

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA,  
ELECTRÓNICA, DE COMPUTADORES Y DE SISTEMAS

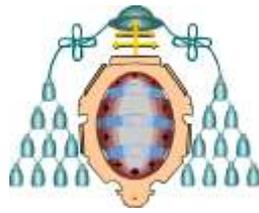
TESIS DOCTORAL

**Técnicas de Descomposición de Dominios con  
Ecuación Integral para el Análisis Eficiente de  
Problemas Electromagnéticos**

*Autor:*  
Jaime Laviada Martínez

*Directores:*  
Fernando Las Heras Andrés  
Marcos Rodríguez Pino

Abril de 2010



Reservados todos los derechos  
© El autor

Edita: Universidad de Oviedo,  
Biblioteca Universitaria, 2010  
Colección Tesis Doctoral-TDR nº 71  
ISBN 978-84-693-4918-2  
D.L.: AS.00967-2010

# Método de las funciones base características multinivel

## 4.1 Introducción

---

En el capítulo anterior se presentó el denominado Método de las Funciones Base Características (CBFM). En este método las funciones base convencionales eran agrupadas para formar un nuevo conjunto de funciones denominadas funciones base características (CBFs). Esta metodología abre nuevas perspectivas con respecto a si es posible volver a aplicar el CBFM sobre este nuevo conjunto de funciones a fin de alcanzar tasas de compresión más altas. Éste será el núcleo principal de este capítulo y dará lugar a una de las aportaciones de esta tesis en forma del denominado Método de las Funciones Base Características Multinivel.

El capítulo comienza con un análisis relativo a la influencia del tamaño de los bloques en la tasa de compresión proporcionada por el CBFM. De este análisis se puede derivar como, desde el punto de vista de compresión de la matriz, es posible obtener un mejor rendimiento si se aumenta el tamaño de los bloques. No obstante, el uso de bloques de gran tamaño está limitado por la capacidad de análisis de los mismos mediante el método de los momentos. Por ese motivo, se propone un análisis recursivo de estos bloques mediante el CBFM dando lugar al aquí denominado Método de las Funciones Base Características Multinivel (ML-CBFM).

A continuación se detalla el ML-CBFM de forma análoga a como se desarrolló el CBFM en el capítulo anterior. Por tanto, se procede a detallar en primer lugar la generación de las nuevas funciones base características multinivel haciendo especial hincapié en su formulación recursiva. Aprovechando la definición de las CBFs

multinivel en función de combinaciones lineales de CBFs de niveles inferiores, se derivará el cálculo recursivo de la matriz del sistema de ecuaciones. Alcanzado este punto, varios ejemplos ilustrativos para problemas de dispersión son mostrados con el objetivo de comprobar la precisión del método.

En la siguiente sección del capítulo, se presentan las técnicas utilizadas para la paralelización del ML-CBFM. Para ello se detalla la estrategia a seguir para cada una de las etapas que componen el algoritmo: generación de las ML-CBFs, cálculo de la matriz reducida multinivel y resolución del sistema de ecuaciones.

El capítulo concluye con la aplicación del ML-CBFM a la síntesis de grandes agrupaciones de antenas en entornos complejos. Esta aplicación explota la habilidad del ML-CBFM para resolver múltiples excitaciones de forma simultánea y sin necesidad de iteraciones incluso en problemas de grandes dimensiones. El ejemplo utilizado para ilustrar el método es una antena de radar secundario montada en una plataforma con diversos obstáculos.

## 4.2 Método de las Funciones Base Características Multinivel

---

### 4.2.1. Influencia del tamaño de los bloques

Como hemos visto en el capítulo anterior, la definición de las funciones base características tiene lugar sobre unos dominios denominados bloques. Un sencillo razonamiento permite observar que el tamaño del bloque influye sobre la compresión que es capaz de aplicar el CBFM. Considérese a tal efecto un bloque tan pequeño que contenga tan solo una función base de bajo nivel, la aplicación del CBFM sobre dicho bloque resultará en una CBF que se corresponde con el único grado de libertad que posee el bloque. Si por el contrario se considera un bloque que agrupe múltiples funciones base, los resultados vistos en el capítulo anterior muestran que el número de CBFs será menor que el número de funciones base de bajo nivel. Esta observación hace intuir que cuanto mayor sea el tamaño del bloque, mayor será la *tasa de compresión* del CBFM, la cual se define como:

$$R = \frac{N}{N_{CBF}}, \quad (4.1)$$

siendo  $N$  el número de incógnitas de bajo nivel y  $N_{CBF}$  el número de CBFs utilizado para modelar el problema.

Con el objetivo de dar una prueba empírica del hecho anterior, se considerará la compresión que se obtiene con el CBFM para diversos bloques de diferente

geometría cuyo tamaño (y consecuentemente su número de incógnitas) se aumenta de forma gradual. Los bloques bajo análisis consisten en una placa cuadrada, una esfera, un cubo y cuatro placas perpendiculares con una separación de  $0,4\lambda$  entre ellas (ver figura 4.1a). En todos los casos se utilizó una discretización con incógnitas RWG entre  $\lambda/10$  y  $\lambda/6$ . En este ejemplo el CBFM se ha configurado con un umbral  $t_{svd} = 10^{-3}$  y se han empleado 3.600 ondas planas ( $N_\theta = 30$ ,  $N_\phi = 60$ ) para la generación de las CBFs.

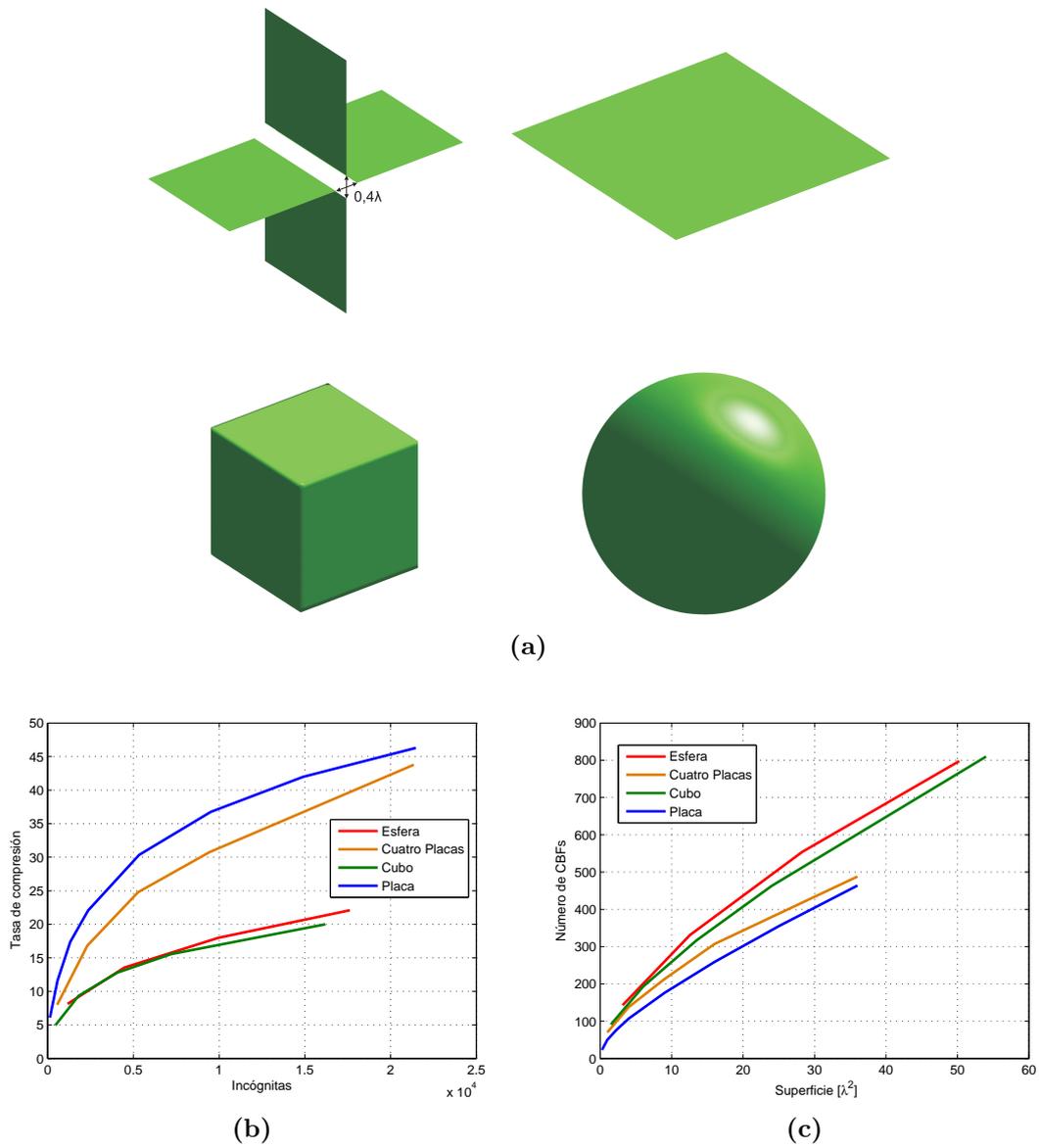
Los resultados recogidos en la figura 4.1b revelan como efectivamente la tasa de compresión aumenta al aumentar el tamaño del bloque. Si fijamos un tamaño de bloque de, por ejemplo, 15.000 incógnitas tenemos que la tasa de compresión oscila entre 15 (cubo) y 40 (placa) en función de la geometría del bloque.

Aunque la tasa de compresión permite una comparación rápida e intuitiva de la ganancia obtenida con el CBFM frente al MoM convencional, tiene una fuerte dependencia no solo con la forma del bloque sino también con la densidad del mallado. Este hecho es sencillo de comprender puesto que los grados de libertad de una superficie idealmente deberían ser independientes del mallado que se aplica a la misma. De este modo, si en una superficie se disminuye el tamaño eléctrico de las funciones base (aumenta la densidad de mallado), se obtendrá una tasa de compresión más alta aunque realmente el número de CBFs utilizado para modelar la corriente en dicha superficie será aproximadamente el mismo.

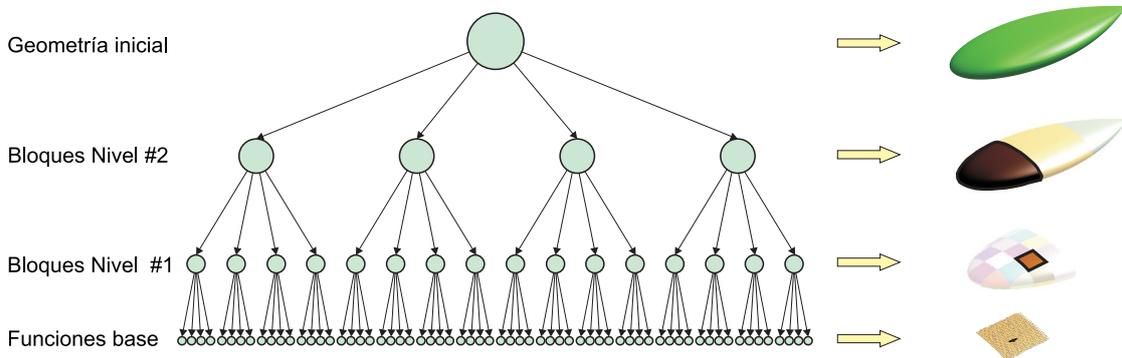
Por los motivos anteriores, se incluyen en la figura 4.1c el número de CBFs en función del tamaño eléctrico para cada uno de los cuerpos anteriores. En este caso, al eliminar la dependencia con el mallado se observa un comportamiento más uniforme entre las distintas geometrías que el obtenido al tener en cuenta la tasa de compresión frente al número de incógnitas.

Si bien la utilización de bloques de gran tamaño eléctrico tiene claras ventajas desde el punto de vista de reducción de incógnitas, su uso involucra la resolución de sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones. Además, dichos sistemas de ecuaciones deben ser resueltos para múltiples excitaciones con lo cual es conveniente utilizar algún tipo de algoritmo de resolución directa. La mejora de este aspecto fue llevada a cabo en [Del08] con el uso de Óptica Física (Physical Optics, PO) para el cálculo de las corrientes sin la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones. No obstante, este método tan solo es recomendable para problemas de dispersión en los cuales los bloques bajo análisis presenten variaciones suaves de modo que se pueda aplicar PO.

En [Luc08] se alivió el coste computacional asociado de la generación del sistema de ecuaciones mediante el uso de representaciones dispersas de las matrices densas que contienen las interacciones entre bloques. Esta técnica permite manipular bloques de mayor tamaño, sin embargo presenta un cuello de botella en la



**Figura 4.1:** Compresión obtenida con el CBFM para diversas geometrías: (a) geometrías bajo consideración; (b) tasa de compresión en función del número de incógnitas por bloque; (c) número de CBFs necesarias en función de la superficie del bloque.



**Figura 4.2:** Descomposición de una geometría en bloques jerárquicos.

descomposición en valores singulares debido tanto al gran número de incógnitas por bloque como el elevado número de iluminaciones considerado.

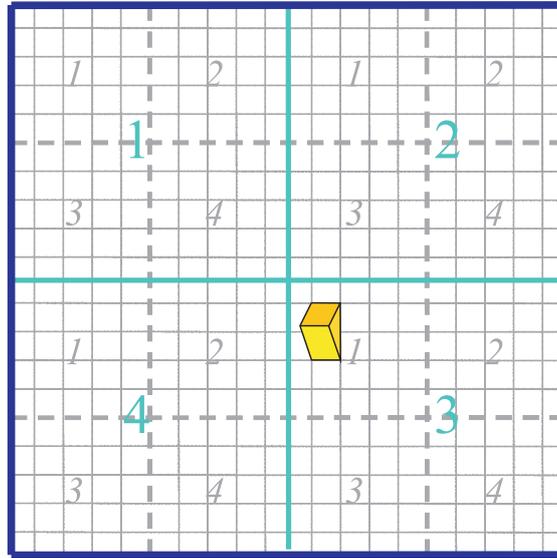
Como una de las contribuciones de esta tesis, se presentará en las siguientes secciones el desarrollo de una versión multinivel del CBFM que permite el uso de bloques de mayor tamaño alcanzando tasas de compresión superiores a las del CBFM de una forma eficiente. En esta técnica, se descompone la geometría en varios bloques de gran tamaño los cuales son a su vez analizados mediante el CBFM dando lugar a un esquema recursivo.

Este sistema es equivalente a aplicar el CBFM sobre una serie de funciones base de bajo nivel para obtener los coeficientes de las CBFs (definidas como combinaciones lineales de las CBFs de bajo nivel) y, posteriormente, volver a generar nuevas CBFs usando como funciones base las CBFs calculadas anteriormente. Este esquema aplicado de forma recursiva a un número arbitrario de niveles será denominado *Método de las Funciones Base Características Multinivel* (Multilevel Characteristic Basis Function Method, ML-CBFM).

#### 4.2.2. Expansión en funciones base características multinivel

Como se ha discutido anteriormente, en el ML-CBFM las funciones base características del nivel más alto son definidas en bloques de gran tamaño, los cuales a su vez son divididos en otros subbloques donde son definidas CBFs del siguiente nivel más bajo y así sucesivamente. Por tanto, el primer paso a realizar para analizar una cierta estructura mediante el ML-CBFM es proceder a la *descomposición jerárquica de la geometría*.

La figura 4.2 muestra un ejemplo de descomposición en bloques jerárquicos para



**Figura 4.3:** Descomposición multinivel de una placa.

la Almendra de la NASA. La geometría inicial es descompuesta en tres bloques del nivel más alto (nivel número 2). Cada bloque de nivel dos es a su vez descompuesto en varios bloques más pequeños de nivel uno (bloques del CBFM normal). Finalmente, cada uno de estos bloques está compuesto por el dominio de definición de las funciones base que agrupa. A la izquierda de la imagen se muestra, de forma simbólica, el tipo de estructura en árbol a la que dan lugar estas descomposiciones jerárquicas.

De cara a una descripción matemática apropiada de las CBFs multinivel, así como de otros aspectos del método, es conveniente definir una *secuencia de bloques* como sigue:  $\{\text{seq}\} = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ , donde los valores  $i_k$  son los índices de los niveles ordenados desde el más alto al más bajo. Por ejemplo, la figura 4.3 muestra el análisis de una placa mediante una estrategia de dos niveles. El nivel más alto incluye cuatro bloques y cada uno de ellos contiene a su vez otros cuatro bloques. Si queremos hacer referencia al bloque que contiene el rooftop, la secuencia de bloques sería  $\{\text{seq}\} = \{3, 1\}$ . En aras de una mayor claridad, también se define la operación de concatenación entre una secuencia de bloques  $\{\text{seq}\} = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  y un nuevo bloque  $b$ :  $\{\text{seq}, b\} = \{i_1, i_2, \dots, i_l, b\}$ .

Una vez que la secuencia de bloques ha sido definida, es directo expresar una CBF en el bloque apuntado por  $\{\text{seq}\}$  de nivel  $l$  (definida sobre un bloque de nivel  $l$ ) en términos de las CBFs de nivel  $l - 1$  pertenecientes a los bloques de nivel  $l - 1$  dentro del bloque  $\{\text{seq}\}$ . Por tanto, la  $n$ -ésima CBF dentro del bloque indicado por

la secuencia  $\{\text{seq}\}$  es expresada como:

$$\mathcal{F}_{\{\text{seq}\},n} = \sum_{b=1}^{B_{\{\text{seq}\}}} \sum_{m=1}^{N_{\{\text{seq},b}\}} I_{\{\text{seq},b\},m}^{(n)} \mathcal{F}_{\{\text{seq},b\},m}, \quad (4.2)$$

donde  $B_{\{\text{seq}\}}$  es el número de bloques (de nivel  $l - 1$ ) dentro del bloque apuntado por  $\{\text{seq}\}$ ;  $N_{\{\text{seq},b\}}$  es el número de CBFs en el bloque apuntado por  $\{\text{seq}, b\}$ ; y  $I_{\{\text{seq},b\},m}^{(n)}$  son los coeficientes de la expansión en términos de las CBFs del siguiente nivel inferior, el cálculo de estos coeficientes será detallado posteriormente.

Si la secuencia de bloques  $\{\text{seq}\}$  tiene la misma longitud que el número de niveles, tenemos que se ha alcanzado el nivel más bajo. En este caso, tenemos funciones CBFs de primer nivel convencionales expresadas en términos de funciones base de bajo nivel:

$$\mathcal{F}_{\{\text{seq}\},n} = \sum_{m=1}^{N_{\{\text{seq}\}}} I_{\{\text{seq}\},m}^{(n)} \mathbf{f}_{\{\text{seq}\},m}. \quad (4.3)$$

Una vez definidas las CBFs, la corriente se expande como una combinación lineal de las CBFs de los niveles más altos como:

$$\mathbf{J} = \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^{N_{\{b\}}} I_{\{b\},m} \mathcal{F}_{\{b\},m}, \quad (4.4)$$

donde  $B$  es el número de bloques;  $N_{\{b\}}$  es el número de CBFs en el bloque  $\{b\}$ ; y  $I_{\{b\},m}$  son los pesos de la combinación lineal a ser calculados con el MoM.

### 4.2.3. Generación de las funciones base características multinivel

Para el cálculo de los coeficientes de las CBFs de cada nivel, se seguirá la metodología del CBFM convencional comenzando desde el nivel más bajo para progresivamente avanzar hasta el nivel más alto, es decir, se recorre el árbol de la figura 4.2 en orden inverso.

Supóngase que se desean calcular los coeficientes para las CBF de nivel- $l$  localizadas en el bloque apuntado por  $\{\text{seq}\}$  y asúmase que el resto de CBFs de bloques de niveles inferiores contenidos en dicho bloque ya han sido calculadas. Se iluminará el bloque (con una pequeña extensión que abarca parte de los bloques circundantes al igual que en el CBFM convencional) con  $N_{pw}$  ondas planas. Después de descartar las corrientes en la extensión, la corriente inducida debido a la onda plana  $n$ -ésima será:

$$\mathbf{J}_{\{\text{seq}\},n} = \sum_{b=1}^{B_{\{\text{seq}\}}} \sum_{m=1}^{N_{\{\text{seq},b\}}} P_{\{\text{seq},b\},m}^{(n)} \mathcal{F}_{\{\text{seq},b\},m}, \quad (4.5)$$

donde los coeficientes  $P$  (pesos de las CBFs) son obtenidos tras resolver el bloque extendido. Tal y como sucedía en el CBFM convencional, las corrientes así generadas no tienen por qué ser linealmente independientes por lo que se las somete a un filtrado con una SVD. Con este fin, estos coeficientes son reagrupados de manera similar a como sucedía en el CBFM para formar la siguiente matriz:

$$\overline{\overline{P}}_{\{\text{seq}\}} = \begin{bmatrix} P_{\{\text{seq},1\},1}^{(1)} & P_{\{\text{seq},1\},1}^{(2)} & \cdots & P_{\{\text{seq},1\},1}^{(N_{pw})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\{\text{seq},1\},N_{\{\text{seq},1\}}}^{(1)} & P_{\{\text{seq},1\},N_{\{\text{seq},1\}}}^{(2)} & \cdots & P_{\{\text{seq},1\},N_{\{\text{seq},1\}}}^{(N_{pw})} \\ P_{\{\text{seq},2\},1}^{(1)} & P_{\{\text{seq},2\},1}^{(2)} & \cdots & P_{\{\text{seq},2\},1}^{(N_{pw})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\},N_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\}}}^{(1)} & P_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\},N_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\}}}^{(2)} & \cdots & P_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\},N_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\}}}^{(N_{pw})} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

donde la columna  $n$ -ésima se corresponde con los coeficientes de la corriente inducida por la  $n$ -ésima onda plana. Estos coeficientes son ordenados por bloque al que pertenecen. Dentro de cada uno de estos bloques, las CBFs, las cuales pertenecen al nivel  $l - 1$ , son ordenadas a su vez en función del valor singular asociado a dicha función base, los cuales fueron obtenidos durante el proceso de generación de las CBFs de nivel  $l - 1$  de dicho bloque.

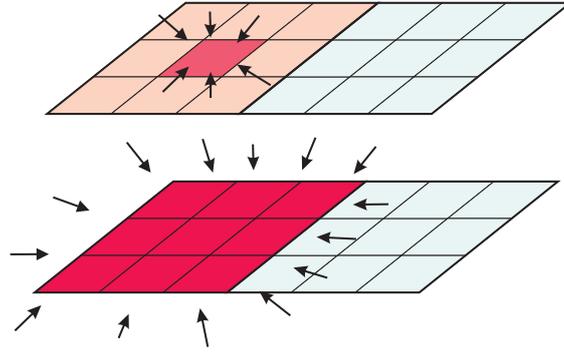
A la matriz anterior se le aplica una descomposición en valores singulares:

$$\overline{\overline{P}}_{\{\text{seq}\}} = \overline{\overline{U}}_{\{\text{seq}\}} \overline{\overline{D}}_{\{\text{seq}\}} \overline{\overline{W}}_{\{\text{seq}\}}^T. \quad (4.7)$$

Tal y como sucedía en el CBFM, aquellas columnas que estén por encima de un cierto umbral, el cual puede ser ajustado para cada nivel,  $t_{svd}^{(l)}$ , son retenidas para formar las funciones base características sobre el bloque  $\{\text{seq}\}$ . Por tanto, utilizando notación de Matlab, la matriz  $\overline{\overline{J}}_{\{\text{seq}\}}$  conteniendo los coeficientes de las CBFs será:

$$\overline{\overline{J}}_{\{\text{seq}\}} = \overline{\overline{U}}_{\{\text{seq}\}} \left( 1 : K_{\{\text{seq}\}}, : \right), \quad (4.8)$$

siendo  $K_{\{\text{seq}\}}$  es el número de CBFs por encima del umbral de la SVD. Los coeficientes de la matriz  $\overline{\overline{J}}_{\{\text{seq}\}}$  mantienen el mismo orden que el empleado en (4.6).



**Figura 4.4:** Iluminación con ondas planas a diferentes niveles para la generación de funciones base multinivel.

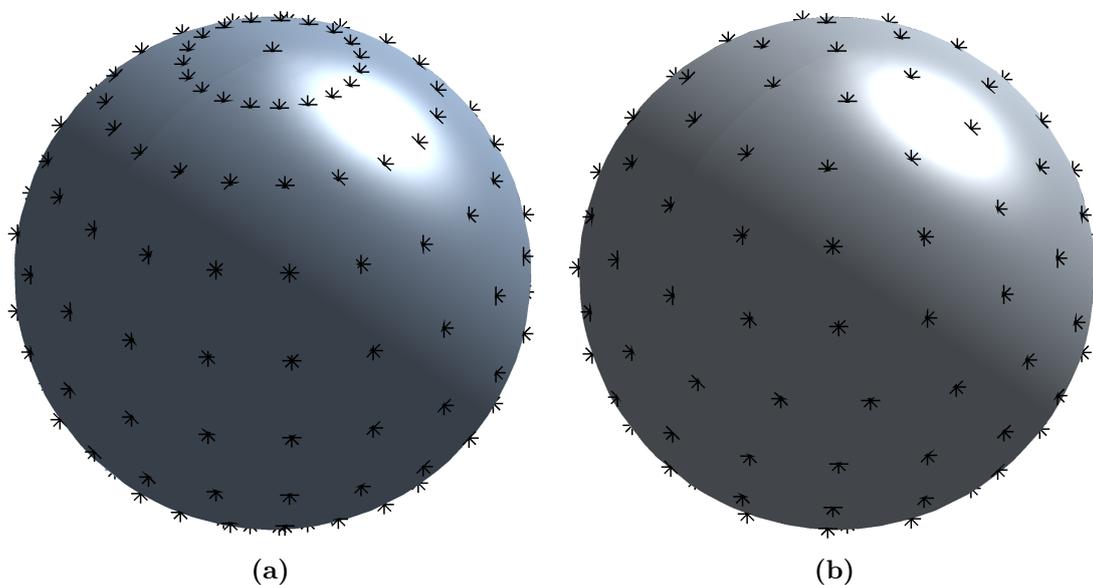
#### 4.2.3.1. Elección del número de ondas planas

La elección del número de ondas planas es un factor crítico que gobierna la precisión del método. En la versión de un solo nivel del CBFM, esta elección es típicamente hecha de forma empírica, y está basada en el número de funciones base que sobreviven a la SVD para un umbral dado. Habitualmente, el número de CBFs retenido después de la SVD es considerablemente menor que el número de ondas planas (p. ej. menos del 40 %) y, por tanto, el uso de más ondas planas en el proceso de generación de las CBFs no contribuye a un incremento en la precisión.

Para determinar el número de direcciones necesarias para muestrear la parte visible del espectro de ondas planas recurriremos al problema recíproco consistente en muestrear el campo radiado por una antena o un dispersor, el cual es un problema muy conocido en la literatura [Yag86; Yag96]. Las reglas de muestreo basadas en el ancho de banda del espectro de ondas planas radiado revelan que, asumiendo una distancia uniforme en  $\theta$  y  $\phi$ , son necesarios al menos  $2(kr_0 + 2\pi)^2$  direcciones, siendo  $r_0$  el radio de la esfera mínima que encierra el cuerpo. Si se asume una dualidad entre el campo radiado desde una esfera mínima y el campo incidente a dicha esfera, entonces es razonable aproximar el número de ondas planas para modelar un campo entrante a la esfera mínima con la misma dependencia.

Hasta ahora la distribución en ondas planas utilizada asume un número fijo de puntos en  $\phi$  para cada ángulo  $\theta$ . Esta técnica, utilizada en [Luc08; Del08] es sencilla pero no produce un reparto de direcciones homogéneo (ver figura 4.5a). Si el número de ondas planas a utilizar es bajo, esto no supone una fuerte sobrecarga computacional. No obstante, para bloques grandes los cuales deben ser iluminados con muchas ondas planas, es recomendable utilizar un número de ondas lo más pequeño posible.

Para obtener un reparto más uniforme se fija el número de direcciones en  $\theta$

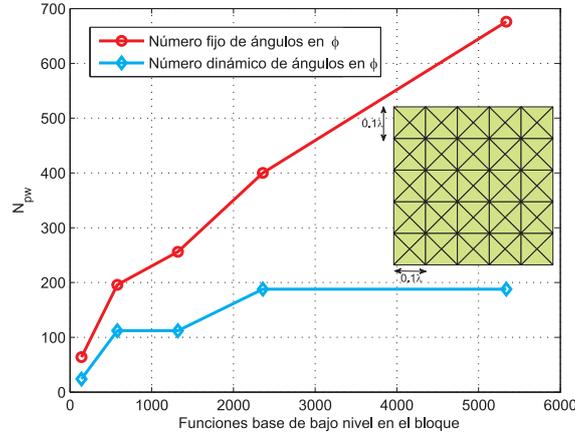


**Figura 4.5:** Distribución de las direcciones en ondas planas: (a) Número fijo de puntos en  $\phi$ ; (b) Distribución con número de puntos en  $\phi$  dinámico.

y para cada una de estas direcciones se calcula de forma dinámica el número de direcciones en  $\phi$  en base a la longitud de dicho paralelo. Las direcciones así obtenidas se encuentran reflejadas en la figura 4.5b.

Con el objetivo de comparar ambos métodos se estudia una placa cuadrada de diversos tamaños, manteniendo en todos los casos un mallado con triángulos de lado entre  $0,07\lambda$  y  $0,1\lambda$ . El problema a resolver consiste en calcular las corrientes inducidas por una onda plana con polarización en  $\theta$  y ángulos de incidencia  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 60^\circ$ . La figura 4.6 recoge el número mínimo de ondas planas que fueron necesarias con ambos sistemas para obtener una precisión de al menos el 1% de error con respecto a la solución del MoM. Los resultados dejan patente como el número de ondas incidentes a considerar es mucho menor en caso de utilizar el segundo de los sistemas presentados. Por estos motivos, se utilizará en general este segundo esquema en aquellos problemas que requieran un elevado número de ondas planas y su tiempo computacional se prevea alto.

En la figura 4.7, se muestra un ejemplo ilustrativo de la dependencia de las ondas planas con el radio de la esfera mínima. Las geometrías bajo consideración son las mismas geometrías recogidas anteriormente en la figura 4.1a. Se calcula el número de ondas planas necesario para generar las CBFs mediante un incremento progresivo del número de ondas planas hasta que el número de éstas que sobrevive a la SVD crece menos que el 1% sobre el número previo de CBFs. Se observa una *dependencia clara con el radio al cuadrado de la esfera mínima* para todos



**Figura 4.6:** Número de ondas planas para alcanzar un error del 1 % al analizar una placa cuadrada.

los ejemplos con la excepción de la placa donde este número parece incrementarse a una tasa más lenta para el rango de tamaños considerado. Además, todos los resultados están por debajo del límite  $N_{pw} = 2 \cdot 2 (kr_0 + 2\pi)^2$  que da una idea que el máximo de ondas planas para “saturar” la SVD se encuentra en ese orden. Este límite puede ser habitualmente relajado dependiendo de la forma del bloque y de si tan solo se necesita calcular el campo lejano. De forma empírica, se ha encontrado que el número apropiado de ondas planas (asumiendo la distribución comentada con número de puntos en  $\phi$  dinámico) para bloques de primer nivel con menos de 6.000 incógnitas es 900 ( $N_\theta = 15$  y  $N_\phi = 30$ ). Para bloques de segundo nivel, encontramos que para tamaños inferiores a las 35.000 incógnitas de bajo nivel, una elección de 3.600 ondas planas ( $N_\theta = 30$  y  $N_\phi = 60$ ) proporciona buenos resultados en campo lejano. Para bloques de mayor tamaño o mayores niveles, puede obtenerse una estimación a partir del tamaño mínimo de la esfera que engloba el bloque.

#### 4.2.4. Cálculo de la matriz reducida multinivel

Puesto que las CBFs multinivel están definidas como combinaciones lineales de las CBFs del nivel inmediatamente inferior, es de esperar que los términos de reacción puedan calcularse también como combinación lineal de los términos de reacción entre niveles inferiores. Además, puesto que se continúa utilizando el método de Galerkin junto con la EFIE, la matriz obtenida es *simétrica*.

Cuando se utiliza la EFIE, el término de reacción entre la CBF  $m$ -ésima del bloque  $\{d\}$  y la CBF  $n$ -ésima del bloque  $\{e\}$ , ambas pertenecientes al nivel  $l$ , es calculado de la forma habitual como:

$$\overline{\overline{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l)}(m, n) = \langle \mathcal{F}_{\{d\},m}, \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\{e\},n}) \rangle, \quad (4.9)$$

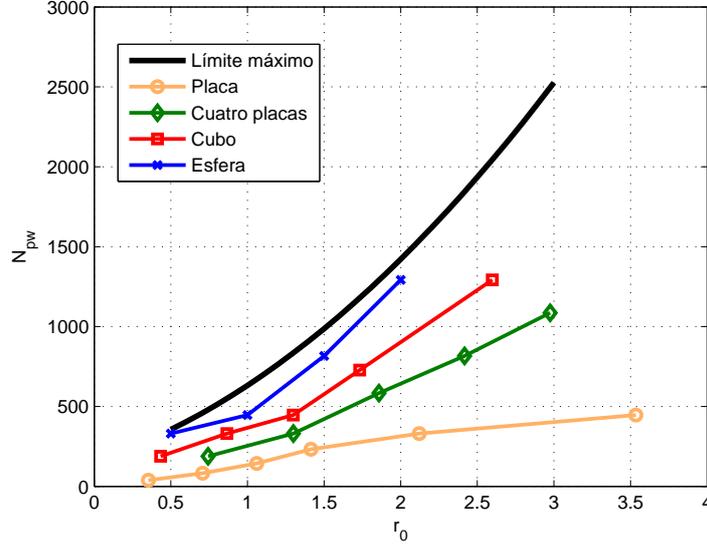


Figura 4.7: Ondas planas necesarias para diversas geometrías.

si introducimos la expansión de CBFs en términos de CBFs del nivel inferior (4.2) en (4.9):

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l)}(m, n) &= \sum_{b=1}^{B_{\{d\}}} \sum_{r=1}^{N_{\{d,b\}}} \sum_{c=1}^{B_{\{e\}}} \sum_{s=1}^{N_{\{e,c\}}} I_{\{d,b\},r}^{(m)} I_{\{e,c\},n}^{(n)} \langle \mathcal{F}_{\{d,b\},r}, \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\{e,c\},s}) \rangle = \\
&= \sum_{b=1}^{B_{\{d\}}} \sum_{r=1}^{N_{\{d,b\}}} \sum_{c=1}^{B_{\{e\}}} \sum_{s=1}^{N_{\{e,c\}}} I_{\{d,b\},r}^{(m)} I_{\{e,c\},n}^{(n)} \overline{\overline{Z}}_{\{d,b\},\{e,c\}}^{(l-1)}(r, s) = \\
&= \begin{bmatrix} I_{\{d,1\},1}^{(m)} & I_{\{d,1\},2}^{(m)} & \cdots & I_{\{d,B_{\{d\}}\},N_{\{d,B_{\{d\}}\}}}^{(m)} \end{bmatrix} \overline{\overline{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l-1)} \begin{bmatrix} I_{\{e,1\},n}^{(n)} \\ I_{\{e,1\},n}^{(n)} \\ \vdots \\ I_{\{e,B_{\{e\}}\},N_{\{e,B_{\{e\}}\}}}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

donde las matrices y vectores mantienen la ordenación utilizada en (4.6), y la matriz  $\overline{\overline{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l-1)}$  contiene las interacciones entre las CBFs de nivel  $l-1$  dentro de los bloques  $\{d\}$  y  $\{e\}$ :

$$\overline{\overline{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l-1)} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Z}}_{\{d,1\},\{e,1\}}^{(l-1)} & \overline{\overline{Z}}_{\{d,1\},\{e,2\}}^{(l-1)} & \cdots & \overline{\overline{Z}}_{\{d,1\},\{e,1\}}^{(l-1)} \\ \overline{\overline{Z}}_{\{d,2\},\{e,1\}}^{(l-1)} & \overline{\overline{Z}}_{\{d,2\},\{e,2\}}^{(l-1)} & \cdots & \overline{\overline{Z}}_{\{d,2\},\{e,B_{\{e\}}\}}^{(l-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\overline{Z}}_{\{d,B_{\{d\}}\},\{e,1\}}^{(l-1)} & \overline{\overline{Z}}_{\{d,1\},\{e,1\}}^{(l-1)} & \cdots & \overline{\overline{Z}}_{\{d,B_{\{d\}}\},\{e,B_{\{e\}}\}}^{(l-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Por tanto, el acoplo entre todas las CBFs del bloque  $\{d\}$  y todas las CBFs del bloque  $\{e\}$  puede ser calculado como un producto entre matrices conteniendo los coeficientes de las CBFs y los términos de reacción entre CBFs del nivel inferior:

$$\bar{\bar{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l)} = \bar{\bar{J}}_{\{d\}}^T \bar{\bar{Z}}_{\{d\},\{e\}}^{(l-1)} \bar{\bar{J}}_{\{e\}}. \quad (4.12)$$

De manera similar a como sucedía en la generación de CBFs multinivel, la formulación nos permite calcular de forma *recursiva* los elementos de la matriz reducida multinivel tomando como caso base la interacción entre funciones base de bajo nivel.

Realizando un desarrollo similar, es posible demostrar que el vector de alimentaciones también puede ser calculado de forma recursiva. De este modo, el vector de alimentaciones del bloque  $\{\text{seq}\}$  perteneciente al nivel  $l$  puede ser calculado en función de los vectores de alimentación correspondientes a los bloques de nivel  $l-1$  dentro del bloque  $\{\text{seq}\}$ :

$$\bar{V}_{\{\text{seq}\}}^{(l)} = \bar{\bar{J}}_{\{\text{seq}\}}^T \begin{bmatrix} \bar{V}_{\{\text{seq},1\}} \\ \bar{V}_{\{\text{seq},2\}} \\ \vdots \\ \bar{V}_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\}} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

#### 4.2.5. Resolución del sistema de ecuaciones

Una vez que se ha calculado la matriz reducida multinivel y el vector (o vectores) de excitación, se obtiene el sistema de ecuaciones clásico:

$$\bar{\bar{Z}}^{(L)} \bar{I}^{(L)} = \bar{V}^{(L)}, \quad (4.14)$$

siendo  $L$  el número de niveles utilizado. La matriz reducida multinivel contiene las interacciones entre CBFs ordenadas por número de bloque:

$$\bar{\bar{Z}}^{(L)} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{Z}}_{\{1\},\{1\}}^{(L)} & \bar{\bar{Z}}_{\{1\},\{2\}}^{(L)} & \cdots & \bar{\bar{Z}}_{\{1\},\{B\}}^{(L)} \\ \bar{\bar{Z}}_{\{2\},\{1\}}^{(L)} & \bar{\bar{Z}}_{\{2\},\{2\}}^{(L)} & \cdots & \bar{\bar{Z}}_{\{2\},\{B\}}^{(L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\bar{Z}}_{\{B\},\{1\}}^{(L)} & \bar{\bar{Z}}_{\{B\},\{2\}}^{(L)} & \cdots & \bar{\bar{Z}}_{\{B\},\{B\}}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

y los vectores de incógnitas y alimentaciones contienen los coeficientes ordenados por bloque de alto nivel:

$$\bar{I}^{(L)} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{\{1\}}^{(L)} \\ \bar{I}_{\{2\}}^{(L)} \\ \vdots \\ \bar{I}_{\{B\}}^{(L)} \end{bmatrix} \quad \bar{V}^{(L)} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{\{1\}}^{(L)} \\ \bar{V}_{\{2\}}^{(L)} \\ \vdots \\ \bar{V}_{\{B\}}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Si la compresión alcanzada por el ML-CBFM es suficiente para almacenar la matriz del sistema de ecuaciones en la memoria disponible, entonces el sistema de ecuaciones es resuelto, al igual que en el CBFM convencional, de forma directa utilizando la factorización que se considere oportuna (p. ej.: factorización LU).

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones es posible expandir la corriente en término de las CBFs de niveles más bajo mediante la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{\{\text{seq},1\}}^{(l-1)} \\ \bar{I}_{\{\text{seq},2\}}^{(l-1)} \\ \vdots \\ \bar{I}_{\{\text{seq},B_{\{\text{seq}\}}\}}^{(l-1)} \end{bmatrix} = \bar{\bar{J}}_{\{\text{seq}\}} \bar{I}_{\{\text{seq}\}}^{(l)}, \quad (4.17)$$

esta formulación puede ser aplicada para todos los bloques y repetida hasta alcanzar el nivel inferior obteniendo la expansión de las corrientes en término de funciones base de bajo nivel.

#### 4.2.6. Resultados

El rendimiento del esquema multinivel será discutido en esta sección. En todos los ejemplos, a menos que se especifique lo contrario, se han utilizado funciones RWG como funciones base de bajo nivel. La implementación de los códigos numéricos ha sido llevada a cabo utilizando Matlab excepto para el cálculo de las interacciones de bajo nivel entre bloques, la cual ha sido implementada en Fortran.

Los tiempos aquí mostrados son los obtenidos al ejecutar los códigos numéricos en la máquina de memoria compartida denominada *Simlin01*. No obstante, los resultados mostrados en esta sección hacen uso de una implementación secuencial del algoritmo por lo que tan sólo uno de los núcleos de los procesadores fue utilizado. Más adelante, en la sección 4.3, se discutirá la implementación en paralelo del ML-CBFM.

El primero de los ejemplos que se muestra tiene como objetivo evaluar el impacto de la compresión sobre la precisión en las corrientes. En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo de la RCS monoestática para múltiples ángulos incidentes con el objetivo de evaluar las capacidades del método en una geometría canónica; también se incluye una discusión con respecto al mejor tipo de extensión para bloques de niveles altos. Finalmente, se analiza una geometría de tipo-avión para analizar el comportamiento del algoritmo en estructuras más realistas.

En todos los casos aquí analizados, se busca mantener un número de incógnitas manejable dentro de cada bloque para facilitar el proceso de generación de CBFs.

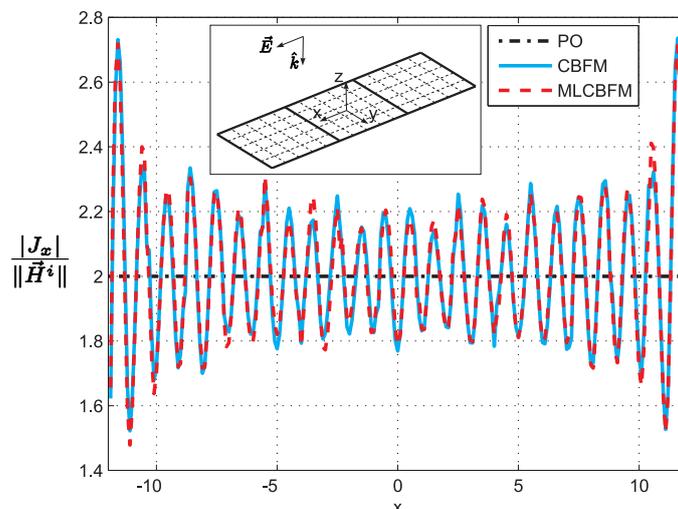
Por estos motivos, se utilizan bloques de primer nivel que agrupen unos pocos miles de incógnitas. Al agrupar estos bloques en bloques de segundo nivel, se busca nuevamente que el número de incógnitas (CBFs de primer nivel) se mantengan también del orden de unos pocos miles. Manteniendo estas reglas, se obtiene que el número de bloques de segundo nivel es relativamente bajo (entre 5 y 30 para el rango de problemas que se analizarán en esta tesis). Esta configuración da lugar a un número de incógnitas finales (CBFs de segundo nivel) que se mantiene en los límites aceptables para los sistemas computacionales actuales. Debido a este escaso número de bloques de segundo nivel, no resulta atractivo utilizar un tercer nivel pues tan solo se pueden agrupar unos pocos bloques de segundo nivel y no se espera una gran mejora en la compresión alcanzada. Por este motivo, los ejemplos aquí utilizados hacen uso de un esquema de sólo *dos niveles*.

#### 4.2.6.1. Precisión de la solución

La compresión obtenida por el CBFM tiene un impacto en la precisión de la corriente obtenida. Sin embargo, la precisión de la solución ha sido probada por medio de la aplicación al análisis de antenas donde el cálculo de la impedancia de entrada (la cual depende de forma directa de la corriente) juega un papel clave [Pra03; Yeo03; Kwo03]. Algunas comparaciones de la precisión en términos de corrientes pueden encontrarse también en [Mit08]. Como se ha mencionado anteriormente, en este capítulo nos centraremos en el cálculo de las CBFs enfocadas a problemas de dispersión. Es bien conocido que aunque los resultados obtenidos para el campo lejano sean precisos esto no implica que los resultados en corriente sí lo sean. Sin embargo, es siempre deseable comprobar que la solución en términos de corrientes es consistente con aquella obtenida por un método de referencia. En este caso, se llevará a cabo una comparación entre la solución obtenida por el CBFM (referencia) y la solución obtenida por el ML-CBFM de dos niveles.

Se considera una placa de dimensiones  $24\lambda \times 8\lambda$ . La geometría es dividida en 75 bloques cuadrados de primer nivel y 3 bloques de segundo nivel también de forma cuadrada (ver figura 4.8). Se generan las CBFs para el CBFM convencional utilizando 400 ondas planas ( $N_\theta = 10, N_\phi = 20$ ). Para el caso del ML-CBFM, se emplean 3.600 ondas planas ( $N_\theta = 30, N_\phi = 60$ ) debido al mayor tamaño de estos bloques. Los umbrales de la descomposición SVD se fijaron en  $10^{-3}$  y  $10^{-5}$  para el primer y segundo nivel, respectivamente. El umbral de la ACA se fijó en  $10^{-3}$ . Durante el cálculo de las CBFs de segundo nivel, los bloques de segundo nivel fueron extendidos con los bloques de primer nivel adyacentes. Esta elección de parámetros resulta en 5.980 CBFs de primer nivel y en 2.803 CBFs de segundo nivel.

La figura 4.8 recoge las muestras de la corriente a lo largo de la línea  $y = 0$  como consecuencia de iluminar la estructura con una onda plana con polariza-



**Figura 4.8:** Corrientes inducidas al iluminar una placa de tamaño  $24\lambda \times 8\lambda$  con incidencia normal y polarización en  $x$ .

ción  $x$ . Las corrientes de óptica física también son mostradas en dicha figura para tener un valor de comparación adicional. Se puede observar que las corrientes obtenidas por el ML-CBFM mantienen una buena concordancia con las obtenidas por el CBFM, además, dicho valor oscila entorno al valor que se obtendría utilizando óptica física. La diferencia total obtenida para toda la placa, medida como  $\|\bar{I}^{CBFM} - \bar{I}^{ML}\|_2 / \|\bar{I}^{CBFM}\|_2$ , siendo  $\bar{I}^{ML}$  y  $\bar{I}^{CBFM}$  los vectores de corrientes (con las incógnitas de bajo nivel) obtenidos con el ML-CBFM y el CBFM, es del 11 %, el cual puede considerarse válido para un amplio abanico de aplicaciones, especialmente si solo se está interesado en el campo lejano.

#### 4.2.6.2. RCS monoestática de un cubo de lado $12\lambda$

Con el objetivo de comparar el rendimiento del método multinivel frente al CBFM convencional en problemas lo suficientemente grandes, se considera un cubo de lado  $12\lambda$ , el cual involucra 259.200 incógnitas. Se utiliza como frecuencia de análisis 300 MHz.

Los bloques de primer nivel consisten de superficies de tamaño  $1\lambda \times 1\lambda$  excepto en la esquinas donde cada bloque agrupa las tres regiones adyacentes de tamaño  $1\lambda \times 1\lambda$  y en los lados del cubo donde cada bloque agrupa las dos regiones de  $1\lambda \times 1\lambda$  a cada lado. Este tipo de descomposición resulta en 848 bloques de primer nivel. Para crear los bloques de segundo nivel, se fragmenta el cubo en ocho bloques simétricos y, por tanto, cada bloque de segundo nivel contiene 106 bloques de primer nivel. La figura 4.9 contiene la descomposición en bloques para ambos niveles.

Los bloques de primer nivel son iluminados utilizando 400 ondas planas ( $N_\theta = 10$ ,  $N_\phi = 20$ ) mientras que se emplean 3.600 ondas planas para los bloques de segundo nivel. Los umbrales de la SVD para ambos niveles así como el umbral de la ACA se fijaron en  $10^{-3}$ .

Para el caso del CBFM de un solo nivel, la extensión de los bloques es llevada a cabo siempre por medio de funciones base de bajo nivel. En el caso del ML-CBFM, los bloques de cualquier nivel pueden ser extendidos con funciones base de bajo nivel con un coste computacional bajo, puesto que dichas extensiones son relativamente pequeñas. Además, existe la posibilidad de extender los bloques de niveles superiores con los bloques adyacentes del nivel correspondiente. Por ejemplo, durante la generación de CBFs de segundo nivel para un cierto bloque, dicho bloque puede ser extendido con los bloques de primer nivel en contacto con él. Puesto que no es directo saber si ésta es la mejor elección para bloques de segundo nivel o incluso de niveles superiores, en este análisis se considera una extensión tanto con RWGs como con CBFs de primer nivel para los bloques de segundo nivel. En el caso de extensión con RWG, la longitud utilizada es de aproximadamente  $0,1\lambda$ .

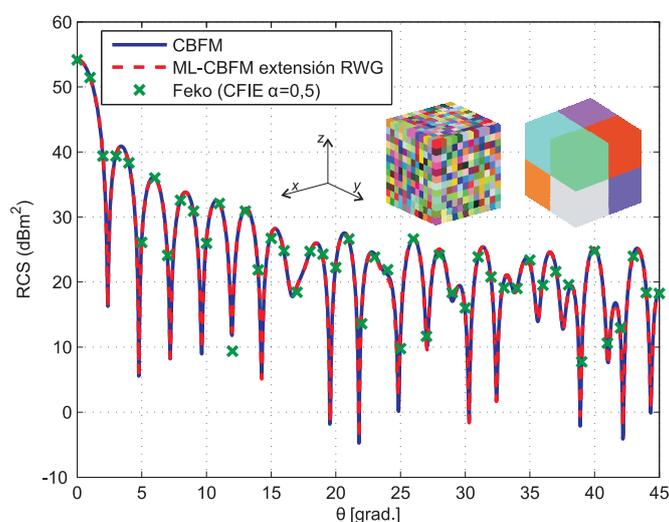
Las ventajas de la extensión con CBFs es el mayor área de dicha extensión (comparada con una extensión de  $0,1\lambda$  con RWG) lo cual a priori da lugar a un incremento en la precisión. No obstante, la extensión con bloques de primer nivel implica la generación de las CBFs en torno al bloque lo cual implica un mayor coste debido a las operaciones extras (SVD, resolución del sistema de ecuaciones, etc.).

La tabla 4.1 presenta los tiempos computacionales para las diferentes etapas del algoritmo utilizando los procedimientos y parámetros anteriormente mencionados. Se observa como la versión multinivel supera a la versión de un solo nivel tanto en reducción de número de incógnitas como en tiempo computacional. Esta reducción de coste computacional es principalmente debida al gran tiempo que se emplea en la resolución del sistema de ecuaciones en el caso del CBFM. Además, entre los dos tipos de extensiones utilizadas para bloques de segundo nivel (RWG o CBFs de primer nivel), la extensión con RWGs es más rápida sin sacrificio de precisión por lo que este será el tipo de extensión que se utilizará para los ejemplos futuros.

La figura 4.9 muestra el resultado para el corte  $\phi = 0^\circ$ . En aras de una mayor claridad, solamente se incluyen los resultados obtenidos con la extensión con funciones base RWG. Sin embargo, el mismo grado de precisión ha sido observado para el caso de extensión con CBFs de primer nivel. También se incluyen los resultados obtenidos mediante el programa comercial Feko [EM 08] el cual está basado en el MLFMA. El software comercial se configuró para resolver una CFIE con el mismo peso para la EFIE y MFIE. Las incógnitas finales con el ML-CBFM están por debajo de 10.000, independientemente del tipo de extensión. Por contra, la aplicación del CBFM resulta en 42.000 incógnitas dejando claro que la versión multinivel supera a la versión de un solo nivel en consumo de memoria.

**Tabla 4.1:** Tiempos de computación para el análisis multinivel de un cubo de lado  $12\lambda$ .

	CBFM	ML-CBFM Ext. CBF	ML-CBFM Ext. RWG
Generación CBFs	5.760s	48.636s	39.960s
Cómputo matriz reducida	28.944s	26.064s	27.180s
Tiempo de resolución	51.588s	972s	1.152s
Tiempo total	86.292s	75.672s	68.292s
Número de incógnitas	42.713	9.412	9.884

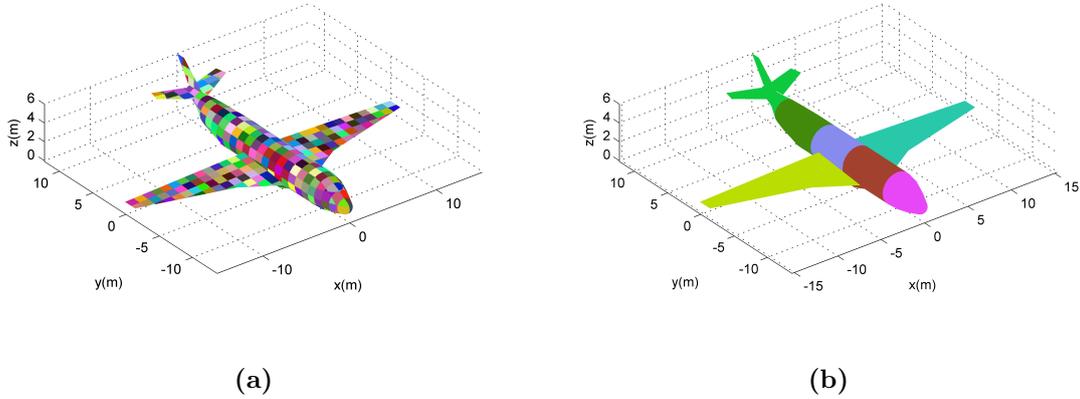
**Figura 4.9:** RCS monoestática  $\theta - \theta$  de un cubo de  $12\lambda$  de lado.

El número medio de incógnitas durante el cálculo de las CBFs de segundo nivel es 5.339 en el bloque interno más 2.100 incógnitas en el caso de la extensión de CBF ó 1.803 en el caso de extensión con RWG. Esto confirma el hecho de que el uso más alto de consumo de memoria es debido al almacenamiento de la matriz reducida multinivel y no durante el cálculo de las CBFs.

#### 4.2.6.3. RCS monoestática de un avión

En esta sección se presentan los resultados para el cálculo de la RCS de una geometría similar a la de un avión con el objetivo de mostrar el comportamiento del método para cuerpos complejos. El modelo de avión tiene una envergadura de 30 m y una longitud de 26 m. La frecuencia de trabajo se ha fijado en 300 MHz requiriendo 175.000 incógnitas para la expansión de las corrientes.

La descomposición en bloques para los dos niveles utilizados se muestra en la figura 4.10. El número total de bloques de primer nivel conteniendo funciones base



**Figura 4.10:** Descomposición en bloques para la geometría de tipo avión.

de bajo nivel es 445. Para el segundo nivel, se utilizan siete bloques: uno para cada ala y los cinco restantes para el fuselaje (ver figura 4.10b).

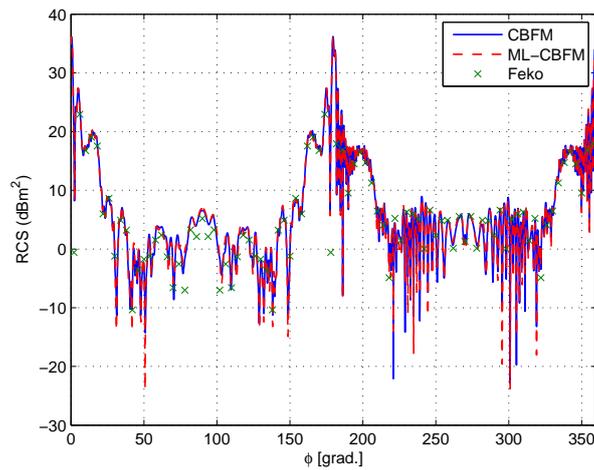
Para la generación de las CBFs se utiliza la misma configuración que en el ejemplo anterior. Para obtener una buena resolución en el rango angular, el número de ondas planas incidentes se fija en 2.000. En este ejemplo, se disminuye el umbral de la SVD para el segundo nivel hasta  $10^{-4}$  para tener una precisión mejorada.

Los tiempos de CPU así como el número final de incógnitas en la matriz reducida se encuentran recogidos en la tabla 4.2. Todos los tiempos son referidos (al igual que en los ejemplos previos) al resultado obtenido para calcular todas las iluminaciones consideradas. La versión multinivel retiene una buena tasa de compresión, mientras el uso de máximo de memoria en el análisis es debido a analizar una de las piezas en el tronco del fuselaje. El número de incógnitas en dicho caso es 5.167 CBFs en el bloque interior más 1.190 RWG en la región exterior. Los tiempos de CPU en ambos métodos están muy cercanos el uno al otro debido a que en este ejemplo el número de incógnitas es relativamente pequeño. Como hemos visto en el ejemplo anterior, la ventaja de tiempo para el ML-CBFM mejora para problemas grandes, los cuales emplean mucho tiempo en resolver la matriz reducida.

La figura 4.11 compara los resultados del CBFM convencional y el método multinivel propuesto. La RCS monoestática para polarización vertical muestra un ajuste excelente mientras el uso de memoria se mantiene más bajo que en el ML-CBFM. También se muestran los resultados obtenidos con el programa comercial Feko (MLFMA). No obstante, estos resultados deben ser interpretados con cautela ya que debido a la geometría del problema se obtuvo una convergencia lenta a pesar del uso de un preconditionador. El MLFMA se detuvo tras 500 iteraciones con un error residual ligeramente superior a  $10^{-2}$ .

**Tabla 4.2:** Tiempos de computación para el análisis multinivel de una geometría tipo avión.

	MoM	CBFM	ML-CBFM Ext. RWG
Generación CBFs	-	3.800s	19.275s
Cómputo matriz reducida	-	7.872s	6.971s
Tiempo de resolución	-	14.671s	360s
Tiempo total	-	26.343s	26.606s
Número de incógnitas	175.148	25.601	6.236

**Figura 4.11:** RCS monoestática V-V de el modelo de avión.

## 4.3 Paralelización del método multinivel

---

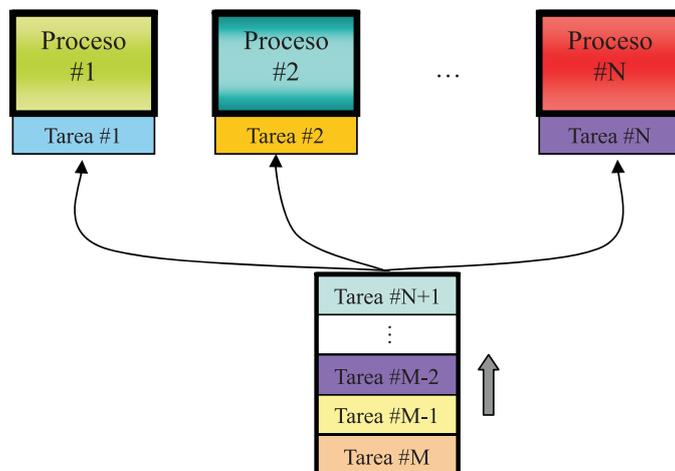
Históricamente, solo los ordenadores de alto rendimiento han tenido capacidades multiprocesador. No obstante, esta situación ha cambiado y los ordenadores con multiprocesador son un hecho común hoy en día incluso en ordenadores de escritorio. Esto motiva la paralelización de algoritmos los cuales son muy intensivos en CPU. Es más, si el algoritmo es intensivo en memoria, es también de gran utilidad llevar a cabo una implementación distribuida, donde los datos son divididos entre los nodos de computación del sistema (p. ej.: un cluster computacional).

Como se ha visto, el ML-CBFM involucra tres etapas consecutivas: (i) generación de las funciones base de alto nivel; (ii) cálculo de la matriz; y, (iii) factorización de la matriz. Cada etapa es llevada a cabo de forma completamente independiente y, por tanto, su estrategia de implementación en paralelo debe ser diferente. Los algoritmos para la última etapa son de uso común y se encuentran implementados por paquetes de rutinas tan populares como ScaLAPACK[Bla97]. Por tanto, tan solo se mostrará la implementación en paralelo de las dos primeras etapas del algoritmo, siguiendo una estrategia similar a la utilizada en [Luc08] para la versión de un solo nivel.

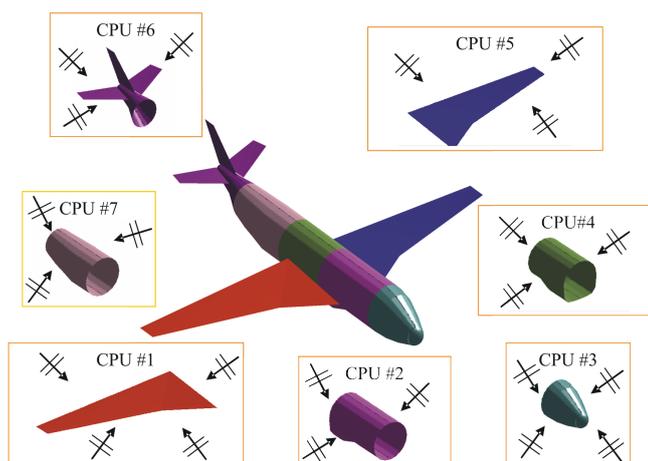
### 4.3.1. Paralelización de la generación de funciones base características multinivel

Durante la generación de las funciones base características del nivel más alto, cada bloque es iluminado con varias ondas planas y las corrientes inducidas son consideradas como funciones base (previamente filtradas con una descomposición en valores singulares). Por tanto, la generación de las CBFs del nivel más alto es completamente independiente para cada bloque. Esto motiva el uso de una *descomposición funcional* en lugar de una estrategia de descomposición en dominios computacionales, la cual es común en la paralelización de muchos códigos numéricos (especialmente cuando se hace uso del paradigma del Message -Passing Interface MPI[MPI]).

En esta estrategia, se crea una cola de tareas de tipo “primero en entrar primero en salir” (First-in-First-out, FIFO). Estas tareas pasan de la cola a uno de los procesos cada vez que uno de ellos queda libre debido a la finalización del procesamiento de la tarea previamente asignada a él (ver figura 4.12). En este caso, cada tarea consiste en el cálculo de las CBFs para un bloque dado de alto nivel (ver figura 4.13). De este modo, sólo es necesario transferir los datos correspondientes a la geometría del bloque al comienzo del proceso de comunicación. Los datos finales, conteniendo los coeficientes para las CBFs de más alto nivel y para las CBFs de



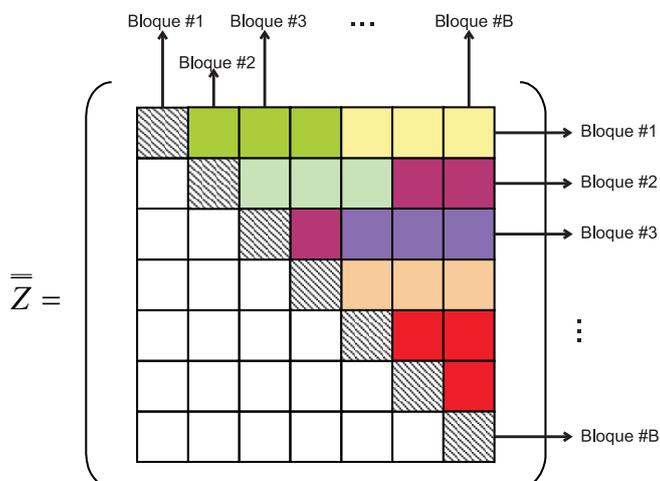
**Figura 4.12:** Cola de  $M$  tareas en la estrategia de descomposición funcional para un sistema ejecutando  $N$  procesos.



**Figura 4.13:** Distribución de la geometría en procesos para la generación de las CBFs.

niveles inferiores, son comunicados al final del procesado de la tarea y almacenados para la siguiente etapa.

La ventaja de esta estrategia es la computación totalmente independiente para cada proceso, minimizando con ello el impacto de las comunicaciones. Por contra, la principal desventaja de este esquema es que el número de bloques del nivel más alto para problemas de tamaño moderado es pequeño y, por tanto, podría resultar en menos bloques que CPUs, lo cual mantendría algunas de ellas sin carga. Aunque no ha sido implementado en esta tesis, una posible forma de solventar este problema sería mover total o parcialmente la paralelización al nivel inferior.



**Figura 4.14:** Creación de tareas para el cálculo en paralelo de la matriz reducida multinivel.

### 4.3.2. Paralelización del cálculo de términos de reacción

Para la segunda etapa del algoritmo, la cual involucra la generación de la matriz reducida multinivel, se sigue también una descomposición funcional donde las tareas son creadas en función de la fragmentación en bloques del nivel más alto. En este caso, cada tarea consiste en el cálculo de todos los términos de reacción entre las CBFs de dos bloques del nivel más alto.

Hay varios hechos importantes a tener en cuenta para mejorar la eficiencia computacional en esta etapa. Primero, puesto que se emplea la EFIE junto con el método de Galerkin, la matriz resultante es simétrica y, de este modo, solamente el triángulo superior (o inferior) de la matriz necesita ser computado. Segundo, los bloques pertenecientes a la diagonal tienen que ser calculados durante el proceso de generación de las CBFs, por tanto, estos bloques pueden ser almacenados para evitar su recálculo. La explotación conjunta de estos dos hechos reduce el número de tareas a menos de la mitad. Una vez que los bloques de la matriz de impedancias han sido calculados, estos son almacenados en el disco duro para ser cargados cuando se necesiten en la próxima etapa, cuando serán leídos y reordenados en el formato cíclico de ScaLAPACK de cara a factorizar la matriz.

Un ejemplo de paralelización del cálculo de la matriz de interacciones se muestra en la figura 4.14 donde se tiene un ejemplo con siete procesadores para analizar una estructura que ha sido a su vez fragmentada en 7 bloques. Por tanto, el número de tareas para esta etapa es 21, si se asume que todas las tareas requieren exactamente el mismo tiempo de procesamiento, al final del cómputo de la matriz, cada proceso habrá realizado tres de estas tareas.

### 4.3.3. Rendimiento de la implementación en paralelo

En esta sección se examinará la mejora de rendimiento en función del número de procesos obtenida al utilizar las estrategias de cálculo en paralelo descritas anteriormente. Con este objetivo en mente, se utilizará la métrica tradicional de *speed-up* para  $P$  procesos,  $S_P$ , definida como el tiempo de ejecución del programa usando un proceso,  $T_1$ , dividido por el tiempo de ejecución usando  $P$  procesos,  $T_P$ :

$$S_P = \frac{T_1}{T_P}. \quad (4.18)$$

Otra métrica importante que proporciona una inspección intuitiva del rendimiento en paralelo es la *eficiencia* definida como:

$$E = \frac{S_P}{P}. \quad (4.19)$$

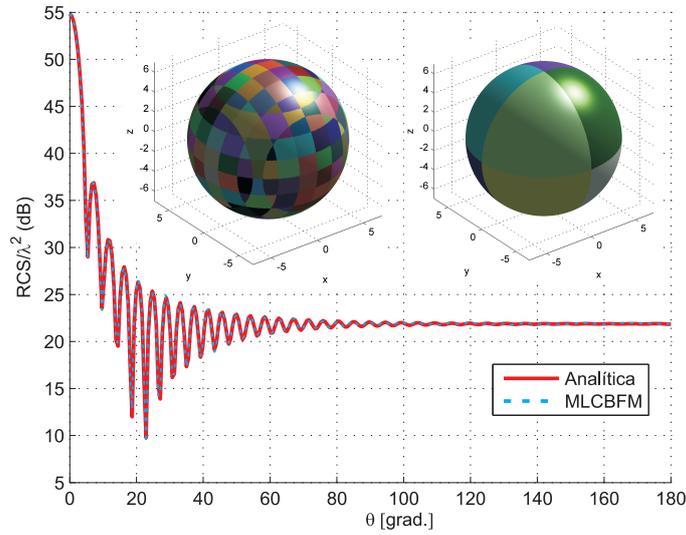
Se ilustrará la mejora de rendimiento para un ejemplo relativamente pequeño donde el número de bloques de segundo nivel está cercano al número de CPUs. Para ello, se calcula la RCS de una esfera de radio  $7\lambda$  y se comparan los resultados con aquellos obtenidos con la solución analítica. Una discretización del problema usando funciones RWG resulta en un total de 213.738 incógnitas de bajo nivel. La geometría es descompuesta en 8 bloques de nivel dos y en 272 bloques de primer nivel. Dichos bloques son iluminados con 3.600 ( $N_\theta = 30$ ,  $N_\phi = 60$ ) y 400 ondas planas, respectivamente. El umbral para las SVD de primer y segundo nivel fue fijado en  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$ , mientras que el umbral de la descomposición ACA se estableció en  $10^{-3}$ .

Después de aplicar el esquema de dos niveles, el problema es reducido a 9.288 incógnitas. La figura 4.15 muestra como los resultados así obtenidos mantienen una buena precisión en el campo lejano.

Los resultados de speed-up, eficiencia y tiempos se muestran en la figura 4.16 para 1, 2, 4 y 8 procesadores. Las simulaciones fueron ejecutadas en el equipo denominado *Simlin01*. La etapa que muestra un mejor rendimiento, es la generación de las CBFs, mientras que la peor es la resolución del sistema de ecuaciones. No obstante, es importante remarcar que la parte que más tiempo consume (generación de CBFs), es la que mejor speed-up posee, dando lugar a una eficiencia global del 88 % cuando se usan ocho procesadores.

### 4.3.4. Resultados

En esta sección se muestra el análisis de dos problemas eléctricamente grandes haciendo uso de la versión paralelizada del ML-CBFM. Todos los tiempos aquí



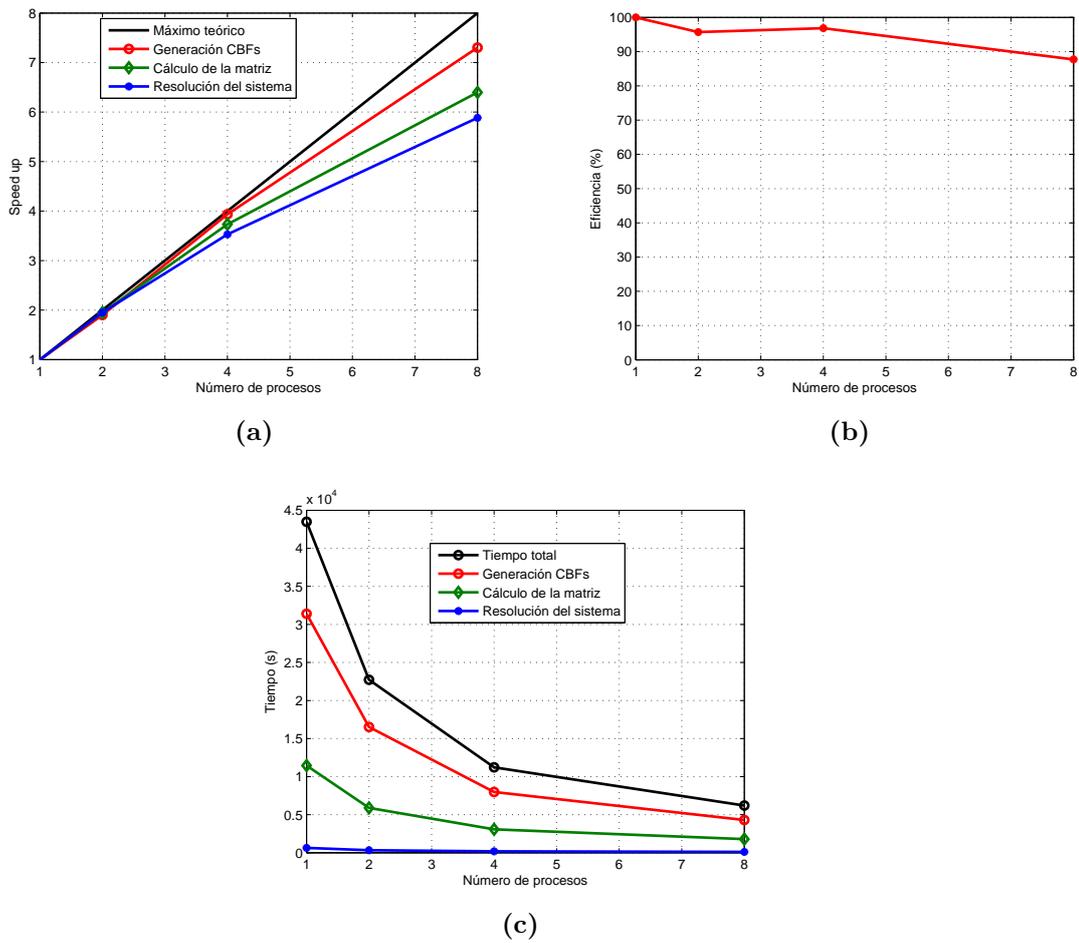
**Figura 4.15:** RCS biestática normalizada en el plano  $E$  de una esfera de radio  $7\lambda$ . Las imágenes en el interior representan la descomposición en bloques de segundo y primer nivel.

mostrados se corresponden a los obtenidos al analizar los ejemplos en el equipo *Simlin01*.

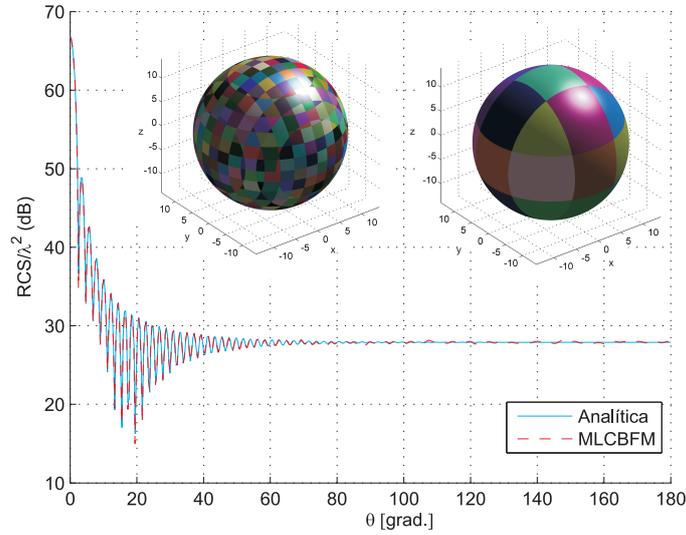
De cara a analizar ambos ejemplos se utilizará como ha sido habitual una estrategia de dos niveles con umbrales de  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$  para la SVD del primer y segundo nivel, respectivamente. La extensión de los bloques es llevada a cabo con funciones base RWG para todos los niveles. De cara a iluminar los bloques se utilizará el segundo de los métodos descritos para obtener un equiespaciado más uniforme de las ondas planas. El umbral de la ACA se fija en  $10^{-3}$  salvo que se especifique lo contrario.

El primero de los ejemplos considerados es una esfera de radio  $14\lambda$  involucrando 854.209 incógnitas. Esta esfera es dividida en 632 bloques de primer nivel y en 26 de segundo nivel. Se utilizaron 2.800 ondas planas para iluminar los bloques ( $N_\theta = 35$ ). El número de incógnitas se reduce a 32.555 tras el uso de los dos niveles. La figura 4.17 muestra la RCS biestática normalizada en el plano  $E$  con una buena concordancia con los resultados teóricos. Este problema fue resuelto utilizando 8 procesadores y se emplearon 36.544 s para el cómputo de las CBFs y 22.174s para el cálculo de la matriz reducida. La solución al sistema de ecuaciones es el paso más rápido requiriendo tan solo 3.879 s.

En el segundo ejemplo, se considera un cubo de lado  $23,6\lambda$ . El número de incógnitas RWG para expandir las corrientes es 1.025.028. Puesto que este ejemplo requiere un número de incógnitas ligeramente mayor que el anterior, se ha optado aquí por utilizar un mayor tamaño de los bloques de primer y segundo nivel para



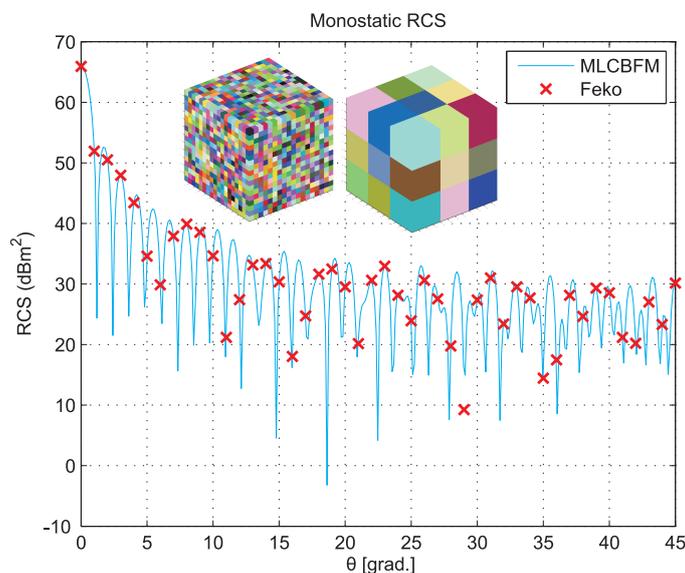
**Figura 4.16:** Resultados de rendimiento para una esfera de radio  $7\lambda$ : (a) speed up; (b) eficiencia; (c) tiempos.



**Figura 4.17:** RCS biestática normalizada en el plano  $E$  de una esfera de radio  $14\lambda$ . Las imágenes en el interior representan la descomposición en bloques de primer y segundo nivel.

alcanzar tasas de compresión que permitan mantener un número de incógnitas manejable para la máquina donde se desarrolla el análisis. Por este motivo, el número de ondas planas es incrementado hasta 3.568 ( $N_\theta = 40$ ). El número de bloques de primer nivel es 1.657 y son agrupados para formar 26 bloques de segundo nivel. Después de definir las CBFs de alto nivel sobre los bloques de segundo nivel, el número de incógnitas es de 39.123. En este ejemplo se emplearon 14 procesadores para resolver el problema consumiendo 34.434 s para computar las CBFs y 16.528 para rellenar la matriz. El sistema de ecuaciones fue nuevamente la fase más rápida y fue resuelta en 5.200 s.

El problema anterior fue analizado para 760 ángulos de incidencia distintos con el objetivo de calcular la RCS monoestática en el corte  $\phi = 0^\circ$ . Dicha RCS es mostrado en la figura 4.18 junto con los resultados obtenidos con el software comercial Feko. Dicho software fue configurado para resolver una CFIE con un peso del 80% para la EFIE y un 20% para MFIE. Debido a la simetría, solo se muestran los resultados en el rango de  $\theta = 0^\circ$  a  $\theta = 45^\circ$ . Los resultados de ambos métodos mantienen nuevamente una muy buena concordancia.



**Figura 4.18:** RCS monoestática  $\theta - \theta$  de un cubo de tamaño  $23,6\lambda$  a 300 MHz (corte  $\phi = 0^\circ$ ). Las imágenes en el interior representan la descomposición en bloques de primer y segundo nivel.

## 4.4 Aplicación a la síntesis de agrupaciones de antenas en entornos complejos

La síntesis de agrupaciones de antenas es un problema de gran interés debido a la capacidad de estas estructuras para crear una gran diversidad de diagramas de radiación acordes a unos determinados requisitos. El proceso de síntesis de estas agrupaciones consiste en la elección adecuada de las alimentaciones para cada uno de los elementos, de modo que el diagrama global tenga las características deseadas. Este proceso ha sido tradicionalmente llevado a cabo mediante múltiples aproximaciones. La más común consiste en despreciar el acoplo entre elementos de la agrupación y, por tanto, tratar de optimizar el factor de array (p. ej.: [Are99]).

Algunos autores han dado un paso más allá e incorporado métodos de onda completa en el proceso de síntesis [Lan97]. En esta línea, se pueden encontrar varios trabajos recientes como la incorporación de redes neuronales [Aye07b] o máquinas de vectores soporte [Aye07a] para obtener un modelo realista del problema a partir de simulaciones de onda completa o incluso datos medidos. No obstante, estas técnicas dependen de las limitaciones de los métodos en los cuales están basados, o en la disponibilidad de grandes conjuntos de datos medidos.

En esta sección, veremos como la caracterización eficiente de este tipo de antenas puede ser llevada a cabo explotando la linealidad de las ecuaciones de Maxwell. Esta

propiedad nos permite caracterizar la *agrupación junto con su entorno* mediante una matriz de dimensiones muy reducidas. Esta matriz, la cual puede ser incluida fácilmente en muchas rutinas de optimización, es calculada resolviendo la estructura para excitaciones. Se verá como por estos motivos, el uso de esquemas iterativos es desaconsejado por lo que una técnica de resolución directa como el ML-CBFM se convierte en la mejor opción.

#### 4.4.1. Caracterización de la agrupación y su entorno

La mayoría de los métodos anteriormente expuestos para la síntesis de agrupaciones de antenas, si no todos, están basados en la minimización de una función de coste. Esta función típicamente requiere la evaluación del campo radiado en función de la combinación de voltajes  $\bar{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]$  que se aplican sobre cada uno de los  $N$  elementos de la agrupación. Por ejemplo, la siguiente función de coste es minimizada en [Aye07a]:

$$F(\bar{v}) = \|\bar{E}_{\text{target}} - \bar{E}(\bar{v})\|_2 + \alpha \|\bar{v}\|_2^2, \quad (4.20)$$

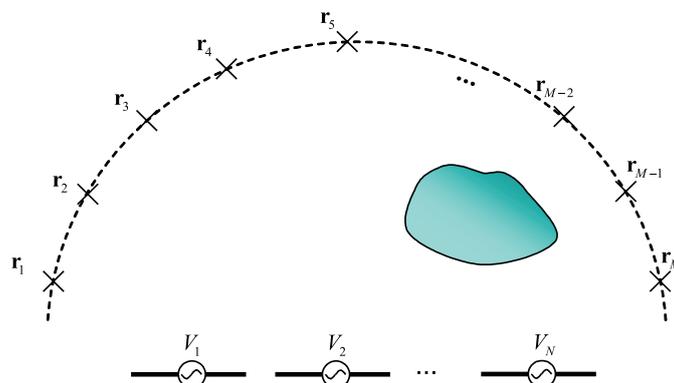
donde  $\bar{E}(\bar{v})$  es la función previamente mencionada que relaciona las muestras de campo para varias componentes (p. ej.: la componente  $x$  o la componente  $\phi$  del campo) con las tensiones aplicadas sobre cada elemento de la agrupación;  $\bar{E}_{\text{target}}$  es el valor objetivo para las muestras de campo antes mencionadas; y el parámetro  $\alpha$  controla el peso de cada uno de los dos términos en (4.20). Por tanto, es especialmente conveniente la rápida evaluación de la función  $\bar{E}(\bar{v})$  pues típicamente será ejecutada muchas veces durante el proceso de síntesis.

La linealidad de las ecuaciones de Maxwell garantiza la existencia de una única matriz que relaciona el vector de excitaciones,  $\bar{v}$ , con un cierto conjunto de muestras de campo. Considérese, sin pérdida de generalidad, la componente  $\theta$  del campo eléctrico en un cierto conjunto de puntos en el espacio  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M$  (ver figura 4.19), tenemos que, por tanto, su relación con las tensiones aplicadas puede ser expresada como:

$$\begin{pmatrix} E_\theta(\mathbf{r}_1) \\ E_\theta(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ E_\theta(\mathbf{r}_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M1} & G_{M2} & \cdots & G_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) puede ser expresada de forma compacta mediante el uso de la siguiente ecuación matricial:

$$\bar{E} = \bar{G}\bar{v}. \quad (4.22)$$



**Figura 4.19:** Agrupación de elementos desfasados en un entorno con un obstáculo y cálculo de varios puntos de muestreo del campo.

La matriz  $\overline{\overline{G}}$  puede ser calculada con la ayuda del *principio de superposición*. De este modo, la columna  $i$ -ésima se calcula alimentando con una fuente unitaria la fuente  $i$ -ésima y fijando el resto a cero. Las muestras de campo obtenidas para la componente  $\theta$  en los puntos de muestreo formarán la columna  $i$ -ésima de la matriz.

Puesto que el proceso previo debe ser repetido para cada elemento de la agrupación, se necesita manejar múltiples excitaciones en la ecuación matricial del método de los momentos. Por este motivo, si la estructura contiene muchos elementos y el entorno es eléctricamente grande, los esquemas de aceleración basados en un proceso iterativo (p. ej.: FMM o AIM) no son apropiados para esta tarea ya que deben repetir el proceso iterativo completo para cada tipo de alimentación utilizada.

#### 4.4.2. Aplicación del ML-CBFM a problemas de radiación

Hasta ahora nos hemos centrado en la aplicación del CBFM y su versión multinivel en problemas de dispersión de forma similar a como ocurre en [Luc08; Del08]. Sin embargo, la síntesis de antenas es un *problema de radiación* y conlleva una serie de pequeñas modificaciones en la generación de las funciones base características.

Tal y como se matizó en el capítulo 3 (página 55), la corriente final en un determinado bloque será combinación lineal de la corriente debida a la radiación del resto de bloques más la corriente debida al campo impreso. La iluminación por ondas planas nos permitía, con las limitaciones vistas anteriormente, modelar cualquier campo exterior al bloque. De este modo, si el problema a analizar es un problema debido a un campo externo incidente (típicamente una onda plana), la expansión en ondas planas modela de forma simultánea la radiación debida a otros bloques y al campo impreso. Sin embargo en un problema de radiación, algunos bloques pueden tener un campo impreso interno y, por ello, se deben considerar

también las corrientes inducidas por dicha fuente interna (p. ej.: un delta-gap o un anillo de corrientes magnéticas [Tsa72a]).

De este modo, si se considera el bloque de primer nivel apuntado por la secuencia  $\{c\}$ , el cual contiene  $S_{\{c\}}$  fuentes internas, de cara a calcular las CBFs se construirá la siguiente matriz:

$$\overline{\overline{W}}_{\{c\}} = \begin{bmatrix} P_{\{c\},1}^{(1)} & \cdots & P_{\{c\},1}^{(N_{PW})} & Q_{\{c\},1}^{(1)} & \cdots & Q_{\{c\},1}^{(S_{\{c\}})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\{c\},N_{\{c\}}}^{(1)} & \cdots & P_{\{c\},N_{\{c\}}}^{(N_{PW})} & Q_{\{c\},N_{\{c\}}}^{(1)} & \cdots & Q_{\{c\},N_{\{c\}}}^{(S_{\{c\}})} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

donde los coeficientes  $P$  son los pesos de las funciones base de bajo nivel cuando el bloque es iluminado por una onda plana y los coeficientes  $Q$  son los mismos pesos pero en el caso de utilizar la fuente interna correspondiente. Esta matriz es factorizada con una SVD de la misma forma que en (3.14) para obtener los pesos de las CBFs de primer nivel.

La generación de CBFs de niveles superiores para problemas de radiación utiliza una estrategia casi idéntica a la utilizada para el primer nivel. Para ello, la matriz a ser factorizada con la SVD para obtener las CBFs en el bloque  $\{b\}$ , es nuevamente de la forma:

$$\overline{\overline{W}}_{\{b\}} = \left[ \overline{\overline{P}}_{\{b\}} \quad \overline{\overline{Q}}_{\{b\}} \right] \quad (4.24)$$

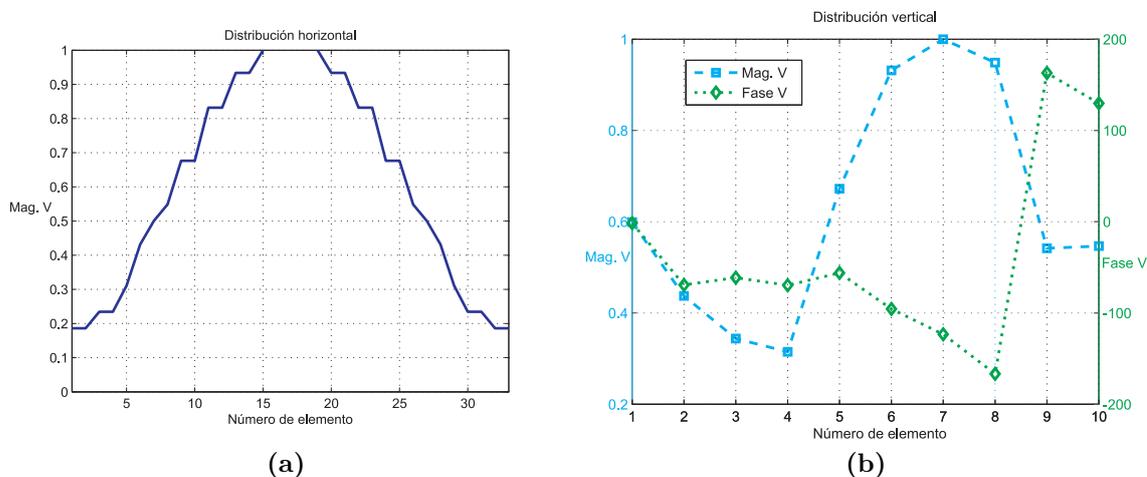
donde la matriz  $\overline{\overline{P}}$  es idéntica a la ya definida en (4.6) y la matriz  $\overline{\overline{Q}}$  mantiene la misma estructura pero en este caso cada columna se corresponde con los coeficientes obtenidos al usar la alimentación correspondiente, siendo de la forma:

$$\overline{\overline{Q}}_{\{b\}} = \begin{bmatrix} Q_{\{b,1\},1}^{(1)} & Q_{\{b,1\},1}^{(2)} & \cdots & Q_{\{b,1\},1}^{(S_{\{b\}})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\{b,1\},N_{\{c,1\}}}^{(1)} & Q_{\{b,1\},N_{\{b,1\}}}^{(2)} & \cdots & Q_{\{b,1\},N_{\{b,1\}}}^{(S_{\{b\}})} \\ Q_{\{b,2\},1}^{(1)} & Q_{\{b,2\},1}^{(2)} & \cdots & Q_{\{b,2\},1}^{(S_{\{b\}})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\{b,B_{\{b\}}\},N_{\{b,B_{\{b\}}\}}}^{(1)} & Q_{\{b,B_{\{b\}}\},N_{\{b,B_{\{b\}}\}}}^{(2)} & \cdots & Q_{\{b,B_{\{b\}}\},N_{\{b,B_{\{b\}}\}}}^{(S_{\{b\}})} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Nuevamente, la SVD de la matriz  $\overline{\overline{W}}_{\{b\}}$  nos permite calcular los coeficientes de las CBFs multinivel.

### 4.4.3. Síntesis de una antena de radar secundario

Para ilustrar el proceso de síntesis anteriormente mencionado, se considera una antena de radar secundario (Secondary Surveillance Radar, SSR). Este tipo de estructuras requiere un lóbulo principal estrecho en acimut para asegurarse de que la



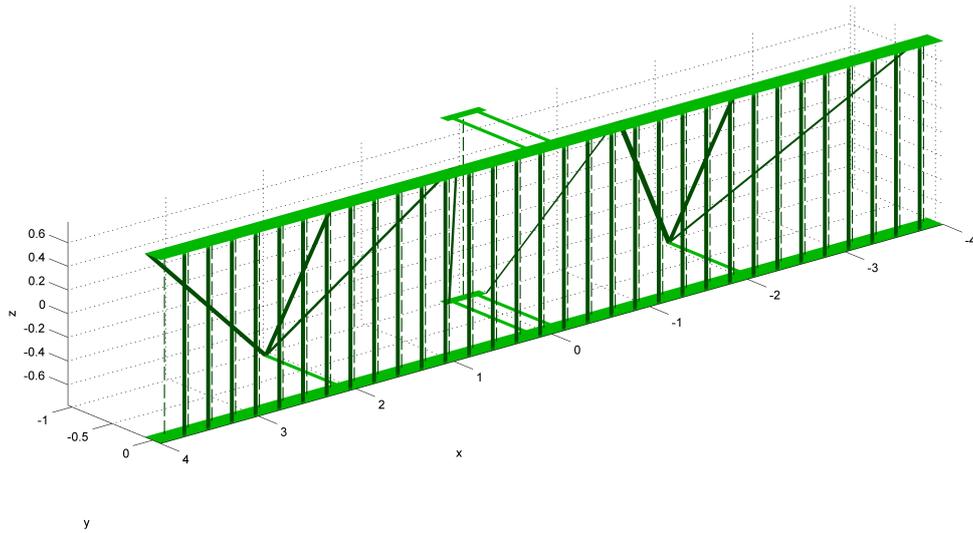
**Figura 4.20:** Excitaciones nominales de la agrupación: (a) distribución horizontal; (b) distribución vertical.

antena no está interrogando a más de un blanco a la vez. El diagrama en elevación se corresponde a un coseno cuadrado en el área de interés para asegurar la misma amplitud del eco mientras el blanco se acerca o aleja a la antenna. Este tipo de antenas habitualmente es situado en posiciones altas para tener una mejor visibilidad. Dada su ubicación, entre los elementos que pueden ser encontrados en las proximidades de la antenna SSR, se pueden citar antenas de radar primario, anemómetros o pararrayos.

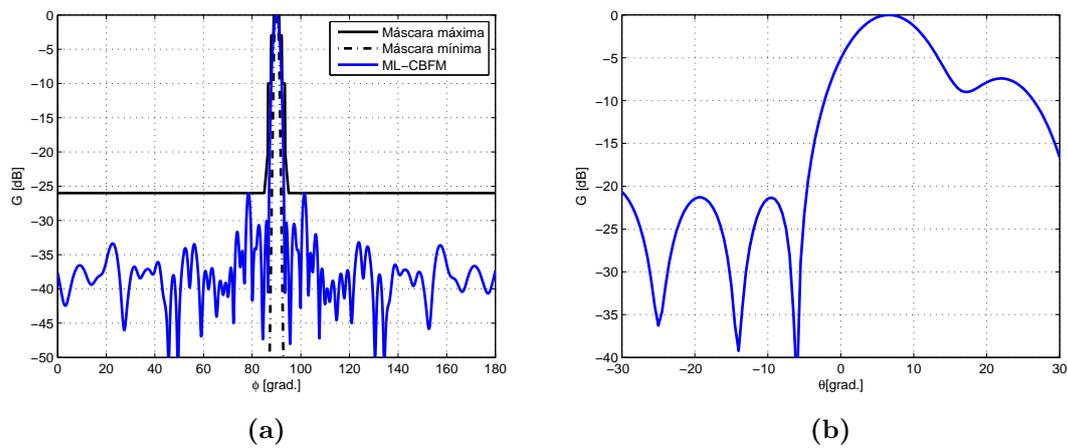
El modelo de antenna escogido se corresponde con el CSL-20L de la empresa CESELSA (actualmente parte de INDRA) con 10 filas y 33 columnas de dipolos de media longitud de onda. La longitud del modelo es de 8 m y la altura de 11 m. La frecuencia de trabajo que se utilizará es de 1030 MHz. Se utilizarán como excitaciones nominales aquellas calculadas en [LH97]. Esta alimentación es modelada como una distribución separable para cada dirección. Los voltajes nominales son mostrados en la figura 4.20 (la distribución vertical tiene fase cero y su representación es omitida).

El modelo de geometría con el sistema de sujeción es mostrado en la figura 4.21. Los diagramas de radiación obtenidos con las excitaciones nominales se encuentran recogidos en la figura 4.22. Se adjuntan también las máscaras utilizadas en [LH97] para el diagrama en acimut observándose que el diagrama obtenido satisface los requisitos.

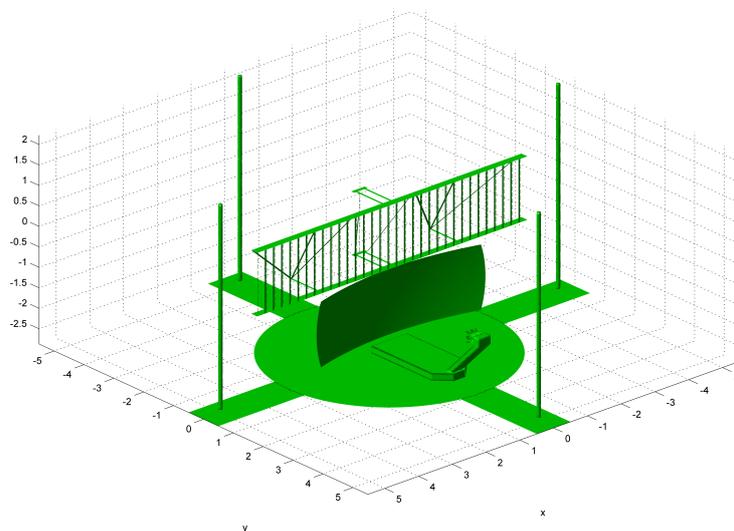
A continuación se incluye el entorno más próximo a la antenna tal y como se refleja en la figura 4.23. El entorno incluye la base de soporte, un radar primario y varios pararrayos. El diagrama de radiación más crítico y estricto es el barrido en acimut, y el proceso de síntesis se llevará a cabo tan solo para este corte. No



**Figura 4.21:** Agrupación de elementos antenas junto con su sistema de sujeción.



**Figura 4.22:** Diagramas de radiación para la antena SSR con su sistema de sujeción:  
(a) acimut; (b) elevación.



**Figura 4.23:** Antena SSR con un entorno compuesto por la base de sujeción, un radar primario y cuatro pararrayos.

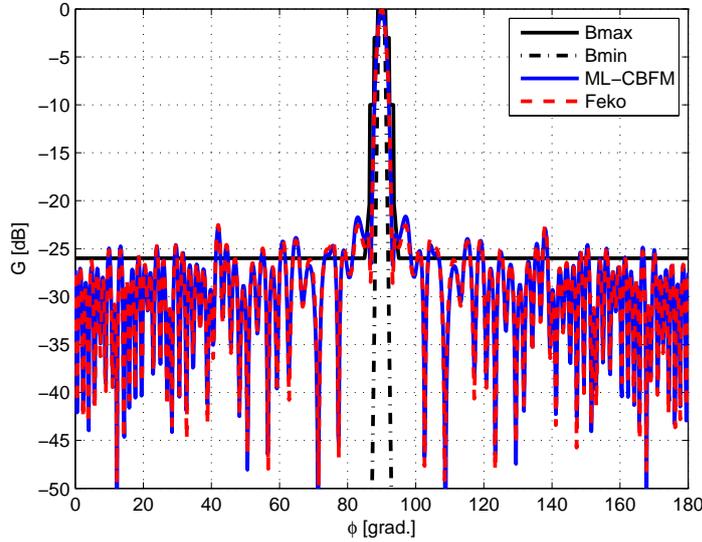
obstante, el procedimiento aquí utilizado es fácilmente generalizable para realizar la síntesis de varios cortes del diagrama de forma simultánea. Además, se considerará tan solo la posición del radar SSR en la que éste incide de forma directa sobre uno de los pararrayos ya que este constituye uno de los peores casos posibles. No obstante, el proceso puede ser repetido para varias posiciones con el objetivo de evaluar la idoneidad de las alimentaciones obtenidas para cada posición.

El diagrama de radiación modificado por el entorno se muestra en la figura 4.24 donde se puede observar como debido a los obstáculos presentes ya no se cumplen los requisitos de la máscara.

De cara a aplicar el ML-CBFM la geometría se descompone en seis bloques: uno para la antena SSR completa, otro para el reflector del radar primario y otros cuatro para modelar el resto de manera simétrica. La generación de de las CBFs es llevada a cabo iluminando los bloques con 6.720 ondas planas y filtrando las corrientes obtenidas con un umbral para la SVD de  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$  para el primer y segundo nivel, respectivamente.

La geometría es discretizada con 139.762 funciones base RWG que son comprimidas a 20.259 después de la primera aplicación del CBFM y a 13.312 después de la segunda.

Para el proceso de síntesis se emplea el esquema iterativo descrito en [Aye07a]



**Figura 4.24:** Diagrama de radiación en acimut de la antena SSR con el entorno utilizando las excitaciones nominales.

con la excepción de que la matriz  $\overline{G}$  ha sido calculada con el método anteriormente mencionado en lugar de usando máquinas de vectores soporte. El método converge a un diagrama de radiación que todavía contiene dos picos de 1,5 dB por encima del nivel marcado por la máscara después de cinco iteraciones por lo que se ha realizado una segunda optimización empleando un algoritmo de *Simulated Annealing* empleando como función de coste el área que recae en el exterior de la máscara. Las alimentaciones así obtenidas se encuentran recogidas en la figura 4.25.

El diagrama de radiación obtenido satisface los requisitos impuestos por la máscara salvo por un diferencia máxima de 0,37 dB como puede verse en la figura 4.26. Los diagramas de radiación han sido validados nuevamente con el software comercial Feko encontrándose una muy buena concordancia.

## 4.5 Conclusiones

En este capítulo se ha extendido el CBFM convencional mediante su aplicación recursiva. La principal ventaja de esta estrategia es la mayor tasa de compresión que permite alcanzar gracias al uso de bloques de grandes dimensiones. Estas tasas de compresión no resultan en errores apreciables en campo lejano aunque sí existe una degradación en la estimación de las corrientes cuando se compara con la versión de un solo nivel. Además, debido a las operaciones algebraicas extra (SVD, factorización LU, etc.) el método sólo es rentable para problemas electricamente grandes

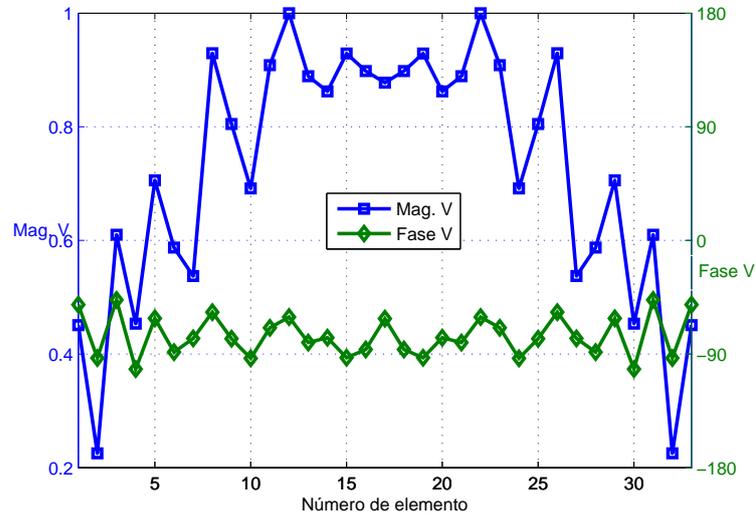


Figura 4.25: Excitaciones sintetizadas para la antena SSR con el entorno.

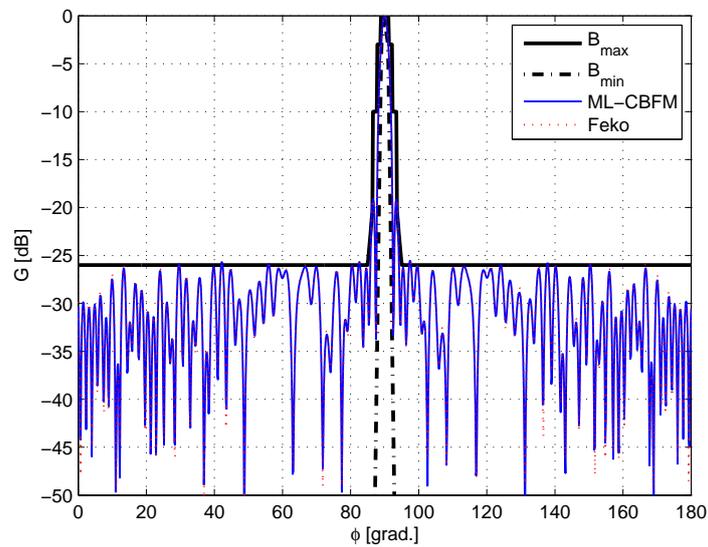


Figura 4.26: Diagrama de radiación en acimut para la antena SSR tras el proceso de síntesis en presencia del entorno.

---

donde los tiempos de la versión mononivel están dominados por la resolución del sistema de ecuaciones

El método presenta una fácil paralelización lo cual permite aligerar el tiempo de ejecución en el caso de analizar problemas de grandes dimensiones. La estrategia seguida para paralelizar cada una de las etapas del ML-CBFM está basada en una descomposición funcional similar a la propuesta anteriormente para el CBFM de un solo nivel.

Como ejemplo de aplicación se ha mostrado la síntesis de grandes agrupaciones en entornos complejos. Esta aplicación hace uso de la habilidad del ML-CBFM para resolver múltiples excitaciones de forma simultánea y sin necesidad de iteración.