigualdades geométricas

Las desigualdades juegan un importante papel en muy diversas ramas de las matemáticas, y en especial en Geometría; no sólo por el interés que presentan en sí mismas, sino por su aplicación y su contribución a la comprensión de muy diversos aspectos geométricos.

Así, durante muchos años, los matemáticos han estado interesados en el estudio de las desigualdades que relacionan las distintas magnitudes geométricas de un conjunto convexo (plano), principalmente las ya conocidas área, perímetro, diámetro, anchura mínima, circunradio e inradio, y teniendo especial interés, en la mayoría de los casos, la determinación de sus *conjuntos extremales* (esto es, aquellos conjuntos para los que se alcanza la igualdad en la desigualdad correspondiente). Los conjuntos extremales, cuando este tipo de medidas geométricas entran en juego, son figuras cuya frontera está formada siempre por segmentos de rectas y arcos de circunferencia. A continuación mostramos y definimos los más usuales:

- Los *conjuntos de anchura constante* (entre los que destacan los *polígonos de Reuleaux*): aquéllos cuerpos convexos cuya anchura es igual en todas direcciones. Este tipo de figuras presentan propiedades muy significativas, como por ejemplo, el hecho de que el incírculo y el circuncírculo de un conjunto de anchura constante  $\omega$  sean siempre concéntricos, siendo la suma de sus radios igual a  $\omega$ ; o que todos tengan igual perímetro  $\pi\omega$ .
- Los *conjuntos de Yamanouti*: envoltura convexa de un triángulo equilátero y tres arcos de circunferencia de radio menor o igual que la longitud del lado, centrados en cada uno de los vértices del triángulo.
- Los *cap-bodies*: envoltura convexa de un círculo y un número finito de puntos exteriores a él tales que el segmento que une cualquier par de estos puntos interseca la circunferencia. Estos puntos se suelen denominar sus *vértices*.

- Los *segmentos de círculo*: intersección de un círculo y dos rectas que se cortan fuera del mismo (o en su frontera); si las rectas que lo determinan son paralelas y equidistan de su centro, hablamos de *segmento de círculo simétrico*.
- Los *triángulos*: principalmente los equiláteros e isósceles (estos últimos, con ángulo desigual menor o igual que  $\pi/3$ ).

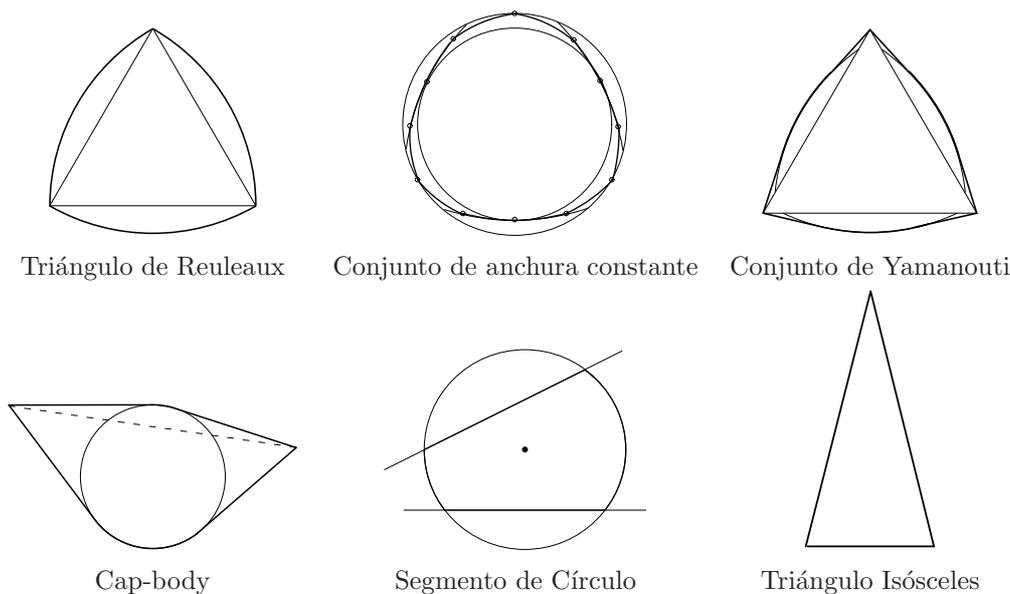


Figura 1.4: Algunos de los conjuntos extremales más usuales.

### 1.3.1. Desigualdades relacionando dos magnitudes geométricas

Si se consideran dos magnitudes de las anteriormente citadas, digamos  $X$  e  $Y$ , y se pretende maximizar (minimizar) la medida  $Y$  para cada valor fijo de  $X$ , el problema consiste en determinar una función  $\phi(X)$  de forma que la desigualdad  $Y \leq \phi(X)$  (respectivamente,  $Y \geq \phi(X)$ ) siempre se verifique, y de manera que, para cada valor de  $X$  positivo, exista un conjunto convexo para el que se alcance la igualdad. Se puede demostrar fácilmente que la función  $\phi$  es monótona creciente, y por tanto, el problema mencionado es equivalente al de determinar el mínimo (respectivamente, máximo) de  $X$  para cada valor de  $Y$  dado. Un claro ejemplo de esta situación lo tenemos en la conocida desigualdad isoperimétrica,  $p^2 \geq 4\pi A$ , donde  $\phi(p) = p^2/(4\pi)$ .

La tabla que se expone a continuación recoge todas las desigualdades existentes (obsérvese que no pueden haber más) relacionando dos de las seis medidas geométricas clásicas (véase, por ejemplo, [4, §10]). En la columna de la derecha se indica cuál es el conjunto extremal para la desigualdad correspondiente, conjuntos que se muestran en la figura 1.4.

Casos	Desigualdades	Igualdad			
$(A, p)$	$4\pi A \leq p^2$	Círculo	$(p, r_K)$	$2\pi r_K \leq p$	Círculo
$(A, D)$	$4A \leq \pi D^2$	Círculo	$(D, \omega)$	$\omega \leq D$	Anchura Constante
$(A, \omega)$	$\omega^2 \leq \sqrt{3}A$	Triáng. Equilátero	$(D, R_K)$	$D \leq 2R_K$	O-Simétricos
$(A, R_K)$	$A \leq \pi R_K^2$	Círculo		$\sqrt{3}R_K \leq D$	Conj. de Yamanouti
$(A, r_K)$	$\pi r_K^2 \leq A$	Círculo	$(D, r_K)$	$2r_K \leq D$	Círculo
$(p, D)$	$p \leq \pi D$	Anchura Constante	$(\omega, R_K)$	$\omega \leq 2R_K$	Círculo
	$2D \leq p$	Segmentos	$(\omega, r_K)$	$\omega \leq 3r_K$	Triáng. Equilátero
$(p, \omega)$	$\pi\omega \leq p$	Anchura Constante		$2r_K \leq \omega$	O-Simétricos
$(p, R_K)$	$p \leq 2\pi R_K$	Círculo	$(R_K, r_K)$	$r_K \leq R_K$	Círculo
	$4R_K \leq p$	Segmentos			

Tabla 1.1: Desigualdades relacionando dos magnitudes geométricas en el plano euclídeo.

Obsérvese que, únicamente en cuatro de estos quince casos se obtienen ambas cotas, superior e inferior, para la magnitud correspondiente (es decir, dos desigualdades *no triviales*). En todos los demás, la “segunda” desigualdad se reducirá a una de las dos siguientes afirmaciones obvias: o bien la magnitud del lado izquierdo de la desigualdad correspondiente es siempre mayor o igual que cero, o bien la magnitud del lado derecho es siempre menor que infinito.

### 1.3.2. Desigualdades relacionando tres magnitudes geométricas

Las desigualdades que relacionan más de dos magnitudes son, lógicamente, más difíciles de obtener, siendo uno de los problemas más estudiados encontrar los conjuntos convexos que maximizan o minimizan una magnitud  $Z$ , cuando se fijan otras dos medidas, digamos  $X$  e  $Y$ . La solución a una pregunta de este tipo, como ya sabemos, se expresa por medio de desigualdades de la forma

$$\phi(X, Y) \leq Z \leq \varphi(X, Y).$$

Pero en este caso, el problema adquiere un mayor interés cuando la igualdad, para una desigualdad en concreto  $Z \leq \varphi(X, Y)$ , no se alcanza para una única figura, sino para una familia continua de conjuntos; en tal caso, la desigualdad  $Z \leq \varphi(X, Y)$  establece cuál es el máximo (o el mínimo) valor de  $Z$  para *cada par* de valores posibles que pueden tomar las magnitudes  $X$  e  $Y$  (llamaremos a estas desigualdades *óptimas*). Existen numerosas referencias para este tipo de desigualdades, como por ejemplo, [4, 23, 25, 27].

Si se consideran tres de las seis magnitudes geométricas clásicas, aparecen un total de veinte casos posibles. Realmente existen numerosas desigualdades relacionando ternas de estas medidas, aunque las que presentan un mayor interés, como ya hemos comentado, son las *óptimas*: aquéllas que nos dicen, para *cada par* de valores posibles de dos de ellas, cuál es máximo y el mínimo de la tercera. Nos interesan por tanto aquellas desigualdades para las cuales la igualdad se alcanza para una familia continua de conjuntos.

Dado que son muchas las desigualdades conocidas hasta el momento para las 20 ternas posibles de medidas geométricas, en el siguiente esquema presentamos sólo aquellas relaciones en las que entran en juego el circunradio y el inradio, pues son éstas las que van a guardar una estrecha relación con los problemas de los que nos ocupamos en la memoria. Todavía quedan numerosos problemas abiertos a este respecto, es decir, hay muchas desigualdades que aún nos son desconocidas. En [22] se ha llevado a cabo un estudio sistemático de este tema, y en dicho trabajo se recogen todos los resultados conocidos hasta la fecha, así como las referencias donde pueden consultarse los mismos.

En la columna de la derecha se indica cuál es el conjunto extremal para la desigualdad correspondiente, conjuntos que se muestran en la figura 1.4.

Desigualdades	Condición	Igualdad
CASO $(A, R_K, r_K)$ :		
$A \leq 2 \left( r \sqrt{R_K^2 - r_K^2} + R_K^2 \arcsen \frac{r_K}{R_K} \right)$		Segmentos de Círculo Simétricos
$A \geq 2r_K \left( \sqrt{R_K^2 - r_K^2} + r \arcsen \frac{r_K}{R_K} \right)$		2-Cap-Bodies Simétricos
CASO $(p, R_K, r_K)$ :		
$p \leq 4 \left( \sqrt{R_K^2 - r_K^2} + R_K \arcsen \frac{r_K}{R_K} \right)$		Segmentos de Círculo Simétricos
$p \geq 4 \left( \sqrt{R_K^2 - r_K^2} + r_K \arcsen \frac{r_K}{R_K} \right)$		2-Cap-Bodies Simétricos
CASO $(D, R_K, r_K)$ :		
$D \leq 2R_K$		Conjuntos Centralmente Simétricos
$D \geq R_K + r_K$	$r_K \leq R_K \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} r_K$	Conjuntos de Anchura Constante
$D \geq \sqrt{3}R_K$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2} r_K \leq R_K \leq 2r_K$	Conjuntos de Yamanouti
$(D^2 - 2R_K r_K) \sqrt{4R_K^2 - D^2} \leq 4R_K^2 r_K$	$2r_K \leq R_K$	Triángulos Isósceles
CASO $(\omega, R_K, r_K)$ :		
$\omega \leq R_K + r_K$	$r_K \leq R_K \leq 2r_K$	Conjuntos de Anchura Constante
$(4r_K - \omega)(\omega - 2r_K)R_K \leq 2r_K^3$	$2r_K \leq R_K$	Triángulos Isósceles
$\omega \geq 2r_K$		Conjuntos Centralmente Simétricos

Tabla 1.2: Desigualdades relacionando ternas de magnitudes geométricas en el plano euclídeo.

Uno de los puntos fundamentales en la demostración de cualquier desigualdad es probar la existencia de los conjuntos extremales, algo que, en principio, no está siempre asegurado ni es evidente; de hecho, si se presupone siempre su existencia, se puede incurrir en verdaderas contradicciones (uno de los ejemplos clásicos a este respecto es el conocido problema de Kakeya, véase [6]).

Sin embargo, en el caso de este tipo de desigualdades, y debido a la continuidad de las magnitudes y las relaciones que entran en juego, la existencia de los conjuntos extremales está siempre asegurada por el *teorema de selección de Blaschke*: “cualquier familia infinita uniformemente aco-

tada de conjuntos convexos compactos contiene una subfamilia que converge a un conjunto convexo compacto” (véase [24]). En efecto, es fácil ver que la familia de los cuerpos convexos que tienen fija cualquiera de las medidas anteriores (el área, el perímetro...) está uniformemente acotada; por tanto, el teorema de selección de Blaschke y la continuidad de los funcionales aseguran la existencia de un cuerpo convexo que maximiza o minimiza la magnitud correspondiente.

Es por todo ello que, en todos los resultados que se obtienen a lo largo de la memoria, no nos ocupamos del estudio de la existencia, pues ésta queda siempre garantizada.

Esta memoria está dedicada al estudio de las desigualdades óptimas, cuando una de las medidas que entra en juego es el (espesor del) anillo mínimo de un conjunto convexo  $K$ . Hasta el momento, sólo los casos del área y el perímetro han sido resueltos (véase [7]). Así, comenzaremos el estudio que nos hemos propuesto obteniendo todas las relaciones existentes entre el anillo mínimo de  $K$  y cada una de las seis magnitudes geométricas clásicas asociadas al mismo. De forma más precisa, determinaremos *todas* las cotas posibles (superiores e inferiores) para, además de  $A$  y  $p$  (ya conocidas),  $D$ ,  $\omega$ ,  $R_K$  y  $r_K$ , cuando suponemos que el anillo mínimo de  $K$  está fijo.

Obsérvese, por otro lado, que si el circuncírculo y el incírculo de un cuerpo convexo  $K$  son concéntricos, desde luego éstos determinan el anillo mínimo del conjunto (como por ejemplo, en el cuadrado, véase la figura 1.5). Pero no siempre tiene por qué ocurrir tal cosa; de hecho, puede darse cualquiera de las otras posibilidades:  $C_K \equiv C_R$  y  $c_K \neq c_r$ ,  $c_K \equiv c_r$  y  $C_K \neq C_R$ , o  $C_K \neq C_R$  y  $c_K \neq c_r$ . En la figura 1.5 se muestran ejemplos para la casuística completa.

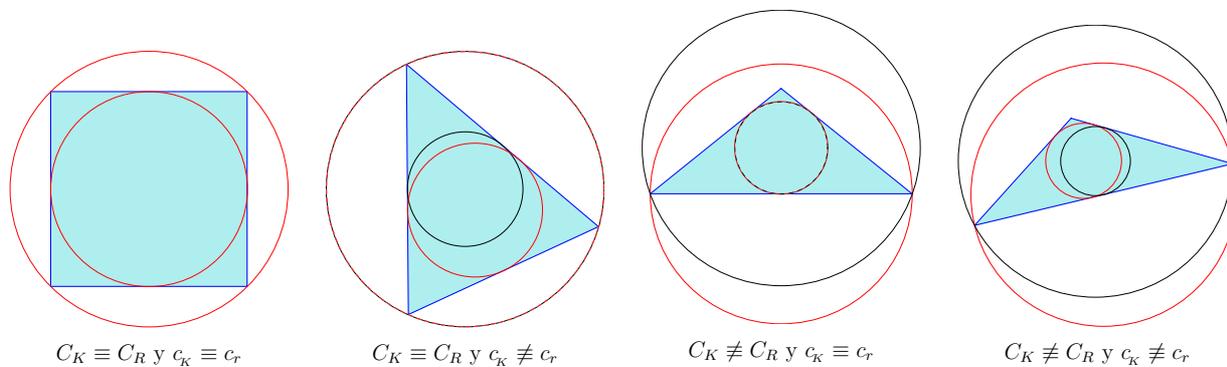


Figura 1.5: El circuncírculo, el incírculo y los círculos del anillo mínimo.

Es por ello que hemos prestado una atención especial al comportamiento del circuncírculo y el incírculo de un cuerpo convexo con respecto a los círculos de su anillo mínimo. Así, en los dos últimos capítulos de la memoria, estudiaremos la relación existente entre el anillo mínimo y el circuncírculo (capítulo 3) o el incírculo (capítulo 4); esto conllevará la determinación de *todas* las desigualdades óptimas que involucran el anillo mínimo y el circunradio, o el inradio, con el resto de medidas geométricas del conjunto.

## Capítulo 2

---

# El anillo mínimo y las seis magnitudes geométricas clásicas

---

En este capítulo abordamos el estudio de las relaciones existentes entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo plano con cada una de las seis magnitudes geométricas clásicas. De forma más precisa, vamos a determinar *todas* las cotas posibles (superiores e inferiores) para, el área, el perímetro, el diámetro, la anchura mínima, el circunradio y el inradio de un cuerpo convexo, cuando suponemos que su anillo mínimo está fijo.

Como podremos comprobar en breve, cuando se supone fijo el anillo mínimo, todas las medidas geométricas anteriormente citadas están acotadas, tanto superior como inferiormente; es decir, se tienen dos desigualdades *no triviales* para cada una de las magnitudes, al contrario de lo que ocurría cuando se fijaban otras medidas, donde este hecho se daba solamente para cuatro de los pares posibles:  $(p, D)$ ,  $(p, R_K)$ ,  $(D, R_K)$  y  $(\omega, r_K)$ , véase la tabla 1.1 del capítulo 1. Esto se debe a que la condición del anillo mínimo determina un gran control sobre los conjuntos convexos, en el sentido de no permitir conjuntos “alargados”.

Comenzaremos el capítulo demostrando una serie de propiedades del anillo mínimo de un cuerpo convexo en relación con su circunradio y su inradio, que serán muy útiles, tanto en este segundo capítulo, como en las demostraciones de todos los resultados posteriores que involucran estas dos medidas. A continuación, entraremos propiamente en el estudio de las relaciones entre el anillo mínimo y las seis magnitudes geométricas clásicas. Todos estos resultados pueden encontrarse, fundamentalmente, en [11], y alguna propiedad concreta, en [9].

## 2.1. Algunos resultados previos

Recordemos las propiedades ya conocidas del anillo mínimo (véase [3, p. 45–52]), que han sido expuestas en la sección 1.2:

- (P1) Cada una de las circunferencias  $\partial c_r$  y  $\partial C_R$  toca la frontera  $\partial K$  en, al menos, dos puntos.
- (P2) Los conjuntos  $\partial c_r \cap \partial K$  y  $\partial C_R \cap \partial K$  no están separados.
- (P3) El anillo mínimo asociado a un cuerpo convexo es único.
- (P4) El anillo mínimo de un cuerpo convexo es el único anillo que contiene a  $\partial K$  y que verifica las propiedades (P1) y (P2) anteriores.

Con los siguientes lemas demostramos una serie de propiedades, tanto del propio anillo mínimo, como de su relación con el circunradio y el inradio de un cuerpo convexo. Éstas serán de utilidad posteriormente. Comencemos estudiando algunas propiedades generales de  $A(c, r, R)$ .

**Lema 2.1.1** ([11]). *Si  $K$  es un cuerpo convexo plano con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , se verifican las propiedades siguientes:*

- (a) Existen puntos  $P, Q \in \partial C_R \cap \partial K$  cuyo ángulo central  $\alpha = \angle(PcQ)$  verifica  $\alpha \geq 2 \arccos(r/R)$ .
- (b)  $K$  contiene un 2-cap-body formado por la envoltura convexa de dos puntos de  $\partial C_R \cap \partial K$  y el círculo  $c_r$ , cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ .
- (c)  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  determinado por dos rectas soporte a  $c_r$ , cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ .

**Demostración.** (a) Cualquier recta soporte a  $c_r$  corta a  $\partial C_R$  en dos puntos  $P$  y  $Q$  cuyo ángulo central es, precisamente,  $2 \arccos(r/R)$ . Si todo par de puntos de  $\partial C_R \cap \partial K$  formaran entre sí un ángulo central menor que  $2 \arccos(r/R)$ , dichos puntos estarían en el interior del menor arco de  $\partial C_R$  que determinan  $P$  y  $Q$ ; la recta  $PQ$  separaría  $c_r$  de los puntos en cuestión, en contra de la propiedad (P2), como se muestra en la figura 2.1.

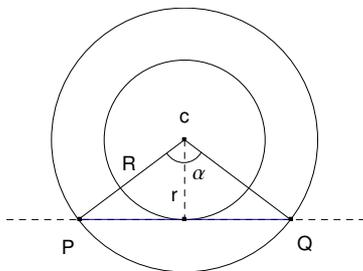


Figura 2.1: Existen puntos cuyo ángulo central es mayor o igual que  $2 \arccos(r/R)$ .

(b) Se trata de una consecuencia inmediata del apartado (a), pues éste nos asegura que la envoltura convexa  $\text{conv}\{c_r, P, Q\}$  es, en efecto, un 2-cap-body.

(c) Por la propiedad **(P1)** existen, al menos, dos puntos  $C, D \in \partial c_r \cap \partial K$ , de manera que las rectas soporte a  $c_r$  en dichos puntos determinan sobre  $C_R$  un cuerpo convexo que debe contener a  $K$ . Si las dos rectas soporte son paralelas o su punto de corte se encuentra en el exterior del círculo  $C_R$ , ambas rectas determinan sobre  $C_R$  un segmento de círculo que, claramente, contiene al cuerpo  $K$ ; si el punto de corte está en  $\partial C_R$ , uno de los arcos del segmento de círculo se reduce a un punto (véase la figura 2.2).

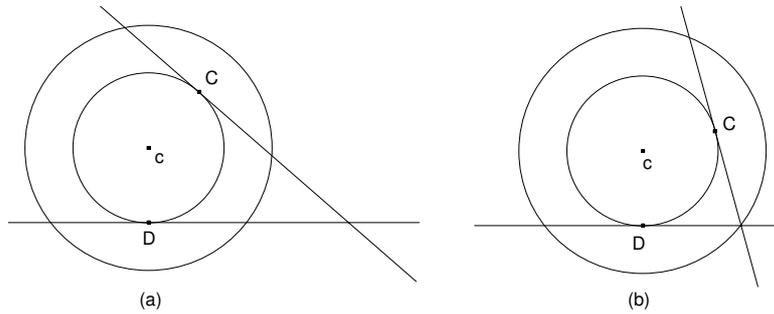


Figura 2.2: Posiciones de rectas soporte a  $c_r$  en puntos de  $\partial c_r \cap \partial K$ .

Si por último, el punto de intersección está en el interior de  $C_R$ , ambas rectas determinan sobre  $\partial C_R$  un arco  $\widehat{AB}$  que, según la propiedad **(P1)**, debe contener al menos dos puntos  $S, T \in \partial C_R \cap \partial K$  (que pueden coincidir con  $A$  y  $B$  o con uno de ellos) formando, por el apartado (a) de este lema, un ángulo central  $\alpha \geq 2 \arccos(r/R)$  (véase la figura 2.3).

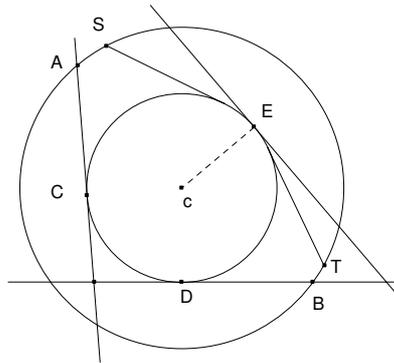


Figura 2.3:  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$ .

Observemos que, por la construcción realizada, el arco  $\widehat{AB}$  de  $\partial C_R$  está separado del arco  $\widehat{CD}$ . En consecuencia, según la propiedad **(P2)**, debe existir un punto  $E \in \partial c_r \cap \partial K$  en el arco de  $\partial c_r$  que determinan las rectas tangentes a dicha circunferencia que pasan por  $S$  y  $T$ , respectivamente. La recta soporte a  $c_r$  en  $E$  forma con las soporte en  $C$  o  $D$  el segmento de círculo deseado.  $\square$

El siguiente lema establece algunas propiedades que relacionan el anillo mínimo de un cuerpo convexo con su circunradio. Pensando en una mejor visualización de las figuras, de ahora en adelante vamos a representar con trazo discontinuo las fronteras, tanto de la circumbola como de la imbola, mientras que las circunferencias que determinan el anillo tendrán trazo continuo.

**Lema 2.1.2** ([11]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circuncírculo  $C_K$ . Se verifican las siguientes propiedades:*

- (1)  $R_K \leq R$ .
- (2) O bien  $C_R$  y  $C_K$  coinciden, o bien  $\partial C_R \cap \partial C_K$  tiene exactamente dos puntos que llamaremos  $A$  y  $B$ .
- (3)  $c_r \subset K \subset C_R \cap C_K$ .
- (4) Si  $C_K \not\equiv C_R$ , los puntos  $\{A, B\} = \partial C_R \cap \partial C_K$  forman un ángulo central  $\alpha$  que verifica la condición  $\alpha \geq 2 \arccos(r/R)$ .
- (5) El arco  $\widehat{AB}$  de  $\partial C_K$  que está contenido en  $C_R$ , no puede ser más pequeño que una semicircunferencia (de  $\partial C_K$ ). Esto implica, en definitiva, que la recta  $AB$  siempre se sitúa por debajo del circuncentro  $x_0$ .
- (6) La recta tangente a  $\partial c_r$  paralela y más cercana al segmento  $\overline{AB}$ , corta a  $\partial C_R$  en dos puntos que llamaremos  $A'$  y  $B'$ , de tal manera que existe, al menos, un punto  $P$  de  $\partial C_R \cap \partial K$  en alguno de los arcos  $\widehat{AA'}$  o  $\widehat{BB'}$ .

Si suponemos, por ejemplo, que  $P$  se encuentra en el arco  $\widehat{AA'}$ , entonces existe otro punto  $Q \in \partial C_R \cap \partial K$ ,  $Q \neq P$ , en el arco que va de  $P$  hasta  $B$ , cuyo ángulo central con  $P$  verifica la desigualdad  $\alpha \geq 2 \arccos(r/R)$  de la propiedad (4) anterior; lo mismo ocurre si  $P$  está en  $\widehat{BB'}$  (véase la figura 2.4).

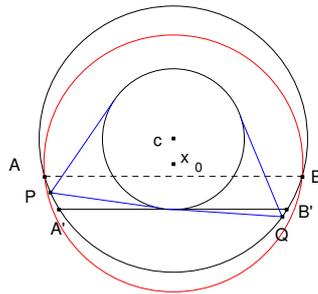


Figura 2.4: Existen, al menos, dos puntos  $P$  y  $Q$  en  $\partial K \cap \partial C_R$ .

- (7)  $K$  contiene el 2-cap-body  $K^c$  formado por la envoltura convexa de  $c_r$  y los puntos  $P$  y  $Q$  obtenidos en la propiedad (6) anterior, el cual tiene como anillo mínimo  $A(c, r, R)$ .

- (8) El 2-cap-body  $K^c$  señalado en (7) determina sobre  $\partial c_r$  dos arcos (uno de los cuales puede reducirse a un punto en el caso de que el segmento  $\overline{PQ}$  sea tangente a  $\partial c_r$ ), en cada uno de los cuales hay, al menos, un punto de  $\partial K$ .
- (9)  $K$  está contenido en la intersección de  $C_K$  con el segmento del círculo  $C_R$  determinado por las rectas soporte a  $c_r$  en los puntos de  $\partial c_r \cap \partial K$  de la propiedad (8) anterior.

**Demostración.** (1) Se trata de una consecuencia directa de la definición de circunradio.

- (2)  $C_K$  y  $C_R$  pueden coincidir; basta tomar  $K$  como el segmento del círculo  $C_R$  formado por dos rectas soporte a  $c_r$  paralelas. Si  $C_K$  y  $C_R$  no coinciden, observemos que, aunque  $R_K \leq R$ , como  $K \subset C_K$  y  $K \subset C_R$ , se tiene que  $C_R \cap C_K$  es no vacío, y además  $C_K$  no está contenido en  $C_R$  puesto que, según la propiedad **(P1)**,  $\partial C_R \cap \partial K$  contiene al menos dos puntos. Por tanto  $\partial C_R \cap \partial C_K$  contiene, exactamente, dos puntos.
- (3) Se deduce de las definiciones de circuncírculo y anillo mínimo.
- (4) Como  $K \subset C_R \cap C_K$ , el conjunto  $\partial C_R \cap \partial K$  (no vacío por **(P1)**), está contenido en el arco de  $\partial C_R$  que determinan los puntos  $A$  y  $B$  de la propiedad (2) anterior. Si el ángulo central que forman estos dos puntos es menor que  $2 \arccos(r/R)$ , no se cumpliría la condición (a) del lema 2.1.1, lo cual es imposible (véase la figura 2.5).

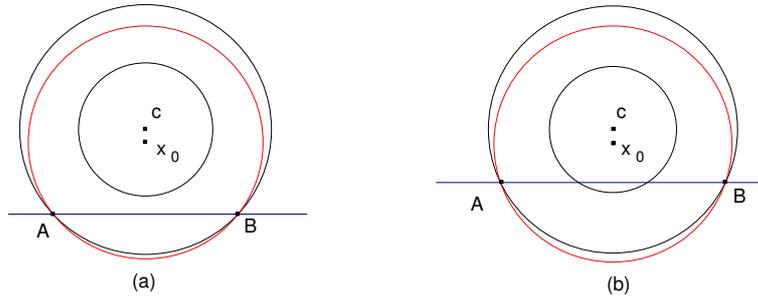


Figura 2.5: El ángulo central que forman los puntos de  $A, B \in \partial C_R \cap \partial C_K$  es mayor o igual que  $2 \arccos(r/R)$ .

- (5) Como  $C_K$  es el circuncírculo de  $K$ , ya sabemos que el conjunto  $\partial K \cap \partial C_K$  debe contener, o bien dos puntos de  $\partial C_K$  diametralmente opuestos, o bien tres puntos de  $\partial C_K$  que forman un triángulo acutángulo; como  $\partial K \cap \partial C_K \subset \overline{AB} \subset \partial C_K \subset C_R$ , ambos casos implican que el arco  $\overline{AB}$  es, como mínimo, una semicircunferencia de  $\partial C_K$ .
- (6) Es una aplicación inmediata del lema 2.1.1 y de la propiedad (4) anterior.
- (7) Es consecuencia inmediata de la propiedad (6) anterior.
- (8) Por la propiedad **(P1)**, sabemos que existen, al menos, dos puntos en el conjunto  $\partial c_r \cap \partial K$ . Dicho conjunto ha de estar contenido en los dos arcos de  $\partial c_r$  que forman la frontera de  $K^c$ . Supongamos que estuviera contenido en el arco de  $\partial K^c \cap \partial c_r$  que se encuentra por encima del

segmento  $\overline{AB}$ ; entonces, la recta  $\ell$  paralela a  $\overline{AB}$  que pasa por  $c$  separaría  $\partial c_r \cap \partial K$  del arco  $\widehat{AB}$  de  $\partial C_R$ , y por tanto, de  $\partial C_R \cap \partial K$ , lo que contradice la propiedad **(P2)** (véase la figura 2.6(a)). Supongamos ahora que  $\partial c_r \cap \partial K$  estuviera contenido en el arco de  $\partial K^c \cap \partial c_r$  que se encuentra por debajo del segmento  $\overline{AB}$ ; sean  $M, N \in \partial c_r \cap \partial K$  los extremos del arco de  $\partial c_r$  que contiene a  $\partial c_r \cap \partial K$  (observemos que  $M \neq N$  pues existen, al menos, dos puntos distintos en  $\partial c_r \cap \partial K$ ). Entonces  $K$  está contenido en la porción de  $C_K \cap C_R$  que determinan las rectas soporte a  $c_r$  en  $M$  y  $N$ . Estas rectas cortan a  $\partial C_R$  en dos puntos  $M'$  y  $N'$ , respectivamente. El segmento  $\overline{MN}$  está por debajo del  $\overline{M'N'}$ , luego la propia recta  $M'N'$  separaría  $\partial C_R \cap \partial K$  de  $\overline{MN}$ , y por tanto, de  $\partial c_r \cap \partial K$ , en contra de la propiedad **(P2)** (véase la figura 2.6(b)), lo que termina la demostración.

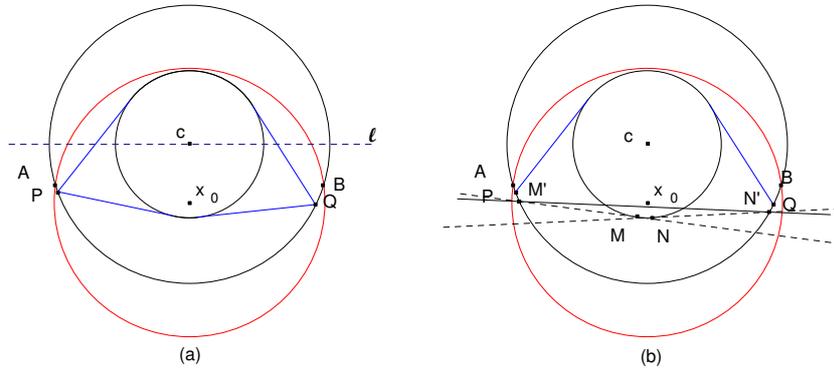


Figura 2.6: Existen puntos de  $\partial K$  en los arcos de circunferencia de  $\partial K^c$ .

(9) Es una consecuencia inmediata de la propiedad (8) anterior.  $\square$

A partir de este momento y a lo largo de toda la memoria, seguiremos siempre la notación del lema anterior:  $A, B$  representarán los puntos de corte de las circunferencias  $\partial C_K$  y  $\partial C_R$ , y llamaremos además  $A', B'$  a los puntos intersección de  $\partial C_R$  con la recta tangente a  $\partial c_r$  paralela (y más cercana) al segmento  $\overline{AB}$ , véase la figura 2.4.

Como en el caso del circunradio, el siguiente lema recoge algunas propiedades relacionando el anillo mínimo de un cuerpo convexo con su inradio.

**Lema 2.1.3** ([11, 9]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e incírculo  $c_K$ . Se verifican las siguientes propiedades:*

- (1)  $r \leq r_K$ .
- (2)  $\text{conv}(c_r \cup c_K) \subset K \subset C_R$ .
- (3)  $c_r$  no está contenido estrictamente en  $c_K$ , y las posiciones relativas de  $c_K$  y  $c_r$  pueden ser las siguientes (véase la figura 2.7):

- (a)  $c_r \equiv c_K$ .
- (b) La intersección de sus fronteras contiene exactamente dos puntos.
- (c) Sus fronteras son tangentes exteriormente.
- (d) No tienen puntos comunes.

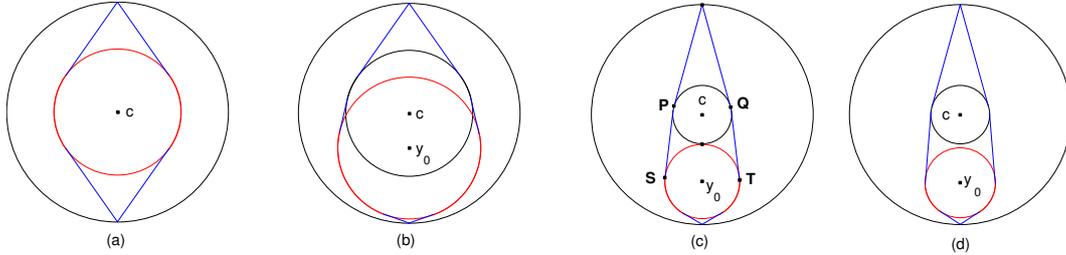


Figura 2.7: Posición de  $c_r$  y  $c_K$ : (a)  $c_r \equiv c_K$ ; (b)  $\text{card}(\partial c_r \cap \partial c_K) = 2$ ; (c)  $\text{card}(\partial c_r \cap \partial c_K) = 1$ ; (d)  $c_r \cap c_K = \emptyset$ .

- (4) Si  $c_r$  no coincide con  $c_K$ , la frontera de  $\text{conv}(c_r \cup c_K)$  está formada por dos segmentos de recta,  $\overline{PS}$  y  $\overline{QT}$ , y los correspondientes arcos de circunferencia  $\widehat{PQ} \subset \partial c_r$  y  $\widehat{ST} \subset \partial c_K$ . Entonces, en cada uno de los arcos  $\widehat{PQ}$  y  $\widehat{ST}$  hay, al menos, un punto de  $\partial K$ .
- (5) En el arco  $\widehat{PQ} \subset \partial c_r$  existen dos puntos  $P', Q'$  de  $\partial K$  (que pueden coincidir con  $P$  y  $Q$ ), cuyo ángulo central  $\alpha$  verifica la condición  $\alpha \geq 2 \arccos(r/R)$ .
- (6)  $K$  contiene un cuerpo convexo  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , con idénticos anillo mínimo e inradio, donde  $N$  y  $M$  se encuentran, respectivamente, en cada uno de los arcos de  $\partial C_R$  determinados por las rectas  $PS$  y  $QT$  (véase la figura 2.8).

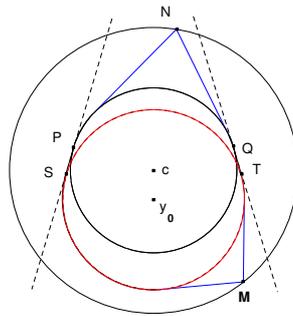


Figura 2.8: Un conjunto  $K^{2c}$  contenido en el cuerpo  $K$ , con igual anillo mínimo e inradio.

**Demostración.** (1) Es consecuencia de la propia definición de inradio.  
 (2) Se verifica trivialmente.  
 (3)  $c_r$  no está contenido estrictamente en  $c_K$  puesto que, por la propiedad **(P1)**, el conjunto  $\partial c_r \cap \partial K$  contiene, al menos, dos puntos. El caso (a) se da, por ejemplo, tomando como

cuerpo  $K$  el 2-cap-body simétrico formado por la envoltura convexa de  $c_r$  y dos puntos de  $\partial C_R$  diametralmente opuestos. Es fácil ver que también son factibles las demás posibilidades. Observemos que si  $R < 3r$  sólo se puede dar el caso (b), mientras que si  $R \geq 3r$  nos podemos encontrar con los casos (c) y (d). Tomando como cuerpo  $K$  la envoltura convexa de  $c_r$ ,  $c_K$  y los puntos intersección de la recta  $y_0c$  con  $\partial C_R$ , obtenemos un cuerpo convexo que verifica las condiciones deseadas (véase la figura 2.7).

- (4) El arco  $\widehat{PQ}$  es la única porción de la frontera de  $c_r$  que no está en el interior de  $\text{conv}(c_r \cup c_K)$ ; por tanto, los puntos cuya existencia afirma la propiedad **(P1)** deben estar en dicho arco. Lo mismo ocurre con  $\widehat{ST}$  respecto de  $c_K$ ; dado que en  $\partial c_K$  hay, o bien dos puntos de  $\partial K$  diametralmente opuestos, o bien tres puntos de  $\partial K$  que forman un triángulo acutángulo, tenemos asegurada la existencia de, al menos, dos puntos de  $\partial K$  en el arco  $\widehat{ST}$ .
- (5) Por el lema 2.1.1(c),  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  determinado por las rectas soporte a  $c_r$  en dos puntos  $P', Q' \in \partial c_r \cap \partial K$ , que han de estar necesariamente en el arco  $\widehat{PQ}$ . Dichas rectas, o bien se cortan en  $\partial C_R$ , en cuyo caso el ángulo central de  $P'$  y  $Q'$  es  $2 \arccos(r/R)$  (véase la figura 2.9), o bien se cortan en el exterior de  $C_R$ , o bien son paralelas. En los dos últimos casos, el ángulo central que forman  $P'$  y  $Q'$  es estrictamente mayor que  $2 \arccos(r/R)$ , con lo que se demuestra esta propiedad.

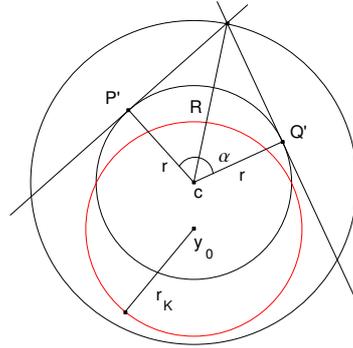


Figura 2.9: El ángulo central  $\alpha$  que forman  $P', Q' \in \partial K \cap \partial c_r$  verifica  $\alpha = 2 \arccos(r/R)$ .

- (6) Por la propiedad (5) anterior, en el arco  $\widehat{PQ}$  de  $\partial c_r$  existen, al menos, dos puntos  $P', Q' \in \partial K$  cuyo ángulo central es mayor o igual que  $2 \arccos(r/R)$ , estando  $K$  contenido en el segmento  $K^s$  del círculo  $C_R$  determinado por las rectas soporte a  $c_r$  en  $P'$  y  $Q'$  (véase la figura 2.10(a)). Por otra parte, el lema 2.1.1(b) afirma que  $K$  contiene un 2-cap-body,  $K^c$ , formado por la envoltura convexa de  $c_r$  y dos puntos  $N, M \in \partial C_R \cap \partial K$ . Este cap-body puede elegirse de modo que cada uno de sus vértices se sitúe en cada uno de los arcos de circunferencia del segmento de círculo  $K^s$ , como justificaremos en breve; así por ejemplo, uno de ellos, digamos  $N$ , estará en el arco de  $\partial K^s$  “más cercano” a  $\widehat{P'Q'}$  (véase de nuevo la figura 2.10(a)), mientras que el otro,  $M$ , se situará en el arco opuesto.

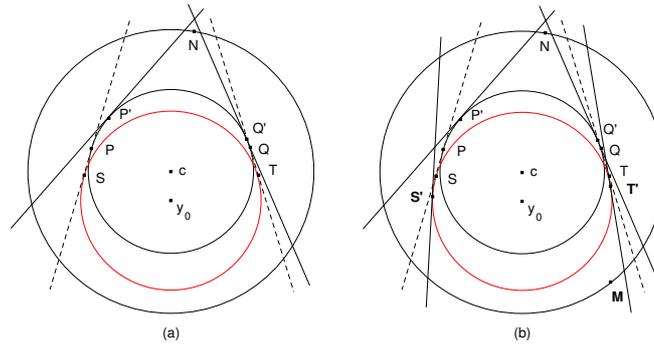


Figura 2.10: Construcción del conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\} \subset K$ .

Si esto no fuese así, se contradiría la propiedad **(P2)**: en efecto, si todos los posibles vértices que pueden determinar  $K^c$  se encontrasen en el arco “inferior” de  $\partial K^s$ , la recta  $PQ$  separaría  $\partial c_r \cap \partial K$  de  $\partial C_R \cap \partial K$ , ya que el arco  $\widehat{PQ}$  es la única parte de  $\partial c_r$  que no está en el interior de  $\text{conv}(c_r \cup c_K)$ , y por tanto, donde se sitúan los puntos de  $\partial c_r \cap \partial K$ ; si todos los posibles vértices se encontrasen en el arco “superior” de  $\partial K^s$ , la recta que une los extremos de dicho arco separaría  $\partial C_R \cap \partial K$  de  $\partial c_r \cap \partial K$ .

Además, las posibilidades de movimiento del punto  $M$  están aún más restringidas. Veámoslo.

Como  $c_K$  es un incírculo de  $K$ , sabemos que en  $\partial c_K$  existen, o bien dos puntos de  $\partial K$  diametralmente opuestos, o bien tres puntos que no se encuentran en una misma semicircunferencia. Además, en nuestro caso particular, dichos puntos se situarán, concretamente, en el arco  $\widehat{ST}$ . En definitiva, siempre podemos elegir dos puntos  $S', T'$  en  $\partial c_K \cap \partial K$  tales que el arco  $\widehat{S'T'} \subset \widehat{ST}$  no es menor que una semicircunferencia. Por tanto, las rectas soporte a  $K$  en  $S'$  y  $T'$  no se cortan en el interior de  $C_R$ , y determinan un nuevo segmento de círculo (de  $C_R$ ) que también contiene a  $K$ . En particular, el punto  $M$  se encuentra en el arco (más pequeño que el original) que este nuevo segmento de círculo determina (véase la figura 2.10(b)). Obsérvese que los puntos  $P', Q', S', T'$  podrían coincidir con  $P, Q, S, T$ , respectivamente.

En definitiva, todo lo anterior implica que  $K$  contiene al conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , con  $N$  y  $M$  en las condiciones del enunciado (véase la figura 2.8).

Para finalizar, observemos que  $K^{2c}$  tiene por anillo mínimo  $A(c, r, R)$  por la propiedad **(P4)**, y por inradio  $r_K$ , ya que, necesariamente, su frontera contiene puntos de  $\partial c_K$  diametralmente opuestos.  $\square$

En las secciones siguientes abordamos ya el estudio de las relaciones existentes entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo plano con cada una de las seis magnitudes geométricas clásicas, determinando todas las cotas posibles (superiores e inferiores) para cada una de ellas, cuando suponemos que el anillo mínimo del cuerpo está fijo.

## 2.2. El área y el perímetro

Los resultados recogidos en las proposiciones 2.2.1 y 2.2.2 fueron enunciados por Favard en [7], aunque allí aparecen sin demostración alguna. Los incluimos en la memoria por completitud, desarrollando una nueva prueba de los mismos.

**Proposición 2.2.1** ([7]). *Si  $A$  es el área de un cuerpo convexo  $K$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , se verifican las desigualdades siguientes:*

$$A \geq 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right). \quad (2.1)$$

*La igualdad se da para la familia de los 2-cap-bodies formados por la envoltura convexa de dos puntos de  $\partial C_R \cap \partial K$  y el círculo  $c_r$  (véase la figura 2.11, izquierda).*

$$A \leq 2 \left( r\sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right). \quad (2.2)$$

*La igualdad se da para los segmentos del círculo  $C_R$  determinados por dos rectas soporte a  $c_r$  (véase la figura 2.11, derecha).*

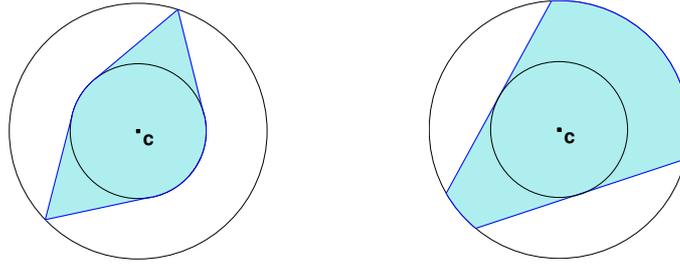


Figura 2.11: Un 2-cap-body (izquierda) y un segmento de círculo (derecha) con anillo mínimo dado.

**Demostración.** Veamos la desigualdad (2.1). Por el lema 2.1.1(b),  $K$  contiene un 2-cap-body  $K^c$  formado por la envoltura convexa de dos puntos de  $\partial C_R \cap \partial K$  y el círculo  $c_r$ ; por tanto, se verifica que  $A \geq A(K^c)$ . Obsérvese que todos estos 2-cap-bodies tienen la misma área (ya que  $c_r$  y  $C_R$  son concéntricos), precisamente la expresada en el segundo miembro de la desigualdad (2.1). La igualdad se alcanza en estos conjuntos, puesto que según la propiedad **(P4)**,  $A(c, r, R)$  es el anillo mínimo del 2-cap-body en cuestión.

En cuanto a la desigualdad (2.2), por el lema 2.1.1(c),  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  formado por dos rectas soporte a  $c_r$ ; por tanto, el área de  $K$  es menor o igual que el área de dicho segmento de círculo. De nuevo, todos los segmentos de  $C_R$  de este tipo tienen igual área, cuyo valor es el expresado en el segundo miembro de la desigualdad (2.2). La igualdad se alcanza para tales conjuntos, teniendo en cuenta que, otra vez, por la propiedad **(P4)**, el anillo mínimo de cualquiera de los segmentos de  $C_R$  es el mismo que el de  $K$ .  $\square$

La demostración de la siguiente proposición, en la que se establece la relación del anillo mínimo con el perímetro, es análoga a la del resultado anterior, puesto que el perímetro de todos los posibles 2-cap-bodies descritos en el lema 2.1.1(b) es idéntico; y lo mismo sucede con el perímetro de los segmentos del círculo  $C_R$  del citado lema en su apartado (c).

**Proposición 2.2.2** ([7]). *Si  $p$  es el perímetro de un cuerpo convexo  $K$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , se verifican las desigualdades siguientes:*

$$p \geq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right). \quad (2.3)$$

*La igualdad se da para la familia de los 2-cap-bodies formados por la envoltura convexa de dos puntos de  $\partial C_R \cap \partial K$  y el círculo  $c_r$  (véase la figura 2.11, izquierda).*

$$p \leq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + R \arcsen \frac{r}{R} \right). \quad (2.4)$$

*La igualdad se da para los segmentos del círculo  $C_R$  determinados por dos rectas soporte a  $c_r$  (véase la figura 2.11, derecha).*

Observemos que las desigualdades (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) obtenidas para el área y el perímetro son, precisamente, las mismas desigualdades que relacionan las ternas de magnitudes  $(A, R_K, r_K)$  y  $(p, R_K, r_K)$  (véase el capítulo 1, tabla 1.2); esto se debe a que, en nuestro caso, los correspondientes conjuntos extremales tienen circunradio  $R_K = R$  e inradio  $r_K = r$ .

### 2.3. El diámetro y la anchura

Para clarificar los conjuntos que describimos a continuación, fijamos cierta nomenclatura que usaremos en esta sección. Según el lema 2.1.1(c), el conjunto  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  formado por dos rectas soporte a  $c_r$ . Siguiendo la notación de la figura 2.12, representaremos por  $C$  y  $D$  los puntos de tangencia de dichas rectas soporte con  $\partial c_r$ ; por  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $T$  los puntos de corte de las mismas con  $\partial C_R$ ; y por  $N$  el punto de  $\partial C_R \cap cD$  más alejado de  $D$ .

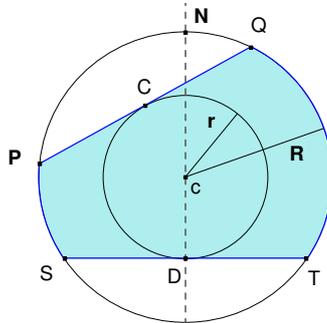


Figura 2.12: Notación para el segmento del círculo  $C_R$ .

**Proposición 2.3.1** ([11]). *Sea  $\omega$  la anchura de un cuerpo convexo  $K$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ . Entonces se verifican las desigualdades siguientes:*

$$\omega \geq 2r. \quad (2.5)$$

*La igualdad se alcanza para cualquier conjunto que contenga en su frontera puntos de  $\partial c_r$  diametralmente opuestos.*

$$\omega \leq R + r \quad \text{si } R \leq 2r. \quad (2.6)$$

$$\omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \quad \text{si } R \geq 2r. \quad (2.7)$$

*La igualdad se alcanza, en ambas desigualdades y entre otros conjuntos, para el segmento del círculo  $C_R$  determinado por dos rectas soporte a  $c_r$  que se cortan sobre  $\partial C_R$  (véase la figura 2.13(b)–(d)).*

Obsérvese que los conjuntos de anchura constante y los conjuntos de Yamanouti (entre otros muchos, véase la figura 1.4) también verifican la igualdad en la desigualdad (2.6), ya que, para éstos, el circuncírculo  $C_K$  y el incírculo  $c_K$  son siempre concéntricos, y por tanto,  $R_K = R$  y  $r_K = r$  (véase la tabla 1.2).

**Demostración.** La desigualdad (2.5) se verifica puesto que  $c_r \subset K$ . La igualdad se alcanza en conjuntos que contengan en su frontera puntos de  $\partial c_r$  diametralmente opuestos, como el segmento de círculo simétrico de  $C_R$  formado por dos rectas soporte a  $c_r$  paralelas.

Veamos las desigualdades (2.6) y (2.7); como por el lema 2.1.1(c)  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  que tiene igual anillo mínimo, la anchura de  $K$  será menor o igual que la de dicho segmento. Tenemos por tanto que maximizar la anchura sobre esta familia particular de conjuntos. Así, si partiendo del segmento de círculo simétrico, movemos de forma continua el punto  $C$ , por ejemplo en el sentido de las agujas del reloj, obtenemos todos los posibles segmentos de  $C_R$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  (véase la figura 2.13(a)), hasta llegar al caso límite en que  $Q$  y  $T$  coinciden.

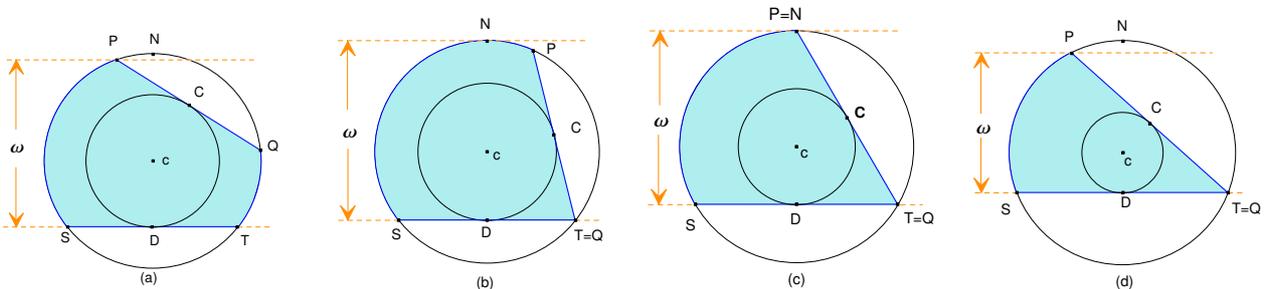


Figura 2.13: Conjuntos convexos con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y anchura máxima.

La anchura se alcanza en la distancia entre el punto  $P$  y el segmento  $\overline{ST}$ , si en el movimiento el punto  $P$  no sobrepasa al punto  $N$ . En caso contrario, la anchura es la distancia entre  $N$  y el segmento  $\overline{ST}$ , que vale  $R + r$ ; es aquí cuando la anchura alcanza el máximo valor posible. Que en el movimiento descrito el punto  $P$  llegue a coincidir o sobrepase  $N$  (véanse los casos (b) y (c) de la figura 2.13), o no (caso (d) de la figura 2.13), depende de la relación entre los radios  $r$  y  $R$ . Si  $R = 2r$  entonces, en el caso límite,  $P$  coincide con  $N$ ; por lo tanto, si  $R \leq 2r$ , nos encontramos en el primer caso y se da la desigualdad (2.6) y si  $R \geq 2r$  estamos en el segundo y se verifica la desigualdad (2.7).  $\square$

**Proposición 2.3.2** ([11]). *Si  $D$  es el diámetro de un cuerpo convexo  $K$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , se verifican las desigualdades siguientes:*

$$D \leq 2R. \tag{2.8}$$

La igualdad se alcanza para cualquier conjunto que contenga en su frontera puntos de  $\partial C_R$  diametralmente opuestos.

$$D \geq R + r \quad \text{si} \quad R \leq \frac{5r}{3}. \tag{2.9}$$

$$D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si} \quad R \geq \frac{5r}{3}. \tag{2.10}$$

La igualdad se alcanza, en ambas desigualdades, para los 2-cap-bodies  $\text{conv}\{c_r, P, Q\}$ , entre otros conjuntos (véase la figura 2.14).

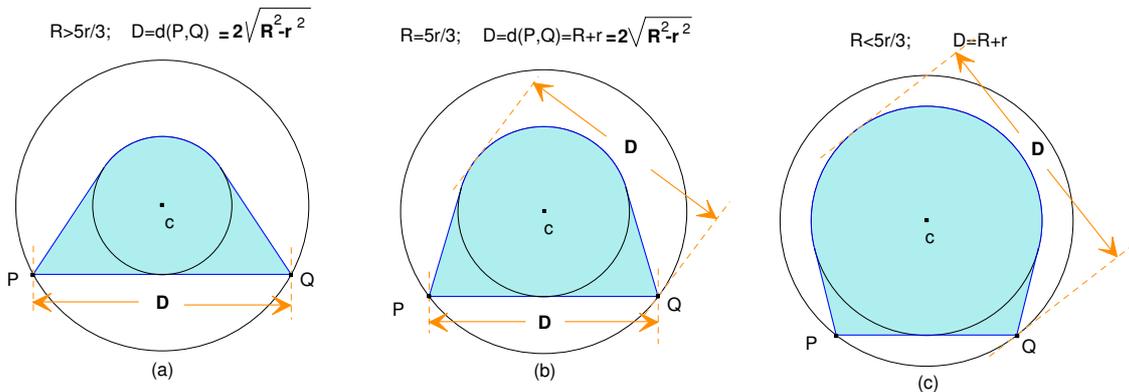


Figura 2.14: Conjuntos convexos con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y diámetro mínimo.

Obsérvese que los conjuntos de anchura constante y los conjuntos de Yamanouti (entre otros muchos) también verifican la igualdad en (2.9), ya que, para éstos,  $C_K$  y  $c_K$  son siempre concéntricos, y  $R_K = R$  y  $r_K = r$  (véase la tabla 1.2).

**Demostración.** La desigualdad (2.8) se cumple ya que  $K \subset C_R$ , y la igualdad se alcanza para cualquier conjunto que contenga puntos de  $\partial C_R$  diametralmente opuestos, como el segmento de círculo simétrico.

Para demostrar las desigualdades (2.9) y (2.10) observemos que, por el lema 2.1.1(b),  $K$  contiene un 2-cap-body  $K^c$  que es la envoltura convexa de  $\partial c_r$  y dos puntos  $P, Q \in \partial C_R \cap \partial K$ ; por tanto tenemos que  $D \geq D(K^c)$ .

El diámetro de un 2-cap-body se alcanza, o bien en la distancia entre los vértices  $P$  y  $Q$ , o bien en la distancia entre cualquiera de estos dos puntos, por ejemplo  $Q$ , y la recta tangente a  $\partial c_r$  perpendicular al segmento  $\overline{Qc}$  (véase la figura 2.15). El diámetro será uno u otro valor dependiendo de la posición de los puntos  $P$  y  $Q$  respecto a  $c_r$ , y por tanto, de la relación entre  $r$  y  $R$ .

Si partimos del 2-cap-body simétrico, en el que los puntos  $P$ ,  $Q$  y el centro  $c$  del anillo están alineados (véase la figura 2.15(a)), tenemos un caso en el que el diámetro es  $2R$ , el máximo posible. Si ahora movemos uno de los puntos, para fijar ideas el punto  $Q$ , en el sentido de las agujas del reloj hasta el caso límite en que el segmento  $\overline{PQ}$  es tangente a  $\partial c_r$  (véase la figura 2.15(b)), obtenemos todos los posibles 2-cap-bodies  $K^c$  cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ .

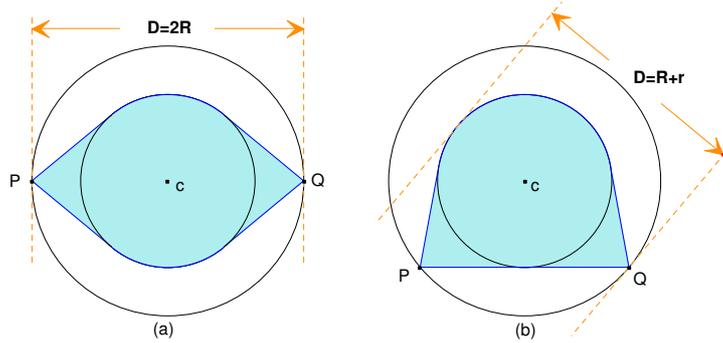


Figura 2.15: Diámetro de  $K^c$  cuando  $R \leq 5r/3$ .

Cuando el segmento  $\overline{PQ}$  es tangente a  $\partial c_r$  se consigue la menor distancia entre  $P$  y  $Q$ , es decir,  $d(P, Q) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Esta distancia será el diámetro si es mayor que  $R + r$ . Si por el contrario, en el movimiento descrito llegamos a un caso en el que la distancia entre  $P$  y  $Q$  es menor o igual que  $R + r$ , el diámetro será este último valor. Es fácil ver que cuando  $R = 5r/3$ , se cumple que

$$d(P, Q) = 2\sqrt{R^2 - r^2} = R + r,$$

y por tanto, si  $R > 5r/3$ , el diámetro será

$$D = d(P, Q) = 2\sqrt{R^2 - r^2} > R + r;$$

en caso contrario,  $D = R + r$  (véase la figura 2.14).  $\square$

## 2.4. El circunradio

**Proposición 2.4.1** ([11]). *Dado un anillo  $A(c, r, R)$ , sea  $s \in [r, R]$ , el menor número real tal que*

- (1)  $C_s$  es un círculo de radio  $s$  que contiene a  $c_r$  y
- (2)  $\partial C_s$  interseca a  $\partial C_R$  en dos puntos  $A$  y  $B$  de tal manera que la recta determinada por ellos es tangente a  $\partial c_r$ .

Entonces se verifica:

- (a) Si  $R \leq r\sqrt{5}$ , entonces  $s = \frac{R^2 + 3r^2}{4r}$ .
- (b) Si  $R \geq r\sqrt{5}$ , entonces  $s = \sqrt{R^2 - r^2}$ .

**Demostración.** Fijemos los puntos  $A$  y  $B$  y consideremos en primer lugar, como círculo  $C_s$ , el propio  $C_R$ . Si desplazamos el centro  $x_0$  de  $C_s$  sobre la recta que pasa por  $c$  y es perpendicular al segmento  $\overline{AB}$ , dado que dicho segmento debe ser una cuerda de  $C_s$ , el radio  $s$  va disminuyendo hasta que  $d(A, B) = D(C_s)$ , caso en que el radio es el menor posible.

Por otra parte, como  $C_s$  contiene a  $c_r$ , el valor mínimo buscado de  $s$  se alcanzará, dependiendo de la relación entre  $r$  y  $R$ , o bien cuando  $\partial C_s$  sea tangente a  $\partial c_r$ , o bien cuando el segmento  $\overline{AB}$  sea, precisamente, el diámetro de  $C_s$ . Cálculos sencillos permiten comprobar que estas dos posibilidades corresponden a los casos (a) y (b), respectivamente:

- (a) si  $R \leq r\sqrt{5}$ , entonces  $s = \frac{R^2 + 3r^2}{4r}$ , mientras que
- (b) si  $R \geq r\sqrt{5}$ , entonces  $s = \sqrt{R^2 - r^2}$ ;

la figura 2.16 ilustra la situación.

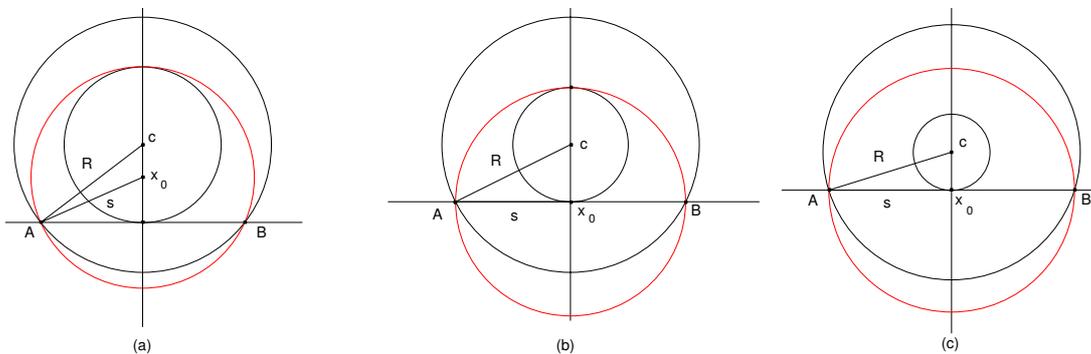


Figura 2.16: (a)  $s = (R^2 + 3r^2)/(4r)$  si  $R \leq r\sqrt{5}$ . (b)  $R = r\sqrt{5}$ . (c)  $s = \sqrt{R^2 - r^2}$  si  $R \geq r\sqrt{5}$ .  $\square$

**Proposición 2.4.2** ([11]). *Dado un anillo  $A(c, r, R)$ , se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) *Si  $R \leq r\sqrt{5}$ , entonces existe un cuerpo convexo  $K$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K = (R^2 + 3r^2)/(4r)$ .*
- (b) *Si  $R \geq r\sqrt{5}$ , entonces existe un cuerpo convexo  $K$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K = \sqrt{R^2 - r^2}$ .*

Además, en cada uno de los casos anteriores, el correspondiente valor  $R_K$  es el menor valor que puede alcanzar el circunradio de un cuerpo convexo  $K$  cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ .

**Demostración.** Para probar (a), si  $R \leq r\sqrt{5}$ , consideremos el círculo  $C_s$ ,  $s = (R^2 + 3r^2)/(4r)$ , construido en la proposición 2.4.1(a). La porción de  $C_s$  limitada por el segmento  $\overline{AB}$ , es un cuerpo convexo cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  (por la propiedad **(P4)**) y que tiene por circunradio a  $s$ , ya que contiene puntos de  $\partial C_s$  diametralmente opuestos (véase el caso (a) de la figura 2.17).

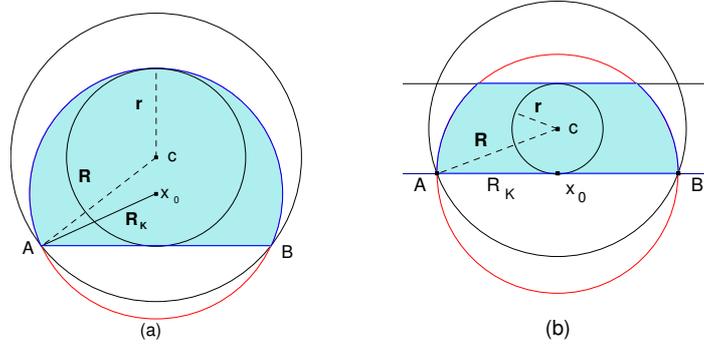


Figura 2.17: Construcción de un conjunto con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio (a)  $(R^2 + 3r^2)/(4r)$  y (b)  $\sqrt{R^2 - r^2}$ .

Veamos (b). Si ahora suponemos que  $R \geq r\sqrt{5}$ , nos encontramos en el caso (b) de la proposición 2.4.1. El segmento del círculo  $C_s$  determinado por el segmento  $\overline{AB}$  y la recta tangente a  $\partial c_r$  paralela a dicho segmento, es un cuerpo convexo cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  (propiedad **(P4)**); su circunradio es  $s$  puesto que contiene puntos de  $\partial C_s$  diametralmente opuestos (concretamente,  $\overline{AB}$  es el diámetro de  $C_s$ , véase el caso (b) de la figura 2.17).

La minimalidad de  $\sqrt{R^2 - r^2}$  y  $(R^2 + 3r^2)/(4r)$  (respectivamente, en cada caso) es, de nuevo, una aplicación de la proposición 2.4.1. En efecto, si  $R \leq r\sqrt{5}$ , sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , circunradio  $R_K < (R^2 + 3r^2)/(4r)$  y circuncentro  $x_0$ . Consideremos la recta soporte a  $c_r$ , ortogonal a  $\overline{cx_0}$ , por el punto de  $\partial c_r$  más cercano a  $x_0$  (véase la figura 2.18), y sean  $A', B'$  los puntos intersección de dicha recta con  $\partial C_R$ . Entonces, aplicando la proposición 2.4.1 al circuncírculo  $C_K$ , como  $C_K \supset c_r$ , podemos asegurar que  $\partial C_K$  corta a  $\overline{A'B'}$  en el interior de  $C_R$ ; por tanto, los puntos de  $\partial C_K \cap \partial C_R$  forman un ángulo central estrictamente menor que  $2 \arccos(r/R)$ , lo que contradice el lema 2.1.2 (propiedad (4)). Un razonamiento análogo justifica el caso  $R \geq r\sqrt{5}$ .

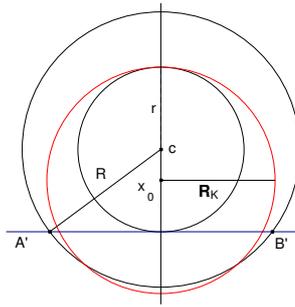


Figura 2.18: Minimalidad de los dos valores posibles para  $R_K$ . □

Como una consecuencia inmediata de la proposición 2.4.2 obtenemos el resultado buscado.

**Proposición 2.4.3** ([11]). *Si  $R_K$  es el circunradio de un cuerpo convexo  $K$  cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ , se verifican las desigualdades siguientes:*

$$R_K \leq R. \tag{2.11}$$

La igualdad se da para los cuerpos convexos que contienen puntos de  $\partial C_R$  diametralmente opuestos.

$$R_K \geq \frac{R^2 + 3r^2}{4r} \text{ si } R \leq r\sqrt{5}. \tag{2.12}$$

La igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para la porción de  $C_K$  limitada por el segmento  $\overline{AB}$  que contiene a  $c_r$  (véase la figura 2.19(a)).

$$R_K \geq \sqrt{R^2 - r^2} \text{ si } R \geq r\sqrt{5}. \tag{2.13}$$

La igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para la porción de  $C_K$  limitada por el segmento  $\overline{AB}$  y la recta paralela a dicho segmento que es tangente a  $\partial c_r$  (véase la figura 2.19(b)).

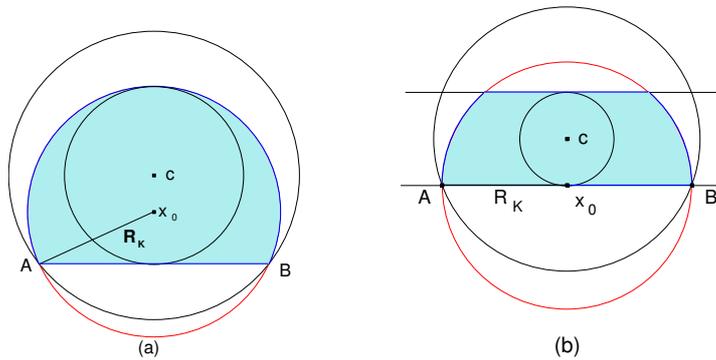


Figura 2.19: Conjuntos convexos con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio mínimo.

## 2.5. El inradio

El siguiente resultado establece las cotas del inradio en relación con el anillo mínimo.

**Proposición 2.5.1** ([11]). *Si  $r_K$  es el inradio de un cuerpo convexo  $K$  cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ , se verifican las siguientes desigualdades:*

$$r_K \geq r. \quad (2.14)$$

*La igualdad se da para los cuerpos convexos que contienen en su frontera puntos de  $\partial c_r$  diametralmente opuestos.*

$$r_K \leq \frac{2rR}{R+r}. \quad (2.15)$$

*La igualdad se da, entre otros conjuntos, para el segmento del círculo  $C_R$  determinado por dos rectas soporte a  $c_r$  que se cortan en un punto de  $\partial C_R$  (véase la figura 2.20(b)–(c)).*

**Demostración.** La desigualdad (2.14) es una consecuencia directa de la definición de inradio.

En lo que respecta a (2.15), por el lema 2.1.1(c),  $K$  está contenido en un segmento del círculo  $C_R$  formado por dos rectas soporte a  $c_r$  en puntos  $P, Q \in \partial c_r \cap \partial K$ . Basta, por tanto, maximizar el inradio sobre esta familia de conjuntos. Así, si  $K^s$  es un segmento del círculo  $C_R$ , y  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son las rectas soporte a  $c_r$  que lo determinan, su inradio es el radio de la circunferencia que tiene su centro en la bisectriz del ángulo que forman  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , y que es tangente a  $\partial C_R$  en su mayor arco (véase la figura 2.20).

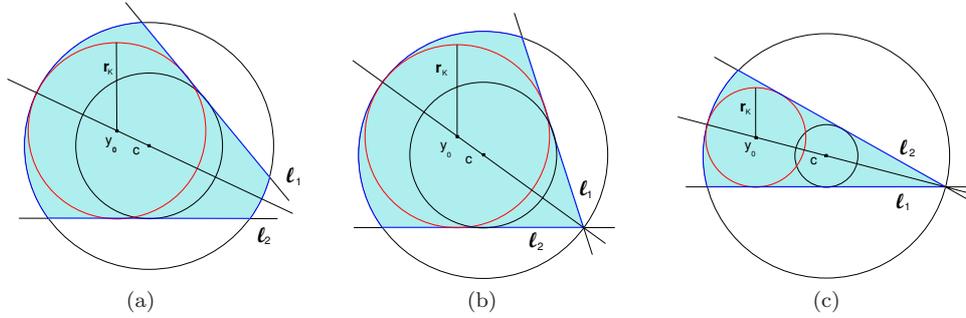


Figura 2.20: Conjuntos convexos con anillo mínimo prefijado e inradio máximo.

Claramente, éste será mayor cuanto mayor sea dicho ángulo, alcanzándose por tanto el máximo cuando  $\ell_1 \cap \ell_2 \in \partial C_R$  (recordemos que  $\ell_1$  y  $\ell_2$  no pueden cortarse en  $\text{int } C_R$ ). Un cálculo sencillo demuestra que, en este caso,  $r_K = 2Rr/(R+r)$ , lo que prueba el resultado.  $\square$

---

# El anillo mínimo y el circunradio

---

Con este capítulo entramos ya de lleno en la parte principal del estudio que nos hemos propuesto en la presente memoria: la relación existente entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo, su circunradio y su inradio. Comenzamos considerando el caso del circunradio, y así, a lo largo de todo el capítulo, supondremos que tanto el anillo mínimo de un cuerpo convexo como su circunradio están fijos. Bajo tales hipótesis, obtendremos las cotas superiores e inferiores, en términos de dichos valores, para las cinco magnitudes geométricas clásicas restantes:  $A$ ,  $p$ ,  $D$ ,  $\omega$  y  $r_K$ . Las desigualdades que se obtendrán serán las óptimas, y los correspondientes conjuntos extremales para cada una de ellas quedarán determinados. Estos resultados están recogidos en los trabajos [10] y [11].

### 3.1. Anillo mínimo, circunradio, y área (o perímetro)

En este apartado, vamos a abordar el problema de relacionar el anillo mínimo y el circunradio tanto con el área  $A$  como con el perímetro  $p$  de un cuerpo convexo  $K$ . Demostraremos, en primer lugar, el siguiente teorema que establece las cotas inferiores.

**Teorema 3.1.1** ([11]). *Si  $K$  es un cuerpo convexo con circunradio  $R_K$  y anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces su área  $A$  y su perímetro  $p$  verifican*

$$A \geq 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right), \quad (3.1)$$

$$p \geq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right). \quad (3.2)$$

*La igualdad se da, en ambas desigualdades, si, y sólo si,  $K$  es el 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$ , cuando  $\partial c_r$  y  $\partial C_K$  se tocan en un punto, o cuando  $\overline{AB}$  es un diámetro de  $C_K$ , (véase la figura 3.1).*

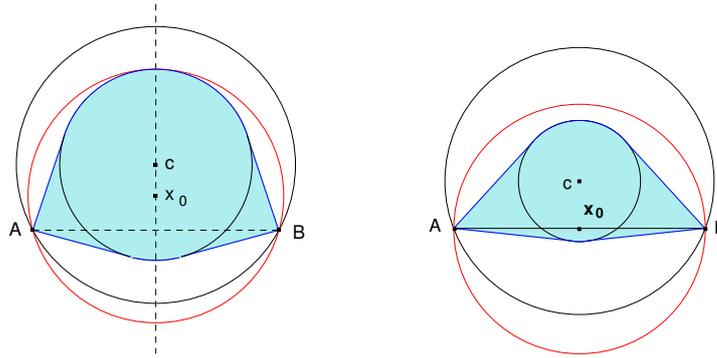


Figura 3.1: El 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , circunradio  $R_K$  y área y perímetro mínimos.

Recordemos que, según el lema 2.1.1(b), si  $K$  tiene por anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces contiene un 2-cap-body, que llamamos  $K^c$ , formado por la envoltura convexa de  $c_r$  y dos puntos de  $\partial C_R$ ; estos conjuntos tienen todos igual área y perímetro, para cualesquiera puntos de  $\partial C_R$ . En consecuencia, se verifica que

$$A \geq A(K^c) = 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right) \quad \text{y} \quad (3.3)$$

$$p \geq p(K^c) = 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right). \quad (3.4)$$

Por lo tanto, para tener demostrado el teorema 3.1.1 sólo habría que probar el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.2** ([11]). *Sean  $A(c, r, R)$  un anillo y  $s$  un número real positivo tales que:*

$$(a) \quad R \geq s \geq \frac{R^2 + 3r^2}{4r} \quad \text{si} \quad R \leq r\sqrt{5}.$$

$$(b) \quad R \geq s \geq \sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si} \quad R \geq r\sqrt{5}.$$

*Entonces existe un 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$ , con  $A, B \in \partial C_R$  adecuados, cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  y cuyo circunradio es  $R_K = s$ .*

**Demostración.** En cualquiera de los dos casos, si  $s = R$  no hay nada que probar. Supongamos, en primer lugar, que se da la condición (a), y consideremos el círculo  $C_s$  de radio  $s$  que contiene a  $c_r$  y tal que  $\partial C_s$  es tangente en un punto  $T$  a  $\partial c_r$ . Entonces, por la proposición 2.4.1,  $\partial C_s$  y  $\partial C_R$  se cortan en dos puntos  $A$  y  $B$  cuyo ángulo central  $\alpha$  satisface la condición  $\alpha \geq 2 \arccos(r/R)$ .

Sea  $K^c$  el 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$ , el cual, claramente, tiene como anillo mínimo  $A(c, r, R)$ . Si  $d(c, x_0) \leq d(c, \overline{AB})$ , el triángulo  $\triangle(ATB)$  es isósceles acutángulo y está inscrito en  $C_s$ , por lo que tiene a  $s$  por circunradio. En consecuencia,  $s$  es el circunradio de  $K^c$ .

Sin embargo, también puede ocurrir que  $d(c, x_0) > d(c, \overline{AB})$ : dado que  $d(c, x_0) = s - r$ , en el caso que nos ocupa se tiene que

$$\frac{R^2 + 3r^2}{4r} - r = \frac{R^2 - r^2}{4r} \leq d(c, x_0) \leq R - r;$$

por otro lado,  $d(c, x_0) > d(c, \overline{AB})$  si, y sólo si,  $d(c, x_0) > (-r + \sqrt{2R^2 - r^2})/2$ , y un sencillo cálculo permite comprobar que, como  $R \leq r\sqrt{5}$ , entonces

$$\frac{R^2 - r^2}{4r} \leq \frac{-r + \sqrt{2R^2 - r^2}}{2} \leq R - r,$$

lo que hace factible la segunda posibilidad. En tal caso, basta desplazar  $C_s$ , aproximando  $x_0$  a  $c$ , hasta que la correspondiente recta  $AB$  pase por  $x_0$ . Obtenemos así un triángulo isósceles rectángulo  $\triangle(ATB)$  inscrito en  $C_s$ , cuyo circunradio es, por tanto,  $s$ . En consecuencia, el nuevo 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$  tiene también circunradio  $s$  (véase la figura 3.2(a)).

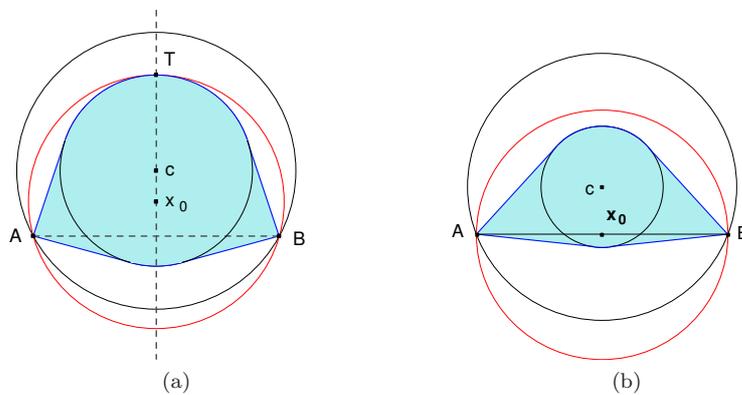
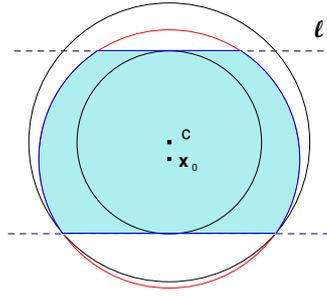


Figura 3.2: Construcción de un 2-cap-body con anillo mínimo y circunradio dados, cuando (a)  $R \leq r\sqrt{5}$ , (b)  $R \geq r\sqrt{5}$ .

Si ahora suponemos que se verifica la condición (b), podemos tomar  $C_s$  de tal manera que  $\partial C_s$  y  $\partial C_r$  se corten en dos puntos  $A$  y  $B$  de forma que el segmento  $\overline{AB}$  sea un diámetro de  $C_s$  (véase la demostración del apartado (b) de la proposición 2.4.2). Este segmento interseca a  $c_r$  por la proposición 2.4.1. Entonces, el 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, A, B\}$  tiene por circunradio  $R_{K^c} = s$ , pues  $\partial K^c$  contiene puntos de  $\partial C_s$  diametralmente opuestos, y por anillo mínimo  $A(c, r, R)$  según la propiedad (P4) (véase la figura 3.2(b)).  $\square$

Abordamos a continuación el caso de maximizar el área y el perímetro. Para ello, definimos el siguiente conjunto, que denominaremos *trapezio circular*, y que representaremos por  $K^T$ : dados  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  (este último entre los valores posibles del circunradio, véase la proposición 2.4.3), tomamos el círculo  $C_K$  de radio  $R_K$  de forma que la recta  $AB$  es tangente a  $\partial c_r$  (recuérdese que  $\partial C_K \cap \partial C_R = \{A, B\}$ ). Sea  $\ell$  la recta paralela a  $AB$  y tangente a  $\partial c_r$ . Se define el conjunto  $K^T$  como la intersección del círculo  $C_K$  con el segmento de círculo simétrico de  $C_R$  determinado por  $AB$  y  $\ell$  (véase la figura 3.3).

Figura 3.3: Trapecio circular  $K^T$ .

**Teorema 3.1.3** ([11]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ . Entonces su área  $A$  y su perímetro  $p$  verifican*

$$A \leq R_K^2 \left( \arcsen \frac{\rho}{R_K} + \arcsen \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + \rho \sqrt{R^2 - r^2} + (2r - \rho) \sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho}, \quad (3.5)$$

$$p \leq 2R_K \left( \arcsen \frac{\rho}{R_K} + \arcsen \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + 2\sqrt{R^2 - r^2} + 2\sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho}, \quad (3.6)$$

donde  $\rho = \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}$  es la distancia del circuncentro  $x_0$  a  $c_r$ . La igualdad se alcanza, en ambos casos, para el trapecio circular  $K^T$  (véase la figura 3.3).

**Demostración.** Obsérvese que, cuando  $R_K = R$ , las desigualdades (3.5) y (3.6) se transforman en las ya conocidas (2.2) y (2.4) de las proposiciones 2.2.1 y 2.2.2,

$$A \leq 2 \left( r \sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \arcsen \frac{r}{R} \right) \quad \text{y}$$

$$p \leq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + R \arcsen \frac{r}{R} \right),$$

donde el conjunto extremal es el correspondiente segmento de círculo simétrico. Así pues, en todo lo que sigue, supondremos que  $R_K < R$ , y por tanto, que  $C_K$  no coincide con  $C_R$ .

Ya sabemos que, por el lema 2.1.2(7),  $K$  contiene un 2-cap-body  $K^c = \text{conv}\{c_r, P, Q\}$  para dos puntos adecuados  $P, Q \in \partial C_R$ . Éste determina sobre  $\partial C_r$  dos arcos de circunferencia, en cada uno de los cuales hay, al menos, un punto de  $\partial K$  (véase la propiedad (8) del lema 2.1.2). Llamemos  $D$  y  $E$  a dichos puntos. Esto implica que  $K$  está contenido en un conjunto  $K_1$  formado por la intersección de  $C_K$  con el segmento del círculo  $C_R$  que determinan las rectas soporte  $\ell_D$  y  $\ell_E$  a  $K$  en  $D$  y  $E$ , respectivamente (véase la figura 3.4). Entonces,

$$A \leq A(K_1) \quad \text{y} \quad p \leq p(K_1),$$

y además,  $K_1$  tiene circunradio  $R_K$  y anillo mínimo  $A(c, r, R)$ . Basta por tanto, maximizar el área y el perímetro sobre este tipo de conjuntos.

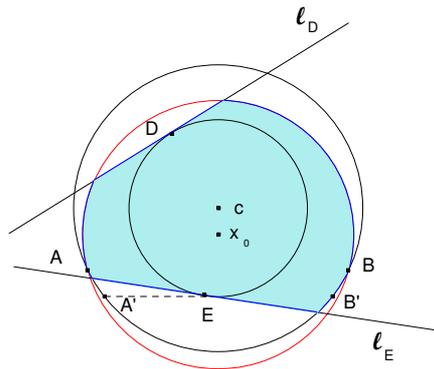


Figura 3.4: Maximizando el área y el perímetro: construcción del conjunto  $K_1 \supset K$  con igual anillo mínimo y circunradio.

Supongamos fija la recta  $\ell_E$  (observemos que ésta no puede cortar a  $\partial C_R$  por encima de los puntos  $A$  y  $B$ ). Si partimos del caso en que la recta  $\ell_D$  es perpendicular a la recta que une  $x_0$  y  $c$  (caso (a) de la figura 3.5) y movemos el punto  $D$  de forma continua sobre  $\partial C_r$  en el sentido de las agujas del reloj (si el movimiento es en sentido contrario el razonamiento es análogo), obtenemos todos los posibles conjuntos  $K_1$  hasta llegar al caso límite en que las dos rectas  $\ell_D$  y  $\ell_E$  se cortan sobre  $\partial C_R$ . Para cada recta fija  $\ell_E$ , el área (respectivamente, el perímetro) de los conjuntos  $K_1$  será mayor cuanto menor sea el área (respectivamente, la longitud del arco) de la sección del círculo  $C_K$  limitada por  $\ell_D$ , lo que ocurrirá cuando la longitud de la cuerda  $\ell_D \cap C_K$  sea lo más pequeña posible. Como  $c_r$  y  $C_K$  no son concéntricos (pues estamos suponiendo que  $C_K \neq C_R$ ), el mínimo de las longitudes  $l(\ell_D \cap C_K)$  se alcanza cuando la distancia del punto  $D$  a  $\partial C_K$  es mínima; esto es, cuando  $\ell_D$  es ortogonal a la recta  $cx_0$  que une ambos centros (véase la figura 3.5).

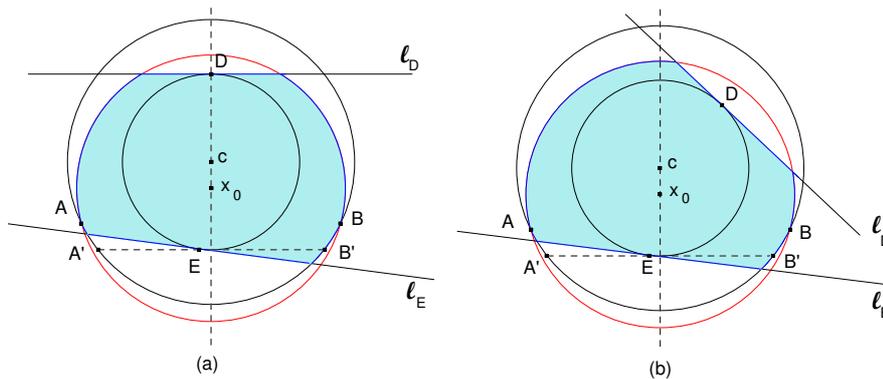


Figura 3.5: Para maximizar el área y el perímetro sobre los conjuntos  $K_1$ , basta considerar los conjuntos  $K_2$ .

Si llamamos  $K_2$  a los conjuntos de este tipo, tenemos que

$$A \leq A(K_1) \leq A(K_2) \quad \text{y} \quad p \leq p(K_1) \leq p(K_2).$$

La construcción anterior es válida para cualquier posición (entre todas las posibles) del punto  $E$ , y por tanto, de la recta  $\ell_E$ . Observemos además que, para cualquiera de tales posiciones, todos los posibles conjuntos  $K_2$  tienen igual área e igual perímetro; esto es debido a que la recta  $\ell_E$  no puede sobrepasar los puntos  $A$  y  $B$ , por lo que siempre interseca a  $\partial(C_R \cap C_K)$  en la circunferencia  $\partial C_R$ , que es concéntrica a  $\partial c_r$ . En consecuencia, podemos, sin perder generalidad, considerar como  $K_2$  la figura en la que las rectas  $\ell_D$  y  $\ell_E$  son perpendiculares a la recta  $cx_0$  que une los centros  $c$  y  $x_0$  (véase la figura 3.6 (a)).

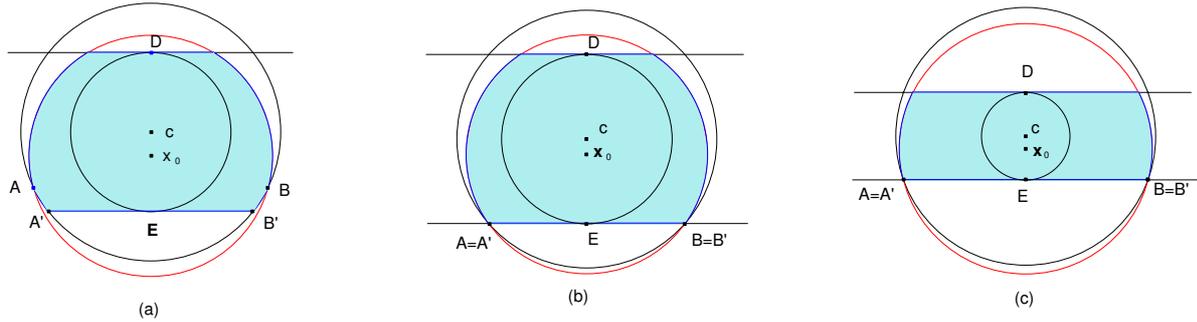


Figura 3.6: El área y el perímetro son máximos cuando  $\ell_E$  y  $\ell_D$  son perpendiculares a  $cx_0$ , y cuando  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ .

Ahora bien, para  $R_K$  fijo, el área de  $K_2$  depende de las posibles posiciones del circuncentro  $x_0$ :

- (i) Si  $R \leq r\sqrt{5}$ , los casos extremos para  $x_0$  se dan cuando  $\partial C_K$  y  $\partial c_r$  se tocan en el punto  $D$ , y cuando  $A$  y  $B$  coinciden, respectivamente, con los puntos  $A'$  y  $B'$ .
- (ii) Si  $R \geq r\sqrt{5}$ , las posiciones límite para  $x_0$  se obtienen cuando los puntos  $A$  y  $B$  determinan un diámetro de  $C_K$ , y de nuevo, cuando  $A$  y  $B$  coinciden, respectivamente, con  $A'$  y  $B'$ .

En ambos casos, el área de  $K_2$  es el área de la intersección del segmento de círculo simétrico de  $C_R$  determinado por las rectas  $\ell_D$  y  $\ell_E$ , con el círculo  $C_K$ . Como  $R_K \leq R$ , el área será mayor cuanto mayor sea la porción de  $C_K$  que corta a  $C_R$ , alcanzándose el máximo cuando el circuncentro  $x_0$  esté lo más cerca posible de  $c$ ; esto ocurrirá si  $A$  y  $B$  coinciden, respectivamente, con  $A'$  y  $B'$ , es decir, cuando  $K_2$  es el trapecio circular  $K^T$ . De modo análogo se deduce que  $K^T$  es también el conjunto que tiene mayor perímetro (véase la figura 3.6, casos (b) y (c)).

Un cálculo algo laborioso permite obtener las expresiones del área y el perímetro de  $K^T$ ,

$$A(K^T) = R_K^2 \left( \arcsen \frac{\rho}{R_K} + \arcsen \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + \rho \sqrt{R^2 - r^2} + (2r - \rho) \sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho},$$

$$p(K^T) = 2R_K \left( \arcsen \frac{\rho}{R_K} + \arcsen \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + 2\sqrt{R^2 - r^2} + 2\sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho},$$

donde  $\rho = \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}$ , lo que concluye la demostración del teorema:

$$A \leq A(K_2) \leq A(K^T), \quad p \leq p(K_2) \leq p(K^T). \quad \square$$

### 3.2. Anillo mínimo, circunradio y diámetro

A continuación establecemos la relación entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$ , su circunradio  $R_K$  y su diámetro  $D$ .

**Teorema 3.2.1** ([10]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ . Entonces su diámetro  $D$  verifica*

$$D \leq 2R_K. \tag{3.7}$$

La igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para el trapecio circular  $K^T$  (véase la figura 3.7).

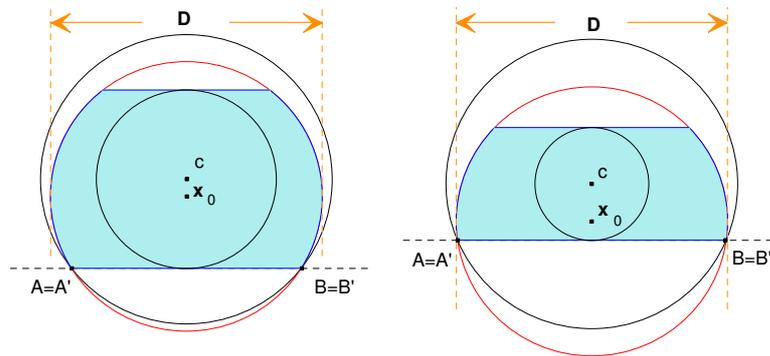


Figura 3.7: El trapecio circular  $K^T$  tiene diámetro máximo para  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  fijos.

**Demostración.** La desigualdad (3.7) se verifica en general, independientemente de cuál sea el anillo mínimo (véase la tabla 1.1), puesto que  $K \subset C_K$ . Por otra parte, tenemos que el trapecio circular  $K^T$  tiene como anillo mínimo  $A(c, r, R)$  por la propiedad **(P4)**. Además, el circunradio de  $K^T$  es  $R_K$ , pues contiene puntos de  $\partial C_K$  diametralmente opuestos. Esto demuestra también que su diámetro es  $D(K^T) = 2R_K$ , con lo que se alcanza la igualdad en la desigualdad (3.7) (véase la figura 3.7).  $\square$

En lo que sigue, llamaremos  $N$  y  $N'$  a los puntos intersección de la recta  $cx_0$  con las circunferencias  $\partial C_R$  y  $\partial C_K$ , respectivamente, que están por encima del segmento  $AB$ ; es decir, los “polos norte” de cada una de las circunferencias  $\partial C_R$  y  $\partial C_K$ .

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ . Entonces, su diámetro  $D$  verifica:*

$$D \geq R + r \quad \text{si} \quad R \leq \frac{5}{3}r \quad \text{y} \quad R_K \leq \frac{R + r}{\sqrt{3}}. \tag{3.8}$$

La igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para el cap-body dado por  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  (véase la figura 3.8).

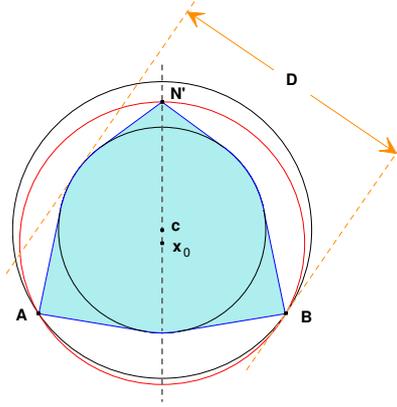


Figura 3.8: El cap-body  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  tiene diámetro mínimo  $D = R + r$  cuando  $R \leq 5r/3$  y  $R_K \leq (R + r)/\sqrt{3}$ .

$$D \geq \sqrt{3}R_K \quad \text{si} \quad \begin{cases} R \leq \frac{5}{3}r \quad \text{y} \quad R_K \geq \frac{R+r}{\sqrt{3}}, & \text{ó} & (3.9.a) \\ \frac{5}{3}r \leq R \leq 2r \quad \text{y} \quad R_K \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{R^2 - r^2}. & & (3.9.b) \end{cases} \quad (3.9)$$

La igualdad se alcanza, en ambos casos y entre otros conjuntos, para el cap-body  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$ , cuando el triángulo  $\triangle(ABN')$  es equilátero (véase la figura 3.9).

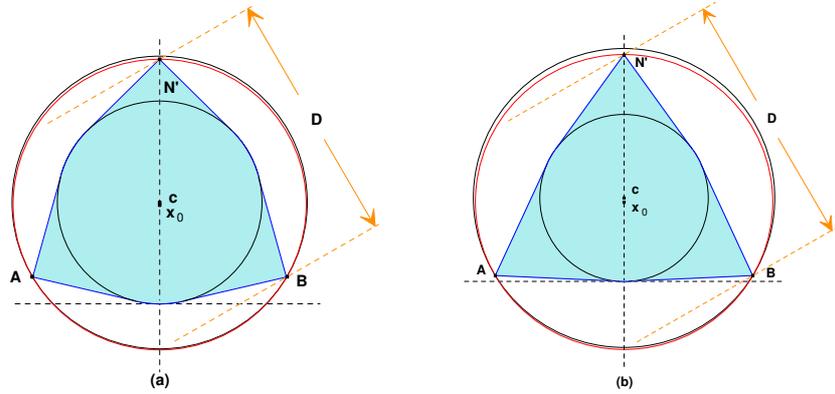


Figura 3.9: El cap-body  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  tiene diámetro mínimo  $D = \sqrt{3}R_K$  cuando (a)  $R \leq 5r/3$  y  $R_K \geq (R+r)/\sqrt{3}$ , y (b)  $5r/3 \leq R \leq 2r$  y  $R_K \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ .

$$D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \frac{5}{3}r \leq R \leq 2r \quad \text{y} \quad R_K \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{R^2 - r^2}, & \text{ó} & (3.10.a) \\ 2r \leq R. & & (3.10.b) \end{cases} \quad (3.10)$$

En el primer caso, la igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para el cap-body  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$ ; en el segundo, para el conjunto  $\text{conv}\{c_r, A, B, Z\}$ , donde  $Z$  es el punto de corte (distinto de  $A$ ) de  $\partial C_K$  con la circunferencia de centro  $B$  y radio  $d(A, B) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$  (véase la figura 3.10).

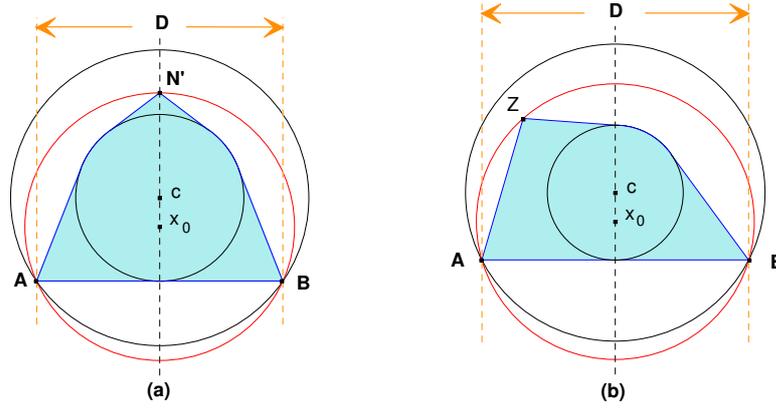


Figura 3.10: (a) El cap-body  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  tiene diámetro mínimo  $D = 2\sqrt{R^2 - r^2}$  cuando  $5r/3 \leq R \leq 2r$  y  $R_K \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ . (b) El conjunto  $\text{conv}\{c_r, A, B, Z\}$  tiene diámetro mínimo  $D = 2\sqrt{R^2 - r^2}$  cuando  $2r \leq R$ .

Obsérvese que el conjunto extremal  $\text{conv}\{c_r, A, B, Z\}$  para la última desigualdad, no va a ser necesariamente un cap-body, pues el segmento  $\overline{AZ}$  no tiene por qué intersectar (tocar) a  $c_r$ , tal y como ocurre en el caso (b) de la figura 3.10.

**Demostración.** Realizaremos la demostración en varios pasos: en primer lugar, comenzaremos estableciendo la veracidad de las desigualdades; a continuación, veremos que éstas son óptimas, encontrando los conjuntos extremales para cada una de ellas.

(i) LAS COTAS INFERIORES DEL DIÁMETRO. Supongamos en primer lugar que  $R \leq 5/3r$  y que  $R_K \leq (R+r)/\sqrt{3}$ . Como  $R \leq 5/3r$ , la desigualdad (2.9) de la proposición 2.3.2 nos asegura que el diámetro verifica  $D \geq R+r$ , independientemente del valor del circunradio. Por otro lado, es bien conocido que si  $K$  es un cuerpo convexo con circunradio  $R_K$ , entonces  $D \geq \sqrt{3}R_K$  siempre (véase la tabla 1.1). Por lo tanto, podemos asegurar que

$$D \geq \max\{R+r, \sqrt{3}R_K\} = R+r,$$

ya que  $\sqrt{3}R_K \leq R+r$  por hipótesis. Esto establece la cota para la desigualdad (3.8). Por el contrario, si  $R \leq 5/3r$  y  $R_K \geq (R+r)/\sqrt{3}$ , se tiene que  $D \geq \max\{R+r, \sqrt{3}R_K\} = \sqrt{3}R_K$ , lo que prueba la cota de la desigualdad (3.9.a).

Supongamos ahora que  $R \in [5/3r, 2r]$  y que  $R_K \geq 2/\sqrt{3}\sqrt{R^2 - r^2}$ . Como  $R \geq 5/3r$ , la desigualdad (2.10) de la proposición 2.3.2 nos asegura que el diámetro verifica  $D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}$ , independientemente del valor del circunradio. Así, podemos afirmar de nuevo que

$$D \geq \max\{2\sqrt{R^2 - r^2}, \sqrt{3}R_K\} = \sqrt{3}R_K,$$

pues estamos suponiendo  $\sqrt{3}R_K \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Esto establece la cota para la desigualdad (3.9.b).

Si, por el contrario,  $R_K \leq 2/\sqrt{3}\sqrt{R^2 - r^2}$ , entonces  $D \geq \max\{2\sqrt{R^2 - r^2}, \sqrt{3}R_K\} = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ , lo que prueba la cota para la desigualdad (3.10.a).

Supongamos, finalmente, que  $R \geq 2r$ . Dado que  $R \geq 2r > 5/3r$ , la desigualdad (2.10) de la proposición 2.3.2 nos permite asegurar de nuevo que  $D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Por lo tanto, en principio, se tendría que  $D \geq \max\{2\sqrt{R^2 - r^2}, \sqrt{3}R_K\}$ , máximo que, en el caso que nos ocupa, siempre toma el valor  $2\sqrt{R^2 - r^2}$ ; en efecto, si se verificase que  $\sqrt{3}R_K \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}$ , dado que siempre  $R \geq R_K$ , obtendríamos que  $3R^2 \geq 4(R^2 - r^2)$ , lo cual es equivalente a la relación  $R \leq 2r$ , una contradicción. Así pues,  $D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}$  si  $R \geq 2r$ , lo que demuestra la cota de la desigualdad (3.10.b).

Para establecer las desigualdades y concluir la demostración del teorema, debemos probar que las cotas obtenidas son las mejores posibles; es decir, que existen familias de conjuntos para los que se alcanza la igualdad en cada uno de los rangos correspondientes.

(II) CONJUNTOS EXTREMALES PARA LAS COTAS OBTENIDAS EN EL CASO PARTICULAR  $R_K = R$ . Antes de nada, supongamos  $R_K = R$  y veamos cuáles son las desigualdades en este caso particular.

Respecto la desigualdad (3.8), la condición  $R = R_K \leq (R + r)/\sqrt{3}$  es equivalente a que  $R \leq (1 + \sqrt{3})r/2$ . Como siempre se verifica que  $(1 + \sqrt{3})/2 < 5/3$ , la desigualdad (3.8) se reduce a

$$D \geq R + r \quad \text{si} \quad R \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}r. \quad (3.11)$$

De forma similar, en la desigualdad (3.9.a), la condición  $R = R_K \geq (R + r)/\sqrt{3}$  es equivalente a que  $R \geq (1 + \sqrt{3})r/2$ ; como  $(1 + \sqrt{3})/2 < 5/3$  y también debe verificarse que  $R \leq 5r/3$ , la desigualdad (3.9.a) se reescribe de la forma

$$D \geq \sqrt{3}R \quad \text{si} \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2}r \leq R \leq \frac{5}{3}r.$$

Ahora, la condición  $R = R_K \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$  de (3.9.b), es equivalente a que  $R \leq 2r$ , lo cual, junto a la condición  $5r/3 \leq R \leq 2r$ , implica que dicha desigualdad se reescribe como

$$D \geq \sqrt{3}R \quad \text{si} \quad \frac{5}{3}r \leq R \leq 2r.$$

Si observamos las dos últimas expresiones obtenidas para las desigualdades (3.9.a) y (3.9.b), podemos concluir que la desigualdad (3.9) se reduce a

$$D \geq \sqrt{3}R \quad \text{si} \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2}r \leq R \leq 2r. \quad (3.12)$$

El caso (a) de la desigualdad (3.10) no puede darse, ya que la condición  $R = R_K \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$  es equivalente a que  $R \geq 2r$ , lo cual entra en contradicción con la primera condición de dicha desigualdad:  $5r/3 \leq R \leq 2r$ . Por último, la desigualdad (3.10.b) nos dice que

$$D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si} \quad 2r \leq R. \quad (3.13)$$

Obsérvese que, ni siquiera en el rango común, los conjuntos extremales de las desigualdades (2.9) y (2.10) pueden ser extremales de (3.11) y (3.13), respectivamente, pues ninguno tiene circunradio  $R$  (véase la figura 2.14). Encontremos por tanto conjuntos extremales para el caso que nos ocupa.

Supongamos, en primer lugar, que  $R \leq 2r$ . Sea  $\triangle_R$  el triángulo equilátero inscrito en  $C_R$ , el cual tiene diámetro  $D(\triangle_R) = \sqrt{3}R$  y, desde luego, circunradio  $R$ . Sin embargo, su anillo mínimo no tiene por qué ser  $A(c, r, R)$ , ya que, en principio,  $r \neq r_K$ . Consideremos entonces el conjunto  $K = \text{conv}\{\triangle_R, c_r\}$ . Dado que  $r \geq R/2$ , los lados de  $\triangle_R$  tienen intersección no vacía con  $\partial c_r$ , por lo que  $K \supsetneq \triangle_R$  y tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ . Además, su diámetro es, dependiendo de la relación entre  $R$  y  $r$ , o bien el diámetro de  $\triangle_R$ , esto es,  $\sqrt{3}R$ , o bien la distancia entre cualquiera de los vértices de  $\triangle_R$  y una de las rectas soporte al conjunto en uno de los puntos del arco de  $\partial c_r$  opuesto a dicho vértice, es decir,  $R + r$ .

Ya sabemos que la condición  $R \leq (1 + \sqrt{3})r/2$  de la desigualdad (3.11) es equivalente a que se verifique  $\sqrt{3}R \leq R + r$ ; por lo tanto, en este caso, el diámetro de  $K$  es  $D = R + r$  (véanse las figuras 3.11(a), (b)), lo que demuestra dicha desigualdad. Por el contrario, la condición  $R \geq (1 + \sqrt{3})r/2$  puede reescribirse como  $\sqrt{3}R \geq R + r$ ; el diámetro de  $K$  es ahora  $D = \sqrt{3}R$ , lo que prueba la desigualdad (3.12) (véanse las figuras 3.11(c), (b)).

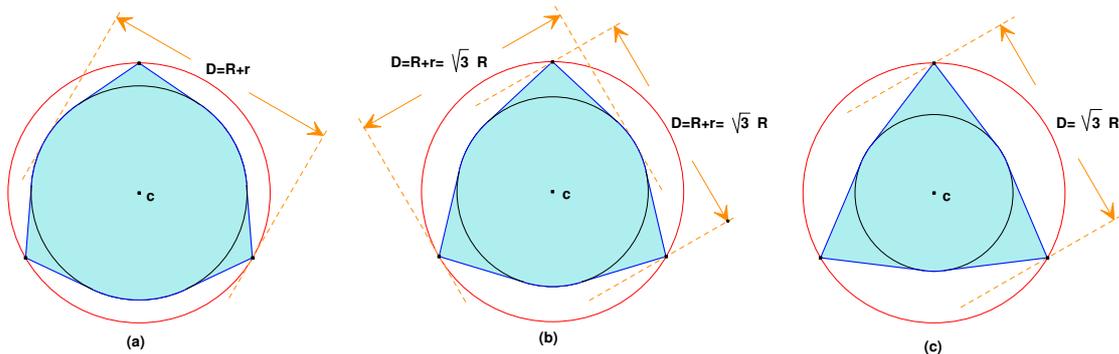


Figura 3.11: Conjuntos extremales cuando  $R_K = R$  y (a)  $R < (1 + \sqrt{3})r/2$ , (b)  $R = (1 + \sqrt{3})r/2$ , (c)  $R > (1 + \sqrt{3})r/2$ .

Hemos construido estos conjuntos por su sencillez, y por la relación que guardan con los conjuntos extremales que aparecen en las correspondientes desigualdades del caso  $R_K > R$ . Sin embargo, existen numerosas familias de figuras para las que se alcanza la igualdad en las desigualdades (3.11) y (3.12): por ejemplo, los ya conocidos conjuntos de anchura constante (véanse la tabla 1.2 y la figura 1.4) verifican que  $D = R + r$  cuando  $R \leq (\sqrt{3} + 1)r/2$ , puesto que su circuncírculo y su incírculo son siempre concéntricos y determinan, por lo tanto, su anillo mínimo; de igual forma, los conjuntos de Yamanouti cumplen que  $D = \sqrt{3}R$  si  $(\sqrt{3} + 1)r/2 \leq R \leq 2r$ , de nuevo porque su circuncírculo y su incírculo son concéntricos, determinando así su anillo mínimo.

Supongamos finalmente que  $R \geq 2r$ . Ahora no nos encontramos en la situación planteada para la desigualdad correspondiente que relaciona  $D$  con  $R_K$  y  $r_K$ :  $(D^2 - 2R_K r_K) \sqrt{4R_K^2 - D^2} \leq 4R_K^2 r_K$

(véase la tabla 1.2); allí, los conjuntos extremales son triángulos isósceles, pero  $\partial C_K$  y  $\partial c_K$  no son concéntricos, y por tanto, no determinan el anillo mínimo de los mismos. Es por ello que la desigualdad cambia, al contrario de lo que ocurría en los dos casos anteriores. Veamos por tanto cuáles serían algunos de los conjuntos extremales de la desigualdad (3.13).

Tomemos  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ , y consideremos el sector circular  $BAM$ , donde  $M$  es el punto de corte de  $\partial C_R$  con la circunferencia de centro  $B$  y radio  $d(A, B) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$  (véase la figura 3.12).

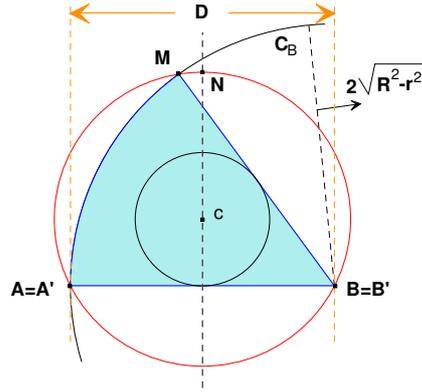


Figura 3.12: Conjunto extremal cuando  $R_K = R$  y  $R \geq 2r$ .

Claramente, los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BM}$  son tangentes a  $\partial c_r$ , y los puntos de tangencia no se pueden separar de los puntos  $\{A, B, M\}$ ; luego el sector circular  $ABM$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ . Además, su circunradio es  $R$ , ya que  $A, B$  y  $M$  forman un triángulo acutángulo. Respecto al diámetro, observemos que, como  $R \geq 2r$ , el punto  $M$  se encuentra en el arco  $\overline{AN}$  de  $\partial C_R$  (véase de nuevo la figura 3.12). Por tanto, el arco  $\overline{AM}$  no toca a  $\partial c_r$ , y  $d(A, M) \leq d(B, M) = d(A, B)$ , lo que significa que el diámetro es, precisamente,  $D = d(B, M) = d(A, B) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ .

(III) CONJUNTOS EXTREMALES PARA LAS COTAS OBTENIDAS CUANDO  $R_K < R$ . A partir de este momento, supondremos siempre que  $R_K < R$  y, por tanto, que  $C_K$  no coincide con  $C_R$ .

A la hora de construir los conjuntos extremales de las desigualdades (3.8), (3.9) y (3.10), nos hemos restringido a una familia muy particular de conjuntos, debido a las siguientes consideraciones.

- Según las propiedades (6) y (7) del lema 2.1.2,  $K$  contiene un 2-cap-body  $K^c$  formado por la envoltura convexa de  $c_r$  y dos puntos  $P$  y  $Q$  de  $\partial C_R \cap \partial K$ , cuyo ángulo central es mayor o igual que  $2 \arccos(r/R)$ . Además, al menos uno de estos puntos se encuentra, o bien en el arco  $\overline{AA'}$ , o bien en el arco  $\overline{BB'}$  (véase la figura 3.13).

Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que  $P \in \overline{AA'}$ . Obsérvese que, aunque  $K^c$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , su circunradio no es, en general,  $R_K$  (véase la figura 3.13, donde el circuncírculo de  $K^c$  no coincide con  $C_K$ , este último trazado con línea discontinua).

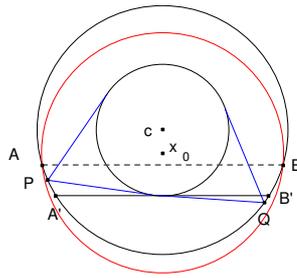


Figura 3.13: Los puntos  $P$  y  $Q$  de  $\partial K \cap \partial C_R$ .

- Por otra parte, dado que  $C_K$  es el circuncírculo de  $K$ , su frontera  $\partial K$  contiene, o bien dos puntos de  $\partial C_K$  diametralmente opuestos, o bien tres puntos  $X, Y, Z \in \partial C_K$  que forman un triángulo acutángulo y que, en consecuencia, no están situados sobre una misma semicircunferencia de  $\partial C_K$ . Dado que lo que perseguimos es la construcción de ciertos conjuntos adecuados, sobre los cuales sabemos, a la postre, que deben cumplir la segunda condición, vamos a suponer que, en efecto, existen  $X, Y, Z \in \partial K \cap \partial C_K$  formando un triángulo acutángulo.
- Claramente, los puntos  $X, Y, Z$  se encuentran en el arco  $\widehat{AB}$  de  $\partial C_K$  que está incluido en  $C_R$ , no pudiendo situarse, como ya hemos dicho, sobre una misma semicircunferencia. Por tanto, si  $A''$  y  $B''$  representan, respectivamente, los puntos de  $\partial C_K$  simétricos de  $A$  y  $B$  respecto a  $x_0$ , uno de los tres vértices  $X, Y, Z$  se encuentra, o bien en el arco  $\widehat{AB''}$ , o bien en el arco  $\widehat{BA''}$ : en caso contrario, todos estarían sobre el arco  $\widehat{A''B''}$  y, por tanto, en una misma semicircunferencia (véase la figura 3.14).

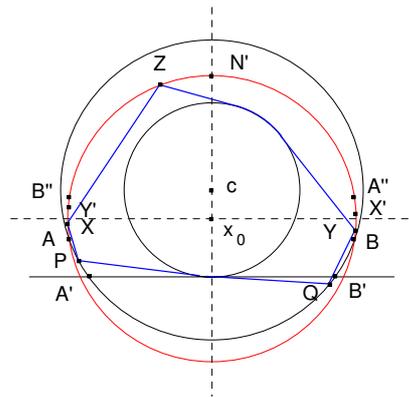


Figura 3.14: Los puntos  $X, Y, Z \in \partial C_K \cap \partial K$  forman un triángulo acutángulo.

Supongamos, por ejemplo, que  $X \in \widehat{AB''}$ . El punto  $X' \in \partial C_K$ , simétrico de  $X$  respecto a  $x_0$ , se encuentra entonces en el arco  $\widehat{BA''}$  y, en consecuencia, otro de los vértices, por ejemplo  $Y$ , debe situarse en el arco  $\widehat{X'B}$  (de nuevo, en caso contrario, estarían en la misma

semicircunferencia  $\widehat{XX'}$ ). Finalmente, el mismo argumento prueba que el tercer punto  $Z$  se encuentra, necesariamente, en el arco  $\widehat{X'Y'}$ , siendo  $Y' \in \partial C_K$  el punto simétrico de  $Y$  respecto a  $x_0$ : si no fuese así, los tres vértices se situarían sobre la semicircunferencia  $\widehat{YY'}$  o sobre  $\widehat{XX'}$ , en cualquier caso, una contradicción (véase la figura 3.14).

- Representamos por  $L$  el conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, P, Q, X, Y, Z\}$ , que está contenido en  $K$ . Obsérvese que, al menos, uno de los segmentos  $\overline{XZ}$  o  $\overline{YZ}$  interseca (o es soporte) a  $c_r$  (véase la figura 3.15(a)); en caso contrario, no se verificaría la propiedad (8) del lema 2.1.2, ya que sólo podría haber puntos de  $\partial K$  en *uno* de los dos arcos de  $\partial c_r$  determinados por el cap-body  $\text{conv}\{c_r, P, Q\}$ , y no en ambos, tal y como dicho lema establece (véase la figura 3.15(b)).

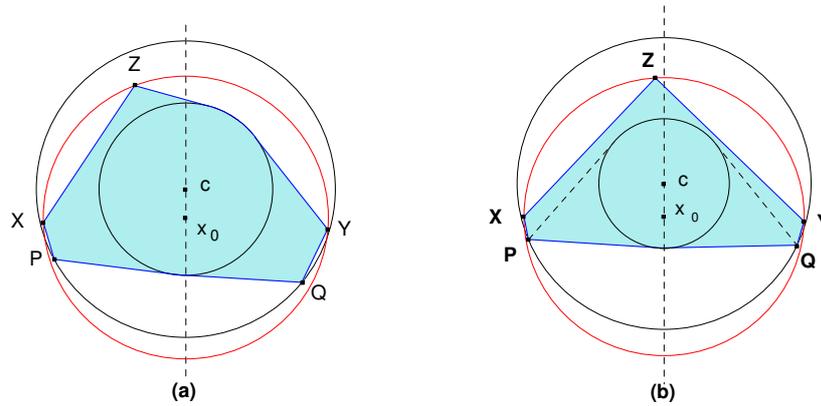


Figura 3.15: Basta considerar los conjuntos  $L = \text{conv}\{c_r, P, Q, X, Y, Z\}$ , donde, o bien  $\overline{XZ}$ , o  $\overline{YZ}$ , corta a  $c_r$ .

En consecuencia,  $L$  tiene por anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , obviamente, circunradio  $R_K$  y, como  $L \subset K$ , diámetro  $D(L) \leq D$ . La búsqueda de los conjuntos extremales se reduce así a trabajar con este tipo de conjuntos (véase, de nuevo, la figura 3.15(a)).

- Hagamos una última consideración. Por el razonamiento anterior, sabemos que cualquier conjunto convexo que tenga diámetro mínimo debe ser de la forma  $L = \text{conv}\{c_r, P, Q, X, Y, Z\}$ . Dado que nuestro objetivo es encontrar conjuntos convexos particulares del tipo  $L$ , vamos a simplificar aún más su forma, por lo que, de ahora en adelante, supondremos siempre que  $X \equiv P \equiv A$  y que  $Y \equiv Q \equiv B$ .

(III.A) CONJUNTOS EXTREMALES PARA LA DESIGUALDAD (3.8). Dados  $R, r$  verificando  $R \leq 5r/3$ , vamos a construir un conjunto convexo del tipo anterior, con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y diámetro  $D = R + r$ , para cualquier valor del circunradio  $R_K \leq (R + r)/\sqrt{3}$ .

Como  $R \leq 5r/3$ , la distancia  $d(A', B') = 2\sqrt{R^2 - r^2} \leq R + r$ . Tomemos  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ , y consideremos los círculos  $C_A$  y  $C_B$ , de radio  $R + r$ , centrados en  $A$  y  $B$ , respectivamente. Entonces,  $\partial c_r$  es tangente interiormente a las circunferencias  $\partial C_A$  y  $\partial C_B$  en los puntos  $M_A$  y  $M_B$ , intersección de las rectas  $Ac$  y  $Bc$  con  $\partial c_r$ , más alejados de  $A$  y  $B$ , respectivamente (véase la figura 3.16(a)).

Si  $R_K$  es tal que  $d(A, N') = d(B, N') \leq R+r$  (es decir, si  $N'$  se encuentra en el círculo  $C_A$  –y en  $C_B$ ), entonces el conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  está contenido en la intersección de  $C_A \cap C_B$  con el semiplano cerrado delimitado por la recta  $AB$  (véase, de nuevo, la figura 3.16). Como estamos suponiendo que  $A \equiv A'$  y que  $B \equiv B'$ , el segmento  $\overline{AB}$  se sitúa por debajo del circuncentro  $x_0$  y, en consecuencia, el triángulo  $\triangle(AN'B)$  es acutángulo; es decir,  $L$  tiene circunradio  $R_K$ . Además, su anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  por la propiedad **(P4)**. Finalmente, sólo resta justificar que estas figuras tienen diámetro  $R+r$ . En efecto, dado que nos encontramos bajo la hipótesis  $R \leq 5r/3 < 2r$ , los segmentos  $\overline{N'A}$  y  $\overline{N'B}$  cortan siempre a  $c_r$  (el caso límite de tangencia se obtendría cuando  $N' \equiv N$  y  $R = 2r$ ) y, en consecuencia,  $M_A$  y  $M_B$  se encuentran en la frontera  $\partial L$ . Esto implica que  $D(L) = d(A, M_A) = d(B, M_B) = R+r$ , pues estamos suponiendo que  $d(A, N') = d(B, N') \leq R+r$  y, además, por ser  $R \leq 5r/3$ ,  $d(A, B) = 2\sqrt{R^2 - r^2} \leq R+r$ . Un sencillo cálculo muestra que el punto  $N' \in \partial C_B$  si, y sólo si,  $R_K = \sqrt{(R+r)^3/(8r)}$ . Por tanto, la construcción del conjunto  $L$  anterior puede realizarse precisamente si  $R_K \leq \sqrt{(R+r)^3/(8r)}$  (véase la figura 3.16).

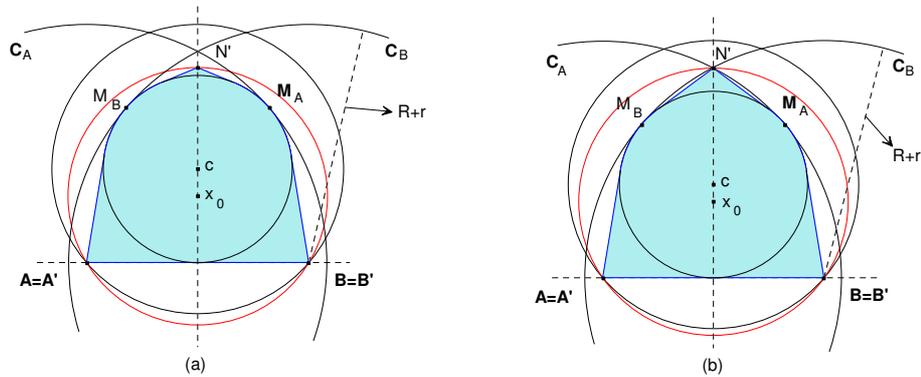


Figura 3.16: (a) El conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  tiene diámetro mínimo  $D(L) = R+r$  si  $R_K < \sqrt{(R+r)^3/(8r)}$ . (b) El caso límite  $R_K = \sqrt{(R+r)^3/(8r)}$ , donde  $N' \in \partial C_A \cap \partial C_B$ .

Sin embargo, a partir de tal valor de  $R_K$ , la construcción anterior no es válida, puesto que  $d(A, N') = d(B, N') > R+r$ , como se puede ver en la figura 3.17.

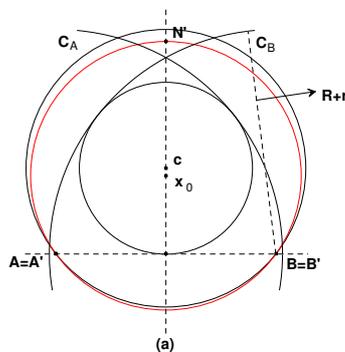


Figura 3.17: Caso en que  $d(A, N') = d(B, N') > R+r$ .

Supongamos, por tanto, que  $R \leq 5r/3$  y que  $R_K > \sqrt{(R+r)^3/(8r)}$ . Bajo tales condiciones,  $d(A', B') = 2\sqrt{R^2 - r^2} < R+r < d(A', N') = d(B', N')$ . Tomemos el circuncentro  $x_0$  situado de forma que  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ . Entonces, moviendo  $x_0$  de forma continua sobre la recta  $cx_0$ , alejándolo de  $c$ , aumenta la distancia  $d(A, B)$  (ahora  $A \not\equiv A'$  y  $B \not\equiv B'$ ), mientras que disminuye  $d(A, N') = d(B, N')$ . Realizamos este movimiento hasta el preciso momento en que tales distancias coincidan:  $d(A, B) = d(A, N') = d(B, N')$ ; es decir, hasta que los puntos  $A, B, N' \in \partial C_K$  formen un triángulo equilátero. Entonces,  $d(A, B) = d(A, N') = d(B, N') = \sqrt{3}R_K$ . Hemos obtenido así un cuerpo convexo  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$ , cuyo circunradio es  $R_K$  (ya que  $A, B, N' \in \partial C_K$  y determinan un triángulo equilátero), y que tiene por anillo mínimo  $A(c, r, R)$  (propiedad **(P4)**), véase la figura 3.18.

Estudiemos finalmente su diámetro. Desde luego, el diámetro de  $L$  siempre será mayor (o igual) que la distancia  $d(A, B)$ . Así, aparecen dos casos posibles:

- si  $L \subset C_A \cap C_B$  (en definitiva, si  $N' \in C_A \cap C_B$ ), entonces  $R+r \geq d(A, B) = \sqrt{3}R_K$  (véase la figura 3.18(a)) y, en consecuencia,  $D(L) = R+r$ ;
- en caso contrario, si  $N' \notin C_A \cap C_B$ , entonces  $\sqrt{3}R_K = d(A, B) \geq R+r$ , por lo que el diámetro de este conjunto es  $\sqrt{3}R_K$  (véase la figura 3.18(b)).

Así pues, si  $\sqrt{(R+r)^3/(8r)} < R_K \leq (R+r)/\sqrt{3}$ , el conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  que se muestra en la figura 3.18(a) es extremal para la desigualdad (3.8), lo que finaliza su demostración.

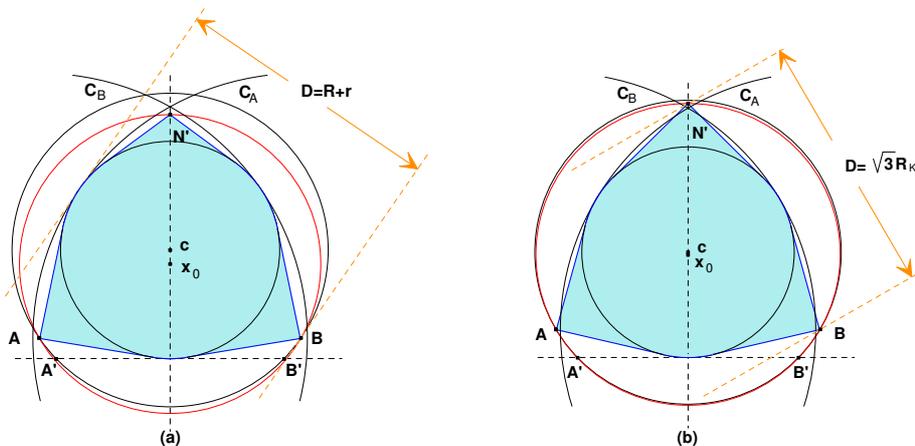


Figura 3.18: El conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  tiene diámetro mínimo: (a)  $D(L) = R+r$ , si  $R \leq 5r/3$  y  $\sqrt{(R+r)^3/(8r)} \leq R_K \leq (R+r)/\sqrt{3}$ ; (b)  $D(L) = \sqrt{3}R_K$ , si  $R \leq 5r/3$  y  $R_K \geq (R+r)/\sqrt{3}$ .

(III.B) CONJUNTOS EXTREMALES PARA LA DESIGUALDAD (3.9). Obsérvese que la construcción realizada en el apartado anterior permite también deducir que, si  $R_K \geq (R+r)/\sqrt{3}$  (y, por supuesto,  $R \leq 5r/3$ ), el conjunto  $L$  construido de forma análoga, mostrado en la figura 3.18(b), es extremal para la desigualdad (3.9.a).



(III.C) CONJUNTOS EXTREMALES PARA LA DESIGUALDAD (3.10). Supongamos, en primer lugar, que  $R$ ,  $r$  y  $R_K$  verifican  $5r/3 \leq R \leq 2r$  y  $R_K \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ . Tomemos  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ , y sean ahora  $C_A$  y  $C_B$  los círculos de radio  $2\sqrt{R^2 - r^2} = d(A, B)$ , centrados en  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Un sencillo cálculo muestra que la distancia  $d(A, N) = \sqrt{2R(R+r)}$ , por lo que es fácil ver que  $d(A, N) = d(B, N) \geq d(A, B) = \sqrt{R^2 - r^2}$ , ya que  $R \leq 2r$  (en el caso  $R = 2r$  se obtendría un triángulo  $\triangle(A, N, B)$  equilátero). Por lo tanto, las circunferencias  $\partial C_A$  y  $\partial C_B$  se cortan en un punto  $E$  de  $C_R$  (del interior o de la frontera –esto último en el caso límite  $R = 2r$ ). Observemos que, si  $R_K$  es tal que el punto  $N'$  verifica  $d(N', c) \leq d(E, c)$ , entonces el conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$  es solución a nuestro problema (véase la figura 3.20). En efecto, su circunradio es  $R_K$ , ya que los puntos  $A, N', B$  no están sobre una misma semicircunferencia (obsérvese que la recta  $AB$  siempre está por debajo de  $x_0$ ); su anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ , pues los lados de  $\triangle(AN'B)$  cortan siempre a  $c_r$ , lo que implica que los puntos de contacto de  $\partial L$  con  $\partial C_R$  y  $\partial c_r$ , respectivamente, no se pueden separar (el caso límite de tangencia se obtendría cuando  $R = 2r$  y  $R_K = R$ ); finalmente, dado que  $L \subset C_A \cap C_B$ , su diámetro es  $D(L) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ .

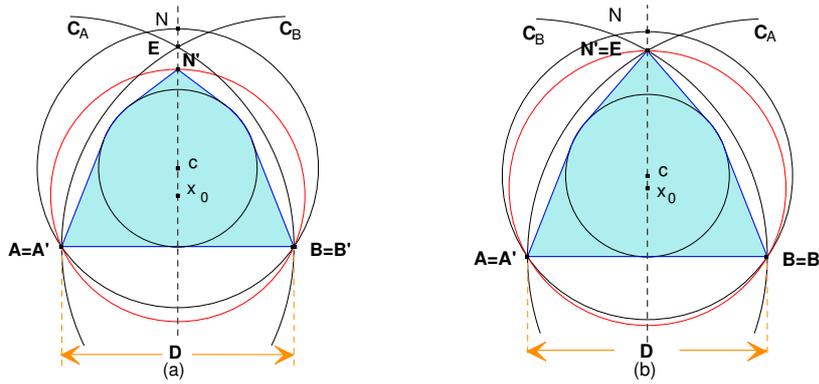


Figura 3.20: (a) El conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, Z\}$  tiene diámetro mínimo  $D(L) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$  si  $5r/3 \leq R \leq 2r$  y  $R_K \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ . (b) El caso límite  $R_K = 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ .

No es difícil ver que  $d(N', c) = d(E, c)$ , esto es,  $N' \equiv E$ , solamente si  $R_K = 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$  y, por tanto, que  $d(N', c) \leq d(E, c)$  cuando  $R_K \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}/\sqrt{3}$ , nuestra hipótesis en este caso. Esto prueba la desigualdad (3.10.a).

Para concluir la demostración de la desigualdad (3.10), y con ello la del teorema, debemos ocuparnos del caso (b) de la misma. Así pues, supongamos ahora que  $R$  y  $r$  verifican  $R \geq 2r$ , para cualquier valor (entre los permitidos, claro está, por la proposición 2.4.3) de  $R_K$ .

Tomemos de nuevo  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ . Por lo argumentado anteriormente, como  $R \geq 2r$ , se tiene que  $d(A, N) = d(B, N) \leq d(A, B) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Por lo tanto, las circunferencias  $\partial C_A$  y  $\partial C_B$  se cortan en el exterior de  $C_R$  (véase la figura 3.21). Obsérvese que, entonces, la circunferencia  $\partial C_B$ , por ejemplo, interseca  $\partial C_R$  en un punto  $M$  del arco  $\widehat{AN}$ , de tal manera que el segmento  $\overline{MB}$  es

tangente a  $\partial c_r$ . Además,  $\partial C_A$  y  $\partial C_K$  se cortan en un punto  $Z$  del arco  $\overline{AM} \subset \partial C_B$  (si  $\overline{AB}$  coincide con un diámetro de  $C_K$ , entonces  $Z = A$ , como se muestra en la figura 3.21(b)).

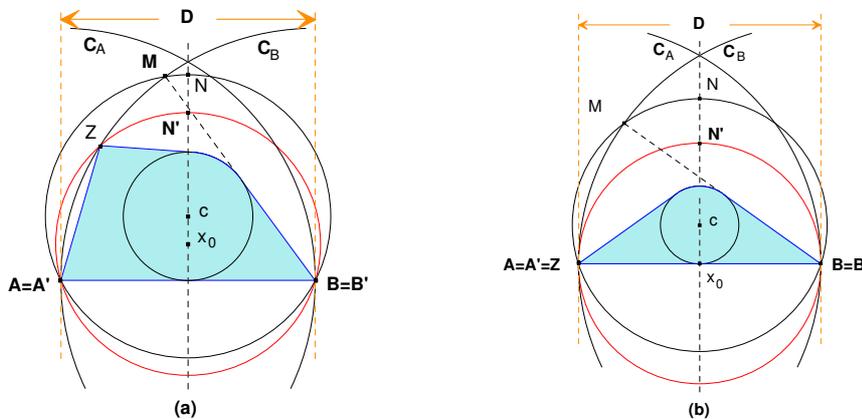


Figura 3.21: El conjunto  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, Z\}$  tiene diámetro mínimo  $D(L) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ , si  $2r \leq R$ .

El cuerpo convexo  $L = \text{conv}\{c_r, A, B, Z\}$  verifica las condiciones buscadas: su circunradio es  $R_K$ , pues los puntos  $A, B, Z$  no están sobre una misma semicircunferencia (el segmento  $\overline{AB}$  puede, a lo sumo, contener el circuncentro  $x_0$ ); tiene a  $A(c, r, R)$  como anillo mínimo por la propiedad (P4); su diámetro es  $D(L) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ , ya que está incluido en el sector circular  $ABM$  y contiene al centro,  $B$ , y dos puntos del arco,  $A$  y  $Z$  (véase de nuevo la figura 3.21). Esto concluye la demostración de la desigualdad (3.10.b), y con ella, la del teorema.

Obsérvese que, en este último caso, no podemos tomar como conjunto  $L$  el que ya viene siendo habitual,  $\text{conv}\{c_r, A, B, N'\}$ , pues, dependiendo de la relación entre los valores  $R, r, R_K$ , los segmentos  $\overline{AN'}$  y  $\overline{BN'}$  no tienen por qué tocar a  $\partial c_r$  (véase la figura 3.21(b)); en tales situaciones,  $A(c, r, R)$  no sería el anillo mínimo del cuerpo, al contradecirse la propiedad (P1).  $\square$

### 3.3. Anillo mínimo, circunradio y anchura

Establecemos en este apartado la relación entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$ , su circunradio  $R_K$  y su anchura  $\omega$ . Comenzamos estudiando los conjuntos que minimizan la anchura, cuando  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  están fijos.

**Teorema 3.3.1** ([10]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ . Entonces, su anchura  $\omega$  verifica*

$$\omega \geq 2r. \tag{3.14}$$

*La igualdad se alcanza para cualquier conjunto que contenga en su frontera puntos de  $\partial c_r$  diametralmente opuestos, como por ejemplo, el trapecio circular  $K^T$  (véase la figura 3.22).*

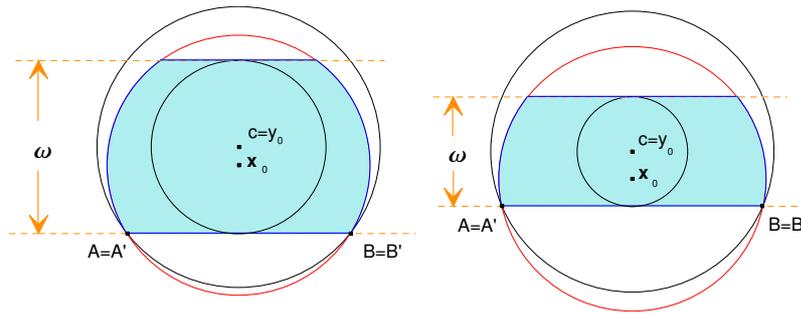


Figura 3.22: El trapecio circular  $K^T$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , circunradio  $R_K$  y anchura  $\omega = 2r$ .

**Demostración.** La desigualdad (3.14) se verifica en general, independientemente del valor del circunradio, según hemos visto en la proposición 2.3.1, desigualdad (2.5). Por tanto, es suficiente comprobar que, para cada valor posible de  $R_K$ , existe un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y anchura  $\omega = 2r$ . Y en efecto, basta considerar el trapecio circular  $K^T$  definido en la página 33 (véase la figura 3.22). Éste tiene por anchura  $2r$ , puesto que su frontera contiene dos segmentos de recta paralelos a distancia  $2r$ , su anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  (propiedad **(P4)**) y su circunradio  $R_K$ , ya que contiene un diámetro de  $C_K$ .  $\square$

Antes de establecer la desigualdad contraria, vamos a definir un nuevo conjunto, que representaremos por  $K^\angle$  y denominaremos *cuña circular asimétrica*, de la siguiente forma: dados  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  (este último entre los valores posibles del circunradio, véase la proposición 2.4.3), consideramos el círculo  $C_K$  de radio  $R_K$  tal que la recta  $AB$  es tangente a  $\partial c_r$ . Sea ahora  $\ell$  la recta tangente a  $\partial c_r$  que pasa por el punto  $A$  (véase la figura 3.23).

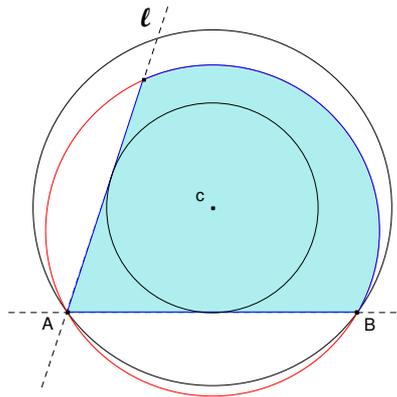


Figura 3.23: Cuña circular asimétrica  $K^\angle$ .

Se define la cuña circular asimétrica como el conjunto  $K^\angle$  intersección del círculo  $C_K$  con el segmento del círculo  $C_R$  determinado por las rectas  $AB$  y  $\ell$ .

**Teorema 3.3.2** ([10]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ . Entonces, su anchura  $\omega$  verifica:*

$$\omega \leq R_K + \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}$$

$$\text{si } \begin{cases} R \leq 2r, & \text{ó} \\ 2r \leq R \leq r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} & \text{y } R_K \leq \frac{R^4}{4r(R^2 - 2r^2)}. \end{cases} \quad (3.15.a) \quad (3.15)$$

$$(3.15.b)$$

$$\omega \leq \frac{4r(R^2 - r^2)}{R^4} \left( R^2 - 2r^2 + 2r\sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2} \right)$$

$$\text{si } \begin{cases} 2r \leq R \leq r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} & \text{y } R_K \geq \frac{R^4}{4r(R^2 - 2r^2)}, & \text{ó} \\ R \geq r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}. \end{cases} \quad (3.16.a) \quad (3.16)$$

$$(3.16.b)$$

La igualdad se alcanza, en todos los casos y entre otros conjuntos, para la cuña circular asimétrica  $K^\angle$  (véase la figura 3.24).

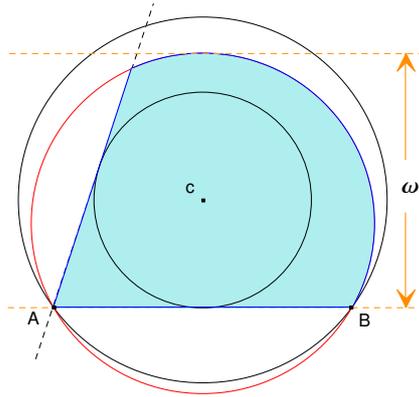


Figura 3.24: La cuña circular asimétrica  $K^\angle$  tiene anchura máxima.

**Demostración.** Obsérvese que, cuando  $R_K = R$ , en las desigualdades (3.15) y (3.16) sólo queda contemplado un caso ( $R \leq 2r$  ó  $R \geq 2r$ , respectivamente), convirtiéndose éstas en las ya conocidas desigualdades (2.6) y (2.7) de la proposición 2.3.1,

$$\omega \leq R + r \quad \text{si } R \leq 2r,$$

$$\omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \quad \text{si } R \geq 2r;$$

los conjuntos extremales también se transforman en los allí definidos. Así pues, en todo lo que sigue, supondremos que  $R_K < R$ , y por tanto, que  $C_K$  no coincide con  $C_R$ .

Según la propiedad (9) del lema 2.1.2,  $K$  está contenido en el conjunto  $K_1$  formado por la intersección de  $C_K$  con el segmento del círculo  $C_R$  determinado por las rectas soporte a  $c_r$  en dos puntos de  $\partial c_r \cap \partial K$  adecuados, que están separados por el segmento  $\overline{AB}$ . En consecuencia, se verifica que  $\omega \leq \omega(K_1)$ , con lo que el problema se reduce a estudiar la anchura en esta familia particular de conjuntos.

Además, la propiedad (6) del lema 2.1.2 nos asegura que, al menos una de dichas rectas, corta a  $\partial C_R$  en un punto  $P$ , o bien del arco  $\overline{AA'}$ , o bien del arco  $\overline{BB'}$ ; supongamos por ejemplo que  $P \in \overline{AA'}$  (véase la figura 3.25).

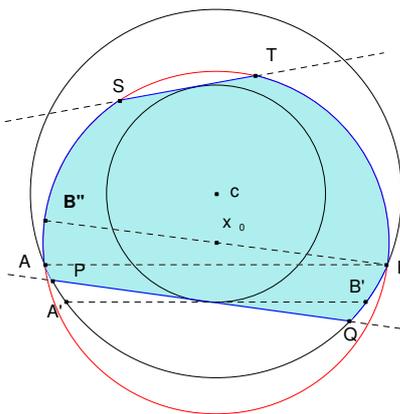


Figura 3.25: Maximizando la anchura: construcción del conjunto  $K_1 \supset K$  con igual anillo mínimo y circunradio.

Como se muestra en la figura 3.25, llamamos  $S, T \in \partial C_K$  y  $Q \in \partial C_R$  a los puntos de corte, junto con  $P$ , de las circunferencias  $\partial C_K$  y  $\partial C_R$  con las rectas que determinan  $K_1$ .

Fijado el segmento  $\overline{PQ}$ , es en el caso en el que la recta  $ST$  es paralela a  $\overline{PQ}$  cuando la anchura del cuerpo convexo  $K_1$  es la menor posible:  $2r$ . Moviendo de forma continua la recta  $ST$  sobre  $\partial c_r$  en sentido contrario a las agujas del reloj, obtenemos todos los posibles conjuntos del tipo  $K_1$ . La anchura en la dirección ortogonal a  $PQ$  es la distancia al segmento  $\overline{PQ}$ , o bien del punto  $T$ , o bien de la recta tangente a  $\partial C_K$  y paralela al mismo, dependiendo de la relación existente entre  $r$ ,  $R$  y  $R_K$ . Veamos que es, en esta dirección, en la que se alcanza la anchura de los conjuntos  $K_1$ .

Para probarlo, vamos a “recorrer” la frontera de  $K_1$ . Sea  $B''$  el punto simétrico de  $B$  respecto a  $x_0$ . Tomando rectas soporte a  $K_1$  en puntos del arco  $\overline{AB''} \subset \partial K_1$ , la anchura en las distintas direcciones que tales rectas soporte determinan es  $2R_K$ , puesto que el arco de  $\partial C_K$  simétrico de  $\overline{AB''}$  respecto a  $x_0$ , está en  $\partial K_1$ . Continuamos recorriendo la frontera de  $K_1$ , y consideramos ahora el arco  $\overline{B''S} \subset \partial C_K$ . Si tomamos cualquier recta soporte al conjunto en un punto de dicho arco, la recta soporte a  $K_1$  paralela a la anterior toca a  $\partial K_1$  en el arco  $\overline{BQ} \subset \text{int } C_R$ ; como ninguna de estas rectas es tangente a  $\partial c_r$ , y sin embargo  $PQ$  sí lo es, la distancia entre ambas es mayor que la deseada. Continuando el recorrido por la frontera de  $K_1$ , llegamos al segmento  $\overline{ST}$ . La recta paralela a  $\overline{ST}$  que soporta  $K_1$  es tangente a  $\partial K_1$  en el arco  $\overline{QB}$ , con lo que, de nuevo, la distancia

entre ambas es mayor que la buscada. Para el resto de la frontera de  $K_1$  el razonamiento es similar a los anteriores, con lo que podemos asegurar que la anchura del conjunto se alcanza en la dirección ortogonal a  $PQ$ .

Claramente, cuanto mayor sea el ángulo que formen las rectas  $PQ$  y  $ST$ , mayor será la anchura del conjunto; luego el cuerpo convexo  $K_1$  de mayor anchura se obtiene cuando los puntos  $P$  y  $S$  coinciden (véase la figura 3.26).

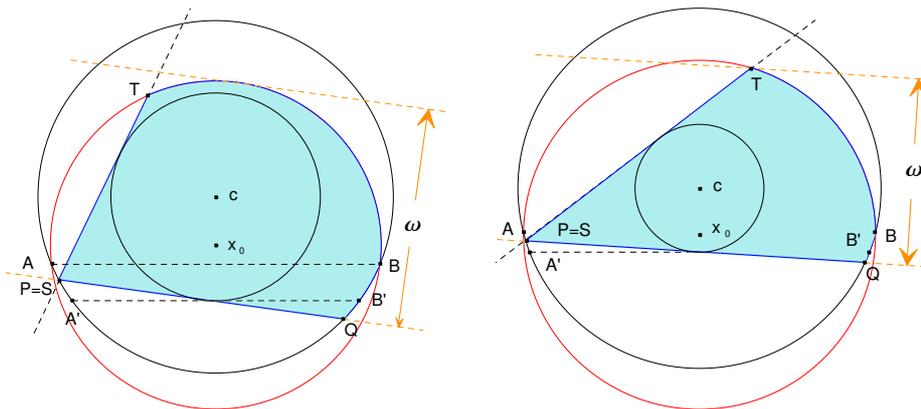


Figura 3.26: Para maximizar la anchura sobre los conjuntos  $K_1$ , basta considerar los conjuntos  $K_2$ .

Si el movimiento se realiza en el sentido de las agujas del reloj, con un razonamiento análogo al anterior, podemos concluir que el conjunto de mayor anchura se obtiene cuando  $T$  y  $Q$  coinciden. Sin embargo, esta figura tiene menor anchura que la del primer caso, aquélla en la que  $P \equiv S$ . En efecto, en nuestra situación, el punto  $P$  se encuentra por encima de la recta  $A'B'$  y, en consecuencia,  $Q$  por debajo de ella, lo que implica que la distancia entre  $Q$  y  $x_0$  es menor que la distancia entre  $P$  y  $x_0$ ; además, obsérvese que los ángulos  $\angle(PQS)$  y  $\angle(TPQ)$  coinciden si  $T \equiv Q$  o  $P \equiv S$ , ya que  $P, Q \in \partial C_R$  y las rectas que los determinan son tangentes a  $\partial c_r$ ; de todo ello se concluye que la longitud del arco  $\overline{AS}$ , cuando  $T \equiv Q$ , es menor que la longitud de  $\overline{TB}$  si  $P \equiv S$ , lo cual implica que la anchura máxima se obtiene, precisamente, si  $P \equiv S$ .

Así, si llamamos  $K_2$  a esta última figura, se tiene que  $\omega \leq \omega(K_1) \leq \omega(K_2)$  (véase la figura 3.26). Observemos que el ángulo  $\angle(TPQ)$  es siempre el mismo para cualquier punto  $P$ , ya que  $P \in \partial C_R$  y las rectas  $PT$  y  $PQ$  son tangentes a  $\partial c_r$ . Además, cuanto mayor sea la longitud del arco  $\overline{TB}$ , mayor será la distancia de la recta  $PQ$  a su paralela, tangente a dicho arco, y por tanto, mayor será la anchura. Fijado el punto  $P$ , si movemos de forma continua el circuncentro  $x_0$  sobre la recta que lo une con  $c$  en dirección a este punto, la porción de  $C_K$  incluida en  $C_R$  aumenta, consiguiéndose así el objetivo deseado: incrementar la longitud de  $\overline{TB}$  y, por tanto, la anchura. Este movimiento es posible hasta el momento en que el punto  $P$  coincide con  $A$ . En consecuencia, basta considerar los conjuntos  $K_2$  para los cuales las rectas que los determinan son las tangentes a  $\partial c_r$  que se cortan en el punto  $A$  (véase la figura 3.27).



Concretamente, si  $R = r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$  y  $R_K = \sqrt{R^2 - r^2}$ , el circuncentro  $x_0$  se encuentra sobre el segmento  $\overline{AB}$ , en cuyo caso  $T \equiv N'$  (véase la figura 3.29).

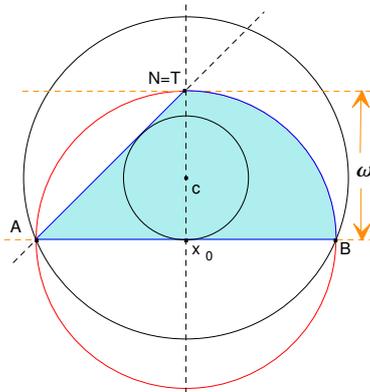


Figura 3.29: El conjunto  $K_2$  cuando  $R = r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$  y  $R_K = \sqrt{R^2 - r^2}$ .

Si  $2r \leq R \leq r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$ , el punto  $T$  coincide con  $N'$  precisamente si  $R_K = R^4/(4r(R^2 - 2r^2))$ . Por lo tanto, cuando  $R_K \geq R^4/(4r(R^2 - 2r^2))$ , se tiene de nuevo la situación anterior y  $T$  está sobre el arco  $\overline{N'B}$  (véase la figura 3.30(a)); si por el contrario  $R_K \leq R^4/(4r(R^2 - 2r^2))$ ,  $T$  se encuentra en el arco  $\overline{AN'}$ , siendo entonces la anchura la distancia entre el punto  $N'$  y el segmento  $\overline{AB}$  (véase la figura 3.30(b)):

$$\omega(K_2) = R_K + \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}.$$

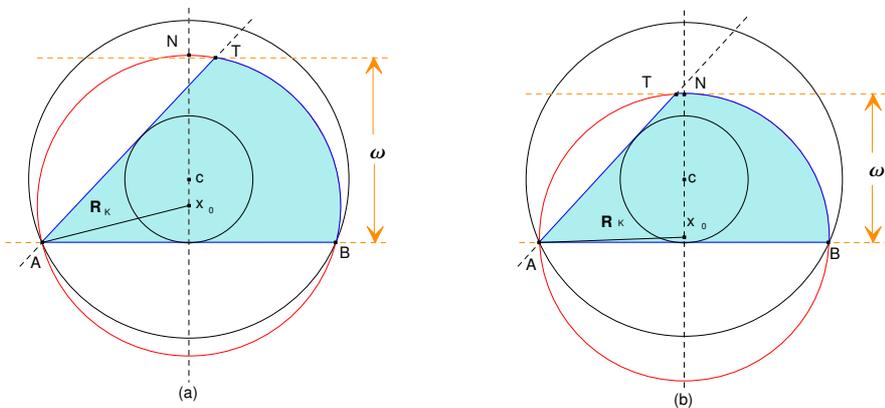


Figura 3.30: Situaciones posibles del punto  $T \in \partial C_K$  cuando  $2r \leq R \leq r\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$  y (a)  $R_K \geq R^4/(4r(R^2 - 2r^2))$ , o (b)  $R_K \leq R^4/(4r(R^2 - 2r^2))$ .

Por último, si  $R \leq 2r$ , el punto  $T$  siempre se encuentra en el arco  $\overline{AN'}$  para cualquier valor posible del circunradio, y la máxima anchura se alcanza en la distancia entre  $N'$  y el segmento  $\overline{AB}$  (véase la figura 3.28(a)). □

### 3.4. Anillo mínimo, circunradio e inradio

En esta sección establecemos la relación entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$ , su circunradio  $R_K$  y su inradio  $r_K$ . Las demostraciones siguen un razonamiento análogo al caso de la anchura estudiado en la sección anterior.

**Teorema 3.4.1** ([10]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ . Entonces, su inradio  $r_K$  verifica*

$$r_K \geq r. \quad (3.17)$$

La igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para el trapecio circular  $K^T$  (véase la figura 3.31).

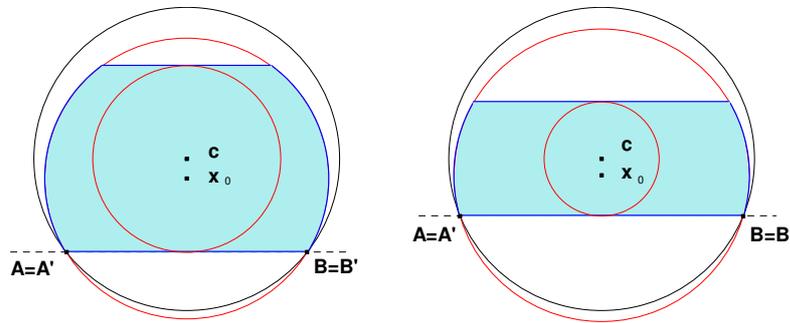


Figura 3.31: El trapecio circular tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , circunradio  $R_K$  e inradio  $r_{K^T} = r$ .

**Demostración.** La desigualdad (3.17) se verifica en general, independientemente del valor del circunradio, según hemos visto en la proposición 2.5.1, desigualdad (2.14). Por tanto, es suficiente comprobar que, para cada valor posible de  $R_K$ , existe un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K = r$ . Y en efecto, basta considerar el trapecio circular  $K^T$  (véase la figura 3.31): éste tiene por inradio  $r$ , puesto que su frontera contiene puntos de  $\partial c_r$  diametralmente opuestos, su anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  por la propiedad **(P4)**, y su circunradio es  $R_K$ , ya que contiene un diámetro de  $C_K$  (lema 2.1.2(5)).  $\square$

**Teorema 3.4.2** ([10]). *Si  $K$  es un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  y circunradio  $R_K$ , su inradio  $r_K$  verifica*

$$r_K \leq 2r \left( 1 - r \frac{R_K - \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}}{R^2 - r^2} \right). \quad (3.18)$$

La igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para la cuña circular asimétrica  $K^\angle$  (véase la figura 3.32).

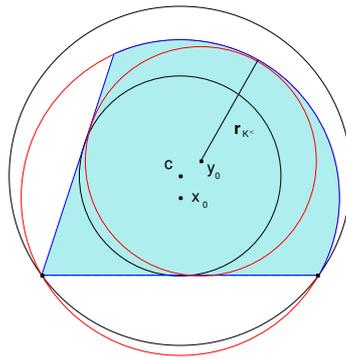


Figura 3.32: La cuña circular asimétrica  $K^<$  tiene inradio máximo.

**Demostración.** Obsérvese que, cuando  $R_K = R$ , la desigualdad (3.18) se transforma en la ya conocida (2.15) de la proposición 2.5.1,

$$r_K \leq \frac{2rR}{R+r},$$

siendo ahora el conjunto extremal  $K^<$  el segmento del círculo  $C_R$  descrito en dicho resultado. Así pues, en todo lo que sigue, supondremos que  $R_K < R$ , y por tanto, que  $C_K$  no coincide con  $C_R$ .

Según la propiedad (9) del lema 2.1.2,  $K$  está contenido en un conjunto  $K_1$  formado por la intersección de  $C_K$  con el segmento del círculo  $C_R$  determinado por las rectas soporte a  $c_r$  en dos puntos de  $\partial K \cap \partial c_r$  que están separados por el segmento  $\overline{AB}$ . Además, la propiedad (6) del citado lema nos permite asegurar que, al menos, una de estas rectas corta a  $\partial C_R$  en un punto  $P$ , o bien del arco  $\widehat{AA'}$ , o bien del arco  $\widehat{BB'}$  (en caso contrario no habría puntos de  $\partial K \cap \partial C_R$  en ninguno de los dos arcos); supongamos, por ejemplo, que  $P \in \widehat{AA'}$  (véase la figura 3.33). Como  $K$  siempre está contenido en un conjunto  $K_1$  de estas características,  $r_K \leq r_{K_1}$ , con lo que el problema se reduce a estudiar el inradio en esta familia de conjuntos.

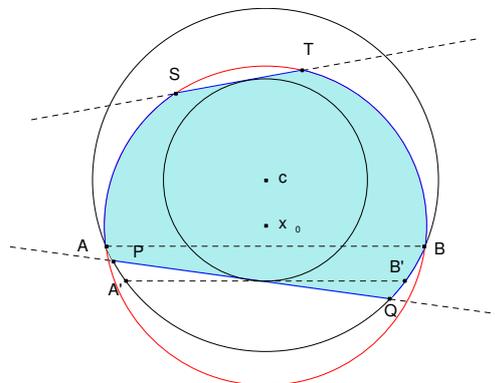


Figura 3.33: Maximizando el inradio: construcción del conjunto  $K_1 \supset K$  con igual anillo mínimo y circunradio.

Si siguiendo la notación de la figura 3.33, llamamos  $S, T \in \partial C_K$  y  $Q \in \partial C_R$  a los puntos de corte, junto con  $P$ , de las circunferencias  $\partial C_K$  y  $\partial C_R$  con las rectas que determinan  $K_1$ . Fijado el segmento  $\overline{PQ}$ , es en el caso en que la recta  $ST$  es paralela a  $\overline{PQ}$  cuando el inradio del cuerpo convexo  $K_1$  es el menor posible:  $r$ . Moviendo de forma continua la recta  $ST$  sobre  $\partial C_r$ , en sentido contrario a las agujas del reloj, obtenemos todos los posibles conjuntos del tipo  $K_1$ . Claramente, cuanto mayor sea el ángulo que formen estas dos rectas, mayor será la circunferencia que podemos inscribir en la figura, la cual, por la construcción realizada, debe ser tangente a los segmentos  $\overline{PQ}$  y  $\overline{ST}$ , estando por tanto el incentro  $y_0$  en la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas; además, el arco  $\overline{TB}$  de  $\partial C_K$  limita superiormente la circunferencia inscrita. En consecuencia, el conjunto  $K_1$  de mayor inradio se obtiene cuando los puntos  $P$  y  $S$  coinciden (véase la figura 3.34).

Si el movimiento se realiza en el sentido de las agujas del reloj, con un razonamiento análogo al anterior, podemos concluir que el conjunto de mayor inradio se obtiene cuando  $T$  y  $Q$  coinciden. Sin embargo, esta figura tiene menor inradio que la del primer caso, aquélla en la que  $P \equiv S$ . En efecto, en nuestra situación, el punto  $P$  se encuentra por encima de la recta  $A'B'$  y, en consecuencia,  $Q$  por debajo de ella, lo que implica que la distancia entre  $Q$  y  $x_0$  es menor que la distancia entre  $P$  y  $x_0$ ; además, obsérvese que los ángulos  $\angle(PQS)$  y  $\angle(TPQ)$  coinciden si  $T \equiv Q$  o  $P \equiv S$ , ya que  $P, Q \in \partial C_R$  y las rectas que los determinan son tangentes a  $\partial C_r$ ; de todo ello se concluye que la longitud del arco  $\overline{AS}$ , cuando  $T \equiv Q$ , es menor que la longitud de  $\overline{TB}$  si  $P \equiv S$ , lo cual implica que el inradio máximo se obtiene, precisamente, si  $P \equiv S$ .

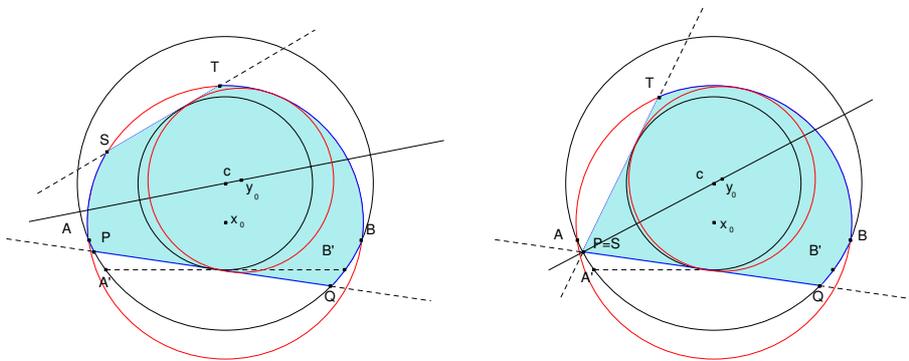


Figura 3.34: Para maximizar el inradio en los conjuntos  $K_1$ , basta considerar los conjuntos  $K_2$ .

Así, si llamamos  $K_2$  a esta última figura, se tiene que  $r_K \leq r_{K_1} \leq r_{K_2}$ . Observemos que el ángulo  $\angle(TPQ)$  es siempre el mismo para cualquier punto  $P$ , ya que  $P \in \partial C_R$ , las rectas  $PT$  y  $PQ$  son tangentes a  $\partial C_r$ , y  $\partial C_R$  y  $\partial C_r$  son concéntricas. Además, cuanto mayor sea la longitud del arco  $\overline{TB}$ , mayor será el radio de la circunferencia que podemos inscribir. Fijado el punto  $P$ , si movemos de forma continua el circuncentro  $x_0$  sobre la recta que lo une con  $c$  en dirección a este punto, la porción de  $C_K$  incluida en  $C_R$  aumenta, consiguiéndose así el objetivo deseado: incrementar la longitud de  $\overline{TB}$  y, por tanto, el inradio. Este movimiento es posible hasta el momento en que el punto  $P$

coincide con  $A$ . En consecuencia, basta considerar los conjuntos  $K_2$  para los cuales las rectas que los determinan son las tangentes a  $\partial c_r$  que se cortan en el punto  $A$  (véase la figura 3.35(a)).

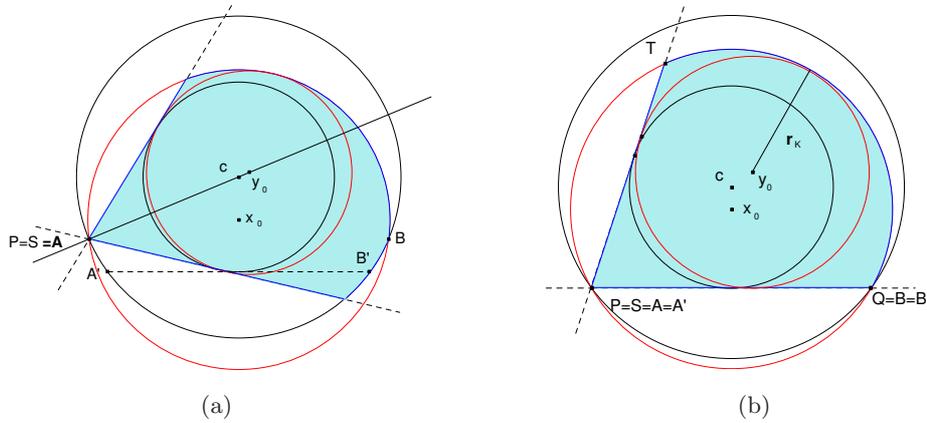


Figura 3.35: (a) Conjunto  $K_2$  cuando  $P \equiv S \equiv A$ . (b)  $K^\angle$  tiene inradio máximo para  $A(c, r, R)$  y  $R_K$  fijos.

Para este tipo de figuras, dado que el ángulo correspondiente al vértice  $A$  se mantiene siempre constante cualquiera que sea la posición de dicho punto, el mayor inradio se obtendrá cuando  $A \equiv A'$  (de nuevo porque éste es el caso en el que la porción de  $C_K$  incluida en  $C_R$  es la mayor posible, véase la figura 3.35(b)).

El conjunto de inradio máximo es, por tanto, la cuña circular asimétrica  $K^\angle$ . Un cálculo más o menos laborioso permite obtener la fórmula explícita para el inradio de  $K^\angle$ ,

$$r_{K^\angle} = 2r \left( 1 + r \frac{\sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2 - R_K}}{R^2 - r^2} \right),$$

con lo que se prueba la desigualdad (3.18) y, por tanto, el teorema. □



## Capítulo 4

---

# El anillo mínimo y el inradio

---

En este último capítulo de la memoria concluimos el estudio que nos planteábamos al comienzo de la misma, quedando así resuelto el problema en su totalidad al haberse contemplado todos los casos posibles. Ahora, a lo largo de todo el capítulo, supondremos dados el anillo mínimo y el inradio de un cuerpo convexo. Bajo estas hipótesis, vamos a obtener las cotas superiores e inferiores, en términos de dichos valores, para las medidas geométricas área, perímetro, diámetro, anchura mínima y circunradio (obsérvese que la relación que involucra al circunradio ya ha sido estudiada en el capítulo anterior, véase la sección 3.4, aunque debemos hacer alguna matización). Las desigualdades que se obtendrán serán, de nuevo, las óptimas, y los correspondientes conjuntos extremales para cada una de ellas quedarán también determinados. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [9].

### 4.1. Anillo mínimo, inradio y área (o perímetro)

Relacionamos a continuación el anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$  cuyo inradio es  $r_K$ , tanto con su área  $A$  como con su perímetro  $p$ . En primer lugar estableceremos las cotas superiores.

Recordemos que, según el lema 2.1.1(c), si  $K$  tiene por anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces está contenido en un segmento  $K^s$  del círculo  $C_R$ , determinado por las rectas soporte a  $c_r$  en dos puntos de  $\partial c_r \cap \partial K$ ; todos estos conjuntos tienen igual área y perímetro. Por tanto se verifica

$$A = A(K^s) \leq 2 \left( r\sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \arcsen \frac{r}{R} \right) \quad \text{y}$$
$$p = p(K^s) \leq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + R \arcsen \frac{r}{R} \right).$$

El siguiente teorema establece éstas como las cotas superiores para cualquier valor  $r_K$  del inradio.

**Teorema 4.1.1** ([9]). *Si  $K$  es un cuerpo convexo con inradio  $r_K$  y anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces su área  $A$  y su perímetro  $p$  verifican*

$$A \leq 2 \left( r \sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \arcsen \frac{r}{R} \right), \quad (4.1)$$

$$p \leq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + R \arcsen \frac{r}{R} \right). \quad (4.2)$$

La igualdad se da, en ambas desigualdades, para el segmento del círculo  $C_R$  determinado por las rectas soporte comunes a  $c_r$  y  $c_K$ , cuando  $\partial c_K$  es tangente interiormente a  $\partial C_R$  (véase la figura 4.1).

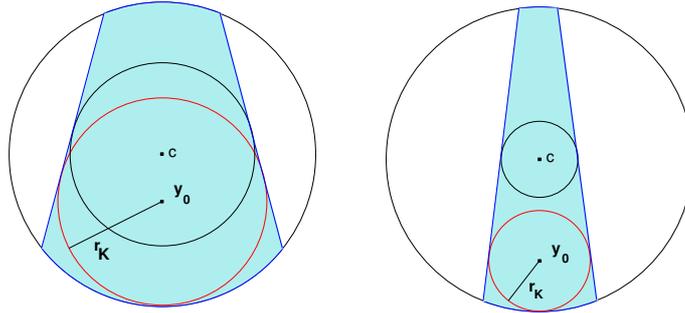


Figura 4.1: Segmentos del círculo  $C_R$  con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y área y perímetro máximos.

**Demostración.** Para demostrar el teorema sólo hay que probar que, si  $r_K$  es el inradio de  $K$ , entonces existe un segmento  $K^s$  del círculo  $C_R$  (en las condiciones anteriores) cuyo inradio es, precisamente,  $r_K$ . En efecto, tomemos el incentro  $y_0$  de tal manera que  $\partial c_K$  sea tangente interiormente a  $\partial C_R$ ; entonces, el segmento  $K^s$  del círculo  $C_R$  determinado por las dos rectas tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  (véase la figura 4.1) tiene por inradio  $r_K$ , ya que  $\partial c_K$  contiene tres puntos de  $\partial K^s$  que forman un triángulo acutángulo, y por anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , según la propiedad **(P4)**.

Obsérvese además que el conjunto  $K^s$  así construido es siempre un segmento de círculo (esto es, las rectas que lo determinan no se cortan en el interior de  $C_R$ ), puesto que por la proposición 2.5.1, el inradio verifica  $r_K \leq 2Rr/(R+r)$ ; sólo en el caso de la igualdad se tiene, como situación límite, que el punto intersección de las rectas está sobre  $\partial C_R$ .  $\square$

El teorema siguiente establece las cotas inferiores para el área y el perímetro. Antes de enunciarlo, introducimos una nueva notación que será de utilidad en éste y en resultados posteriores. Dados un anillo  $A(c, r, R)$  y un valor para el inradio  $r_K$  (entre los valores posibles que éste puede tomar, véase la proposición 2.5.1), supongamos el incentro  $y_0$  situado a la distancia adecuada de  $c$  para que las tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  se corten, precisamente, sobre  $\partial C_R$ , punto que llamaremos  $N$  (véase la figura 4.2). Es fácil ver que esta distancia toma el valor  $d = d(c, y_0) = R(r_K - r)/r$ . Vamos a representar por  $K_d$  el conjunto  $K_d = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N\}$  (véase la figura 4.2) que, en definitiva, no es más que el cap-body  $\text{conv}\{c_K, N\}$ , ya que  $r_K > r$ .

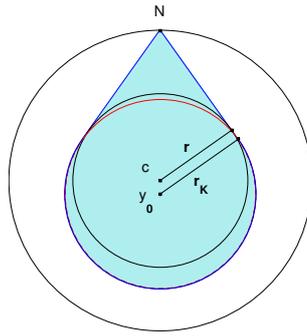


Figura 4.2: El conjunto  $K_d = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N\}$ .

**Teorema 4.1.2** ([9]). *Si  $K$  es un cuerpo convexo con inradio  $r_K$  y anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , entonces su área  $A$  y su perímetro  $p$  verifican*

$$A \geq \frac{r_K^2}{r} \left( \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{r_K} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} \right) + r_K^2 \theta, \quad (4.3)$$

$$p \geq 2 \left( \frac{r_K}{r} \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{r} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} + r_K \theta \right), \quad (4.4)$$

donde  $\theta = \arcsen \frac{r_K r}{R(2r - r_K)} + \arcsen \frac{r}{R}$ .

La igualdad se alcanza, en ambas desigualdades, para el conjunto  $\text{conv}\{K_d, M\}$ , donde  $M$  es el punto de  $\partial C_R$  diametralmente opuesto a  $N$  (véase la figura 4.3).

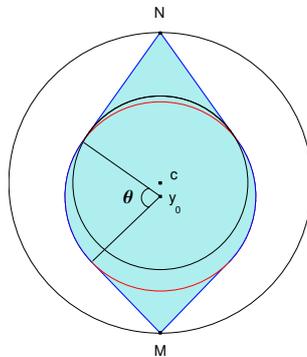


Figura 4.3: El conjunto  $\text{conv}\{K_d, M\}$  tiene área y perímetro mínimos para  $A(c, r, R)$  y  $r_K$  fijos.

Es sencillo comprobar que, en las fórmulas anteriores,

$$\frac{1}{r} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} = \sqrt{(R - d)^2 - r_K^2}$$

no es más que la longitud de cualquiera de los dos segmentos de recta que, partiendo de  $M$ , determinan la frontera del cap-body.

**Demostración.** Obsérvese que, cuando  $r_K = r$ , las desigualdades (4.3) y (4.4) se transforman en las ya conocidas (2.1) y (2.3) de las proposiciones 2.2.1 y 2.2.2,

$$A \geq 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right) \quad \text{y}$$

$$p \geq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right),$$

siendo el conjunto extremal, en ambos casos, un cap-body de dos vértices (situados éstos sobre la circunferencia  $\partial C_R$ ). Así pues, en todo lo que sigue, supondremos que  $r_K > r$  y, por tanto, que  $c_K$  no coincide con  $c_r$ .

La propiedad (6) del lema 2.1.3 nos asegura que  $K$  contiene siempre un conjunto de la forma  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , para dos puntos  $N$  y  $M$  de  $\partial C_R$  adecuados (véase la figura 4.4(a)); en consecuencia,  $A \geq A(K^{2c})$  y  $p \geq p(K^{2c})$ . Como  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ , hemos reducido el problema a estudiar el área y el perímetro de esta clase particular de conjuntos.

En primer lugar observemos que, para cada posición del incentro  $y_0$  fija, el área y el perímetro del conjunto  $\text{conv}\{c_r \cup c_K, N\}$  se mantienen constantes para cualesquiera de las posibles ubicaciones del punto  $N$ , puesto que  $c_r$  y  $C_R$  son círculos concéntricos y  $N$  sólo puede moverse en el arco de  $\partial C_R$  determinado por las tangentes a  $\partial c_r$  en  $P$  y  $Q$  (recordemos que, como viene siendo habitual,  $P, Q, S$  y  $T$  representan los puntos de contacto de las rectas tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  con dichas circunferencias, véase la figura 4.4(a)); podemos tomar entonces  $N$ , sin perder generalidad, como el punto de corte de la recta  $cy_0$  con  $\partial C_R$  (véase la figura 4.4(b)).

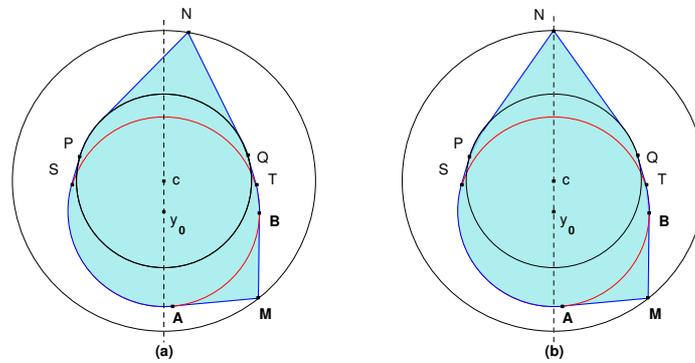


Figura 4.4: El problema se reduce a estudiar el área y el perímetro de los conjuntos  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ .

En segundo lugar, si, como muestra la figura 4.4, llamamos  $A$  y  $B$  a los puntos de contacto de las rectas tangentes a  $\partial c_K$  que pasan por  $M$  con dicha circunferencia, tenemos que el conjunto limitado por el arco  $\widehat{AB}$  y los segmentos  $\overline{AM}$  y  $\overline{BM}$  tiene menor área cuando la distancia entre  $M$  y  $\partial c_K$  es la menor posible; esto es, cuando  $M$  es el punto intersección de la recta  $cy_0$  con  $\partial C_R$ . En este caso, también la longitud de dichos segmentos es la menor posible (véase la figura 4.5(a)). Así pues, es suficiente considerar los conjuntos  $K^{2c}$  que son simétricos respecto a la recta  $cy_0$ .

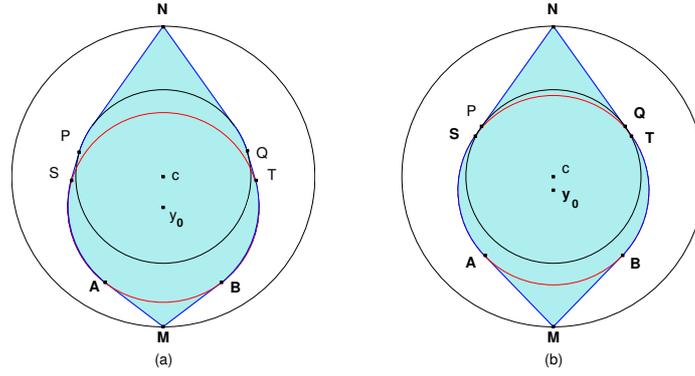


Figura 4.5: Construcción del conjunto  $\text{conv}\{K_d, M\}$  con área y perímetro mínimos.

Representamos por  $x$  la distancia entre los centros,  $x := d(y_0, c)$ . Claramente,

$$\frac{R}{r}(r_K - r) \leq x \leq R - r_K,$$

correspondiendo la cota inferior al caso límite en que las rectas tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  se cortan precisamente en  $N$ , y la cota superior al caso límite en que  $\partial c_K$  toca a  $\partial C_R$ . Un cálculo bastante laborioso permite comprobar que el área y el perímetro de esta figura, en función de la distancia  $x$ , valen

$$A(x) = r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} \right) + r_K \left( \sqrt{(R-x)^2 - r_K^2} + r_K \arcsen \frac{r_K}{R-x} \right) \\ + (r_K + r) \left( \sqrt{x^2 - (r_K - r)^2} + (r_K - r) \arcsen \frac{r_K - r}{x} \right),$$

$$\frac{1}{2}p(x) = \sqrt{R^2 - r^2} + r \arcsen \frac{r}{R} + \sqrt{(R-x)^2 - r_K^2} + r_K \arcsen \frac{r_K}{R-x} \\ + \sqrt{x^2 - (r_K - r)^2} + (r_K - r) \arcsen \frac{r_K - r}{x}.$$

Estudiemos, por tanto, estas funciones, y calculemos su mínimo. Las derivadas primeras de  $A(x)$  y  $(1/2)p(x)$  son, respectivamente,

$$A'(x) = -r_K \sqrt{1 - \left( \frac{r_K}{R-x} \right)^2} + (r_K + r) \sqrt{1 - \left( \frac{r_K - r}{x} \right)^2}, \\ \frac{1}{2}p'(x) = -\sqrt{1 - \left( \frac{r_K}{R-x} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{r_K - r}{x} \right)^2}.$$

Es fácil ver que siempre se verifica

$$\sqrt{1 - \left( \frac{r_K - r}{x} \right)^2} \geq \sqrt{1 - \left( \frac{r_K}{R-x} \right)^2}; \quad (4.5)$$

en efecto, la desigualdad (4.5) es equivalente a la más sencilla

$$\frac{(r_K - r)}{x} \leq \frac{r_K}{(R - x)},$$

lo que equivale a su vez a la relación

$$x \geq \frac{R(r_K - r)}{2r_K - r}. \quad (4.6)$$

Pero dado que  $x \geq R(r_K - r)/r$  siempre y, a su vez,

$$\frac{R(r_K - r)}{r} \geq \frac{R(r_K - r)}{2r_K - r}$$

al ser  $r_K \geq r$ , (4.6) se satisface, lo que demuestra (4.5).

En definitiva, la desigualdad (4.5) nos asegura que ambas derivadas,  $A'(x)$  y  $(1/2)p'(x)$ , son positivas, y por tanto, que las funciones  $A(x)$  y  $(1/2)p(x)$  son crecientes en el intervalo

$$\left[ \frac{R}{r}(r_K - r), R - r_K \right].$$

Así pues, el área y el perímetro alcanzan su mínimo valor cuando  $x = R(r_K - r)/r$ . Esto demuestra el resultado que establece el teorema:

$$A \geq A\left(\frac{R}{r}(r_K - r)\right) = \frac{r_K^2}{r} \left( \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{r_K} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} \right) + r_K^2 \theta,$$

$$\frac{1}{2}p \geq \frac{1}{2}p\left(\frac{R}{r}(r_K - r)\right) = \frac{r_K}{r} \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{r} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} + r_K \theta,$$

donde  $\theta = \arcsen \frac{r_K r}{R(2r - r_K)} + \arcsen \frac{r}{R}$ .

La igualdad se alcanza si, y sólo si,  $x = R(r_K - r)/r$ , es decir, cuando las rectas tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  se cortan en  $N$ . El conjunto extremal es, por tanto, el descrito en el enunciado del teorema:  $\text{conv}\{K_d, M\}$ , donde  $M$  es el punto de  $\partial C_R$  diametralmente opuesto a  $N$  (véase la figura 4.5(b)).  $\square$

## 4.2. Anillo mínimo, inradio y diámetro

En esta sección establecemos la relación entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$ , su inradio  $r_K$  y su diámetro  $D$ . Comencemos con la cota superior para  $D$ .

**Teorema 4.2.1** ([9]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ . Entonces, su diámetro  $D$  verifica*

$$D \leq 2R. \quad (4.7)$$

*La igualdad se alcanza para cualquier cuerpo convexo que contenga puntos de  $\partial C_R$  diametralmente opuestos, como por ejemplo, el conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , donde  $N$  y  $M$  son los puntos de intersección con  $\partial C_R$  de la recta  $cy_0$  (véase la figura 4.6).*

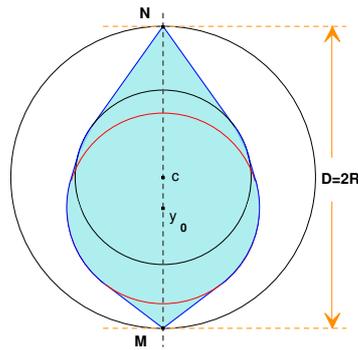


Figura 4.6: El conjunto  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo e inradio fijos, y diámetro máximo  $D = 2R$ .

**Demostración.** Como  $K \subset C_R$ , se tiene que  $D \leq 2R$ . Por otra parte, si  $N$  y  $M$  son los puntos de corte de la recta  $cy_0$  con  $\partial C_R$ , ya hemos visto en la propiedad (6) del lema 2.1.3 que el conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ ; luego, dado que la distancia entre  $M$  y  $N$  es, precisamente,  $2R$ , se tiene la igualdad  $D(K^{2c}) = 2R$  (véase la figura 4.6).  $\square$

**Teorema 4.2.2** ([9]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ . Entonces, su diámetro  $D$  verifica*

$$D \geq \frac{r_K(R+r)}{r} \quad \text{si } r_K \geq 2r\sqrt{\frac{R-r}{R+r}}, \tag{4.8}$$

$$D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si } r_K \leq 2r\sqrt{\frac{R-r}{R+r}}. \tag{4.9}$$

La igualdad se alcanza, entre otras figuras, y en ambos casos, para el conjunto  $\text{conv}\{K_d, M\}$ , donde  $M$  es el otro punto de corte (además de  $N$ ) de cualquiera de las dos tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  con  $\partial C_R$  (véase la figura 4.7).

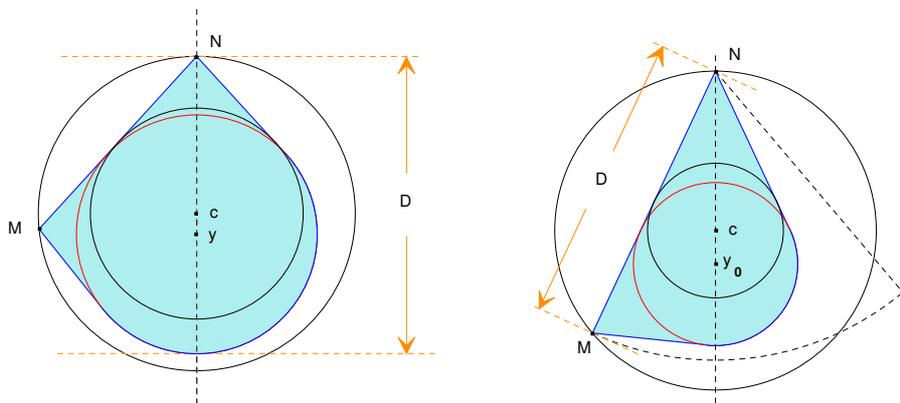


Figura 4.7: Conjuntos  $\text{conv}\{K_d, M\}$  con anillo mínimo e inradio fijos, y diámetro mínimo.

**Demostración.** Obsérvese en primer lugar que, si  $r_K = r$ , la relación  $r \geq 2r\sqrt{(R-r)/(R+r)}$  es equivalente a que  $R \leq 5r/3$ . Por tanto, las desigualdades (4.8) y (4.9) se transforman en las ya conocidas (2.9) y (2.10) de la proposición 2.3.2,

$$D \geq R + r \quad \text{si } R \leq \frac{5r}{3}, \quad D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si } R \geq \frac{5r}{3},$$

respectivamente. También el conjunto extremal se transforma, para este caso límite, en el allí descrito (véase la figura 2.14). Así pues, en todo lo que sigue, supondremos que  $r_K > r$  y, por tanto, que  $c_K \neq c_r$ .

El lema 2.1.3, propiedad (6), asegura que  $K$  contiene un conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , para dos puntos  $N$  y  $M$  de  $\partial C_R$  adecuados, con idénticos anillo mínimo e inradio que  $K$ . Por tanto,  $D \geq D(K^{2c})$ , y el problema se reduce a estudiar el diámetro de esta familia particular de conjuntos. Como  $K^{2c}$  es la envoltura convexa de dos puntos  $N$  y  $M$ , y de  $\text{conv}(c_r \cup c_K)$ , su diámetro se alcanza en una de las siguientes distancias:

- la distancia entre  $N$  y  $M$ ;
- la distancia entre  $N$  y la recta tangente a  $\partial c_K$  perpendicular a  $Ny_0$ ;
- la distancia entre  $M$  y la recta tangente a  $\partial c_K$  perpendicular a  $My_0$ ;
- la distancia entre  $M$  y la recta tangente a  $\partial c_r$  perpendicular a  $Mc$ .

Observemos que, como  $r_K \geq r$ , estas dos últimas distancias son menores o iguales que la distancia entre  $N$  y la recta tangente a  $\partial c_K$  perpendicular a  $Ny_0$ . Por tanto, nos limitaremos a estudiar las dos primeras.

La menor distancia posible entre los puntos  $N$  y  $M$  (véase el lema 2.1.1(a)) se da cuando el segmento  $\overline{NM}$  es tangente a  $\partial c_r$  y, en consecuencia, cuando la recta  $NM$  coincide con una de las tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$ ; dicha distancia es siempre  $d(N, M) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ , con independencia de cómo estén situados los discos  $c_r$  y  $c_K$  (véase la figura 4.8).

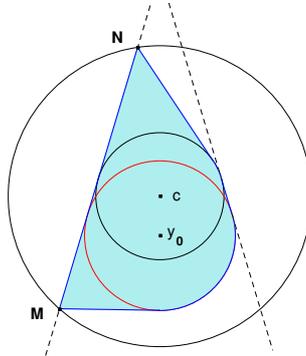


Figura 4.8: La distancia de  $M$  a  $N$  es independiente de cómo estén situados  $c_r$  y  $c_K$ .

Por otro lado, la distancia entre  $N$  y la recta tangente a  $\partial c_K$  perpendicular a  $Ny_0$  es menor cuanto más cerca de  $c$  esté  $y_0$ , obteniéndose el mínimo en el caso límite  $d(y_0, c) = R(r_K - r)/r$ ; es decir, cuando las dos rectas tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  se cortan en  $N$ . El valor de dicha distancia en tal caso es  $r_K(R + r)/r$  (véase la figura 4.9).

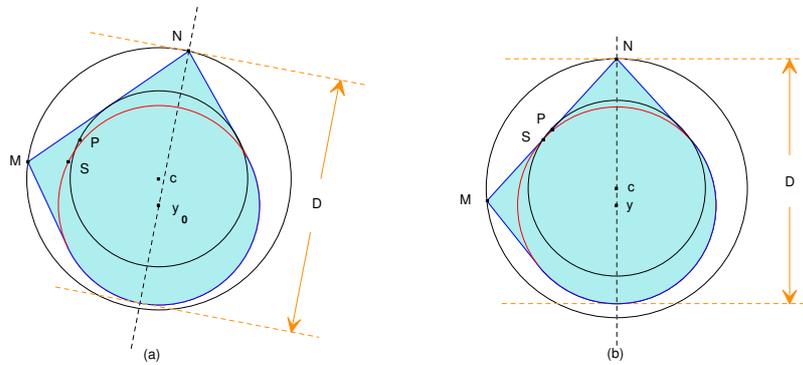


Figura 4.9: La distancia de  $N$  a la recta tangente a  $\partial c_K$  ortogonal a  $Ny_0$  es mínima cuando  $d(y_0, c) = R(r_K - r)/r$ .

En definitiva, el diámetro podrá tomar, o bien el valor  $2\sqrt{R^2 - r^2}$ , cuando éste se alcance en  $d(N, M)$ , o bien el valor  $r_K(R + r)/r$ , cuando se alcance en la distancia entre  $N$  y la recta tangente a  $\partial c_K$  perpendicular a  $Ny_0$  (véase la figura 4.10); estas dos posibilidades dependen de la relación existente entre  $R$ ,  $r$  y  $r_K$ .

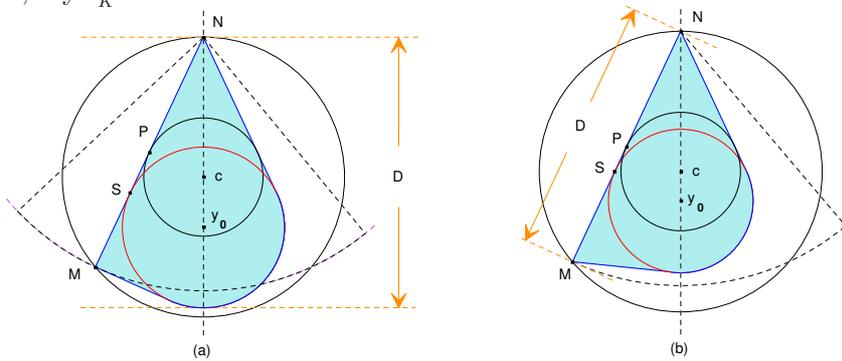


Figura 4.10: Conjuntos con diámetro mínimo para (a)  $r_K \geq 2r\sqrt{(R - r)/(R + r)}$ , y (b)  $r_K \leq 2r\sqrt{(R - r)/(R + r)}$ .

No es difícil comprobar que el diámetro

$$D = \frac{r_K(R + r)}{r}, \quad \text{si } r_K \geq 2r\sqrt{\frac{R - r}{R + r}}$$

(véase la figura 4.10(a)), y que

$$D = 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si } r_K \leq 2r\sqrt{\frac{R - r}{R + r}}$$

(véase la figura 4.10(b)).

□

### 4.3. Anillo mínimo, inradio y anchura

Esta sección está dedicada a estudiar la relación existente entre el anillo mínimo de un cuerpo convexo  $K$  con inradio  $r_K$ , y su anchura  $\omega$ . En primer lugar, establecemos la cota inferior.

**Teorema 4.3.1** ([9]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ . Entonces su anchura  $\omega$  verifica*

$$\omega \geq 2r_K. \quad (4.10)$$

La igualdad se alcanza para cualquier conjunto que contenga en su frontera puntos de  $\partial c_K$  diametralmente opuestos, como por ejemplo, el cuerpo convexo  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , donde  $N$  y  $M$  son los puntos de intersección de la recta  $cy_0$  con  $\partial C_R$  (véase la figura 4.11).

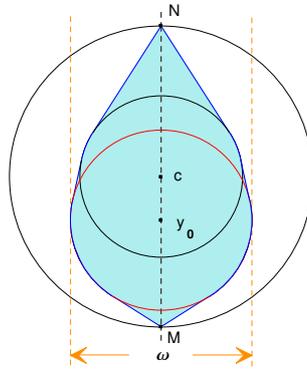


Figura 4.11: El conjunto  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y anchura  $\omega = 2r_K$ .

**Demostración.** La desigualdad (4.10) se verifica en general, independientemente del anillo mínimo (véase la tabla 1.1), puesto que  $r_K$  es el inradio de  $K$ . Consideremos ahora el cuerpo convexo  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , donde  $N$  y  $M$  son los puntos de intersección de la recta  $cy_0$  con  $\partial C_R$ . Claramente,  $K^{2c}$  está contenido en el segmento de círculo simétrico de  $C_R$  determinado por las rectas soporte a  $c_K$  en los puntos extremos del diámetro de  $c_K$  que es perpendicular a  $cy_0$ ; por tanto se tiene la igualdad  $\omega(K^{2c}) = 2r_K$  (véase la figura 4.11).  $\square$

**Teorema 4.3.2** ([9]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ . Entonces, su anchura  $\omega$  verifica*

$$\omega \leq R + r \quad \text{si } R \leq 2r, \quad (4.11)$$

$$\omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \quad \text{si } R \geq 2r \text{ y } r_K \geq \frac{2r(R-r)}{R}. \quad (4.12)$$

En ambos casos la igualdad se alcanza, entre otros conjuntos, para el cuerpo convexo  $K^B$  que se muestra en la figura 4.12: considérese el segmento del círculo  $C_R$  determinado por las dos rectas

tangentes comunes a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$ ,  $\ell'$  y  $\ell''$ , cuando se cortan en el punto  $N$  de  $\partial C_R$ , y tómesese el semiplano delimitado por la recta tangente a  $\partial c_K$  y perpendicular a  $cy_0$ , que contiene a  $c_K$ ; la intersección de ambos nos da la figura deseada.

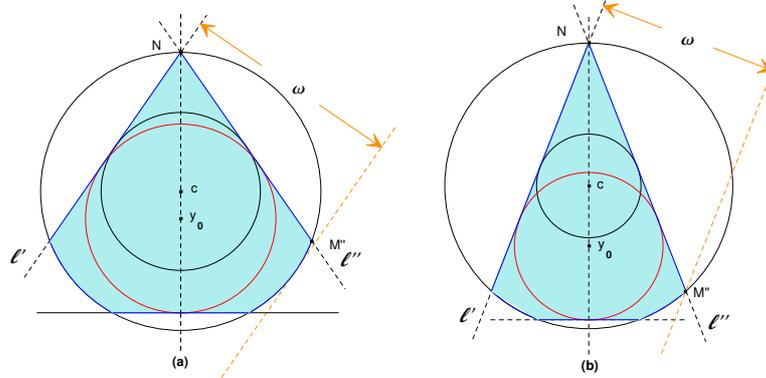


Figura 4.12: Conjuntos con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y máxima anchura cuando (a)  $R \leq 2r$ , y (b)  $R \geq 2r$  y  $r_K \geq 2r(R - r)/R$ .

$$\omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \quad \text{si } R \geq 2r \quad \text{y} \quad r_K \leq \frac{2r(R - r)}{R}, \quad (4.13)$$

donde  $\alpha = 2 \arcsen \frac{r}{R}$  y  $\beta = 2 \arctan \frac{r_K r}{(2r - r_K)\sqrt{R^2 - r^2}}$ .

La igualdad se alcanza para el triángulo determinado por  $\ell'$ ,  $\ell''$  y la recta tangente a  $\partial c_K$  que pasa por el punto  $M' \in \ell' \cap \partial C_R$ , con  $M' \neq N$  (véase la figura 4.13).

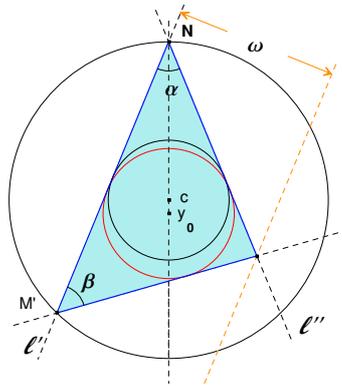


Figura 4.13: Conjunto con anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y máxima anchura cuando  $R \geq 2r$  y  $r_K \leq 2r(R - r)/R$ .

Merece la pena comentar que el triángulo que se obtiene como conjunto extremal en la desigualdad (4.13) verifica que sus ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  (tal y como se han definido previamente, véase de nuevo la figura 4.13) son siempre menores que su tercer ángulo,  $\pi - \alpha - \beta$ . De ello se deduce, en particular, que  $2\beta + \alpha \leq \pi$ , esto es, que  $\alpha + \beta \leq \pi - \beta$ . En consecuencia,  $\text{sen } \beta \leq \text{sen}(\alpha + \beta)$ , lo

cual nos asegura que la cota obtenida para la anchura en la desigualdad (4.13) es siempre menor que la obtenida en (4.12), como cabía esperar; y coincidirán precisamente si  $\beta = \pi - \alpha - \beta$ , es decir, cuando el triángulo sea isósceles, lo cual sólo se da si  $r_K = 2r(R - r)/R$ .

Obsérvese en primer lugar que, cuando  $r_K = r$ , la relación  $r \geq 2r(R - r)/R$  es equivalente a que  $R \leq 2r$ . Por lo tanto, la desigualdad (4.12) no puede darse. Esto es totalmente razonable, pues, como puede intuirse al observar los conjuntos extremales que dan la máxima anchura para  $A(c, r, R)$  fijo (proposición 2.3.1), si  $R \geq 2r$ , no va a poder construirse tal conjunto extremal con inradio  $r_K = r$ . Además, si  $R \geq 2r$  y  $r_K = r$ , tampoco nos encontramos en la situación planteada para la desigualdad correspondiente que relaciona  $\omega$  con  $R_K$  y  $r_K$ :  $(4r_K - \omega)(\omega - 2r_K)R_K \leq 2r_K^3$  (véase la tabla 1.2); allí, los conjuntos extremales son triángulos, pero  $\partial C_K$  y  $\partial c_r$  no son concéntricos, y por tanto, no determinan el anillo mínimo de los mismos. Cuando  $R \leq 2r$ , la desigualdad (4.11) coincide con (2.6) y, como veremos en breve, van a poder construirse cuerpos convexos con inradio cualquiera  $r_K \geq r$  bajo las condiciones deseadas.

**Demostración.** La desigualdad (4.11) se verifica en general, independientemente del valor del inradio (véase la proposición 2.3.1, desigualdad (2.6)); por tanto, para demostrarla en el caso que nos ocupa, basta con encontrar un conjunto convexo que, teniendo anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ , verifique la igualdad. En efecto, si consideramos el conjunto  $K^B$  definido en el enunciado del teorema, es evidente que su anillo mínimo es  $A(c, r, R)$  y su inradio  $r_K$  (en el caso de que  $r_K = r$ , basta tomar  $c_K \equiv c_r$ , y como  $\ell'$  y  $\ell''$  dos rectas tangentes a  $\partial c_r$  que se corten sobre  $\partial C_R$ ). Vamos a representar por  $M'$  y  $M''$  los puntos de corte con  $\partial C_R$  de  $\ell'$  y  $\ell''$ , respectivamente, distintos de  $N$  (véase la figura 4.14).

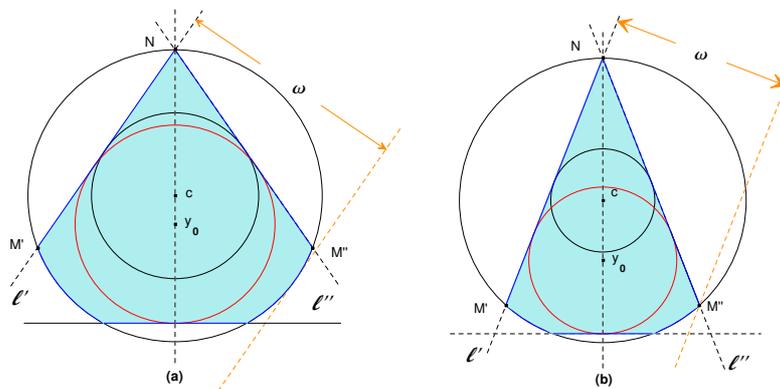


Figura 4.14: El conjunto  $K^B$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , inradio  $r_K$  y máxima anchura (a)  $\omega(K^B) = R + r$  cuando  $R \leq 2r$ , y (b)  $\omega(K^B) = 4r(R^2 - r^2)/R^2$  cuando  $R \geq 2r$  y  $r_K \geq 2r(R - r)/R$ .

Observemos que, si  $R = 2r$ , el triángulo  $\triangle(NM'M'')$  es equilátero y circunscribe a  $c_r$ , y dado que siempre se satisface  $r_K \geq r$ , la anchura de  $K^B$  es, en este caso, la distancia  $d(M'', \ell')$ . En consecuencia, cuando  $R \leq 2r$ , la anchura vendrá dada por la distancia entre la recta  $\ell'$  y su

paralela soporte a  $K^B$ , estando el punto de tangencia sobre el arco de  $\partial C_R \cap \partial K^B$  que parte de  $M''$  (véase la figura 4.14(a)). Esta distancia es, claramente,  $R + r$ , con lo que tenemos demostrado el caso en cuestión.

Si ahora suponemos que  $R \geq 2r$ , la desigualdad (4.12) también se verifica en general, independientemente del valor del inradio (véase la proposición 2.3.1, desigualdad (2.7)). Tomando de nuevo el conjunto  $K^B$  definido en el enunciado del teorema, se tiene que, si  $r_K$  es tal que el segmento  $\overline{M'M''}$  corta a  $\partial c_K$  (véase la figura 4.14(b)), entonces su anchura viene dada siempre por la distancia  $d(M'', \ell')$ , esto es,  $4r(R^2 - r^2)/R^2$ . Un sencillo cálculo muestra que esto sucede si  $r_K \geq 2r(R - r)/R$ , pues cuando  $r_K = 2r(R - r)/R$ , el segmento  $\overline{M'M''}$  es tangente a  $\partial c_K$ . Esto demuestra la desigualdad (4.12). Obsérvese además que, bajo la hipótesis  $R \geq 2r$ , nunca puede darse  $r_K = r$ ; es por ello que no contemplamos este caso.

Supongamos por último que  $R \geq 2r$  y  $r_K \leq 2r(R - r)/R$ . En este caso, el segmento  $\overline{M'M''}$  nunca corta al incírculo  $c_K$ ; a lo sumo, será tangente a su frontera, lo cual ocurrirá solamente si  $r_K = 2r(R - r)/R$  (véase la figura 4.15).

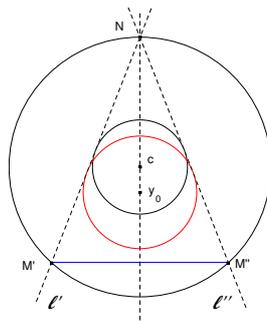


Figura 4.15: El segmento  $\overline{M'M''}$  no corta a  $c_K$  cuando  $R \geq 2r$  y  $r_K \leq 2r(R - r)/R$ .

Según el lema 2.1.1(c),  $K$  está contenido en un segmento  $K^s$  del círculo  $C_R$ , que está determinado por dos rectas soporte a  $c_r$  y cuyo anillo mínimo es  $A(c, r, R)$ ; desde luego, dado que  $K \subset K^s$ , tanto  $\omega(K^s) \geq \omega(K)$  como  $r_{K^s} \geq r_K$ . Ahora bien, al ser  $c_K$  el incírculo de  $K$ , se pueden presentar dos casos: o bien  $\partial K$  contiene dos puntos de  $\partial c_K$  diametralmente opuestos, con lo que  $\omega = 2r_K$ , o bien  $\partial K$  contiene tres puntos  $X, Y, Z \in \partial c_K$  que forman un triángulo acutángulo (siendo además  $c_K$  único). Nos ocuparemos de este último caso, puesto que  $\omega = 2r_K$  es el menor valor posible para la anchura y queremos estudiar su máximo.

Comencemos suponiendo que  $r_K > r$  y, por tanto, que  $c_K \neq c_r$ . Según la propiedad (2) del lema 2.1.3, tenemos que  $\text{conv}(c_r \cup c_K) \subset K$ ; luego los puntos de contacto con  $\partial c_r$  de las rectas soporte que determinan  $K^s$  se encuentran en el arco  $\overline{PQ}$  de  $\partial c_r \subset \partial \text{conv}(c_r \cup c_K)$ , mientras que los tres puntos  $X, Y, Z$  están en el arco  $\overline{ST}$  de  $\partial c_K \subset \partial \text{conv}(c_r \cup c_K)$  (recordemos, una vez más, que tres puntos de una circunferencia forman un triángulo acutángulo si no están en una misma semicircunferencia). Entonces, si  $S'$  y  $T'$  son, respectivamente, los puntos de  $\partial c_K$  simétricos de  $S$  y

$T$  respecto a  $y_0$ , uno de los tres puntos  $X, Y, Z$  se sitúa, o bien en el arco  $\widehat{ST'}$ , o bien en el arco  $\widehat{TS'}$ , pues en caso contrario, los tres estarían en una misma semicircunferencia (concretamente, en el arco  $\widehat{S'T'}$ ). Supongamos que  $X \in \widehat{ST'}$ , y sea  $X' \in \partial c_K$  el simétrico de  $X$  respecto a  $y_0$ . Entonces, uno de los dos puntos restantes, por ejemplo  $Y$ , se encuentra en el arco  $\widehat{TX'}$  (de nuevo, en caso contrario, los tres puntos estarían en la semicircunferencia  $\widehat{XX'}$ ). Finalmente, para que los tres puntos en cuestión formen un triángulo acutángulo,  $Z$  debe estar en el arco  $\widehat{X'Y'}$  de  $\partial c_K$ , con  $Y' \in \partial c_K$  el simétrico de  $Y$  respecto a  $y_0$ . Por otro lado, como  $X, Y, Z \in \partial K$ ,  $K$  está contenido en la intersección de  $K^s$  con el triángulo  $T_{XYZ}$  determinado por las rectas  $\ell_X, \ell_Y$  y  $\ell_Z$  soporte a  $c_K$  en  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente (véase la figura 4.16(a)), conjunto que representaremos por  $K' = K^s \cap T_{XYZ}$ .

Si  $r_K = r$ , entonces, necesariamente,  $c_K \equiv c_r$ ; en caso contrario no sería posible encontrar los tres puntos  $X, Y, Z \in \partial c_K$  formando un triángulo acutángulo. Ahora no existen los arcos  $\widehat{PQ}$  ni  $\widehat{ST}$ , ya que  $\text{conv}(c_r \cup c_K) \equiv c_K$ , por lo que, en este caso, simplemente supondremos que  $Z \in \widehat{XY}$  y que está “por debajo” de ambos (tal y como se muestra en la figura 4.16(b)). Además, tomaremos como conjunto  $K'$  la intersección  $K' = C_R \cap T_{XYZ}$ . El resto de la demostración es común para ambos casos, pues, prácticamente, todos los argumentos que siguen son válidos, tanto si  $c_K \equiv c_r$ , como si  $c_K \neq c_r$ . Indicaremos de forma explícita cuándo se debe considerar tal distinción.

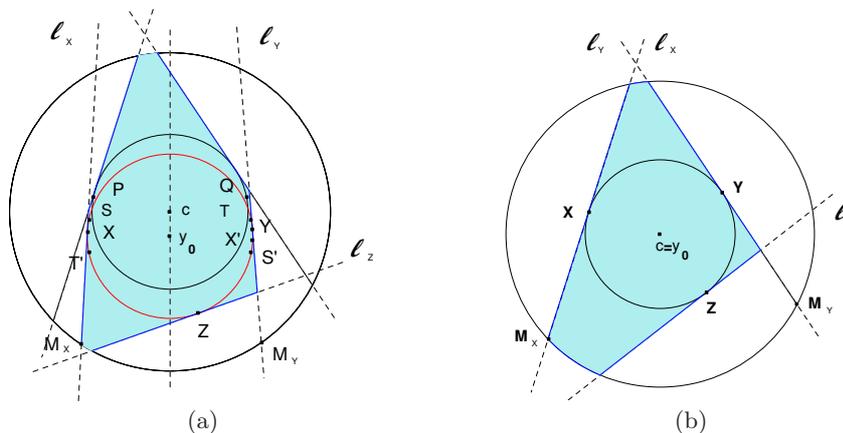


Figura 4.16: El problema se reduce a estudiar la anchura de los conjuntos (a)  $K' = K^s \cap T_{XYZ}$  o (b)  $K' = C_R \cap T_{XYZ}$ .

Obsérvese que la recta  $\ell_Z$  debe cortar al arco  $\widehat{M_X M_Y}$ , donde  $M_X, M_Y \in \partial K^s$  son los puntos de intersección con  $\partial C_R$  de las rectas  $\ell_X$  y  $\ell_Y$ ; en caso contrario, no habría ningún punto de  $\partial K \cap \partial C_R$  en el arco  $\widehat{M_X M_Y}$ , lo cual implicaría que  $\partial K \cap \partial C_R$  se situaría en el otro arco de  $\partial C_R \cap \partial K^s$ ; en consecuencia, la recta determinada por los puntos extremos de dicho arco separaría  $\partial K \cap \partial C_R$  de  $c_r$ , hecho que contradiría la propiedad **(P2)**.

Claramente,  $K'$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$ , por la propiedad **(P4)**, e inradio  $r_K$ , puesto que  $X, Y, Z \in \partial c_K \cap \partial K'$  y forman un triángulo acutángulo. Como  $K \subset K'$ ,  $\omega(K) \leq \omega(K')$ , lo que reduce el problema a estudiar la anchura en esta familia de conjuntos. Observemos lo siguiente:

- (i) Si  $r_K > r$ , el ángulo que forman las rectas  $\ell_X$  y  $\ell_Y$  es siempre menor o igual que el que forman las rectas que determinan  $K^s$  (cuando  $r_K = r$ , el conjunto  $K^s$  no entra en juego, por lo que esta observación no tiene sentido).
- (ii) Además, este ángulo nunca puede ser cero; es decir,  $\ell_X$  y  $\ell_Y$  nunca llegan a ser paralelas pues, en tal caso, los tres puntos  $X, Y, Z$  estarían en una misma semicircunferencia.
- (iii) Como los puntos  $X, Y, Z$  no se encuentran en una misma semicircunferencia, el punto de corte  $\ell_X \cap \ell_Y$  está en el semiplano superior que determina la recta ortogonal a  $cy_0$  que pasa por  $c$ ; además,  $\ell_X \cap \ell_Y$  no es un punto interior de  $C_R$ .
- (iv) El triángulo  $T_{XYZ}$  tiene inradio  $r_K$  y verifica que, a lo sumo, sólo uno de sus vértices (o bien  $\ell_Y \cap \ell_Z$ , o bien  $\ell_X \cap \ell_Z$ ) se encuentra en el interior de  $C_R$ .

De todo ello se deduce que la anchura de  $K'$  vendrá dada, o bien por la distancia del único vértice de  $T_{XYZ}$  interior a  $C_R$ , si lo hubiere, al lado opuesto, o, en caso contrario, por el mínimo de las distancias  $d(M_X, \ell_Y)$ ,  $d(M_Y, \ell_X)$ . Ahora bien, en cualquiera de estos casos, la anchura de  $K'$  será mayor cuanto más grande sea el ángulo  $\theta$  que forman las rectas  $\ell_X$  y  $\ell_Y$ ; en efecto, tanto el único vértice de  $T_{XYZ}$  interior a  $C_R$  (si existe), como los puntos  $M_X$  y  $M_Y$ , aumentan su distancia a sus respectivas rectas opuestas ( $\ell_Y$  o  $\ell_X$ , según el caso) cuando dicho ángulo  $\theta$  crece.

Así, obsérvese en primer lugar que, si  $r_K > r$ , fijada la circunferencia  $\partial c_K$ ,  $\theta$  alcanzará su máximo valor cuando los puntos de contacto  $X$  e  $Y$  coincidan, respectivamente, con los extremos  $S$  y  $T$  del arco de  $\partial c_K \subset \partial \text{conv}(c_r \cup c_K)$ . Una vez hecha esta consideración, y suponiendo ya que  $X \equiv S$  e  $Y \equiv T$ , es claro que el ángulo  $\theta$  puede seguir aumentando (y por tanto, la anchura) cuanto más se aproxime el incentro  $y_0$  a  $c$  (véase la figura 4.17).

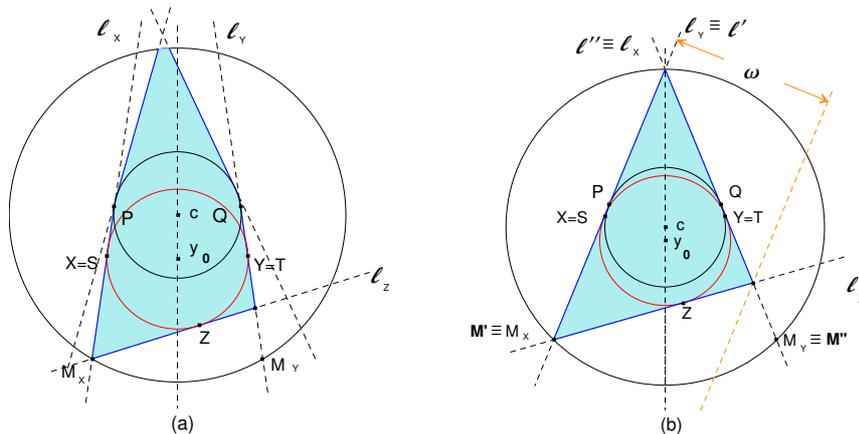


Figura 4.17: Acercando el incentro  $y_0$  hacia  $c$  se obtiene el conjunto  $K'$  de máxima anchura.

El caso límite tendrá lugar cuando  $d(y_0, c) = R(r_K - r)/r$ , es decir, cuando  $\ell_X$  y  $\ell_Y$  sean, precisamente, las rectas tangentes comunes,  $\ell'$  y  $\ell''$ , a  $\partial c_r$  y  $\partial c_K$  que se cortan en el punto  $N \in \partial C_R$ .

En el caso de que  $r_K = r$ , el argumento anterior es trivial: tan solo debemos aumentar el ángulo  $\theta$  hasta que  $\ell_X \cap \ell_Y \in \partial C_R$ , pues  $y_0 \equiv c$ .

Por otro lado, para cualquiera de las posibles posiciones de  $c_K$  (incluso si  $c_K \equiv c_r$ ), y fijadas las rectas  $\ell_X$  y  $\ell_Y$ , es evidente (recuérdense las observaciones (i), (ii) y (iii) anteriores) que la anchura de  $K'$  es mayor cuanto más cerca se encuentre  $Z$  del punto intersección de la recta  $cy_0$  ( $Ny_0$  cuando  $c \equiv y_0$ ) con  $\partial c_K$ . Ahora bien, como nos encontramos en el caso  $R \geq 2r$  y  $r_K \leq 2r(R-r)/R$ , en la situación límite que nos dará la máxima anchura (esto es, cuando  $\ell_X \equiv \ell'$ ,  $\ell_Y \equiv \ell''$  y  $\ell_X \cap \ell_Y = N \in \partial C_R$ ), el segmento  $\overline{M_X M_Y} \equiv \overline{M' M''}$  no corta a  $c_K$  (a lo sumo, será tangente a  $\partial c_K$  si  $R = 2r$  y  $r_K = r$ ). Por lo tanto, la posición límite para el punto  $Z$  es aquella en la que la recta  $\ell_Z$  pasa, precisamente, por  $M_X$  (o  $M_Y$ , indistintamente, por la simetría del conjunto), véase la figura 4.17. De este modo, podemos concluir que, bajo las hipótesis del teorema, el cuerpo convexo con mayor anchura es el triángulo determinado por las rectas  $\ell'$ ,  $\ell''$  y la tangente a  $\partial c_K$  que pasa por  $M'$  (véase la figura 4.17). Un cálculo sencillo muestra que la anchura de este triángulo es

$$\omega = 2\sqrt{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{4r}{R^2} (R^2 - r^2) \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

donde

$$\alpha = 2 \arcsen \frac{r}{R} \quad \text{y} \quad \beta = 2 \arctan \frac{r_K r}{(2r - r_K) \sqrt{R^2 - r^2}},$$

lo que demuestra la desigualdad (4.13). □

#### 4.4. Anillo mínimo, inradio y circunradio

En el capítulo 3 de esta memoria se ha estudiado el problema de optimizar las magnitudes geométricas con las que estamos trabajando, cuando se suponen fijos el anillo mínimo y el circunradio, en lugar del inradio. En particular, se han determinado las desigualdades óptimas para el inradio, dados  $A(c, r, R)$  y  $R_K$ . En esta última sección, estamos suponiendo fijos el anillo mínimo y el inradio, y queremos optimizar el circunradio. Así pues, una de las relaciones buscadas va a coincidir con la ya obtenida en el teorema 3.4.2, pero teniendo en cuenta una salvedad: los conjuntos que allí *maximizaban* el inradio serán, por razones obvias, los que aquí *minimicen* el circunradio.

Sin embargo, no podemos decir lo mismo del teorema 3.4.1: dado que en la desigualdad (3.17) no entra en juego el circunradio, nunca se podrá deducir de ella cuáles son los conjuntos que maximizan  $R_K$ . El resultado preciso es el siguiente.

**Teorema 4.4.1** ([10]). *Sea  $K$  un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ . Entonces, su circunradio  $R_K$  verifica*

$$R_K \leq R. \tag{4.14}$$

*La igualdad se alcanza, entre otras figuras, para el conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , donde  $N$  y  $M$  son los puntos de intersección con  $\partial C_R$  de la recta  $cy_0$  (véase la figura 4.18).*

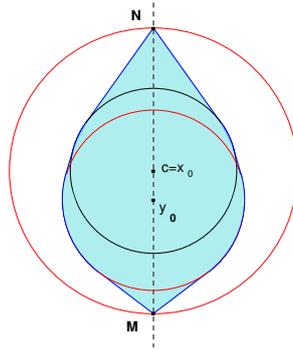


Figura 4.18: El conjunto  $K^{2c}$  tiene anillo mínimo e inradio fijos, y circunradio máximo  $R_K = R$ .

**Demostración.** Como  $K \subset C_R$ , se tiene que  $R_K \leq R$ . Por otra parte, si  $\{N, M\} = cy_0 \cap \partial C_R$ , ya hemos visto en la propiedad (6) del lema 2.1.3 que el conjunto  $K^{2c} = \text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$  tiene anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ ; finalmente, dado que  $M$  y  $N$  son puntos diametralmente opuestos de  $C_R$ , el circunradio de  $K^{2c}$  es, precisamente,  $R$  (véase la figura 4.18).  $\square$

Para finalizar el capítulo, y por completitud, volvemos a enunciar el teorema 3.4.2 (reescribiendo la desigualdad de forma adecuada), que ahora establece cuáles son los conjuntos que minimizan el circunradio, suponiendo fijos el anillo mínimo y el inradio. Con ello concluye esta memoria.

**Teorema 4.4.2** ([10]). *Si  $K$  es un cuerpo convexo con anillo mínimo  $A(c, r, R)$  e inradio  $r_K$ , su circunradio  $R_K$  verifica*

$$R_K \geq \frac{2r - r_K}{4r^2}(R^2 - r^2) + \frac{r^2}{2r - r_K}. \tag{4.15}$$

La igualdad se da, entre otros conjuntos, para la cuña circular asimétrica  $K^\angle$  (véase la figura 4.19).

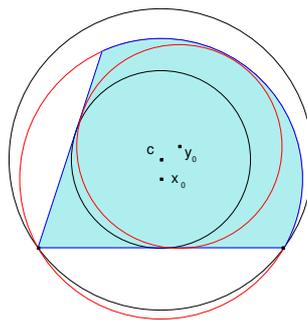


Figura 4.19: La cuña circular asimétrica  $K^\angle$  tiene circunradio mínimo.

**Demostración.** Véase la demostración del teorema 3.4.2.  $\square$



# Índice de Resultados

**Capítulo 2:** El anillo mínimo y las seis magnitudes geométricas clásicas.

$$(2.1) \quad A \geq 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(2.2) \quad A \leq 2 \left( r \sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(2.3) \quad p \geq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(2.4) \quad p \leq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + R \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(2.5) \quad \omega \geq 2r$$

$$(2.6) \quad \omega \leq R + r \quad \text{si } R \leq 2r$$

$$(2.7) \quad \omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \quad \text{si } R \geq 2r$$

$$(2.8) \quad D \leq 2R$$

$$(2.9) \quad D \geq R + r \quad \text{si } R \leq \frac{5r}{3}$$

$$(2.10) \quad D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si } R \geq \frac{5r}{3}$$

$$(2.11) \quad R_K \leq R$$

$$(2.12) \quad R_K \geq \frac{R^2 + 3r^2}{4r} \quad \text{si } R \leq r\sqrt{5}$$

$$(2.13) \quad R_K \geq \sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si } R \geq r\sqrt{5}$$

$$(2.14) \quad r_K \geq r$$

$$(2.15) \quad r_K \leq \frac{2rR}{R + r}$$

**Capítulo 3:** El anillo mínimo y el circunradio.

$$(3.1) \quad A \geq 2r \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(3.2) \quad p \geq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(3.5) \quad A \leq R_K^2 \left( \operatorname{arc\,sen} \frac{\rho}{R_K} + \operatorname{arc\,sen} \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + \rho \sqrt{R^2 - r^2} + (2r - \rho) \sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho}^*$$

$$(3.6) \quad p \leq 2R_K \left( \operatorname{arc\,sen} \frac{\rho}{R_K} + \operatorname{arc\,sen} \frac{2r - \rho}{R_K} \right) + 2\sqrt{R^2 - r^2} + 2\sqrt{R^2 - 5r^2 + 4r\rho}^*$$

$$(3.7) \quad D \leq 2R_K$$

$$(3.8) \quad D \geq R + r \quad \text{si } R \leq \frac{5}{3}r \text{ y } R_K \leq \frac{R+r}{\sqrt{3}}$$

$$(3.9) \quad D \geq \sqrt{3}R_K$$

$$\text{si } \begin{cases} R \leq \frac{5}{3}r \text{ y } R_K \geq \frac{R+r}{\sqrt{3}}, & \text{ó} & (3.9.a) \\ \frac{5}{3}r \leq R \leq 2r \text{ y } R_K \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{R^2 - r^2}. & & (3.9.b) \end{cases}$$

$$(3.10) \quad D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\text{si } \begin{cases} \frac{5}{3}r \leq R \leq 2r \text{ y } R_K \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{R^2 - r^2}, & \text{ó} & (3.10.a) \\ 2r \leq R. & & (3.10.b) \end{cases}$$

$$(3.14) \quad \omega \geq 2r$$

$$(3.15) \quad \omega \leq R_K + \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}$$

$$\text{si } \begin{cases} R \leq 2r, & \text{ó} & (3.15.a) \\ 2r \leq R \leq r\sqrt{2(2+\sqrt{2})} \text{ y } R_K \leq \frac{R^4}{4r(R^2 - 2r^2)}. & & (3.15.b) \end{cases}$$

$$(3.16) \quad \omega \leq \frac{4r(R^2 - r^2)}{R^4} \left( R^2 - 2r^2 + 2r\sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2} \right)$$

$$\text{si } \begin{cases} 2r \leq R \leq r\sqrt{2(2+\sqrt{2})} \text{ y } R_K \geq \frac{R^4}{4r(R^2 - 2r^2)}, & \text{ó} & (3.16.a) \\ R \geq r\sqrt{2(2+\sqrt{2})}. & & (3.16.b) \end{cases}$$

---

\*  $\rho = \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}$

$$(3.17) \quad r_K \geq r$$

$$(3.18) \quad r_K \leq 2r \left( 1 - r \frac{R_K - \sqrt{R_K^2 - R^2 + r^2}}{R^2 - r^2} \right)$$

**Capítulo 4:** El anillo mínimo y el inradio.

$$(4.1) \quad A \leq 2 \left( r\sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(4.2) \quad p \leq 4 \left( \sqrt{R^2 - r^2} + R \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R} \right)$$

$$(4.3) \quad A \geq \frac{r_K^2}{r} \left( \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{r_K} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} \right) + r_K^2 \theta^{**}$$

$$(4.4) \quad p \geq 2 \left( \frac{r_K}{r} \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{r} \sqrt{R^2(2r - r_K)^2 - r^2 r_K^2} + r_K \theta \right)^{***}$$

$$(4.7) \quad D \leq 2R$$

$$(4.8) \quad D \geq \frac{r_K(R+r)}{r} \quad \text{si } r_K \geq 2r \sqrt{\frac{R-r}{R+r}}$$

$$(4.9) \quad D \geq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{si } r_K \leq 2r \sqrt{\frac{R-r}{R+r}}$$

$$(4.10) \quad \omega \geq 2r_K$$

$$(4.11) \quad \omega \leq R+r \quad \text{si } R \leq 2r$$

$$(4.12) \quad \omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \quad \text{si } R \geq 2r \text{ y } r_K \geq \frac{2r(R-r)}{R}$$

$$(4.13) \quad \omega \leq \frac{4r}{R^2}(R^2 - r^2) \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad \text{si } R \geq 2r \text{ y } r_K \leq \frac{2r(R-r)}{R} \text{ ****}$$

$$(4.14) \quad R_K \leq R$$

$$(4.15) \quad R_K \geq \frac{2r - r_K}{4r^2}(R^2 - r^2) + \frac{r^2}{2r - r_K}$$

\*\*  $\theta = \operatorname{arc\,sen} \frac{r_K r}{R(2r - r_K)} + \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R}$

\*\*\*  $\theta = \operatorname{arc\,sen} \frac{r_K r}{R(2r - r_K)} + \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R}$

\*\*\*\*  $\alpha = 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{R}$  y  $\beta = 2 \operatorname{arctan} \frac{r_K r}{(2r - r_K)\sqrt{R^2 - r^2}}$



# Bibliografía

- [1] I. Bárány, *On the minimal ring containing the boundary of a convex body*, Acta Sci. Math (Szeged) **52** (1988), no. 1-2, 93–100. MR MR957792 (89I:52014).
- [2] T. Bonnesen, *Über das isoperimetrische defizit ebener figuren*, Mat. Annalen **91** (1924), 252–268 (danés Mat. Tidsskr., 13, 1923, p. 15–22). MR MR1512192.
- [3] ———, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars et Cie., Paris, 1929.
- [4] T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theory of convex bodies (Theorie der Konvexen Körper)*, BCS Associates, Moscow, ID, 1987. Traducido del alemán y editado por L. Boron, C. Christenson y B. Smith, (original 1934)., MR 88j:52001.
- [5] M. D’Ocagne, *Sur certaines figures minima*, Bulletin de la S.M.F. **12** (1884), 168–177.
- [6] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. MR MR867284 (88d:28001).
- [7] J. Favard, *Problèmes d’extremums relatifs aux courbes convexes i, ii*, Ann. École norm. **46** (1929), 345–369.
- [8] ———, *Sur le déficit isopérimétrique maximum dans une couronne circulaire*, Mat. Tidsskr **B** (1929), 62–68.
- [9] M. A. Hernández Cifre and P. J. Herrero, *Optimizing geometric measures for fixed minimal annulus and inradius*, Aparecerá en Rev. Mat. Iberoamericana, 2006.
- [10] ———, *Relating the minimal annulus with the circunradius of a convex set*, Enviado, 2006.
- [11] ———, *Some optimizations problems for the minimal annulus of a convex set*, Math. Inequal. Appl. **9** (2006), no. 2, 359–374.
- [12] F. Juhnke and O. Sarges, *Minimal spherical shell and linear semi-infinite optimization*, Beiträge Algebra Geom. **41** (2000), no. 1, 93–105. MR MR1745582 (2001b:52012).

- [13] N. Kriticos, *Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln*, Mat. Annalen **96** (1927), 583–586. MR MR1512341.
- [14] H. Lebesgue, *Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations*, J. Math. Pures Appl. **4** (1921), no. 8, 67–96.
- [15] M. Moszyńska, *Remarks on the minimal ring of convex bodies*, Studia Sci. Math. Hungar. **35** (1999), no. 1-2, 155–174. MR MR1690232 (2000c:52006).
- [16] C. Peri, *On the minimal convex shell of a convex body*, Canad. Math. Bull. **36** (1993), no. 4, 466–472. MR MR1245320 (94i:52004).
- [17] ———, *Minimal shells containing a convex surface in Minkowski space*, Manuscripta Math. **90** (1996), no. 3, 33–342. MR MR1397661 (97f:52004).
- [18] C. Peri and S. Vassallo, *Minimal properties for convex annuli of plane convex curves*, Arch. Math. **64** (1995), no. 3, 254–263. MR MR1314495 (96c:52013).
- [19] ———, *Minimal properties for convex annuli of plane convex curves*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **75** (1995), no. 38, . IVth Italian Conference on Integral Geometry, Geometric Probability Theory and Convex Bodies (Italiano) (Bari, 1994) MR MR13467945.
- [20] C. Peri and A. Zucco, *On the minimal convex annulus of a planar convex body*, Monatsh. Math. **114** (1992), no. 2, 125–133. MR MR1191818 (93i:52004).
- [21] Carla Peri, Jörg M. Wills, and Andreana Zucco, *On a Blasche's extension of Bonnesen's inequality*, Geom. Dedicata **48** (1993), no. 3, 349–357. MR MR1254104 (94k:52003).
- [22] G. Salinas, *Sistemas completos de desigualdades*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, 1993. (Directores: M. A. Hernández Cifre y S. Segura Gomis).
- [23] L. Santaló, *Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana*, Math. Notae (1961), no. 17, 82–104.
- [24] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 94d:52007.
- [25] M. Sholander, *On certain minimum problems in the theory of convex curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 139–173. MR MR0053536 (14,787d).
- [26] I. Vincze, *Über Kreisringe, die eine Eilinie einschließen.*, Studia Sci. Math. Hungar. **9** (1974), 155–159 (1975). MR MR0370354 (51 # 6581).
- [27] I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii, *Convex figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961, traducido del ruso original: Vypuklye Figury, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad, 1951. MR 14,197d.

- 
- [28] A. Zucco, *Minimal annulus of a convex body*, Arch. Math. **52** (1989), no. 1, 92–94. MR MR980058 (89m:52001).
- [29] ———, *Minimal shell of a typical convex body*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), no. 3, 797–802. MR MR1015687 (90k:52006).



# Índice de símbolos

$\angle(PQS)$	Ángulo determinado por los puntos $P, Q, S$
$\alpha = \angle(PcQ)$	Ángulo central de $P$ y $Q$ respecto al centro del anillo
$A, B$	Puntos de corte de $\partial C_R \cap \partial C_K$
$A', B'$	Puntos de corte de $\partial C_R$ con la recta tangente a $\partial c_r$ y paralela a $AB$
$A(K)$	Área del conjunto $K$
$A(c, r, R)$	Anillo mínimo de centro $c$ y radios $r$ y $R$
$c$	Centro del anillo mínimo
$c_K$	Incírculo del conjunto $K$
$c_r$	Círculo interior del anillo mínimo
$C_A$	Círculo de centro $A$
$C_K$	Circuncírculo del conjunto $K$
$C_R$	Círculo exterior del anillo mínimo
$C_s$	Círculo de radio $s$
card	Cardinal
conv	Envoltura convexa
$D(K)$	Diámetro del conjunto $K$
$d(P, Q)$	Distancia euclídea entre $P$ y $Q$
$H$	Hiperplano
$H^+, H^-$	Semiespacios cerrados determinados por el hiperplano $H$
int $K$	Interior del conjunto $K$
$K$	Conjunto (cuerpo) convexo de $\mathbb{R}^n$

$K^\angle$	Cuña circular asimétrica
$K^B$	Conjunto de máxima anchura fijados $A(c, r, R)$ y $r_K$
$K^c$	Cap-body
$K^{2c}$	“Doble cap-body”: conjunto $\text{conv}\{c_r \cup c_K, N, M\}$ , $N, M \in \partial C_R$
$K^s$	Segmento de círculo
$K^T$	Trapezio circular
$K_d$	Conjunto $\text{conv}\{c_r \cup c_K, N\}$ , $N \in C_R$ adecuado
$\ell$	Recta
$\omega(K)$	Anchura del conjunto $K$
$\omega(K, u)$	Anchura del conjunto $K$ en la dirección $u$
$\partial K$	Frontera del conjunto $K$
$PQ$	Recta que determinan los puntos $P$ y $Q$
$\overline{PQ}$	Segmento de recta que une los puntos $P$ y $Q$
$\overwidehat{PQ}$	Arco de circunferencia que tiene a $P$ y $Q$ como extremos
$P(K)$	Perímetro del conjunto $K$
$r$	Radio interior del anillo mínimo
$R$	Radio exterior del anillo mínimo
$R - r$	Espesor del anillo mínimo
$r_K$	Inradio del conjunto $K$
$R_K$	Circunradio del conjunto $K$
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclídeo de dimensión $n$
$S(K)$	Área de superficie $(n - 1)$ -dimensional del conjunto $K$
$\mathbb{S}^{n-1}$	Esfera $(n - 1)$ -dimensional unitaria en $\mathbb{R}^n$
$\triangle(PQS)$	Triángulo con vértices $P, Q, S$
$V(K)$	Volumen $n$ -dimensional del conjunto $K$
$x_0$	Circuncentro de un conjunto
$y_0$	Incentro de un conjunto